

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
WYDZIAŁ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
KATEDRA FIZYKI TEORETYCZNEJ

Rozprawa doktorska

**Mody Majorany
w jednowymiarowych układach
z oddziaływaniami wielociłowymi**

Andrzej Więckowski

Promotor:

**prof. dr hab.
Marcin Mierzejewski**

Promotor pomocniczy:

dr Bartłomiej Gardas

Wrocław 2020

Oświadczenie autora

Ja, niżej podpisany Andrzej Więckowski, doktorant Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej, o numerze albumu: 6618, autor pracy dyplomowej pt. *Mody Majorany w jednowymiarowych układach z oddziaływaniami wielociałowymi*, oświadczam, że ww. praca dyplomowa:

- została przygotowana przeze mnie samodzielnie,
- nie narusza praw autorskich w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tekst jednolity Dz. U. z 2019 r., poz. 1231) oraz dóbr osobistych chronionych prawem cywilnym,
- nie zawiera danych i informacji, które uzyskałem w sposób niedozwolony,
- nie była podstawą nadania dyplomu uczelni wyższej lub tytułu zawodowego ani mnie, ani innej osobie.

Dla Katarzyny, Moniki i Marka

Podziękowania

Chciałem podziękować mojemu promotorowi prof. dr. hab. Marcinowi Mierzejewskiemu za bardzo owocne lata współpracy. Wiedza przekazana przez mojego Opiekuna i zarazem Mentora odmieniła moje spojrzenie na świat. Dziękuję za poświęcony mi czas, dyskusje, wspólne zmagania nad postawionymi problemami i otwartość na każdy pomysł.

Podziękowania składam również dla mojego promotora pomocniczego dr. Bartłomieja Gardasa. Chciałem podziękować przede wszystkim za zainteresowanie tematyką komputerów kwantowych i wspólne dyskusje dotyczące zagadnień naukowych, jak również dyskusje związane z problemami życia codziennego.

Szczególne podziękowania należą się również dr. hab. Andrzejowi Ptokowi, który pełnił nieoficjalną rolę drugiego promotora pomocniczego. Dziękuję za liczne konsultacje, dyskusje na konferencjach i spotkaniach oraz wspólne przeprowadzone badania.

Chciałem również podziękować wszystkim osobom, z którymi miałem przyjemność współpracować, prof. Maciejowi Maśce, prof. Sebastianowi Deffnerowi, dr. Jackowi Herychowi, mgr. inż. Michałowi Kupczyńskiemu oraz mgr. Konradowi Jałowieckiemu. Podziękowania należą się również wszystkim tym niewymienionym, którzy wspierali mnie przez wszystkie lata nauki i zachęcali do samorealizacji swoich marzeń.



Badania były finansowane przez Narodowe Centrum Nauki, z grantu 2016/23/B/ST3/00647.

Streszczenie

Tematem rozprawy doktorskiej są teoretyczne badania wpływu oddziaływań wielociałowych na właściwości statyczne i dynamiczne zerowych modów Majorany, zrealizowanych w układach bezspinowych fermionów opisanych zmodyfikowanymi modelami Kitaeva.

Jednym z najważniejszych wyników rozprawy jest algorytm umożliwiający identyfikację zerowych modów Majorany dla dowolnego hamiltonianu, również z oddziaływaniami wielociałowymi. Algorytm przetestowano, w pierwszej kolejności porównując otrzymane wyniki z wynikami dostępnymi w literaturze. Następnie sprawdzono w jaki sposób oddziaływanie wielociałowe oraz ich zasięg wpływają na czasy życia zerowych modów Majorany oraz na ich strukturę przestrenną. Zwiększenie oddziaływań wielociałowych prowadzi do zmniejszenia stabilności zerowych modów Majorany. Co więcej, wraz ze wzrostem zasięgu oddziaływań, rośnie destruktywna rola tych oddziaływań na czas życia modów Majorany.

Przedstawiono również implementację konstrukcji nowej bramki fazowej dla qubitu bazującego na zerowych modach Majorany. W odróżnieniu od standardowej koncepcji wspomnianej bramki, która bazuje na fazie dynamicznej, zaprezentowana bazuje na fazie geometrycznej. Działanie bramki polega na podwójnym wyplataniu przekrywających się zerowych modów Majorany. Pokazano, że faza tej bramki zależy od wszystkich parametrów hamiltonianu, a w szczególności od tematu pracy — oddziaływań wielociałowych.

Poza przedstawieniem wyników i ich analizą, rozprawa doktorska posiada rozbudowany wstęp teoretyczny, związany ze wszystkimi omawianymi zagadnieniami, a wszelkie przydatne wyprowadzenia można znaleźć w załączniku do rozprawy.



Słowa kluczowe zerowe mody Majorany oddziaływanie wielociałowe model Kitaeva wyplatanie kwantowe topologiczny komputer kwantowy

Abstract

This dissertation concerns the theoretical studies of the influence of many-body interaction on static and dynamic properties of Majorana zero modes, realized in fermionic spinless systems, which can be described by the Kitaev model.

The algorithm for Majorana zero modes identification has been presented in the thesis. The algorithm works for any Hamiltonian, also when many-body interactions are present in the system. First, the algorithm has been tested by comparing the results to the literature. In the next step, the influence of strength and range of the interaction on Majorana zero modes lifetimes and their spatial structures has been investigated. Increasing many-body interaction strength leads to decreasing Majorana zero modes stability. Moreover, if the range of the interaction increases, the destructive role of the interaction on Majorana zero modes lifetimes also increases.

The implementation of the new phase-gate for qubit based on Majorana zero modes was also presented. Unlike the standard phase gate implementation, which is based on the dynamic phase, the presented gate depends on the geometric phase. The protocol of the gate consists of the double braiding of two non-overlapping Majorana zero modes. It has been shown that the phase of this gate does depend on all Hamiltonian parameters, especially on the thesis major — many-body interactions.

In addition to presenting results and their analysis, the dissertation contains expanded theoretical introduction, related to all discussed problems. All useful derivations and proofs can be found in the Appendix attached to the thesis.



Key words Majorana zero modes many-body interactions Kitaev model quantum braiding
topological quantum computer

Spis treści

Przedmowa	1
Część I: Wprowadzenie	3
Rozdział 1 Wstęp i motywacja	5
Sekcja 1.1 Wprowadzenie	5
Sekcja 1.2 Realizacja eksperymentalna	8
Sekcja 1.3 Badania teoretyczne	13
Rozdział 2 Zerowe Mody Majorany	19
Sekcja 2.1 Operatory Majorany	19
Sekcja 2.2 Definicja zerowych modów Majorany	21
Sekcja 2.3 Model Kitaeva	22
Rozdział 3 Topologiczne obliczenia kwantowe	27
Sekcja 3.1 Statystyka nieabelowa i grupa warkoczowa	27
Sekcja 3.2 Bramki kwantowe	31
Sekcja 3.3 Uniwersalność obliczeń, a bramka fazowa	33
Część II: Metodyka badań	35
Rozdział 4 Metody dokładnej diagonalizacji	37
Sekcja 4.1 Konstrukcja bazy	37
Sekcja 4.2 Symetria parzystości	39
Sekcja 4.3 Konstrukcja hamiltonianu	40

Rozdział 5	Mody Majorany jako lokalne całki ruchu	45
Sekcja 5.1	Lokalne całki ruchu	45
Sekcja 5.2	Korelacje wielociałowe	46
Sekcja 5.3	Skalowanie rozmiarowe	49
Rozdział 6	Dynamika kwantowa	53
Sekcja 6.1	Pełna ewolucja czasowa	53
Sekcja 6.2	Schematy numeryczne	55
Sekcja 6.3	Czynniki fazowe	57
Część III: Wyniki analityczne i numeryczne		61
Rozdział 7	Identyfikacja z wykorzystaniem całek ruchu	63
Sekcja 7.1	Układ z oddziaływaniami wielociałowymi	63
Sekcja 7.2	Silność modów Majorany	71
Sekcja 7.3	Szczegóły skalowania rozmiarowego	73
Rozdział 8	Wpływ oddziaływań dalekozasięgowych	79
Sekcja 8.1	Czasy życia modów Majorany	79
Sekcja 8.2	Porównanie z LUE	83
Sekcja 8.3	Wpływ na strukturę przestrzenną	84
Rozdział 9	Bramka fazowa bazująca na fazie geometrycznej	89
Sekcja 9.1	Pojedyncze wyplatanie i testy adiabatyczności	89
Sekcja 9.2	Realizacja bramki fazowej	96
Sekcja 9.3	Kalibracja bramki fazowej	101
Podsumowanie		107
Część IV: Dodatki		111
Dodatek A	Informacje o autorze	113
Dodatek B	Wybrane dowody i wyprowadzenia	115
Dodatek C	Dwuqubitowy układ z zerowymi modami Majorany	127
Akronimy		133

Spis symboli	135
Spis URL	139
Spis rysunków	141
Bibliografia	145

Przedmowa

Rozprawa doktorska została podzielona na cztery części:

Struktura pracy

- W części I czytelnik zostaje wprowadzony w tematykę rozprawy — *zerowe mody Majorany* (*MZM*, ang. *Majorana zero modes*). Przedstawiono motywację badań wykonywanych z związku z przeprowadzoną rozprawą doktorską. Przedstawiony zostaje aparat matematyczny, własności operatorów, które pomagają zrozumieć ideę jaka stoi za wykonywaniem badań związanych z tym tematem. Zapoznano z podstawowymi operacjami, problemami oraz wyzwaniami jakie czekają przyszłych konstraktorów topologicznych komputerów kwantowych. Zapoznano z modelem Kitaeva, jako najprostszym modelem zawierającym *MZM*. Przedstawiono w jaki sposób można wykorzystać *MZM* do konstrukcji bramek kwantowych.
- Część II dotyczy metodyki badań naukowych. Zademonstrowano w jaki sposób buduje się elementy macierzowe hamiltonianów opisujących układ wielu cząstek, na przykładzie modelu Kitaeva. Dyskutowane jest wykorzystanie symetrii parzystości do ograniczenia przestrzeni Hilberta. Na podstawie opublikowanej pracy [I], wyprowadzono metody służące do identyfikacji *MZM* w układach bez oddziaływań oraz z oddziaływaniami wielociałowymi. Przedstawiono stosowanie algorytmu do badania dynamiki w układach oddziałujących cząstek.
- W części III można znaleźć otrzymane wyniki wraz z ich analizą, które zostały opublikowane jako artykuły w czasopismach naukowych:

[I] Andrzej Więckowski, Maciej M. Maśka, oraz Marcin Mierzejewski, Identification of Majorana Modes in Interacting Systems by Local Integrals of Motion, *Phys. Rev. Lett.*, 120:040504, 2018;

-
- [2] Andrzej Więckowski oraz Andrzej Ptok, Influence of long-range interaction on Majorana zero modes, *Phys. Rev. B*, 100:144510, 2019;
 - [3] Andrzej Więckowski, Marcin Mierzejewski oraz Michał Kupczyński, Majorana phase gate based on the geometric phase, *Phys. Rev. B*, 101:014504, 2020.

- Część IV stanowi swoiste uzupełnienie poniższej rozprawy doktorskiej. W tej części, poza informacją dotyczącą dorobku naukowego autora załączoną w dodatku A, czytelnik może znaleźć w niej wybrane dowody i wyprowadzenia (dodatek B) oraz rozszerzone rozważania dotyczące dwuqubitowego układu z *MZM* (dodatek C). Na końcu tej części zamieszczono spisy: akronimów, symboli, rysunków oraz bibliografię.
-

Cele pracy

Poniżej wymieniono cele niniejszej rozprawy doktorskiej.

- Opracowanie nowej metody umożliwiającej identyfikację silnych *MZM*, w dowolnych układach kwantowych. Metoda ta ma mieć zastosowanie do badań dowolnego hamiltonianu z oddziaływaniami wielociałowymi (lub bez).
 - Badanie wpływu oddziaływań wielociałowych na statyczne i dynamiczne własności *MZM*. Sprawdzanie obecności w układzie, rozkładu przestrzennego, stabilności *MZM* ze względu na parametry modelu.
 - Opracowanie nowej bramki fazowej dla qubitu bazującego na *MZM* z wykorzystaniem fazy geometrycznej. Sprawdzanie wpływu oddziaływań wielociałowych na proces wyplatania *MZM*.
-

Część I:

Wprowadzenie

Rozdział 1	Wstęp i motywacja	5
Sekcja 1.1	Wprowadzenie	5
Sekcja 1.2	Realizacja eksperimentalna	8
Sekcja 1.3	Badania teoretyczne	13
Rozdział 2	Zerowe Mody Majorany	19
Sekcja 2.1	Operatory Majorany	19
Sekcja 2.2	Definicja zerowych modów Majorany	21
Sekcja 2.3	Model Kitaeva	22
Rozdział 3	Topologiczne obliczenia kwantowe	27
Sekcja 3.1	Statystyka nieabelowa i grupa warkoczowa	27
Sekcja 3.2	Bramki kwantowe	31
Sekcja 3.3	Uniwersalność obliczeń, a bramka fazowa	33

Wstęp i motywacja

Pojęcie *cząstek Majorany* po raz pierwszy pojawiło się w latach 30 XX wieku, gdy Ettore Majorana otrzymał rzeczywiste rozwiązanie równania Diraca [4]. Konsekwencją tego była nieroóżnialność cząstki i jej antycząstki [5]. Niestety w fizyce wysokich energii nie udało się potwierdzić istnienia fermionów Majorany. Okazuje się jednak, że w fizyce ciała stałego istnieją stany, tzw. quasiczątek, które posiadają analogiczne cechy do fermionów Majorany.

Koncepcja fermionów Majorany odrodziła się we współczesnej fizyce ciała stałego dzięki przełomowej pracy A. Y. Kitaeva [6]. W tej pracy, bazując na modelu bezpinowych fermionów w jednowymiarowym (1D) otwartym łańcuchu z parowaniem międzywęzłowym¹, Kitaev przedstawił koncepcję realizacji stanów brzegowych. Te stany, ze względu na swoje cechy takie jak nieroóżnialność, przez analogię do fermionów Majorany nazywane są aktualnie *stanami Majorany* lub *stanami Majorany o zerowej energii* (z ang. *Majorana Zero Mode, MZM*). Praca ta zainspirowała liczne badania teoretyczne, jak i eksperymentalne [7–11]. Postęp technik eksperymentalnych umożliwił poszukiwania *MZM* w różnych układach, takich jak np. monoatomowe łańcuchy magnetyczne na powierzchni nadprzewodnika czy nanostruktury hybrydowe półprzewodnik–nadprzewodnik. Należy tutaj wspomnieć, że koncepcja *MZM* stanowi ciągle aktualną tematykę badawczą. W dniu 8 grudnia 2019 roku, na serwisie arXiv można było znaleźć blisko 3000 preprintów w kategorii cond-mat z słowem kluczowym „Majorana”, natomiast wyszukiwarka Google Scholar znalazła 32100 wystąpienia hasła „Majorana zero modes”. To żywe zainteresowanie wynika z chęci wykorzystania *MZM* w praktycznych zastosowaniach, takich jak obliczenia kwantowe.

1.1 Wprowadzenie

Model Kitaeva

¹Szczegółowy opis modelu Kitaeva został przedstawiony w rozdziale 2.

Własności MZM

Zainteresowanie *MZM* jest głównie związane z ich egzotycznymi własnościami, wśród których warto wymienić:

1. *Lokalizacja na krawędzi.* *MZM*, jako stany brzegowe, mogą być uzyskane jedynie w układzie, który posiada „krawędź”. Jest to sytuacja analogiczna do modelu Kitaeva, gdzie przy pewnych parametrach modelu, *MZM* są zlokalizowane dokładnie na ostatnich węzłach otwartego łańcucha. Badania teoretyczne sugerują, że w rzeczywistych układach niskowymiarowych, *MZM* są zlokalizowane na długości od kilku do kilku-nastu stałych sieciowych.
2. *Nierozróżnialność „częstki” i „antycząstki”.* W realistycznych układach *MZM* mogą być realizowane poprzez synergię nadprzewodnictwa, sprzężenia spin–orbita oraz zewnętrznego pola magnetycznego. Wpływ nadprzewodnictwa, z uwagi na obecną symetrię cząstka–dziura, implikuje istnienie par quasicząstek o przeciwnych energiach [12–16]. W konsekwencji, quasicząstka i jej antycząstka są nierozróżnialne gdy posiadają tę samą energię, tj. energię równą zero (znajdują się na poziomie Fermiego).
3. *Ochrona topologiczna.* *MZM* są realizowane jako stany brzegowe o zerowej energii. Oznacza to, że pomiędzy energią *MZM*, a energią kolejnych wzbudzeń quasicząstek, musi istnieć przerwa energetyczna o niezerowej wartości (tzw. *przerwa topologiczna*). Taka szczelina gwarantuje, że *MZM* są niewrażliwe na zewnętrzne czynniki, tj. nieporządek — tę cechę nazywamy ochroną topologiczną.
4. *Anyony.* Okazuje się, że *MZM* nie podlegają statystyce Fermiego–Diraca, ani Bosego–Einstaina, tzn. nie są ani fermionami, ani bozonami — takie obiekty nazywamy *anyonami* (*any-* z ang. „jakikolwiek”) [7, 17–19]. W odróżnieniu od fermionów czy bozonów, zamiana miejscami dwóch anyonów prowadzi do nietrywialnej transformacji stanu kwantowego układu.¹
5. *Statystyka nieabelowa* (*NAS*, ang. *non-Abelian statistics*). Anyony możemy podzielić na dwie kategorie [20]: abelowe oraz nieabelowe, w zależności czy kolejność wymiany cząstek ma znaczenie na stan układu lub nie [19]. Wymiana zorientowana zgodnie ze wskazówkami zegara będzie miała inny wpływ na stanu układu, niż wymiana zorientowana przeciwnie. Należy tutaj podkreślić, że nieabelowość *MZM* to cecha występująca tylko i wyłącznie w niskowymiarowych układach. Tej cechy nie posiadają natomiast fermiony Majorany w fizyce cząstek elementarnych w przestrzeni trójwymiarowej.

¹Szczegółowe omówienie tego zjawiska wraz z zastosowaniem do tzw. operacji wyplatania (ang. *braiding*) można znaleźć w rozdziale 3.

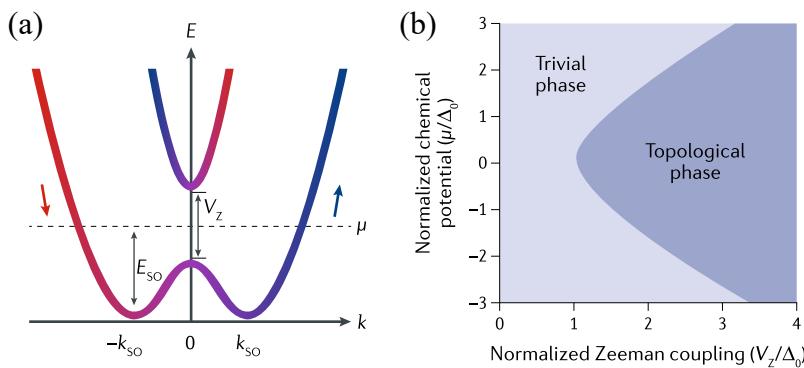
Ze względu na wymienione cechy, *MZM* są bardzo atrakcyjnymi obiektami do potencjalnego zastosowania w komputerach kwantowych. Dzięki ochronie topologicznej oraz statystyce nieabelowej, *MZM* mogą pełnić rolę podstawowego budulca w topologicznych komputerach kwantowych [7, 21–24] (dokładniej zostanie to omówione w rozdziale 3). Do realizacji takiego komputera potrzebne są bity kwantowe (qubits) oraz możliwe operacje na tych qubitach. Rolę qubitów mają pełnić tu *MZM*, a operacji na qubitach poszczególne operacje wymiany pomiędzy *MZM*. Dzięki *ochronie topologicznej*, operacje jak i dane byłyby niewrażliwe na zaburzenia zewnętrzne [7–9, 25, 26], tak długo jak przerwa energetyczna pomiędzy energią stanów podstawowych, a energią stanów wzbudzonych jest dostatecznie duża oraz zachowana jest symetria parzystości niezbędna do istnienia *MZM* [27].

Konstrukcja komputera kwantowego z wykorzystaniem *MZM* nie gwarantuje jednak uniwersalności obliczeń, ale sam fakt wykonywania części operacji z zagwarantowaną ochroną topologiczną motywuje fizyków do dalszych badań. Ostatnie raporty dotyczące wysycania *prawa Moore'a* [28] szczególnie zasługują tutaj na uwagę, gdyż oznaczają zbliżanie się do granicy miniaturyzacji komputerów klasycznych. Dalszy postęp w technikach komputerowych, może być więc realizowany poprzez komputery nowej klasy. Zagadnienie to jednak wykracza poza zakres prezentowanej rozprawy doktorskiej.

Założenia modelu Kitaeva uniemożliwiają jego realizację w układach ciała stałego. Wykonanie to z faktu realizacji w tym modelu parowania typu p w układach bezspinowych fermionów. Okazuje się jednak, że w pewnym zakresie parametrów, takich jak pole magnetyczne czy potencjał chemiczny, układy 1D sprzężone z nadprzewodnikiem mogą realizować podobny scenariusz. W takim przypadku, faza topologiczna uzyskiwana jest przez wzajemny wpływ sprzężenia spin-orbita (*SO*), nadprzewodnictwa oraz zewnętrznego pola magnetycznego [10, 29, 30]. Sprzężenie *SO* znosi degenerację spinową początkowo parabolicznej relacji dyspersyjnej, natomiast pole magnetyczne powoduje otwarcie szczeliny w punkcie $k = 0$ — rysunek 1.1(a) (zaczerpnięty z pracy [10]). Jeśli poziom Fermiego (reprezentowany tutaj przez μ) przecina jedynie jedną z gałęzi pasm (jak pokazano na schemacie), to wyindukowane nadprzewodnictwo występuje pomiędzy quasicząstkkami w ramach jednego pasma — układ znajduje się w fazie topologicznej oraz efektywnie realizowane jest parowanie typu p . W przeciwnym przypadku, parowanie następuje pomiędzy dwoma gałęziami i układ znajduje się w fazie trywialnej topologicznie.

Realistyczne modele

Okazuje się, że zakres parametrów, gdzie faza topologiczna może być realizowana, jest ścisły



Rysunek 1.1: Spektrum energetyczne oraz topologiczny diagram fazowy dla 1D układu. (a) Struktura pasmowa w funkcji pędu k w obecności sprzężenia spin–orbita (SO) oraz zewnętrznego pola magnetycznego V_Z . Elektrony w układzie posiadają paraboliczną relację dyspersyjną, która przy braku SO oraz zewnętrznego pola magnetycznego jest zdegenerowana ze względu na spin elektronów. Sprzężenie SO znosi degenerację poprzez „przesunięcie” relacji dyspersyjnych o pęd k_{SO} wprowadzając nową skalę energetyczną E_{SO} . Przyłożenie zewnętrznego pola magnetycznego powoduje otwarcie szczeriny energetycznej dla $k = 0$. Jeśli poziom Fermiego μ (przerywana linia) znajduje się wewnątrz tej szczeriny, możliwe jest parowanie cząstek w ramach jednego pasma (tj. parowanie typu p). (b) Przejście układu do fazy topologicznej (gdzie można oczekiwać realizacji MZM na brzegu układu) określony jest ściśle przez wartości przez μ oraz V_Z . Dla ustalonego μ , pole magnetyczne musi przekroczyć pewną krytyczną wartość $V_Z^c = \sqrt{\mu^2 + \Delta_0^2}$ (granica reprezentowana przez „parbole” na prawym panelu), gdzie Δ_0 oznacza szczerinę nadprzewodzącą, np. wyindukowaną poprzez efekt bliskości z nadprzewodnikiem.

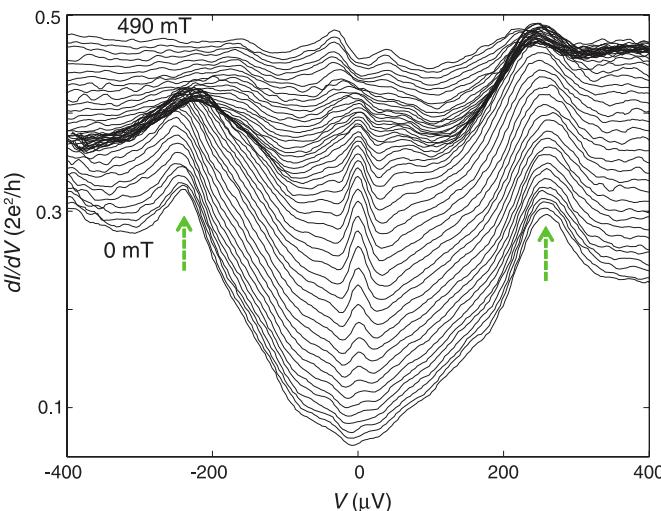
Źródło: [10].

śle określony przez parametry układu takie jak: wyindukowana szczerina nadprzewodząca Δ_0 oraz potencjał chemiczny μ (inaczej: położenie poziomu Fermiego). MZM w skończonym układzie, mogą być realizowane gdy układ znajduje się w fazie nietrywialnej topologicznie, przy czym przejście z fazy trywialnej do nietrywialnej jest określone przez pole magnetyczne V_Z — rysunek 1.1(b) (zaczerpnięty z pracy [10]). Granica fazy topologicznej jest tutaj dana poprzez pewne pole krytyczne $V_Z^c = \sqrt{\mu^2 + \Delta_0^2}$ [31–34] i przyjmuje postać „paraboli” na diagramie fazowym. W polu magnetycznym V_Z^c następuje zamknięcie trywialnej szczeriny nadprzewodzącej (np. wyindukowanej poprzez efekt bliskości) i otwarcie nowej szczeriny topologicznej, chroniącej MZM [10].



1.2 Realizacja eksperymentalna

Współczesny rozwój technik eksperymentalnych umożliwił rozpoczęcie prac nad praktyczną realizacją systemów fizycznych, w których możliwa byłaby obserwacja MZM . W powyższych rozważaniach teoretycznych MZM były realizowane w skończonym układzie 1D,



Rysunek 1.2: Przewodność różniczkowa dI/dV w funkcji napięcia V w układzie nanodrutu wykonanego z antymonku indu (InSb) połączonym z normalną (Au) i nadprzewodzącą (NbTiN) elektrodą. Wyniki w temperaturze 70 mK. Zielone strzałki wskazują piki koherentne związane z trywialną szczeliną nadprzewodzącą wyindukowaną w układzie poprzez efekt bliskości nadprzewodnika. Źródło: [36].

w którym współistnieje sprzężenie SO oraz nadprzewodnictwo, natomiast poziom Fermiego znajduje się blisko dna pasma — rysunek 1.1(a). Dzięki postępowi w realizacji niskowymiarowych struktur w skali atomowej, w ostatnich latach udało się zrealizować wiele eksperymentów w których uważa się, że realizowane są MZM . Eksperymenty te realizowane są w hybrydowych nanostrukturach typu nadprzewodnik–półprzewodnik [35–45], w jednowymiarowych monoatomowych łańcuchach atomów ferromagnetycznych na powierzchni nadprzewodników [46–51], w wirach w nadprzewodnikach [52–55], czy też w dwuwymiarowych nanostrukturach topologicznych [56, 57]. Poniżej pokrótko przybliżono część z wymienionych układów.

Warunki do bezpośredniej realizacji modelu Kitaeva, opisane powyżej, mogą zostać spełnione w układach hybrydowych — rysunek 1.3 (zaczerpnięty z pracy [44]). Dla przykładu w nanodrutach wykonanych z antymonku indu (InSb) czy antymonku arsenu (InAs) [10, 36, 58, 59] sprzężonych z nadprzewodnikiem. Sprzężenie SO oraz niska koncentracja nośników jest cechą wewnętrzną tych materiałów, tj. półprzewodników. Z kolei efekt bliskości z nadprzewodnikiem, powoduje, że indukowana jest szczelina nadprzewodząca Δ_0 . Przykładowo, w materiale InSb pokrytym NbTiN indukowana jest szczelina $\Delta_0 = 0.65$ meV [40], a pokrytym Al $\Delta_0 = 0.2$ meV [44]. Oddziaływanie SO , wraz z wyindukowaną szczeleiną nadprzewodzącą Δ_0 , stwarzają warunki obserwacji MZM w wymienionych materiałach.

Obecność MZM powinna być możliwa do obserwacji w pomiarach transportowych, tj. przewodności różniczkowej $G(V) = dI/dV$. W tym przypadku, MZM mogą być wykryte w eksperymentach transportowych jako piki w G przy zerowym napięciu ($V = 0$) [36]. W pracy [36] dokonywano pomiarów G dla nanodrutów wykonanych z antymonku indu

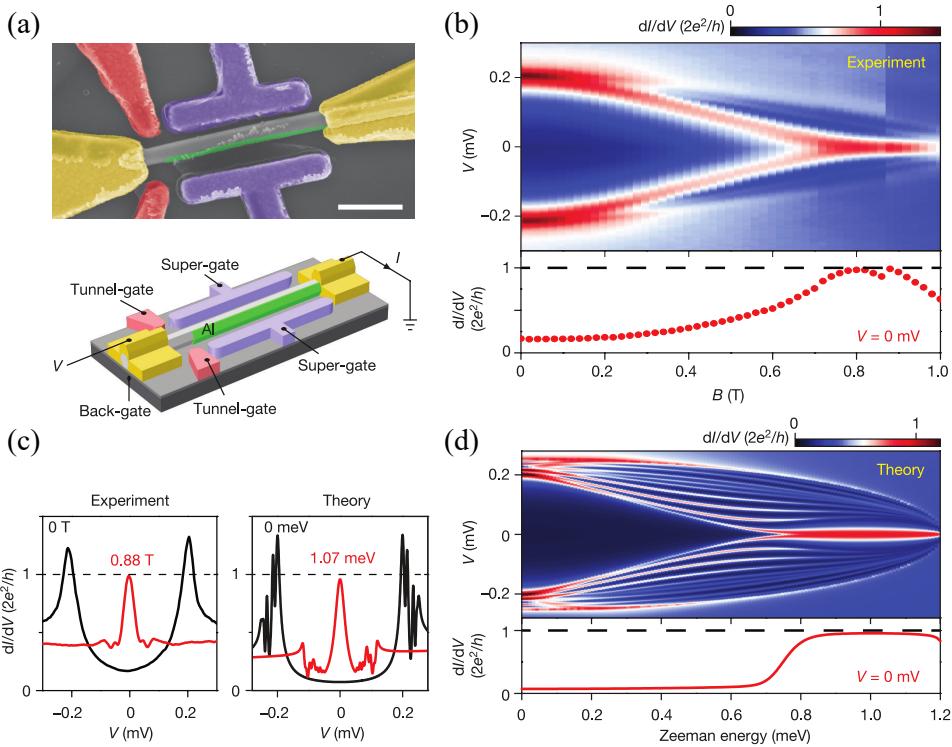
Układy hybrydowe

(InSb) połączonych z normalną i nadprzewodzącą elektrodą. W zerowej temperaturze, w odróżnieniu od stanów trywialnych, obecność *MZM* powinna objawiać się pikiem przy braku napięcia ($V = 0$) w przewodności różniczkowej $G = 2G_0$ [10, 60–64], gdzie $G_0 = e^2/h$ jest kwantem przewodnictwa, e to ładunek elementarny, a h to stała Plancka. Jest to związane ze zjawiskiem nazywanym *odbiciem Andreeva* [65, 66]. W przypadku wspomnianego eksperymentu, elektrony, które tunelują z elektrody do układu hybrydowego, sprzygają się z *MZM*, czyli stanami o zerowej energii. Zarówno spin jak i prąd tunelowy, może stanowić proste narzędzie do wstępnej detekcji *MZM*. Potencjał bariery można kontrolować przy pomocy przyłożonego napięcia V . Teoretycznie, zmieniając pole magnetyczne można zmienić stan układu z fazą trywialną (gdzie nie występują *MZM*) na fazę topologiczną, w której występują *MZM*. Dla wartości pola magnetycznego około 100 mT, zaobserwowano stany wewnętrz szczeliny o zerowej energii (przy braku napięcia $V = 0$) — rysunek 1.2 (zaczerpnięty z pracy [36]). Jest to jedna z pierwszych prac w której dokonane obserwacje mogą przypuszczalnie potwierdzać hipotezę realizacji quasicząstek *MZM* w takich układach.

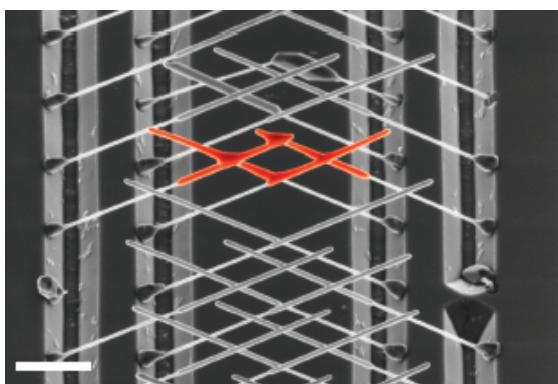
W pracy [44] autorzy jako jedni z pierwszych pokazują kwantyzację przewodności różniczkowej G w omawianych układach. W tych badaniach wykorzystano nanodruty pół-przewodnikowe wykonane z SbIn, pokrytego warstwą nadprzewodzącego Al. Zrealizowany układ pomiarowy wraz ze schematyczną ilustracją, pokazano na rysunku 1.3(a). Rysunek 1.3(b)–(d) pokazuje porównanie wyników eksperymentalnych oraz teoretycznych. W zakresie wartości pola magnetycznego od około 0.8 do 0.9 T widać, że wartość $G(V = 0)$ jest równa w przybliżeniu $2G_0$, co potwierdzało by realizację *MZM*.

Należy tutaj podkreślić, że wartość piku $G(V = 0)$, nie jest jednoznaczna informacją odnośnie obecności *MZM* w układzie. Podczas analizy takich wyników należy zachować szczególną ostrożność, ponieważ źródłem takiego piku może być np. efekt Kondo [67], stany brzegowe Andreeva [36, 68–73], nieporządek [63, 74] lub wygładzony potencjał na brzegu nanodrutu [75].

Do eksperymentów związanych z wyplataniem cząstek *MZM* jeszcze daleka droga, jednak poczyniono w tym kierunku znaczące postępy. W pracy [42] autorzy przedstawili technikę epitaksji umożliwiającą konstrukcję sieci nanodrutów. Konstrukcja sieci kilku nanodrutów, jest kluczowa dla procesu wymiany *MZM*. Na rysunku 1.4 (zaczerpniętym z pracy [42]) przedstawiono zdjęcie ze skaningowego mikroskopu elektronowego. Rysunek przedstawia otrzymaną przez autorów pracy strukturę czterech nanodrutów InSb pokrytych nadprzewo-

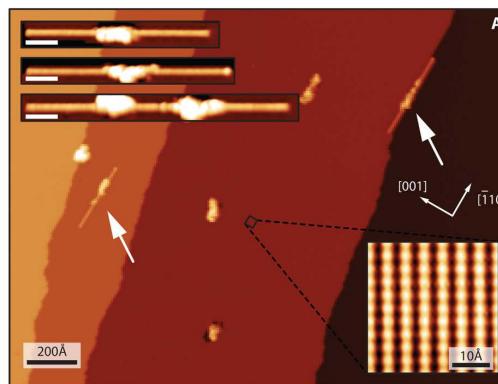


Rysunek 1.3: (a) Obraz ze skaningowego mikroskopu elektronowego układu pomiarowego wraz z przedstawionym schematem. Nanodrut wykonany z InSb (kolor szary) częściowo pokryty cienką warstwą nadprzewodzącego aluminium (kolor zielony). Bramki tunelowe zaznaczono kolorem różowym, kolorem fioletowym zaznaczono „super” bramki za pomocą których można kontrolować potencjał chemiczny w układzie. Złącza elektryczne wykonane z Cr/Au zaznaczono kolorem żółtym. (b) Wyniki pomiarów przewodności różniczkowej dI/dV w funkcji napięcia V oraz pola magnetycznego B (energii Zeemana). (c-d) Porównanie eksperymentalnej oraz teoretycznej przewodności różniczkowej dI/dV . Wyniki przedstawione na (b) i (d) jakościowo są zgodne. Nie są jednak zgodne dokładnie co wynika z dokładnością eksperymentu oraz z nieznanych dokładnych wartości parametrów potrzebnych do lepszej symulacji modelu. Źródło: [44].

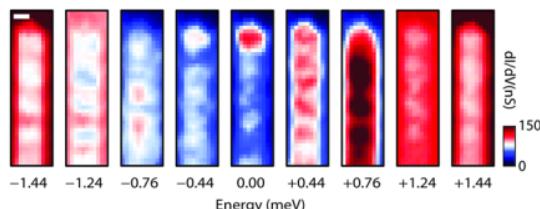


Rysunek 1.4: Zdjęcie ze skaningowego mikroskopu elektronowego struktury 4 nanodrutów InSb z naniesioną warstwą nadprzewodzącą Al (zaznaczono czerwonym kolorem). Skala (lewy dolny róg) odpowiada $1 \mu\text{m}$, skanowanie dokonano pod kątem 30° . Źródło: [42].

Rysunek 1.5: Topografia powierzchni ołowiu Pb, z nanesionymi 3 nanodrutami żelaza Fe. Wyspy oraz łańcuchy wyhodowane na powierzchni zaznaczone są białym kolorem. Atomowo czyste tarasy Pb to obszary zaznaczone tym samym kolorem (żółty, pomarańczowy, jasnobrązowy, ciemnobrązowy). Wstawka w prawym dolnym rogu prezentuje anizotropową strukturę powierzchni Pb(110). Wstawki w lewym górnym rogu prezentują zdjęcia kilku łańcuchów Fe oraz wysp z których „wyrosły” (skala 50 Å). Źródło: [46].



Rysunek 1.6: Przestrzenna i energetyczna przewodność różniczkowa $G = dI/dV$. Temperatura w jakiej dokonywano pomiaru: 1.4 K. Skala: biała linia odpowiada długości 10 Å. Źródło: [46].



dzącą warstwą Al (zaznaczone kolorem czerwonym). Ostateczna eksperymentalna weryfikacja *MZM* odbędzie się wraz z wykazaniem *NAS*. Takie struktury mogą służyć do sterowania położenia *MZM* za pomocą potencjału chemicznego μ lub pola magnetycznego B [76]. Modyfikując μ lub B można kontrolować wielkość obszaru topologicznego w obrębie nanodrutu, co w konsekwencji może prowadzić do wymiany *MZM*. Okazuje się, że taka wymiana cząstek nie musi być zrealizowana za pomocą bezpośredniej manipulacji pozycji quasicząstek. Wyplatanie może przebiegać z wykorzystaniem efektywnego przesunięcia *MZM*, z wykorzystaniem tzw. schematu *measurement-only* [77, 78], który bazuje na serii pomiarów — kwantowej teleportacji informacji. Takie pomiary mogą zostać zrealizowane z wykorzystaniem kontroli strumienia pola magnetycznego pomiędzy dwoma złączami Josephsona [79–82], na których spoczywa układ zawierający *MZM*. Zasadniczą przewagą takiego rozwiązania jest fakt, że w celu wykonania wyplatania *MZM* nie trzeba korzystać z modyfikacji lokalnych potencjałów μ czy lokalnego pola B . Zmiany takich lokalnych parametrów mogą być wrażliwe na problemy związane z nieporządkiem czy niedokładnością aparatury, co zostaje całkowicie wyeliminowane w podejściu z wykorzystaniem schematu kontroli strumienia.

