UNIVERSITATEA ”ALEXANDRU-IOAN CUZA” DIN IAȘI

FACULTATEA DE INFORMATICĂ

LUCRARE DE LICENȚĂ

Evolutie fizica prin Algoritmi Genetici

propusă de

Mihaila Andrei

Sesiunea: Iulie, 2019

Coordonator științific

Asist. dr. Eugen Croitoru

UNIVERSITATEA ”ALEXANDRU-IOAN CUZA” DIN IAȘI

FACULTATEA DE INFORMATICĂ

Evolutie fizica prin Algoritmi Genetici

Mihaila Andrei

Sesiunea: Iulie, 2019

Coordonator științific

Asist. dr. Eugen Croitoru

Avizat,
Îndrumător lucrare de licență,
Asist. dr. Eugen Croitoru.
Data: ..... Semnătura: .....

DECLARAŢIE PRIVIND ORIGINALITATE ŞI RESPECTAREA DREPTURILOR DE AUTOR

Prin prezenta declar că Lucrarea de licenţă cu titlul **Evolutie fizica prin Algoritmi Genetici** este scrisă de mine şi nu a mai fost prezentată niciodată la o altă facultate sau instituţie de învăţământ superior din ţară sau străinătate. De asemenea, declar că toate sursele utilizate, inclusiv cele preluate depe Internet, sunt indicate în lucrare, cu respectarea regulilor de evitare a plagiatului:

- toate fragmentele de text reproduse exact, chiar şi în traducere proprie din altă limbă, sunt scrise între ghilimele şi deţin referinţa precisă a sursei;
- reformularea în cuvinte proprii a textelor scrise de către alţi autori deţine referinţa precisă;
- codul sursă, imagini etc. preluate din proiecte open-source sau alte surse sunt utilizate cu respectarea drepturilor de autor şi deţin referinţe precise;
- rezumarea ideilor altor autori precizează referinţa precisă la textul original.

Data: ..... Semnătura: .....

Declarație de consimțământ

Prin prezenta declar că sunt de acord ca lucrarea de licență cu titlul **Evolutie fizica prin Algoritmi Genetici**, codul sursă al programelor și celelalte conținuturi (grafice, multimedia, date de test, etc.) care însoțesc această lucrare să fie utilizate în cadrul Facultății de informatică.

De asemenea, sunt de acord ca Facultatea de informatică de la Universitatea ”Alexandru-Ioan Cuza” din Iași, să utilizeze, modifice, reproducă și să distribuie în scopuri necomerciale programele-calculator, format executabil și sursă, realizate de mine în cadrul prezentei lucrări de licență.

Absolvent **Mihaila Andrei**

Data: ..... Semnătura: .....

Cuprins

Motivație

motivatie

Introducere

Prin creearea unui motor fizic 3D, avem ca scop simularea aproximata a unor actiuni fizice, ce au loc in lumea reala.

Capitolul 1

Related Work

In prezent, exista mai multi algoritmi genetici ce sunt devoltati pentru a perfectiona o actiune fizica sau pentru a optimiza probleme prin selectie naturala.

1.1 Locomotie prin algoritmi evolutivi

1.1.1 Cell Evolution

O incercare de a simula evolutia locomotiei de la un nivel celular apare in articolul **Fine grained artificial development for body-controller coevolution of soft-bodiedanimats** [1] [2].

