

Propagación de ondas acústico-gravitacionales en el interior solar

Andrés García-Serra Romero

Master de Astrofísica, Universidad de la Laguna
e-mail: alu0101451923@ull.edu.es

November 29, 2023

Introduction

La heliosismología es una disciplina bastante moderna dentro del desarrollo científico. Surgió en la década de los 60 cuando las oscilaciones solares fueron descubiertas. En 1962 se descubrieron oscilaciones de 5 minutos de periodo en la emisión de ciertas líneas espectrales del Sol, las cuáles se consideraban aparentemente compensadas por el transporte de energía.

Hoy en día sabemos mucho más sobre estas oscilaciones observadas en la emisión Solar y las estudiamos como consecuencia de vibraciones acústico-gravitacionales resonantes de simetría esférica que se propagan en el interior solar.

Este trabajo se basa en el estudio de las ondas que se encuentran atrapadas en el interior solar oscilando entre dos capas, una interior y una exterior. Estas ondas son detectables gracias a las colas evanescentes que llegan a capas superiores y son observadas por efecto doppler.

Dentro de las ondas que se propagan en interiores estelares, destacan dos tipos:

- **Modos p:** Ondas que vibran a una frecuencia por encima de la frecuencia de corte ($\omega > \omega_c$) y cuya fuerza restauradora es la presión.
- **Modos g:** Ondas que vibran a una frecuencia inferior a la frecuencia de Brunt-Väisälä ($\omega_c < N$) y cuya fuerza restauradora es la gravedad.

También existen ondas evanescentes, que no tienen propagación vertical y cumplen $k_{zr}^2 = 0$.

Para el estudio de estas ondas tomaremos un modelo de interior solar adjunto en un fichero con datos de la evolución de la temperatura (T), presión (P) y densidad (ρ). Con estas magnitudes podemos calcular algunas más que serán de gran valor para el estudio, como la

velocidad del sonido en función de z (c_s), la escala de alturas (H), la frecuencia de corte (ω_c) y la propia frecuencia de Brunt-Väisälä, mencionada anteriormente (N). Estas expresiones se presentan en (1).

$$\begin{aligned} c_s^2 &= \gamma P_0 / \rho_0 \\ H &= P_0 / g \rho_0 \\ \omega_c &= c_s / 2H \\ N^2 &= g(\gamma - 1) / H\gamma \end{aligned} \quad (1)$$

Con estas expresiones podremos despejar y calcular los resultados de la ecuación de dispersión de estas ondas acústico-gravitacionales, la cual se presenta en la ecuación 2.

$$\omega^4 - \omega^2 [c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2] + c_s^2 N^2 k_x^2 = 0 \quad (2)$$

En esto consistirá el trabajo, en la resolución de esta ecuación de dispersión para distintos casos y en el estudio de las trayectorias de las diferentes ondas que se pueden dar en el interior solar.

1 Metodología

La resolución de la relación de dispersión presentada en la ecuación (2) para ω^2 da lugar a la ecuación (3).

$$\begin{aligned} F(x, z, k_x, k_z) &= \frac{c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2}{2} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{[c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2]^2 - 4c_s^2 N^2 k_x^2} - \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Cabe destacar que el signo positivo de esta expresión se corresponde con las ondas rápidas, o modos p y el signo negativo con las ondas lentas o modos g, ambas

explicadas anteriormente.

Esta ecuación la resolveremos usando el método de la Eikonal. Esto podemos hacerlo asumiendo que las variables varían poco en distancias comparables con la longitud de onda. Lo que nos deja las derivadas totales de las 4 variables principales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dk_x}{ds} &= -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{dk_z}{ds} &= -\frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{dx}{ds} &= \frac{\partial F}{\partial k_x} \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{\partial F}{\partial k_z}\end{aligned}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones utilizaremos el método de integración numérica de Runge-Kutta de cuarto orden, lo que nos hará llegar finalmente a la representación de la variación de z respecto de x y viceversa.