Ferromagnetyczne
łańcuchy
monoatomowe

Innym przykładem, gdzie oczekuje się realizacji *MZM*, są monoatomowe łańcuchy na powierzchni nadprzewodnika. Dla przykładu w pracy [46] autorom udało się wytworzyć ferromagnetyczne łańcuchy atomowe żelaza (Fe) na powierzchni nadprzewodzącego ołowiu (Pb).

Topografię układu pomiarowego można zobaczyć na rysunku 1.5 (zaczepniety z pracy [46]). Na wyraźnie widocznych tarasach Pb, widać nanodruty Fe (oznaczone poprzez biale strzałki oraz wstawki w lewym górnym rogu rysunku 1.5). Stosując technikę wysokorozdzielczej spektroskopii obrazowej zmierzono lokalną przewodność różniczkową G w funkcji energii — rysunek 1.6 (zaczepniety z pracy [46]). Dla zerowej energii, widać wzbudzenie znajdujące się na końcu nanodrutu. To wzbudzenie może być interpretowane jako MZM . Dla pozostałych energii można zaobserwować stany zdelokalizowane w obrębie całego łańcucha. Te mapy mogą również posłużyć do badania zanikającego rozkładu przestrzennego MZM od brzegów nanodrutu. Zmierzona długość lokalizacji MZM była rzędu 10 w porównaniu do odległości od brzegu nanodrutu do środka wyspy, z której został stworzony. Z uwagi na efekty termiczne (1.4 K), pik w zerowej energii w przewodności różniczkowej dla tego eksperymentu był poszerzony, co w konsekwencji doprowadziło do otrzymania $G = 1.3 \cdot 10^{-4}G_0$, zdecydowanie odbiegającej od idealnej wartości $2G_0$. Efekty termiczne lub nieporządek mogą prowadzić do „niekwantowania” piku G [23], co sprawia, że pomiar G w celu identyfikacji MZM może być trudny w interpretacji.

Należy tutaj podkreślić, że żadna z wymienionych powyżej prac doświadczalnych nie udowodniła istnienia MZM w sposób jednoznaczny. Dowodem takim mógłby być pomiar potwierdzający, że obserwowane stany podlegają statystyce nieabelowej. Wymagane są zatem eksperymenty wyplatania (ang. *braiding*) lub niedawno zaproponowane *eksperymenty słabego pomiaru* [83]. Te ostatnie eksperymenty polegają na pomiarach strzałowego szumu korelacji krzyżowej (ang. *cross-correlation shot noise*). W pracy [83] pokazano, że sygnatura MZM może zostać wykstrahowana z takiego szumu w układzie połączonych nanodrutów. Cytowane prace, kolejne realizowane oraz planowane badania, zbliżają nas jednak do weryfikacji obecności MZM . Prezentowane wyniki należy zatem traktować, jako pierwszą fazę podstawowych badań eksperymentalnych. Jest to dopiero pierwszy kamień milowy, w bardzo długiej wędrówce w kierunku konstrukcji pierwszego działającego topologicznego komputera kwantowego. Obserwacja *NAS* jest również kluczowa do ostatecznej weryfikacji obecności MZM w układach kwantowych.

Podsumowanie

Badania teoretyczne, prowadzone równolegle do prac eksperymentalnych, relatywnie dobrze odtwarzają wyniki pomiarów na poziomie jakościowym (czasem nawet ilościowym) — np. prezentowany wcześniej rysunek 1.3. Modele opisujące realizowane układy głównie ba-

1.3 Badania teoretyczne

zują na układach 1D. W drugim kwantowaniu taki układ może być opisany przez następujący minimalny model

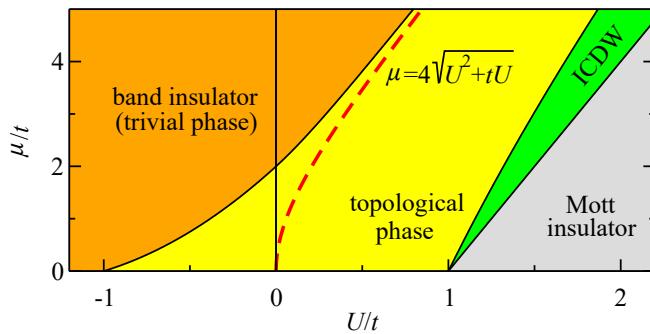
$$\hat{H}_{\text{1D}} = \underbrace{\sum_{ij\sigma} (-t_{ij}^0 - \mu \delta_{ij}) a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma}}_{\hat{H}_{\text{free}}} - h \underbrace{\sum_{i\sigma\sigma'} a_{i\sigma}^\dagger (\sigma^z)_{\sigma\sigma'} a_{i\sigma'}}_{\hat{H}_{\text{mag}}} + \underbrace{\alpha^R \sum_{i\sigma\sigma'} \left(a_{i\sigma}^\dagger (i\sigma^y)_{\sigma\sigma'} a_{i+1,\sigma'} + \text{H.c.} \right)}_{\hat{H}_{SO}} + \underbrace{\sum_i \left(\Delta a_{i\uparrow}^\dagger a_{i\downarrow}^\dagger + \text{H.c.} \right)}_{\hat{H}_{\text{prox}}}, \quad (1.1)$$

gdzie $a_{i\sigma}^\dagger$ oraz $a_{i\sigma}$ to odpowiednio operator kreacji i anihilacji fermionu o spinie $\sigma = \{\uparrow, \downarrow\}$ w węźle i , $\sigma^{x,y,z}$ to macierze Pauliego, t^0 to całka przeskoku ($t_{ij}^0 = 1$ w przypadku przeskoku pomiędzy najbliższymi sąsiadami oraz 0 w innych przypadkach), μ to potencjał chemiczny, h to pole magnetyczne równoległe do drutu, α^R opisuje sprzężenie SO typu Rashba, a Δ to szczelina nadprzewodząca (wyindukowana w drucie przez efekt bliskości z nadprzewodnikiem). Hamiltonian \hat{H}_{free} opisuje elektrony swobodne w układzie 1D, \hat{H}_{mag} wpływ zewnętrznego pola magnetycznego na elektrony (efekt Zeemana), \hat{H}_{SO} opisuje SO typu Rashba, natomiast \hat{H}_{prox} opisuje nadprzewodnictwo. Relatywna łatwość formułowania problemu badawczego w takim formalizmie stwarza sprzyjające warunki do rozwoju badań teoretycznych, mających na celu opis układów zrealizowanych eksperymentalnie [64, 84–107] oraz zagadnień związanych z ogólnie rozumianą informatyką kwantową bazującą na MZM [76, 108–112],

O ile w przypadku układów hybrydowych sprzężenie SO jest cechą wewnętrzną układu, o tyle w przypadku łańcuchów magnetycznych pokazano, że porządek magnetyczny może prowadzić do efektów podobnych, wytwarzając efektywne oddziaływanie SO . Pokazano to w licznych badaniach uwzględniających mechanizm RKKY [113–119]. W takim układzie, helikalny porządek magnetyczny wynika z minimalizacji energii układu oraz w istotny sposób wpływa na zakres istnienia fazy topologicznej [120]. Okazuje się, że w takich układach, jedną z sygnatur MZM może być ich polaryzacja spinowa [93, 94]. Prezentowane wyniki obliczeń modelują wyniki jakie można otrzymać za pomocą spektroskopii SESAR (ang. *selective equal-spin Andreev spectroscopy*). Otrzymane teoretyczne wyniki są jakościowo zgodne z wynikami eksperymentalnymi przedstawionymi w pracy [50].

Wpływ oddziaływań wielociałowych

W kontekście praktycznej implementacji MZM w obliczeniach kwantowych, oddziaływanie wielociałowe mogą odgrywać bardzo istotną rolę. Dla przykładu, średnie oddziaływanie mogą prowadzić do stabilizacji MZM w układach kwantowych [121–125]. Badania oddziaływania kulombowskiego (odpychania na węźle) w przypadku fermionów o spinie po-



Rysunek 1.7: Diagram fazowy modelu Kitaeva z oddziaływaniami wielociałowymi pomiędzy najbliższymi sąsiadami dla szczególnych parametrów modelu $\Delta = t^0$, w funkcji potencjału chemicznego μ oraz oddziaływania U . Kolor pomarańczowy: faza trywialna, kolor żółty: faza topologiczna, kolor zielony: faza niewspółmiernych fal gęstości ładunku (ang. *incommensurate charge density wave, ICDW*), kolor szary: izolator Motta. Czerwoną przerywaną linią zaznaczono zakres parametrów, dla których możliwe jest dokładne rozwiązanie. Źródło: [123].

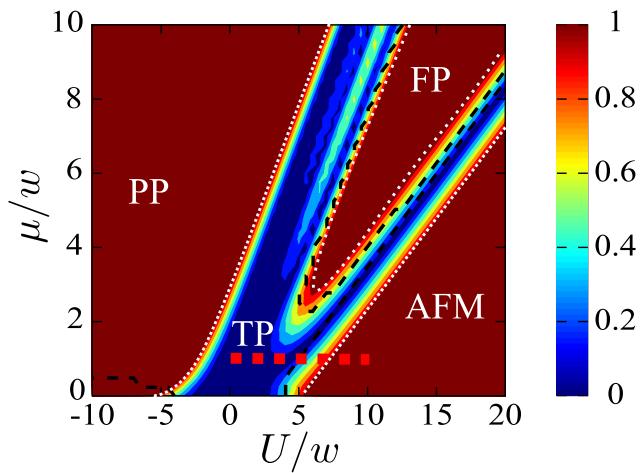
łówkowym prowadzone były w przybliżeniu Hartree–Focka [121, 126]. Oddziaływanie takie prowadzi do obniżenia krytycznego pola magnetycznego, wymaganego dotworzenia *MZM* w układzie, oraz może prowadzić do stabilizacji *MZM* [125, 127]. Natomiast w przypadku układów bezspinowych fermionów, oddziaływania pomiędzy najbliższymi sąsiadami były zbadane z wykorzystaniem techniki *grupy renormalizacji macierzy gęstości* (ang. *density matrix renormalization group, DMRG*) [124, 128, 129] oraz *dokładnej diagonalizacji* (ang. *exact diagonalization, ED*) [130]. W takim przypadku, średnie oddziaływanie mogą stabilizować porządek topologiczny.

Model Kitaeva z oddziaływaniami wielociałowymi pomiędzy najbliższymi sąsiadami w punkcie symetrycznym¹ udało się rozwiązać dokładnie [131], wykorzystując do tego transformację Jordana–Wignera [132] i operacje obrotów spinów. Punkt symetryczny jest szczególnym przypadkiem tego modelu, który w przypadku braku oddziaływań w prosty sposób można rozwiązać analitycznie, co zostało przedstawione w sekcji 2.3. W takim wypadku, *MZM* są całkowicie zlokalizowane na pojedynczym węźle sieci, mają niekończony czas życia, nawet w przypadku skończonego rozmiaru układu.

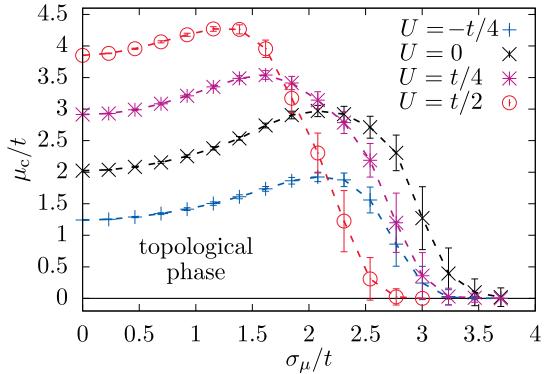
Model Kitaeva z oddziaływaniami pomiędzy najbliższymi sąsiadami można również rozwiązać w przypadku wybrania specyficznych lokalnych potencjałów chemicznych w funkcji pozostałych parametrów modelu, co zostało pokazane w pracy [123]. Zakres parametrów dla których możliwe jest takie analityczne rozwiązanie zaznaczono czerwoną linią na rysunku 1.7 (zaczerpnięty z pracy [123]). Na rysunku 1.7 przedstawiono schematyczny wykres fazowy

¹Punkt symetryczny oznacza tutaj parametry $\Delta = t^0$ i $\mu = 0$. Szczegóły modelu Kitaeva zostały opisane w sekcji 2.3.

Rysunek 1.8: Degeneracja stanu podstawowego w modelu Kitaeva z oddziaływaniami wielociałowymi pomiędzy najbliższymi sąsiadami w funkcji potencjału chemicznego μ oraz oddziaływania U . Na rysunku oznaczono fazy: fazę topologiczną (ang. *topological phase, TP*), fazę ferromagnetyczną (ang. *ferromagnetic phase, FP*), fazę antyferromagnetyczną (ang. *antiferromagnetic phase, AFP*), fazę trywialną (ang. *trivial phase, PP*). Źródło: [130].



Rysunek 1.9: Wpływ oddziaływań pomiędzy najbliższymi sąsiadami U oraz nieporządku σ_μ na granice obszaru topologicznego w modelu Kitaeva. Punkt symetryczny $\Delta = t^0$. Źródło: [133].



dla modelu Kitaeva z oddziaływaniami pomiędzy najbliższymi sąsiadami dla symetrycznego punktu w funkcji potencjału chemicznego μ oraz oddziaływanie¹ U . Rozważania dotyczą jednorodnego łańcucha Kitaeva, o otwartych warunkach brzegowych. Faza topologiczna, w której w układzie mogą znajdować się *MZM*, zaznaczona kolorem żółtym, ulega powiększeniu ze względu na potencjał chemiczny μ wraz ze wzrostem oddziaływania U .

Jednym z warunków koniecznych istnienia *MZM* w układach, jest degeneracja stanu podstawowego δE pomiędzy dwoma sektorami parzystości, nie jest to natomiast warunek wystarczający dla obecności *MZM*. W pracy [130] zbadano proces dekoherencji w łańcuchu Kitaeva z oddziaływaniami pomiędzy najbliższymi sąsiadami. Na rysunku 1.8 (zaczerpniętym z pracy [130]) przedstawiono otrzymane wyniki δE z pracy [130]. Niebieski kolor odpowiada wartościom $\delta E = 0$, czyli potencjalnemu obszarowi występowania *MZM*.² Obszar występowania *MZM* w takim układzie jest zdecydowanie mniejszy, niż obszar oznaczony kolorem niebieskim.

¹Relacja pomiędzy potencjałem U , a przyjętą w tej pracy notacją V jest następująca $U = 4V$.

²W rozdziale 7 odtworzono te wyniki oraz odpowiednio skomentowano.

Korzystając z metody *DMRG*, autorzy pracy [133] badali wpływ oddziaływań pomiędzy najbliższymi sąsiadami i nieporządku na obecność fazy topologicznej w łańcuchu Kitaeva. Na rysunku 1.9 (zaczerpniętym z pracy [133]) przedstawiono granicę fazy topologicznej i trywialnej w funkcji potencjału chemicznego μ_c oraz nieporządku σ_μ dla kilku realizacji oddziaływania U . Otrzymano standardowy wynik poszerzenia obszaru topologicznego ze względu na potencjał chemiczny wraz ze wzrostem oddziaływania U . Wpływ nieporządku jest natomiast przeciwny – powierzchnia obszaru topologicznego ze wzrostem U maleje. W pracy [133] można znaleźć interesujące kryteria dotyczące identyfikacji obszaru topologicznego.



Ze względu na praktyczne zastosowania *MZM*, istotne jest dokładne poznanie czynników wpływających na te stany. *MZM* istnieją w układach niskowymiarowych. W takich układach oddziaływanie wielociałowe mogą posiadać kluczowe znaczenie i są one słabo zbadane. Ze względu na swój charakter, często tego zagadnienia nie można rozwiązać za pomocą rachunku zaburzeń i wymagane jest zastosowania zaawansowanych technik numerycznych. W związku z powyższym, głównym celem prezentowanej rozprawy było:

Cel pracy

- **opracowanie metody numerycznej do badania wpływu oddziaływań wielociałowych na *MZM*,**
- **zastosowanie zaproponowanej metody do zbadania wpływu oddziaływań wielociałowych na operację wyplatania *MZM*.**

W niniejszej pracy badam wpływ oddziaływań wielociałowych na *MZM* w układach 1D opisanych modelem Kitaeva. Szczegółowy opis tego modelu został przedstawiony w rozdziale 2, natomiast wykorzystywana metodologia badania zastosowała *MZM* w obliczeniach kwantowych w rozdziale 3. Podstawowe aspekty związane z konstrukcją hamiltonianów w bazie Wanniera dla pełnej przestrzeni Hilberta przedstawiłem w rozdziale 4. W rozdziale 5 zaprezentowałem zaproponowaną przez nas metodę, która umożliwia badanie *MZM* w modelach zawierających dowolne oddziaływanie wielociałowe. Metoda jest ogólna i umożliwia generowanie struktury przestrzennej *MZM*, bez względu na parametry układu czy obecność dowolnych oddziaływań wielociałowych. Rozdział 6 dotyczy dynamiki kwantowej. Przedstawiłem tutaj schematy numeryczne do rozwiązywania równania Schrödingera, również pod kierunkiem badań związanych z wyplataniem *MZM*. Obliczenia zostały wykonane z wykorzystaniem metody dokładnej diagonalizacji. W pierwszej kolejności (rozdział 7), przetestowaliśmy

algorytm poprzez identyfikację MZM w rozszerzonym modelu Kitaeva o oddziaływanie wielociałoowe. Następnie, zaproponowany algorytm wykorzystaliśmy do badania wpływu dalekozasięgowych oddziaływań na czasy życia oraz strukturę przestrzenną MZM (rozdział 8). Na koniec, zbadaliśmy operację wyplatania MZM oraz wpływ oddziaływań na ten proces (rozdział 9). Ponadto, zaproponowaliśmy również nową bramkę fazową dla qubitu bazującego na MZM . Zaproponowana bramka fazowa, w odróżnieniu od standardowej bramki fazowej bazującej na fazie dynamicznej, bazuje na fazie geometrycznej. Jest to szczególnie ważne, ponieważ faza geometryczna nie zależy bezpośrednio od czasu. W takiej bramce fazowej faza, jaką nabierze qubit, zależy będzie tylko i wyłącznie od zmian parametrów hamiltonianu. Bramka fazowa bazująca na fazie geometrycznej powinna posiadać mniejszy błąd względem realizacji bramki fazowej na bazie fazy dynamicznej.



ROZDZIAŁ 2

Zerowe Mody Majorany

W tym rozdziale czytelnik zostanie wprowadzony w definicję MZM , zostaną wskazane różnice pomiędzy operatorami Majorany γ_i na węźle i , a $MZM \Gamma_i$. Przedstawiony tutaj zostanie również najprostszy model realizujący MZM — model Kitaeva. Przedstawiona analiza w tym rozdziale została opracowana na podstawie prac [1, 6, 23, 134].

Operatorami Majorany nazywamy operatory hermitowskie γ_i , które spełniają następujące relacje antykomutacji

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (2.1)$$

Najważniejsze własności tych unitarnych operatorów są następujące:

$$\gamma^\dagger = \gamma_i, \quad (2.2)$$

$$\gamma_i^2 = \mathbb{1}. \quad (2.3)$$

Wspomniane operatory o takich własnościach, można skonstruować za pomocą L par fermionowych operatorów kreacji a_i^\dagger i anihilacji a_i :

$$\gamma_i^+ = a_i + a_i^\dagger, \quad (2.4)$$

$$\gamma_i^- = i(a_i - a_i^\dagger), \quad (2.5)$$

gdzie L to liczba węzłów, a operatory a_i, a_i^\dagger spełniają relacje antykomutacji dla fermionów:

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0. \quad (2.6)$$

Tak zdefiniowane operatory są hermitowskie $(\gamma_i^\alpha)^\dagger = \gamma_i^\alpha$, a ich kwadrat jest równy operatori jednostkowemu $(\gamma_i^\alpha)^2 = \mathbb{1}$, (gdzie $\alpha = \pm$). Z uwagi na wymienione własności, dla

Opis rozdziału

2.1 Operatory Majorany

¹Wprowadzono tutaj indeksy \pm , ponieważ z każdym węzłem i możemy zdefiniować dwa różne operatory majorany γ_i^+ , γ_i^- .

operatorów Majorany γ_i nie istnieje analogiczny operator liczby cząstek $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$ jak w przypadku operatorów kreacji a_i^\dagger i anihilacji a_i . Można pokazać, że takie operatory spełniają następującą relację antykomutacji

$$\{\gamma_i^\alpha, \gamma_j^\beta\} = 2\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}. \quad (2.7)$$

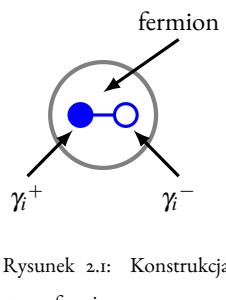
Transformacja odwrotna jest następująca:

$$a_i^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_i^+ + i\gamma_i^-), \quad (2.8)$$

$$a_i = \frac{1}{2}(\gamma_i^+ - i\gamma_i^-). \quad (2.9)$$

Odwrotna transformacja ma interesującą interpretację. Każdy stan fermionowy, $|0\rangle$ pusty albo $|1\rangle$ zapełniony, konstruujemy z dwóch operatorów Majorany (patrz rysunek 2.1). Zbiór operatorów Majorany stanowi bardzo wygodną bazę operatorów $\mathcal{B}_{\gamma_i} = \{\gamma_i^\alpha\}$, która może zostać wykorzystana do opisu *MZM*.

Ważnym operatorem jest operator parzystości \mathcal{P}_i , który można w bazie operatorów Majorany przedstawić w następującej postaci



Rysunek 2.1: Konstrukcja stanu fermionowego z operatorów Majorany.

$$\mathcal{P}_i = 1 - 2\hat{n}_i = i\gamma_i^+ \gamma_i^-.$$

Operator ma dwie wartości własne ± 1 : $+1$ dla stanu nieobsadzonego oraz -1 dla stanu obsadzonego. W późniejszych rozdziałach operator parzystości zostanie wykorzystany do opisu działania qubitu na bazie *MZM*. Wymnażając wszystkie operatory parzystości \mathcal{P}_i — takie operatory komutują ze sobą $[\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] = 0$ — można skonstruować całkowity operator parzystości układu

$$\mathcal{P} = \prod_i \mathcal{P}_i. \quad (2.11)$$

Taki operator ma dwie wartości własne ± 1 . Wartości własne numerują stany z parzystą i nieparzystą całkowitą liczbą cząstek w układzie.

Operatory Majorany zdefiniowane w równaniach (2.4) oraz (2.5) stanowią ortonormalny zbiór operatorów \mathcal{B}_{γ_i} z iloczynem skalarnym¹

¹Dowód można znaleźć w dodatku B.

$$(\gamma_i^\alpha | \gamma_j^\beta) = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}, \quad (2.12)$$

gdzie $(A|B) = \text{Tr}(AB)/\text{Tr}(\mathbb{1})$ to iloczyn Hilberta–Schmidta operatorów. Ortogonalność tych operatorów została wykorzystana w późniejszych rozdziałach do zaprojektowania algorytmu do znajdowania *MZM* w danych układach. Bazę operatorów Majorany \mathcal{B}_{γ_i} można

rozszerzyć o kombinację operatorów Majorany wyższych rzędów

$$(\Upsilon_{im}^1 = \gamma_i^m), \quad \Upsilon_{im}^3 = i\gamma_{i_1}^{m_1}\gamma_{i_2}^{m_2}\gamma_{i_3}^{m_3}, \dots, \Upsilon_{im}^{2M+1} = i^M\gamma_{i_1}^{m_1}\cdots\gamma_{i_{2M+1}}^{m_{2M+1}}. \quad (2.13)$$

Nieparzysta liczba operatorów w konstrukcji Υ_{im}^{2M+1} jest kluczowa. Jeśli rozszerzalibyśmy bazę \mathcal{B}_{γ_i} o parzystą kombinację operatorów γ_i^α , stracilibyśmy warunek dotyczący ortogonalnych operatorów bazy (2.12). Natomiast, po rozszerzeniu bazy \mathcal{B}_{γ_i} o dowolne kombinacje zawierające nieparzystą liczbę operatorów γ_i^α , t.j. $\Upsilon_{im}^3, \Upsilon_{im}^5, \dots, \Upsilon_{im}^{2M+1}$, wszystkie operatory $\gamma_i \in \mathcal{B}_{\gamma_i}$ dalej spełniają równania (2.1)–(2.3) oraz (2.12), a zatem stanowią ortogonalny zbiór operatorów Majorany. W rozprawie doktorskiej skupimy się na konstrukcji MZM wyłącznie bazując na bazie skonstruowanej z pojedynczych operatorów γ_i^m (Υ_{im}^1). W pracy [1] sprawdzaliśmy wyrazy Υ_{im}^3 , ale ich wpływ był znikomy podczas konstrukcji MZM w badanym zagadnieniu. Wyższe wyrazy $\Upsilon_{im}^{2M+1}, M > 0$, nie są takie istotne do rozwiązywania problemów rozważanych w rozprawie doktorskiej. Wszelkie poszukiwania MZM w układach przedstawionych w tej rozprawie doktorskiej ograniczone są do poszukiwania kombinacji lokalnych operatorów Majorany [1].



Zerowe mody Majorany (ang. Majorana zero modes, MZM) Γ_i to są operatory Majorany γ_i , które dodatkowo są całkami ruchu. Matematyczna definicja MZM jest następująca [1, 2, 3]:

2.2 Definicja zerowych modów Majorany

$$\Gamma_i^\dagger = \Gamma_i, \quad (2.14)$$

$$[\hat{H}, \Gamma_i] = 0, \quad (2.15)$$

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (2.16)$$

MZM są to operatory hermitowskie (2.14), komutują z hamiltonianem (2.15) oraz antykomutują ze sobą (2.16) — spełniają identyczne relacje antykomutacji jak operatory Majorany (2.1). Naturalną bazą dla takich operatorów są operatory Majorany γ_i . MZM w bazie operatorów Majorany \mathcal{B}_{γ_i} ma następującą postać

$$\Gamma_n = \sum_i \alpha_i^n \gamma_i, \quad (2.17)$$

gdzie $\alpha_i^n \in \mathbb{R}$. W bazie \mathcal{B}_{γ_i} skonstruowanej z L par lokalnych operatorów, (2.4) oraz (2.5), Γ_n ma następującą postać

$$\Gamma_n = \sum_{m=\pm} \sum_{i=1}^L \alpha_i^{m,n} \gamma_i^m, \quad (2.18)$$

gdzie na współczynniki $\alpha_i^{m,n}$ nakłada się warunki normalizacyjne

$$\sum_m \sum_i (\alpha_i^{m,n})^2 = 1. \quad (2.19)$$

Warunki normalizacyjne są kluczowe — bez nich nie było by spełnione równanie (2.16).



2.3 Model Kitaeva

Po dość abstrakcyjnym wstępie matematycznym, pora na przedstawienie prostego modelu, w którym można zrealizować *MZM*. Przełomowa praca *Unpaired Majorana fermions in quantum wires* [6] autorstwa Alexeia Kitaeva (cytowania: 3148, stan na 5 lutego 2020 roku), rozpoczęła okres burzliwego zainteresowania fizyków z całego świata fizyką związaną z tematyką nadprzewodnictwa oraz topologicznych komputerów kwantowych. Zaprezentowana w tej sekcji analiza modelu Kitaeva bazuje na oryginalnej pracy Kitaeva [6].

Model Kitaeva [6], to najprostszy model mikroskopowy, który w pewnym zakresie parametrów, może realizować *MZM*. Model ten można opisać za pomocą następującego hamiltonianu

$$\hat{H}_{\text{Kitaev}} = \underbrace{\sum_{\langle i,j \rangle} \left(t_{ij}^0 a_i^\dagger a_j + \text{H.c.} \right)}_{\hat{H}_{\text{kin}}} + \underbrace{\sum_{\langle i,j \rangle} \left(\Delta_{ij} a_i^\dagger a_j^\dagger + \text{H.c.} \right)}_{\hat{H}_{\text{prox}}} + \underbrace{\sum_i \mu_i \hat{n}_i}_{\hat{H}_\mu}, \quad (2.20)$$

gdzie a_i^\dagger/a_i to odpowiednio operator kreacji/anihilacji bezspinowego fermionu w węźle i , t_{ij}^0 to całka przeskoku, Δ_{ij} to przerwa nadprzewodząca, μ_i potencjał chemiczny, $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$ operator liczby cząstek.

W celu pokazania, że model rzeczywiście może zawierać *MZM*, rozważymy pewne specjalne przypadki:¹

1. $t_{ij}^0 = \Delta_{ij} = 0, \mu_i > 0$, Hamiltonian (2.20) przyjmie wtedy postać

$$\hat{H}_{\text{triv}} = \sum_i \mu_i \hat{n}_i = \frac{1}{2} \sum_i \mu_i (1 - i \gamma_i^+ \gamma_i^-). \quad (2.21)$$

Układ jest w *fazie trywialnej* — brak *MZM* w układzie — nie istnieją takie kombinacje (2.18), które komutują z hamiltonianem. Stan podstawowy takiego hamiltonianu będzie jednym ze stanów bazowych przestrzeni Hilberta \mathcal{H} zgodnie z rozkładem μ_i .²

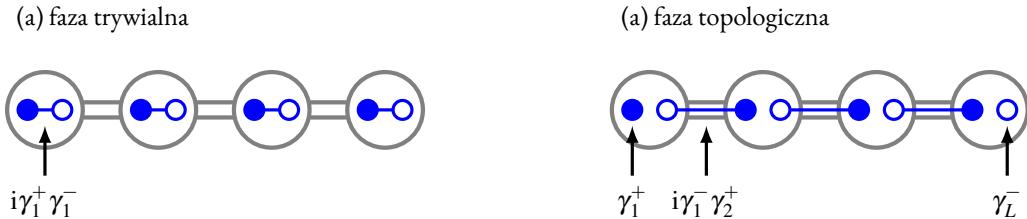
¹Wyprowadzenie można znaleźć w dodatku B.

²Dla $\mu_i > 0$ stanem

podstawowym będzie stan $|0\dots0\rangle$.

2. $t_{ij}^0 = \Delta_{ij} > 0, \mu_i = 0$, w tym przypadku hamiltonian (2.20) przyjmie postać

$$\hat{H}_{\text{topo}} = i \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij}^0 \gamma_i^- \gamma_j^+. \quad (2.22)$$



Rysunek 2.2: Ilustracja faz topologicznych w modelu Kitaeva (a) faza trywialna (b) faza topologiczna.

Załóżmy, że L węzłów formuje łańcuch $\langle i, j \rangle \rightarrow \langle i, i + 1 \rangle$ — jednowymiarowy układ z otwartymi warunkami brzegowymi oraz $t_{ij}^0 = t^0$ jest jednorodne w układzie. Taki układ jest w *fazie topologicznej* — zawiera dwie, zlokalizowane *MZM* znajdujące się na brzegach układu. Hamiltonian takiego układu jest następujący

$$\hat{H}_{\text{topo}}^{\text{chain}} = it^0 \sum_{i=1}^{L-1} \gamma_i^- \gamma_{i+1}^+. \quad (2.23)$$

W hamiltonianie brakuje operatorów γ_1^+ oraz γ_L^- . Takie operatory oczywiście komutują z hamiltonianem, są całkami ruchu

$$[\hat{H}_{\text{topo}}^{\text{chain}}, \gamma_1^+] = [\hat{H}_{\text{topo}}^{\text{chain}}, \gamma_L^-] = 0, \quad (2.24)$$

a zatem to są *MZM* w takim układzie: $\Gamma_1 = \gamma_1^+, \Gamma_2 = \gamma_L^-$.

Te dwa przypadki ilustrują dwa sposoby parowania operatorów Majorany, patrz rysunek 2.2. W pierwszym przypadku operatory Majorany parowane są na tym samym węźle — mody fermionowe budowane są w obrębie danego węzła. W drugim przypadku operatory Majorany parowane są na sąsiednich węzłach — dwa operatory, na brzegach układu są niesparowane, czyli są *MZM*.

Wróćmy jeszcze do hamiltonianu (2.23). Hamiltonian można rozwiązać wprowadzając nowe operatory fermionowe:

$$\tilde{a}_i = \frac{1}{2}(\gamma_{i+1}^+ - i\gamma_i^-), \quad (2.25)$$

$$\tilde{a}_i^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_{i+1}^+ + i\gamma_i^-), \quad (2.26)$$

hamiltonian przyjmie wtedy następującą postać¹

$$\hat{H}_{\text{topo}}^{\text{chain}} = -t^0 \sum_{i=1}^{L-1} (1 - 2\tilde{n}_i) = -t^0 \sum_{i=1}^{L-1} \tilde{\mathcal{P}}_i, \quad (2.27)$$

gdzie $\tilde{n}_i = \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i$ i $\tilde{\mathcal{P}}_i = 1 - 2\tilde{n}_i$. Dla $t^0 > 0$ stan podstawowy tego hamiltonianu odpowiada sytuacji kiedy nie ma cząstek w węzłach $i = 1, \dots, L-1$, wszystkie \tilde{n}_i dla podanego i są nieobsadzone. W hamiltonianie brakuje operatora \tilde{n}_L , a więc niezależnie od tego czy stan \tilde{n}_L jest

¹Wyprowadzenie można znaleźć w dodatku B.

obsadzony czy nie, nie zmienia to energii układu (częstka o energii $E = 0$). Wniosek z tego jest następujący: układ posiada zdegenerowany stan podstawowy, jeden z nieparzystą liczbą częstek $|o\rangle$ (ang. *odd*) oraz drugi z parzystą liczbą częstek $|e\rangle$ (ang. *even*). Oczywiście te stany układu są o innej parzystości:

$$\widetilde{\mathcal{P}}_L|o\rangle = i\gamma_1^+ \gamma_L^- |o\rangle = -|o\rangle, \quad (2.28)$$

$$\widetilde{\mathcal{P}}_L|e\rangle = i\gamma_1^+ \gamma_L^- |e\rangle = +|e\rangle. \quad (2.29)$$

Degeneracja stanu podstawowego jest warunkiem koniecznym¹ istnienia *MZM*. W wielu pracach autorzy wykorzystują degenerację jako podstawową przesłankę dotyczącą istnienia *MZM* w zakresie danych parametrów.

Oczywiście, *MZM* mogą istnieć w modelu Kitaeva poza szczególnym przypadkiem opisanym w pkt. 2. Rozważmy jednorodny hamiltonian (2.20) dla jednowymiarowego układu o otwartych warunkach brzegowych (łańcuch)

$$\hat{H}_{\text{Kitaev}}^{\text{chain}} = \sum_{i=1}^{L-1} \left[\left(t^0 a_i^\dagger a_{i+1} + \Delta a_i^\dagger a_{i+1}^\dagger \right) + \text{H.c.} \right] + \sum_{i=1}^L \mu \hat{n}_i. \quad (2.30)$$

Dla takiego modelu, kiedy $|\Delta| > 0$, możemy wyróżnić dwie fazy: *topologiczną* i *trywialną* [6].

Można pokazać analitycznie, że faza topologiczna jest obecna dla $|\mu| \leq 2t^0$, a faza trywialna dla $|\mu| > 2t^0$ [6]. *MZM* mogą się pojawić tylko w tej pierwszej fazie. Należy tutaj podkreślić, że te warunki opisujące granice faz są spełnione jedynie w granicy termodynamicznej. Dodatkowo w skończonych układach komutator (2.15) nie znika (poza szczególnym przypadkiem $\Delta_{ij} = |t^0|$). Związane jest to bezpośrednio z rozkładem przestrzennym *MZM*, a bardziej precyzyjnie z ich przekrywaniem się. *MZM* zanikają wykładowiczo od brzegów nanodrutu [6, 123, 135].

Warto tutaj wspomnieć, że w przypadku modelu Kitaeva rozszerzonego o oddziaływanie wielociałowe, wyrażenie opisujące granicę tych dwóch faz jest nieco bardziej złożone [1, 123, 128]. Istnieje kilka metod badania obecności *MZM* w układach z oddziaływaniami wielociałowymi, w tym kilka wskaźników sprawdzających istnienie faz topologicznych w takich układach [133]. W tej rozprawie doktorskiej tematem przewodnim pracy są układy zawierające oddziaływanie wielociałowe. Z teoretycznego punktu widzenia, badanie kwantowych układów z oddziaływaniami wielociałowymi jest relatywnie trudnym zadaniem. Istnieją wyrafinowane metody, dla przykładu *DMRG*, które umożliwiają badanie układów za-

¹Nie jest to natomiast warunek wystarczający.

wierających tysiące węzłów, ale skuteczność tej metody jest ograniczona do badania krótkozasięgowych oddziaływań. Natomiast metoda *ED* ograniczona jest tylko do relatywnie małych układów ($L \sim 20$) [136], ale umożliwia badanie dowolnych oddziaływań, również tych dalekozasięgowych [2].



3

ROZDZIAŁ

Topologiczne obliczenia kwantowe

W tym rozdziale przedstawione zostaną najważniejsze cechy MZM , które sprawiają, że są one tak interesującym tematem badawczym. Zaprezentowane zostanie tutaj, w jaki sposób można wykorzystać MZM do wykonywania obliczeń kwantowych i konstrukcji podstawowych bramek kwantowych. Przedstawiona analiza w tym rozdziale została opracowana na podstawie prac [7, 14, 18, 19, 23, 24, 134].