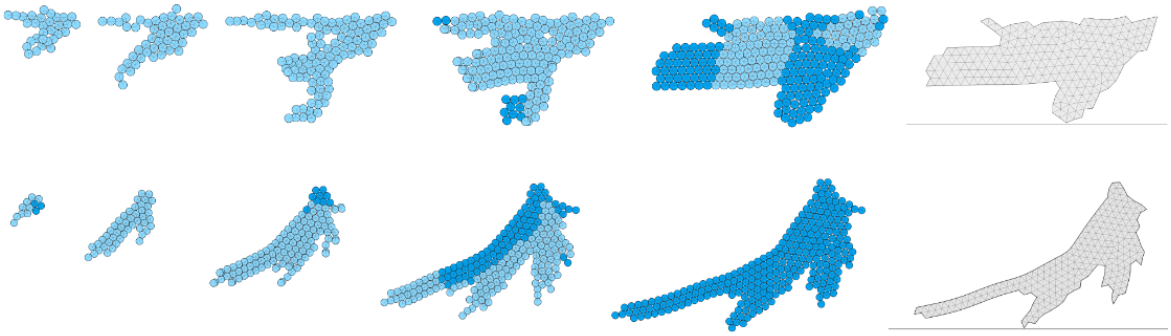
Procesul evolutionar incepe de la o singura celula ce sufera divizie celulara. O celula este reprezentata de un disc ce sufera coliziuni elastice simulate prin arcuri cu alte celule. O celula are o pozitie, viteza, si o orientare ce reprezinta directia diviziunii celulare. O celula se poate "contracta" iar compartamenul acesteia este controlat de o retea neuronala si poate fi afectata de celulele din jur.

Pentru procesul de evolutie a fost folosit **NEAT**[3], *neuroevolution of augmenting topologies Stanley and Miikkulainen, 2002*. Populatia aleasa a fost $\lambda = 300$ cu genomi de lungimi arbitrare si 2000 de generatii.

[1] https://www.mitpressjournals.org/doi/pdf/10.1162/978-0-262-32621-6-ch040

[2] https://www.youtube.com/watch?v=CXTZHHQ7ZiQ

[3] http://nn.cs.utexas.edu/downloads/papers/stanley.ec02.pdf



source: `https://www.mitpressjournals.org/doi/pdf/10.1162/978-0-262-32621-6-ch040`

video example:

`https://www.youtube.com/watch?v=Q6XXohgPP4A&feature=youtu.be`

Evolutia unui embrion rezultat. Fiecare celula luminoasa reprezinta o celula ce este pregatita de divzie celulara.

1.1.2 Muskoscheletal Evolution

Articolul **Flexible Muscle-Based Locomotion for Bipedal Creatures**[4] ce a simulat locomotia prezinta un algoritm evolutiv ce foloseste CMA-ES [5] (*covariance matrix adaptation evolution strategy*) cu o populatie $\lambda = 20$ si step-size $\sigma = 1$. Modul in care au optimizat problema a fost de a minimiza eroarea $E(K)$:

$$E(K) = E_{speed} + E_{headori} + E_{headvel} + E_{slide} + E_{effort}$$

Acestia reusesc sa optimizeze un set de muschi si incheieturi 3D pentru a obtine indivizi finali, care pot ajunge la o viteza dorita, fac fata unui teren inegal si a evenimentelor externe.

1.1.3 Joint Evolution

Un alt algoritm genetic, numit **Genetic Walkers** [6] incearca sa simuleze o miscare in 2D. Spre deosebire de abordarea anterioara acest algoritm optimizeaza distanta dintre *head* fata de *feet*, distanta pe care fiecare individ reuseste sa o parcurga. De asemenea

[4] `https://www.cs.ubc.ca/~van/papers/2013-TOG-MuscleBasedBipeds/2013-TOG-MuscleBasedBipeds.pdf`

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/CMA-ES`

[6] `https://rednuht.org/genetic_walkers/`

fiecare individ primeste 100 de puncte in fitness pentru fiecare pas corect realizat. Spre deosebire de primul articol, selectia se realizeaza prin o functie f, $f(k) = \frac{1}{k+2}$, unde k este indexul unui cromozom, ordonati in ordinea fitnessului. Primii doi cromozomi alesi vor realiza un copil in generatia urmatoare. Optimizarea se face asupra unghiului unui joint si a duratei de timp.