En primer lugar obtendremos las derivadas analíticas de F respecto a cada variable necesaria y una vez tengamos estas expresiones podremos desarrollar el Runge-Kutta. Este último se encuentra explicado en la ecuación (4), donde hemos tomado nuestro sistema de ecuaciones diferenciales como la función f .

$$\begin{aligned}K_1 &= f(x_i, y_i) \\ K_2 &= f(x_i + h/2, y_i + K_1 h/2) \\ K_3 &= f(x_i + h/2, y_i + K_2 h/2) \\ K_4 &= f(x_i + h, y_i + K_3 h) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 3K_3 + 4K_4)\end{aligned}\quad (4)$$

Para poder realizar este paso tendremos que pararnos detenidamente en la elección de las condiciones iniciales para el cálculo de cada trayectoria. Debemos imponer que las ondas correspondientes a los modos P siempre tengan una frecuencia superior a la de corte ($\omega > \omega_c$) mientras que las ondas correspondientes a los modos G siempre tendrán que tener una frecuencia inferior a la frecuencia de Brunt-Väisälä ($\omega < N$).

Para los modos P tendremos que calcular el valor de Z para el que $\omega = \omega_c$ en cada una de las frecuencias que se quieren estudiar. Con este valor de Z sabemos que el valor inicial para cada una de estas frecuencias tiene que ser necesariamente menor, puesto que ω_c aumenta con Z . De esta forma nos aseguramos que en este momento inicial las ondas estarán en una Z donde $\omega > \omega_c$. Así, las ondas oscilarán desde este valor de Z elegido y el valor de Z

Table 1: Valores de Z elegidos como *Low Turning Point* para cada modo, eligiendo un valor menor a todos los mínimos para los modos P y mayor a todos los máximos para modos G.

	ν [mHz]	Z [km]	Z_{LTP} [km]
Modos P	2	-2533	
	2.5	-1205	
	3	-506	-5330
	3.5	-203	
	5	169	
Modos G	2	-2370	
	2.5	-1088	379
	3	-412	
	3.5	-156	

para el que $\omega = \omega_c$, también llamado punto de reflexión.

Para los modos G haremos algo muy similar. Sin embargo en este caso queremos encontrar el valor de Z para el cual $\omega = N$ y, puesto que la condición para este caso (mencionada anteriormente) es $\omega < N$, impondremos la condición inicial para la altura Z de que sea mayor que la calculada. De esta forma nos aseguramos de que para esa Z la frecuencia de corte será menor que la frecuencia de Brunt-Väisälä. Así, las ondas oscilarán entre el valor seleccionado de Z y el punto de reflexión, donde ambas frecuencias coinciden.

En la Tabla 1 se muestran los valores de Z para los que las frecuencias coincidían con la frecuencia de corte, para los modos P, y con la frecuencia de Brunt-Väisälä, para los modos G.

2 Resultados y discusión

En este apartado del trabajo mostramos los resultados de la integración de los caminos que recorren las diferentes ondas dependiendo de su frecuencia para la misma altura inicial (Z_{LTP}). Posteriormente hemos calculado también las trayectorias de las ondas de 2.5 mHz para diferentes alturas. Este proceso se ha hecho para las ondas de modo P y las de modo G.

2.1 Ondas tipo P

En primer lugar representamos el recorrido de las ondas de frecuencias 2, 2.5, 3, 3.5 y 5 mHz. Para estos casos, como hemos explicado anteriormente se ha impuesto una condición inicial de $Z = -5330$ y se han utilizado 100000 pasos de integración en Runge-Kutta. El resultado se presenta en la Figura 1.

