

9.2 / 10

111-2 時間序列分析 期末書面報告

107508006 歐語四 陳葳芃 108405056 廣告四 楊岳鎔

修正部分口頭報告部分：

- (1)將季節性 PQ order 降為(1,1)，並增加 pq order，重新挑選模型
- (2)沒有同時做季節與一般差分，因做季節應就有一般差分效果，避免過度差分

報告大綱

一、研究目的

二、資料介紹

Time series、ACF、PACF

三、原始資料探索

時間序列觀察 Raw data ACF PACF 一階差分後的比較

四、**不使用差分**來 de-trend 進行 order 選取

參數估計 Estimation- 最高次係數是否異於 0? 是否接近 1?

模型診斷 Model diagnostic- 3 方法

模型修正 Model refinement?

五、**使用差分**來 de-trend 進行 order 選取

參數估計 Estimation- 最高次係數是否異於 0? 是否接近 1?

模型診斷 Model diagnostic- 3 方法

模型修正 Model refinement?

六、**使用季節性差分**來 de-trend 進行 order 選取

參數估計 Estimation- 最高次係數是否異於 0? 是否接近 1?

模型診斷 Model diagnostic- 3 方法

模型修正 Model refinement?

七、模型選擇 (季節性差分)

八、預測 (季節性差分)

九、**使用 3 次方 regression** 來 de-trend 進行 order 選取(含季節性差分)

十、模型選擇 (3 次方 regression)

十一、 預測 (3 次方 regression)

十二、 結論

十三、 附錄——參考文獻及資料來源

一、研究目的

台灣逐漸邁入高齡化社會，也鑒於此分析台灣出生人口時間序列的趨勢，探究出生人口的變遷與影響因素對於國家人口政策制定事關重要。

因此，我們想要瞭解每月出生人口的時間變動的關聯性或週期性。同時，深入探討背後的社會、文化和經濟背景，以促進找出有意義的資訊來給予我們的政府相關施政方針的建議。

二、資料介紹

本次報告研究的資料集為台灣月出生人口統計，來源自中華民國統計資訊網——總體統計資料庫，其中紀錄自 2000 年 1 月以來每月出生人數，資料目前更新至 2023 年 3 月。樣本個數為 279 筆，變數個數為 3 個。

表 2.1 資料型態及前六筆資料

	time	amount	month
類別	時間 time	數值 numerical	類別 categorical
說明	年月份	出生人數	月份
	2000-01-01	24042	1
	2000-02-01	22263	2
	2000-03-01	26259	3
	2000-04-01	22587	4
	2000-05-01	25019	5
	2000-06-01	22937	6

三、原始資料探索

首先，我們先將資料原始 Time series 給畫出來如 Figure.1，可以看出整體生育人數是在往下降的，接著我們好奇哪些月份生育率會特別高？而哪些月份又特別低？又或者是哪些異於常理的值出現在我們的資料及當中。

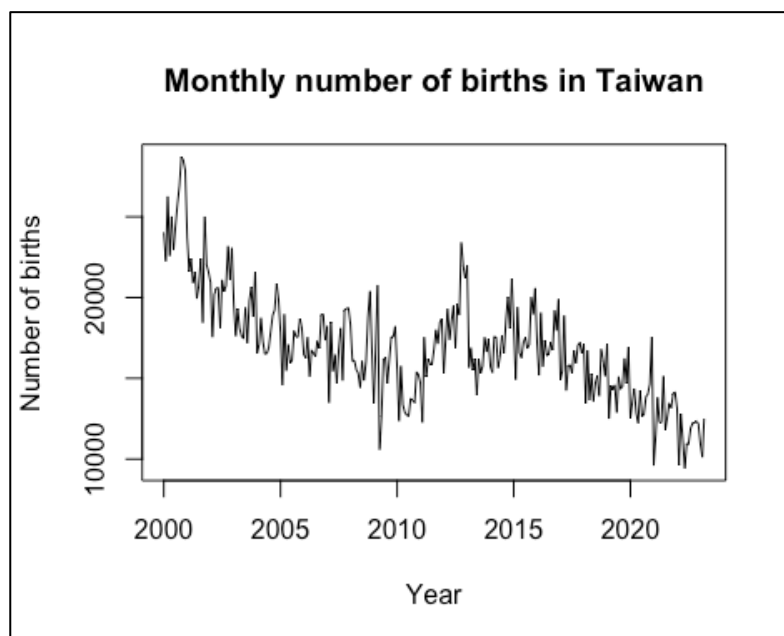


圖 3.1 原始出生人數時間序列圖

我們使用 `ggplot` 將每個點標上月份，如 Figure.2 所示，此時可以發現每年的相對極大值幾乎都是發生在 10、12 月，故將生育率高峰的此 2 個月特別用顏色標注起來。除此之外，我們也可以發現 2 個異常之處：

- (1) 2009 年 3 月為一個分水嶺，4 月開始急遽下降且 2010 年整年生育率呈現一個低迷的狀況
- (2) 2012 年 生育率出現拉升的情況，違反剛開始觀測的長期觀測趨勢

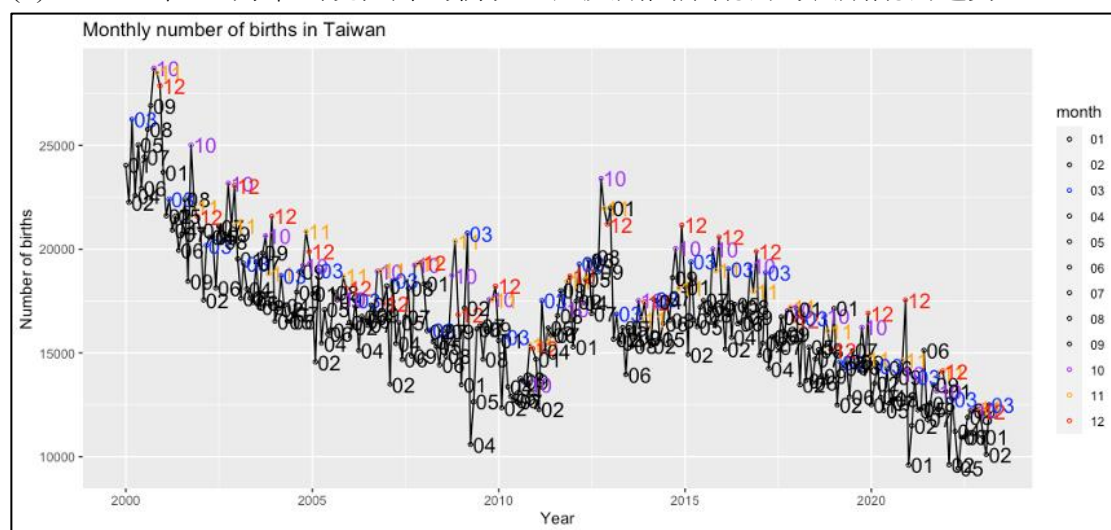


圖 3.2 使用 `ggplot` 將時間序列圖標注月份

三、原始資料探索

細究第 1 點原因，我們想到有可能是早些年發生的全球金融海嘯風暴，並透過論文來驗證假設。根據戴庭玉於 2011 在陽明交通大學的研究論文《美國 2007 年至 2009 年引發環球金融風暴的制度因素》第七頁指出貨幣流通速度與 2008 年第三季來到最高，象徵市場蕭條來臨。另一方面，王英傑於 2015 年中央大學完成的研究論文《景氣循環對婚育行為之影響》第八頁提及：『如過人們認為景氣蕭條持續，那對將來預期財富是下降的，.....，造成生育率下降。』

加上常理來說預產期懷胎 10 月左右的先備知識來看，若 2008 年第三季停止懷孕剛好會對應上 2009 年 3 月，也就是說以上兩篇論文都可以佐證該出生人口下降分水嶺的很好原因。

關於第 2 點，2012 年生育率不但恢復，而且更甚經濟蕭條前的數字。根據時任行政院政務委員薛承泰的採訪表示，政府於該段時期前的虎年就開始鼓勵結婚生育，並鼓吹年輕夫婦民國 99 年「愛情久久」年訂定婚約的風潮、生個民國百年寶寶或再下個年度生個龍寶寶，表示應是生育率竄高原因之一。

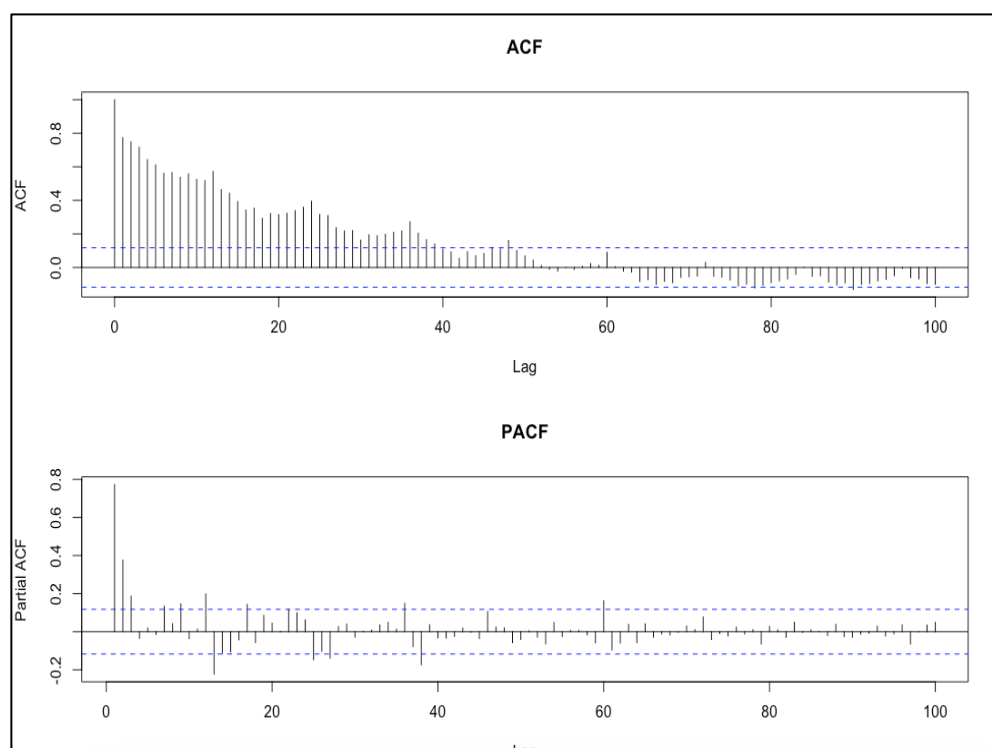


圖 3.3 原始出生人數 ACF、PACF 圖

三、原始資料探索

探索資料的時間序列圖結束後，藉由圖 3.3 原始資料 ACF PACF 判斷出我們此筆資料，ACF 值下降的不算緩慢，但同時也沒有明顯的快速下降，關於去除趨勢的一項抉擇——要不要差分，則是在經驗法則判斷的邊緣。因此我們決定兩種方式都進行，最後再從中選取比較好的模型進行預測。

除了藉由圖 3.3 判斷之外，我們亦透過 ADF 檢定，來檢驗此資料是不是屬於 stationary。此檢定虛無假設為此序列不是 stationary，對立假設為此序列為 stationary。以下為檢定原始資料的結果：