1.1.4 Concluzii

Ambii algoritmi lucreaza cu un corp 3D fixat de la inceput, dar evolueaza miscarea in moduri diferite, unul lucureazaza low-level, cu un schelet muscular iar altul strict cu rotatia unui joint. Algoritmul low level produce rezultate [7] mult mai fidele in timp ce al doilea algoritm reuseste sa faca 3 pasi dupa 500 de generatii.

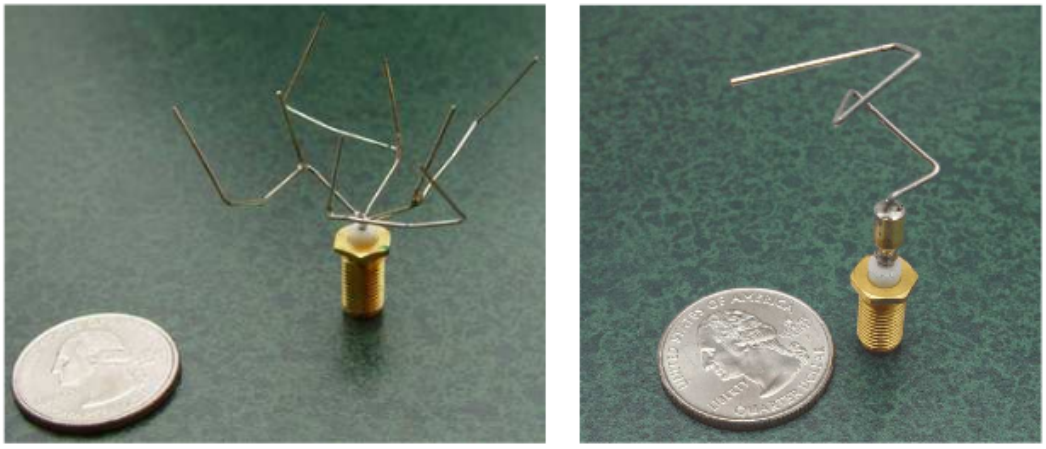
[7] https://www.youtube.com/watch?v=pgaEE27nsQw

1.2 Algoritmi evolutivi in cercetare

1.2.1 Evolved Antenna

In radio comunicatii, o **Antena Evoluata** [8] repreza o antena proiectata complet sau partial de un algoritm genetic.

Pentru a gasi solutii pentru probleme noi, cum ar fi detectarea anumitor radiatii, au fost incercati algoritmii genetici, iar in 2006, in cadrul misiunii *Space Technology 5* [9], a fost dezvoltata prima antena folosita in spatiu. Urmatoarele doua antene au fost proiectate de catre un algoritm genetic:



(a) (b)

source: *https://ti.arc.nasa.gov/m/pub-archive/1244h/1244%20(Hornby).pdf*

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Evolved_antenna

[9] https://ti.arc.nasa.gov/m/pub-archive/1244h/1244%20(Hornby).pdf

Capitolul 2

Tehnologii Folosite

Pentru implementarea propriu-zisa a licentei, a fost utilizat un anumit set de tehnologii, care sa ajute la implementarea motorului fizic si a algoritmului genetic de la un nivel cat mai primitiv, de unde sa poate fie modelat orice tip de comportament dorit.

2.1 C++

Mediul de lucru este C++17 [1]sub Visual Studio 2019. C++ a fost ales in principal datorita performantei si a experientei anterioare. Prin intermediul OOP au fost create structuri pentru o implementare cat mai naturala a motorului fizic si a algoritmului genetic.

2.2 OpenGL

Reprezentarea grafica se realizeaza cu ajutorul librariei OpenGL 3.3[2]. Motivatia librariei OpenGL a fost atat introducerea ei in Anul 3 cat si permitarea implementarii cat mai primitiva a motorului fizic.