W tym rozdziale skupiono się na rozważaniach bardziej ogólnych. Założono, że w układzie znajduje się $2M MZM$: $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2M}$, które spełniają wszystkie założenia (2.14)–(2.16) opisane w sekcji 2.2. W identyczny sposób, jak dokonano to w sekcji 2.3 w równaniach (2.25) oraz (2.26), z MZM można skonstruować M modów fermionowych:

$$\tilde{a}_i = \frac{1}{2}(\Gamma_{2i-1} - i\Gamma_{2i}), \quad i = 1, \dots, M \quad (3.1)$$

$$\tilde{a}_i^\dagger = \frac{1}{2}(\Gamma_{2i-1} + i\Gamma_{2i}), \quad (3.2)$$

gdzie te fermiony spełniają standardowe relacje antykomutacji dla fermionów [równanie (2.6)]:

$$\{\tilde{a}_i, \tilde{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{\tilde{a}_i^\dagger, \tilde{a}_j^\dagger\} = 0. \quad (3.3)$$

W odróżnieniu od równań (2.25), (2.26), gdzie tylko jeden fermion – \tilde{n}_L – miał zerową energię, każdy fermionowy mod utworzony z Γ_i ma zerową energię. Z $2M MZM$ można utworzyć M modów fermionowych. Każdy z tych fermionowych modów $\tilde{n}_i = \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i$ może być pusty $|e\rangle$ lub zapełniony $|o\rangle$ i może należeć odpowiednio do podprzestrzeni z parzystą lub nieparzystą liczbą cząstek. Z tego wynika, że w układzie zawierającym $2M MZM$ musi istnieć 2^M zdegenerowanych stanów podstawowych. Te stany można ponumerować wartościami

Opis rozdziału

3.1 Statystyka nieabelowa i grupa warkoczowa

własnymi operatorów parzystości

$$\widetilde{\mathcal{P}}_i = 1 - 2\tilde{n}_i = i\Gamma_{2i-1}\Gamma_{2i}. \quad (3.4)$$

Taki operator parzystości, analogicznie jak w równaniach (2.29) oraz (2.29), przyjmuje dwie wartości własne ± 1 :

$$\widetilde{\mathcal{P}}_i |o\rangle_i = -|o\rangle_i, \quad (3.5)$$

$$\widetilde{\mathcal{P}}_i |e\rangle_i = +|e\rangle_i, \quad (3.6)$$

gdzie wprowadzona notacja $|e\rangle_i$ oznacza stan własny operatora parzystości $\widetilde{\mathcal{P}}_i$, analogicznie jak w równaniach (2.28), (2.29). Takie operatory komutują ze sobą:

$$[\widetilde{\mathcal{P}}_i, \widetilde{\mathcal{P}}_j] = 0. \quad (3.7)$$

Operatory fermionowe $\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\dagger$ transformują stany podstawowe pomiędzy różnymi sektorami parzystości, posiadają analogiczne działanie jak operatory drabinkowe:¹

¹Dowód można znaleźć w dodatku B.

$$\tilde{a}_i |o\rangle_i = |e\rangle_i, \quad (3.8)$$

$$\tilde{a}_i |e\rangle_i = 0, \quad (3.9)$$

$$\tilde{a}_i^\dagger |o\rangle_i = 0, \quad (3.10)$$

$$\tilde{a}_i^\dagger |e\rangle_i = |o\rangle_i. \quad (3.11)$$

Z iloczynu operatorów parzystości można skonstruować całkowity operator parzystości w układzie

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \prod_{i=1}^M \widetilde{\mathcal{P}}_i = i^M \prod_{j=1}^M \Gamma_{2j-1}\Gamma_{2j} \quad (3.12)$$

Układy fermionowe, w stanie nadprzewodzącym lub w kontakcie z nadprzewodnikiem, chronione są symetrią parzystości, a więc całkowita parzystość układu powinna być zachowana. Rozważmy co się stanie z MZM po adiabatycznej zamianie quasiczątek miejscami. Dla danej pewnej fazy $\eta_i \in \{-1, +1\}$, MZM zamieniają się pozycjami:

$$\Gamma_i \rightarrow \Gamma'_i = \eta_j \Gamma_j, \quad (3.13)$$

$$\Gamma_j \rightarrow \Gamma'_j = \eta_i \Gamma_i. \quad (3.14)$$

Po takiej transformacji operator parzystości $\widetilde{\mathcal{P}}$ powinien pozostać inwariantny

$$\widetilde{\mathcal{P}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}' = i^M \Gamma_1 \cdots \Gamma'_i \cdots \Gamma'_j \cdots \Gamma_{2M} = -i^M \Gamma_1 \cdots \eta_i \Gamma_i \cdots \eta_j \Gamma_j \cdots \Gamma_{2M} = \widetilde{\mathcal{P}} \quad (3.15)$$

Aby równanie (3.15) było spełnione, następujący warunek na fazy η_i musi również być spełniony

$$\eta_i \eta_j = -1. \quad (3.16)$$

To równanie ma dwa rozwiązania:

$$\eta_i = \mp 1, \quad (3.17)$$

$$\eta_j = \pm 1. \quad (3.18)$$

Pod tym rozwiązaniem ukryta jest najważniejsza własność *MZM* — nieabelowa statystyka (*NAS*):

$$\Gamma_i \rightarrow \pm \Gamma_j, \quad (3.19)$$

$$\Gamma_j \rightarrow \pm \Gamma_i. \quad (3.20)$$

Co się stanie ze stanem kwantowym $|\psi\rangle$ takiego układu po wymianie cząstek Γ_i, Γ_j (zakładając adiabatyczny proces wymiany)? W mechanice kwantowej stan początkowy i stan końcowy związany jest z pewną transformacją unitarną \mathcal{U}

$$|\psi\rangle \rightarrow \mathcal{U}|\psi\rangle. \quad (3.21)$$

Rozwiązanie tego problemu można znaleźć zakładając, że w układzie zachowana jest parzystość \mathcal{P} . To implikuje fakt, że operator \mathcal{U} komutuje z operatorem parzystości \mathcal{P} :

$$[\mathcal{U}, \mathcal{P}] = 0. \quad (3.22)$$

Rozsądnym założeniem, jest również to, że operator \mathcal{U} zależy tylko i wyłącznie od cząstek uczestniczących w wymianie $\mathcal{U}(\Gamma_i, \Gamma_j)$. Założono, postać takiego operatora

$$\mathcal{U}(\Gamma_i, \Gamma_j) = \exp[-i\mathcal{A}_{ij}\omega], \quad (3.23)$$

gdzie \mathcal{A}_{ij} to operator hermitowski, a $\omega \in \mathbb{R}$. Operator \mathcal{A}_{ij} musi być funkcją operatorów Γ_i, Γ_j . Naturalnym kandydatem na postać \mathcal{A}_{ij} jest operator parzystości zbudowany z *MZM* uczestniczących w wymianie

$$\mathcal{A}_{ij} = i\Gamma_i\Gamma_j. \quad (3.24)$$

Można wykazać, że postać \mathcal{U} jest następującą¹

¹Wyprowadzenie można znaleźć w dodatku B.

$$\mathcal{U} = \cos \omega + i\Gamma_i\Gamma_j \sin \omega. \quad (3.25)$$

¹Wyprowadzenie można znaleźć w dodatku B.

Pozostało ustalić ω . Można to zrobić pracując w obrazie Heisenberga [137]¹

$$\Gamma_i \rightarrow \Gamma'_i = \mathcal{U}^\dagger \Gamma_i \mathcal{U} = \Gamma_i \cos(2\omega) + \Gamma_j \sin(2\omega) = \pm \Gamma_j, \quad (3.26)$$

co prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases} \cos(2\omega) = 0, \\ \sin(2\omega) = \pm 1. \end{cases} \quad (3.27)$$

Ostatecznie są dwa rozwiązania dla $\omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\omega = \pm \frac{\pi}{4}. \quad (3.28)$$

Dwa rozwiązania ω nie są niczym nadzwyczajnym. Znak można interpretować jako wymianę zgodną ze wskazówkami zegara, oraz wymianę przeciwną do wskazówek zegara. Ostatecznie postać operatora \mathcal{U} jest następująca

$$\mathcal{U}(\Gamma_i, \Gamma_j) = \exp\left[+\frac{\pi}{4}\Gamma_i\Gamma_j\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \Gamma_i\Gamma_j). \quad (3.29)$$

Wybrano rozwiązanie $\omega = +\frac{\pi}{4}$ i przyjęto, że to rozwiązanie odpowiada wymianie zgodnej ze wskazówkami zegara. Rozwiązanie $\mathcal{U}(\Gamma_j, \Gamma_i)$ odpowiadające wymianie częstek przeciwnie ze wskazówkami zegara odpowiada operacji odwrotnej do $\mathcal{U}(\Gamma_i, \Gamma_j)$

$$\mathcal{U}^{-1}(\Gamma_i, \Gamma_j) = \mathcal{U}(\Gamma_j, \Gamma_i) = \mathcal{U}^\dagger(\Gamma_i, \Gamma_j) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \Gamma_i\Gamma_j). \quad (3.30)$$

Dalej można zdefiniować nowy operator, \mathcal{B}_i , operator wyplatania

$$\mathcal{B}_i = \mathcal{U}(\Gamma_i, \Gamma_{i+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \Gamma_i\Gamma_{i+1}). \quad (3.31)$$

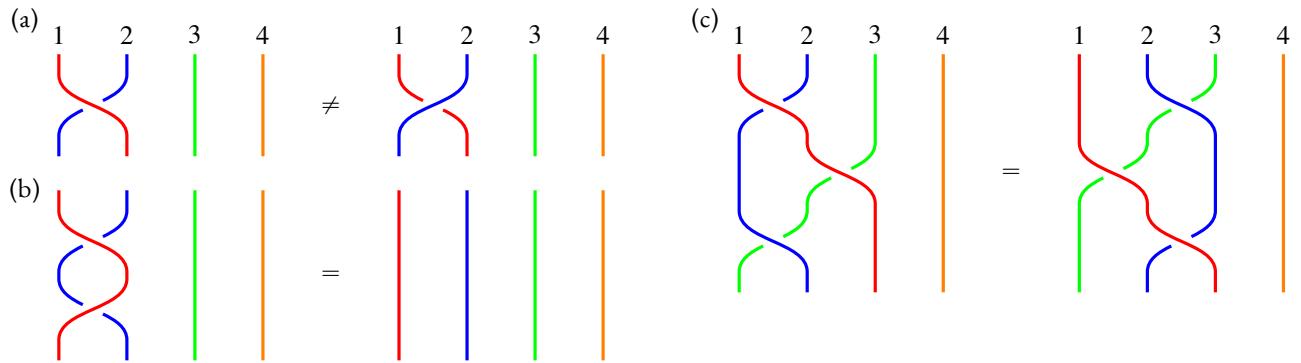
Zbiór takich operatorów $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{M-1}, \mathcal{B}_1^{-1}, \dots, \mathcal{B}_{M-1}^{-1}\}$ stanowi zbiór generatorów warkoczowej M -włókownej grupy Artina \mathfrak{B}_M [138]. W obrębie grupy warkoczowej \mathfrak{B}_M następujące równania są spełnione:

$$\forall_{|i-j|>1} \mathcal{B}_i \mathcal{B}_j = \mathcal{B}_j \mathcal{B}_i, \quad (3.32)$$

$$\forall_i \mathcal{B}_i \mathcal{B}_{i+1} \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_{i+1} \mathcal{B}_i \mathcal{B}_{i+1}. \quad (3.33)$$

Wyżej wymienione równania stanowią tzw. *równania Yanga-Baxtera* [26, 139, 140]. Dowód, że te równania są spełnione przez operator \mathcal{B}_i zdefiniowany w (3.31) został przeprowadzony w dodatku B. Przykład w jaki sposób można reprezentować grupę warkoczną \mathfrak{B}_M , włókna oraz operacje wyplatania \mathcal{B}_i zilustrowano na rysunku 3.1. *MZM* mogą być interpretowane jako włókna w grupie \mathfrak{B}_M .





Rysunek 3.1: Ilustracja grupy warkoczowej \mathfrak{B}_4 , dla $M = 4$ włókien. Włókna zostały ponumerowane. Ilustracja równania: (a) $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_1^{-1}$ (nieabelowość); (b) $\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1^{-1} = \mathbb{1}$; (c) Yanga–Baxtera (3.33).

W celu realizacji qubitu z wykorzystaniem MZM potrzebne są co najmniej cztery MZM **3.2 Bramki kwantowe** Γ_i . Spowodowane jest to symetrią parzystości w takich układach fermionowych, w których realizowane są MZM . W sekcji 3.1 pokazano, że degeneracja stanu podstawowego zależy od liczby Γ_i w układzie jak $2^{M/2}$, gdzie M to liczba niezależnych MZM Γ_i w układzie. Połowa tych zdegenerowanych stanów należy do sektora parzystego, a druga połowa do sektora nieparzystego przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Posiadając w układzie tylko dwie niezależne MZM nie jesteśmy w stanie skonstruować bazy dla qubitu bazującego na MZM . Układ posiadający dwa niezależne Γ_i posiada dwa stany podstawowe $|o\rangle$ z sektora nieparzystego oraz $|e\rangle$ z sektora parzystego przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Z uwagi na symetrię parzystości, przejścia pomiędzy stanami $|e\rangle \rightarrow |o\rangle$ czy $|o\rangle \rightarrow |e\rangle$ są niedozwolone. Układ zawierający cztery MZM : $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ posiada cztery stany podstawowe: $|ee\rangle = |e\rangle \otimes |e\rangle, |eo\rangle = |e\rangle \otimes |o\rangle, |oe\rangle = |o\rangle \otimes |e\rangle, |oo\rangle = |o\rangle \otimes |o\rangle$. Przyjęto następującą numerację quasicząstek

$$|oo\rangle = \tilde{a}_1^\dagger \tilde{a}_2^\dagger |ee\rangle. \quad (3.34)$$

Układ chroniony jest symetrią parzystości. Stany $|ee\rangle, |oo\rangle$ są parzyste, a stany $|oe\rangle, |eo\rangle$ są nieparzyste. Przejścia, gdzie zachowana jest parzystość stanu kwantowego, w takim przypadku $|oo\rangle \leftrightarrow |ee\rangle$ oraz $|oe\rangle \leftrightarrow |eo\rangle$, są dozwolone. Niedozwolone są natomiast przejścia pomiędzy stanami o różnej parzystości: $|oo\rangle \leftrightarrow |eo\rangle, |oo\rangle \leftrightarrow |oe\rangle, |ee\rangle \leftrightarrow |eo\rangle$ oraz $|ee\rangle \leftrightarrow |oe\rangle$. Grupa warkoczowa \mathfrak{B}_4 posiada 6 generatorów: $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1^\dagger, \mathcal{B}_2^\dagger, \mathcal{B}_3^\dagger$. W dalszej części rozważań założono, że w układzie znajdowała się parzysta liczba cząstek. Stany bazowe qubitu $|0\rangle, |1\rangle$ można zdefiniować w następujący sposób:¹

¹Analogiczną analizę można przeprowadzić dla pozostałych stanów $|eo\rangle, |oe\rangle$.

$$|0\rangle = |ee\rangle, \quad (3.35)$$

$$|1\rangle = |oo\rangle. \quad (3.36)$$

Następnie przeanalizowano co się stanie ze stanami $|0\rangle$, $|1\rangle$ po dokonaniu wyplatania \mathcal{B}_1

$$|0\rangle \rightarrow \mathcal{B}_1|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \Gamma_1\Gamma_2)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\widetilde{\mathcal{P}}_1)|ee\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)|0\rangle = \exp(-i\frac{\pi}{4})|0\rangle. \quad (3.37)$$

Oczywiście wyplatanie dokonane w odwrotnej kolejności prowadzi do przeciwej zmiany fazy

$$|0\rangle \rightarrow \mathcal{B}_1^\dagger|0\rangle = \exp(+i\frac{\pi}{4})|0\rangle, \quad (3.38)$$

co stanowi wspomnianą wcześniej właściwość *MZM*: nieabelowość. Analogicznie stan $|1\rangle$

$$|1\rangle \rightarrow \mathcal{B}_1|1\rangle = \exp(+i\frac{\pi}{4})|1\rangle. \quad (3.39)$$

Podwójna wymiana \mathcal{B}_1^2 :

$$|0\rangle \rightarrow \mathcal{B}_1^2|0\rangle = \exp(-i\frac{\pi}{2})|0\rangle = -i|0\rangle, \quad (3.40)$$

$$|1\rangle \rightarrow \mathcal{B}_1^2|1\rangle = \exp(+i\frac{\pi}{2})|1\rangle = +i|1\rangle. \quad (3.41)$$

Z dokładnością do fazy globalnej, operację \mathcal{B}_1^2 można interpretować jako bramkę *Z*, którą w bazie qubitu można zapisać jako

Rysunek 3.2: Realizacja bramki *Z*.

$$Z = \mathcal{B}_1^2 = -i\sigma^z = -i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

gdzie $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ta dodatkowa faza $-i$ nie ma wpływu na wynik obliczeń kwantowych z wykorzystaniem takiej bramki *Z*. Realizacja bramki została schematycznie przedstawiona na rysunku 3.2. Następnie przeanalizowano działanie operatora \mathcal{B}_2 na stany bazowe qubitu¹

¹Wyprowadzenie można znaleźć w dodatku B.

$$|0\rangle \rightarrow \mathcal{B}_2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \Gamma_2\Gamma_3)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle). \quad (3.43)$$

Otrzymano superpozycję stanów bazowych. Analogicznie stan $|1\rangle^1$

$$|1\rangle \rightarrow \mathcal{B}_2|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|0\rangle). \quad (3.44)$$

Natomiast po podwójnej takiej operacji:¹

$$|0\rangle \rightarrow \mathcal{B}_2^2 |0\rangle = -i|1\rangle, \quad (3.45)$$

$$|1\rangle \rightarrow \mathcal{B}_2^2 |1\rangle = -i|0\rangle. \quad (3.46)$$

Co do nieistotnej fazy otrzymano bramkę X (co odpowiada klasycznej bramce NOT) schematycznie przedstawioną na rysunku 3.3

$$X = \mathcal{B}_2^2 = -i\sigma^x = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Można pokazać, że następujące operacje prowadzą do realizacji bramki Y ¹ (rysunek 3.4)

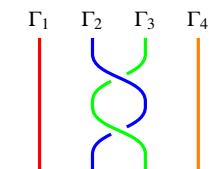
$$Y = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{B}_1^\dagger = -i\sigma^y = -i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

W prosty sposób można zrealizować bramkę Hadamarda H ¹ (rysunek 3.5)

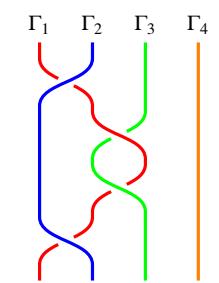
$$H = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1 = -i \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

W dodatku C czytelnik może znaleźć analizę układu MZM , który może posłużyć do konstrukcji układu dwuqubitowego, wraz z realizacją bramki CNOT.

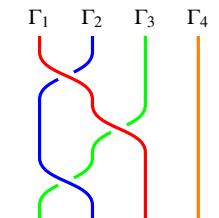
¹ Wyprowadzenie można znaleźć w dodatku B.



Rysunek 3.3: Realizacja bramki X .



Rysunek 3.4: Realizacja bramki Y .



Rysunek 3.5: Realizacja bramki H .

W przypadku komputerów klasycznych wystarczą dwie bramki aby zagwarantować *uniwersalność* obliczeń np. OR i NOT lub AND i NOT lub jedna dwubitowa NOR lub NAND [141]. Z tych ostatnich dwóch, w prosty sposób można zrealizować pierwsze cztery wymienione bramki. Nieformalnie oznacza to, że wykorzystując wyżej wymienione klasyczne bramki można zrealizować dowolny klasyczny algorytm z dowolną dokładnością. Zestaw takich bramek często nazywa się *uniwersalnymi bramkami logicznymi*.

Bramka Hadamarda H , bramka fazowa² $R(\frac{\pi}{4})$ oraz bramka CNOT³ stanowią minimalny zestaw bramek, które gwarantują uniwersalność obliczeń kwantowych [141] — *uniwersalne bramki kwantowe*. Niestety okazuje się, że zestaw bramek, który można wygenerować za pomocą generatorów grupy warkoczowej \mathfrak{B}_M , nie gwarantuje uniwersalności obliczeń [134]. Bramkę Hadamarda H oraz bramkę CNOT można zrealizować z wykorzystaniem MZM z zagwarantowaną ochroną topologiczną, co pokazano odpowiednio w sekcji 3.2 oraz

3.3 Uniwersalność obliczeń, a bramka fazowa

$${}^2 R(\frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

$${}^3 \text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

w dodatku C. Wyzwanie stanowi bramka fazowa $R(\frac{\pi}{4})$. Tej ostatniej nie da się zrealizować wykorzystując MZM z równoczesną zagwarantowaną ochroną topologiczną [134]. Da się natomiast skonstruować taką bramkę zbliżając i oddalając parę MZM na pewien czas t . MZM w układach zanikają wykładniczo od brzegów układu [6]. W przypadku gdy MZM przekrywają się na skutek oddziaływania, stany podstawowe ulegają rozszczepieniu o pewną energię $\delta E = E^{ee} - E^{oo}$, gdzie odpowiednio energie E^{ee} oraz E^{oo} to energie własne stanów bazowych qubitu $|0\rangle = |ee\rangle$ oraz $|1\rangle = |oo\rangle$ [równania (3.35) oraz (3.36)]. Zakładając, że hamiltonian układu nie zależy od czasu i obecne jest niezerowe rozszczepienie energii $\delta E \neq 0$, po czasie t stany nabiorą odpowiednio fazy:

$$|ee\rangle \rightarrow e^{-iE^{ee}t}|ee\rangle, \quad (3.50)$$

$$|oo\rangle \rightarrow e^{-iE^{oo}t}|oo\rangle. \quad (3.51)$$

Można to odpowiednio zaprezentować w postaci macierzy:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-iE^{ee}t} & 0 \\ 0 & e^{-iE^{oo}t} \end{bmatrix} = e^{-iE^{ee}t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta E t} \end{bmatrix} = e^{i\chi} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Z dokładnością do nieistotnej fazy globalnej $\chi = -E^{ee}t$ otrzymano bramkę fazową $R(\theta)$, gdzie $\theta = \delta E t$. Zakładając idealną kontrolę nad układem, można by zrealizować bramkę $R(\frac{\pi}{4})$ wymaganą do zagwarantowania uniwersalności obliczeń. Oczywiście ciężko sobie wyobrazić taką perfekcyjną możliwość kontroli, w szczególności, że $\delta E(t)$ zależeć będzie od czasu dla takiego procesu zbliżania i oddalania MZM . Taka operacja z pewnością będzie wymagała dodatkowej korekcji błędów, np. z wykorzystaniem tzw. *destylacji magicznych stanów* [134, 142]. Przedstawione powyżej rozwiązanie bazuje na fazie dynamicznej. Zdecydowaną wadą takiego rozwiązania jest fakt, że faza θ zależy nie tylko od zmian parametrów hamiltonianu układu, ale również od czasu ewolucji. W pracy [3] zaproponowaliśmy inne podejście bazujące na fazie geometrycznej. Prezentowane rozwiązanie również wymaga dodatkowej korekcji błędów po wykonaniu operacji z nim związanych. Jednak takie rozwiązanie powinno generować mniejsze błędy niż standardowe podejście z wykorzystaniem fazy dynamicznej, dzięki wyeliminowaniu zależności od wspomnianej fazy.



Część II:

Metodyka badań

Rozdział 4	Metody dokładnej diagonalizacji	37
Sekcja 4.1	Konstrukcja bazy	37
Sekcja 4.2	Symetria parzystości	39
Sekcja 4.3	Konstrukcja hamiltonianu	40
Rozdział 5	Mody Majorany jako lokalne całki ruchu	45
Sekcja 5.1	Lokalne całki ruchu	45
Sekcja 5.2	Korelacje wielociałowe	46
Sekcja 5.3	Skalowanie rozmiarowe	49
Rozdział 6	Dynamika kwantowa	53
Sekcja 6.1	Pełna ewolucja czasowa	53
Sekcja 6.2	Schematy numeryczne	55
Sekcja 6.3	Czynniki fazowe	57

4

ROZDZIAŁ

Metody dokładnej diagonalizacji

W tym rozdziale zostaną omówione zagadnienia związane z konstrukcją bazy przestrzeni Hilberta oraz wyznaczaniem elementów macierzowych hamiltonianu. Przedstawione zostanie w jaki sposób generować hamiltonian z symetrią parzystości na przykładzie modelu Kitaeva oraz zarys używanych metod do rozwiązywania zagadnienia własnego. Przedstawiona analiza w tym rozdziale została opracowana na podstawie prac [143–146].

Symetrie pełnią bardzo ważną rolę w fizyce. Od strony numerycznej, w fizyce ciała stałego, symetrie pozwalają ograniczyć rozmiar przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Takie ograniczenie na \mathcal{H} umożliwia badanie większych układów, co jest bardzo istotne przy badaniu układów oddziałujących wielu cząstek. Przestrzeń Hilberta \mathcal{H}^L reprezentująca układ L węzłów, gdzie w każdym węźle, zgodnie z zakazem Pauliego, może znaleźć się tylko jeden fermion, można rozłożyć na L lokalnych przestrzeni Hilberta \mathcal{H}_i izomorficznych z \mathbb{C}^2 związanych z poszczególnymi węzłami [143, 144]

$$\mathcal{H}^L = \bigotimes_{i=1}^L \mathcal{H}_i. \quad (4.1)$$

Oczywiście wymiar, czyli liczba wektorów bazowych takiej przestrzeni, wynosi

$$\dim \mathcal{H}^L = \prod_{i=1}^L \dim(\mathcal{H}_i) = \prod_{i=1}^L 2 \dim \mathbb{C} = 2^L. \quad (4.2)$$

Taką przestrzeń Hilberta \mathcal{H}^L można skonstruować z podprzestrzeni z określoną liczbą N fermionów \mathcal{H}_N^L

$$\mathcal{H}^L = \bigoplus_{N=0}^L \mathcal{H}_N^L, \quad (4.3)$$

gdzie wymiar takiej przestrzeni pozostaje bez zmian

$$\dim \mathcal{H}^L = \sum_{N=0}^L \dim \mathcal{H}_N^L = \sum_{N=0}^L \binom{L}{N} = 2^L. \quad (4.4)$$

Skorzystano tutaj z twierdzenia o dwumianie oraz z zakazu Pauliego, który implikuje, że wymiar przestrzeni reprezentującej układ zawierający L węzłów z N fermionami jest równy liczbie kombinacji N -elementowej zbioru L -elementowego. Taki rozkład (4.3) jest szczególnie istotny w przypadku, kiedy układ ma zachowaną liczbę częstek w układzie

$$[\hat{H}, \hat{N}] = 0, \quad (4.5)$$

gdzie $\hat{N} = \sum_i \hat{n}_i$ to operator liczby wszystkich częstek w układzie. Kiedy warunek (4.5) jest spełniony, hamiltonian \hat{H} można rozłożyć na sumę prostych hamiltonianów $\hat{H}_N \in \mathcal{H}_N^L$ należących do odpowiednich podprzestrzeni

$$\hat{H} = \bigoplus_{N=0}^L \hat{H}_N. \quad (4.6)$$

Kiedy taka symetria (4.5) jest spełniona, układ ma zachowaną liczbę częstek N i można rozwiązywać zagadnienie hamiltonianu \hat{H} poprzez rozwiązywanie mniejszych problemów \hat{H}_N z określona liczbą częstek N .

Do badania układów oddziałujących wielu częstek, wygodną bazą jest baza Waniera — baza położeniowa. Operator kreacji a_i^\dagger tworzy fermion w węźle i , operator anihilacji a_i niszczy fermion w węźle i . Zgodnie z zakazem Pauliego, który wynika wprost z reguł antykomutacji operatorów a_i, a_i^\dagger :

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{a_i, a_j\} = 0, \quad (4.7)$$

kwadrat operatorów $a_i^2 = (a_i^\dagger)^2 = 0$. Żadna para fermionów nie może być w tym samym stanie — zakaz Pauliego. Dla układu opisanego przez hamiltonian $\hat{H} \in \mathcal{H}^L$ w celu wygenerowania wszystkich stanów bazowych wystarczy każdą liczbę naturalną z przedziału $[0, 2^L - 1]$ przekonwertować do postaci w zapisie dwójkowym z wykorzystaniem L bitów. Przykład $(0)_{10} \rightarrow (\underbrace{00 \cdots 0}_L)_2, (3)_{10} \rightarrow (\underbrace{110 \cdots 00}_L)_2$, itd., gdzie przyjęto numerację bitów z konwencją *big endian*. Odpowiednio 1/0 może reprezentować stan obsadzony/nieobsadzony, a kolejne cyfry reprezentować ponumerowane węzły sieci. Fermiony posiadają antysymetryczne stany, tzn. zamiana miejscami dwóch fermionów prowadzi do zmiany znaku stanu kwantowego. Dlatego należy określić dokładną numerację częstek. Przyjęto analogiczną numerację stanów, zgodnie z równaniem (3.34)

$$|11000\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |00000\rangle. \quad (4.8)$$

Zgodnie z równaniem (4.7), działanie operatorów $a_2^\dagger a_1^\dagger |00000\rangle$ wyprodukuje stan ze znakiem przeciwnym $-|11000\rangle$.

Bezpośrednia konstrukcja bazy z wykorzystaniem konwersji liczb pomiędzy systemem dziesiętnym, a dwójkowym jest nieefektywna. Standardowo w języku programowania C++ 32-bitowa zmienna typu `unsigned int` może przechowywać liczby całkowite z przedziału $[0, 2^{32} - 1]$. Utworzonye stany z konwersji $(\dots)_10$ na $(\dots)_2$ nie są w żaden użyteczny sposób posortowane. Wykorzystując *kombinacyjny system liczbowy* [147], można generować stany bazowe z wybranej podprzestrzeni \mathcal{H}_N^L z określona liczbą cząstek N . Takie rozwiązanie zapewnia generowanie $\binom{L}{N} < 2^L$ stanów bazowych o określonej liczbie N . Algorytmy do wyznaczania elementów macierzowych, które korzystają z kombinacyjnego systemu liczbowego, są bardziej wydajne niż te korzystające z bezpośredniego generowania stanów bazowych z konwersji liczb do systemu dwójkowego.



Można dokonać podziału przestrzeni Hilberta na podprzestrzenie \mathcal{H}_e^L oraz \mathcal{H}_o^L odpowiednio z parzystą oraz nieparzystą liczbą cząstek

4.2 Symetria parzystości

$$\mathcal{H}^L = \mathcal{H}_e^L \oplus \mathcal{H}_o^L, \quad (4.9)$$

gdzie:

$$\mathcal{H}_e^L = \bigoplus_{N=0}^{\lfloor L/2 \rfloor} \mathcal{H}_{2N}^L, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{H}_o^L = \bigoplus_{N=0}^{\lfloor L/2 \rfloor - 1} \mathcal{H}_{2N+1}^L. \quad (4.11)$$

Jak stwierdzono w rozdziale 2, układy fermionowe, w stanie nadprzewodzącym lub w kontakcie z nadprzewodnikiem, posiadają symetrię parzystości liczb cząstek. Hamiltonian układu zawierający symetrię parzystości można rozłożyć na podprzestrzenie parzyste i nieparzyste rozwiązując zagadnienia oddziennie dla poszczególnych podprzestrzeni. Analizę takiego hamiltonianu można znaleźć w kolejnej sekcji 4.3. Warunkiem koniecznym istnienia symetrii parzystości jest komutacja hamiltonianu \hat{H} układu z całkowitym operatorem parzystości \mathcal{P} [równanie (2.11)]

$$[\hat{H}, \mathcal{P}] = 0. \quad (4.12)$$

Jeśli równanie (4.12) jest spełnione, to hamiltonian \hat{H} można rozłożyć na sumę prostych hamiltonianów \hat{H}^e oraz \hat{H}^o , które należą odpowiednio do podprzestrzeni z parzystą i nieparzy-

stą liczbą częstek

$$\hat{H} = \hat{H}^e \oplus \hat{H}^o, \quad \hat{H}^e \in \mathcal{H}_e^L, \hat{H}^o \in \mathcal{H}_o^L. \quad (4.13)$$

Dzięki takiemu rozkładowi hamiltonianu \hat{H} na sumę prostą, problem własny takiego hamiltonianu \hat{H} sprowadza się do dwóch mniejszych problemów własnych hamiltonianów \hat{H}^e oraz \hat{H}^o . Zagadnienie własne hamiltonianu \hat{H} można zapisać w następujący sposób

$$\hat{H}|n\rangle = E|n\rangle, \quad (4.14)$$

gdzie $|n\rangle$ to stan własny hamiltonianu, a E to odpowiadająca mu energia własna. Równanie (4.14) stanowi bardzo ważne równanie: *niezależne od czasu równanie Schrödingera (ang. time independent Schrödinger equation, TISE)*. Rozwiązania tego równania, stany własne $|n\rangle$, reprezentują stacjonarne rozwiązania układu, czyli stany dla których pomiar dowolnej obserwabli nie zależy od czasu.

Po rozkładzie (4.13), rozwiązania równania (4.14) są równoważne rozwiązaniami następujących równań Schrödingera (TISE):

$$\hat{H}^e|n^e\rangle = E^e|n^e\rangle, \quad (4.15)$$

$$\hat{H}^o|n^o\rangle = E^o|n^o\rangle. \quad (4.16)$$

W celu transformacji do oryginalnej bazy \hat{H} należy wykonać sumę prostą rozwiązań $|n^e\rangle, |n^o\rangle$ z wektorami zerowymi $\mathbb{0}^e, \mathbb{0}^o$ z odpowiednich podprzestrzeni $\mathcal{H}_e^L, \mathcal{H}_o^L$:

$$|n\rangle \rightarrow |n^e\rangle \oplus \mathbb{0}^o, \quad (4.17)$$

$$|n\rangle \rightarrow \mathbb{0}^e \oplus |n^o\rangle. \quad (4.18)$$

Takie transformacje odwrotne są szczególnie przydatne podczas realizacji algorytmu bazującego na *lokalnych całkach ruchu* (ang. *local integral of motion, LIOM*), o którym więcej w rozdziale 5.

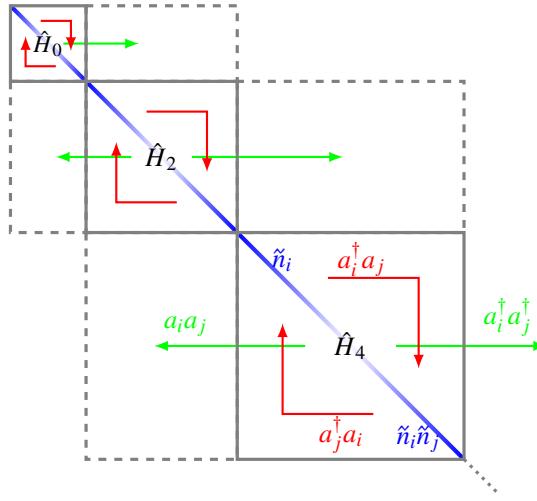


4.3 Konstrukcja

hamiltonianu

Wyniki obliczeniowe przedstawione w dalszej części pracy dotyczą układu, który może

być opisany za pomocą hamiltonianu modelu Kitaeva \hat{H}_{Kitaev} [równanie (2.20)] rozszerzonego o oddziaływanie wielociałowe \hat{H}_V [1, 2, 123, 128]. Oddziaływanie wielociałowe pełnią istotną rolę w układach niskowymiarowych i mogą efektywnie wpływać na właściwości ta-



Rysunek 4.1: Schematyczna konstrukcja hamiltonianu Kitaeva wg bloków o określonej liczbie cząstek. Sektor o parzystej liczbie cząstek \hat{H}^e . Poszczególne elementy reprezentują: (a) niebieskie linie – elementy diagonalne \tilde{n}_i , $\tilde{n}_i \tilde{n}_j$; (b) czerwone linie – przeskoki cząstek $a_i^\dagger a_j + \text{H.c.}$; (c) zielone linie – kreacje/anihilacje par $a_i^\dagger a_j^\dagger + \text{H.c.}$.

kich układów. Postać takiego hamiltonianu jest następująca

$$\hat{H}_{\text{Kitaev}+V} = \underbrace{\sum_{\langle i,j \rangle} \left[\left(t_{ij}^0 a_i^\dagger a_j + \Delta_{ij} a_i^\dagger a_j^\dagger \right) + \text{H.c.} \right]}_{\hat{H}_{\text{Kitaev}} \text{ [równanie (2.20)]}} + \underbrace{\sum_i \mu_i \tilde{n}_i + \sum_{\langle i,j \rangle} V_{ij} \tilde{n}_i \tilde{n}_j}_{\hat{H}_V}, \quad (4.19)$$

gdzie V_{ij} to amplituda potencjału oddziaływanego fermion–fermion. W odróżnieniu od hamiltonianu z równania (2.20), w hamiltonianie (4.19) operatory liczby cząstek \hat{n}_i zostały przesunięte o stałą $\hat{n}_i \rightarrow \tilde{n}_i = \hat{n}_i - \frac{1}{2}$.¹ W takim układzie zachowana jest symetria parzystości, co można sprawdzić licząc komutator

$$[\hat{H}_{\text{Kitaev}+V}, \mathcal{P}] = 0, \quad (4.20)$$

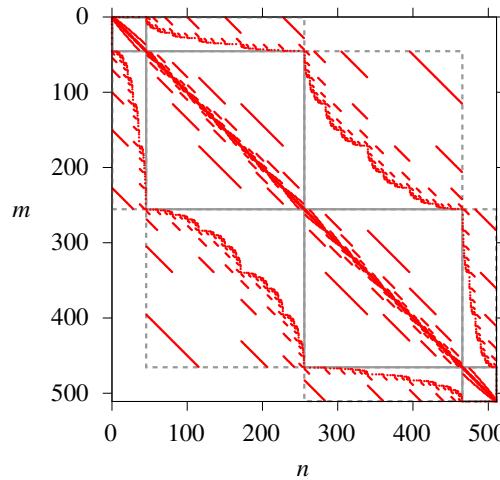
lub dokonując obserwacji, że w hamiltonianie dla dowolnego stanu bazowego nie istnieje operator, który zmienia parzystość danego stanu. Hamiltonian $\hat{H}_{\text{Kitaev}+V}$ nie spełnia natomiast relacji

$$[\hat{H}_{\text{Kitaev}+V}, \hat{N}] \neq 0. \quad (4.21)$$

W układzie nie jest zachowana liczba cząstek, co jest konsekwencją obecności wyrazów typu $a_i a_j$ w hamiltonianie.

Na rysunku 4.1 przedstawiono schematycznie w jaki sposób można skonstruować elementy macierzowe hamiltonianu $\hat{H}_{\text{Kitaev}+V}$. Dzięki spełnieniu równania (4.20) oraz korzystając z równań (4.9)–(4.11) oraz (4.13) z poprzedniej sekcji 4.2, elementy macierzowe hamiltonianu $\hat{H}_{\text{Kitaev}+V}$ można skonstruować wyznaczając elementy poszczególnych bloków o określonej

¹To przesunięcie istotne jest do wprowadzenia transformacji cząstka–dziura.



Rysunek 4.2: Niezerowe elementy macierzowe $\langle n | \hat{H}_{\text{Kitaev}+V} | m \rangle$. ($L = 10$, sektor parzysty, jednowymiarowy drut, OBC)

liczbie cząstek należących do poszczególnych podprzestrzeni \mathcal{H}_N^L o określonej parzystości: *even* – parzystej lub *odd* – nieparzystej. Te elementy będą związane z wyrazami, które nie zmieniają liczby cząstek. W przypadku $\hat{H}_{\text{Kitaev}+V}$ będą to elementy związane z wyrazami: (a) przeskoków cząstek $a_i^\dagger a_j + \text{H.c.}$; (b) wszystkich operatorów, które zliczają cząstki: \tilde{n}_i czy $\tilde{n}_i \tilde{n}_j$. Te elementy zaznaczono na rysunku 4.1 w obrębie szarych kwadratów (linia ciągła). Pozostałe elementy związane są z miesaniem się sektorów o różnej liczbie cząstek. Dotyczą one elementów, które kreują/anihilują parę cząstek: $a_i^\dagger a_j^\dagger + \text{H.c.}$. Na rysunku 4.1, te elementy zostały zaznaczone w obrębie szarych prostokątów (przerywana linia).

Na rysunku 4.2 przedstawiono niezerowe elementy macierzowe hamiltonianu $\hat{H}_{\text{Kitaev}+V}$. W tym przykładzie wyświetlono elementy macierzowe dla odpowiadającego układu o geometrii jednowymiarowego drutu $L = 10$ (połączenia są tylko pomiędzy najbliższymi sąsiednimi węzłami $(i, j) \rightarrow (i, i + 1)$), otwartych warunkach brzegowych OBC oraz wybrały podprzestrzeń o parzystej liczbie cząstek. Analogicznie jak na rysunku 4.1, na rysunku 4.2 szarymi prostokątami zaznaczono odpowiednie sektory.

