Problem J5: Connecting Territories

Problem Description

Ava is playing a strategic game on a grid of tiles. Each tile has an associated cost. When the costs of the tiles are read from left to right, starting with the first row, a repeating pattern of the first M positive integers in increasing order is revealed: $1, 2, 3, \ldots, M, 1, 2, 3, \ldots, M, 1, 2, 3, \ldots$. In this pattern, M represents the maximum cost of a tile. In the grid of tiles shown, M is equal to 5.

1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5

Ava needs to purchase one tile in each row in order to make a connecting path from the upper territory (above the first row of tiles) to the lower territory (below the last row of tiles). The first tile purchased must be in the first row. Each subsequently purchased tile must share either an edge or a corner with the tile purchased previously. In the grid of tiles shown, the cost of Ava's connecting path is 9.

Upper Territory

1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5

Lower Territory

Given a grid of tiles, your job is to determine the minimum cost of a connecting path between the upper and lower territories.

Input Specification

The first line of input contains a positive integer, R, representing the number of rows in the grid. The second line contains a positive integer, C, representing the number of columns in the grid. The third line contains a positive integer, M where $M \leq 100\,000$, representing the maximum cost of a tile.

The following table shows how the available 15 marks are distributed:

Marks	Description	Bounds
3	There are two rows and at most ten columns.	$R = 2$ and $C \leq 10$
8	There are at most ten rows and at most ten columns.	$R \leq 10$ and $C \leq 10$
2	There are at most 100 rows and at most 100 columns.	$R \leq 100$ and $C \leq 100$
2	The grid may be very large.	$R \leq 20\,000$ and $C \leq 20\,000$

Output Specification

Output the positive integer, P, which is the minimum cost of a connecting path between the upper and lower territories.

La version française figure à la suite de la version anglaise.

Sample Input

3
5
7

Output for Sample Input

6

Explanation of Output for Sample Input

The cost of each tile is shown. The sequence of tiles that Ava should purchase to minimize the cost of a connecting path is highlighted in green.

Upper Territory				
1	2	**3**	4	5
6	7	1	**2**	3
4	5	6	7	**1**
Lower Territory				

La version française figure à la suite de la version anglaise.

Problème J5 : Jonction de territoires

Énoncé du problème

Ève joue à un jeu de stratégie sur une grille de cases. Un coût est associé à chaque case. La lecture de gauche à droite et de haut en bas du coût des cases en commençant par la case en haut à gauche révèle une suite finie croissante des M premiers entiers strictement positifs qui se répète comme suit : $1, 2, 3, \ldots, M, 1, 2, 3, \ldots, M, 1, 2, 3, \ldots$ Dans ce schéma, M représente le coût maximal d'une case. Dans l'illustration de la grille de cases, M est égal à 5.

1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5

Ève doit acheter une case dans chaque rangée afin de créer un chemin de jonction entre le territoire du haut (au-dessus de la première rangée de cases) et le territoire du bas (en dessous de la dernière rangée de cases). La première case achetée doit se trouver dans la première rangée. Ensuite, chaque case achetée doit partager un bord ou un coin avec la case précédente. Dans l'illustration de la grille de cases, le coût du chemin de jonction d'Ève est de 9.

Territoire du haut							
1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5
Territoire du bas							

À l'aide de la grille de cases, votre tâche consiste à déterminer le coût minimum d'un chemin de jonction entre le territoire du haut et le territoire du bas.

Précisions par rapport aux données d'entrée

La première ligne de données d'entrée contient un entier strictement positif, R, représentant le nombre de rangées de la grille. La deuxième ligne de données d'entrée contient un entier strictement positif, C, représentant le nombre de colonnes de la grille. La troisième ligne de données d'entrée contient un entier strictement positif, M ($M \leq 100\,000$), représentant le coût maximal d'une case.

Le tableau suivant détaille la répartition des 15 points disponibles.

Points	Description	Bornes
3	Il y a deux rangées et au plus dix colonnes.	$R = 2$ et $C \leq 10$
8	Il y a au plus dix rangées et au plus dix colonnes.	$R \leq 10$ et $C \leq 10$
2	Il y a au plus 100 rangées et au plus 100 colonnes.	$R \leq 100$ et $C \leq 100$
2	La grille peut être très grande.	$R \leq 20\,000$ et $C \leq 20\,000$

English version appears before the French version

Précisions par rapport aux données de sortie
Les données de sortie devraient contenir un entier strictement positif, P, représentant le coût minimum d'un chemin de jonction entre le territoire du haut et le territoire du bas.

Données d'entrée
3
5
7

Données de sortie
6

Justification des données de sortie
Le coût de chaque case est indiqué. Les cases qu'Ève doit acheter pour minimiser le coût de son chemin de jonction sont surlignées en vert.

Territoire du haut				
1	2	**3**	4	5
6	7	1	**2**	3
4	5	6	7	**1**
Territoire du bas				