

Examen práctica

Andy Zhao

June 2025

1 Funciones 1

a) Dada la función

$$f(x) = \frac{\sin x + \sin(x+1)}{\cos x - \cos(x+1)}$$

en el intervalo $x \in (0, 2\pi)$.

Calcula su derivada simplificándola en lo posible y dibuje la función. [1 pt]

b) Dada la función

$$g(x) = \ln(1+x^2)$$

Estudie el dominio, las zonas de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad. También los puntos máximos/mínimos y los puntos de inflexión. [1 pt]

c) Represente la gráfica de $g(x)$ utilizando los datos obtenidos. [0.5 pts]

2 Funciones 2

a) Represente de forma aproximada la recta $x = 1$ y las curvas $y = \frac{x^2}{2}$ y $y = \frac{4}{x}$, señale el recinto del plano limitado por ellas. Calcule el área del dicho recinto. [1 pt]

b) Calcule el área comprendida entre la curva $f(x) = \frac{3}{6+2x^2}$, el eje de las abscisas y las rectas verticales que pasan por sus puntos de inflexión. [1 pt]

c) Calcule la integral

$$\int \frac{2}{x^2 - 4x} dx$$

[0.5 pts]

3 Matrices

a) Considere la matriz

$$S = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule el determinante de S y encuentre la matriz S^{2025} . [0.75 pts]

b) Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro k

$$(k-1)y + (k^2-1)z = 0$$

$$(4k+1)x - y - 7z = 1$$

$$x + y + z = 0$$

Resuelva el sistema para $k = 1$. [1 pt]

c) Determine la relación que debe existir entre a y b para que el punto $P = (0, a, b)$ esté en el plano determinado por los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ y $C = (0, 2, 1)$. [0.75 pts]

4 Geometría de espacio

a) Considere los planos $\pi_1 : x + y = 1$, $\pi_2 : ay + z = 0$ y $\pi_3 : x + (1+a)y + az = a+1$. Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto de intersección? [1 pt]

b) Para $a = 0$, determine la posición relativa de los planos. [0.5 pts]

c) Dados los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 1)$ Encuentre la ecuación del plano que pasa por puntos A, B y C . Encuentre la ecuación de la recta perpendicular al plano y que pase por el punto $(0, 0, 1)$. [1 pt]

5 Integrales

Resuelva las siguientes integrales.

a)

$$\int e^{\sqrt{x}} dx$$

[0.5 pts]

b)

$$\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx$$

[0.5 pts]

c)

$$\int \frac{\ln x + 1}{x^x + x^{-x}} dx$$

[1.5 pts]