Większość programów, które pozwalają odtworzyć wyniki zamieszczone w tej pracy doktorskiej, można znaleźć w autorskiej bibliotece `SOLIDstate` napisanej w języku C++, udostępnionej w serwisie `github` (<https://github.com/andywiecko/SOLIDstate>) na licencji `GPL`. Biblioteka bazuje na potężnej bibliotece `Armadillo` [148, 149]. `Armadillo` to tzw. *wrapper*, który może być interfejsem dla różnych bibliotek do algebry liniowej, takich jak `LAPACK`, `OPENBLAS`, `ARPACK`, `SUPERLU`, itd. `Armadillo` posiada bardzo dobry balans pomiędzy szybkością wykonywania programów, a łącz-

twością obsługi ze względu na bardzo podobną składnię do wysokopoziomowego MATLABa. Armadillo posiada klasy do przechowywania macierzy gęstych oraz rzadkich dla różnych danych, m.in. `double`, `complex<double>`, itd. Biblioteka umożliwia rozwiązywanie równań Schrödingera (*TISE*) takich jak równanie (4.14) zarówno dla macierzy gęstych, jak i rzadkich. Procedury dla macierzy gęstych korzystają z procedur dostępnych w LAPACK [*dokładna diagonalizacja, (ED, ang. exact diagonalization)*], a procedury dla macierzy rzadkich korzystają z tych dostępnych na ARPACK. Te drugie bazują na algorytmie bazującym na przestrzeni Krylowa [150] – ang. *Implicitly restarted Arnoldi method (IRAM)* [151]. W większości przypadków, struktura elementów macierzowych hamiltonianów w układach silnie skorelowanych jest bardzo rzadka. Naturalne jest zatem przechowywanie danych w postaci macierzy rzadkiej. W ten sposób można zyskać ogromne ilości pamięci operacyjnej komputerów. Zarówno *ED* jak i *IRAM* mają swoje wady i zalety. Zasadniczą zaletą metody *ED* jest możliwość badania całego spektrum hamiltonianu. W przypadku *IRAM* ograniczenie jest do kilku wybranych wartości z widma hamiltonianu. Złożoność pamięciowa *ED* wynosi $\mathcal{O}[(\dim \mathcal{H})^2]$, a dla *IRAM* zależy od układu. Dla typowych układów z fizyki silnie skorelowanych fermionów, ta zależność wynosi $\mathcal{O}(\dim \mathcal{H})$.



5

ROZDZIAŁ

Mody Majorany jako lokalne całki ruchu

W tym rozdziale zostanie przedstawiona metoda, która służy do identyfikacji operatorów **MZM**, które są zachowane i lokalne. Algorytm został zaproponowany w naszej pracy [1].

Opis rozdziału

Schemat postępowania algorytmu, opisanego w tym rozdziale, jest bardzo podobny do metody wykorzystanej do badania lokalnych całek ruchu (*LIOM*) w modelu Heisenberga [152, 153]. *LIOM* są szczególnie istotne w fizyce lokalizacji wielu ciał (*MBL*). Zainteresowanego czytelnika tematyką *LIOM* i *MBL* odsyłam do literatury [154–158].

5.1 Lokalne całki ruchu

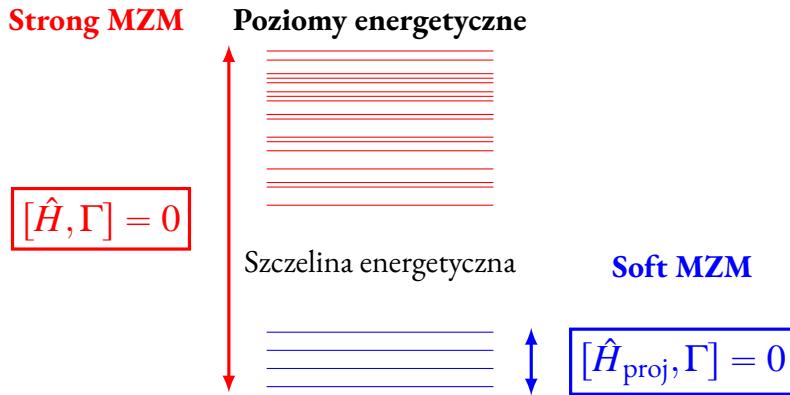
W pracy [1] opracowaliśmy metodę, która pozwala na znajdowanie zachowanych, *lokalnych* operatorów $\Gamma = \sum_i \alpha_i \gamma_i$, z rzeczywistymi współczynnikami α_i . Lokalność oznacza w tym przypadku, że każdy operator $\gamma_i \in \mathcal{B}_\gamma$ związany jest fizycznie tylko i wyłącznie z jednym węzłem sieci. Bardziej formalną dyskusję dotyczącą lokalności można znaleźć w rozdziale 7, gdzie zaprezentowano wyniki z [1]. Przedstawiona poniższa metoda jest ogólna i może być wykorzystana do badania dowolnego hamiltonianu. Rozważmy hamiltonian w diagonalnej bazie stanów własnych $\hat{H} = \sum_n E_n |n\rangle\langle n|$. W celu badania w jakim stopniu dany operator zachowany jest w czasie, przydatną konstrukcją jest średnia $\bar{\Gamma}$ po nieskończonym czasie z operatorem¹

$$\bar{\Gamma} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' \Gamma(t') = \sum_{E_n=E_m} \Gamma_{nm} |n\rangle\langle m|, \quad (5.1)$$

gdzie $\Gamma_{nm} = \langle n|\Gamma|m\rangle$, a $|n\rangle$, $|m\rangle$ i E_n , E_m to są stany i energie własne hamiltonianu \hat{H} . Jeśli $\bar{\Gamma} = \Gamma$ to wtedy taki operator jest całkowicie zachowany — jest to całka ruchu. Taki operator komutuje z hamiltonianem $[\hat{H}, \Gamma] = 0$.

¹Dowód można znaleźć w dodatku B.

Omawiana w tym rozdziale metoda pozwala generować tzw. *silne MZM* (ang. *strong*),

Rysunek 5.1: Schematyczne porównanie strong i soft *MZM*.

które są stabilne dla dowolnie dużych temperatur [159–161]. *MZM* Γ , dla której warunek komutacji jest spełniony tylko i wyłącznie dla hamiltonianu \hat{H}_{proj} , który został zrzutowany do niskoenergetycznej podprzestrzeni $[\hat{H}_{\text{proj}}, \Gamma] = 0$, nazywamy *słabą MZM* (ang. *soft*) [162]. Na Rysunku 5.1 schematycznie przedstawiono różnicę pomiędzy soft, a strong *MZM*.

Poza specyficznymi wartościami parametrów układu, w skończonych układach *MZM* nie są ściśle zachowane [134, 135]. Relacja komutacji nie jest spełniona dokładnie

$$[\hat{H}, \Gamma] = \mathcal{O}(e^{-L/\xi}), \quad (5.2)$$

gdzie ξ to długość związana z zanikaniem *MZM* od brzegu układu, która zależy od parametrów hamiltonianu. Niezerowa wartość komutatora (5.2) oznacza, że *MZM* będzie miała skończony czas życia, a warunek komutacji (2.15) będzie jedynie spełniony w granicy termodynamicznej. Numerycznie można badać jedynie skończone układy, dlatego poszukiwanie operatorów *MZM* można sprowadzić tylko i wyłącznie do problemu optymalizacyjnego współczynników α_i .



5.2 Korelacje wielociałoowe Jako optymalny zestaw parametrów α_i rozumiemy taki zestaw, który generuje operatory $\bar{\Gamma}$ podobne do Γ jak to tylko możliwe. Jako kryterium podobieństwa operatorów wykorzystano iloczyn skalarny Hilberta–Schmidta

$$(A|B) = \text{Tr}(A^\dagger B)/\text{Tr}(\mathbb{1}). \quad (5.3)$$

Taki iloczyn skalarny odpowiada uśrednianiu termicznemu dla nieskończonych temperatur. Jako kryterium podobieństwa można również wprowadzić odpowiedni iloczyn skalarny dla

skończonych temperatur

$$(A|B)_\beta = \text{Tr}(\text{e}^{-\beta \hat{H}} A^\dagger B) / \text{Tr}(\text{e}^{-\beta \hat{H}}). \quad (5.4)$$

W skończonych temperaturach czas życia MZM jest większy. W referencji [153] można znaleźć inne propozycje iloczynu skalarnego. Korzystając z iloczynu skalarnego można zdefiniować normę operatorów

$$\|A\| = \sqrt{(A|A)} = \sqrt{\text{Tr}(A^\dagger A) / \text{Tr}(\mathbb{1})}. \quad (5.5)$$

Zadanie znalezienia najbardziej podobnego $\bar{\Gamma}$ do Γ sprowadza się do znalezienia współczynników $\alpha_i = (\gamma_i|\Gamma)$, które będą minimalizowały następujący kwadrat normy¹

$$\|(\Gamma - \bar{\Gamma})\|^2 = 1 - \|\bar{\Gamma}\|^2. \quad (5.6)$$

¹Dowód można znaleźć w dodatku B.

Równość (5.6) wynika z ważnej tożsamości¹

$$(\bar{\Gamma}|\bar{\Gamma}) = (\bar{\Gamma}|\Gamma) = (\Gamma|\bar{\Gamma}). \quad (5.7)$$

W celu optymalizacji α_i należy zmaksymalizować $\|\bar{\Gamma}\|^2$

$$\lambda = \max_{\{\alpha_i\}} \|\bar{\Gamma}\|^2 = \max_{\{\alpha_i\}} (\bar{\Gamma}|\bar{\Gamma}) = \max_{\{\alpha_i\}} (\bar{\Gamma}|\Gamma). \quad (5.8)$$

Parametr $1 - \lambda$ mierzy odległość pomiędzy operatorami $\bar{\Gamma}$ i Γ . W celu dalszej interpretacji parametru λ warto operator Γ rozłożyć w następujący sposób

$$\Gamma = \bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}^\perp. \quad (5.9)$$

Część $\bar{\Gamma}$ opisuje część zachowaną (zerowy mod) operatora Majorany $[\hat{H}, \bar{\Gamma}] = 0$, a część $\bar{\Gamma}^\perp$ jest ortogonalna do $\bar{\Gamma}$: $(\bar{\Gamma}|\bar{\Gamma}^\perp) = 0$ i można ją wyrazić w następującej postaci

$$\bar{\Gamma}^\perp = \sum_{E_n \neq E_m} \Gamma_{nm} |n\rangle\langle m|. \quad (5.10)$$

Dalej w oczywisty sposób wymienione operatory można powiązać z następującymi normami operatorów:

$$\|\Gamma\|^2 = (\bar{\Gamma}|\bar{\Gamma}) + (\bar{\Gamma}^\perp|\bar{\Gamma}^\perp) = 1, \quad (5.11)$$

$$\|\bar{\Gamma}\|^2 = \lambda, \quad (5.12)$$

$$\|\bar{\Gamma}^\perp\|^2 = 1 - \lambda. \quad (5.13)$$

Jeśli $\lambda = 1$ to Γ jest całką ruchu — operator całkowicie zachowany w czasie $\Gamma = \bar{\Gamma}$. Dla $\lambda \in (0, 1)$ część informacji w korelacji $(\bar{\Gamma}|\Gamma)$ jest zachowana dla dowolnie długich czasów.

W przypadku gdy $\lambda = 0$ ta informacja jest całkowicie tracona w czasie ewolucji. Problem optymalizacyjny (5.8) można uprościć dalej, rozpisując operatory w bazie operatorów Majorany \mathcal{B}_γ

$$\lambda = \max_{\{\alpha_i\}} \sum_{ij} \alpha_i (\bar{\gamma}_i | \gamma_j) \alpha_j = \max_{\{\alpha_i\}} \sum_{ij} \alpha_i K_{ij} \alpha_j, \quad (5.14)$$

gdzie

$$K_{ij} = (\bar{\gamma}_i | \gamma_j) \quad (5.15)$$

to macierz nieujemnie określona $\forall \alpha \quad \alpha^\top K \alpha \geq 0$, gdzie $\alpha = [\alpha_i]$ to wektor współczynników kombinacji operatorów Majorany. Problem (5.14) sprowadza się do zagadnienia własnego macierzy K

$$K\alpha = \lambda \alpha. \quad (5.16)$$

Zgodnie z twierdzeniem min-max [163], największe wartości własne λ i odpowiadające im wektory własne α stanowią rozwiązanie problemu (5.14). Wszystkie niezerowe λ odpowiadają niezależnym MZM .

Należy tutaj przypomnieć, że MZM w skończonych układach nie są całkowicie zachowane [równanie (5.2)]. W celu badania całek ruchu w skończonych układach należy rozważać średnią (5.1) na skończonej skali czasowej $t \in [0, \tau]$. Taką średnią można zdefiniować w następujący sposób¹

¹Dowód można znaleźć w dodatku B.

$$\bar{\Gamma}^\tau = \int_{-\infty}^{\infty} dt \Gamma(t) \frac{\sin(t/\tau)}{\pi t} = \sum_{|E_n - E_m| < \frac{1}{\tau}} \Gamma_{nm} |n\rangle \langle m|. \quad (5.17)$$

Takie uśrednianie odpowiada obcięciom szybko oscylujących wyrazów w reprezentacji spektralnej operatora, co wyraźnie widać w późniejszym równaniu (5.19). Całkiem oczywiste jest, że dla nieskończonego czasu obie średnie są równe $\bar{\Gamma} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{\Gamma}^\tau$, tak samo korelacje $(\bar{\Gamma} | \Gamma) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\bar{\Gamma}^\tau | \Gamma)$. Standardowo do badania korelacji na skończonym oknie czasowym wykorzystuje się dany korelator¹

$$(\Gamma(t) | \Gamma) = \frac{1}{Z} \sum_{nm} e^{i(E_m - E_n)t} |\langle n | \Gamma | m \rangle|^2, \quad (5.18)$$

gdzie $Z = \text{Tr } \mathbb{1}$. Standardowe autokorelacje operatorów $(\Gamma(t) | \Gamma)$ różnią się od korelacji $(\bar{\Gamma}^\tau | \Gamma)$ z wykorzystaniem uśredniania (5.17). Relację pomiędzy tymi korelacjami można dobrze wyrazić w następujący sposób¹

$$(\bar{\Gamma}^\tau | \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} (\Gamma(t) | \Gamma). \quad (5.19)$$

W powyższym równaniu widać, że takie uśrednianie wycina szybko oscylujące wyrazy z korelacji $(\Gamma(t)|\Gamma)$. W referencji [164] (rysunek 2) można znaleźć porównanie korelacji $(\bar{\Gamma}^\tau|\bar{\Gamma})$ do korelacji $(\Gamma(t)|\Gamma)$ w zastosowaniu do fizyki *MBL*. Przedstawione w pracy [164] wyniki pokazują asymptotyczną zbieżność $(\bar{\Gamma}^\tau|\bar{\Gamma})$ do $(\Gamma(t)|\Gamma)$.

Kluczowe równanie (5.7) jest również spełnione dla średniej po skali czasowej τ [patrz dodatek B — równanie (5.7)]

$$(\bar{\Gamma}^\tau|\bar{\Gamma}^\tau) = (\bar{\Gamma}^\tau|\Gamma) = (\Gamma|\bar{\Gamma}^\tau). \quad (5.20)$$

Zatem dla średniej $\bar{\Gamma}^\tau$ można przeprowadzić identyczną analizę jak dla średniej $\tau \rightarrow \infty$ w równaniach (5.6), (5.8), (5.14) oraz (5.16), wprowadzając wielkości zależne od τ : $\lambda(\tau)$, $\alpha(\tau)$, $K_{ij}^\tau = (\bar{\gamma}_i^\tau|\gamma_j)$.

Podsumowując, przedstawiona metoda jest ogólna — pozwala na znajdowanie lokalnych, silnych *MZM* z największą wartością $\lambda = (\bar{\Gamma}|\Gamma)$ dla dowolnego hamiltonianu. Jeśli $\lambda = 1$ algorytm znajduje ściśle mod zerowy: $[\hat{H}, \Gamma] = 0$. W przypadku gdy $\lambda < 1$, algorytm znajduje *MZM* z największą częścią zachowaną $\bar{\Gamma}$.



Podczas badania układów fizyki statystycznej bądź ciała stałego, interesują nas duże układy w granicy termodynamicznej, dla których liczba węzłów $L \rightarrow \infty$. Przy symulowaniu takich układów jesteśmy ograniczeni zasobami pamięciowymi i czasowymi naszych komputerów i wykonanie obliczeń dla układów o bardzo dużych rozmiarach jest albo niemożliwe, albo długotrwałe i kosztowne pamięciowo. Wiele wielkości fizycznych badamy z wykorzystaniem odpowiedniego skalowania — *skalowanie rozmiarowe* (ang. *finite size scaling, FSS*). Wykonuje się to przez pomiar danej wielkości dla kilku wybranych wielkości L , a następnie podejmuje się próby znalezienia, dopasowania odpowiedniej funkcji, dzięki której będzie możliwe oszacowanie badanej wielkości dla $L \rightarrow \infty$.

5.3 Skalowanie rozmiarowe

Podczas badania układów z otwartymi warunkami brzegowymi (*OBC*) istotnie ważne jest w jakiej kolejności dokonuje się skalowania rozmiarowego i czasowego. W takich układach o L węzłach, skalowanie $L \rightarrow \infty$ powinno wyprzedzać skalowanie czasu $t \rightarrow \infty$ (lub skalę czasową $\tau \rightarrow \infty$) [165, 166]. Numerycznie jesteśmy w stanie przeprowadzać obliczenia jedynie dla skończonych układów. Z tego powodu τ podczas wyznaczania $\bar{\Gamma}^\tau$ [równanie (5.17)] powinno być utrzymywane na wysokim, lecz skończonym poziomie, aż do zakończenia procedury skalowania rozmiarowego. Dla skończonych rozmiarów relacja komutacji dla *MZM*

nie jest spełniona dokładnie [równanie (5.2)], w konsekwencji dla skończonych rozmiarów następująca granica jest prawie zawsze spełniona $\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda = 0$ (poza ewentualnym specjalnym dostrojeniem parametrów modelu). Natomiast granica $\Lambda = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \lambda$, w ogólnym przypadku jest różna od 0. Dla MZM , które są silne ta granica $\Lambda \simeq 1$.

W celu znalezienia odpowiedniej funkcji do dopasowania zależności $\lambda(\tau)$, skorzystano z założenia, że typowe oddziaływanie wielociałoowe powoduje najczęściej eksponencjalny zakres wszelkich korelacji. To samo dotyczyć może nawet zaburzonych układów całkowanych [153]. Korzystając z równania (5.19) można pokazać, że dla korelacji $(\Gamma(t)|\Gamma)$ wyrażonej w następujący sposób

$$(\Gamma(t)|\Gamma)_I = e^{-|t|/\tau_I}, \quad (5.21)$$

gdzie τ_I to pewna skala czasowa związana z niszczeniem korelacji na skutek oddziaływań wielociałoowych, korelacja $(\bar{\Gamma}^\tau|\Gamma)$ przyjmuje postać¹

$$(\bar{\Gamma}^\tau|\Gamma)_I = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\tau}{\tau_I}\right). \quad (5.22)$$

Okazuje się, że taki opis korelacji dla układu z dwoma przekrywającymi się MZM nie jest wystarczający. Bez oddziaływań wielociałoowych funkcja autokorelacji dla przekrywających się MZM dana jest przez [1] (wyniki numeryczne przedstawiono w rozdziale 7)

$$(\bar{\Gamma}^\tau|\bar{\Gamma})_M = \Theta(\tau_M - \tau), \quad (5.23)$$

gdzie τ_M to pewna skala czasowa związana z oddziaływaniem modów Majorany, patrz rozdział 5. Aby znaleźć odpowiednią funkcję do dopasowania należy wrócić do korelacji z równaniem (5.21) i przedstawić jej transformację Fouriera¹

$$(\Gamma(\omega)|\Gamma)_I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-|t|/\tau_I} = \frac{2\tau_I}{1 + (\omega\tau_I)^2}. \quad (5.24)$$

W dziedzinie częstotliwości ω , funkcja korelacji $(\Gamma(\omega)|\Gamma)_I$ to Lorentzian, który dla $\tau_I \rightarrow \infty$ staje się funkcją deltopodobną $\delta(\omega)$. W celu zachowania zgodności pomiędzy dwoma mechanizmami: relaksacji na skutek oddziaływań wielociałoowych (5.22) oraz relaksacji na skutek oddziaływań modów Majorany (5.23), można przesunąć częstotliwość o częstotliwość związaną ze skalą τ_M

$$\omega \rightarrow \omega - \frac{1}{\tau_M} \quad (5.25)$$

otrzymując wtedy postać korelacji¹ $(\bar{\Gamma}^\tau|\Gamma)$

$$(\bar{\Gamma}^\tau|\Gamma)_{IM} = \frac{1}{\pi} \left\{ \arctan \left[\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_M} \right) \tau_I \right] + \arctan \left[\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_M} \right) \tau_I \right] \right\}. \quad (5.26)$$

Tak zdefiniowana funkcja korelacji, w przypadku kiedy, oddziaływanie wielociałowe nie są istotne ($\tau_I \rightarrow \infty$) lub oddziaływanie na skutek przekrywania się MZM nie są istotne ($\tau_M \rightarrow \infty$), odtwarza poprzednio zdefiniowane korelacje (5.22) oraz (5.23):

$$\lim_{\tau_I \rightarrow \infty} (\bar{\Gamma}^\tau | \Gamma)_{IM} = (\bar{\Gamma}^\tau | \Gamma)_M, \quad (5.27)$$

$$\lim_{\tau_M \rightarrow \infty} (\bar{\Gamma}^\tau | \Gamma)_{IM} = (\bar{\Gamma}^\tau | \Gamma)_I. \quad (5.28)$$

Wyniki numeryczne dotyczące takich korelacji zostały przedstawione w rozdziale 7.



6

ROZDZIAŁ

Dynamika kwantowa

W tym rozdziale opisane zostanie w jaki sposób badano dynamikę układów kwantowych w przedstawionej rozprawie doktorskiej. Przedstawione zostaną dwa schematy numeryczne do rozwiązywania równań różniczkowych: schemat Runge–Kutta czwartego rzędu oraz schemat wielomianów Czebyszewa. Bedzie tutaj omówione w jaki sposób można numerycznie wyznaczać fazy geometryczne i dynamiczne dla ewolucji cyklicznych.

Odpowiednikiem równania Newtona mechaniki kwantowej jest *zależne od czasu równanie Schrödingera* (ang. *time dependent Schrödinger equation, TDSE*), które można zapisać w następującej postaci

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (6.1)$$

gdzie \hbar to stała Plancka podzielona przez 2π . Równanie to opisuje ewolucję stanu kwantowego $|\psi(t)\rangle$ — jest to równanie ruchu. W dalszej części pracy we wszystkich równaniach przyjęto $\hbar = 1$. Rozwiążanie tego równania jest następujące

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t, 0) |\psi(0)\rangle, \quad (6.2)$$

gdzie $\mathcal{U}(t, 0)$ to operator ewolucji, a $|\psi(0)\rangle$ to warunek początkowy — stan kwantowy dla czasu $t = 0$. Operator ewolucji $\mathcal{U}(t, t')$ w następujący sposób związany jest z hamiltonianem układu \hat{H}

$$\mathcal{U}(t, t') = \hat{T} \exp \left(-i \int_{t'}^t dt'' \hat{H}(t'') \right), \quad (6.3)$$

gdzie \hat{T} to operator chronologiczny, a $t > t'$. W rozwiązaniu pojawił się operator \hat{T} , ponieważ w ogólności $[\hat{H}(t), \hat{H}(t')] \neq 0$ dla $t \neq t'$. Ważną własnością operatora ewolucji jest przechod-

niość

$$\mathcal{U}(t'', t) = \mathcal{U}(t'', t') \mathcal{U}(t', t) \quad (6.4)$$

Korzystając z tej własności operator $\mathcal{U}(t, t')$ możemy zdekomponować na iloczyn skończonej liczby M operatorów ewolucji

$$\mathcal{U}(t, t') = \prod_{m=0}^{M-1} \mathcal{U}(t - \delta t_m, t - \delta t_{m-1}), \quad (6.5)$$

gdzie $\delta t_m = m\delta t$, a $M\delta t = t - t'$. Na bardzo krótkim przedziale czasu $[t, t + \delta t]$ operator ewolucji $\mathcal{U}(t + \delta t, t)$ można przybliżyć

$$\mathcal{U}(t + \delta t, t) \approx \exp[-i\hat{H}(t + \delta t/2)\delta t]. \quad (6.6)$$

Skorzystano tutaj z metody punktu środkowego do obliczenia całki z równania (6.3) i przyjęto wartość hamiltonianu w połowie przedziału czasu $[t, t + \delta t]$, tzn. $t + \delta t/2$. Przedstawiona metoda przybliżenia \mathcal{U} należy do jednej z prostszych metod. Metodę punktu środkowego można by zastąpić bardziej złożonym schematem przybliżonego całkowania numerycznego np. z wykorzystaniem metody trapezów. Dla badanych hamiltonianów w rozprawie doktorskiej, wyżej przedstawione przybliżenie jest wystarczające do otrzymania wyników ze satysfakcyjnym błędem numerycznym.

W celu generowania przybliżenia $\mathcal{U}(t, t')$ [równanie (6.5)], konieczne jest przechowywanie w pamięci co najmniej dwóch macierzy: $\mathcal{U}(t + \delta t, t)$, $\mathcal{U}(t + 2\delta t, t + \delta t)$.¹ Należy tutaj podkreślić, że do rozwiązania równania (6.1) nie jest konieczne generowanie samej postaci operatora $\mathcal{U}(t, t')$. Stan kwantowy można propagować wg następującego iteracyjnego schematu

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = \mathcal{U}(t + \delta t, t)|\psi(t)\rangle. \quad (6.7)$$

W takim podejściu, zamiast w pamięci przechowywać co najmniej dwie macierze reprezentujące $\mathcal{U}(t + \delta t, t)$ i wektor reprezentujący stan $|\psi(t)\rangle$, wystarczy przechowywać jedną macierz i wektor.

Istnieje technika, która znajduje tylko jeden operator ewolucji $\mathcal{U}(t, 0) = \exp[-i\Omega t]$. Ta technika nazywa się rozwinięciem w szereg Magnusa [167]. Metoda bazuje na wyznaczaniu szeregu komutatorów hamiltonianu dla różnych czasów. Od strony fizyki układów silnie skorelowanych, ogromną wadą tej metody jest fakt, że z każdym kolejnym komutatorem z tego rozwinięcia, rośnie ilość niezerowych elementów macierzy, którą reprezentuje przybliżenie operatora Ω .

¹Oczywiście można to zrealizować przy pomocy jednej macierzy, a jedynie pomnożenie kolejnej macierzy z iloczynu generować w locie. Takie podejście jednak nie jest efektywne.

Przybliżony propagator (6.6) w większości przypadków należy dalej przybliżać, ponieważ żeby otrzymać jego postać, trzeba wykonać operację podniesienia do potęgi macierzy. Na szczęście zgodnie z równaniem (6.7) nie trzeba generować postaci propagatora *explicite*. Wystarczy technika która imituje działanie takiego operatora. Zestawienie wybranych metod, wg których można tego dokonać zawarte jest w referencji [168].

Bardzo prostą do implementacji metodą do rozwiązywania zwyczajnych równań różniczkowych (*ODE*) jest schemat Runge–Kutta [169, 170]. Metoda jest rozszerzeniem algorytmu Eulera. Iteracyjny schemat [równanie (6.7)] dla algorytmu Runge–Kutta czwartego rzędu przyjmuje następującą postać [171]

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = |\psi(t)\rangle + \frac{1}{6}(|k_1\rangle + 2|k_2\rangle + 2|k_3\rangle + |k_4\rangle), \quad (6.8)$$

gdzie wektory $|k_1\rangle, |k_2\rangle, |k_3\rangle, |k_4\rangle$ są zdefiniowane przez:

$$|k_1\rangle = -i\delta t \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle, \quad (6.9)$$

$$|k_2\rangle = -i\delta t \hat{H}(t + \delta t/2)(|\psi(t)\rangle + \frac{1}{2}|k_1\rangle), \quad (6.10)$$

$$|k_3\rangle = -i\delta t \hat{H}(t + \delta t/2)(|\psi(t)\rangle + \frac{1}{2}|k_2\rangle), \quad (6.11)$$

$$|k_4\rangle = -i\delta t \hat{H}(t + \delta t)(|\psi(t)\rangle + |k_3\rangle). \quad (6.12)$$

Dzięki prostocie implementacji tej metody, taki schemat może stanowić dobre narzędzie do weryfikacji implementacji bardziej złożonych schematów ewolucji kwantowej.

Do otrzymania wyników związanych z ewolucją czasową w tej pracy doktorskiej wykorzystano algorytm bazujący na przybliżeniu za pomocą rozwinięcia w szereg Czebyszewa [172–175]. Wielomiany Czebyszewa są bardzo potężnym narzędziem. Wielomiany te mogą posłużyć do rozwiązywania *ODE*. Operator ewolucji [równanie (6.6)] można rozwiniąć w szereg wielomianów Czebyszewa. Wielomiany Czebyszewa są zdefiniowane na skończonym przedziale $[-1, 1]$ i stanowią ortogonalny zbiór wielomianów. W celu rozwinięcia funkcji operatora w szereg Czebyszewa, najpierw należy przeskalać operator w taki sposób, aby jego całe widmo spektralne znajdowało się w przedziale $[-1, 1]$. Najprostszym rozwiązaniem jest transformacja liniowa. W równaniu przedstawiono, na przykładzie hamiltonianu, w jaki sposób należy dokonać tej transformacji

$$\hat{H} = A\hat{H}_{\text{scaled}} + B, \quad (6.13)$$

6.2 Schematy numeryczne

gdzie $A, B \in \mathbb{R}$ które transformują widmo energetyczne do przedziału $[-1, 1]$. Rozwinięcie operatora ewolucji (6.6) w bazie wielomianów Czebyszewa jest następujące

$$e^{-i\hat{H}(t+\frac{\delta t}{2})\delta t} = e^{-iBt} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(A\delta t) T_k[\hat{H}_{\text{scaled}}(t + \frac{\delta t}{2})], \quad (6.14)$$

gdzie $c_k(t)$ to współczynniki rozwinięcia szeregu Czebyszewa, a $T_k(x)$ to wielomiany Czebyszewa zdefiniowane rekurencyjnie:

$$T_0(x) = 1, \quad (6.15)$$

$$T_1(x) = x, \quad (6.16)$$

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x). \quad (6.17)$$

Funkcje $T_k(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ stanowią zbiór zupełny ortogonalnych wielomianów wraz z iloczynem skalarnym

$$\langle T_k, T_n \rangle = \int_{-1}^1 dx \frac{T_k(x)T_n(x)}{\pi\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = m = 0, \\ \frac{1}{2}, & k = m \neq 0. \end{cases} \quad (6.18)$$

Można pokazać analitycznie, że współczynniki $c_k(t)$ rozwinięcia dla funkcji $f(x) = e^{-ixt}$ mają następującą postać

$$c_k(t) = \frac{\langle f(x), T_k(x) \rangle}{\langle T_k(x), T_k(x) \rangle} = (-i)^k J_k(t), \quad (6.19)$$

gdzie $J_k(t)$ to **funkcja Bessela pierwszego rodzaju** rzędu k . To rozwinięcie można bezpośrednio wykorzystać do przybliżania operatora (6.14).

Wykorzystując M wyrazów z rozwinięcia (6.14), definicji rekurencyjnej wielomianów Czebyszewa (6.15)–(6.17) oraz wyznaczonych współczynników (6.19), bez generowania jawniej postaci operatora ewolucji można w iteracyjny sposób propagować stan kwantowy

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = e^{-iBt} \sum_{k=0}^M c_k(A\delta t) T_k[\hat{H}_{\text{scaled}}(t + \frac{\delta t}{2})] |\psi(t)\rangle. \quad (6.20)$$

To równanie możemy analogicznie przedstawić, tak jak w równaniu RK4 (6.8)

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = e^{-iBt} \left(c_0(A\delta t) |\psi(t)\rangle + \sum_{k=1}^M c_k(A\delta t) |v_k\rangle \right), \quad (6.21)$$

gdzie $|v_k\rangle$ można generować iteracyjne analogicznie jak wielomiany Czebyszewa:

$$|v_0\rangle = |\psi(t)\rangle, \quad (6.22)$$

$$|v_1\rangle = \hat{H}_{\text{scaled}}(t + \frac{\delta t}{2})|v_0\rangle, \quad (6.23)$$

$$|v_k\rangle = 2\hat{H}_{\text{scaled}}(t + \frac{\delta t}{2})|v_{k-1}\rangle - |v_{k-2}\rangle. \quad (6.24)$$

W standardowych problemach, współczynniki $c_k(t)$ bardzo szybko zbiegają do zera. Zazwyczaj wystarczy wziąć $M = 5 \div 15$, aby osiągnąć *satisfakcjonujące* przybliżenie rozwiązania równania Schrödingera (*TDSE*).



W celu weryfikacji statystyki nieabelowej (*NAS*) dla układów zawierających *MZM*, warto najpierw zdefiniować kilka faz geometrycznych, związanych z ewolucją kwantową. Faza geometryczna to dodatkowa faza do fazy dynamicznej, jaką nabiera układ podczas *cyklicznej* ewolucji. W przypadku *ogólnej cyklicznej* ewolucji kwantowej, fazą geometryczną jest faza Aharonova–Anandana ϕ_{AA} [176]. W przypadku *cyklicznej adiabatycznej* ewolucji kwantowej fazą geometryczną jest faza Berry'ego ϕ_{Berry} [177]. Warunkiem koniecznym adiabatyczności ewolucji, jest niezanikająca szczelina energetyczna ΔE między stanem podstawowym, a pierwszym stanem wzbudzonym. Zgodnie z twierdzeniem adiabatycznym, jeśli układ na początku ewolucji ($t = 0$) znajduje się w stanie podstawowym, to zakładając że ewolucja będzie przebiegać *dostatecznie powoli*, pozostanie on w stanie podstawowym w całym przebiegu ewolucji.

Pod pojęciem ewolucji cyklicznej¹ rozumie się taką ewolucję, dla której stan początkowy $\rho(0)$ jest równy stanowi końcowemu $\rho(\mathcal{T})$ w sensie macierzy gęstości

$$\rho(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| = |\psi(\mathcal{T})\rangle\langle\psi(\mathcal{T})| = \rho(\mathcal{T}). \quad (6.25)$$

W celu weryfikacji takiej własności ewolucji cyklicznej, bada się tzw. straty „wiarygodności” (ang. *fidelity loss*) [141]

$$w_{\text{loss}} = 1 - |\langle\psi(\mathcal{T})|\psi(0)\rangle|^2. \quad (6.26)$$

Dla ewolucji cyklicznej warunkiem koniecznym jest $w_{\text{loss}} = 0$. Testy takiej wielkości w_{loss} stosuje się również podczas badania wyplatania *MZM* [112, 178, 179]. Dla cyklicznej ewolucji stan końcowy i stan początkowy różnią się tylko i wyłącznie czynnikiem fazowym

$$|\psi(\mathcal{T})\rangle = e^{i\phi}|\psi(0)\rangle = e^{i\phi_{\text{geo}}}e^{i\phi_{\text{dyn}}}|\psi(0)\rangle. \quad (6.27)$$

6.3 Czynniki fazowe

¹Zarówno ogólnej jak i adiabatycznej ewolucji.

Faza tego czynnika fazowego składa się z fazy dynamicznej ϕ_{dyn} oraz fazy geometrycznej ϕ_{geo} [180]. Część dynamiczną można wyznaczyć w następujący sposób [181]

$$\phi_{\text{dyn}} = \int_0^{\mathcal{T}} dt \langle \psi(t) | \hat{H}(t) | \psi(t) \rangle, \quad (6.28)$$

a część geometryczną w taki sposób [182]

$$\phi_{\text{geo}} = \arg \langle \psi(0) | \psi(\mathcal{T}) \rangle - \Im \int_0^{\mathcal{T}} dt \langle \psi(t) | \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle. \quad (6.29)$$

W przypadku ogólnej cyklicznej ewolucji, faza geometryczna ϕ_{geo} [równanie (6.29)] jest równoważna fazie Ahranova–Anandana ϕ_{AA} . Natomiast w przypadku adiabatycznej, cyklicznej ewolucji, faza geometryczną ϕ_{geo} [równanie (6.29)] odpowiada fazie Berry'ego ϕ_{Berry} .

Numerycznie fazę dynamiczną ϕ_{dyn} [równanie (6.28)] można policzyć w bardzo prosty sposób, np. korzystając z metody trapezów. Dodatkowa trudność pojawia się przy wyznaczeniu ϕ_{geo} . Równanie (6.29) należy wcześniej zdyskertyzować stosując następujący schemat [182]

$$\phi_{\text{geo}} = \arg \langle \psi(0) | \psi(\mathcal{T}) \rangle - \arg \prod_{m=0}^{M-1} \langle \psi(\delta t_m) | \psi(\delta t_{m+1}) \rangle \quad (6.30)$$

gdzie $\delta t_m = m\delta t$ oraz całkowity czas ewolucji $\mathcal{T} = \delta t_M$.

Dla dowolnego czasu $t \in [0, \mathcal{T}]$ można zdefiniować fazę wymiany $\phi_{\text{ex}}(t)$ [3, 112]. Faza wymiany, kiedy zmiany parametrów hamiltonianu tworzą zamkniętą pętlę, dla ewolucji adiabatycznej odpowiada fazie Berry'ego $\phi_{\text{ex}}(\mathcal{T}) = \phi_{\text{Berry}}$. Fazę wymiany ϕ_{ex} możemy wyznaczać wg następującego dyskretnego przybliżenia

$$\phi_{\text{ex}}(t) = \arg \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle - \arg \prod_m \langle \psi(\delta t_m) | \psi(\delta t_{m+1}) \rangle \quad (6.31)$$

Fazę wyznacza się niemalże w identyczny sposób jak równanie (6.30), z tą różnicą, że stany $|\psi(0)\rangle, |\psi(t)\rangle$ niekoniecznie tworzą ewolucję cykliczną. Faza wymiany nie jest niezmiennica względem cechowania i może zależeć od szczególnych torów w przestrzeni parametrów hamiltonianu układu. Taka faza może stanowić cenną wskazówkę podczas analizy danego procesu, lecz nie przypisujemy jej znaczenia fizycznego.