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: data
```

```
Dickey-Fuller = -3.6269, Lag order = 6, p-value = 0.03096
```

```
alternative hypothesis: stationary
```

根據檢定結果，給定 $\alpha=0.05$ 的情形下，我們可以拒絕虛無假設並宣稱此筆資料屬於 stationary。

四、不進行差分直接來進行 order 選取

參考圖 3.3 的結果，及前面所做的 ADF test，判斷 stationary 狀況。

【Order 選取與參數估計】

初步判斷：具有週期為 12 的季節性、ACF 視 tails off 或 cuts off at lag=4 or 5、PACF cuts off at lag=2, 3 or 5；ACF 前後有約遞減的趨勢，非季節性部分考慮 AR 最多取到 4 or 5。

修正嘗試：為了不讓季節性的 order 取太大，將季節性 P、Q 都取 1，並以加大非季節性 order 的選取作為替代。可由表 4.1 看見季節性部分(1,0,1)，參數估計均有符合標準（明顯異於 0、沒有接近 1），而加入非季節性部分則是 SARIMA (0,0,4)x(1,0,1)₁₂、SARIMA (0,0,5)x(1,0,1)₁₂ 在季節性 AR1 會很靠近 1，但仍先通過進行診斷。

表 4.1 模型選取與其相對應參數係數(不差分)

	AR 最高	MA 最高	Sar1	Sar2	Sar3	Sar4	Sar5
SARIMA(0,0,0)x(4,0,0)₁₂			0.7413	0.1331	0.1874	-0.1669	
s.e			0.0654	0.0820	0.0804	0.0687	
SARIMA(0,0,0)x(5,0,0)₁₂			0.7303	0.1535	0.1972	-0.1201	-0.0741
s.e			0.0657	0.0837	0.0805	0.0812	0.0693
SARIMA(0,0,0)x(1,0,0)₁₂			0.8622				
s.e			0.0384				
SARIMA(0,0,0)x(2,0,0)₁₂			0.7272	0.1721			
s.e			0.0645	0.0679			
	AR 最高	MA 最高	Sar1	Sar2	Sma1		
SARIMA(0,0,0)x(1,0,1)₁₂			0.9240		-0.1998		
s.e.			0.0302		0.0718		
SARIMA(0,0,0)x(2,0,1)₁₂			0.8660	0.0527	-0.1475		
s.e.			0.2151	0.1927	0.2089		

表 4.2 模型選取與其相對應參數係數(不差分)

	AR 最高	MA 最高	Sar1		Sma1		
SARIMA (0,0,4)x(1,0,1)₁₂		0.4046	0.9514		-0.5485		
s.e.		0.0537	0.0231		0.0765		
SARIMA (0,0,5)x(1,0,1)₁₂		0.2250	0.9584		-0.6240		
s.e.		0.0639	0.0213		0.0755		

四、不進行差分直接來進行 order 選取

SARIMA (1,0,3)x(1,0,1)₁₂	0.9835	0.1149	0.9974		-0.9212		
s.e.	0.0230	0.0656	0.0041		-0.0577		
SARIMA (1,0,4)x(1,0,1)₁₂	0.9906	-0.8032	0.9977		-0.9289		
s.e.	0.0155	0.0640	0.0038		0.0559		
SARIMA (2,0,3)x(1,0,1)₁₂	0.4751	0.2428	0.9974		-0.9230		
s.e.	0.2929	0.0786	0.0037		0.0522		

【不差分模型診斷- SARIMA(0,0,4)x(1,0,1)₁₂】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

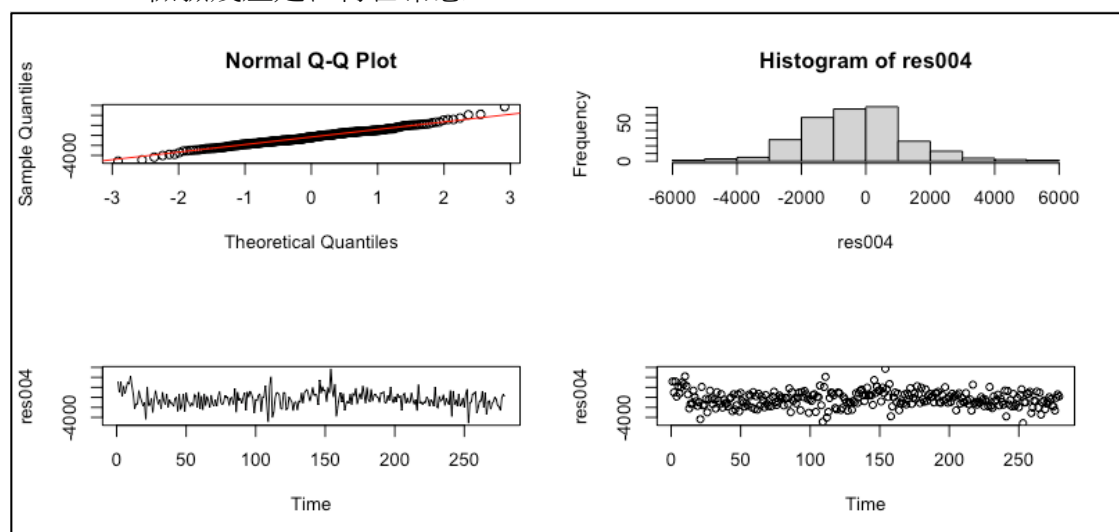


圖 4.1 SARIMA(0,0,4)x(1,0,1)₁₂ 殘差常態檢驗

由圖 4.1 殘差檢驗，各方面判定其殘差應是在 0 附近跳動、但直方圖看起來也有左右對稱、由 Q-Q plot 判定僅接近符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

Shapiro-Wilk normality test

data: res004

W = 0.9922, p-value = 0.1496

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們不會 reject H_0 ，不拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是符合常態分配的。

四、不進行差分直接來進行 order 選取

method.2 檢驗殘差是否相關

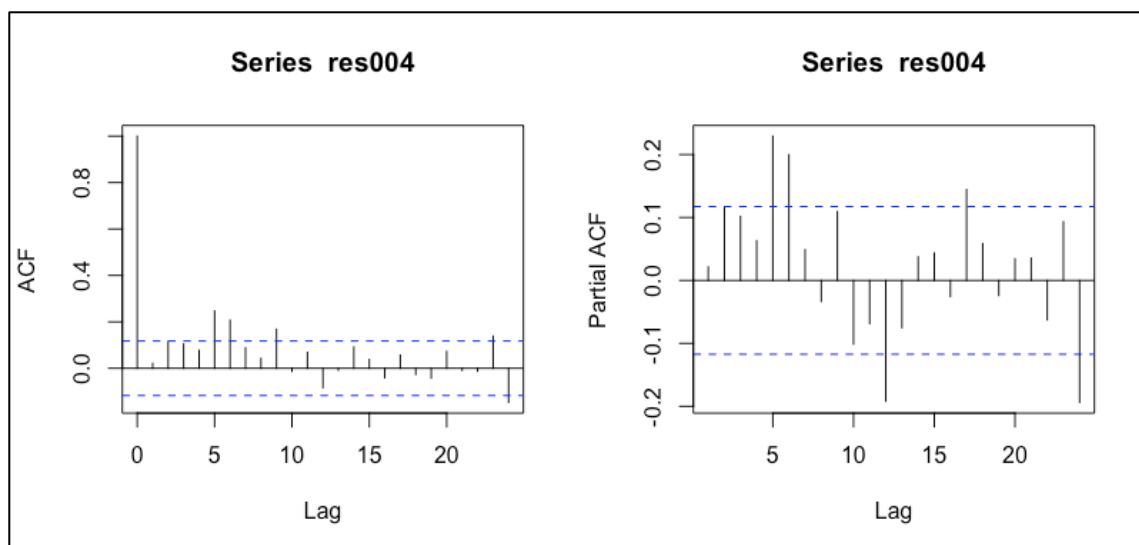


圖 4.2 SARIMA(0,0,2)x(3,0,1)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

根據圖 4.2 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差大抵都不是在顯著線以下，顯示殘差間大致上可能尚存在相關性，所以假設誤差是 white noise 應是不可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定

H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

圖 4.3 所示 Ljung Box test 均無通過，此模型並不是一個配適良好的選擇。

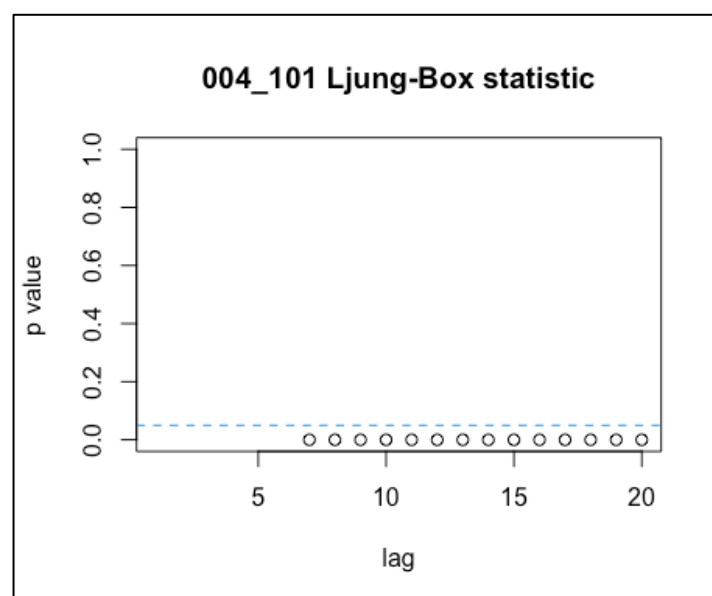


圖 4.3 Ljung Box test for SARIMA(0,0,4)x(1,0,1)₁₂

四、不進行差分直接來進行 order 選取

【不差分模型診斷- SARIMA(0,0,5)x(1,0,1)₁₂】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

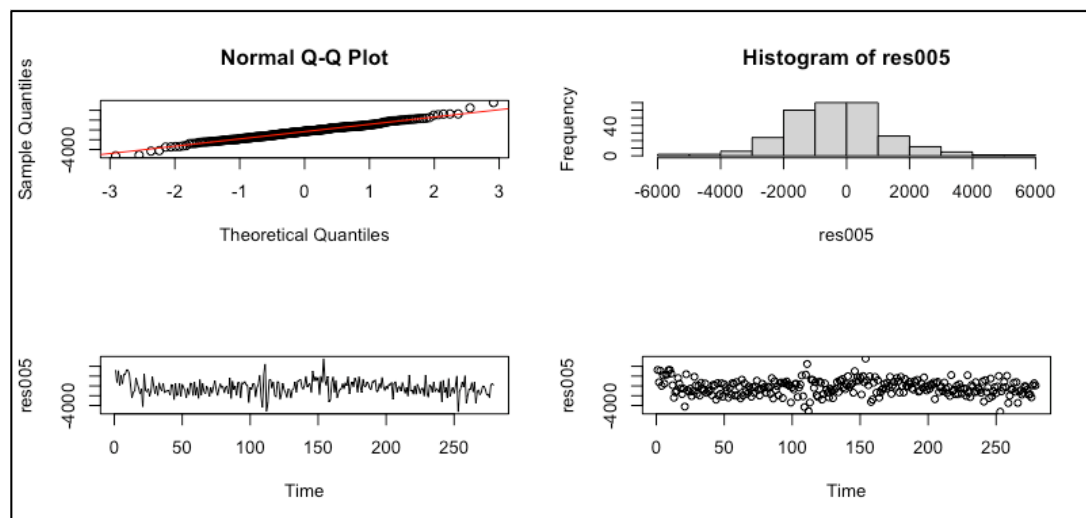


圖 4.3 SARIMA(0,0,5)x(3,0,1)₁₂ 殘差常態檢驗

由圖 4.3 殘差檢驗，各方面判定其殘差在 0 附近跳動、直方圖看起來也有無偏態趨勢、由 Q-Q plot 有點符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

Shapiro-Wilk normality test

data: res005

W = 0.99178, p-value = 0.1229

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們不會 reject H_0 ，不拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是符合常態分配的。

method.2 檢驗殘差是否相關

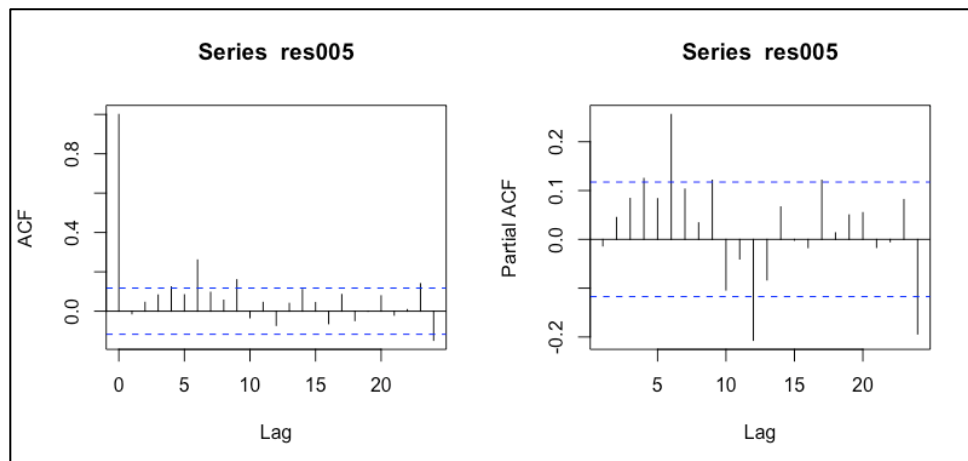


圖 4.4 SARIMA(0,0,5)x(1,0,1)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

四、不進行差分直接來進行 order 選取

根據圖 4.4 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差沒有都在顯著線以下，顯示殘差間大致上可能相關性，所以假設誤差是 white noise 是不可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定

H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

由圖 4.5 所示 Ljung Box test 均無通過，此模型並不是一個配適良好的選擇。

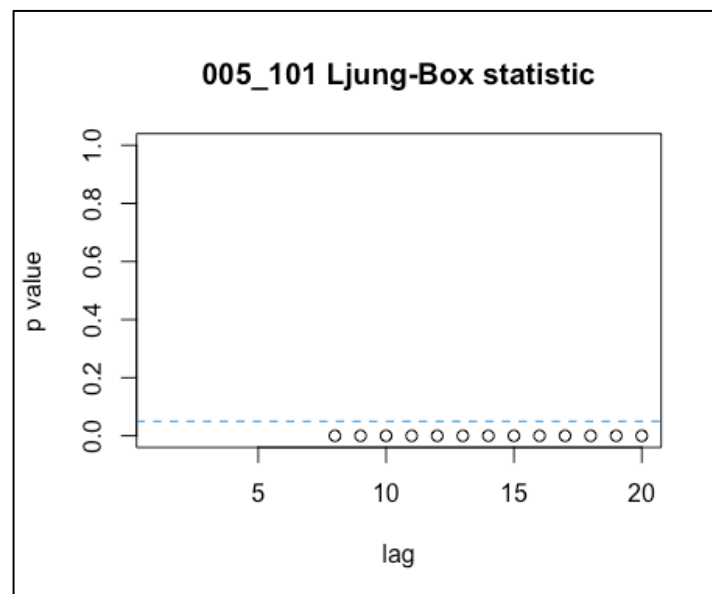


圖 4.5 Ljung Box test for SARIMA(0,0,5)x(3,0,1)₁₂

【模型修正】

SARIMA (0,0,4)x(1,0,1)₁₂ 殘差符合常態 殘差可能有相關 模型配適不佳

SARIMA (0,0,5)x(1,0,1)₁₂ 殘差符合常態 殘差可能有相關 模型配適不佳

由於上述的模型雖殘差都有符合常態但都配適不佳，我們考慮將進行差分來 de-trend 並重複上述步驟來進行模型診斷。

五、進行差分來 de-trend 進行 order 選取

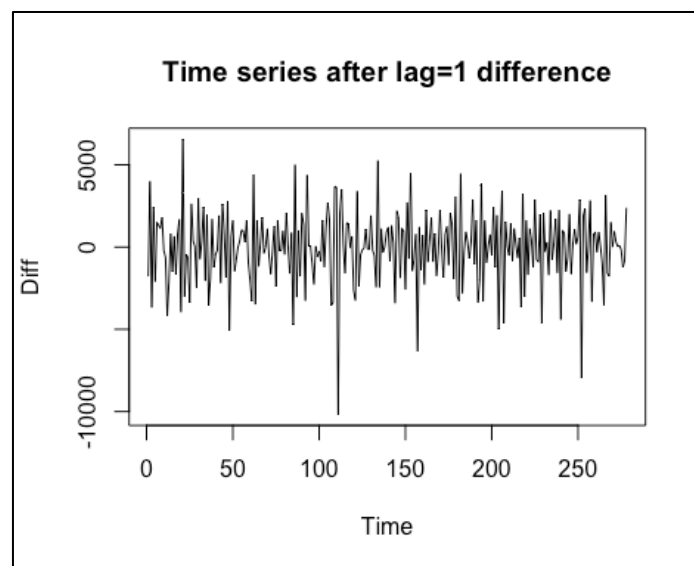


圖 5.1 進行一階差分後原始出生人數時間序列圖

從時間序列圖 5.1 可以發現，確實進行一階差分後更加的平穩，再進行 ADF 檢定，來檢驗此資料是不是屬於 stationary，以下為檢定進行一階差分後資料的結果：

Augmented Dickey-Fuller Test (diff1)

data: data_diff1

Dickey-Fuller = -9.1596, Lag order = 6, p-value = 0.01