2.3 OpenGL Mathematics (GLM)

Fiind un motor fizic, este necesar ca toate calculele matematice sa fie realizate cat mai corect si rapid, astfel libraria GLM [3] a fost aleasa pentru viteza si compatibilitatea

[1] http://www.cplusplus.com/

[2] https://www.opengl.org/

[3] https://glm.g-truc.net/0.9.9/index.html/

ei cu OpenGL.

Principalele structuri folosite din GLM au fost:

- glm::vec2/glm::vec3/glm::vec4
- glm::quat, (glm quaternions). Motivatia quaternionilor in favoarea matricelor de rotatie a fost performanta si evitarea problemelor unghiurilor euler, cum ar fi Gimbal Lock [4]
- glm::mat3/glm::mat4

Librarii alternative au fost: Eigen [5] si CML [6]. Fiecare librarie aduce un anumit punct forte, GLM a fost ales pentru compatibilitatea cu OpenGL. Rezultatele exacte sunt urmatoarele:

	laptop	laptop (SSE)	armeabi	armeabi-v7a	armeabi-v7a with neon
Eigen additions	8065	30	9944	2181	2145
Eigen multiplications	22404	86	59460	5143	5113
GLM additions	2375	76	10256	1506	1407
GLM multiplications	7337	400	59008	2189	3108
CML additions	12336	96	9587	2885	2996
CML multiplications	21603	551	58399	5306	5280

source: https://github.com/mfoo/Math-Library-Test [7]

2.4 GLFW

Pentru initializarea ferestrei OpenGL a fost folosit GLFW [8]. Aceasta librarie ofera in mod simplistic un context OpenGL si mai multe optiuni cum ar fi VSync sau DoubleBuffering. De asemenea, keyboard si mouse events sunt capturate prin GLFW.

Alternative au fost : GLUT [9]. GLFW a fost ales in favoarea GLUT deoarece pe masina unde a fost dezvoltata aplicatia, GLUT nu reusea sa intanstieze OpenGL 3.3+.

2.5 Concluzii

C++ impreuna cu OpenGL si GLM ofera un mediu de lucru cat mai aproape de procesor si in acelasi timp un set de structuri si unelte pentru dezvoltarea naturala a

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal_lock/
[5] http://eigen.tuxfamily.org/index.php?title=Main_Page
[6] https://github.com/demianmnave/CML/wiki/The-Configurable-Math-Library
[7] https://github.com/mfoo/Math-Library-Test
[8] https://www.glfw.org/
[9] http://freeglut.sourceforge.net/

Motorului Fizic. Pentru algoritmului genetic, C++ contine deja tot de ce este nevoie si permite implementarea unui algoritm genetic rapid, ”from scratch”.

Capitolul 3

Mediul Fizic

Algoritmul genetic isi va optimiza problema in functie de mediul fizic oferit. Asta inseamna ca putem simula orice conditii fizice atat timp cat le putem reproduce. In cazul curent a fost simulat un mediu terestru cu $g = 9.8m/s$. Mediul fizic incearca sa aproximeze fenomene fizice naturale folosind formule matematice.

3.1 Integrarea ecuatiilor miscarii dupa dt

Stiind ca $F = ma$ atunci putem scoate acceleratia unui obiect in functie de masa acestuia: $a = F/m$. Daca integram dupa timp atunci $dv/dt = a$ dar nu uitam ca $a = F/m$ deci putem spune ca viteza unui obiect va fi rata de schimbare a pozitiei acestuia in functie de timp $dx/dt = v$.

Punand tot cap la cap obtinem:

$$a = F/m$$
$$dv = a * dt$$
$$dx = dv * dt$$

Deci daca vrem sa obtinem pozitia unui obiect dupa un anumit dt vom calcula in urmatorul mod:

$$a = F/m$$
$$v = v + a * dt$$
$$pos = pos + v * dt$$

Acesta este modul de integrare Semi-Implicit Euler.

3.1.1 Moduri de integrare

Exista mai multe moduri te integrare, cel prezentat mai sus este Semi-Implicit Euler.