W przypadku układu z symetrią parzystości zawierającego MZM , wygodnie jest zdefiniować różnice faz z poszczególnych podprzestrzeni parzystości. Zakładając, że układ ma dwa stany podstawowe $|e\rangle$ oraz $|o\rangle$, odpowiednio z podprzestrzeni z parzystą i nieparzystą liczbą

cząstek, to po ewolucji cyklicznej te stany będą się różnić jedynie o czynniki fazowe:

$$|e\rangle \rightarrow e^{i\phi_{\text{dyn}}^e} e^{i\phi_{\text{geo}}^e} |e\rangle \quad (6.32)$$

$$|o\rangle \rightarrow e^{i\phi_{\text{dyn}}^o} e^{i\phi_{\text{geo}}^o} |o\rangle. \quad (6.33)$$

Następnie zdefiniowano różnicę faz dynamicznych i geometrycznych¹ dla odpowiednich faz z sektora parzystego i nieparzystego:

$$\Delta\phi_{\text{dyn}} = \phi_{\text{dyn}}^e - \phi_{\text{dyn}}^o, \quad (6.34)$$

$$\Delta\phi_{\text{geo}} = \phi_{\text{geo}}^e - \phi_{\text{geo}}^o. \quad (6.35)$$

W przypadku perfekcyjnej degeneracji stanów podstawowych $|e\rangle, |o\rangle$ na całej ścieżce ewolucji, faza $\Delta\phi_{\text{dyn}} = 0$. W przypadku ewolucji zamieniającej *MZM* miejscami, wspomniana faza $\Delta\phi_{\text{geo}} = \Delta\phi_{\text{Berry}} = \pm\frac{\pi}{2}$ [76].

¹Analogicznie $\Delta\phi$ można zdefiniować dla pozostałych faz.



Część III:

Wyniki analityczne i numeryczne

Rozdział 7	Identyfikacja z wykorzystaniem całek ruchu	63
Sekcja 7.1	Układ z oddziaływaniami wielociałowymi	63
Sekcja 7.2	Silność modów Majorany	71
Sekcja 7.3	Szczegóły skalowania rozmiarowego	73
Rozdział 8	Wpływ oddziaływań dalekodzięgowych	79
Sekcja 8.1	Czasy życia modów Majorany	79
Sekcja 8.2	Porównanie z LUE	83
Sekcja 8.3	Wpływ na strukturę przestrzenną	84
Rozdział 9	Bramka fazowa bazująca na fazie geometrycznej	89
Sekcja 9.1	Pojedyncze wyplatanie i testy adiabatyczności	89
Sekcja 9.2	Realizacja bramki fazowej	96
Sekcja 9.3	Kalibracja bramki fazowej	101

Identyfikacja z wykorzystaniem całek ruchu

W tym rozdziale będą przedstawione wyniki opublikowane w pracy [1]. W cytowanej pracy, na przykładzie modelu Kitaeva, przedstawiono w jaki sposób można identyfikować *MZM* dla układu opisanego dowolnym hamiltonianem, z perspektywy algorytmu bazującego na *LIOM* opisanego w rozdziale 5.

Znany jest fakt, że w niskowymiarowych układach oddziaływanie kulombowskie nie jest pomijalne i może efektywnie wpływać na właściwości takich układów [125, 126, 183–185]. Takie oddziaływania są również istotne ze względów praktycznych. Nieporządek jest obecny w niemal wszystkich drutach półprzewodnikowych, a *MZM* nie są całkowicie odporne na taki nieporządek [93, 186, 187]. Średnie oddziaływanie mogą stabilizować *MZM* ze względu na obecność takich zaburzeń w układzie [121, 122, 125, 133].

Zasadniczo trudnym zadaniem jest identyfikacja *MZM* w układach z oddziaływaniami wielociałowymi. Często, pierwszą przesłanką jaką stawiają autorzy są badania degeneracji stanu podstawowego. Należy tutaj przypomnieć, że degeneracja stanu podstawowego z podprzestrzeni z parzystą i nieparzystą liczbą cząstek ($\delta E = 0$) jest warunkiem *koniecznym*, aby w układzie istniały *MZM*. Warunek *wystarczający* jest nieco bardziej złożony. Warunek ten bzuje na *lokalnej unitarnej równoważności* (ang. *local unitary equivalance, LUE*) pomiędzy stanami układu z oddziaływaniami i stanami układu bez oddziaływań, w stanie topologicznym [188]. W celu pokazania równoważności *LUE*, jeden ze stanów podstawowych musi się dać w sposób ciągły przetransformować do drugiego stanu, przy czym szczelina energetyczna

Opis rozdziału

7.1 Układ z oddziaływaniami wielociałowymi

tyczna powyżej stanu podstawowego powinna pozostać otwarta na całej ścieżce transformacji [123, 189]. Warunek równoważności LUE sprawdza jedynie czy w danym układzie istnieją wspomniane w rozdziale 5 *soft MZM*. *Soft MZM* są chronione tylko w temperaturach poniżej przerwy energetycznej — warunek komutacji (definicja) MZM z hamiltonianem \hat{H} [równanie (2.15)] spełniony jest tylko i wyłącznie dla projekcji tego hamiltonianu na określoną niskoenergetyczną podprzestrzeń [162].

W Rozdziale 5 przedstawiona została metoda, za pomocą której można identyfikować *strong MZM* w dowolnym układzie opisany hamiltonianem ciasnego wiążania. W tym rozdziale przedstawiono działanie oraz skuteczność techniki opisanej w rozdziale 5. Jako przykład, zbadany został model Kitaeva z oddziaływaniami wielociałowymi dla układu jednowymiarowego drutu z otwartymi warunkami brzegowymi (*OBC*). Taki model możemy interpretować jako fizyczną sytuację, w której nanodrut spoczywa na powierzchni nadprzewodnika typu p . Taki układ może być opisany za pomocą hamiltonianu (4.19). W pracy [1] badaliśmy następujący hamiltonian

$$\hat{H}_{\text{Kitaev+VW}}^{\text{chain}} = \sum_{i=1}^{L-1} \left[\left(t^0 a_i^\dagger a_{i+1} + \Delta a_i^\dagger a_{i+1}^\dagger \right) + \text{H.c.} \right] - \mu \sum_{i=1}^L \tilde{n}_i + V \sum_{i=1}^{L-1} \tilde{n}_i \tilde{n}_{i+1} + W \sum_{i=1}^{L-2} \tilde{n}_i \tilde{n}_{i+2}, \quad (7.1)$$

gdzie V, W to odpowiednio potencjały oddziaływań pomiędzy pierwszymi najbliższymi i drugimi najbliższymi sąsiadami. We wszystkich wynikach prezentowanych w tym rozdziale przyjęto $\hbar = t^0 = 1$.

Poniżej podsumowano poszczególne kroki metody opisanej w rozdziale 5 w celu identyfikacji MZM w układzie:

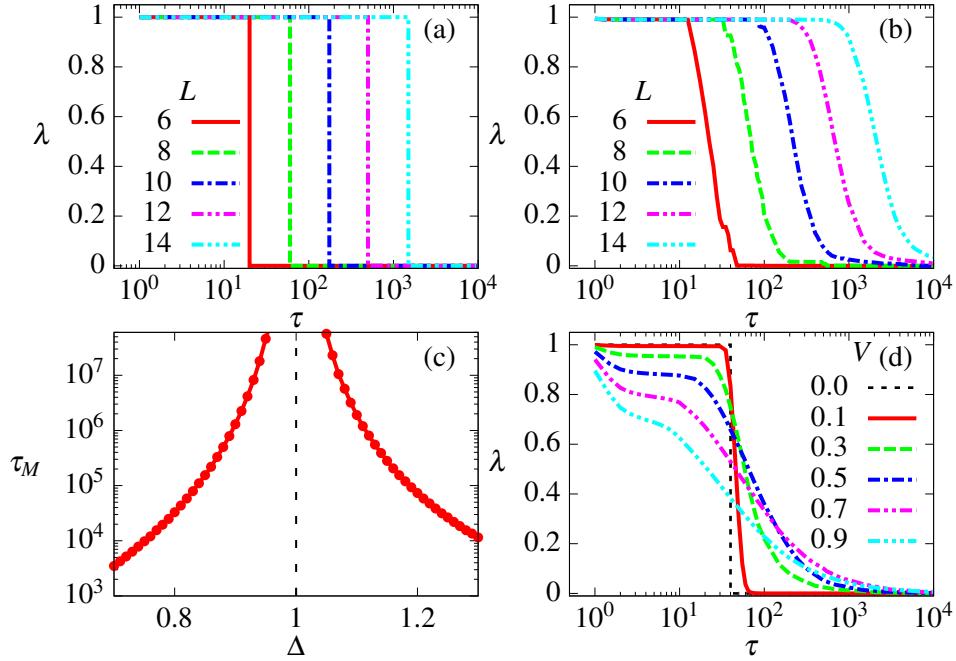
1. diagonalizacja hamiltonianu (7.1) $U^\dagger \hat{H}_{\text{Kitaev+VW}}^{\text{chain}} U = \text{diag}(E_n);$
2. konstrukcja macierzy $K_{ij}^\tau = (\bar{\gamma}_i^\tau | \gamma_j)$ [równanie (5.15)];
 - (a) transformacja operatorów z bazy położeniowej Wanniera do bazy energetycznej hamiltonianu $\gamma_i \rightarrow U^\dagger \gamma_i U;$
 - (b) selekcja elementów [równanie (5.17)] $\bar{\gamma}_i^\tau = \sum_{|E_n - E_m| < \frac{1}{\tau}} (\gamma_i)_{nm} |n\rangle \langle m|;$
 - (c) wyznaczanie śladów [równanie (5.3)] $(\bar{\gamma}_i^\tau | \gamma_j) = \text{Tr}(\bar{\gamma}_i^\tau \gamma_j) / \text{Tr}(\mathbb{1});$
3. diagonalizacja macierzy K_{ij}^τ [równanie (5.16)] $K^\tau \alpha_n = \lambda_n(\tau) \alpha_n.$

Na końcu algorytm znajduje DL modów Majorany $\Gamma_n = \sum_i (\alpha_n)_i \gamma_i$, wraz ze stwarzyszoną wartością własną λ_n , gdzie $n = 1, \dots, DL$, L to liczba węzłów w układzie, a D to liczba stopni

swobody związanych z węzłem sieci (w przypadku bezspinowych fermionów, w modelu Kitaeva $D = 2$). Jeśli $\lambda_n = 1$ to dana kombinacja operatorów Majorany jest zachowana w czasie, jest całką ruchu. Dla $0 < \lambda_n < 1$, część informacji związana z operatorem Γ_n jest zachowana dla dowolnie długich czasów. W przypadku gdy $\lambda_n = 0$ informacja związana z operatorem Γ_n jest całkowicie utracona. Analiza takich wartości własnych λ_n powinna zostać poprzedzona odpowiednim skalowaniem rozmiarowym i czasowym. Szczegóły takiego skalowania λ_n zostały opisane w sekcji 5.3, a wyniki przedstawione w sekcji 7.3. W dalszej części pracy będziemy się zajmować najbardziej zachowanym operatorem, czyli o największej wartości $\lambda(\tau) = \max_n \lambda_n(\tau)$. Badane w pracy układy mogą posiadać do dwóch niezależnych MZM , Γ_1 oraz Γ_2 , które posiadają takie same wartości własne $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

Na rysunkach 7.1(a), (b) oraz (d) przedstawiono zależność funkcji autokorelacyjnej $\lambda(\tau)$ dla najbardziej stabilnej kombinacji Γ . Badany układ, jednorodny łańcuch Kitaeva, może zwierać dwie MZM znajdujące się na brzegach nanodrutu [6, 123, 135]. W tym rozdziale pokazano wyniki dla tylko jednej z nich, chyba że powiedziane zostanie inaczej. Wyniki funkcji autokorelacyjnej dla drugiego najbardziej stabilnego operatora są identyczne. Tak jak napisano w rozdziale 5, w przypadku braku oddziaływań wielociałowych, funkcje korelacyjne $\lambda(\tau) = \Theta(\tau_M - \tau)$ [równanie (5.23)]. Taka zależność $\lambda(\tau)$ to wynik otrzymany często z obliczeń numerycznych [1] i został przedstawiony na rysunku 7.1(a). Na rysunku 7.1(a) widać wspomniany charakter $\lambda(\tau)$ — wyniki dla układu bez oddziaływań. W prezentowanym przykładzie przedstawiono zależność $\lambda(\tau)$ dla kilku wybranych rozmiarów. Należy tutaj zwrócić uwagę na skalę logarytmiczną τ . Widać, że τ_M (odpowiada to wartości τ kiedy następuje zmiana wartości λ z 1 na 0) rośnie wykładniczo wraz z rozmiarem układu L dla prezentowanego przykładu. W konsekwencji dla prezentowanych wyników na rysunku 7.1(a) $\tau_M \rightarrow \infty$ dla $L \rightarrow \infty$. Oznacza to, że dla przedstawionych parametrów w układzie, w granicy termodynamicznej istnieją MZM o nieskończonym czasie życia — są to dokładne całki ruchu $[\hat{H}, \Gamma] = 0$. Na rysunku 7.1(c) przedstawiono zależność $\tau_M(\Delta)$ dla układu bez oddziaływań, dla skończonego układu $L = 10$. Szczególny przypadek, $\Delta = 1$, odpowiada sytuacji, kiedy $\Delta = |t^0|$. Dla takiego zestawu parametrów, tak jak pokazano w sekcji 2.3, w modelu Kitaeva istnieją MZM dokładnie komutujące z hamiltonanem nawet dla układów o skończonych rozmiarach, $L < \infty$. Oczywiście, w konsekwencji prowadzi to do $\tau_M \rightarrow \infty$ co tłumaczy widoczną asymptotę na rysunku 7.1(c).

Na rysunku 7.1(b), przedstawiono funkcję $\lambda(\tau)$ analogicznie jak na rysunku 7.1(a), ale dla



Rysunek 7.1: (a), (b), (d) Funkcja autokorelacyjna $\lambda(\tau)$; (a) $V = 0$, $\Delta = 0.5$; (b) $V = 0.2$, $W = 0.1$, $\Delta = 0.5$; (d) $L = 12$, $\Delta = 0.3$, $W = V/2$; (c) czas życia $MZM \tau_M(\Delta)$ ($L = 10$, $V = W = \mu = 0$).

układu z oddziaływaniami wielociałowymi. Funkcja $\lambda(\tau)$ jest wygładzona w porównaniu do wyników bez oddziaływań, brakuje skokowego charakteru funkcji. Pozycja wygładzonego skoku, również rośnie eksponencjalnie tak jak na rysunku 7.1(a), co sugeruje, że w granicy $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \lambda \approx 1$. Wydaje się, że w ogólności dla układów z oddziaływaniami wielociałowymi $\lambda < 1$, co sugeruje, że MZM w układach z oddziaływaniami nie są dokładnymi całkami ruchu. Interesujące, że oddziaływanie mogą powodować zwiększenie skali czasowej kiedy λ jest duże (np. $\lambda \approx 0.2$). Na rysunku 7.1(d) przedstawiono wyniki λ dla różnych wartości potencjału V . Dla wybranych wartości V wspomniana skala czasowa zwiększa się o rzędu wielkości.

Przedstawiona metoda nie tylko bada korelację $\lambda(\tau)$, ale równolegle znajduje kombinacje najbardziej zachowanych operatorów $\Gamma = \sum_i \alpha_i \gamma_i$. W przypadku, gdy wszystkie elementy macierzowe hamiltonianu są rzeczywiste, spełniony jest następujący warunek ortogonalności¹

¹Dowód można znaleźć

w dodatku B.

$$(\bar{\gamma}_i^+ | \bar{\gamma}_j^-) = 0. \quad (7.2)$$

Wtedy w jednorodnym, układzie mogą znaleźć się do dwóch MZM , których bazy możemy

podzielić na γ_i^+ oraz γ_i^- :

$$\Gamma^+ = \sum_i \alpha_i^+ \gamma_i^+, \quad (7.3)$$

$$\Gamma^- = \sum_i \alpha_i^- \gamma_i^-. \quad (7.4)$$

Macierz K można wtedy zdekomponować na dwie mniejsze macierze $K = K^+ \oplus K^-$, gdzie odpowiednio K^\pm zawiera tylko korelacje zbudowane z operatorów γ_i^\pm . Na rysunku 7.2 przedstawiliśmy rozkłady przestrzenne MZM , Γ^+ oraz Γ^- w badanym układzie. W celu weryfikacji poprawności stosowanej metody, porównano otrzymane wyniki z lokalną gęstością stanów ($LDOS$) o zerowej energii [190, 191]

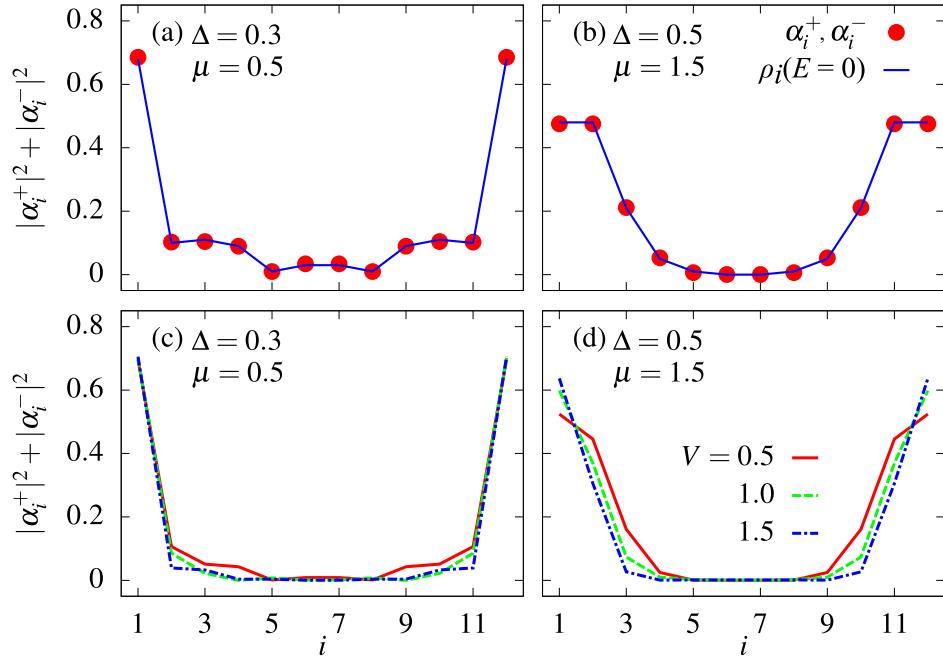
$$\rho_i(E=0) = -\frac{1}{\pi} \Im[\hat{\mathcal{G}}_{ii}(E=0)], \quad (7.5)$$

gdzie funkcja Greena

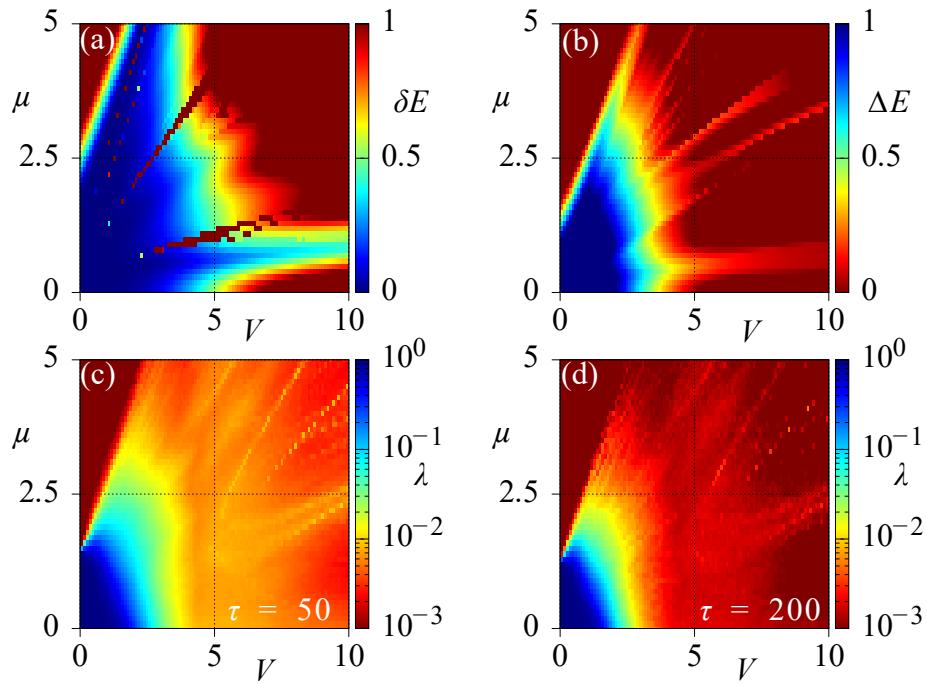
$$\hat{\mathcal{G}}(\omega) = \frac{1}{\omega - \hat{H}_{\text{i-body}} + i\eta}, \quad (7.6)$$

gdzie $\hat{H}_{\text{i-body}}$ to hamiltonian jednocząstkowy — zawierający wyrazy, które posiadają maksymalnie iloczyny dwóch operatorów kreacji lub anihilacji. Na rysunku 7.2(a)–(b) przedstawiono porównanie znormalizowanego $LDOS$ z otrzymanymi współczynnikami α_i^\pm w przypadku bez oddziaływań wielociałowych. Otrzymano perfekcyjną zgodność pomiędzy wynikami, co może świadczyć o skuteczności stosowanej metody. Oczywiście metoda bazująca na $LIOM$ pozwala na badanie dowolnych układów, nawet tych z oddziaływaniami wielociałowymi, co przedstawiono na rysunku 7.2(c)–(d). Wyniki przedstawione na rysunkach 7.2(c)–(d) tłumaczą dlaczego na rysunku 7.1(d) widzimy zwiększenie o rząd wielkości skali dla którego λ jest duże. Oddziaływanie mogą zwiększać lokalizację MZM na krawędziach układu, co może być powodem powiększania obszaru topologicznego. Na skutek lokalizacji zmniejsza się przekrywanie MZM zwiększać ich czas życia. Taki mechanizm przy dostatecznie dużym V przestaje funkcjonować i MZM nie są obecne w układzie.

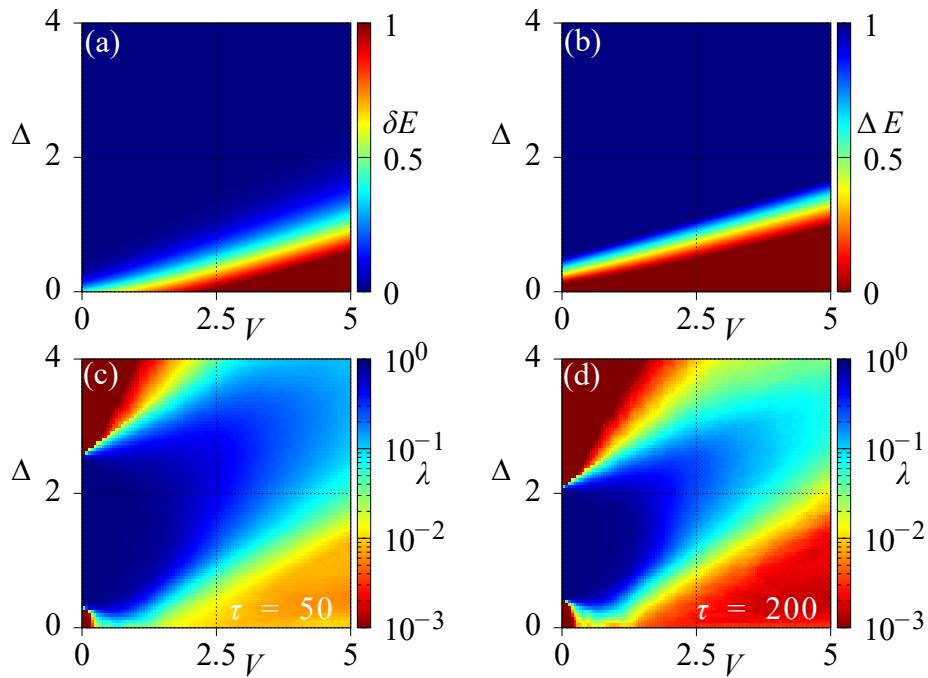
Dalej w celu weryfikacji metody, porównano wyniki λ z warunkiem koniecznym — degeneracji stanu podstawowego δE z sektorów z parzystą i nieparzystą liczbą cząstek — oraz warunkiem wystarczającym — LUE . W tym celu oszacowano degenerację stanu podstawowego δE oraz szczerą energetyczną ΔE w granicy termodynamicznej. Poniżej przedstawiono schemat postępowania w celu wyznaczenia δE oraz ΔE . Oszacowania dokonano poprzez skalowanie rozmiarowe (FSS) wyznaczając dla rozmiarów $L = 8, 10, \dots, 20$, degenerację



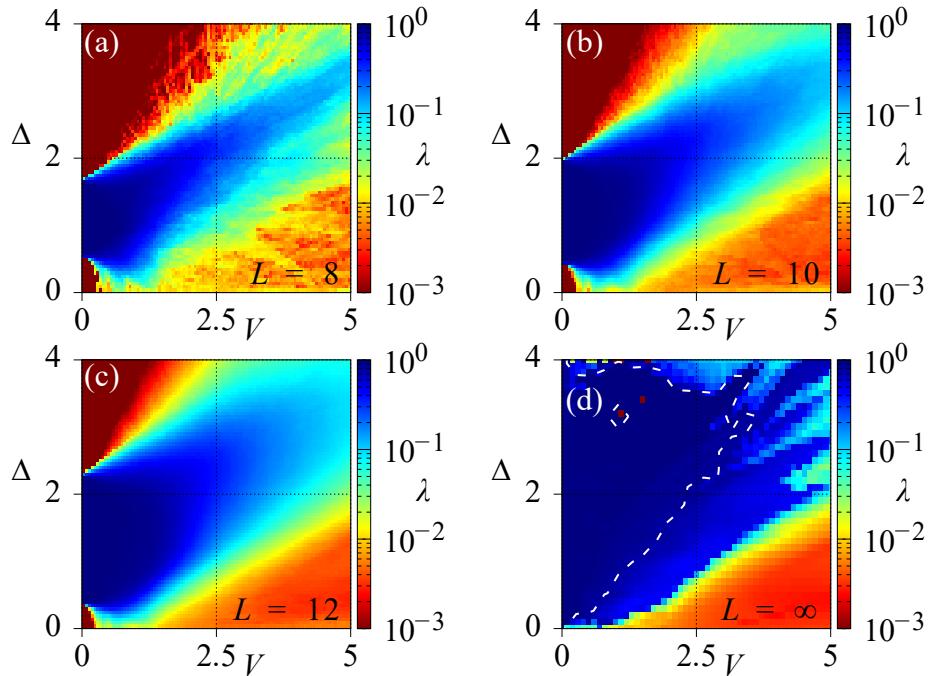
Rysunek 7.2: Rozkład przestrzenny MZM Γ^+, Γ^- . (a)–(b) Porównanie rozkładu przestrzennego α_i z normalizowanym LDOS, układ bezoddziaływań $V = W = 0$; (c)–(d) wyniki dla $W = V/2 \neq 0$.



Rysunek 7.3: Wyniki dla $\Delta = 1$. (a) Degeneracja stanu podstawowego δE [równanie (7.10)]; (b) szczelina energetyczna ΔE [równanie (7.11)]; (c)–(d) funkcja autokorelacyjna λ dla różnych τ ($L = 12$).



Rysunek 7.4: Wyniki dla $\mu = 0$. (a) Degeneracja stanu podstawowego δE [równanie (7.10)]; (b) szczelina energetyczna ΔE [równanie (7.11)]; (c)–(d) funkcja autokorelacyjna λ dla różnych τ ($L = 12$).



Rysunek 7.5: Wyniki dla $\mu = 0$, $W = V/2$. Funkcja autokorelacyjna λ dla różnych L (a) 8; (b) 10; (c) 12; (d) ∞ . Konturem w (d) zaznaczono $\lambda = 0.8$.

stanu podstawowego

$$\delta E(L) = E_0^e(L) - E_0^o(L), \quad (7.7)$$

oraz dwie szczeliny energetyczne:

$$\Delta E_e(L) = E_1^e(L) - E_0^e(L), \quad (7.8)$$

$$\Delta E_o(L) = E_1^o(L) - E_0^o(L), \quad (7.9)$$

gdzie $E_0^{e,o}$ to energia stanu podstawowego z odpowiednio sektora z parzystą oraz nieparzystą liczbą cząstek. Analogicznie $E_1^{e,o}$ odpowiada energii pierwszego stanu wzbudzonego w odpowiednich sektorach. Szczeliny energetyczne dla typowego układu powinny zanikać liniowo wraz z odwrotną liczbą węzłów L . Do wyznaczenia $\Delta E(\infty)$ dokonywaliśmy następującego dopasowywania funkcji $\Delta E(L) = A_L^1 + \Delta E(\infty)$. Z drugiej strony degeneracja w obrębie obszaru topologicznego powinna zanikać wykładniczo. Do wyznaczenia $\delta E(\infty)$ wykorzystano funkcję wykładniczą $\delta E(L) = A \exp(-BL) + \delta E(\infty)$. Poza obszarem topologicznym, dopasowanie takich funkcji obarczone jest dużym błędem dopasowania $\sigma_{\delta E}$, $\sigma_{\Delta E}$. Jako miarę degeneracji w granicy termodynamicznej przyjęto następującą wielkość

$$\delta E = |\delta E(\infty)| + \sigma_{\delta E} \quad (7.10)$$

Jako dolne oszacowanie obszaru z degeneracją stanu podstawowego przyjęto $\delta E \ll 1$. Równoważność LUE zakłada, że szczelina energetyczna nie zamknięta się na całej ścieżce do obszaru topologicznego przy $V = 0$. Jako dolne oszacowanie obszaru LUE przyjęto

$$\Delta E = \min[\Delta E_e(\infty), \Delta E_o(\infty)] - \sigma_{\Delta E}. \quad (7.11)$$

Wyniki δE oraz ΔE dla układu $\Delta = 1$ w funkcji μ oraz V zostały przedstawione na rysunkach 7.3(a)–(b). Proces ekstrapolacji funkcji z pewnością obarczony jest błędami co można zauważać na rysunku 7.3(a) — ukazują to niejednorodne czerwone obszary.

Na rysunkach 7.3(c)–(d) przedstawiono wyniki dla funkcji autokorelacyjnej λ . W odróżnieniu od wyników na rysunkach 7.3(a)–(b), które klasyfikują soft MZM, wyniki na rysunkach 7.3(c)–(d) mogą posłużyć do znalezienia obszaru występowania strong MZM. Otrzymane wyniki potwierdzają, że zarówno obszar występowania soft jak i strong MZM poszerza się w zakresie μ na skutek oddziaływań wielociałowych [121].

Na rysunku 7.4 przedstawiono analogiczne wyniki jak na rysunku 7.3, ale dla $\mu = 0$ i różnych wartości Δ . Na rysunkach 7.4(c)–(d) dla $\Delta \ll 1$, strong MZM wydają się nieobecne

nawet dla małych wartości oddziaływanego V . To jest efekt skończonego rozmiaru, który wyjaśniono na rysunku 7.5. Na rysunku 7.5 wybrano $\tau = 100$ i przedstawiono wyniki dla różnych L wraz z ekstrapolowanym wynikiem dla $L \rightarrow \infty$. Porównując wynik dotyczący warunku LUE z rysunku 7.4(b) z ekstrapolowanym wynikiem na rysunku 7.5(d), obszar zwierający strong MZM jest mniejszy od obszaru gdzie znajdują się soft MZM .



W tej sekcji przedyskutowano i jeszcze raz uargumentowano, że ten algorytm, oczywiście identyfikuje strong MZM . Z definicji strong MZM : są to takie operatory Γ , które komutują z hamiltonianem \hat{H} . Z tego warunku wynika, że dla dowolnego stanu własnego, operator mapuje stan na stan o tej samej energii (co do efektów rozmiarowych) ale należącego do innego sektora parzystości [159–161], co można zapisać

$$\Gamma|m\rangle = e^{i\phi_n}|n\rangle, \quad (7.12)$$

gdzie stany $|n\rangle, |m\rangle$ należą do sektorów o innej parzystości. Tak jak napisano w rozdziale 5, wygodnie jest rozbić operator Γ na dwie części: część zachowaną $\bar{\Gamma}$ oraz na część ortogonalną $\bar{\Gamma}^\perp$ [równanie 5.9]. Komutacja części zachowanej z hamiltonianem wynika bezpośrednio z konstrukcji takiego operatora

$$[\hat{H}, \bar{\Gamma}] = \sum_{n,m: E_n = E_m} [\hat{H}, \Gamma_{nm}|n\rangle\langle m|] = \sum_{n,m: E_n = E_m} (E_n - E_m)\Gamma_{nm}|n\rangle\langle m| = 0. \quad (7.13)$$

Korzystając z relacji antykomutacji (2.1) oraz zakładając normę $\sum_i \alpha_i^2 = 1$ można pokazać, że

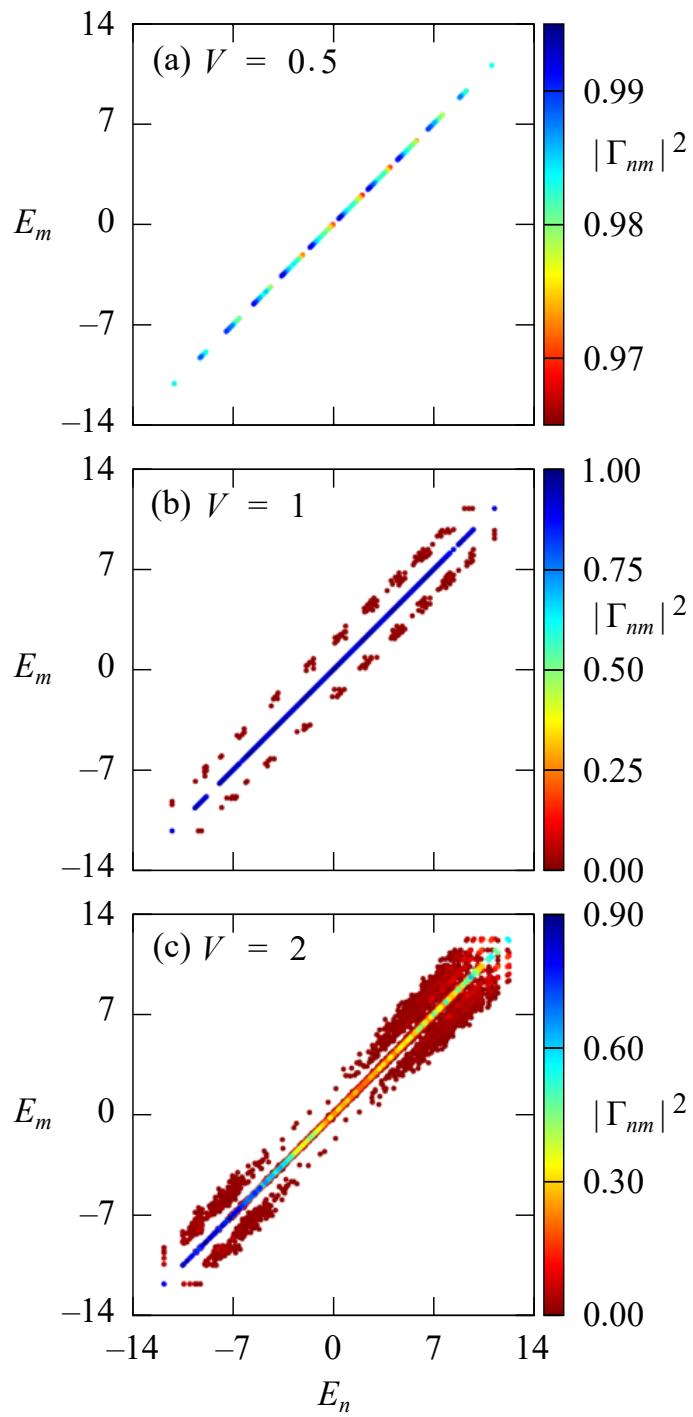
$$\Gamma^2 = \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \gamma_i \gamma_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \{\gamma_i, \gamma_j\} = \sum_i \alpha_i^2 = 1. \quad (7.14)$$

W przypadku, gdy $\lambda = 1$, pokazano, że ta równość implikuje $\Gamma = \bar{\Gamma}$. W przypadku $\lambda = 1$ równanie (7.14) spełnione jest dla $\bar{\Gamma}$: $\bar{\Gamma}^2 = 1$. Korzystając z tego można pokazać, że dla dowolnego stanu $|n\rangle$, spełnione jest równanie¹

$$1 = \langle n|\bar{\Gamma}^2|n\rangle = \sum_{m: E_n = E_m} |\langle n|\Gamma|m\rangle|^2. \quad (7.15)$$

Z Równania (7.15) wynika, że niezerowe elementy macierzowe $\langle n|\Gamma|m\rangle$ są tylko dla stanów należących do sektorów o różnej parzystości. Zakładając, że widmo energetyczne jest co najwyżej podwójnie zdegenerowane, dla każdego stanu $|n\rangle$ o energii E_n z sektora o parzystej liczbie częstek, istnieje stan $|m\rangle$ o energii E_m z sektora o nieparzystej liczbie częstek, taki, że

¹Dowód można znaleźć w dodatku B.



Rysunek 7.6: Kwadrat modułów elementów macierzowych $|\Gamma_{nm}|^2$ modów Majorany dla $\tau = 100$, $L = 12$, $\Delta = 1$, $W = V/2$; Poszczególne panele odpowiadają następującym V dla których otrzymano odpowiednie λ : (a) $V = 0.5$, $\lambda \simeq 0.98$; (b) $V = 1.0$, $\lambda \simeq 0.92$; (c) $V = 2.0$, $\lambda \simeq 0.23$.

$E_n = E_m$. Korzystając z $\lambda = 1$, równania (7.15), oraz z założenia, że widmo energetyczne jest co najwyżej podwójnie zdegenerowane otrzymano wspomniany warunek na początku sekcji

$$\Gamma|m\rangle = e^{i\phi_n}|n\rangle, \quad (7.16)$$

co rzeczywiście potwierdza, że Γ jest strong MZM.

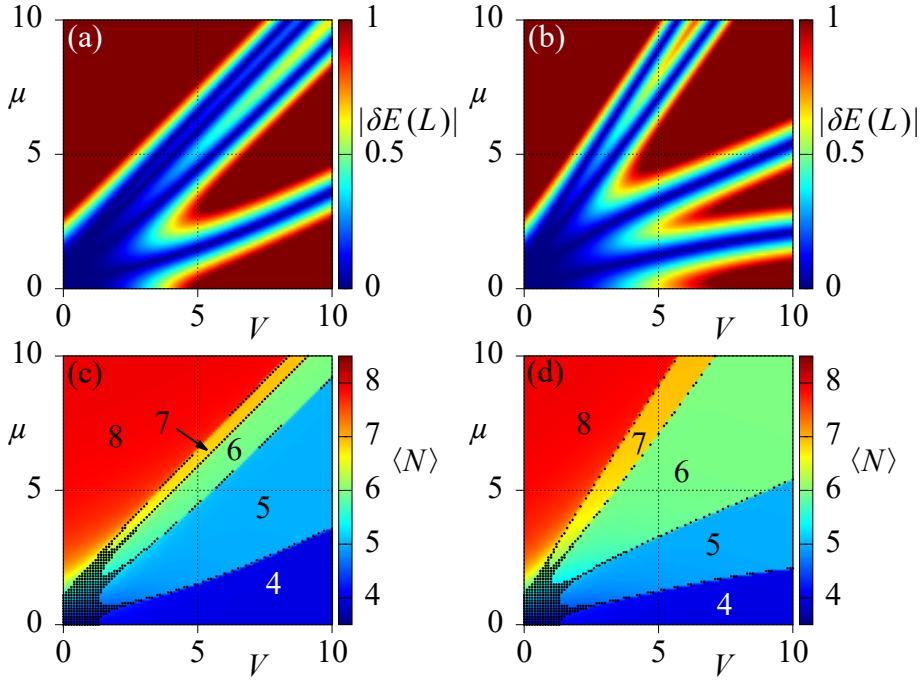
Na rysunku 7.6 przedstawiono elementy macierzowe $|\langle n|\Gamma|m\rangle|^2 = |\Gamma_{nm}|^2$ w funkcji energii E_n, E_m . Na panelu 7.6(a) przedstawiono wyniki dla układu zawierającego (prawie) strong MZM — $\lambda \simeq 0.98$. Zgodnie z równaniem (7.16), dla każdego stanu własnego $|n\rangle$ istnieje dokładnie jeden stan $|m\rangle$ z innego sektora parzystości, taki że $|\Gamma_{nm}| \simeq 1$ oraz $E_n \simeq E_m$. Na środkowym panelu 7.6(b) przedstawiono wyniki dla układu z $\lambda \simeq 0.92$. W takim przypadku Γ nie jest strong MZM. Operator zawiera sporą część zachowaną $\bar{\Gamma}$ (patrz diagonalne elementy w bazie energetycznej) i nieco mniejszą część ortogonalną $\bar{\Gamma}^\perp$, reprezentowaną przez elementy pozadiagonalne. Na ostatnim panelu 7.6(c) przedstawiono wyniki dla jeszcze mniejszej $\lambda \simeq 0.23$. W części środkowej i maksymalnej spektrum energetycznego część zachowana jest zdecydowanie zmniejszona w porównaniu do poprzednich paneli 7.6(a)–(b). Największa część zachowana znajduje się w niskoenergetycznym spektrum co odpowiada niskim temperaturom.