alternative hypothesis: stationary

Warning message:

In adf.test(data_diff1) : p-value smaller than printed p-value

根據檢定結果，在給定 $\alpha=0.05$ 的情形下，我們可以拒絕虛無假設並宣稱此筆進行一階差分後的資料屬於 stationary，而實際 p-value 甚至也是小於 0.01。此外，常理來說應該先做季節性差分早於一般差分，但根據觀察季節性遞減速度的還算快。因此，我們決定先不進行季節性的差分，只保留進行一般差分。

五、進行差分來 de-trend 進行 order 選取

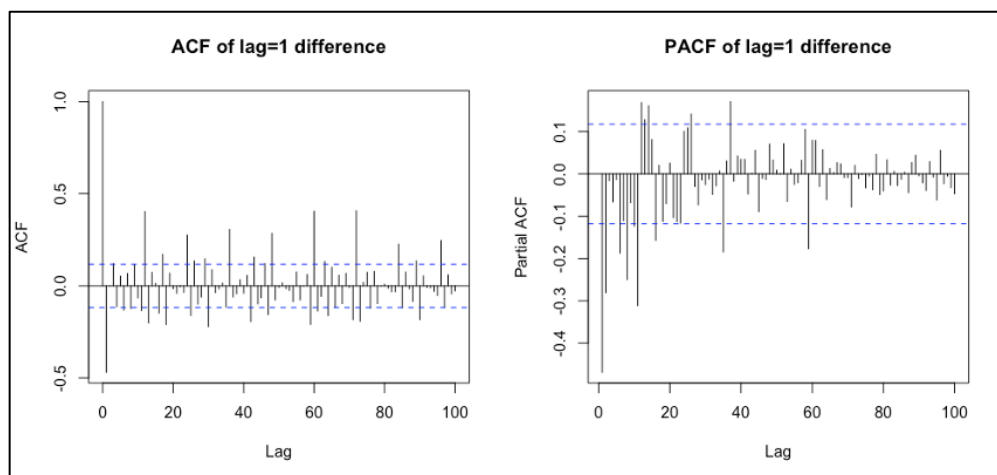


圖 5.2 進行一階差分後原始出生人數 ACF、PACF 圖

【Order 選取與參數估計】

初步判斷：具有週期為 12 的季節性、ACF tails off、PACF cuts off at lag=3 or 5、；ACF 前後有 1 期顯著，非季節性部分則考慮(p,d)=(1,0), (1,1), (0,1)。從表 5.1 可以看見在正負 2 個標準差的情形下，Seasonal AR=5 才有明顯異於 0 的情況，原優先考慮 Seasonal AR=5

修正嘗試：同樣為了不讓季節性的 order 取太大，將季節性 P、Q 都取 1，並以加大非季節性 order 的選取作為替代。可由表 5.1 看見季節性部分(1,0,1)，參數估計不符合標準（明顯接近 1），故嘗試(1,0,0)及(2,0,0)；而加入非季節性部分則是視為 (0,1,1) 季節前後各一期顯著。

表 5.1 模型選取與其相對應參數

	Ar1	Ma1	Sar1	Sar2	Sar3	Sar4	Sar5
SARIMA(0,1,0)x(3,0,0)₁₂			0.3187	0.0686	0.2369		
s.e			0.0581	0.0635	0.0619		
SARIMA(0,1,0)x(5,0,0)₁₂			0.2323	-0.0018	0.1426	0.0698	0.3408
s.e			0.0565	0.0592	0.0608	0.0617	0.0611
SARIMA(0,1,1)x(5,0,0)₁₂		-0.6895	0.1873	0.0234	0.2200	0.0983	0.3295
s.e.		0.0409	0.0583	0.0596	0.0595	0.0610	0.0606
SARIMA(1,1,0)x(5,0,0)₁₂	-0.5391		0.2425	-0.0387	0.2429	0.0244	0.3607
s.e.	0.0510		0.0562	0.0588	0.0586	0.0603	0.0585
	Ar1	Ma1	Sar1	Sar2	Sma1		
SARIMA(0,1,1)x(1,0,1)₁₂		-0.6845	0.9994		-0.9677		
s.e.		0.0401	0.0020		0.0557		

五、進行差分來 de-trend 進行 order 選取

SARIMA(0,1,1)x(1,0,0)₁₂		-0.6577	0.4764				
s.e.		0.0476	0.0540				
SARIMA(0,1,1)x(1,0,0)₁₂		-0.6801	0.3604	0.2475			
s.e.		0.0441	0.0591	0.0613			

根據參數估計的結果我們對 **SARIMA(0,1,1)x(1,0,0)₁₂** **SARIMA(0,1,1)x(1,0,0)₁₂** 此二候選模型進行診斷。

【進行一般差分模型診斷- **SARIMA(0,1,1)x(1,0,0)₁₂**】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

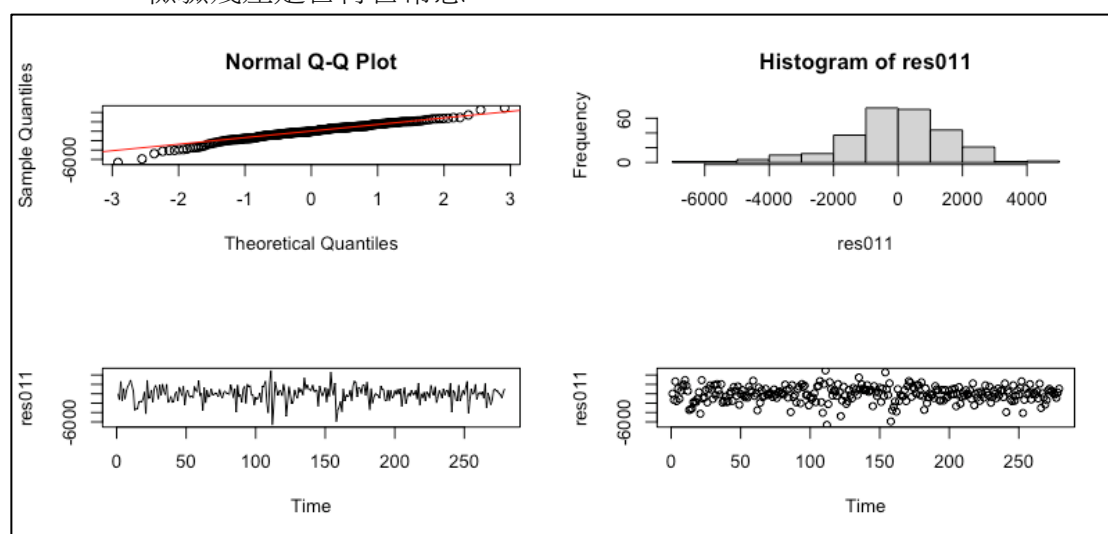


圖 5.3 SARIMA(0,1,1)x(1,0,0)₁₂ 殘差常態檢驗

由圖 5.3 殘差檢驗，各方面判定其殘差應是在 0 附近跳動、直方圖左偏趨勢、由 Q-Qplot 判定應不符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

Shapiro-Wilk normality test

data: res011

W = 0.97655, p-value = 0.0001515

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是不符合常態分配的。

五、進行差分來 de-trend 進行 order 選取

method.2 檢驗殘差是否相關

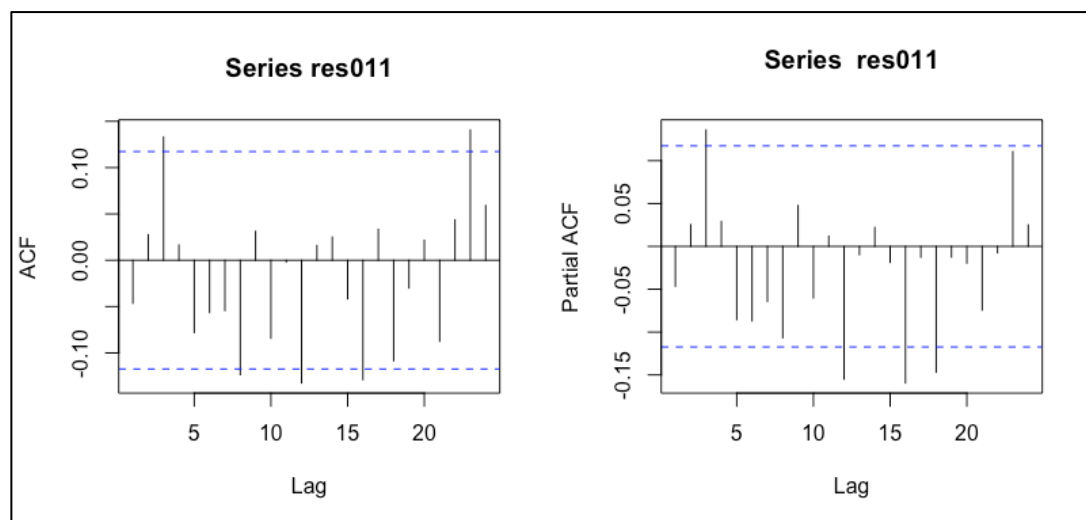


圖 5.4 SARIMA(0,1,1)x(5,0,0)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

根據圖 5.4 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差大抵是在顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，所以假設誤差是 white noise 是可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定

H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

由圖 5.5 所示 Ljung Box test 均無通過，此模型並不是一個配適良好的選擇。

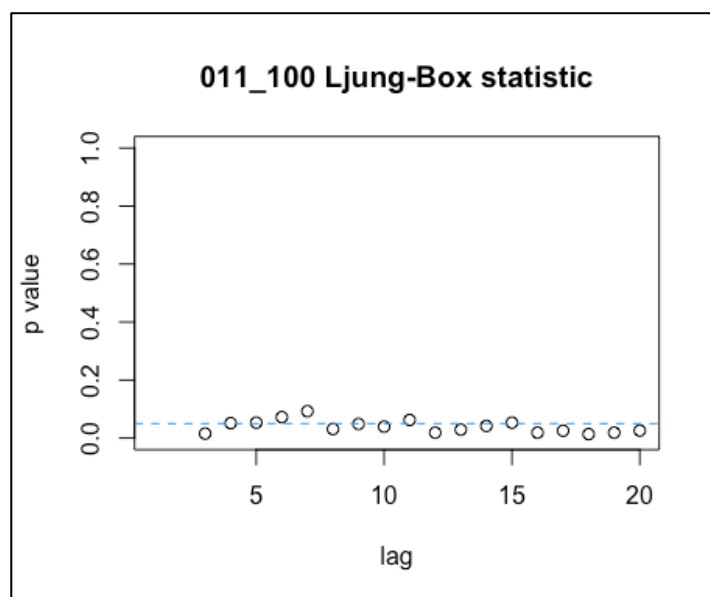


圖 5.5 Ljung Box test for SARIMA(0,1,1)x(1,0,0)₁₂

【進行一般差分模型診斷- $\text{SARIMA}(0,1,1)\times(2,0,0)_{12}$ 】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

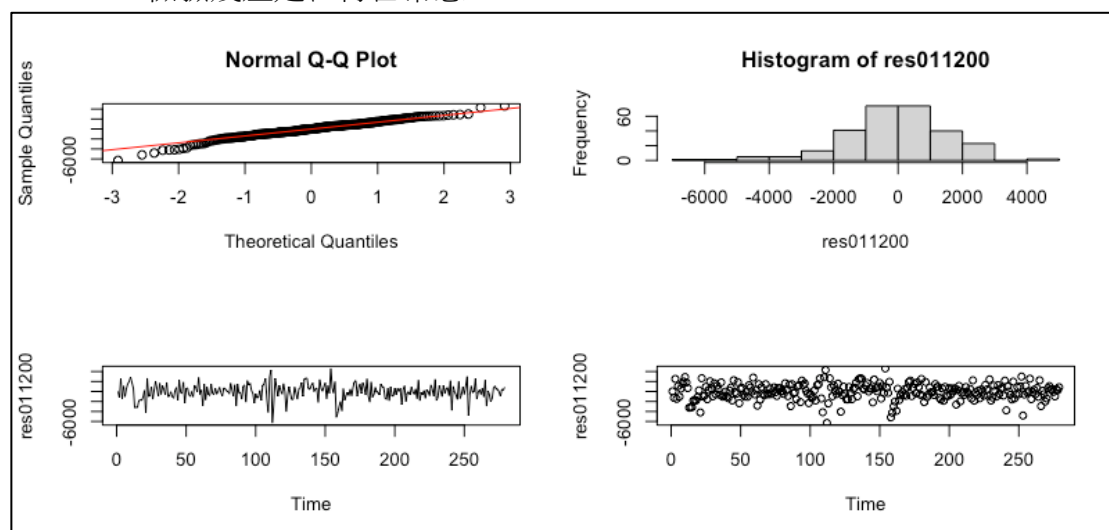


圖 5.6 $\text{SARIMA}(1,1,0)\times(2,0,0)_{12}$ 殘差常態檢驗

由圖 5.6 殘差檢驗，各方面判定其殘差應是在 0 附近跳動、但直方圖似乎無左右對稱、由 Q-Q plot 判定應也不符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

Shapiro-Wilk normality test

data: res011200

W = 0.98089, p-value = 0.0008632

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是符合不常態分配的。

method.2 檢驗殘差是否相關

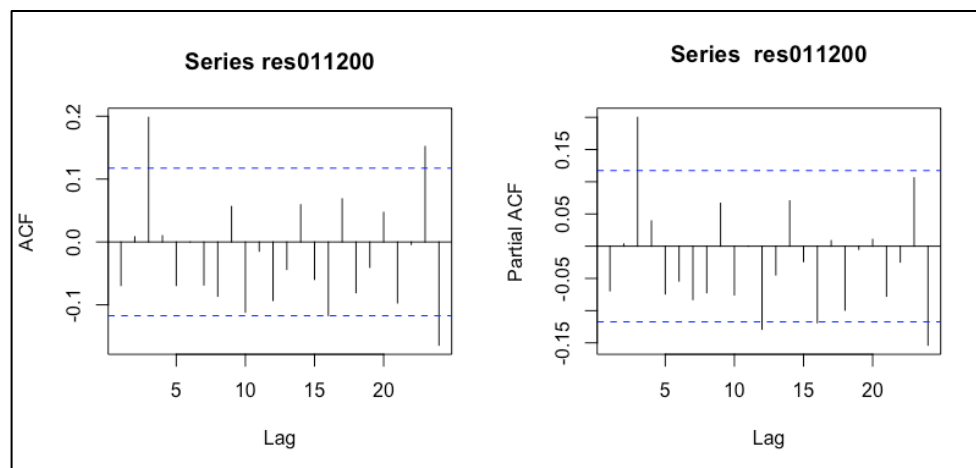


圖 5.7 $\text{SARIMA}(1,1,0)\times(2,0,0)_{12}$ 殘差 ACF 與 PACF 圖

五、進行差分來 de-trend 進行 order 選取

根據圖 5.7 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差大部分有在顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，假設誤差是 white noise 是可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定

H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

圖 5.8 所示 Ljung Box test 均無通過，此模型並不是一個配適良好的選擇。

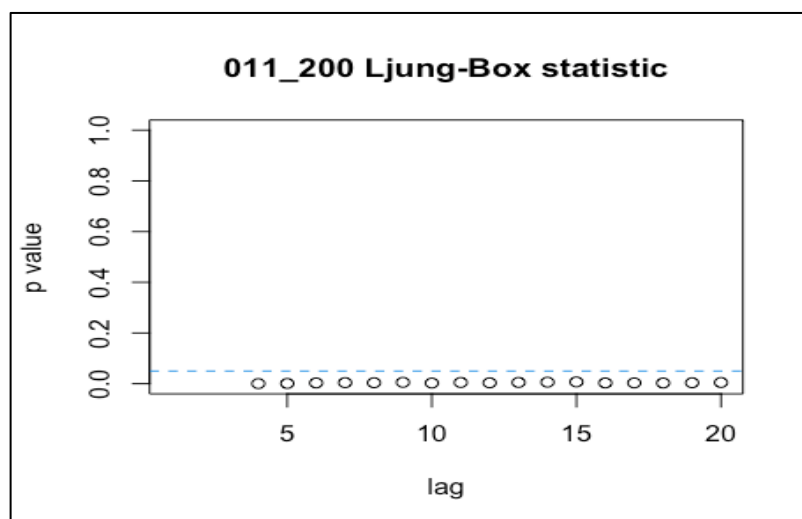


圖 5.8 Ljung Box test for SARIMA(1,1,0)x(2,0,0)₁₂

【模型修正】

SARIMA (0,1,1)x(1,0,0)₁₂ 殘差不符合常態 殘差大致無關 模型配適不佳

SARIMA (0,1,1)x(2,0,0)₁₂ 殘差不符合常態 殘差大致無關 模型配適不佳

由於上述進行一般差分的模型雖殘差都不符合常態且都配適不佳，我們才進一步考慮進行季節性差分來 de-trend，並重複上述步驟來進行模型診斷。

六、使用季節性差分來 de-trend 進行 order 選取

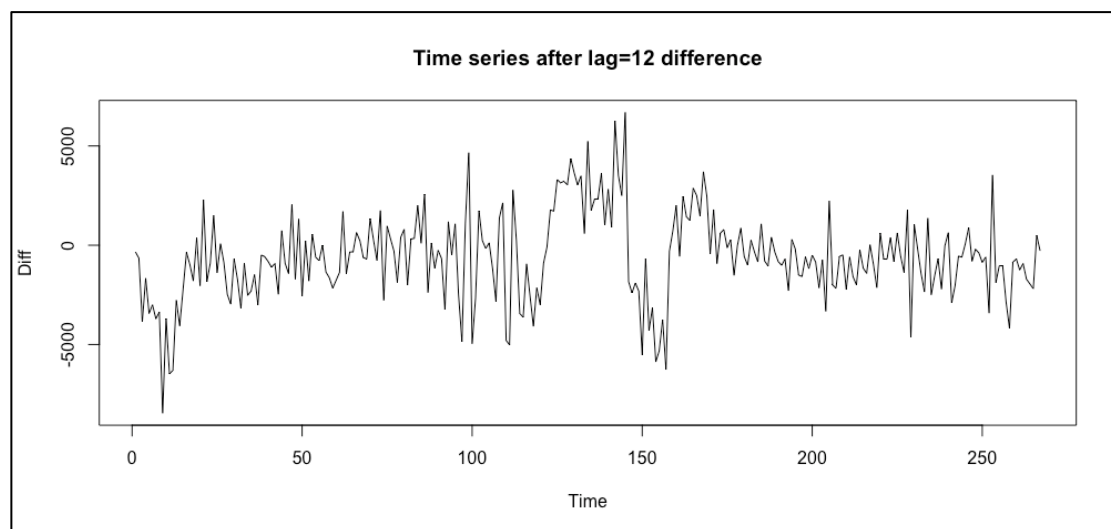


圖 6.1 進行季節性差分後出生人數時間序列圖

從時間序列圖圖 6.1 可以發現，確實進行季節性差分後比原始時間序列的平穩，再進行 ADF 檢定，來檢驗此資料是不是屬於 stationary，以下為檢定進行一階差分後資料的結果：

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: data_diff12
```

```
Dickey-Fuller = -4.4091, Lag order = 6, p-value = 0.01
```

```
alternative hypothesis: stationary
```

```
Warning message:
```

```
In adf.test(data_diff12) : p-value smaller than printed p-value
```