Explicit euler integreaza pozitia inaintea vitezei si anume:

$$dx = dv * dt$$
$$a = F/m$$
$$dv = a * dt$$

Astfel apare o eroare in integrarea vitezei, iar aceasta depinde de timp. De exemplu aplicam o forta $F = 10N$ asupra unui corp de masa m, $m = 1kg$ timp de 10 secunde ($t = 10s$). Folosind formula miscarii uniforme $x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$ atunci $x = 500$, deci conform formulei, corpul se va misca 500 de unitati. Rezultatele integratorilor difera si anume:

Eroarea integratorului Explicit Euler creste in functie de dt ales. Pentru $dt = 1.0$:

```
t = 1,  position = 0
t = 2,  position = 10
t = 3,  position = 30
t = 4,  position = 60
t = 5,  position = 100
t = 6,  position = 150
t = 7,  position = 210
t = 8,  position = 280
t = 9,  position = 360
t = 10,  position = 450
```

La fel si pentru Semi-Implicit Euler

```
t = 1,  position = 10
t = 2,  position = 30
t = 3,  position = 60
t = 4,  position = 100
t = 5,  position = 150
t = 6,  position = 210
t = 7,  position = 280
t = 8,  position = 360
t = 9,  position = 450
t = 10,  position = 550
```

Se observa ca ambele integratoarea au acelasi grad de eroare, dar Semi-Implicit euler are o eroare in fata, comparat cu rezultatul cautat $x = 500$ in timp ce Explicit-Euler este in urma. Eroare ambelor integratoare scade in functie de dt, si anume pentru $dt = 0.5$ si $dt = 0.016$ (timpul unui frame pentru on monitor cu o rata de reimprospatare de 60Hz):

Explicit Euler, dt=0.5 & dt = 0.016

```
t = 5.5,  position = 137.5
t = 6,  position = 165
t = 6.5,  position = 195
t = 7,  position = 227.5
t = 7.5,  position = 262.5
t = 8,  position = 300
t = 8.5,  position = 340
t = 9,  position = 382.5
t = 9.5,  position = 427.5
t = 10,  position = 475
```

```
t = 9.856000000000007,  position = 484.9151999999955
t = 9.872000000000007,  position = 486.49215999999547
t = 9.888000000000007,  position = 488.07167999999547
t = 9.904000000000007,  position = 489.65375999999543
t = 9.920000000000007,  position = 491.2383999999954
t = 9.936000000000007,  position = 492.8255999999954
t = 9.952000000000007,  position = 494.41535999999536
t = 9.968000000000007,  position = 496.00767999999533
t = 9.984000000000007,  position = 497.6025599999953
t = 10.000000000000007,  position = 499.19999999999527
```

Semi-Implicit Euler, dt=0.5 & dt = 0.016

```
t = 5.5,  position = 165
t = 6,  position = 195
t = 6.5,  position = 227.5
t = 7,  position = 262.5
t = 7.5,  position = 300
t = 8,  position = 340
t = 8.5,  position = 382.5
t = 9,  position = 427.5
t = 9.5,  position = 475
t = 10,  position = 525
```

```
t = 9.856000000000007,  position = 486.49215999999547
t = 9.872000000000007,  position = 488.07167999999547
t = 9.888000000000007,  position = 489.65375999999543
t = 9.904000000000007,  position = 491.2383999999954
t = 9.920000000000007,  position = 492.8255999999954
t = 9.936000000000007,  position = 494.41535999999536
t = 9.952000000000007,  position = 496.00767999999533
t = 9.968000000000007,  position = 497.6025599999953
t = 9.984000000000007,  position = 499.19999999999527
t = 10.000000000000007,  position = 500.79999999999524
```

Pentru $dt = 0.016$ integratorul Semi-Implicit Euler obtine o eroare $\epsilon = 0.79$ iar integratorul Explicit Euler $\epsilon = 0.81$, deci Semi-Implicit Euler este mai bun cu $\epsilon = 0.02$ fara nici un cost suplimentar din punct de vedere al timpului de calcul sau a memoriei folosite.