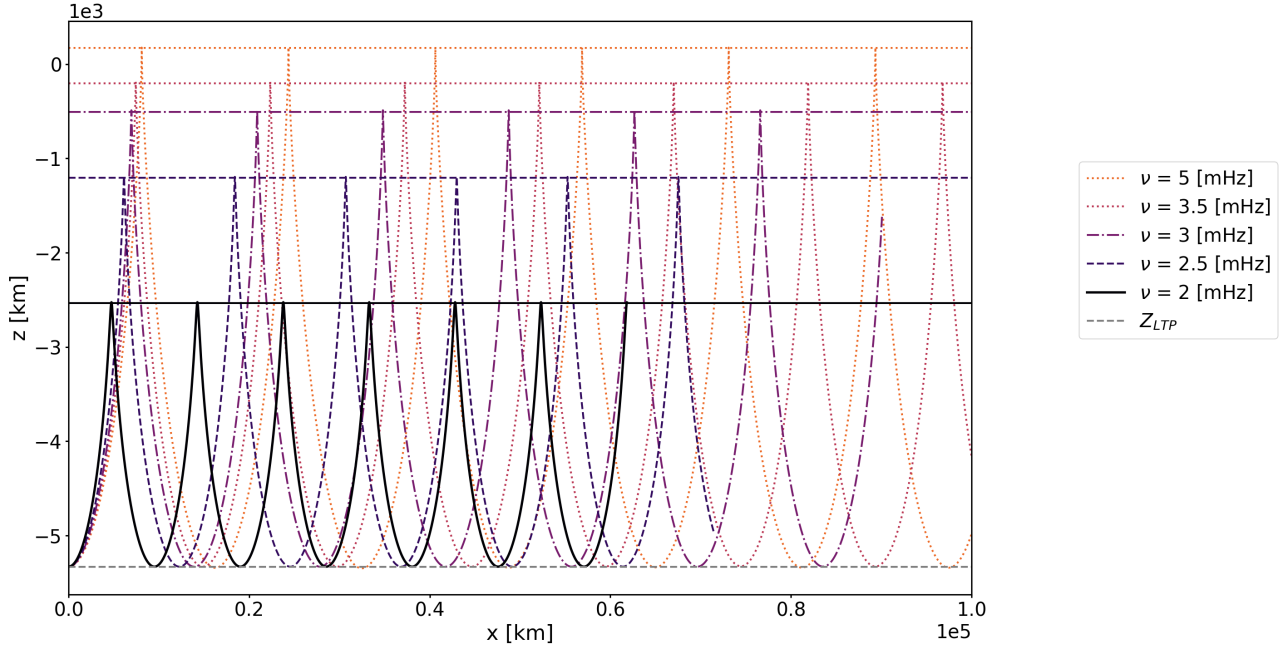


Figure 1: Propagación de ondas modo P en el interior solar con un $Z_{LTP} = -5330$ para diferentes frecuencias (2, 2.5, 3, 3.5, 5). En horizontal están marcadas las coordenadas Z que constituyen el punto de reflexión para cada frecuencia ($\omega = \omega_c$), las cuales están recogidas en la Tabla 1.

Podemos ver en primer lugar como las ondas de menor frecuencia terminan antes su trayectoria para el mismo tiempo de integración, esto se debe a que son notoriamente más lentas. Por ejemplo, podemos ver la onda de 2 mHz (línea continua negra) que termina su trayectoria para el mismo tiempo de integración que el resto entorno a 0.62×10^5 km, mientras que ondas de mayores frecuencias que son más rápidas lo hacen por encima de 1×10^5 km.

Podemos también analizar un desfase de estas ondas debido a la diferenciación de frecuencias entre ellas y que cada una de ellas tiene un punto de reflexión a Z distintas. Esto último se debe a que el valor de Z en el que $\omega = \omega_c$ es distinto para cada frecuencia, siendo mayor para frecuencias mayores y menor para menores.

Así mismo, hemos representado en la Figura 2 las trayectorias de frecuencia 2.5 mHz para distintos valores iniciales de Z_{LTP} . Podemos ver un efecto similar de cuáles de estas trayectorias tienen menos recorrido que otras. En este caso las ondas de misma frecuencia que comienzan en valores de Z más altos serán más lentas que las que empiezan en valores bajos.

En este caso sin embargo las trayectorias enviadas desde distintos valores de Z tienen todas el mismo punto de reflexión puesto que este valor, como hemos explicado anteriormente, depende únicamente de la frecuencia de la onda. Cabe destacar que los valores de Z para los que se han iniciado las trayectorias

no son arbitrarios. Se han calculado tomando puntos equidistantes entre el menor valor de Z posible dentro del vector del modelo y el valor más cercano a la altura que iguala la frecuencia de corte, siendo este último valor el máximo valor que permite trayectorias coherentes.