根據檢定結果，在給定 $\alpha=0.05$ 的情形下，我們可以拒絕虛無假設並宣稱此筆進行一階差分後的資料屬於 stationary，而實際 p-value 甚至也是小於 0.01。

六、使用季節性差分來 de-trend 進行 order 選取

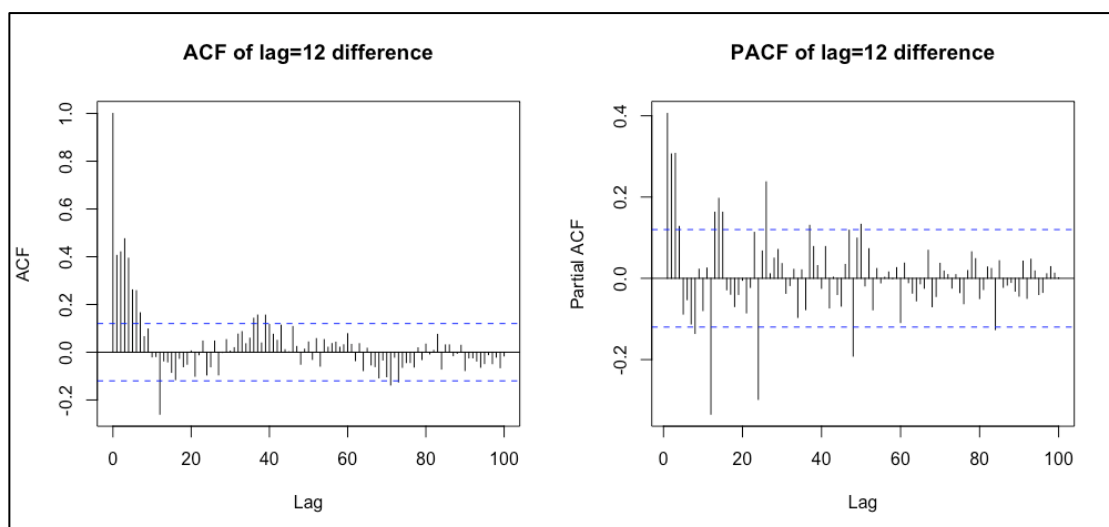


圖 6.2 進行季節性差分後出生人數 ACF、PACF 圖

初步判斷：根據圖 6.2 為避免過度差分，進行季節性差分後則不另進行一般差分。具有週期為 12 的季節性、ACF tails off、PACF cuts off at lag=3 or 4；ACF 前後有顯著，非季節性部分則考慮(p,d)不超過 3 的 order。

修正嘗試：同樣為了不讓季節性的 order 取太大，將季節性 P、Q 最多取 1 試試看，並以加大非季節性 order 的選取作為替代。可由表 6.1 看見季節性部分(1,1,1)，參數估計不符合標準（不顯著異於 0），故嘗試(2,1,1)及(0,1,1)；而加入非季節性部分則是觀察圖 6.2 視為 2 圖均為 tails off 來進行調整嘗試。

表 6.1 模型選取與其相對應參數

	Ar1	Ma1	Sar1	Sar2	Sar3	Sar4	Sma1
SARIMA(0,0,0)x(1,1,0)₁₂			-0.2221				
s.e			0.0647				
SARIMA(0,0,0)x(0,1,1)₁₂							-0.2471
s.e							0.0646
SARIMA(0,0,0)x(2,1,0)₁₂			-0.2503	-0.1113			
s.e			0.0669	0.0671			
SARIMA(0,0,0)x(1,1,1)₁₂			-0.0513				-0.1896
s.e			0.1798				0.1722
	Ar1	Ma1	Ma2	Ma3	Sar1	Sar2	Sma1
SARIMA(1,0,2)x(1,1,1)₁₂	0.9982	-0.8589	0.2688		-0.0312		-0.9473
s.e	0.0064	0.0628	0.0711		0.0709		0.0901

六、使用季節性差分來 de-trend 進行 order 選取

SARIMA(1,0,3)x(1,1,1)₁₂	0.9939	-0.8024	0.1602	0.1103	-0.0281		-0.9252
s.e	0.0134	0.0666	0.0905	0.0662	0.0696		0.0654
SARIMA(1,0,2)x(2,1,1)₁₂	0.9959	-0.8556	0.2669		-0.0733	-0.1546	-0.8897
s.e	0.0070	0.0637	0.0705		0.0734	0.0691	0.0654
SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂	0.9929	-0.8060	0.1673	0.1035	-0.0690	-0.1530	-0.8794
s.e	0.0111	0.0659	0.0880	0.0646	0.0732	0.0694	0.0636
SARIMA(1,0,3)x(2,1,0)₁₂	0.9426	-0.8148	0.1874	0.1168	-0.6288	-0.3915	
s.e	0.0267	0.0711	0.0908	0.0661	0.0593	0.0591	
	Ar1	Ar2	Ar3	Ar4	Sar1	Sar2	Sma1
SARIMA(4,0,0)x(0,1,1)₁₂	0.1758	0.2744	0.4070	0.1413			-0.9734
s.e	0.0625	0.0574	0.0620	0.0620			0.1006

依據參數估計結果，依序對 **SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂** **SARIMA(1,0,3)x(2,1,0)₁₂** **SARIMA(4,0,0)x(0,1,1)₁₂** 進行診斷。

【季節性差分模型診斷- **SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂**】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

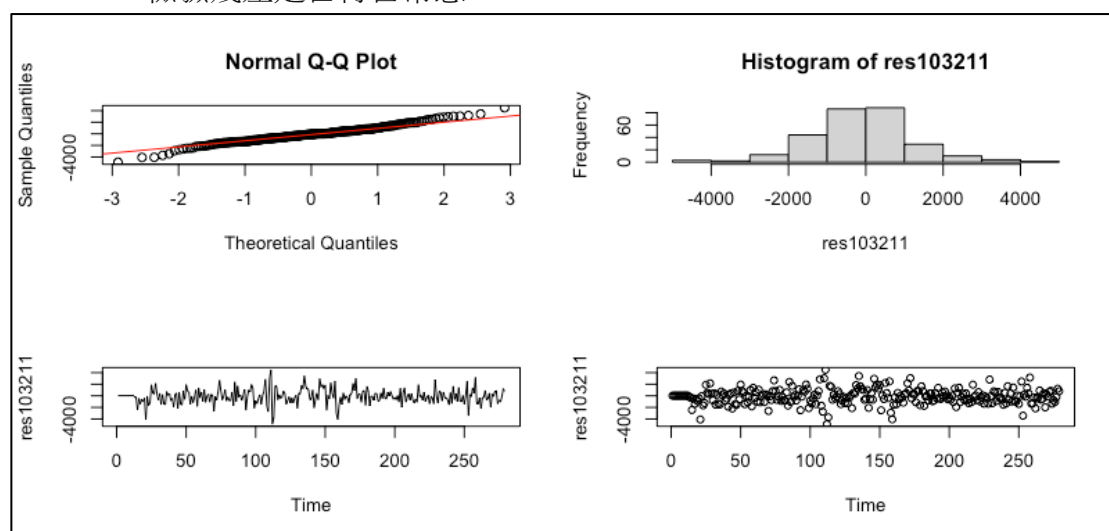


圖 6.3 SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂ 殘差常態檢驗

由圖 6.3 殘差檢驗，各方面判定其殘差應是在 0 附近跳動、直方圖有左右稍微對稱、由 Q-Qplot 判定應不太符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

Shapiro-Wilk normality test

data: res103211

W = 0.98284, p-value = 0.001973

六、使用季節性差分來 de-trend 進行 order 選取

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是不符合常態分配的。

method.2 檢驗殘差是否相關

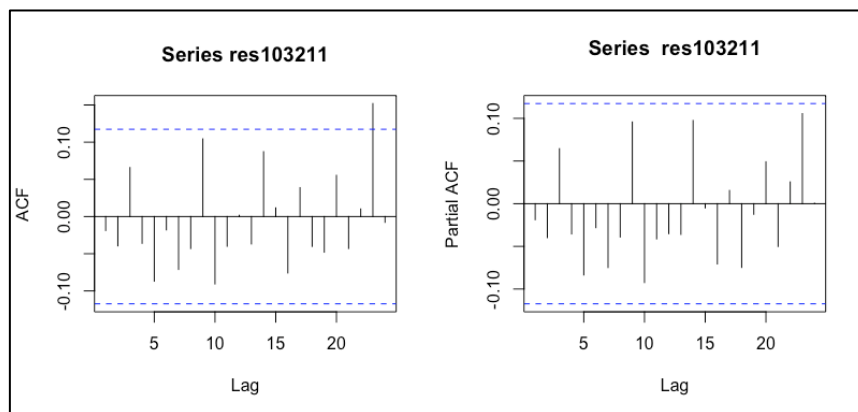


圖 6.4 SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

根據圖 6.4 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差全部都是在顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，所以假設誤差是 white noise 是可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定

H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

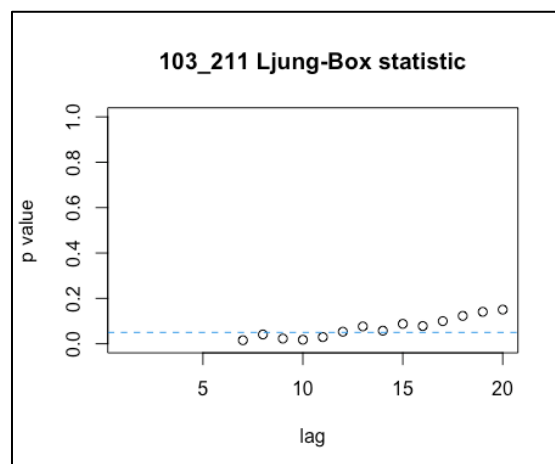


圖 6.5 Ljung Box test for SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂

由圖 6.5 所示 Ljung Box test 有部分未通過，此模型算待加強的選擇。

【季節性差分模型診斷- SARIMA(0,1,3)x(2,1,0)₁₂】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

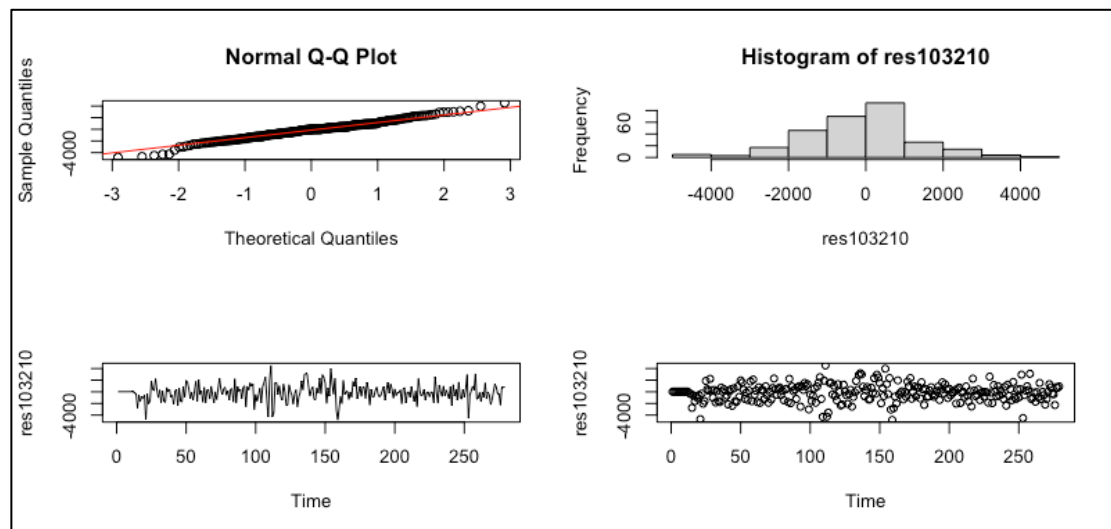


圖 6.6 SARIMA(1,0,3)x(2,1,0)₁₂ 殘差常態檢驗

由圖 6.6 殘差檢驗，各方面判定其殘差都在 0 附近跳動、直方圖左右不算對稱、由 Q-Qplot 判定應不太符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

Shapiro-Wilk normality test

data: res103210

W = 0.9878, p-value = 0.01859

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是不符合常態分配的。

method.2 檢驗殘差是否相關

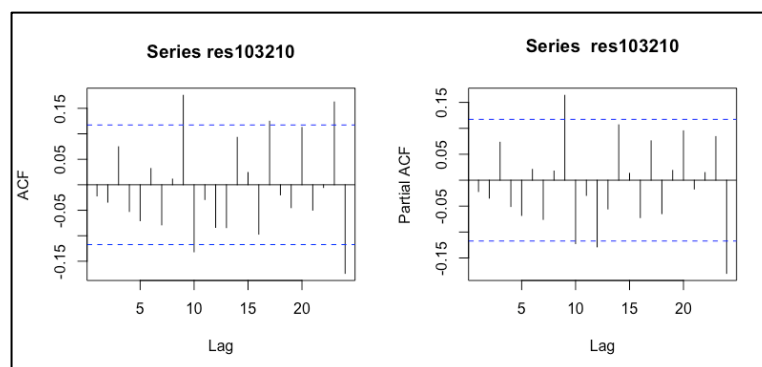


圖 6.7 SARIMA(1,0,3)x(2,1,0)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

六、使用季節性差分來 de-trend 進行 order 選取

根據圖 6.7 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差大多顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，所以假設誤差是 white noise 是可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定

H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

由圖 6.8 所示 Ljung Box test 有部分未通過，因此我們認為此模型配適尚差強人意。

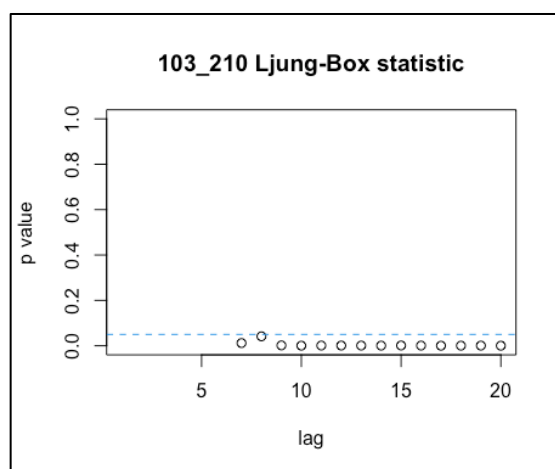


圖 6.8 Ljung Box test for SARIMA(1,0,3)x(2,1,0)₁₂

【模型診斷- SARIMA(4,0,0)x(0,1,1)₁₂】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

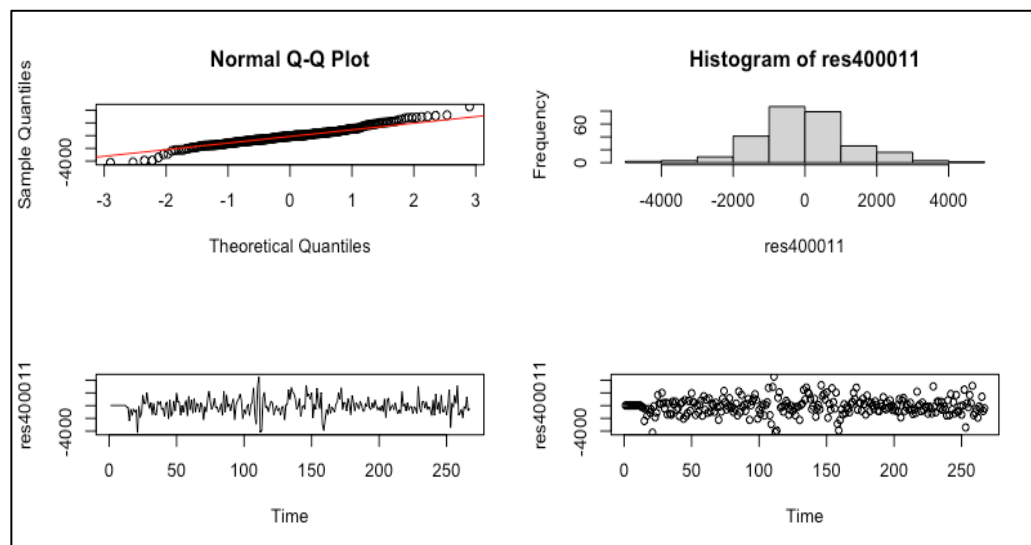


圖 6.9 SARIMA(4,0,0)x(0,1,1)₁₂ 殘差常態檢驗

由圖 6.9 殘差檢驗，各方面判定其殘差應不是在 0 附近跳動、直方圖左右算對稱、由 Q-Qplot 判定應不太符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