Zanim zostaną omówione szczegóły skalowania rozmiarowego (FSS), skomentowano jeszcze warunek konieczny dla MZM — degenerację stanu podstawowego δE . Rysunek 7.7(a) wiernie odtwarza wyniki przedstawione w pracy [130]. Na rysunkach 7.7(a)–(b) przedstawiono degenerację stanu podstawowego w sektorach z parzystą oraz nieparzystą liczbą cząstek odpowiednio dla układu z $W = 0$ oraz $W = V/2$. Na wykresach można zidentyfikować dwa obszary: (i) dwuwymiarowy obszar w okolicach punktu $V = \mu = 0$, (ii) linie wychodzące z obszaru (i). Na rysunku 7.7(a) struktura linii obszaru (ii) jest słabo widoczna. Dopiero przy niezerowym W na rysunku 7.7(b) struktura linii staje się bardziej widoczna. Na rysunkach 7.7(c)–(d) przedstawiono wyjaśnienie pochodzenia tych linii — zaprezentowano wyniki średniego obsadzenia stanu podstawowego $\langle \hat{N} \rangle$. Wcześniej wspomniane linie z obszaru (ii) nie są związane z MZM i są również obecne w układzie $\Delta = 0$, dla którego MZM nie występują. Linie te związane są z przekrywaniem się poziomów energetycznych z podprzestrzenią o różnej liczbie cząstek parzystej oraz nieparzystej. Te linie oddzielają obszary w których obsadzenia stanu podstawowego są blisko liczb naturalnych¹ $0, 1, 2, \dots, L$.

7.3 Szczegóły skalowania rozmiarowego

¹Niewidoczne obsadzenia dla $0, 1, \dots, L/2$ są dla ujemnych wartości μ .



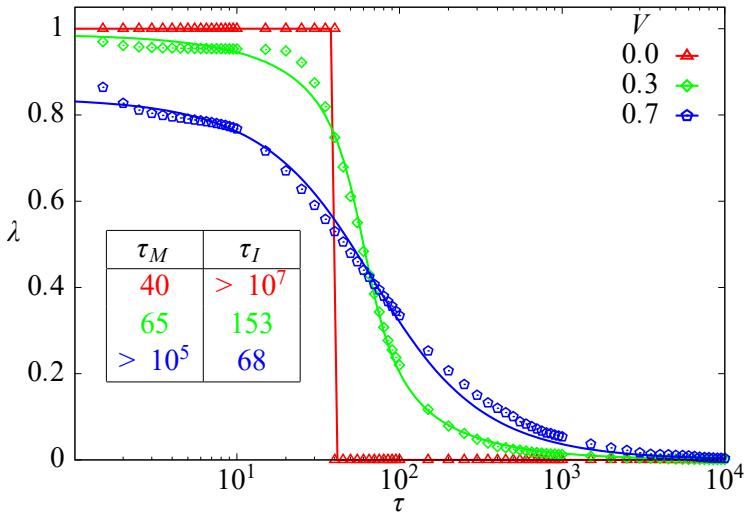
Rysunek 7.7: (a)–(b) Degeneracja stanu podstawowego $\delta E(L)$. (c)–(d) Średnia liczba obsadzeń $\langle \hat{N} \rangle$. Wyniki dla $L = 8$, $\Delta = 1$, (a), (c) $W = 0$, (b), (d) $W = V/2$. Czarne punkty na (c)–(d) dla parametrów dla których $|\delta E(L)| < 0.02$.

Te wyniki podkreślają, jak istotne są warunki testowania *MZM*. Testowany warunek, degeneracja stanu podstawowego δE , jest jedynie warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym do określenia obecności *MZM* w badanym układzie.

Podczas badania korelacji $\lambda(\tau)$ istotnie ważna jest kolejność dokonywania skalowania rozmiarowego i czasowego. Skalowanie rozmiarowe $L \rightarrow \infty$ powinno poprzedzać skalowanie czasowe $\tau \rightarrow \infty$. Zgodnie z dyskusją przeprowadzoną w sekcji 5.3 w procesie relaksacji biorą udział dwa procesy: proces związany z obecnością oddziaływań wielociałowych — skala czasowa τ_I — oraz proces związany z oddziaływaniami modów Majorany — skala czasowa τ_M . Uwzględniając obydwa te procesy, funkcję autokorelacyjną $\lambda(\tau)$ dopasowano korzystając z następującej funkcji

$$\lambda_{\text{fit}}(\tau) = \frac{C}{\pi} \left\{ \arctan \left[\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_M} \right) \tau_I \right] + \arctan \left[\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_M} \right) \tau_I \right] \right\}. \quad (7.17)$$

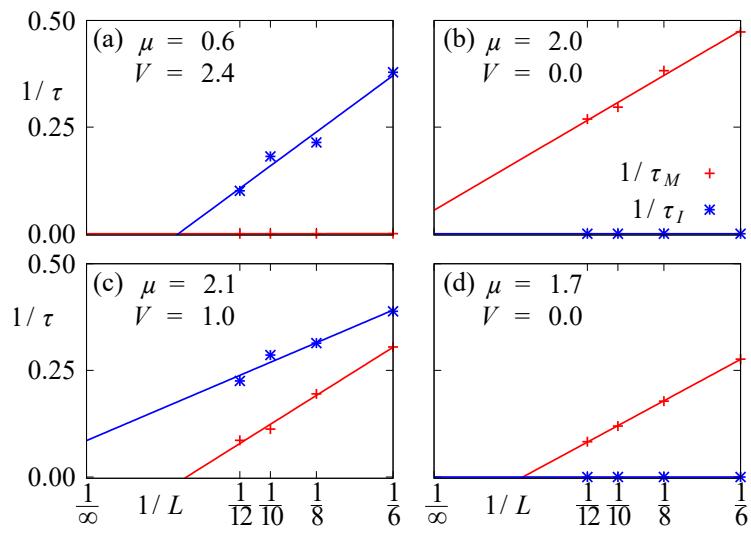
Funkcja λ_{fit} zawiera trzy parametry do dopasowania: C , τ_I oraz τ_M . Na rysunku 7.8 przedstawiono przykładowe dopasowania funkcji dla zestawu różnych parametrów. Dopasowanie dobrze działa zarówno gdy: (a) dominuje jeden wybrany mechanizm relaksacji np. $\tau_M \ll \tau_I$ lub $\tau_I \ll \tau_M$, (b) oba mechanizmy relaksacji mają przybliżone skale czasowe $\tau_I \simeq \tau_M$.



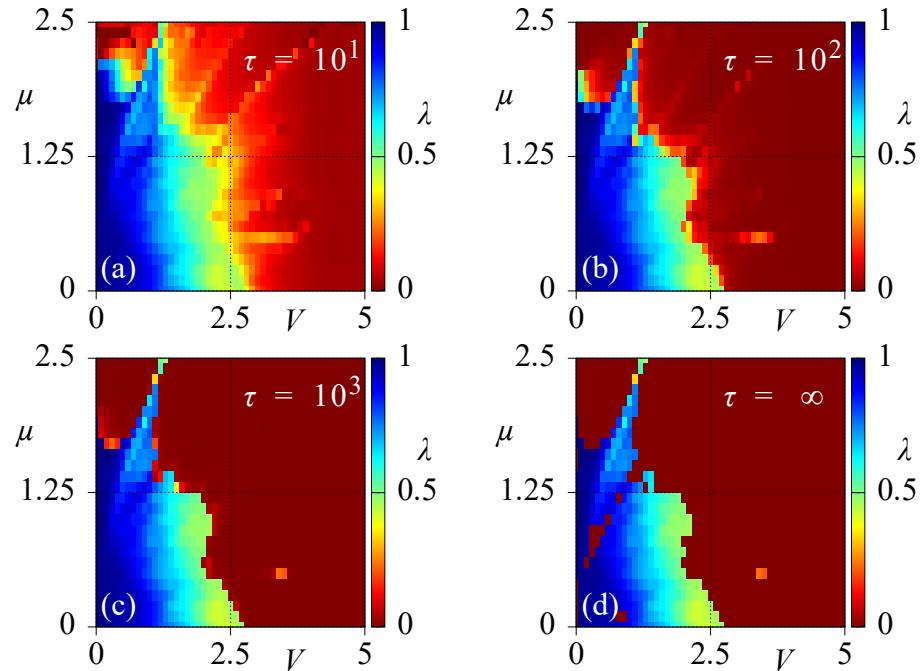
Rysunek 7.8: Porównanie funkcji autokorelacji $\lambda(\tau)$ (punkty) wraz z dopasowaną funkcją λ_{fit} (ciągłe linie). W tabeli zamieszczono dopasowane wartości τ_M, τ_I odpowiednio dla $V = 0.0, 0.3, 0.7$. Wyniki dla $\Delta = 0.3$, $\mu = 0, W = V/2, L = 12$.

W celu badania układów w granicy termodynamicznej najpierw należy dokonać skalowania rozmiarowego (*FSS*) współczynników relaksacji $1/\tau_I$ oraz $1/\tau_M$. Na rysunkach 7.9(a)–(d) przedstawiono skalowanie rozmiarowe takich współczynników dla wybranych przypadków. Na panelach 7.9(a), (d) współczynniki $1/\tau_M$ oraz $1/\tau_I$ w granicy termodynamicznej dążą do zera. Zatem wartość funkcji korelacyjnej $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \lambda = C$. Na panelach 7.9(b), (c) odpowiednio współczynnik $1/\tau_M, 1/\tau_I$ jest większy od zera w granicy termodynamicznej, co w konsekwencji prowadzi do $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \lambda = 0$. Jak napisano w sekcji 2.3, *MZM* w modelu Kitaeva (w przypadku bez oddziaływań) istnieją dla $|\mu| \leq 2t^0$, co udało się odtworzyć na rysunkach 7.9(b), (d).

Po zakończonej procedurze *FSS* można badać przybliżone wyniki dla funkcji korelacyjnej λ w granicy termodynamicznej, co zostało przedstawione na rysunku 7.10. Wykresy 7.10(a)–(d) przedstawiają wyniki $\lambda_{\text{fit}}(\tau)$ dla których parametry C, τ_M, τ_I zostały zastąpione ich aproksymowanymi wartościami w granicy termodynamicznej. Procedura *FSS* z pewnością obarczona jest sporymi błędami, o czym świadczyć może nieregularny kształt prezentowany na wykresach. Na rysunku 7.10(d) przedstawiono przybliżone wartości λ dla $\tau \rightarrow \infty$. Wydaje się, że informacja funkcji korelacyjnej λ jest przynajmniej częściowo zachowana dla dowolnie dużych czasów dla oddziaływań $V < 2$.



Rysunek 7.9: Skalowanie rozmiarowe współczynników relaksacji $1/\tau_M$ oraz $1/\tau_I$. Wyniki dla $\Delta = 1, W = 0$.



Rysunek 7.10: Ekstrapolowane funkcje autokorelacyjne $\lambda(\tau)$ w granicy termodynamicznej $\lim_{L \rightarrow \infty}$. Wyniki dla $\Delta = 1, W = V/2$.

W tym rozdziale został zaprezentowany przykład zastosowania algorytmu opisanego w rozdziale 5 do identyfikacji MZM . W tym celu zbadano model Kitaeva z oddziaływaniami wielociałowymi. Porównano wyniki rozkładów przestrzennych MZM otrzymane za pomocą tego algorytmu ze standardowymi wynikami $LDOS$, jakie można otrzymać z wykorzystaniem formalizmu funkcji Greena. Otrzymano perfekcyjną zgodność wyników pomiędzy dwiema metodami [rysunek 7.2(a)–(b)]. Dodatkowo nowa, zaproponowana w naszej pracy [1] metoda umożliwiła zbadanie wpływu oddziaływań wielociałowych na rozkłady przestrzenne MZM . Oddziaływanie wielociałowe mogą zwiększać lokalizację MZM na krawędziach układu [rysunek 7.2(c)–(d)]. Przedstawiona metoda pozwala na badanie silnych (lub prawie silnych) MZM w układach z dowolnymi oddziaływaniami wielociałowymi. Pokazano, że czasy życia takich modów, nawet w nieskończonych temperaturach, są wystarczająco długie i umożliwiają przechowywanie informacji. Obszar występowania silnych MZM zawiera się w obszarze występowania słabych MZM , ale jest od niego mniejszy. To oznacza, że nie wszystkie topologiczne stany są tak samo chronione i niekoniecznie tak samo dobrze nadają się do wykorzystania do przetwarzania kwantowej informacji.

Podsumowanie

8

ROZDZIAŁ

Wpływ oddziaływań dalekozasięgowych

Ten rozdział bazuje na wynikach opublikowanych w pracy [2]. Przedstawiona zostanie tutaj analiza dotycząca wpływu oddziaływań dalekozasięgowych na MZM z wykorzystaniem algorytmu wyprowadzonego w rozdziale 5.

Opis rozdziału

Jak to przedstawiono w poprzednim rozdziale 7, oddziaływanie wielociałoowe mają znaczący wpływ na istnienie MZM w układach oraz na ich rozkład przestrzenny α_i . Oddziaływanie wielociałoowe mogą powodować zwiększenie lokalizacji MZM na brzegach układu, jak również mogą powodować zwiększenie zakresu obszaru topologicznego ze względu na parametry układu, np. ze względu na potencjał chemiczny μ . W tym rozdziale, korzystając z identycznej metody (opisanej w rozdziale 5) jak w rozdziale 7 przedstawiono wyniki dotyczące wpływu oddziaływania dalekozasięgowego na MZM , na przykładzie modelu Kitaeva z oddziaływaniami. Poszukiwanie MZM w układach z oddziaływaniami wielociałowymi jest bardzo wymagającym zadaniem. W przypadku oddziaływań między najbliższymi sąsiadami, w przypadku jednowymiarowych układów, skutecną metodą jest *DMRG*, z pomocą której wpływ tych oddziaływań został już zbadany [128, 133]. *DMRG* umożliwia badanie układów posiadających tysiące węzłów, ale niestety jest zoptymalizowane do badania tylko oddziaływań krótkozasięgowych. Przedstawiona metoda w rozdziale 5 wymaga pełnego spektrum energii, a zatem potrzebna jest metoda bazująca na *ED*. Niestety *ED* jest ograniczona do badania bardzo małych układów ($L \sim 20$) [136]. Zasadniczą zaletą metody *ED* jest możliwość badania dowolnych oddziaływań: krótkozasięgowych oraz dalekozasięgowych. Zazwyczaj dodatkowe wyrazy związane z oddziaływaniem typu $\hat{n}_i \hat{n}_j$ nie wpływają na złożoność pamięciową badanych problemów lub ich wpływ jest pomijalnie mały. W pracy [2] badali-

8.1 Czasy życia modów Majorany

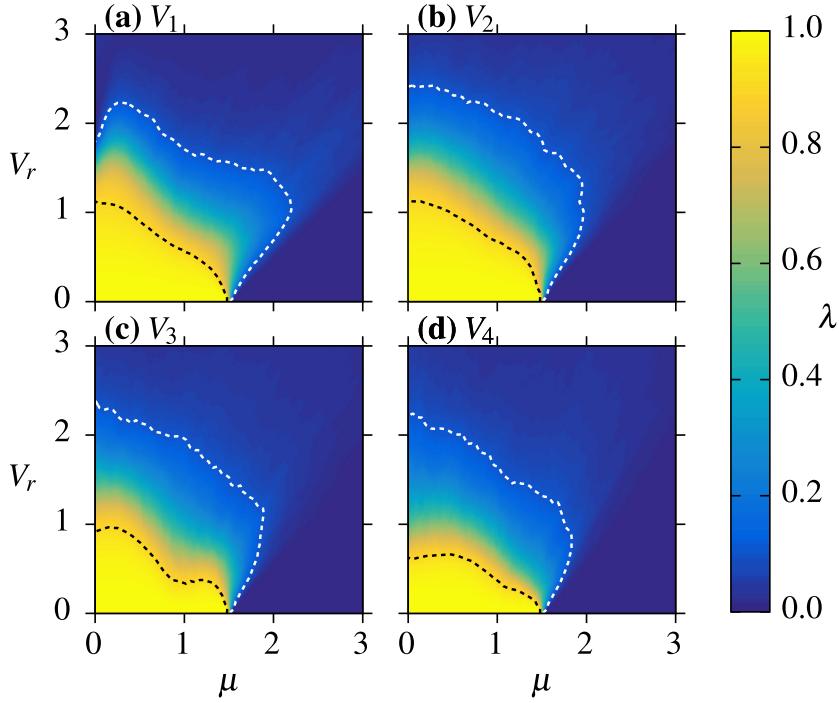
śmy wpływ oddziaływań dalekozasięgowych na czasy życia MZM oraz na ich rozkład przestrzenny. W tym rozdziale przedstawiono wyniki otrzymane z wykorzystaniem techniki opisanej w rozdziale 5 na przykładzie modelu Kitaeva z oddziaływaniami wielociałowymi dla układu jednowymiarowego drutu z OBC . Badany układ może być opisany za pomocą następującego hamiltonianu

$$\hat{H}_{\text{Kitaev}+V_r}^{\text{chain}} = \sum_{i=1}^{L-1} \left[\left(t^0 a_i^\dagger a_{i+1} + \Delta a_i^\dagger a_{i+1}^\dagger \right) + \text{H.c.} \right] - \mu \sum_{i=1}^L \tilde{n}_i + \sum_{r=1}^{L-1} V_r \sum_{i=1}^{L-r} \tilde{n}_i \tilde{n}_{i+r}, \quad (8.1)$$

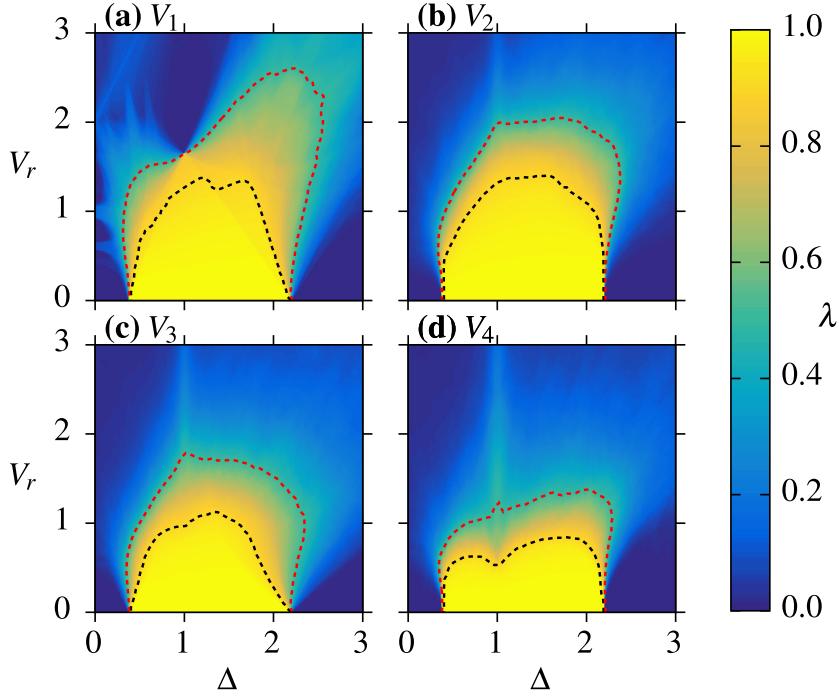
gdzie V_r to potencjał oddziaływania pomiędzy r -najbliższymi sąsiadami. Ze względu na to, że dla ED jest dostępne badanie tylko układów o małych rozmiarach, dla uproszczenia testowano oddziaływania V_r do $r = 4$. Rozważano każdy potencjał V_r oddziennie, tzn. dla jednego r ustalano niezerowe V_r . W obliczeniach przyjęto $t^0 = \hbar = 1$.

Na rysunkach 8.1–8.4 przedstawiono największą funkcję autokorelacyjną $\lambda(\tau)$. Analogicznie jak w rozdziale 7, w badanym układzie mogą się znaleźć maksymalnie dwie niezależne MZM : Γ^+ oraz Γ^- . Otrzymane wartości λ dla poszczególnych czasów τ są identyczne dla Γ^+ oraz Γ^- — pokazano wyniki dla jednej z nich. Znany jest fakt, że V_1 prowadzi do poszerzenia obszaru topologicznego w potencjale chemicznym μ [121]. Na rysunku 8.1(a) wyraźnie widać wspomniane zachowanie — patrz biały kontur. Takie poszerzenie wydaje się jednak dużo mniejsze dla V_r , $r > 1$ [rysunki 8.1(b)–(d)]. Co więcej, obszar gdzie $\lambda \simeq 1$ (strong MZM) wraz ze wzrostem r zmniejsza się — porównaj czarny kontur na rysunkach 8.1(a)–(d). Tak jak napisano w sekcji 2.3, w przypadku braku oddziaływań wielociałowych, $V_r = 0$, przejście między fazą trywialną a topologiczną dla modelu Kitaeva jest dla $|\mu| = 2t^0$. Ta ostatnia równość, czyli zależność dla której następuje przejście pomiędzy fazą trywialną, a topologiczną, jest dokładna tylko i wyłącznie w granicy termodynamicznej [6] — dla skończonych rozmiarów ta relacja może się różnić. Na rysunku 8.1 to przejście jest dla $|\mu| < 2t^0$. To jest efekt rozmiarowy i w celu wyznaczenia dokładnej wartości dla wszystkich wyników należałoby dokonać skalowania rozmiarowego i czasowego tak jak w rozdziale 7 [patrz rysunek 7.9]. Taka procedura jest jednak dość skomplikowana i jest obarczona sporym błędem, dlatego w tym rozdziale taka analiza została pominięta. Analiza korelacji $\lambda(\tau)$ dla skończonych czasów τ jest wystarczająca do porównania wpływu zasięgu oddziaływania na MZM .

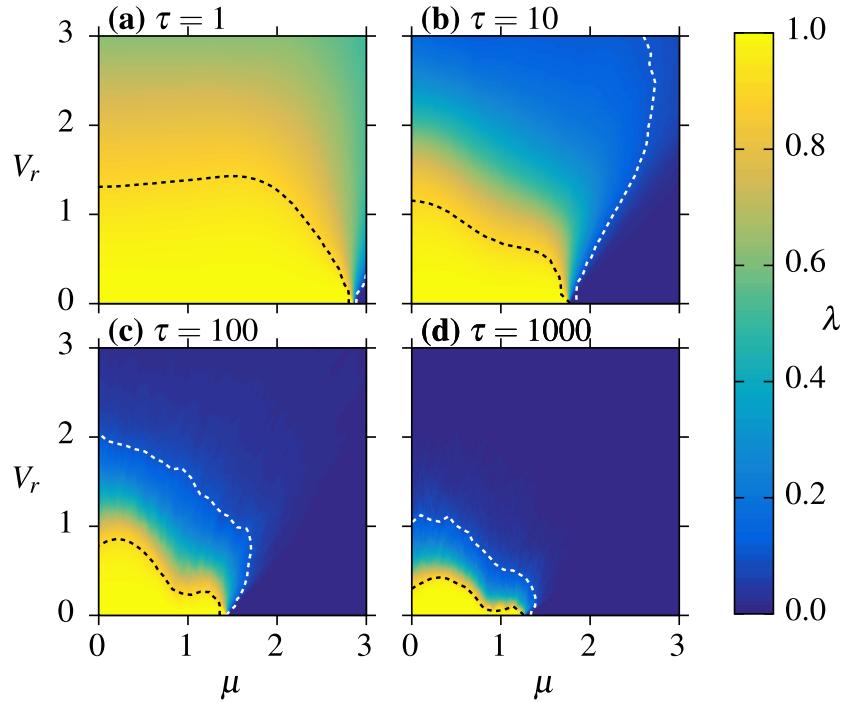
Na rysunku 8.2 przedstawiono analogiczne wyniki jak na rysunku 8.1 z tą różnicą, że przedstawiono λ w funkcji potencjałów V_r oraz przerwy nadprzewodzącej Δ . Podobnie wraz ze wzrostem r potencjału V_r , obszar topologiczny ulega zmniejszeniu [patrz czerwony kontur na rysunku 8.2]. Interesująca jest zanikająca linia wzduż wartości $\Delta = 1$ na rysun-



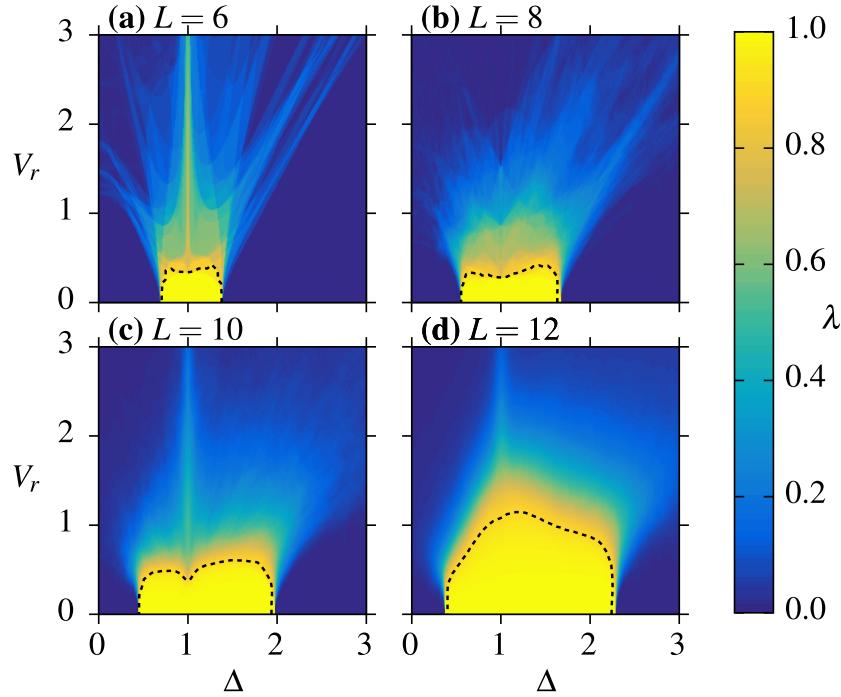
Rysunek 8.1: Funkcja autokorelacyjna λ w funkcji potencjału chemicznego μ oraz oddziaływań V_r . Wyniki dla $\Delta = 0.8$, $\tau = 50$, $L = 10$. Kontrolowane potencjały V_r zaznaczono w etykietach wykresu. Biały i czarny kontur odpowiada odpowiednio $\lambda = 0.1$ oraz 0.9 .



Rysunek 8.2: Funkcja autokorelacyjna λ w funkcji przerwy nadprzewodzącej Δ oraz oddziaływań V_r . Wyniki dla $\tau = 50$, $L = 10$, $\mu = 0$. Kontrolowane potencjały V_r zaznaczono w etykietach wykresu. Czerwony i czarny kontur odpowiada odpowiednio $\lambda = 0.5$ oraz 0.9 .



Rysunek 8.3: Skalowanie czasowe funkcji autokorelacyjnej λ w funkcji potencjału chemicznego μ oraz oddziaływania V_3 . Wyniki dla $\Delta = 0.8$, $L = 10$. Skale czasowe $\tau = 10^0, 10^1, 10^2, 10^3$ zaznaczono w etykietach wykresu. Biały i czarny kontur odpowiada odpowiednio $\lambda = 0.1$ oraz 0.9 .



Rysunek 8.4: Skalowanie rozmiarowe funkcji autokorelacyjnej λ w funkcji przerwy nadprzewodzącej Δ oraz oddziaływania V_4 . Wyniki dla $\tau = 50$, $\mu = 0$. Rozmiary układu $L = 6, 8, 10, 12$ zaznaczono w etykietach wykresu. Czarny kontur odpowiada $\lambda = 0.9$.

kach 8.2(b)–(d). Model Kitaeva w punkcie $\Delta = |t^0|$ odpowiada szczególnemu przypadkowi parametrów (patrz sekcja 2.3) dla których w przypadku bez oddziaływań, model Kitaeva zawiera *MZM*, które są dokładnymi całkami ruchu – strong *MZM* [6]. Na rysunku 8.2 dla wartości $\Delta \gtrsim 2$ w układzie nie ma *MZM*. Jest to efekt skończonego rozmiaru (analogicznie jak na rysunku 7.3 w rozdziale 7), który wyjaśniony będzie na rysunku 8.4.

W celu badania korelacji λ dla układów w granicy termodynamicznej należy zachować szczególną czujność przy kolejności wyznaczanych granic skalowania rozmiarowego i czasowego $\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty}$. W rozdziale 7 przedstawiliśmy analizę problemu takiego skalowania. Jednak w tej części pracy, w celu porównania wpływu zasięgu oddziaływania r potencjału V_r , analiza związana z wyznaczaniem $\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda$ została pominięta. Przedstawiona została za to analiza jak korelacje λ zależą od L oraz τ . Na rysunku 8.3 przedstawiono jak λ zależy od potencjału V_3 oraz potencjału chemicznego μ . Na poszczególnych rysunkach 8.3(a)–(d) przedstawiono wyniki odpowiednio dla $\tau = 10^0, 10^1, 10^2, 10^4$. Interesujące, że nawet dla bardzo dużego czasu ($\tau = 1000$), obszar w którym potencjalnie mogą znajdować się *MZM* jest niezerowy.

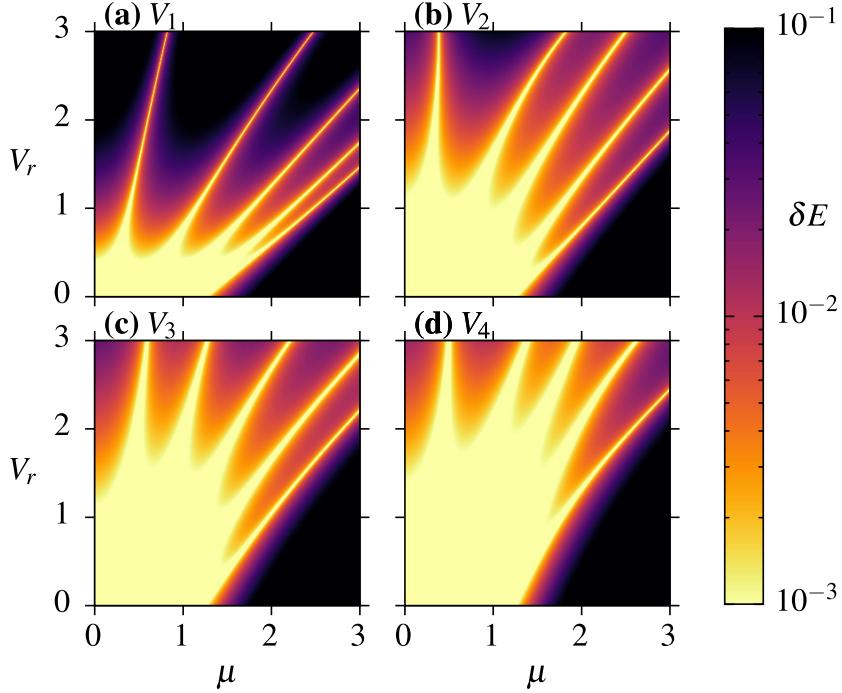
Na rysunku 8.4 przedstawiono wynik korelacji λ w funkcji V_4 oraz Δ . Na poszczególnych panelach (a)–(d) rysunku 8.4 przedstawiono wyniki dla różnych rozmiarów układu, odpowiednio $L = 6, 8, 10, 12$. Na takim zestawieniu wyników widać wyraźne efekty rozmiarowe w korelacji λ . Wraz ze wzrostem rozmiaru układu, obszar (oznaczony kolorem żółtym), gdzie obecna jest faza topologiczna zawierająca strong *MZM*, powiększa się. Takie skalowanie rozmiarowe tłumaczy otrzymany wynik zaprezentowany na rysunku 8.2, gdzie obszar topologiczny np. w przypadku braku oddziaływań wielociąłowych ograniczony był do wartości $\Delta \simeq 2$.



Otrzymane wyniki λ porównano z warunkiem koniecznym istnienia *MZM* — degeneracją stanu podstawowego δE [patrz równanie (7.7)], oraz ze szczerą energetyczną $\Delta E = \min(\Delta E_e, \Delta E_o)$ [patrz równanie (7.8) oraz (7.9)], który związany jest z warunkiem równoważności *LUE*. Wyniki dotyczące δE oraz ΔE można znaleźć odpowiednio na rysunku 8.5 oraz 8.6. Zaskakujące, że obszar gdzie jest mała degeneracja δE , wraz ze wzrostem zasięgu r oddziaływania V_r , rośnie. Widoczne linie na rysunku 8.5 nie są związane z istnieniem *MZM*, a jedynie z przekrywaniem się poziomów energetycznych [porównaj rysunek 7.7]. Na rysunku 8.6 widać, że wraz ze wzrostem r , obszar gdzie wartość szczeriny ΔE jest duża, rośnie.

8.2 Porównanie

z LUE

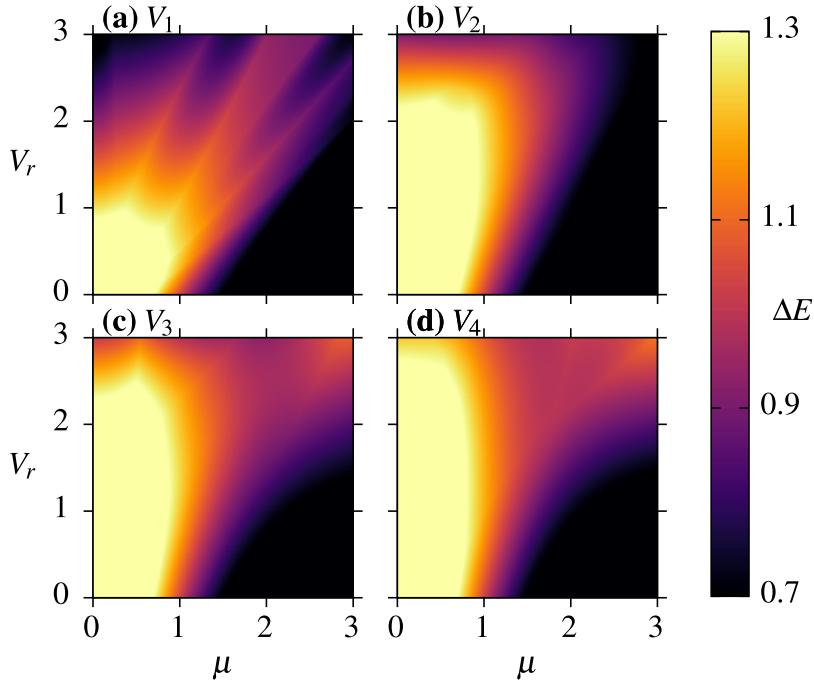


Rysunek 8.5: Degeneracja stanu podstawowego δE w funkcji μ oraz V_r . Wyniki dla $\Delta = 0.8, L = 10$.

Zarówno wyniki dotyczące δE oraz ΔE mogą sugerować, że wraz ze wzrostem zasięgu oddziaływania r , obszar gdzie mogą występować MZM rośnie, co jest całkowicie odwrotnym zachowaniem w porównaniu do wyników λ prezentowanych na rysunkach 8.1–8.4. Należy tutaj podkreślić, że otrzymane wyniki z algorytmu bazującego na $LIOOM$ oraz wyniki sprawdzonych warunków LUE nie są ze sobą sprzeczne. Algorytm bazujący na $LIOOM$ wyznaczył obszary gdzie w układzie mogą być obecne strong MZM , natomiast warunki LUE mają informację jedynie o soft MZM .



8.3 Wpływ na strukturę przestrzenną MZM W celu wyjaśnienia wyników, zbadano wpływ zasięgu oddziaływania na strukturę przestrzenną MZM . Na rysunku 8.7 zaprezentowano strukturę przestrzenną $|\alpha_i^+|^2 + |\alpha_i^-|^2$. Wspomniana wielkość odpowiada znormalizowanej $LDOS$ [192] lub przewodności różniczkowej [193]. Na rysunkach 8.7(b)–(d) widać, że wraz ze wzrostem zasięgu r oddziaływania V_r , lokalizacja MZM zmniejsza się, tzn. suma współczynników $|\alpha_i^+|^2 + |\alpha_i^-|^2$ na środku łańcucha rośnie, a na brzegach łańcucha maleje. Dla skończonych układów $L \ll \infty$, na skutek przekrywania się MZM , degeneracja δE jest niezerowa co implikuje skończony czas życia MZM . Na rysunku 8.8 przedstawiono przekrycie MZM , które rozumiemy przez $|\alpha_i^+ \alpha_i^-|$.



Rysunek 8.6: Szczelina energetyczna ΔE w funkcji μ oraz V_r . Wyniki dla $\Delta = 0.8, L = 10$.

Widać tam, że dla średzkowych węzłów, przekrycie pomiędzy dwoma MZM rośnie wraz z zasięgiem r oddziaływania V_r .