2.2 Ondas tipo G

Para esta parte del trabajo hemos tomado una solución distinta a las derivadas parciales, como hemos explicado en los apartados anteriores. Esta consiste en la ecuación (3) usando el signo negativo. Con esto podemos de nuevo calcular las derivadas parciales pertinentes y desarrollar el método de integración.

Como hemos explicado de forma bastante clara en la metodología, para este caso también hemos impuesto que los valores de Z iniciales cumplieran que la frecuencia fuera menor que la de Brunt-Väisälä, pudiendo generar ondas de este modo G.

En la Figura 3 hemos representado estos caminos, y en ella podemos fijarnos como para estos modos las trayectorias tienen sentido opuesto a las planteadas en el caso de los modos P. Se trata de ondas que comienzan en un Z_{LTP} superior y que decaen hasta valores mínimos de puntos de reflexión, los cuales corresponden con los valores de Z que igualan la frecuencia de cada onda a la

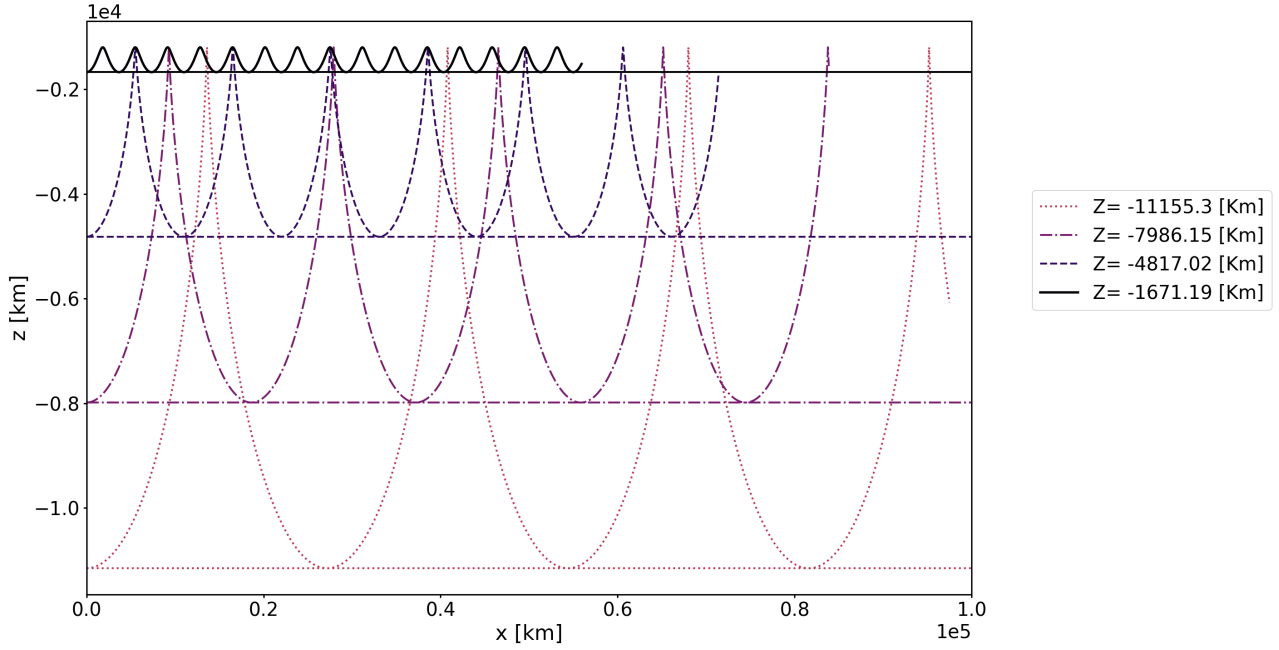


Figure 2: Propagación de onda modo P para diferentes valores de Z_{LTP} . En horizontal están marcadas las coordenadas Z que constituyen el *Low Turning Point* de cada trayectoria ($\omega = \omega_c$), los valores de Z utilizados se presentan en la leyenda.

de Brunt-Väisälä ($\omega = N$).