Shapiro-Wilk normality test

data: res400011

W = 0.97917, p-value = 0.0006015

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是不符合常態分配的。

method.2 檢驗殘差是否相關

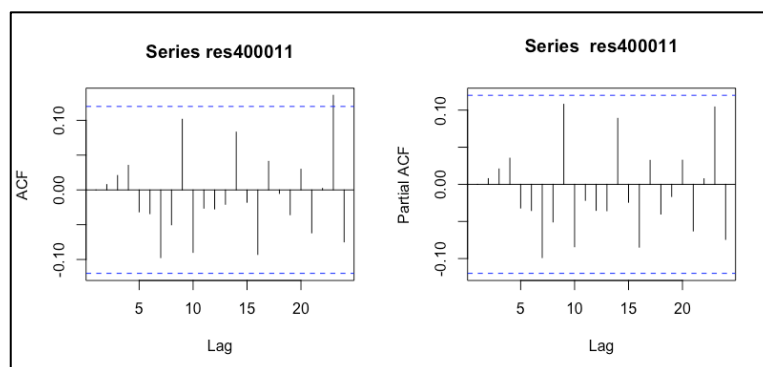


圖 6.10 SARIMA(4,0,0)x(0,1,1)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

六、使用季節性差分來 de-trend 進行 order 選取

根據圖 6.10 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差大致都是在顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，所以假設誤差是 white noise 是可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定

H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

由圖 6.11 所示 Ljung Box test 僅大部分未通過，此模型還算配適不太好的選擇。

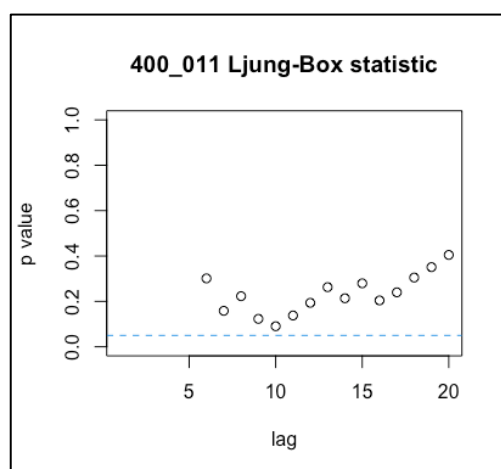


圖 6.11 Ljung Box test for SARIMA(4,0,0)x(0,1,1)₁₂

七、季節性差分模型選擇

表 7.1 模型選取比較

	Log likelihood	AIC	Ljung Box
SARIMA(0,0,4)x(1,0,1)₁₂	-2463.28	4942.55	不佳
SARIMA(0,0,5)x(1,0,1)₁₂	-2457.58	4933.16	不佳
SARIMA(0,1,1)x(1,0,0)₁₂	-2455.63	4915.25	不佳
SARIMA(0,1,1)x(2,0,0)₁₂	-2447.81	4901.62	不佳
SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂	-2311.99	4637.98	還好
SARIMA(1,0,3)x(2,1,0)₁₂	-2334.47	4680.93	不佳
SARIMA(4,0,0)x(0,1,1)₁₂	-2211.27	4432.53	不錯

依據 Log likelihood 越大越好、AIC 越小越好及 Ljung Box 檢定情形選定出 SARIMA(4,0,0)x(0,1,1)₁₂ 模型：

$$(1+0.1758B+0.27441B^2+0.4070B^3+0.1413B^4)(1-B^{12}) X_t=(1-0.9734 B^{12}) Z_t, \\ Z_t \sim (0,1)$$

八、預測

在建立模型時，我們保留最後 12 期（2022 年 4 月到 2023 年 3 月）出生資料來驗證我們的預測值與實際值差異於表 8.1，並繪製 12-step 預測的時間序列圖 8.1。

表 8.1 模型選取預測結果

	實際值	預測值	95%預測下界	95%預測上界	預測誤差	時間
1-step	11222	10930.143	8293.954	13566.332	-291.857	111/4
2-step	9442	11142.356	8466.399	13818.314	1700.356	5
3-step	10943	10883.408	8090.265	13676.552	-59.592	6
4-step	10950	11504.876	8408.527	14601.224	554.876	7
5-step	11902	11796.207	8539.070	15053.345	-105.793	8
6-step	12217	11909.945	8522.224	15297.665	-307.055	9
7-step	12242	13766.847	10206.733	17326.960	1524.847	10
8-step	12348	13494.606	9784.340	17204.871	1146.606	11
9-step	12178	13906.138	10062.958	17749.318	1728.138	12
10-step	10948	11623.893	7644.126	15603.660	675.893	112/1
11-step	10113	9956.240	5844.489	14067.991	-156.760	2
12-step	12506	12681.679	8445.747	16917.611	175.679	3

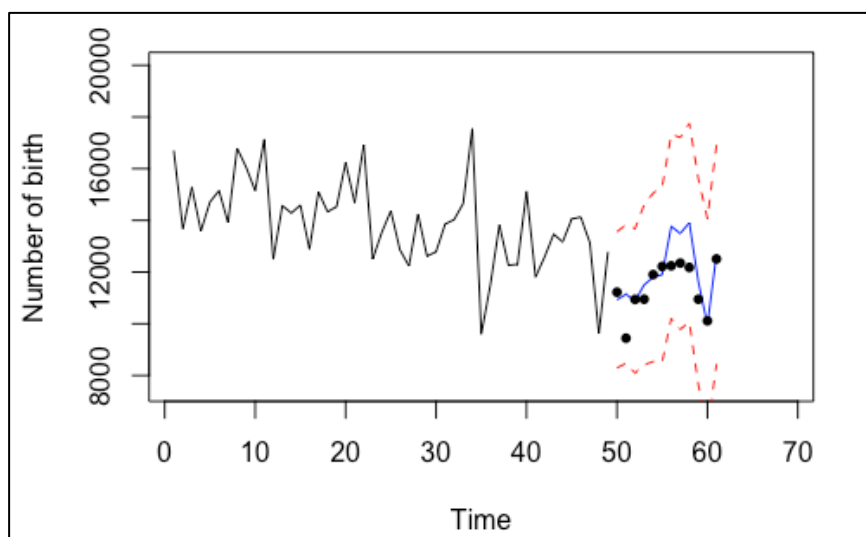


圖 8.1 2022 年 4 月到 2023 年 3 月時間序列預測值實際觀測值比較

圖 8.1 藍線表示預測值、紅線分別代表 95%預測區間上下界、黑色圓點則代表實際值有便於對照。可以從表格及比較圖表發現所有的預測值都有落在預測區間，唯獨在 2022 年 5 月有明顯落差。

九、使用 3 次方 regression 來 de-trend 進行 order 選取

除了上述只使用差分的方法來 de-trend，我們也觀察到台灣出生人數似乎呈現 3 次曲線的趨勢，因此我們想為資料配適一條 3 次方 regression line 來移除趨勢，進而對其殘差進行時間序列分析，配適結果如圖 9.1 所示。

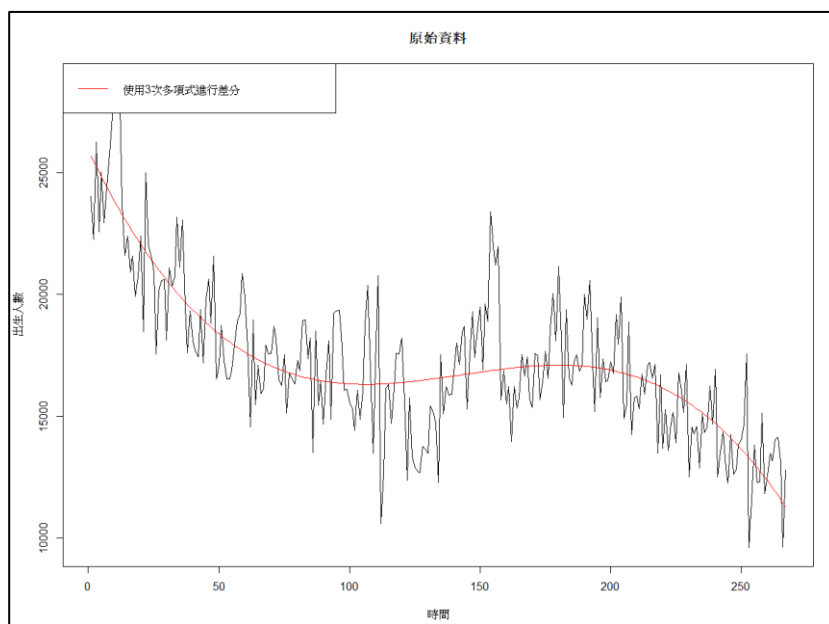


圖 9.1 台灣出生人數時間數列及 3 次方 regression line 趨勢配適

去除完趨勢後，我們將對其殘差進行分析，由圖 9.2 可以看到 de-trend 後的 ACF 及 PACF 圖。

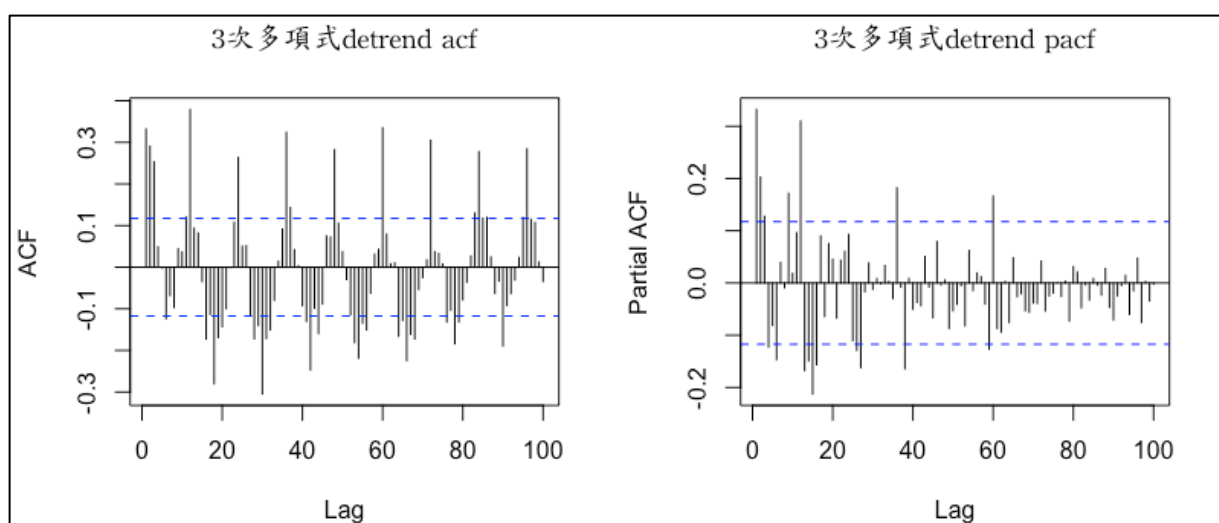


圖 9.2 進行 3 次方 regression 後 de-trend 的原始出生人數 ACF、PACF 圖

【Order 選取與參數估計】

初步判斷：週期=12 的季節性部分：從 ACF 看到 tails off，為了模型的簡約 AR 選擇 4 以下、PACF cuts off 在 lag=2 or 3；非季節性部分：從 PACF 看 AR tail off 或 cut off 在 3，MA tail off 或 cut off 在 2

表 9.1 模型選取與其相對應參數

	AR 最高	MA最高	sar1	sma1	sma2	sma3
SARIMA(4,0,3)x(1,0,3) ₁₂	0.1552	0.393	0.9979	-0.9982	-0.105	0.1709
s.e.	0.0347	NaN	0.0038	0.0770	0.096	0.0753
SARIMA(3,0,3)x(1,0,3) ₁₂	0.1441	0.0902	0.9978	-1.0000	-0.1005	0.1701
s.e.	0.2263	0.2691	0.0038	0.0779	0.0976	0.0758
SARIMA(3,0,1)x(1,0,3) ₁₂	0.2669	-0.1465	0.9974	-1.0059	-0.0843	0.1659
s.e.	0.0764	0.1489	0.0040	0.0764	0.0986	0.0753
SARIMA(1,0,3)x(1,0,3) ₁₂	0.6909	0.2048	0.9979	-1.0000	-0.1090	0.1759
s.e.	0.1005	0.0725	0.0038	0.0784	0.0939	0.0737
SARIMA(0,0,3)x(1,0,3) ₁₂		0.3390	0.9994	-1.0433	-0.0963	0.1722
s.e.		0.0648	0.0025	0.0914	0.0988	0.0761

從表 9.1 可以看見在正負 2 個標準差的情形下，Seasonal MA=3 才有明顯異於 0 的情況，故我們優先考慮 Seasonal MA=3。而根據參數估計結果，對 SARIMA(1,0,3)x(1,0,3)₁₂ SARIMA(0,0,3)x(1,0,3)₁₂ 兩模型進行診斷。

【3 次方 de-trend 模型診斷- SARIMA(1,0,3)x(1,0,3)₁₂】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

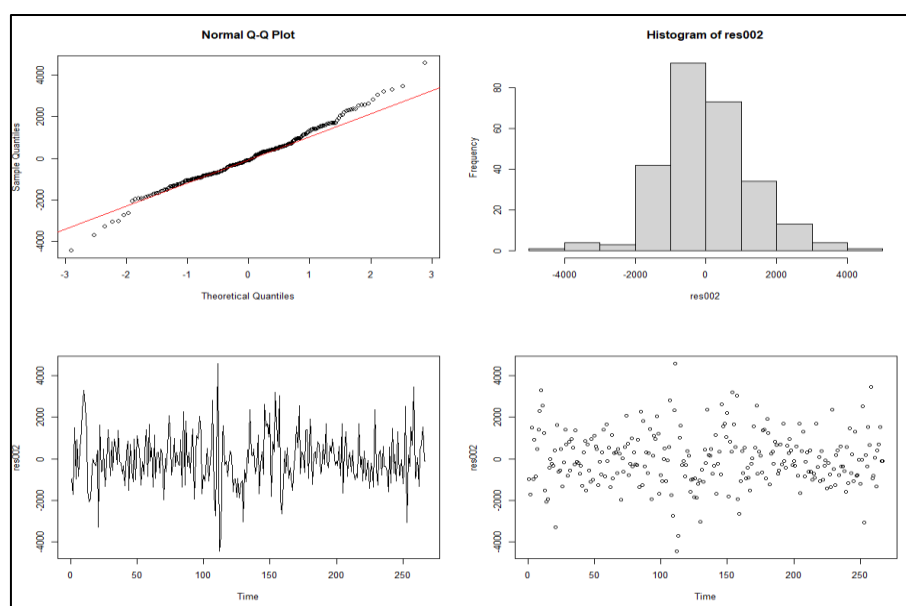


圖 9.3 SARIMA(1,0,3)x(1,0,3)₁₂ 殘差常態檢驗

九、使用 3 次方 regression 來 de-trend 進行 order 選取

由 圖 9.3 殘差檢驗，各方面判定其殘差應是在 0 附近跳動、但直方圖似乎無左右對稱、由 Q-Q plot 判定應也不符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而 對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

```
shapiro-wilk normality test
data:  res002
W = 0.98669, p-value = 0.0142
```

圖 9.4 SARIMA(1,0,3)x(1,0,3)₁₂ Shapiro-Wilk normality test

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是符合不常態分配的。

method.2 檢驗殘差是否相關

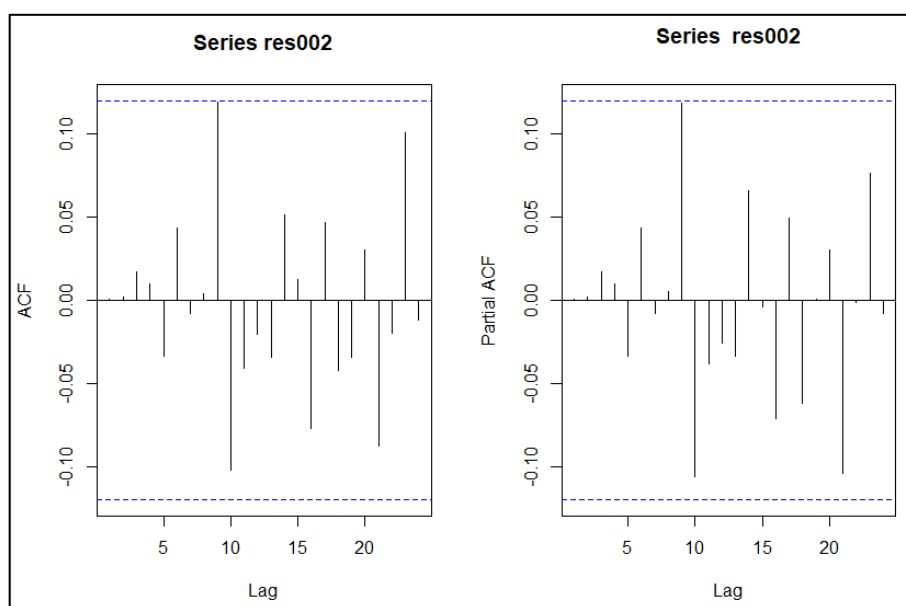


圖 9.5 SARIMA(1,0,3)x(1,0,3)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

根據 圖 9.5 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差都有在顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，假設誤差是 white noise 是不可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定 H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