W celu dalszego badania nielokalności MZM , wykorzystano ich całkowite przekrycie, zdefiniowane następująco [43, 97]

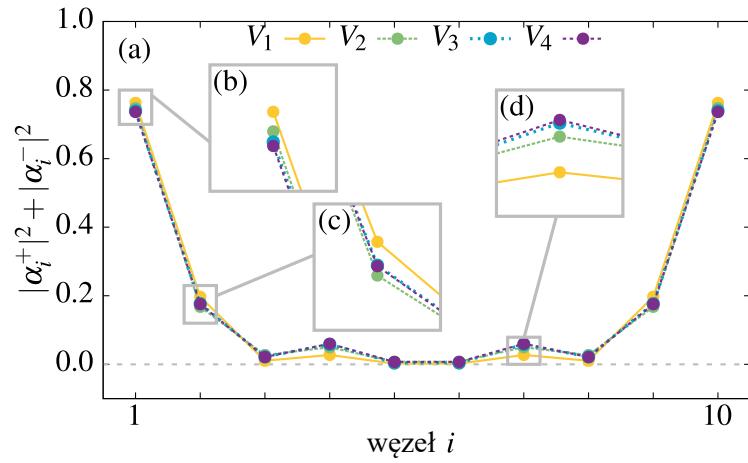
$$\Omega = \|\Gamma^+ \tilde{\Gamma}^-\| = \sum_{i=1}^L |\alpha_i^+ \alpha_i^-|, \quad (8.2)$$

gdzie $\tilde{\Gamma}^- = U\Gamma^-U^\dagger$ to odbicie przestrzenne Γ^+ , a unitarny operator U opisuje następującą transformację operatorów bazowych

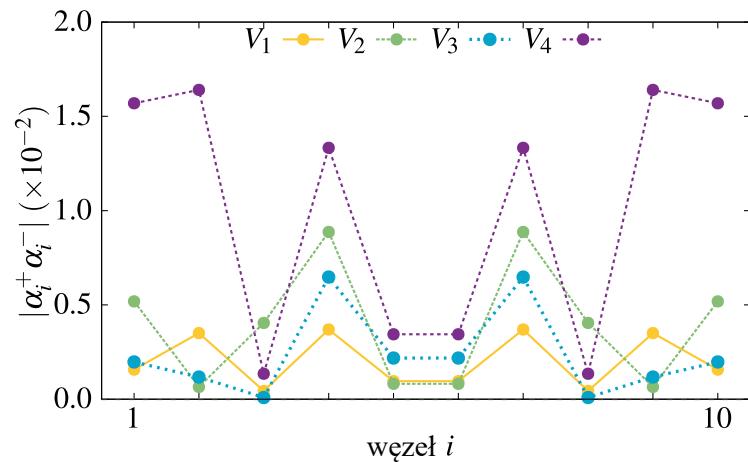
$$U\gamma_i^\pm U^\dagger = \gamma_i^\mp. \quad (8.3)$$

Całkowite przekrycie Ω , zgodnie z definicją, może przyjmować wartości z przedziału $\Omega \in [0, 1]$, gdzie odpowiednio $\Omega = 0$ odpowiada sytuacji kiedy nie ma przekrycia pomiędzy MZM , a przypadek $\Omega = 1$ odpowiada sytuacji kiedy MZM przekrywają się całkowicie. Brak przekrycia, $\Omega = 0$, jest bezpośrednio wymagany do zapewnienia ochrony topologicznej qubitu bazującego na MZM [97]. Należy tutaj podkreślić, że Ω jest wielkością, która silnie zależy od rozmiaru układu L [194].

W ogólności całkowite przekrycie Ω można kontrolować za pomocą potencjału elektrostatycznego [64, 104, 195, 196], czy też za pomocą oddziaływań międzywęzłowych [1, 125].



Rysunek 8.7: Wpływ zasięgu r oddziaływania V_r na rozkład przestrzenny MZM , Γ^+ oraz Γ^- . Wyniki dla $L = 10$, $\Delta = 0.4$, $\mu = 0.7$.



Rysunek 8.8: Lokalne przekrycie $|\alpha_i^+ \alpha_i^-|$ dla $MZM \Gamma^+$ oraz Γ^- . Wyniki dla $L = 10$, $\Delta = 0.4$, $\mu = 0.7$.

W pracy [2] zbadaliśmy zależność Ω od oddziaływań V_r oraz potencjału chemicznego μ . Wyniki Ω zostały przedstawione na rysunku 8.9. Dla małej wartości oddziaływania V_r i potencjału μ , całkowite przekrycie Ω jest eksponencjalne małe. Przekrycie Ω rośnie wraz ze wzrostem V_r . Ten efekt słabo zależy od zasięgu oddziaływania r . Wydaje się, że Ω jest bardziej czułe na zmiany potencjału chemicznego μ .

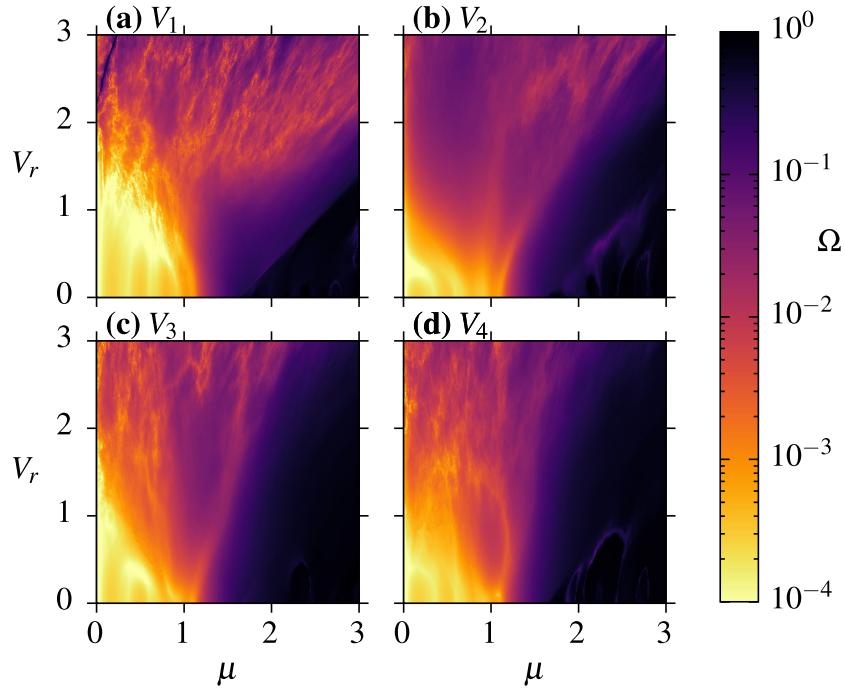
Podobne zachowanie można zaobserwować na rysunku 8.10, gdzie przedstawiono wyniki numeru węzłów, dla których lokalne przekrycie $|\alpha_i^+ \alpha_i^-|$ jest największe w funkcji potencjału chemicznego μ oraz oddziaływania V_r . Zwiększenie potencjału chemicznego μ powoduje zwiększenie przekrycia MZM na środku łańcucha (w tym wypadku dla $i = 5$) – porównaj z rysunkiem 8.8. Szybkie zmiany indeksu i w okolicy $\mu = 1$, związane są z precyzją numeryczną, tzn. wartości $|\alpha_i^+ \alpha_i^-|$ są relatywnie małe i porównywalne na całej długości łańcucha. W odróżnieniu od μ , oddziaływanie V_r powoduje zwiększenie przekrycia blisko brzegów łańcucha.



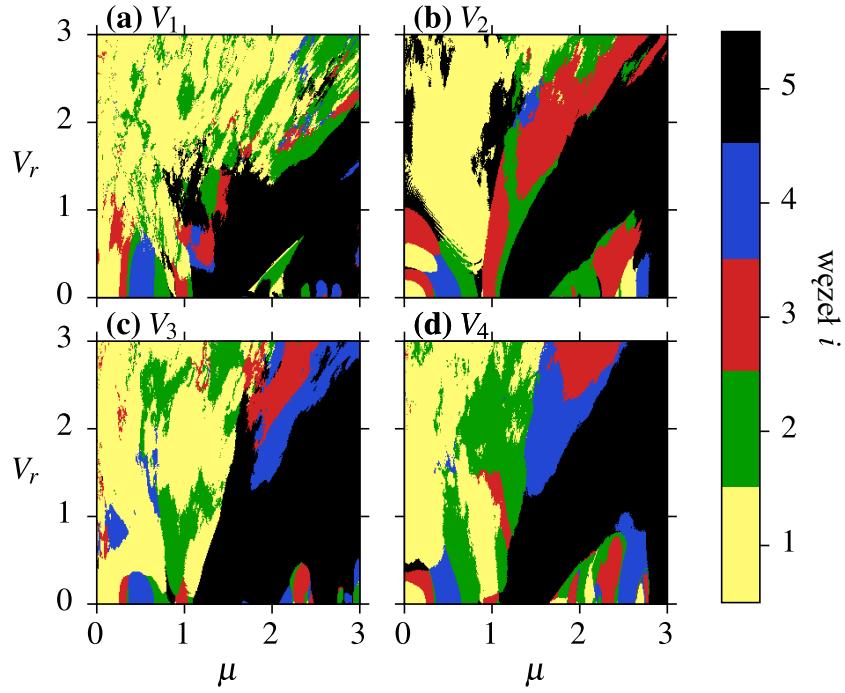
Zbadano wpływ zasięgu oddziaływania wielociąłowego na czasy życia MZM oraz na ich rozkład przestrzenny. Oddziaływanie pomiędzy bardziej oddalonymi węzłami są bardziej destrukcyjne od oddziaływań pomiędzy najbliższymi sąsiadami — w tym pierwszym przypadku, po uwzględnieniu oddziaływań, czasy życia MZM są mniejsze (rysunki 8.1–8.2). Wraz ze wzrostem zasięgu oddziaływań zmniejsza się lokalizacja MZM na krawędziach układu (rysunek 8.7) i równocześnie zwiększa się ich wzajemne przekrywanie (rysunek 8.8). To zagadnienie dotyczące badania wpływu zasięgu oddziaływania jest szczególnie istotne, ponieważ w prawdziwych materiałach takie oddziaływanie są obecne i zanikają wraz z odległością. Destrukcyjne efekty oddziaływań są również istotne ze względu na zastosowanie MZM w celu przechowywania i przetwarzania informacji kwantowej. W celu zagwarantowania jak największej efektywności urządzeń bazujących na fizyce MZM , należało by ograniczać takie oddziaływanie tak jak to tylko możliwe.

Podsumowanie





Rysunek 8.9: Całkowe przekrycie Ω pomiędzy MZM, Γ^+ oraz Γ^- , w funkcji oddziaływań V_r oraz potencjału chemicznego μ . Panele odpowiadają różnym V_r , co zaznaczono w etykietach rysunku. Wyniki dla $L = 10$, $\Delta = 0.8$.



Rysunek 8.10: Numer węzła i dla którego lokalne przekrycie $|\alpha_i^+ \alpha_i^-|$ jest największe, w funkcji oddziaływań V_r oraz potencjału chemicznego μ . Panele odpowiadają różnym V_r , co zaznaczono w etykietach rysunku. Wyniki dla $L = 10, \Delta = 0.8$.

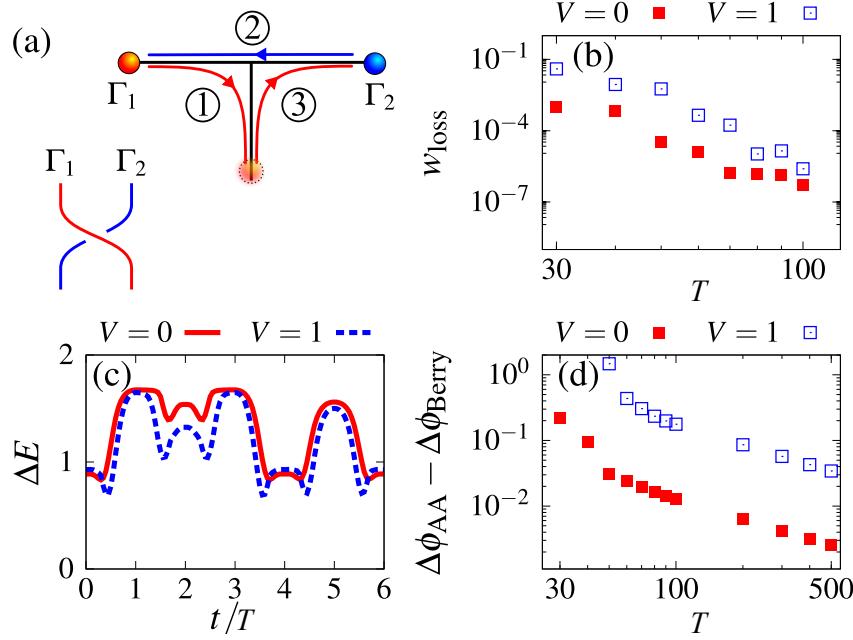
Bramka fazowa bazująca na fazie geometrycznej

W tym rozdziale zostały opisane wyniki przedstawione w pracy [3]. W pracy badano dynamikę pojedynczego qubitu zakodowanego na czterech MZM . Zostanie tutaj pokazane, że wyplatanie częściowo przekrywających MZM , można wykorzystać do implementacji bramki fazowej bazującej na fazie geometrycznej.

Opis rozdziału

Fundamentalnym problemem dla komputerów kwantowych jest implementacja zestawu bramek, który gwarantowałby uniwersalność obliczeń. Przykładem takiego zestawu jest zbiór zawierający: bramkę Hadamarda H , bramkę fazową $R(\theta)$ oraz bramkę CNOT [141]. Bramkę H oraz CNOT można zrealizować z wykorzystaniem MZM z zagwarantowaną ochroną topologiczną (patrz rozdział 3). Problematyczna jest bramka $R(\theta)$. Operacje grupy warkoczowej \mathfrak{B}_M , do której należą MZM , nie są wystarczające do implementacji bramki $R(\theta)$. Rozwiązanie, które omija ten problem, polega na zbliżeniu do siebie MZM [134]. Przekrywanie MZM , na skutek ich zbliżenia, powoduje zniesienie degeneracji δE (patrz sekcja 3.3) co prowadzi do przesunięcia fazy. To przesunięcie związane jest z fazą dynamiczną, ponieważ przy zniesionej degeneracji $\delta E \neq 0$ (patrz sekcja 3.3). W rezultacie zmiana fazy qubitu, zależna jest od δE oraz czasu Δt trwania takiej operacji zbliżania i oddalania MZM . Należy tutaj podkreślić, że taka operacja nie jest chroniona żadną symetrią i w konsekwencji musi zostać przeprowadzona odpowiednia korekcja błędów, np. z wykorzystaniem *destylacji magicznych stanów* [134, 142]. Z taką bramką fazową związana jest faza dynamiczna $R(\phi_{\text{dyn}})$. Taka bramka jest kontrolowana przez dwa parametry: degenerację δE oraz czas trwania Δt . W tym rozdziale

9.1 Pojedyncze wyplatanie i testy adiabatyczności



Rysunek 9.1: (a) Schematyczne trójzłącze z MZM Γ_1, Γ_2 . Strzałkami zaznaczono proces wyplatania quasicząstek. (b) Straty wiarygodności w_{loss} w funkcji całkowitego czasu ewolucji $\mathcal{T} = 6T$. (c) Szczelina energetyczna w funkcji t/T . (d) Różnica $\Delta\phi_{\text{AA}} - \Delta\phi_{\text{Berry}}$ w funkcji T . Wyniki dla $L = 7$, $\Delta = 0.5$ oraz $\mu = 0$.

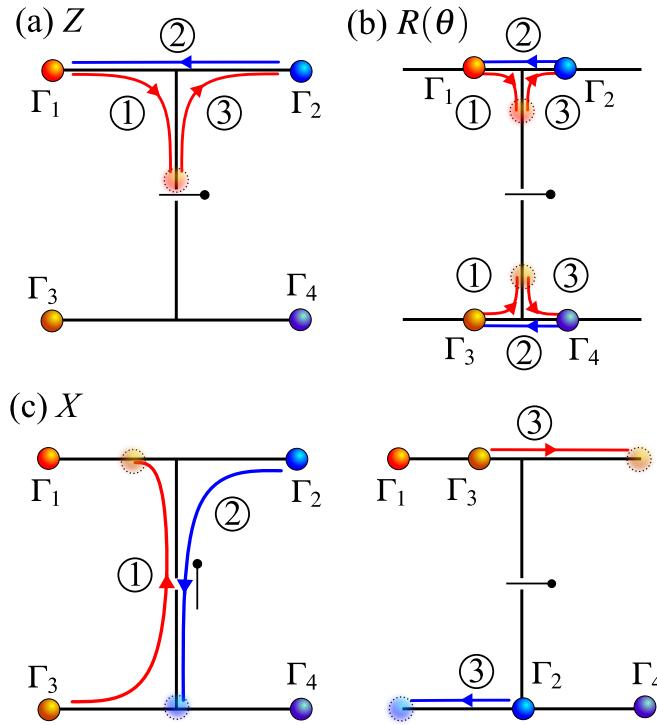
przedstawiono inne podejście do konstrukcji $R(\theta)$ dla qubitu bazującego na MZM . Procedura ta polega na podwójnym wyplataniu MZM , które częściowo się przekrywają. Po wyplataniu MZM , które się przekrywają, faza geometryczna ϕ_{geo} , odbiega od wartości tej fazy dla przypadku, kiedy MZM są całkowicie odseparowane [112]. Niestety, przy przekrywających się MZM , w układzie pojawia się niezerowa degeneracja δE co prowadzi do pojawienia się dodatkowej fazy dynamicznej ϕ_{dyn} . W pracy [3] pokazaliśmy, że fazę dynamiczną ϕ_{dyn} można wyeliminować, kiedy układ ma symetrię częstka–dziura.

Podobnie jak w sekcji 3.2, rozważono qubit zakodowany na dwóch parach MZM : Γ_1, Γ_2 , Γ_3, Γ_4 , gdzie para Γ_1, Γ_2 związana jest ze złączem J_{12} , a para Γ_3, Γ_4 ze złączem J_{34} . Każda para MZM umieszczona była na pojedynczym trójzłączu. Trójzłącze J_{12} zostało schematycznie przedstawione na rysunku 9.1(a). Cały układ dwóch połączonych trójzłącz został przedstawiony na rysunku 9.2. Baza qubitu zawiera dwa stany oba należące do podprzestrzeni z parzystą liczbą częstek [patrz równanie (3.35) oraz (3.36)]:

$$|0\rangle = |ee\rangle = |e_{12}\rangle \otimes |e_{34}\rangle, \quad (9.1)$$

$$|1\rangle = |oo\rangle = |o_{12}\rangle \otimes |o_{34}\rangle. \quad (9.2)$$

Stany $|o_{12}\rangle, |o_{34}\rangle$ są związane odpowiednio ze złączem J_{12} oraz J_{34} (analogicznie stany z pa-



Rysunek 9.2: Układ dwóch trójłączów zwierających MZM , $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, wraz z realizacją wybranych bramek kwantowych. Podwójna realizacja przedstawionych kroków wyplatania jest równoważna (a) bramce Z ; (b) bramce fazowej $R(\theta)$; (c) bramce X .

rzystą liczbą cząstek). Zbadano minimalny układ, który umożliwia wyplatanie MZM — trójłączowe [76, 112]. Rozważono trzy łańcuchy równej długości ℓ , każdy z inną fazą nadprzewodzącego parametru porządku $\Delta_{ij} = \Delta \exp(-i\varphi_{ij}^{\text{sc}})$, gdzie $\varphi_{ij}^{\text{sc}} = 0, +\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ odpowiednio w lewym, prawym i pionowym łańcuchu [patrz rysunek 9.1(a)]. Założono, że każde złącze zawiera $L = 3\ell + 1$ węzłów i jest opisane hamiltonianem modelu Kitaeva (4.19)

$$\hat{H}_{\text{Kitaev}+V}^{\text{trijunction}}(t) = \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\left(t^0 a_i^\dagger a_j + \Delta_{ij} a_i^\dagger a_j^\dagger \right) + \text{H.c.} + V \tilde{n}_i \tilde{n}_j \right] + \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \tilde{n}_i. \quad (9.3)$$

W obliczeniach przyjęto bezwymiarowe jednostki $\hbar = t^0 = 1$. Główną motywacją badania układu z oddziaływaniami wielociąłowymi V , przy procesie wyplatania MZM , jest fakt, że w przypadku (quasi-)jednowymiarowych układów, nawet słabe oddziaływanie kulembowskie potrafi znaczco wpływać na własności materiałów. W przypadku braku nadprzewodzącego parametru porządku, $\Delta = 0$, nanodruty mogą być opisane jako oddziałyujące ciecze Luttingera [183]. MZM nie są całkowicie odporne na oddziaływanie wielociąłowe [1, 2, 126–128, 130, 184, 197, 198], a niezbyt silne oddziaływanie mogą nawet je stabilizować [121, 122, 125, 133].

W celu przesuwania MZM w obrębie łańcuchów można odpowiednio manipulować potencjałem chemicznym μ_i , na poszczególnych węzłach odpowiednio zmieniając wielkość obszaru topologicznego poprzez przesuwanie granic tego obszaru. Tak jak napisano w sekcji 2.3, kiedy $|\Delta| > 0$ w modelu Kitaeva (bez oddziaływań) występują dwie fazy [6]: topologiczna dla $|\mu| \leq 2t^0$ oraz trywialna dla $|\mu| > 2t^0$. Wyplatanie dokonywane jest poprzez adiabatyczną ewolucję $\mu_i(t)$ w taki sposób, że część węzłów pozostaje w fazie trywialnej, pozostałe w fazie topologicznej [76]. Wykorzystano identyczny protokół do zmiany $\mu_i(t)$ jak w pracy [112]. Potencjał zmieniano w następujący sposób

$$\mu_i(t) = \mu_c g_i(t) + \mu, \quad (9.4)$$

gdzie μ to jednorodny potencjał chemiczny, $\mu_c = \pm 4$, $g_i(t) \in [0, 1]$. Wartości μ_c wybrane odpowiednio duże, żeby mieć gwarancję, że węzły dla których $\mu_i = \mu_c$ były w fazie trywialnej nawet dla układu z oddziaływaniami. Funkcja $g_i(t)$ to gładka funkcja dana wzorem

$$g_i(t) = m \left\{ \frac{t}{T} [1 + \kappa(\ell - 1)] - \kappa(\ell - i) \right\}, \quad t \in [0, T] \quad (9.5)$$

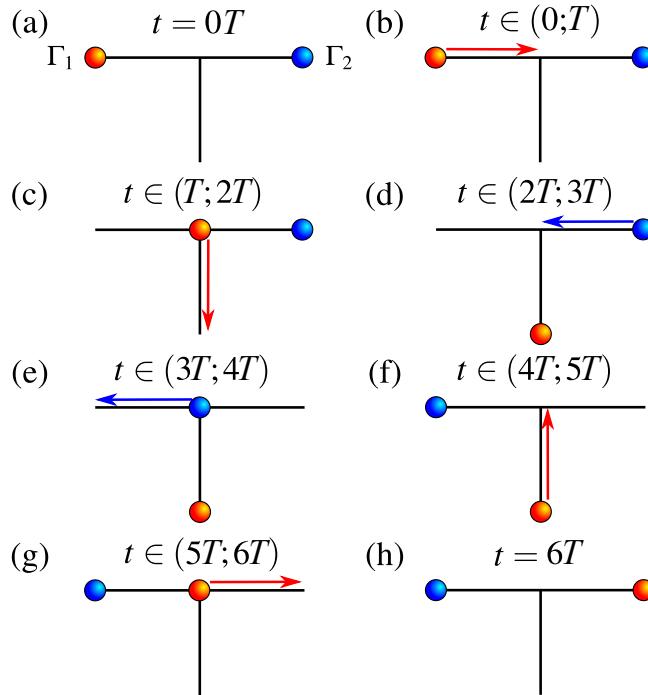
gdzie T to czas trwania pojedynczej sekwencji zmianiania potencjału $\mu_i(t)$ na wybranym łańcuchu złącza (więcej patrz kolejny akapit). Parametr $\kappa = 0.025$, a $m(x)$ to skalarna funkcja

$$m(x) = \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} r(x) \right], \quad r(x) = \min[\max(x, 0), 1]. \quad (9.6)$$

Funkcja $g_i(t)$ opisuje w jaki sposób potencjał $\mu_i(t)$ rośnie w czasie na poszczególnych węzłach. Dla procesu odwrotnego, t.j. kiedy $\mu_i(t)$ maleje, zmieniano $t \rightarrow T - t$.

Następnie rozważono pojedyncze wyplatanie dwóch MZM , na pojedynczym trójkątowym łączcu J_{12} [rysunek 9.1(a) oraz 9.2(a)]. Jako warunek początkowy, na węzłach pionowego łańcucha ustalono $\mu_i(0) = \mu_c$ (faza trywialna), a na węzłach pozostałych poziomych łańcuchów $\mu_i(0) = 0$ (faza topologiczna). Na każdym krańcu łańcuchów poziomych, lewego i prawego, mogą znajdować się odpowiednio Γ_1 oraz Γ_2 . W kolejnych krokach, korzystając z równania (9.4), odpowiednio manipulując potencjałami $\mu_i(t)$ wymieniano miejscami Γ_1, Γ_2 [rysunek 9.1(a)]. Procedura wyplatania została podzielona na 6 segmentów, każdy trwający czas T :

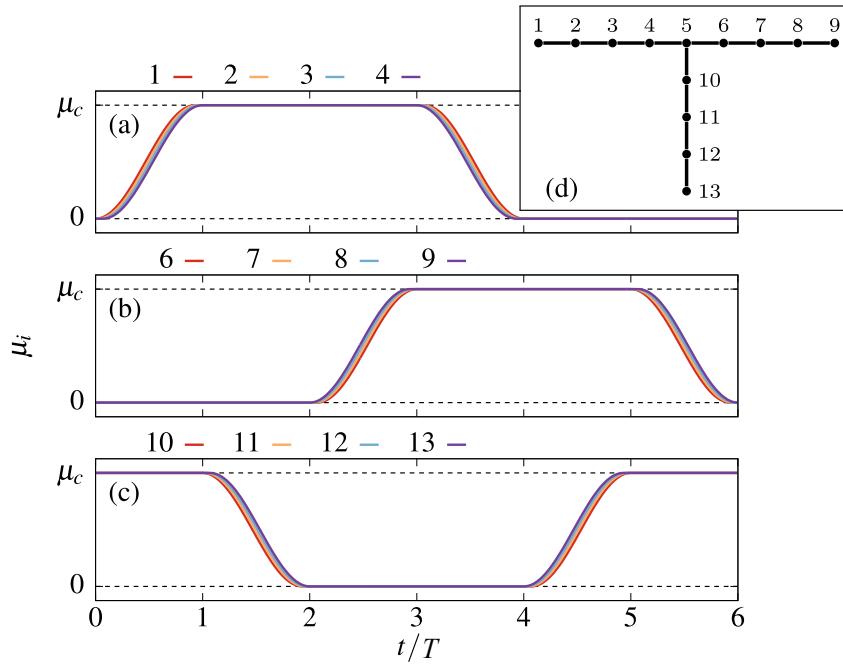
- (i) $t \in (0, T)$ przemieszczanie Γ_1 na środek trójkątowego łączca;
- (ii) $t \in (T, 2T)$ przemieszczanie Γ_1 na koniec pionowego łańcucha;
- (iii) $t \in (2T, 3T)$ przemieszczanie Γ_2 na środek trójkątowego łączca;

Rysunek 9.3: Schematyczny protokół wyplatania Γ_1 oraz Γ_2 na złączu J_{12} .

- (iv) $t \in (3T, 4T)$ przemieszczanie Γ_2 na koniec lewego łańcucha;
- (v) $t \in (4T, 5T)$ przemieszczanie Γ_1 na środek trójkątowego złączu;
- (vi) $t \in (5T, 6T)$ przemieszczanie Γ_1 na koniec prawego łańcucha.

Na rysunku 9.3 przedstawiono schematycznie poszczególne wymienione wyżej kroki wyplatania Γ_1 oraz Γ_2 . Szczegółowe przebiegi funkcji $\mu_i(t)$ zostały przedstawione na rysunku 9.4.

Zmiany parametru $\mu_i(t)$ przedstawione w poprzednim akapicie opisują cykliczną ewolucję hamiltonianu (9.3). W celu badania pełnej dynamiki kwantowej rozwiązywano równanie Schrödingera (TDSE) [patrz równanie (6.1)]. Jako warunek początkowy $|\psi(0)\rangle$ przyjęto stan podstawowy początkowego hamiltonianu $\hat{H}(0)$ [równanie (9.3)]. Równanie Schrödingera rozwiązywano z wykorzystaniem schematu bazującego na wielomianach Czebyszewa, który został opisany w rozdziale 6. Przyjęto krok $\delta t = 0.01$ oraz w rozwinięciu w szereg wielomianów Czebyszewa skorzystano z $M = 10$ pierwszych wyrazów. W pierwszym kroku zbadano cykliczność oraz adiabatyczność ewolucji wyplatania [patrz sekcja 6.3]. Aby ewolucja była cykliczna, straty wiarygodności powinny dążyć do zera $w_{\text{loss}} \rightarrow 0$. Takie zachowanie jest wyraźnie widoczne w zaprezentowanych wynikach na rysunku 9.1(b). Dla czasów $T > 100$ straty wiarygodności stają się pomijalne. Warunkiem koniecznym ewolucji adiabatycznej jest to, że szczelina energetyczna ΔE pomiędzy stanem podstawowym, a wzbudzonym powinna



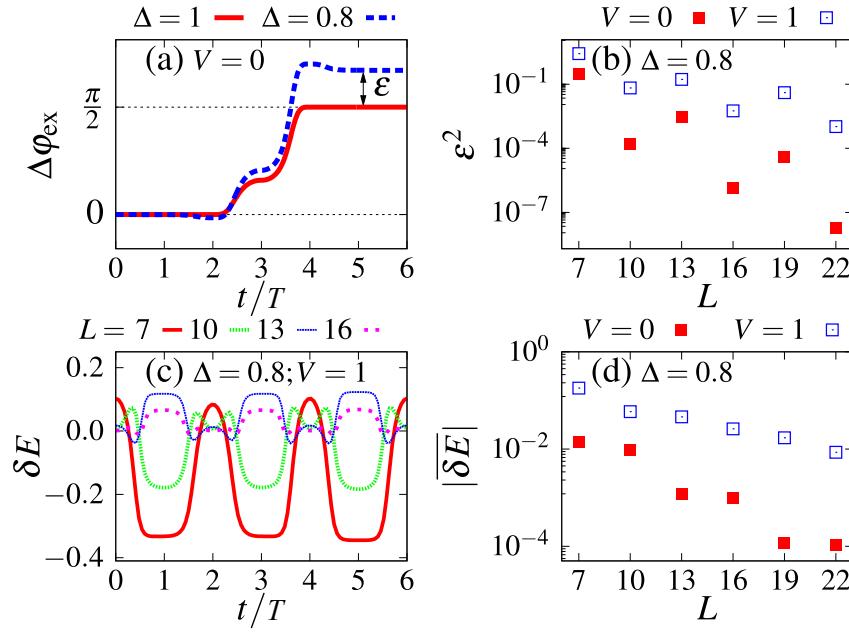
Rysunek 9.4: Standardowy protokół wyplatania – potencjał μ_i w funkcji t/T dla (a) lewego; (b) prawego; (c) pionowego łańcucha trójłączca. (d) Numeracja węzłów. Przykład dla układu o $L = 13$.

być większa od zera na całej ścieżce ewolucji. Należy tutaj przypomnieć, że układ opisany modelem Kitaeva, jest chroniony symetrią parzystości i przejścia pomiędzy stanami z dwóch różnych podprzestrzeni parzystości są niedozwolone. Jako kryterium szczeliny energetycznej przyjęliśmy minimalną szczelinę z dwóch podprzestrzeni

$$\Delta E = \min(E_1^e - E_0^e, E_1^o - E_0^o), \quad (9.7)$$

gdzie $E_n^{e(o)}$ to n -ta energia własna odpowiednio z podprzestrzeni z parzystą (nieparzystą) liczbą cząstek. Wyniki dla ΔE zostały przedstawione na rysunku 9.1(c). Szczelina nie zamknięta się, nawet w przypadku układu z oddziaływaniami wielociałowymi. Przy dostatecznie dużym czasie T , ewolucja powinna być traktowana jak ewolucja adiabatyczna. Jako ostateczny test adiabatyczności ewolucji porównano fazę Aharonova–Anandana ϕ_{AA} z fazą Berry’ego ϕ_{Berry} . Na rysunku 9.1(d) przedstawiono różnicę $\Delta\phi_{\text{AA}} - \Delta\phi_{\text{Berry}}$ w funkcji czasu T . Wydaje się, że ta różnica dla $T \rightarrow \infty$ dąży do zera, nawet dla układu o niezerowych oddzialywaniach wielociałowych, co potwierdza słuszność stosowania przybliżenia adiabatycznego. W dalszych rozważaniach skupiono się tylko i wyłącznie na ewolucji adiabatycznej.

Na rysunku 9.5(a) przedstawiono różnicę fazy wymiany $\Delta\phi_{\text{ex}}$ [równanie (6.31)] pomiędzy poszczególnymi podprzestrzeniami parzystości. Warto tutaj jeszcze raz podkreślić, że faza wy-



Rysunek 9.5: Pojedyncza operacja wyplatania na pojedynczym trójlązczu. Wyniki dla $\mu = 0$. (a) Faza wymiany $\Delta\phi_{\text{ex}}$ w funkcji czasu t/T ($L = 7$); (b) FSS błędu wyplatania ε ; (c) degeneracja stanu podstawowego δE ; (d) FSS uśrednionej degeneracji stanu podstawowego $|\delta E|$.

miany $\Delta\phi_{\text{ex}}$ nie jest niezmiennikiem cechowania i może zależeć od poszczególnych realizacji protokołu. Faza wymiany może stanowić cenną wskazówkę podczas analizy danej realizacji protokołu. Ta faza była analogicznie stosowana m.in. w następujących pracach [112, 199, 200]. Dla $\Delta = 1$, w przypadku bez oddziaływań wielociąłowych, MZM są zlokalizowane na pojedynczych węzłach sieci, są przestrzennie rozseparowane i nie przekrywają się nawet dla układów o skończonej liczbie węzłów. Dla takiego przypadku $\Delta\phi_{\text{Berry}} = \frac{\pi}{2}$, co perfekcyjnie zgadza się z przedstawionym wynikiem na rysunku 9.5(a) [patrz $\Delta\phi_{\text{ex}}$ na końcu ewolucji dla $t = 6T$]. W przypadku kiedy $\Delta \neq 1$, MZM przekrywają się, a otrzymana faza $\Delta\phi_{\text{Berry}}$ jest odchylona od wartości $\frac{\pi}{2}$ o pewien błąd wyplatania $\varepsilon = \Delta\phi_{\text{Berry}} - \frac{\pi}{2}$. Ten błąd ε jest efektem skończonego rozmiaru, co zostało rozpoznane w skalowaniu rozmiarowym (FSS) na rysunku 9.5(b). W przypadku nieskończonego układu $L \rightarrow \infty$, kiedy MZM są całkowicie rozseparowane, wydaje się, że błąd wyplatania ε zanika do zera.

Z przekrywaniem MZM na skończonym układzie, związane jest pewne rozszczepienie energetyczne δE związane ze zniesieniem degeneracji stanu podstawowego. Brak perfekcyjnej degeneracji $\delta E \neq 0$ powoduje pojawienie się w układzie fazy dynamicznej $\Delta\phi_{\text{dyn}} \neq 0$. Na rysunku 9.5(c) przedstawiono, jak rozszczepienie δE zmienia się w czasie ewolucji t/T dla różnych rozmiarów układu. Wraz ze wzrostem rozmiaru układu δE maleje. W celu do-

kładniejszego przedyskutowania rozszczepienia δE , policzono uśrednione rozszczepienie po całej ewolucji, korzystając z następującego wzoru

$$\overline{\delta E} = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} dt \delta E(t), \quad (9.8)$$

gdzie \mathcal{T} to całkowity czas ewolucji (w przypadku pojedynczej operacji wyplatania $\mathcal{T} = 6T$). Taka uśredniona wielkość $\overline{\delta E}$ związana jest bezpośrednio z różnicą faz dynamicznych $\Delta\phi_{\text{dyn}} = \mathcal{T}\overline{\delta E}$. Na rysunku 9.5(d) przedstawiono skalowanie rozmiarowe uśrednionego rozszczepienia energii $\overline{\delta E}$. Zarówno dla układu z oddziaływaniami jak i bez oddziaływań wielociałowych, $\overline{\delta E}$ zanika niemal wykładniczo wraz z rosnącym rozmiarem układu L .

Niezerową wartość błędu wyplatania ϵ można wykorzystać do realizacji bramki fazowej bazującej na fazie geometrycznej. Równocześnie przy niezerowej wartości ϵ w układzie pojawia się niezerowa faza dynamiczna, co nie jest korzystne dla implementacji bramki fazowej. Problem fazy dynamicznej udało się rozwiązać, co zostanie przedstawione w kolejnej sekcji.



9.2 Realizacja bramki fazowej

W celu pokazania, że fazę dynamiczną można wyeliminować inaczej niż przez degenerację $\delta E = 0$, rozpisano jakie czynniki fazowe pojawiają się po pojedynczej wymianie częstek MZM . Stany bazowe qubitu zrealizowanego na układzie dwóch trójłączów J_{12} oraz J_{34} przedstawiono w równaniu (9.1) oraz (9.2). Te stany nabiorą odpowiednio: fazy geometrycznej oraz dynamicznej na poszczególnych złączach:

$$|0\rangle = |ee\rangle \rightarrow e^{i\phi_{\text{dyn}}^{e,J_{12}}} e^{i\phi_{\text{dyn}}^{e,J_{34}}} e^{i\phi_{\text{geo}}^{e,J_{12}}} e^{i\phi_{\text{geo}}^{e,J_{34}}} |ee\rangle, \quad (9.9)$$

$$|1\rangle = |oo\rangle \rightarrow e^{i\phi_{\text{dyn}}^{o,J_{12}}} e^{i\phi_{\text{dyn}}^{o,J_{34}}} e^{i\phi_{\text{geo}}^{o,J_{12}}} e^{i\phi_{\text{geo}}^{o,J_{34}}} |oo\rangle. \quad (9.10)$$

W celu wyeliminowania problemu fazy dynamicznej, części dotyczące faz dynamicznych na obu stanach bazowych powinny być równe

$$\phi_{\text{dyn}}^{e,J_{12}} + \phi_{\text{dyn}}^{e,J_{34}} = \phi_{\text{dyn}}^{o,J_{12}} + \phi_{\text{dyn}}^{o,J_{34}}, \quad (9.11)$$

co dalej prowadzi do następującego równania

$$\Delta\phi_{\text{dyn}}^{J_{12}} = -\Delta\phi_{\text{dyn}}^{J_{34}}. \quad (9.12)$$

W powyższym równaniu skorzystaliśmy z definiowanych w sekcji 6.3 różnicę faz z poszczególnych podprzestrzeni z parzystą i nieparzystą liczbą częstek na poszczególnych złączach J_{12}

oraz J_{34} . Różnica faz dynamicznych na poszczególnych złączach może być równa zero lub przeciwna względem siebie. To eliminuje problem fazy dynamicznej wektorów bazowych qubitu przy wykonywaniu operacji wyplatania.

W celu implementacji bramki fazowej, która będzie bazować na fazie geometrycznej (bardziej precyzyjnie na błędzie wyplatania ϵ) przyjęto następujące warunki:

1. każde złącze J_{12}, J_{34} musi zawierać *nieparzystą liczbę węzłów*, te złącza muszą być identyczne;
2. potencjał $\mu_i(t)$ na jednym ze złącz należy wybrać na *przeciwny* względem potencjału na drugim złączu;
3. operację wyplatania należy wykonać na każdym złączu *dwukrotnie* [patrz rysunek 9.2(b)].