Además para este caso también puede verse como la onda de menor frecuencia es más lenta que el resto, aunque al ser un modo G tiene un punto de reflexión más lejano al Z_{LTP} que el resto. Aumentando la altura Z de este punto de reflexión para frecuencias mayores.

En este caso hemos utilizado una integración del método de Runge-Kutta con 1 millón de pasos, debido a que se trata de ondas mucho más lentas. También hemos decidido no integrar para la onda de 5 mHz, lo cual suponía mucho más tiempo de computación. La Z_{LTP} que hemos utilizado es mayor que todas las presentes en la tabla 1 para modos G y tiene un valor de 379 km.

Finalmente en la Figura 4 podemos ver representadas las trayectorias de una onda de 2.5 mHz para distintos valores iniciales de Z indicados en la leyenda. Nuevamente estos valores de Z han sido calculados como equidistantes entre el mayor valor del vector de Z y un valor por encima del mínimo para que las ondas tengan trayectorias coherentes.

Las trayectorias nuevamente son más lentas en el caso de Z más altos, siendo más rápidas para Z más pequeños. Puede observarse nuevamente como todas las trayectorias tienen el mismo punto de reflexión, dependiente únicamente de la frecuencia de la onda,

que no varía.

3 Conclusiones

Las conclusiones del trabajo pueden resumirse en cuatro puntos:

- Hemos conseguido resolver el sistema de ecuaciones siguiendo una solución del tipo Eikonal y apoyándonos de un método de integración numérica como es RK4.
- Hemos obtenido en las figuras 1 y 2 las trayectorias de ondas correspondientes a modos P para distintas frecuencias y misma Z_{LTP} y para la misma frecuencia y distintas Z_{LTP} .
- Además, hemos ampliado el cálculo de trayectorias incluyendo los modos G, llevando a cabo las mismas representaciones pero aplicando distintas ecuaciones e imponiendo otras condiciones iniciales. (Figuras 3 y 4)
- Finalmente, destacar que la interpretación de estas figuras es coherente con lo estudiado y sigue la línea de los modelos solares actuales.