九、使用 3 次方 regression 來 de-trend 進行 order 選取

由 圖 9.6 所示 Ljung Box test 僅少部分未通過，此模型還算配適良好的選擇。

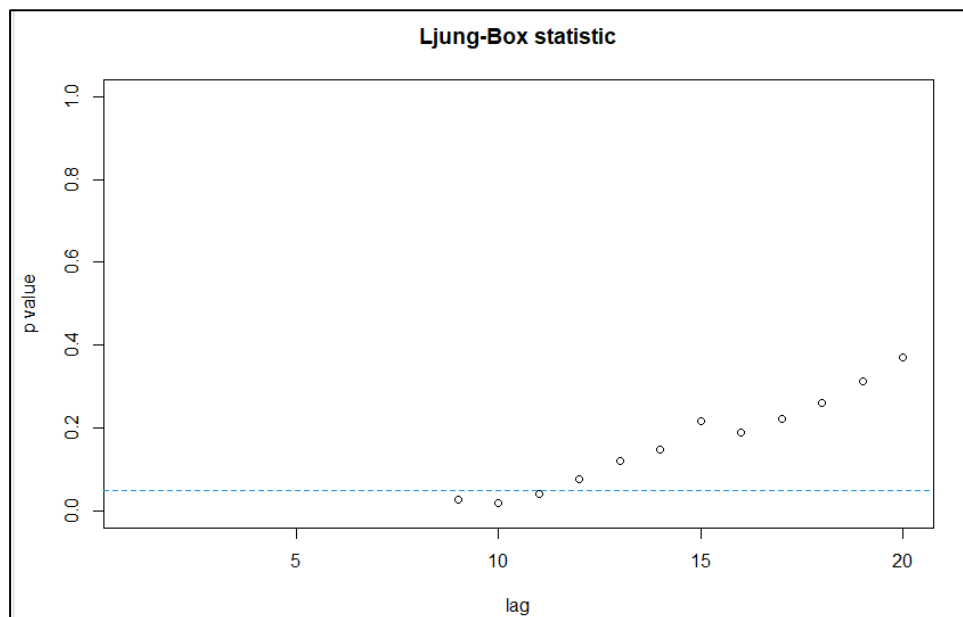


圖 9.6 Ljung Box test for SARIMA (1,0,3)x(1,0,3)₁₂

【3 次方 de-trend 模型診斷- SARIMA(0,0,3)x(1,0,3)₁₂】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

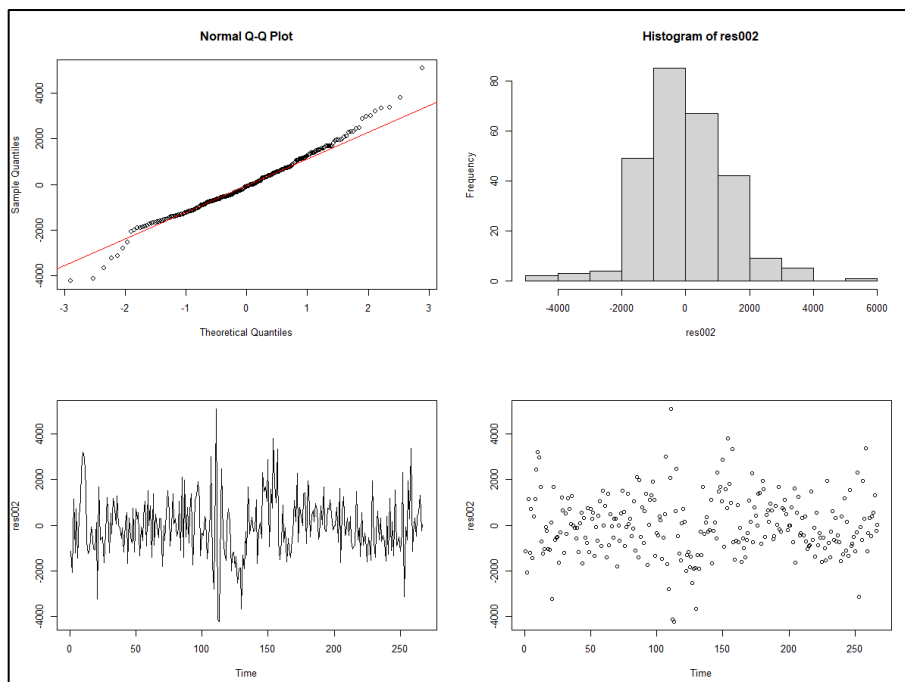


圖 9.7 SARIMA(0,0,3)x(1,0,3)₁₂ 殘差常態檢驗結論

由 圖 9.7 殘差檢驗，各方面判定其殘差應是在 0 附近跳動、但直方圖似乎無左右對稱、由 Q-Q plot 判定應也不符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而 對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

九、使用 3 次方 regression 來 de-trend 進行 order 選取

```
shapiro-wilk normality test
data:  res002
W = 0.98315, p-value = 0.003043
```

圖 9.8 SARIMA(0,0,3)x(1,0,3)₁₂ Shapiro-Wilk normality test

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是符合不常態分配的。

method.2 檢驗殘差是否相關

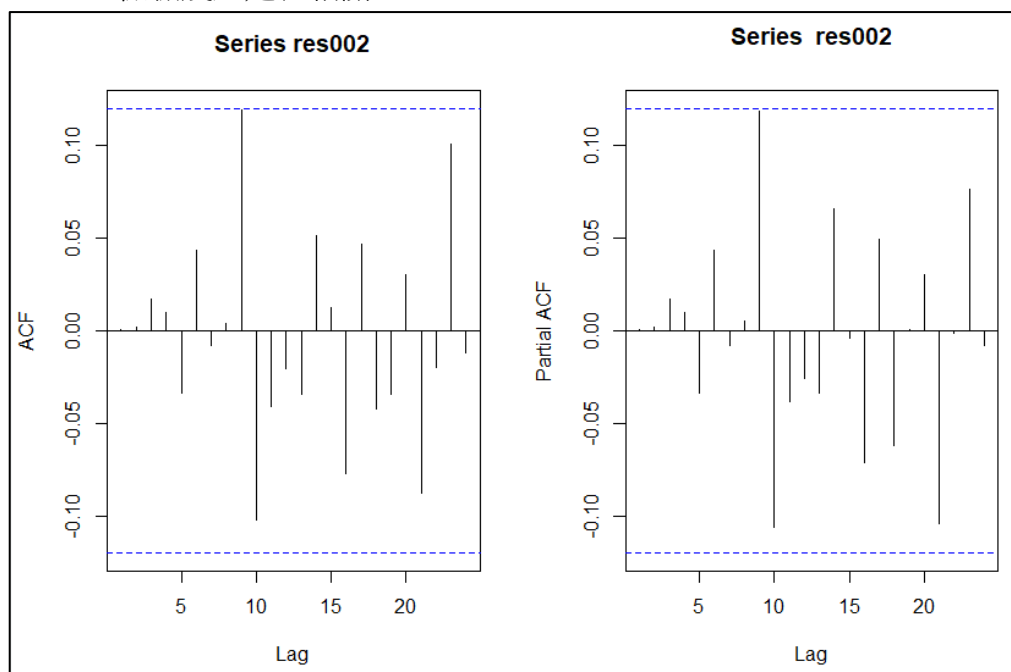


圖 9.9 SARIMA(0,0,3)x(1,0,3)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

根據 圖 9.9 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差都有在顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，假設誤差是 white noise 是不可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合 接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定 H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

九、使用 3 次方 regression 來 de-trend 進行 order 選取

由 圖 9.10 所示 Ljung Box test 無任何點通過，此模型配適不佳。

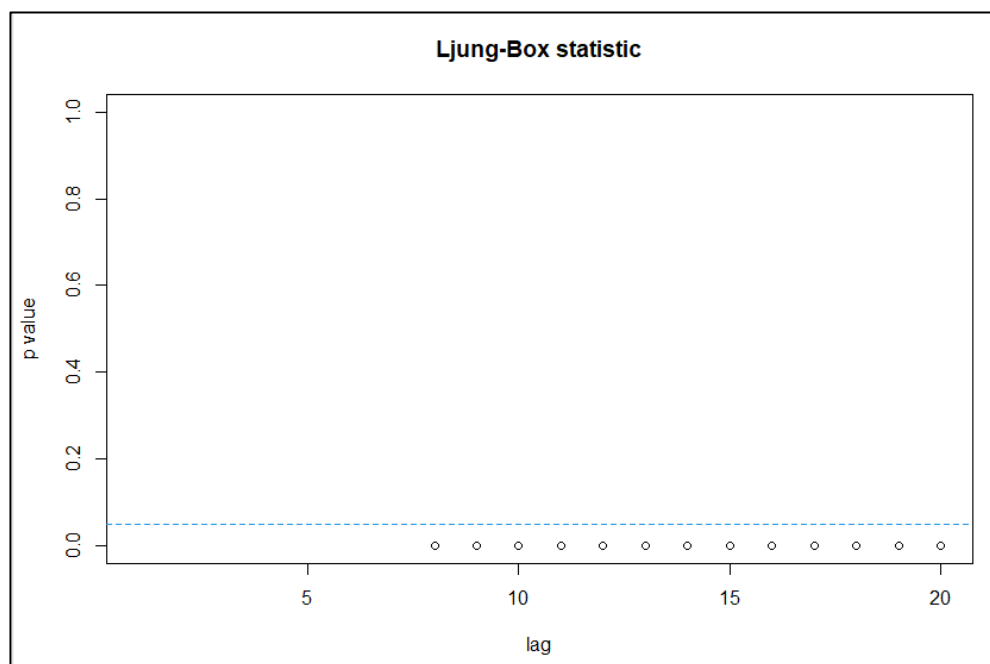


圖 9.10 Ljung Box test for SARIMA (0,0,3)x(1,0,3)₁₂

【模型修正】 由於上述的模型都配適不夠好，我們同樣回頭考慮進行季節性差分來 de-trend 並重複上述步驟來進行模型診斷。

進行季節性差分後的 ACF、PACF 圖如圖 9.11 所示：

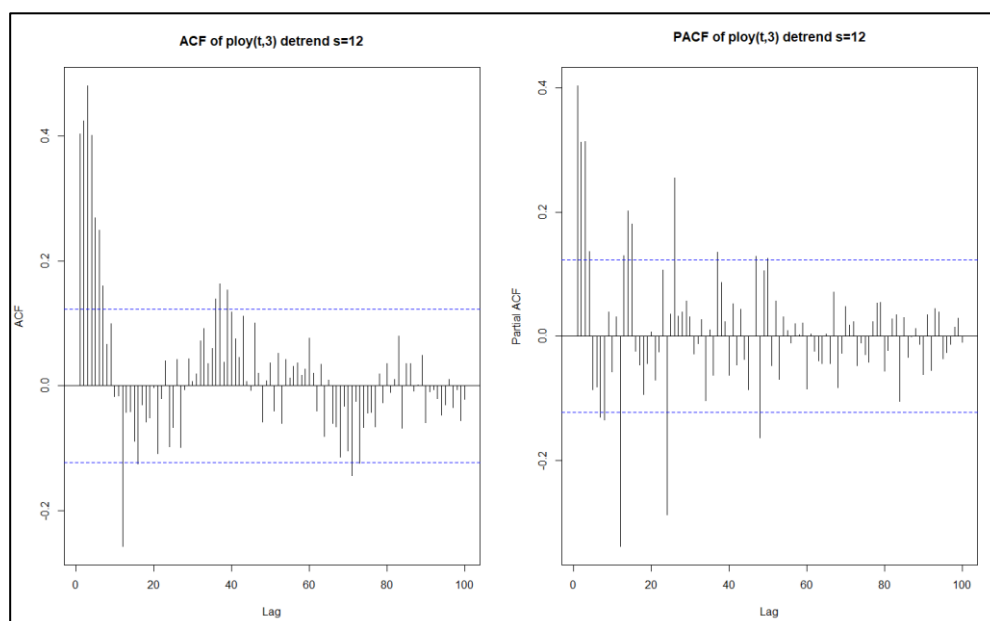


圖 9.11 3 次方 regression 及季節性差分後的 ACF、PACF 圖

【Order 選取與參數估計】

由圖 9.11 判斷：季節性部分看到 ACF 在 lag=12 的倍數有明顯顯著、具有週期為 12 的季節性，Seasonal MA tails off，或可設成低的數字來降低 Seasonal AR 的 order。

季節性部分依照 ACF 圖 AR 取 1，PACF 圖取 1,2,3，非季節性部分 MA 依照 ACF 圖 tail off 或 cut off 在 7，為了模型的簡約性選擇 4 以下，AR 判斷 PACF 圖 tail off 或 cut off 在 3。

表 9.2 模型選取與其相對應參數(季節性差分 D=1)

	AR 最高	MA最高	sar1	sar2	sar3	sar4	sma1	sma2	sma3	sma4
SARIMA(1,0,3)x(4,1,4) ₁₂	0.7785	0.1604	0.1589	-0.5712	-0.5483	-0.1760	-1.1823	0.7359	0.1211	-0.5093
s.e.	0.0829	0.0673	NaN	0.5005	0.4510	0.0732	NaN	0.6100	0.9631	0.5067
SARIMA(1,0,3)x(4,1,3) ₁₂	0.7629	0.1835	0.1660	-0.3002	-0.7310	-1.1867	0.4498	0.5344	-0.7499	
s.e.	0.0855	0.0686	0.3573	0.3141	0.3415	0.3923	0.6530	0.6417	0.3522	
SARIMA(1,0,3)x(3,1,0) ₁₂	0.7768	0.2007	-0.7315	-0.5386	-0.2303					
s.e.	0.0856	0.0720	0.0647	0.0723	0.0655					
SARIMA(1,0,3)x(2,1,1) ₁₂	0.7210	0.2004	-0.0571	-0.1440			-0.9359			
s.e.	0.1038	0.0746	0.0734	0.0721			0.0897			
SARIMA(1,0,3)x(2,1,0) ₁₂	0.7647	0.1783	-0.6405	-0.3853						
s.e.	0.1023	0.0807	0.0607	0.0596						
SARIMA(1,0,3)x(1,1,0) ₁₂	0.7047	0.2545	-0.4675							
s.e.	0.1418	0.0905	0.0574							
SARIMA(1,0,3)x(1,1,1) ₁₂	0.7038	0.2208	-0.0293				-0.9998			
s.e.	0.1067	0.0765	0.0674				0.1356			

從表 9.2 可以看見在正負 2 個標準差的情形下，Seasonal AR 需小於 4、Seasonal MA 需等於 0 or 1 才有明顯異於 0 的情況，故我們優先考慮 Seasonal AR 與 MA 較小的模型。並對上參數估計後的 3 個模型進行診斷。

【3 次方 de-trend 及季節性差分模型診斷- SARIMA(1,0,3)x(3,1,0)₁₂】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