3.2 Rigid Bodies

Un corp rigid este un corp ce nu sufera deformatii in niciul fel. In cadrul algoritmului genetic si a mediului fizic, orice obiect este considerat un corp rigid cu un anumit factor de elasticitate $\sigma \in [0, 0.7]$. Avand in considerare scopul curent al algoritmului genetic, au fost alese cuburi cu $l = 1$.

3.3 Coliziuni

Din moment ce calcularea fitnessului are loc in mediul fizic, este nevoie ca simularea sa se efectueze cat mai repede, astfel se va recurge la verificarea coliziunii in 2 faze.

3.3.1 Intersectie intre doua sfere

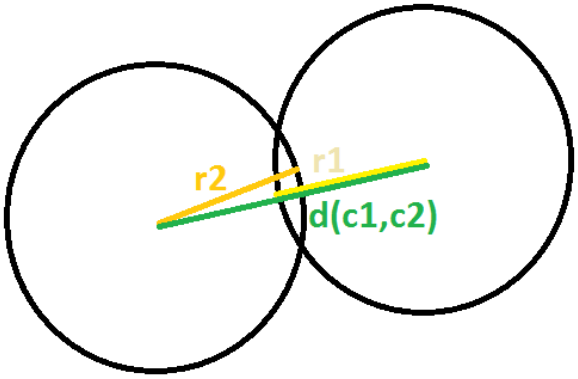
Primul pas in detectarea unei coliziuni va fi compararea intre 2 sfere $S1, S2$ ce se realizeaza in mod rapid:

$$\textit{if } d(C_{S1}, C_{S2}) < (r_{S1} + r_{S2}) \textit{ then further checks... else false}$$

Fiecare obiect va fi invelit intr-o sfera de raza r:

$$r = d_{max}((0,0), v) \text{ unde } v \in Vertexes.$$

Astfel la fiecare frame, este necesar in prima faza doar o verificare de coliziune intre sfere, fapt care salveaza mult timp.



exemplu coliziune intre 2 sfere

3.3.2 Intersectie intre doua triunghiuri

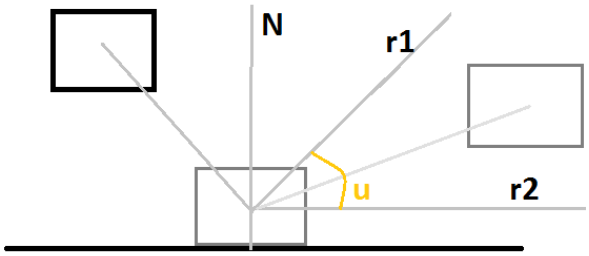
Odata trecut cazul intersectiei intre doua sfere, pasul urmatorul este cautarea unui punct de intersectie intre triunghiurile obiectelor. Acest lucru se realizarea prin verificarea intersectiei dintre doua triunghiuri pentru toate perechile a cate doua triunghiuri dintre cele doua obiecte.

Articolul **A Fast Triangle-Triangle Intersection Test** [1] prezinta un mod optimizat de a realiza testul de intersectie si a fost folosit in cadrul implementarii.

3.4 Efectul unei coliziuni

In cazul nostru, coliziunile au loc doar intre indivizi si corpuri imobile. Astfel s-a folosit un mod simplu de impuls linear.

[1] `http://web.stanford.edu/class/cs277/resources/papers/Moller1997b.pdf`



Normala la contact N se calculeaza din coordinatele varfurilor. Pentru un triunghi $T(p_1, p_2, p_3)$ unde p_0, p_1, p_2 sunt varfurile de forma $p(x, y, z)$, atunci

$$N = (p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0)$$

In functie de coeficientul de elasticitate μ al corpului, vectorul directie rezultat in urma coliziunii va fi intre $[r1, r2]$.