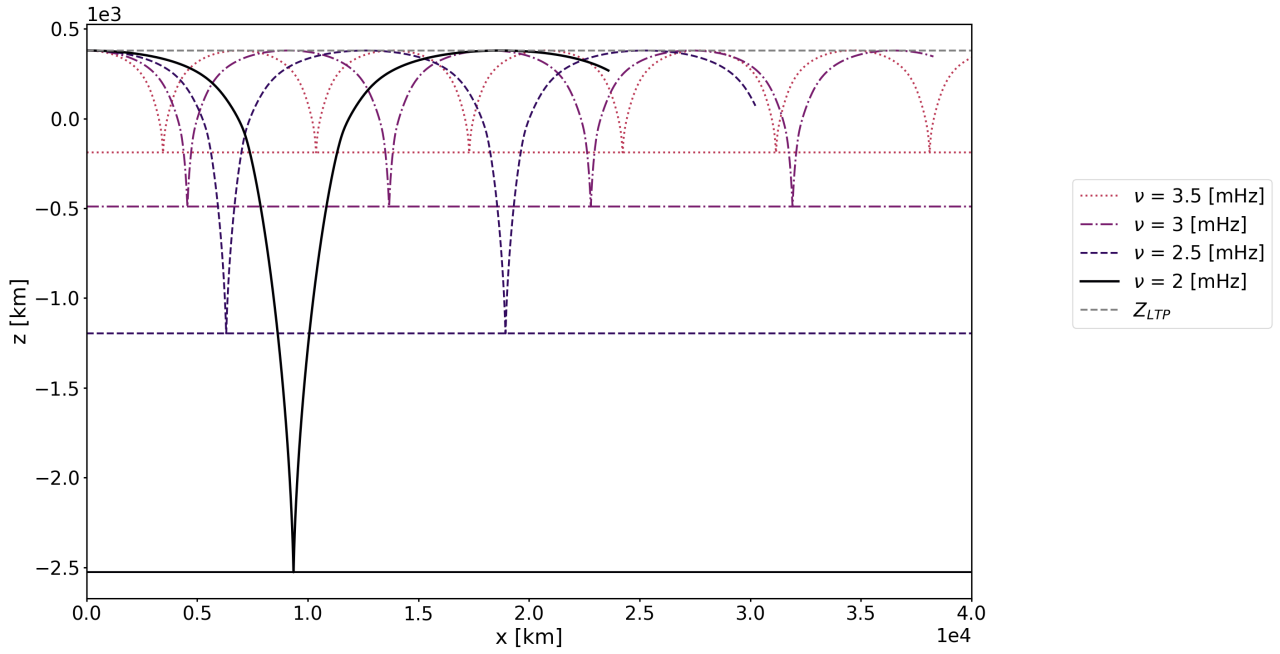


Figure 3: Propagación de ondas modo G en el interior solar con un $Z_{LTP} = 379$ km para diferentes frecuencias (2, 2.5, 3, 3.5). En horizontal están marcadas las coordenadas Z que constituyen el punto de reflexión para cada frecuencia ($\omega = N$), las cuales están recogidas en la Tabla 1.

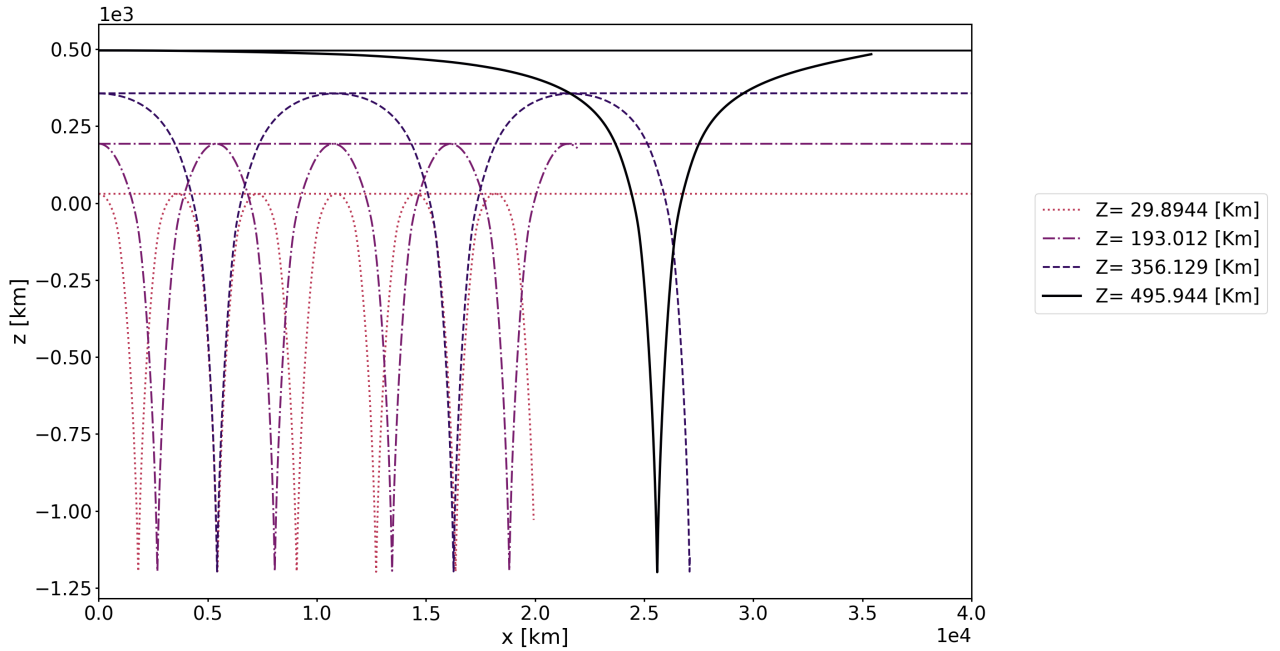


Figure 4: Propagación de onda modo G para diferentes valores de Z_{LTP} . En horizontal están marcadas las coordenadas Z que constituyen el *Low Turning Point* de cada trayectoria ($\omega = N$), los valores de Z utilizados se presentan en la leyenda.