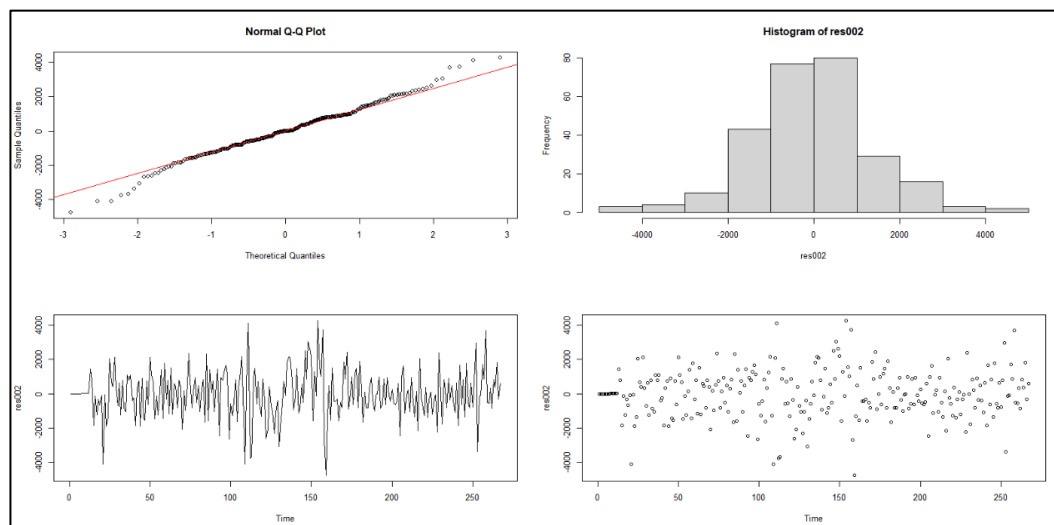


圖 9.12 SARIMA(1,0,3)x(3,1,0)₁₂ 殘差常態檢驗結論

由圖 9.12 殘差檢驗，各方面判定其殘差應是在 0 附近跳動、但直方圖似乎無左右對稱、由 Q-Q plot 判定應也不符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而 對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

```
shapiro-wilk normality test
data:  res002
w = 0.98864, p-value = 0.03415
```

圖 9.13 SARIMA(1,0,3)x(3,1,0)₁₂ Shapiro-Wilk normality test

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是符合不常態分配的。

九、使用 3 次方 regression 來 de-trend 進行 order 選取

method.2 檢驗殘差是否相關

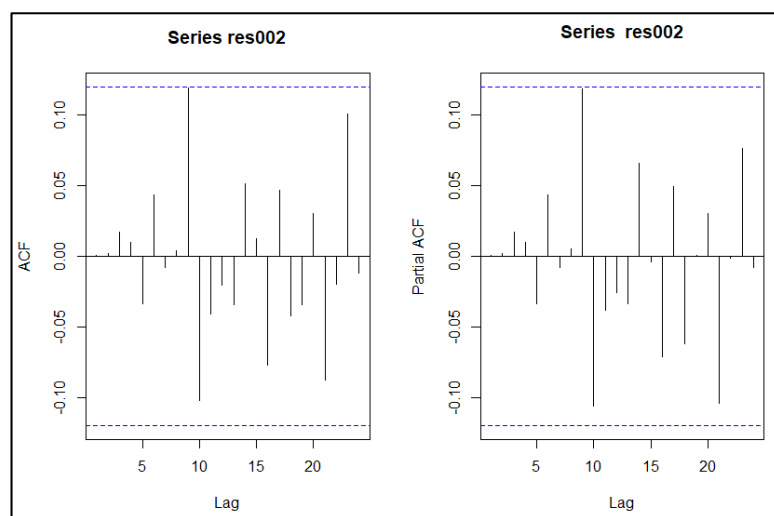


圖 9.14 SARIMA(1,0,3)x(3,1,0)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

根據圖 9.14 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差都有在顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，假設誤差是 white noise 是不可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合 接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定 H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

由 圖 9.15 所示 Ljung Box test 絕大部分未通過，此模型並不是一個配適良好的選擇。

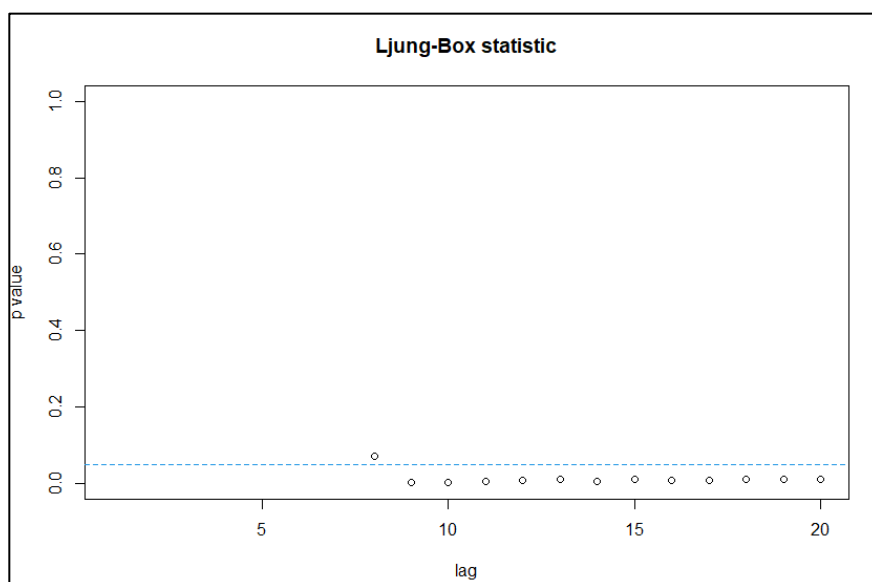


圖 9.15 Ljung Box test for SARIMA (1,0,3)x(3,1,0)₁₂

【3 次方 de-trend 及季節性差分模型診斷- SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

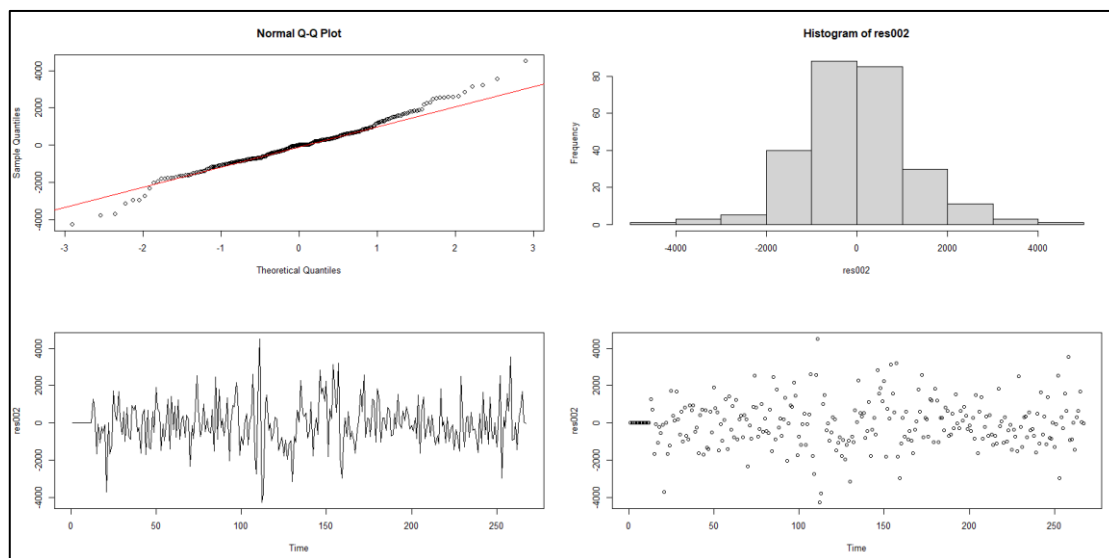


圖 9.16 SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂ 殘差常態檢驗結論

由圖 9.16 殘差檢驗，各方面判定其殘差應是在 0 附近跳動、直方圖近似左右對稱、由 Q-Q plot 判定應也不符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

```
shapiro-wilk normality test
data: res002
W = 0.98302, p-value = 0.002883
```

圖 9.17 SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂ Shapiro-Wilk normality test

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是符合不常態分配的。

九、使用 3 次方 regression 來 de-trend 進行 order 選取

method.2 檢驗殘差是否相關

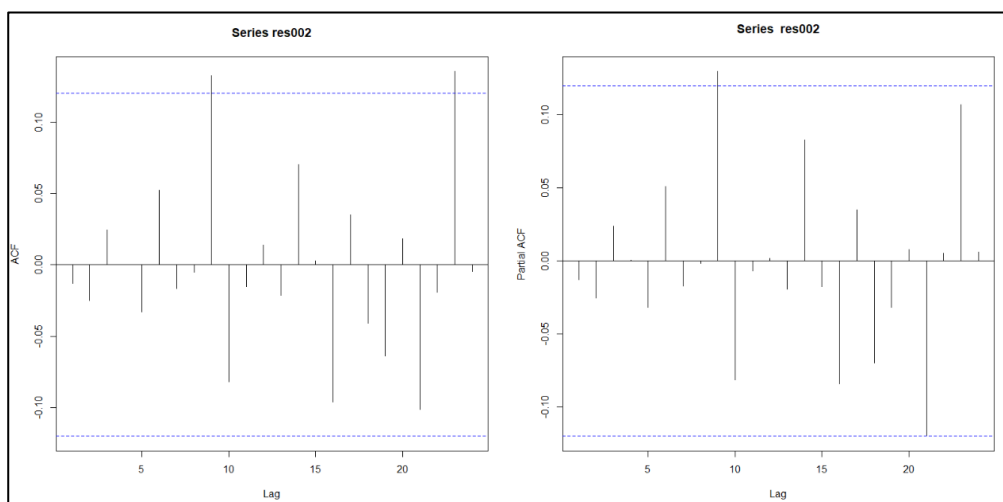


圖 9.18 SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

根據圖 9.18 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差都有在顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，假設誤差是 white noise 是不可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定 H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

由圖 9.19 所示 Ljung Box test 大部分都通過，此模型是一個配適良好的選擇。

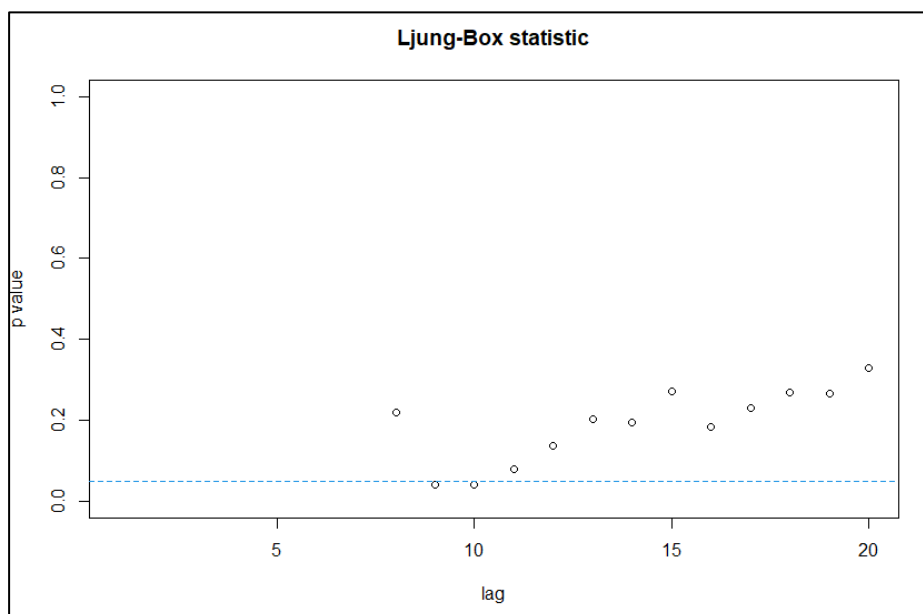


圖 9.19 Ljung Box test for SARIMA (1,0,3)x(2,1,1)₁₂

【3 次方 de-trend 及季節性差分模型診斷- SARIMA(1,0,3)x(2,1,0)₁₂】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

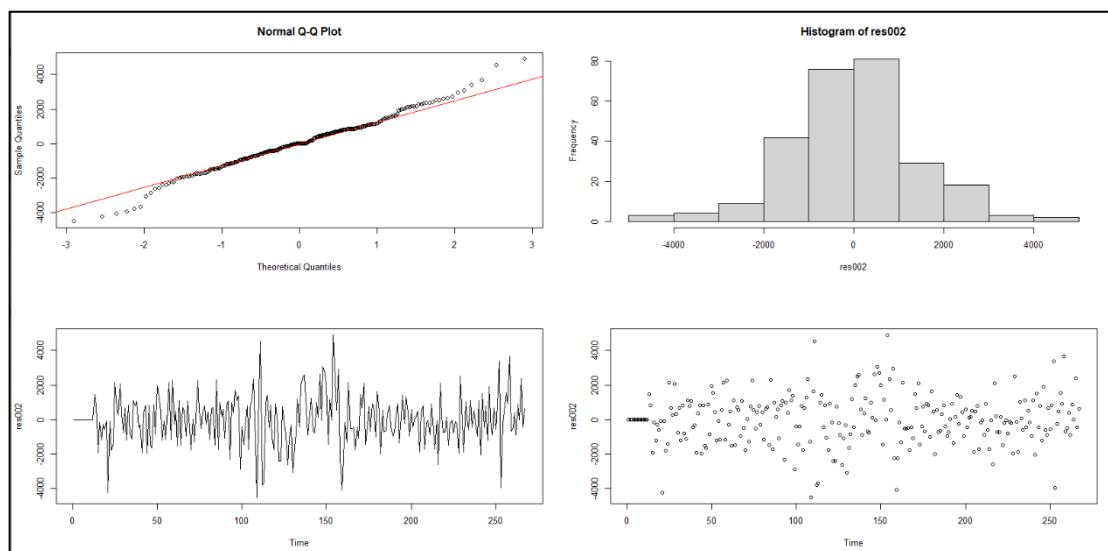


圖 9.20 SARIMA(1,0,3)x(2,1,0)₁₂ 殘差常態檢驗結論

由圖 9.20 殘差檢驗，各方面判定其殘差應是在 0 附近跳動、直方圖近似左右對稱、由 Q-Q plot 判定應也不符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

```
shapiro-wilk normality test
data:  res002
w = 0.98754, p-value = 0.02074
```

圖 9.21 SARIMA(1,0,3)x(2,1,0)₁₂ Shapiro-Wilk normality test

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是符合不常態分配的。

九、使用 3 次方 regression 來 de-trend 進行 order 選取

method.2 檢驗殘差是否相關

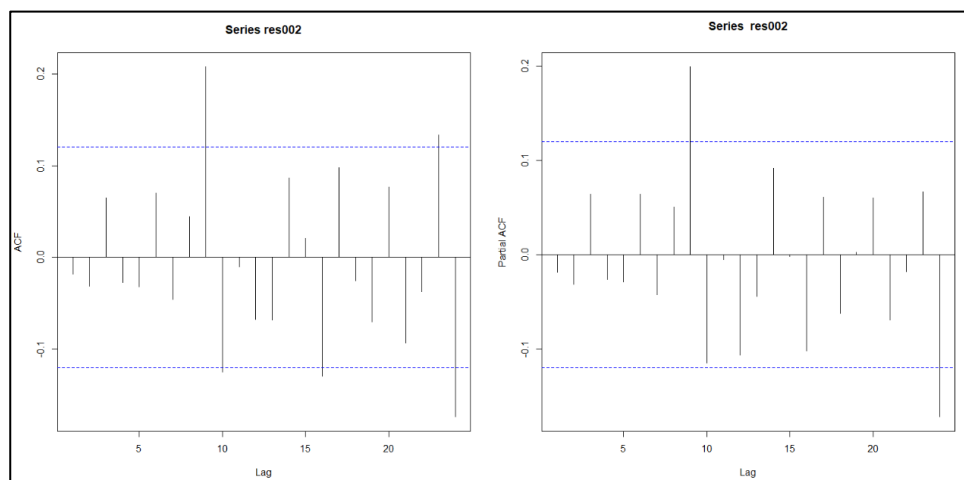


圖 9.22 SARIMA(1,0,3)x(2,1,0)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

根據圖 9.22 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差大抵在顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，假設誤差是 white noise 是不可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定 H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