- $\mu = 1$. Are loc o coliziune perfect elastica, fara pierdere de energie. Vectorul rezultat este r1. Acest caz a fost eliminat din algoritmul genetic.
- $\mu \in [0.9, 0)$. Are loc o coliziune inelastica, o parte din energia cinetica este pierduta. Vectorul rezultat va fi intre $[r1, r2]$.
- $\mu = 0$. Are loc o coliziune perfect inelastica, obiectul va urma directia $r2$.

Capitolul 4

Algoritmul Genetic

Problema propusa algoritmului genetic este gasirea unei traiectorii catre o tinta intr-un spatiu 3D cu posibile obstacole dat un proiectil fix si o forta de aplicare $F = 50N$ cu $dt = 50ms$.

S-a inceput cu o populatie $\lambda = 100$ si 50 de generatii pentru teste relativ simple.

4.1 Cromozom

Vectorul forta F necesar pentru a reprezenta o traiectorie este $F(F_x, F_y, F_z)$, fiecare reprezentand forta aplicata pe fiecare axa exprimata in newtoni. De asemenea in cazul reflectarii de pe suprafete/alte obstacole fiecare obiect are nevoie de un anumit factor de elasticitate $\mu \in [0, 0, .7]$.

In acest caz putem forma un cromozom din 4 numere naturale, F putand fi exprimat in urmatorul mod:

- F_x, 6 biti ce reprezinta o forta $F \in [0, 63]$
- F_y, 6 biti ce reprezinta o forta $F \in [0, 63]$
- F_z, 6 biti ce reprezinta o forta $F \in [0, 63]$
- μ, 3 biti ce reprezinta o elasticitate $\mu \in [0, 7]$

Astfel un cromozom este un sir de lungime fixa pentru orice individ de lungime $l = 21$.

$$\underbrace{001010}_{10}\ \underbrace{001111}_{15}\ \underbrace{000000}_{0}\ \underbrace{100}_{4}$$

Exemplu un cromozom cu $F(10, 15, 0), \mu = 0.4$

Lungimea de 6 biti pentru F_x, F_y, F_z a fost aleasa cu motivatia ca o forta de $63N$ este de ajuns pentru a muta un cub cu masa de $1kg$ intr-un spatiu relativ mic, ceea ce este de ajuns pentru a crea mai multe nivele de dificultate.

Pentru populatia initiala fiecare cromozom primeste 4 valori randomizate pentru cele 4 variabilare posibile. Alte posibilitati au fost randomizarea unei singure variabile sau a unei valori de 21 de biti. Dupa fiecare calcul al fitnessului, indivizii sunt sortati dupa fitness pentru a fi pregatiti pentru selectie.

4.2 Fitness

Fitnessul se calculeaza in doua moduri in functie de rezultatul fiecarui individ:

- In cazul in care un individ loveste tinta, atunci $f(x) = dt$, unde- dt este timpul in care individul ajunge din punctul de start la tinta.
- In caz contrar, $f(x) = d(x) * max_{dt}$, unde $d(x)$ este distanta individului fata de tinta in momentul max_{dt}, iar max_{dt} este durata de timp maxima alocata unui test.

Pentru rularea cat mai rapida a testului, coliziunea dintre indivizi este dezactivata pentru a putea fi testata o intreaga generatie in acelasi timp. Acest lucru permite si vizualizarea unei generatii.

4.3 Selectie

Modul de selectia utilizat a fost Tournament Selection.

In fiecare generatie pot exista un total de n tournamnets, $n \in [1, 3]$. Pentru fiecare tournamnet se alege in mod uniform din populatie un individ ce nu a castigat deja un tournament anterior. In fiecare tournament pot exista maxim $3 * n$ participanti, iar cei mai buni 2 indivizi din fiecare tournament sunt selectati pentru crossover,mutatie si sunt adaugati in generatia urmatoare. Pentru a crea noua populatie, sunt adaugati in ordinea fitnessului cromozomii din generatia precedenta pana cand $\lambda = 100$.