由 圖 9.23 所示 Ljung Box test 大部分都未通過，此模型是一個配適不佳的選擇。

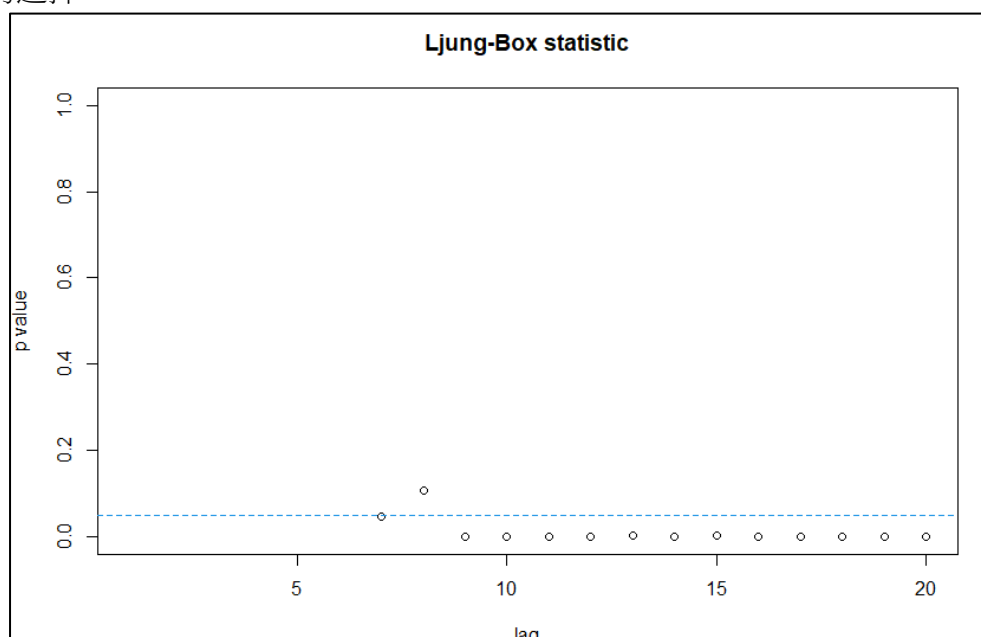


圖 9.23 Ljung Box test for SARIMA (1,0,3)x(2,1,0)₁₂

九、使用 3 次方 regression 來 de-trend 進行 order 選取

【3 次方 de-trend 及季節性差分模型診斷-SARIMA(1,0,3)x(1,1,0)₁₂】

method.1 檢驗殘差是否符合常態

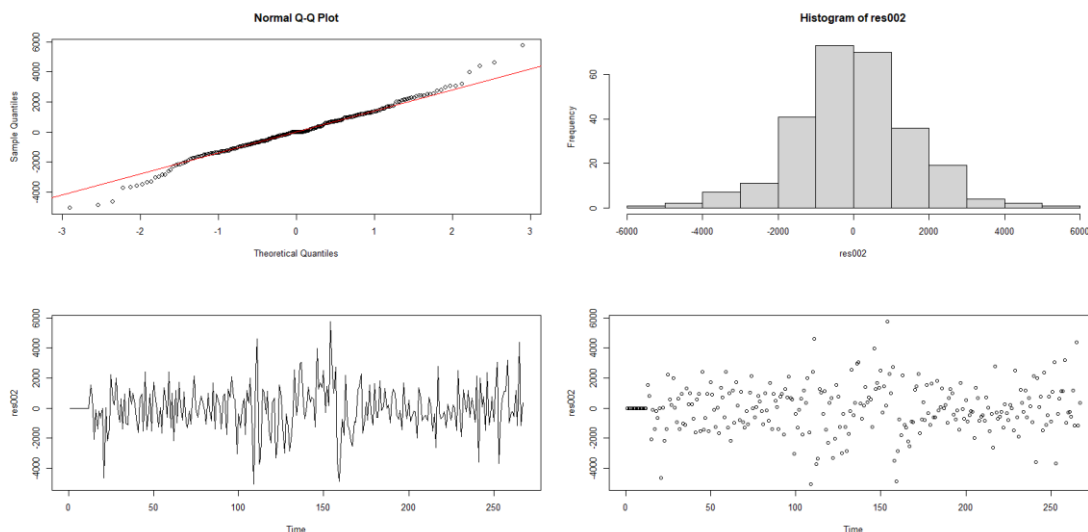


圖 9.24 SARIMA(1,0,3)x(1,1,0)₁₂ 殘差常態檢驗結論

由圖 9.24 殘差檢驗，各方面判定其殘差應是在 0 附近跳動、直方圖近似左右對稱、由 Q-Q plot 判定應也不符合常態。但為求謹慎，我們決定再進行 Shapiro-Wilk normality test，此檢定虛無假設為資料來自於常態，而對立假設則為資料不來自於常態，檢定結果如下：

```
shapiro-wilk normality test
data:  res002
W = 0.98547, p-value = 0.008278
```

圖 9.25 SARIMA(1,0,3)x(1,1,0)₁₂ Shapiro-Wilk normality test

根據檢定結果，在 $\alpha=0.05$ 下，我們會 reject H_0 ，拒絕虛無假設：資料來自於常態，宣稱殘差是符合不常態分配的。

九、使用 3 次方 regression 來 de-trend 進行 order 選取

method.2 檢驗殘差是否相關

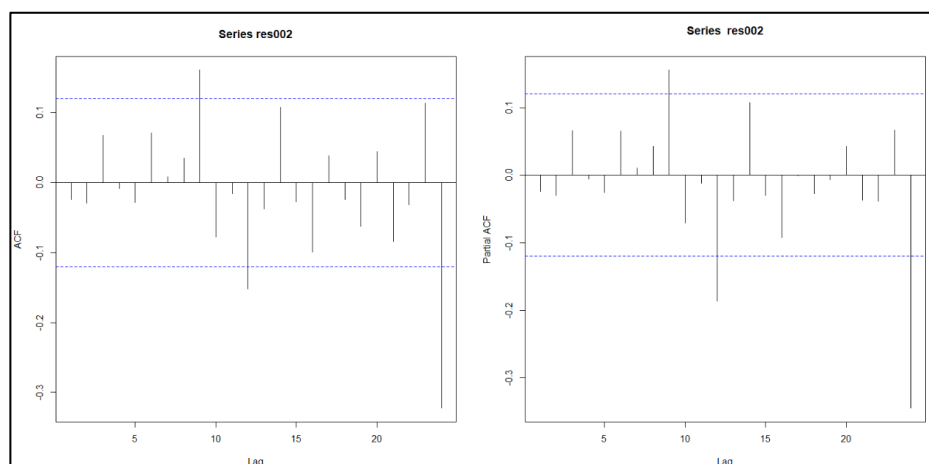


圖 9.25 SARIMA(1,0,3)x(1,1,0)₁₂ 殘差 ACF 與 PACF 圖

根據圖 9.25 殘差的 ACF 與 PACF 圖，殘差大抵在顯著線以下，顯示殘差間大致上無相關性，假設誤差是 white noise 是不可以被接受的。

method.3 檢驗模型配適是否適合

接著使用 Ljung Box test 來檢驗模型是否配適得宜，此檢定 H_0 : the fitted model is adequate H_1 : the fitted model is not adequate

由圖 9.26 所示 Ljung Box test 大部分都未通過，此模型是一個配適不佳的選擇。

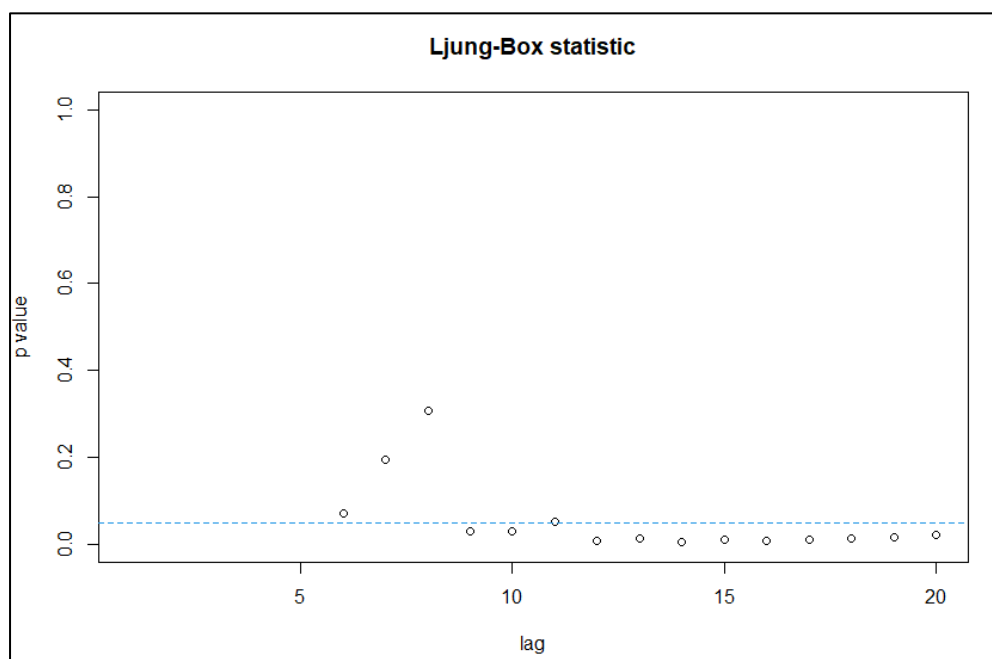


圖 9.26 Ljung Box test for SARIMA (1,0,3)x(1,1,0)₁₂

十、3 次方 de-trend 及季節性差分模型選擇

表 10.1 模型選取比較

	Log likelihood	AIC	Ljung Box
SARIMA(1,0,3)x(1,0,3) ₁₂	-2302.32	4622.64	還算良好
SARIMA(0,0,3)x(1,0,3) ₁₂	-2312.71	4641.42	不佳
SARIMA(1,0,3)x(3,1,0) ₁₂	-2219.19	4452.38	不佳
SARIMA(1,0,3)x(2,1,1) ₁₂	-2199.68	4413.36	良好
SARIMA(1,0,3)x(2,1,0) ₁₂	-2225.13	4462.26	不佳
SARIMA(1,0,3)x(1,1,0) ₁₂	-2243.68	4497.36	不佳

依據 log likelihood 越大越好、AIC 越小越好及 Ljung Box 檢定情形選定出 SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂ 模型：

$$(1 - 0.0571B^{12} - 0.1440B^{24})(1 - 0.7210B)(1 - B^{12})X_t = (1 - 0.9359B)(1 - 0.6170B + 0.1703B^2 + 0.2004B^3)Z_t, Z_t \sim (0,1)$$

十一、3 次方 de-trend 及季節性差分預測

在建立模型時，我們保留最後 12 期（2022 年 4 月到 2023 年 3 月）出生資料來驗證我們的預測值與實際值差異於表 11.1，並繪製 12-step 預測的時間序列圖 11.1。

表 11.1 模型選取預測結果

	實際值	預測值	95%預測下界	95%預測上界	預測誤差	時間
1-step	11222	10775.88	8125.589	13426.16	-446.12337	111/4
2-step	9442	11374.76	8677.880	14071.65	1932.76336	5
3-step	10943	10867.32	8007.583	13727.06	-75.67764	6
4-step	10950	11539.53	8425.383	14653.68	589.53166	7
5-step	11902	11850.95	8505.321	15196.58	-51.05099	8
6-step	12217	11875.44	8316.728	15434.14	-341.56383	9
7-step	12242	13865.91	10109.337	17622.48	1623.90817	10
8-step	12348	13376.66	9435.100	17318.22	1028.66089	11
9-step	12178	13811.43	9695.982	17926.87	1633.42825	12
10-step	10948	12204.76	7925.241	16484.28	1256.76114	112/1
11-step	10113	10221.30	5786.138	14656.46	108.29879	2
12-step	12506	12964.28	8381.140	17547.42	458.28111	3

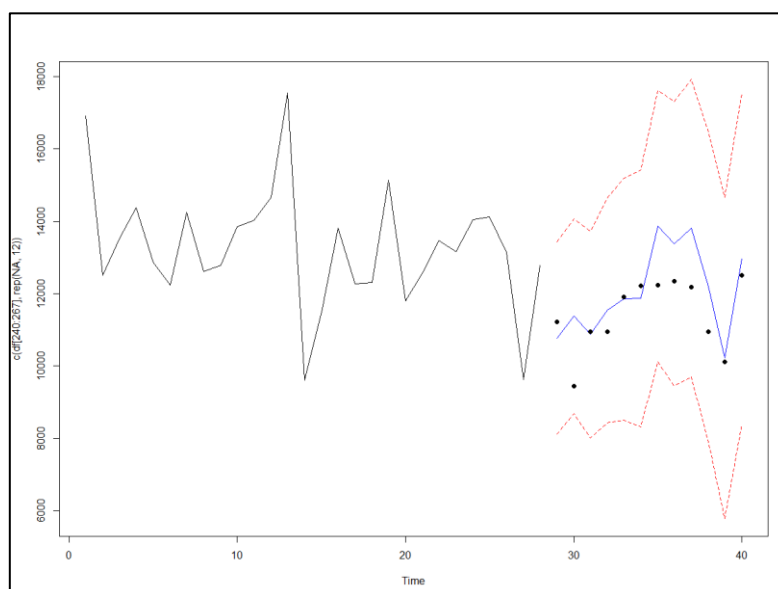


圖 11.1 2022 年 4 月到 2023 年 3 月時間序列預測值實際觀測值比較
圖 11.1 藍色代表預測值、紅線分別代表 95%預測區間上下界、黑色圓點則代表實際值有便於對照。可以從表格及比較圖表發現所有的預測值都有落在預測區間。

十二、結論

比較 2 種方法所做出的預測模型

(1) 季節性差分：SARIMA(4,0,0)x(0,1,1)₁₂

$$(1+0.1758B+0.27441B^2+0.4070B^3+0.1413B^4)(1-B^{12})X_t=(1-0.9734B^{12})$$

$$Z_t, Z_t \sim (0,1)$$

$$MSE : 877658.2$$

(2) 3 次方 de-trend+季節性差分：SARIMA(1,0,3)x(2,1,1)₁₂

$$(1-0.0571B^{12}-0.1440B^{24})(1-0.7210B)(1-B^{12})X_t=(1-0.9359B)(1-$$

$$0.6170B+0.1703B^2+0.2004B^3)Z_t, Z_t \sim (0,1)$$

$$MSE : 1047638$$

依據與預測值與實際值誤差的平方，我們更傾向選擇用較少 order 選取以求更好的 MSE 值，因此 SARIMA(4,0,0)x(0,1,1)₁₂ 作為我們的最後預測模型。

此外，根據我們的 2 預測模型可以看見其容易在極值的時候失準，例如：在出生大月的 10~12 月、而對於 2022 年 5 月的過於樂觀預估細究可能原因為，該月份為國家景氣亮紅燈的時期，而後續月份的回升推測為在 2021 年 7 月以後政府的防疫警戒降為 2 級，同時提供眾多紓困補助來振興經濟。

無論是經由原始資料、預測資料我們都可以得知台灣出生人口與社會經濟、政令的影響可以說是息息相關。給予我們內政部可參酌的施政方向為，若想解決逐漸成為台灣高齡化社會的問題，對於父母經濟補貼政策段期內是有效的沒錯；但長遠之計的策略在於

(1) 政府有沒有帶領國家進入好的景氣

(2) 政府對於好的鼓勵生育時機有沒有把握住

若有掌握此 2 原則，應能對我國的出生人口有很大的幫助。

十三、附錄

1. 本次期末研究報告資料來源：

中華民國統計資訊網

<https://nstatdb.dgbas.gov.tw/dgbasall/webMain.aspx?k=dgmain>

附錄圖 1 中華民國統計資訊網總體統計資料庫

2. 文獻回顧參考資料

王英傑。2015，中央大學 《景氣循環對婚育行為之影響》，p.8

戴庭玉。2011，陽明交通大學 《美國 2007 年至 2009 年引發環球金融風暴的制度因素》，p.7

3. 台灣社會新聞報導回顧參考資料

羅真、何定照、張佳麗、邱苑苓。2019，udn 新聞網

《這些神秘年分 台灣為何生育率掉底又上升》

<https://theme.udn.com/theme/story/6773/3721938>