4.4 Crossover

Crossover se realizeaza in mod classic intre doi parinti, dupa un indice complet random. Prima parte a primului parinte legata de a doua parte a partenerului.

Exemplu crossover intre un cromozom cu $\{F_1(10, 15, 0), \mu_1 = 4\}$ si $\{F_2(33, 11, 5), \mu_7 = 4\}$ la indicele $i = 11$:

$$\underbrace{001010}_{10}\ \underbrace{001111}_{15}\ \underbrace{000000}_{0}\ \underbrace{100}_{4}$$

$$+$$

$$\underbrace{100001}_{33}\ \underbrace{001011}_{11}\ \underbrace{000101}_{5}\ \underbrace{111}_{7}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{001010}_{10}\ \underbrace{001111}_{15}\ \underbrace{000101}_{5}\ \underbrace{111}_{7}$$

Numarul de indivizi prezenti in populatia $i + 1$ rezultati prin crossover este maxim n unde n este numarul de tournamente ce au avut loc in populatia i. Alta alternativa de crossover a fost Two-point Crossover. Tehnica Single point crossover a fost aleasa pentru a mentine stilul clasic de lucru al algoritmului genetric.

4.5 Mutatie

Folosind tournament selection, mutatiile au loc doar asupra castigatorilor. Fiecare castigator sufera o mutatie de un bit asupra cromozomului, iar cromozomul mutat ajunge in generatia urmatoare. Alte modalitati au fost posibila mutatie a oricarui cromozom din population si un procentaj de mutatie comparat cu o mutatie fixa de 1 bit.

Capitolul 5

Rezultate

Concluzii

conclusions

Bibliografie

- Kenneth O. Stanley, Risto Miikkulainen. **Evolving Neural Networks through Augmenting Topologies**, http://nn.cs.utexas.edu/downloads/papers/stanley.ec02.pdf
- Michał Joachimczak, Reiji Suzuki, Takaya Arita. **Fine grained artificial development for body-controller coevolution of soft-bodiedanimats**, https://www.mitpressjournals.org/doi/pdf/10.1162/978-0-262-32621-6-ch040
- Thomas Geijtenbeek, Michiel van de Panne, A. Frank van der Stappen. **Flexible Muscle-Based Locomotion for Bipedal Creatures** https://www.cs.ubc.ca/~van/papers/2013-TOG-MuscleBasedBipeds/2013-TOG-MuscleBasedBipeds.pdf
- Rafael Matsunaga. **Genetic Walkers**, https://rednuht.org/genetic_walkers/
- **Evolved Antenna** https://en.wikipedia.org/wiki/Evolved_antenna
- Gregory S.Hornby and Al Globus, Derek S. Linden, Jason D. Lohn. **Automated Antenna Design with Evolutionary Algorithms** https://ti.arc.nasa.gov/m/pub-archive/1244h/1244%20(Hornby).pdf
- Martin Foot. **Math-Library-Test**, https://github.com/mfoo/Math-Library-Test
- Glenn Fiedler. **Integration Basics** https://web.archive.org/web/20190405191806/https://gafferongames.com/post/integration_basics/
- Glenn Fiedler. **Physics in 3D** https://web.archive.org/web/20181107181511/https://gafferongames.com/post/physics_in_3d/
- Glenn Fiedler. **Fix Your Timestep!** https://web.archive.org/web/20190403012130/https://gafferongames.com/post/fix_your_timestep/

- Glenn Fiedler. **Collision Response and Coulomb Friction** https://web.archive.org/web/20181107181448/https://gafferongames.com/post/collision_response_and_coulomb_friction/
- Tomas Moller. **A Fast Triangle-Triangle Intersection Test** http://web.stanford.edu/class/cs277/resources/papers/Moller1997b.pdf