Poniżej zostanie wyjaśniona geneza tych warunków. Na rysunku 9.6(a) przedstawiono fazę wymiany $\Delta\phi_{\text{ex}}(t)$ dla podwójnej operacji wyplatania dla wspomnianych trójzłącz J_{12}, J_{34} , gdzie potencjał $\mu_i(t)$ sterujący granicami obszaru topologicznego na złączu J_{34} wybrano na przeciwny $\mu_i(t) \rightarrow -\mu_i(t)$ względem potencjału na pierwszym złączu J_{12} . Zmiana potencjału chemicznego nie wpływa na otrzymany wynik fazy wymiany, a po podwójnym wyplataniu faza geometryczna, łącznie z błędem wyplatania ϵ , podwaja się

$$\Delta\bar{\phi}_{\text{Berry}}^{J_{12}} = \Delta\bar{\phi}_{\text{Berry}}^{J_{34}} = \pi + 2\epsilon. \quad (9.13)$$

Symboliem $\bar{\cdot}$ (nadkreślenie) oznaczono fazy dla podwójnej operacji wyplatania.

Na rysunku 9.6(b) przedstawiono rozszczepienia energii δE dla poszczególnych złącz J_{12}, J_{34} . Rozszczepienia energii na poszczególnych złączach są przeciwe względem siebie $\delta E_{J_{12}} = -\delta E_{J_{34}}$. W konsekwencji prowadzi to do spełnienia równania (9.12) — różnice faz dynamicznych na poszczególnych trójzłączach są przeciwe $\Delta\phi_{\text{dyn}}^{J_{12}} = -\Delta\phi_{\text{dyn}}^{J_{34}}$. Ta ostatnia równość eliminuje problem fazy dynamicznej z qubitu opartego na *MZM*. W celu wyjaśnienia, dlaczego ta równość jest spełniona przy przyjętych założeniach 1–3, napisano jawną postać hamiltonianów $\hat{H}_{J_{12}}, \hat{H}_{J_{34}}$ opisujących poszczególne złącza J_{12}, J_{34} z podziałem na część wspólną $\hat{H}_0(\Delta_{ij})$ oraz na część którą się różnią (hamiltoniany) – określoną przez znak

przy protokole $\mu_i(t)$:

$$\hat{H}_{J_{12}}(\Delta_{ij}) = \hat{H}_0(\Delta_{ij}) + \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \tilde{n}_i, \quad (9.14)$$

$$\hat{H}_{J_{34}}(\Delta_{ij}) = \hat{H}_0(\Delta_{ij}) - \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \tilde{n}_i. \quad (9.15)$$

W powyższych równaniach podkreślono przeciwny znak potencjału $\mu_i(t)$ na poszczególnych złączach. Część wspólna $\hat{H}_0(\Delta_{ij})$ to odpowiednio każda część hamiltonianu (9.3) wyłączając część związaną z protokołem $\mu_i(t)$. Łatwo zauważyc, że dla nieparzystych rozmiarów układu L , trójzłącze tworzy dwudzielną sieć — można ponumerować węzły sieci $\langle i, j \rangle$ w taki sposób, że gdy i jest parzyste to j jest nieparzyste. Następnie rozważono standardową transformację Shiba'y (częstka–dziura) [201], z założeniem nieparzystego L^{I}

¹Dowód można znaleźć w dodatku B.

$$U_{\text{sh}} a_i U_{\text{sh}}^\dagger = (-1)^i a_i^\dagger, \quad (9.16)$$

gdzie transformacja unitarna U_{sh} jest następującej postaci:^I

$$U_{\text{sh}} = (a_L^\dagger - a_L)(a_{L-1}^\dagger + a_{L-1}) \cdots (a_2^\dagger + a_2)(a_1^\dagger - a_1), \quad (9.17)$$

$$U_{\text{sh}} U_{\text{sh}}^\dagger = U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}} = \mathbb{1}. \quad (9.18)$$

Operator U_{sh} wygodnie jest przedstawić w bazie operatorów Majorany^I

$$U_{\text{sh}} = (i\gamma_L^-) \gamma_{L-1}^+ \cdots \gamma_2^+ (i\gamma_1^-). \quad (9.19)$$

Hamiltoniany opisujące trójzłącza J_{12}, J_{34} są połączone ze sobą za pomocą transformacji U_{sh} w następujący sposób^I

$$U_{\text{sh}} \hat{H}_{J_{12}}(\Delta_{ij}) U_{\text{sh}}^\dagger = \hat{H}_{J_{34}}(\Delta_{ij}^*). \quad (9.20)$$

Operator parzystości [równanie (2.11)] zmienia znak po takiej transformacji U_{sh}^{I}

$$U_{\text{sh}} \mathcal{P} U_{\text{sh}}^\dagger = -\mathcal{P}. \quad (9.21)$$

Następnie rozważono stan własny hamiltonianu $\hat{H}_{J_{12}}(\Delta_{ij})$:

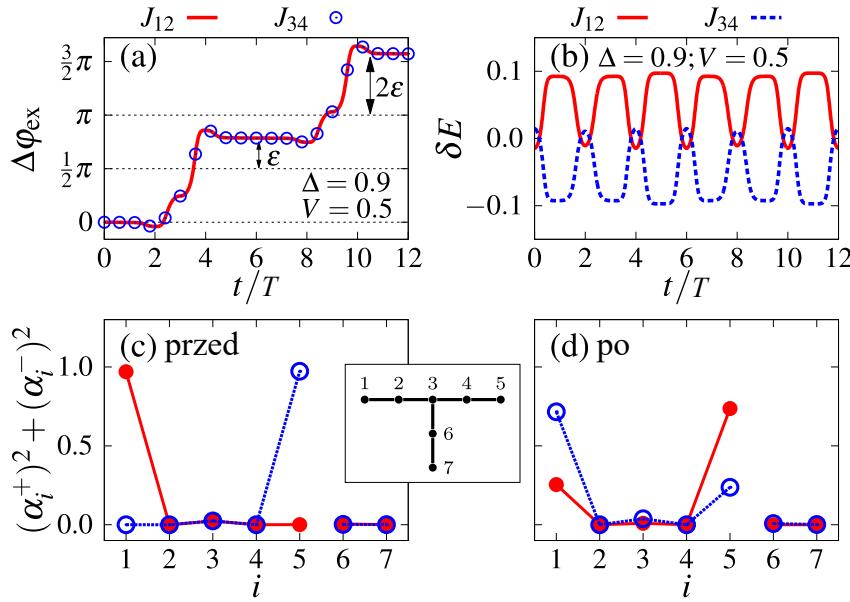
$$\hat{H}_{J_{12}} |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (9.22)$$

$$\mathcal{P} |n\rangle = p_n |n\rangle. \quad (9.23)$$

Można pokazać, że stan $U_{\text{sh}} |n\rangle$ jest stanem własnym hamiltonianu $\hat{H}_{J_{34}}(\Delta_{ij}^*)$, ale o przeciwniej parzystości względem parzystości stanu $|n\rangle$:^I

$$\hat{H}_{J_{34}}(\Delta_{ij}^*) U_{\text{sh}} |n\rangle = E_n U_{\text{sh}} |n\rangle, \quad (9.24)$$

$$\mathcal{P} U_{\text{sh}} |n\rangle = -p_n U_{\text{sh}} |n\rangle. \quad (9.25)$$



Rysunek 9.6: (a)–(b) Podwójne wyplatanie MZM . Wyniki dla $\mu = 0$, $\mu_c = 4$ oraz -4 odpowiednio dla trójlązca J_{12} oraz J_{34} . (a) Faza wymiany $\Delta\phi_{\text{ex}}(t)$ dla podwójnej operacji wyplatania. (b) Rozszczepienia energetyczne δE na poszczególnych złączach w czasie ewolucji t/T . (c)–(d) Rozkłady przestrzenne MZM odpowiednio (c) przed oraz (d) po pojedynczym protokole wyplatania. Wyniki dla $\Delta = 0.8$, $V = 0$, $L = 7$, $\mu = 0$.

Z tego wynika, że hamiltoniany opisujące poszczególne złącza J_{12} , J_{34} mają takie same spektrum energetyczne, ale z zamienionymi parzystościami poszczególnych poziomów energetycznych. Zamienione parzystości, tłumaczą otrzymane wyniki na rysunku 9.6(b), i jednocześnie prowadzą do spełnienia równania (9.12) na całej ścieżce ewolucji.

Pozostało wyjaśnić ostatni podpunkt 3 — podwójne wyplatanie. Podwójna wymiana MZM będzie odpowiadać działaniu bramki fazowej $R(\theta)$ na stan kwantowy qubitu $|\psi\rangle = A_0|0\rangle + A_1|1\rangle$, gdzie $|A_0|^2$ i $|A_1|^2$ odpowiadają prawdopodobieństwom pomiaru stanu kwantowego odpowiednio w stanie $|0\rangle$ i $|1\rangle$, co do nieistotnej fazy globalnej χ ¹

¹Dowód można znaleźć w dodatku B.

$$|\psi(2\mathcal{T})\rangle = e^{i\chi} R(\theta) |\psi(0)\rangle, \quad (9.26)$$

gdzie odpowiednio $\chi = \bar{\phi}_{\text{dyn}}^{e,J_{12}} + \bar{\phi}_{\text{dyn}}^{e,J_{34}} + \bar{\phi}_{\text{geo}}^{e,J_{12}} + \bar{\phi}_{\text{geo}}^{e,J_{34}}$ to nieistotna część fazy globalnej, $R(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$ to bramka fazowa. Faza θ bramki fazowej wynosi

$$\theta = -\Delta\bar{\phi}_{\text{dyn}}^{o,J_{12}} - \Delta\bar{\phi}_{\text{dyn}}^{o,J_{34}} - \Delta\bar{\phi}_{\text{geo}}^{o,J_{12}} - \Delta\bar{\phi}_{\text{geo}}^{o,J_{34}} = -2\pi - 4\epsilon \rightarrow -4\epsilon. \quad (9.27)$$

Skorzystano tutaj z równania (9.12) oraz (9.13). Pominięto również czynnik fazowy 2π , który nie jest istotny do opisu działania bramki fazowej $R(\theta)$, ponieważ istotne znaczenie ma jedy-

nie różnica faz modulo 2π pomiędzy stanami bazowymi qubitu.

Następnie wykorzystano algorytm opisany w rozdziale 5 do generowania struktury przestrzennej MZM na całej ścieżce wyplatania. Generowano współczynniki α_i dla każdego chwilowego hamiltonianu $\hat{H}(t)$ dla protokołu pojedynczej wymiany MZM . Dla przypomnienia, algorytm polegał na znalezieniu operatorów $\Gamma_n = \sum_i \alpha_{ni} \gamma_i$, dla których relacja komutacji $[\hat{H}, \Gamma_n] = 0$ była jak *najbardziej* spełniona, w sensie minimalizacji kwadratu normy $\|\Gamma_n - \bar{\Gamma}_n\|^2 = 0$ [równanie (5.6)]. Operatory będące dowolną kombinacją liniową operatorów spełniających wspomnianą relację komutacji, również spełniają tę relację. Zakładając, że w układzie mogą znajdować się tylko dwie MZM : Γ_1, Γ_2 , można rozważyć następujący obrót $\mathcal{O}(\omega)$ w którym relacja komutacji jest niezmiennicza

$$\vec{\Gamma}' = \mathcal{O}(\omega) \vec{\Gamma}, \quad (9.28)$$

gdzie

$$\vec{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}. \quad (9.29)$$

Oczywiście jest, że jeśli operatory $\vec{\Gamma}$ komutują z hamiltonianem $[\hat{H}, \vec{\Gamma}] = 0$, to obrócone operatory $\vec{\Gamma}'$ również komutują z hamiltonianem $[\hat{H}, \vec{\Gamma}'] = 0$. Z tego wynika, że współczynniki α_{i1}, α_{i2} mogą być zdefiniowane dla dowolnej wartości kąta obrotu ω . Jako warunek początkowy, dla czasu $t = 0$, wybrano taki kąt ω , że maksimum współczynników dla Γ_1, Γ_2 odpowiadało lokalizacji Γ_1 na początku lewego drutu, a Γ_2 na końcu prawego drutu trójzłącza [patrz rysunek 9.6(c)]. Następnie dla każdego kroku ewolucji generowano współczynniki α_{in} szukając takiego kąta obrotu $\omega(t)$, który minimalizował następujący kwadrat odległości operatorów

$$\|\vec{\Gamma}(t + \delta t) - \vec{\Gamma}(t)\|^2 = \sum_i \sum_n [\alpha_{ni}(t + \delta t) - \alpha_{ni}(t)]^2. \quad (9.30)$$

W przypadku kiedy MZM są ścisłymi całkami ruchu, takie podejście odtwarza standardową wymianę MZM [patrz sekcja 3.1]:

$$\Gamma_1(\mathcal{T}) = \pm \Gamma_2(0), \quad (9.31)$$

$$\Gamma_2(\mathcal{T}) = \mp \Gamma_1(0), \quad (9.32)$$

co jest równoważne następującemu obrotowi $\vec{\Gamma}(\mathcal{T}) = \mathcal{O}(\pm \frac{\pi}{2}) \vec{\Gamma}(0)$. Jak się okazuje można to uogólnić na przypadek, kiedy MZM przekrywają się podczas wyplatania, gdy pojawia się niezerowy błąd wyplatania ε . Taka ogólna cykliczna ewolucja MZM może zostać zaprezen-

towana za pomocą następującego równania

$$\vec{\Gamma}(\mathcal{T}) = \mathcal{O}(\Delta\phi_{\text{Berry}})\vec{\Gamma}(0). \quad (9.33)$$

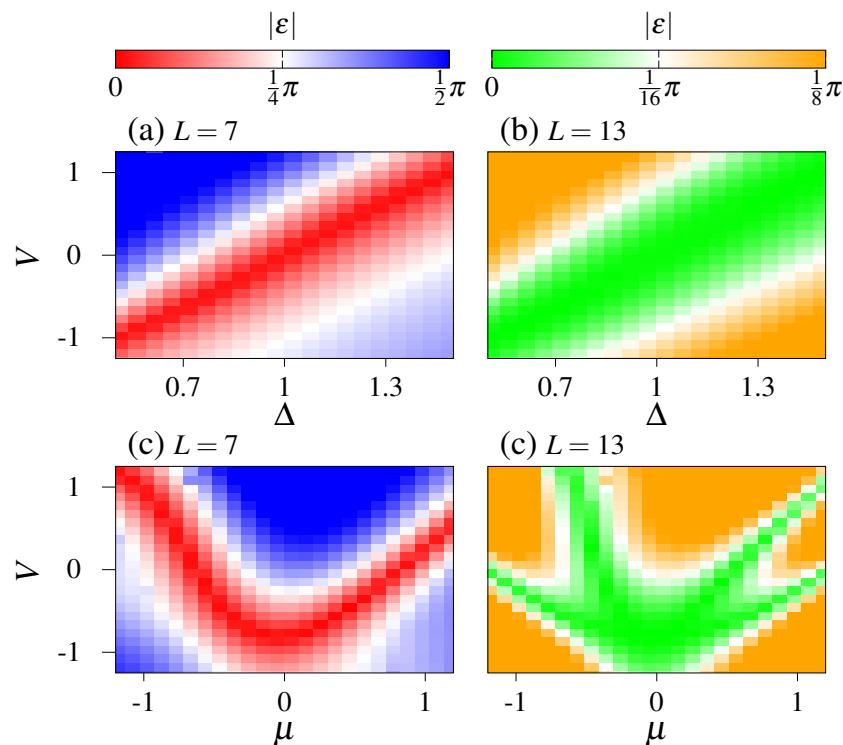
Po takim wyplataniu dla $\Delta\phi_{\text{Berry}} \neq \pm\frac{\pi}{2}$, nie można procesu rozumieć jako wymiany MZM , ponieważ po jego zakończeniu $\Gamma_1(\mathcal{T})$ staje się liniową kombinacją $\Gamma_1(0)$ oraz $\Gamma_2(0)$ — zobacz rysunki 9.6(c)–(d). To samo dotyczy drugiej MZM $\Gamma_2(\mathcal{T})$.



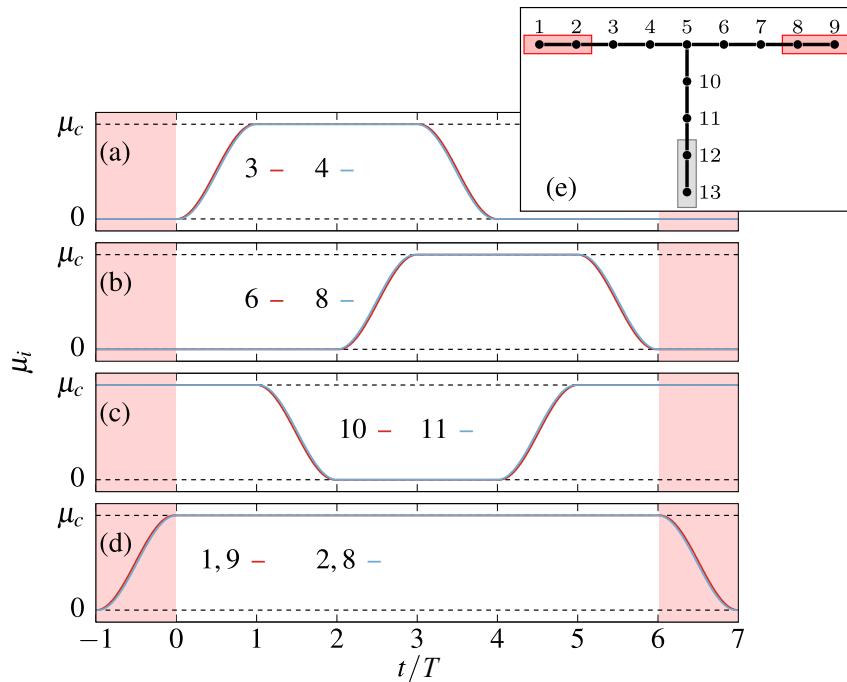
Zestaw uniwersalnych bramek kwantowych nie musi zawierać uniwersalnej bramki fazowej $R(\theta)$ dla dowolnego kąta θ . Wystarczy, aby ten zbiór zawierał $R(\frac{\pi}{4})$ dla $\theta = \frac{\pi}{4}$ [14]. W przedstawionej implementacji bramki fazowej na bazie fazy geometrycznej, należałoby skalibrować złącza w taki sposób, aby błąd wyplatania wynosił $\epsilon = \pm\frac{\pi}{16}$. Błąd wyplatania silnie zależy od rozmiaru układu, co pokazano na rysunku 9.5(b). Na rysunku 9.7 przedstawiono, jak zależy błąd wyplatania ϵ od parametrów hamiltonianu (9.3). Na rysunkach 9.7(a)–(b) przedstawiono zależność $|\epsilon|$ w funkcji oddziaływań V oraz parametru nadprzewodnictwa Δ , a na rysunkach 9.7(c)–(d) przedstawiono zależność $|\epsilon|$ w funkcji oddziaływań V oraz potencjału μ . Kontrola nad wartością Δ lub V w rzeczywistych eksperymentach może być problematyczna, ale w przypadku kontroli μ taka manipulacja jest wykonalna w prawdziwych realizacjach tego układu. Za pomocą zmian potencjału chemicznego można kalibrować wartość błędu wyplatania ϵ .

9.3 Kalibracja bramki fazowej

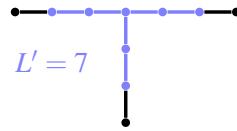
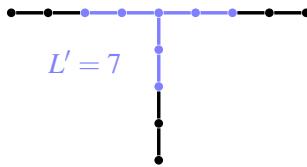
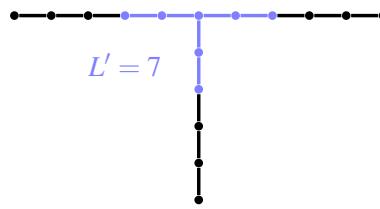
Do tej pory zbadano układ, który nadaje się tylko i wyłącznie do realizacji bramki fazowej. Przyczyną tego są efekty rozmiarowe — przekrywanie się MZM . To przekrywanie było źródłem błędu wyplatania ϵ , ale równocześnie dla przypadku przekrywania się MZM , nie mamy gwarancji ochrony topologicznej i nie możemy zrealizować w *bezpieczny* sposób wszystkich operacji z grupy warkoczowej \mathfrak{B}_M . W celu zagwarantowania ochrony topologicznej, MZM powinny być odseparowane przestrzennie jak to tylko możliwe ($L \rightarrow \infty$). Kiedy ten warunek jest spełniony, podwójna wymiana MZM , należących do tego samego trójłączca odpowiada operacji bramki Z [patrz rysunek 9.2(a)]. W celu realizacji bramki fazowej opisanej w poprzedniej sekcji, najpierw należałoby zbliżyć do siebie MZM na skońzoną odległość na obu trójłączach J_{12}, J_{34} (równocześnie muszą być spełnione wszystkie warunki wspomniane w pkt. 1–3 w sekcji 9.2). Zasadę działania bramki fazowej schematycznie przedstawiono na rysunku 9.2(b). W celu symulacji bramki fazowej zmodyfikowano potencjał $\mu_i(t)$ tak, aby w czasie ewolucji uwzględniony był proces zbliżania i oddalania MZM . Nowy zmodyfikowany potencjał przedstawiono na rysunku 9.8. Zaciennowanym obszarem na wykresie



Rysunek 9.7: Błąd wyplatania ϵ (odchylenia fazy $\Delta\phi_{\text{Berry}}$ od $\frac{\pi}{2}$) w funkcji parametrów hamiltonianu (9.3) układu. (a)–(b) ϵ w funkcji V oraz Δ dla $\mu = 0$ odpowiednio dla $L = 7$ oraz 13 . (c)–(d) ϵ w funkcji V oraz μ dla $\Delta = 0.6$ odpowiednio dla $L = 7$ oraz 13 .



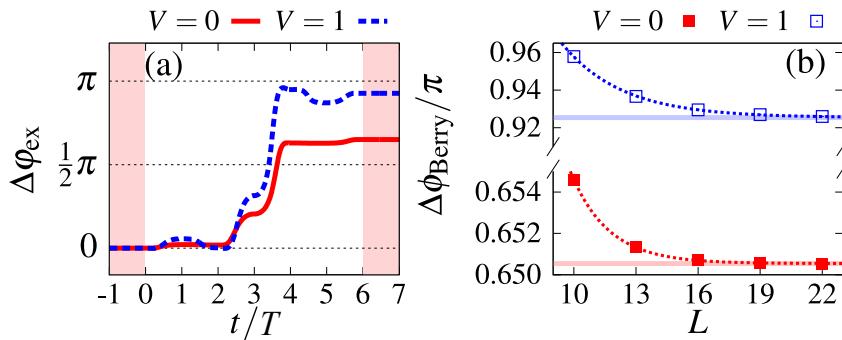
Rysunek 9.8: Rozszerzony protokół wyplatania. Dla czasu $t \in [-T, 0]$ MZM są zbliżane do siebie, a dla czasu $t \in [6T, 7T]$ są oddalone na początkowe pozycje. (a)–(d) Potencjały μ_i w funkcji t/T odpowiednio dla (a) lewego, (b) prawego, (c) pionowego łańcucha trójłączca, które schematycznie zaprezentowano na (e). (d) Potencjał $\mu_i(t/T)$ dla węzłów zaznaczonych czerwonym prostokątem na (e). (e) Numeracja węzłów, szary prostokąt odpowiada *wyłączonym* węzłom, t.j. $\mu_i(t) = \mu_{ic}$.

(a) $L = 10$ (b) $L = 13$ (c) $L = 16$ 

Rysunek 9.9: Skalowanie rozmiarowe trójłączca dla rozszerzonego protokołu wyplatania. Niebieskim kolorem zaznaczono węzły należące do trójłączca ograniczonego – po zbliżeniu MZM . Początkowo MZM znajdują się na krańcach całego łączca, następnie są zbliżane do ograniczonego łączca, wyplatane i przemieszczone na początkowe pozycje.

zaznaczono odpowiednio proces zbliżania MZM ($t \in [-T, 0]$) oraz oddalania ($t \in [6T, 7T]$). Po zbliżeniu MZM , odbywał się proces wyplatania dla trójłączca o ograniczonej wielkości L' . Stosowana metoda numeryczna ogranicza nas do wielkości badanych układów L . W tym celu do zbadania rozszerzonego protokołu wykorzystaliśmy skalowanie rozmiarowe FSS. Na rysunku 9.9 przedstawiono, w jaki sposób dokonywano skalowania rozmiarowego układu L , równocześnie nie zmieniając odległości na jaką zbliżamy MZM – rozmiar ograniczonego łączca L' .

Na rysunku 9.10(a) przedstawiono fazę wymiany $\Delta\phi_{\text{ex}}(t)$ dla układu o całkowitym rozmiarze łączca $L = 19$ i ograniczonego łączca $L' = 7$. Analogicznie jak na rysunku 9.8, na rysunku 9.10(a) cieniowanym obszarem zaznaczono czas dla którego następował proces zbliżania/oddalania MZM . Zmiany fazy podczas zbliżania/oddalania, są bardzo małe, ale nie pomijalne. Przedstawiona implementacja bramki fazowej w sekcji 9.2 bazuje na błędzie wyplatania, ε , który powinieneć mieć skończoną, niezerową wartość również w granicy termodynamicznej $L \rightarrow \infty$, tak długo jak $L' \ll \infty$. W najlepszym, pożądanym przypadku ε powinien



Rysunek 9.10: Wyplatanie MZM , które są zbliżane $t \in [-T, 0]$ oraz oddalone $t \in [6T, 7T]$. Wyniki dla $\Delta = 0.8$, $\mu = 0$, $L' = 7$. (a) Faza wymiany $\Delta\phi_{\text{ex}}$ dla $L = 19$. (b) Skalowanie rozmiarowe fazy geometrycznej $\Delta\phi_{\text{Berry}}$. Poziome (ciągłe) linie odpowiadają ekstrapolowanym wartościom $\Delta\phi_{\text{Berry}}(\infty)$ dla poszczególnych przypadków. Do dopasowania wykorzystano funkcję $\Delta\phi_{\text{Berry}}(L) = a \exp(-bL) + \Delta\phi_{\text{Berry}}(\infty)$ (zaznaczono linią przerywaną).

silnie zależeć od odległości na jaką zbliżamy MZM , czyli na rozmiar ograniczonego złącza L' . Natomiast, ε powinien słabo zależeć od L . W celu badania w jaki sposób ε zależy od rozmiaru układu, ustalono $L' = 7$ na stałe i zmieniano rozmiar układu L zgodnie z rysunkiem 9.9. Na rysunku 9.10(b) przedstawiono skalowanie rozmiarowe otrzymanej fazy Berry'ego $\Delta\phi_{\text{Berry}}$ po zbliżaniu, wyplataniu i oddalaniu MZM . W odróżnieniu od przedstawionych wyników na rysunku 9.5(b), wyniki przedstawione na rysunku 9.10 pokazują, że w takim wypadku błąd wyplatania nie jest efektem rozmiarowym. Wydaje się, że nawet w granicy termodynamicznej $L \rightarrow \infty$, wartość błędu wyplatania jest $\varepsilon \neq 0$, o ile L' jest skończone i MZM przekrywają się podczas procedury wyplatania. Słaba zależność $\Delta\phi_{\text{Berry}}$ od rozmiaru układu L przedstawiona na rysunku 9.10(b) może być związana z tzw. *wyciekiem* MZM do obszaru trójzłączca trywialnego [92, 95, 202].



Przedstawiono minimalny zestaw bramek dla realizacji qubitu bazującego na MZM . Na rysunku 9.2(a) oraz 9.2(c) przedstawiono schematycznie implementację topologiczne chronionych bramek, odpowiednio Z oraz X [76, 203]. W obu przypadkach zakłada się, że MZM nie przekrywają się podczas całej ewolucji. Na rysunku 9.2(b) przedstawiono protokół bramki fazowej $R(\theta)$ zrealizowanej przez wyplatanie przekrywających się MZM . Wspomniana bramka fazowa zależy od fazy geometrycznej, a nie od, jak w przypadku standardowej realizacji, fazy dynamicznej [134]. Opisany protokół bramki fazowej wymaga przekrywających się MZM . Przekrywające się MZM nie są *stricto* całkami ruchu. W takim wypadku,

Podsumowanie

podczas wyplatania qubit nabiera odpowiednio fazy dynamicznej oraz geometrycznej. Przedstawiony protokół w naszej pracy [3] gwarantuje eliminację wspomnianej fazy dynamicznej i równocześnie powoduje, że przesunięcie fazowe tak skonstruowanej bramki fazowej zależy tylko i wyłącznie od fazy geometrycznej. Faza dynamiczna może zostać wyeliminowana, kiedy dwa identyczne trójkątne reprezentujące pojedynczy qubit, opisane są przez hamiltonian z symetrią cząstka–dziura i posiadają nieparzystą liczbę węzłów sieci. Jedyna różnica w tym protokole od topologicznie chronionych operacji polega na zbliżeniu do siebie MZM na skończoną odległość przed procedurą wyplatania. Takie zbliżenie ma zapewnić zniesienie degeneracji na skutek przekrywania się MZM . Po zakończonym wyplataniu, MZM rozszerowane są na początkową, *bezpieczną*, odległość, w której możliwe są operacje z zagwarantowaną ochroną topologiczną. Błąd opisanej bramki fazowej na bazie fazy geometrycznej powinien być mniejszy od standardowej bramki fazowej, której przesunięcie fazowe zależy od fazy dynamicznej, ponieważ faza geometryczna nie zależy jawnie od czasu. Nie zmienia to oczywiście faktu, że realizacja takiej bramki fazowej bazującej na fazie geometrycznej powinna zostać uzupełniona o odpowiednie korekty błędów.



Podsumowanie

W tej pracy przedstawiono wyniki dotyczące wpływu oddziaływań wielociałowych na własności zerowych modów Majorany w rozszerzonym modelu Kitaeva [6]. Poza destruktywnym wpływem oddziaływań na czasy życia zerowych modów Majorany, oddziaływanie mogą zmieniać zakres obszaru topologicznego ze względu na inne parametry modelu, np. ze względu na potencjał chemiczny. Przed przedstawieniem oryginalnych wyników, w części I oraz II usystematyzowano potrzebną wiedzę teoretyczną wymaganą do zrozumienia omawianych wyników w części III. Poniżej podsumowano najważniejsze wyniki oraz wnioski z rozdziałów z części IV.

W rozdziale 7 przedstawiono działanie algorytmu (opisanego w Rozdziale 5) do znajdowania silnych (lub *prawie* silnych), lokalnych, zerowych modów Majorany, na przykładzie modelu Kitaeva z oddziaływaniami wielociałowymi. Stosowany algorytm jest ogólny i umożliwia badanie dowolnych hamiltonianów, w tym z dowolnymi oddziaływaniami wielociałowymi. Zaprezentowany algorytm dobrze odtwarza standardowe wyniki znane w literaturze. Poza identyfikacją obecności *MZM*, stosowany algorytm umożliwia badanie ich struktury przestrzennej. Wprowadzone oddziaływanie wielociałowe mogą zwiększać lokalizację *MZM* na brzegach układu, co skutkuje zmniejszeniem ich wzajemnego przekrywania, co w konsekwencji prowadzi do zwiększenia ich czasu życia.

Podsumując rozdział 8, dalekozasięgowe oddziaływanie bardzo silnie wpływa na czasy życia *MZM*. Co więcej, im dalszy zasięg tych oddziaływań, tym występuje większy destrukcyjny efekt z nimi związany. Takie oddziaływanie może mieć kluczowe znaczenie z punktu widzenia przyszłych materiałów, które będą wykorzystane do realizacji qubitów na bazie *MZM*. W materiałach takie oddziaływanie zanika wykładniczo wraz ze wzrostem odległości. W celu zagwarantowania efektywnych obliczeń kwantowych bazujących na *MZM*, z gwarancją ochrony topologicznej, należy ograniczać dalekozasięgowe oddziaływanie.

**Podsumowanie
oraz wnioski**

Rozdział 7

Rozdział 8

Rozdział 9 W rozdziale 9 przedstawiono konstrukcję bramki fazowej, która jest ogólna i aplikowalna dla każdego modelu opisanego hamiltonianem z symetrią cząstka–dziura. Kluczowym zjawiskiem, jakie jest wykorzystywane w tej bramce fazowej, jest przekrywanie się MZM . W celu realizacji bramki fazowej, protokół wyplatania MZM należy zaaplikować na obu trójłączach J_{12}, J_{34} . Wykonanie protokołu na poszczególnych trójłączach nie musi być zsynchronizowane w czasie, o ile czas trwania ewolucji na każdym złączu jest taki sam. Na jednym ze złączy lokalny potencjał, umożliwiający transport MZM , należy wybrać na przeciwny względem lokalnego potencjału na drugim złączu, co w fizycznym eksperymencie może odpowiadać wybraniu przeciwnych napięć przyłożonych do złączy. Na zrealizowanie takiego protokołu w prawdziwym eksperymencie czeka jeszcze wiele wyzwań i problemów. Trójłączu mogą nie być identyczne, bardziej rzeczywiste hamiltoniany mogą zawierać wyrazy łamiące symetrię cząstka–dziura, potencjały $\mu_i(t)$ mogą mieć różne amplitudy na złączach. Szacunkowy błąd zaprojektowanej bramki fazowej bazującej na fazie geometrycznej powinien być jednak mniejszy niż błąd bramki bazującej na fazie dynamicznej. Przesunięcie fazowe bramki bazującej na fazie geometrycznej zależy tylko i wyłącznie od zmian parametrów układu, w przeciwieństwie do bramki bazującej na fazie dynamicznej, gdzie w tej drugiej przesunięcie fazowe zależy również od czasu trwania ewolucji. Oczywiście, dla opisanego w pracy protokołu, bazującego na fazie geometrycznej, powinny być przeprowadzone dodatkowe korekty błędów [142]. Pokazano, że faza takiej bramki fazowej, bazującej na fazie geometrycznej, zależy od wszystkich parametrów modelu, a w szczególności od oddziaływań wielociałowych, co podkreśla jaką istotną rolę mają tego typu oddziaływanie w niskowymiarowych układach kwantowych.



Zrealizowane cele

Podsumowując, udało się zrealizować wszystkie cele postawione na początku rozprawy doktorskiej. Opracowano nową metodę umożliwiającą identyfikację silnych MZM , w dowolnych układach oddziałujących fermionów. Algorytm został szczegółowo omówiony w rozdziale 5. W rozdziałach 7 oraz 8 algorytm został zaaplikowany do rozwiązania postawionych problemów fizycznych. Zbadany został wpływ oddziaływań wielociałowych na właściwości MZM otrzymując oryginalne wyniki, które zostały opisane w części III. Opracowano również nową implementację bramki fazowej dla qubitu bazującego na MZM z wykorzystaniem fazy geometrycznej co opisano w rozdziale 9.



Należy tutaj skomentować wyzwania oraz potencjalne perspektywy dotyczące wyników przedstawionych w niniejszej rozprawie doktorskiej. Wszelkie badania zbliżają środowisko naukowe do realizacji pierwszego topologicznego komputera kwantowego. W tej dziedzinie postęp naukowy w ostatnich latach jest spory, zarówno od strony teoretycznej, jak i doświadczalnej, jednak to są dopiero początki tych badań i środowisko naukowe będzie czekać jeszcze wiele wyzwań i problemów do rozwiązania.

Wyzwania

Zademonstrowany w pracy doktorskiej nowy algorytm umożliwia badanie silnych *MZM* w układach z oddziaływaniami wielociałowymi. Metoda ta bazuje na dokładnej diagonalizacji i niestety jej wykorzystanie jest ograniczone do badania stosunkowo małych układów (zawierających kilka węzłów). Badanie złożonych układów kwantowych zawierających *MZM*, które mogą posłużyć do przetwarzania kwantowej informacji, nie jest możliwe z wykorzystaniem tej nowej metody.

Realizacja przedstawionej w rozprawie doktorskiej nowej bramki fazowej bazującej na fazie geometrycznej dla qubitu bazującego na *MZM*, powinna posiadać mniejszy błąd niż standardowa bramka fazowa bazująca na fazie dynamicznej. Należy podkreślić, że przedstawiona nowa bramka fazowa, tak samo jak jej standardowa wersja bazująca na fazie dynamicznej, nie jest chroniona topologicznie. Problemem realizacji nowej bramki fazowej mogą być jej warunki, jakie muszą być spełnione do jej poprawnego funkcjonowania. Od strony technicznej konstrukcja dwóch identycznych, monoatomowych trójzłącz może być problematyczna. Problematyckie może być również precyzyjne sterowanie pozycją *MZM* w układzie tych trójzłącz.

Zasadniczym problemem wykorzystania *MZM* do konstrukcji topologicznego komputera kwantowego, jest fakt, że dostępny zestaw topologicznie chronionych bramek nie gwarantuje uniwersalności obliczeń — brakuje chronionej topologicznie bramki fazowej. Znaczącym krokiem, mogłoby być poszukiwanie realizacji bardziej złożonych anyonów od *MZM*, np. anyonów Fibbonaciego [7, 204, 205]. W przeciwieństwie do *MZM*, anyony Fibbonaciego mogą zapewnić zestaw topologicznie chronionych bramek gwarantujących uniwersalność obliczeń.

Część IV:

Dodatki

Dodatek A	Informacje o autorze	113
Dodatek B	Wybrane dowody i wyprowadzenia	115
Dodatek C	Dwuqubitowy układ z zerowymi modami Majorany	127
Akronimy		133
Spis symboli		135
Spis URL		139
Spis rysunków		141
Bibliografia		145

Informacje o autorze

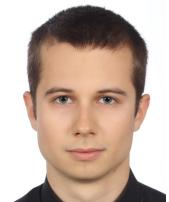
Dane osobowe

Andrzej Więckowski

witryna domowa: andywiecko.github.io

ORCID: 0000-0002-8113-4021

Google Scholar user: [X9qrSQoAAAAJ](https://scholar.google.com/citations?user=X9qrSQoAAAAJ)



Politechnika Wrocławskiego

2018–2020 **Edukacja**

Studia trzeciego stopnia, nauki fizyczne,
promotor: prof. dr hab. Marcin Mierzejewski

Uniwersytet Śląski w Katowicach

2013–2018

2018

Praca magisterska

Dynamics of disordered quantum annealers,
obroniona z wyróżnieniem, promotor: prof. dr hab. Marcin Mierzejewski

Studia drugiego stopnia, fizyka: theoretical physics,
promotor: prof. dr hab. Marcin Mierzejewski

2016–2018

Praca inżynierska

2016

Numeryczne metody analizy dynamiki nanodrutów kwantowych,
obroniona z wyróżnieniem, promotor: Prof. dr hab. Marcin Mierzejewski

Studia pierwszego stopnia, międzywydziałowe indywidualne studia matematyczno przyrodnicze, kierunki: informatyka i fizyka techniczna,
opiekun: dr hab. inż. Michał Mierzwa

2013–2016

Publikacje

Rozprawa doktorska

1. A. Więckowski, M. Mierzejewski, M. Kupczyński, Majorana phase gate based on the geometric phase, *Phys. Rev. B*, 101:014504 (2020);
2. A. Więckowski, A. Ptak, Influence of long-range interaction on Majorana zero modes, *Phys. Rev. B* 100, 144510 (2019);
3. A. Więckowski, M.M. Maśka, M. Mierzejewski, Majorana modes in interacting systems identified by searching for local integrals of motion, *Phys. Rev. Lett.* 120, 040504 (2018);
4. A. Więckowski, S. Deffner, B. Gardas, Disorder-assisted graph coloring on quantum annealers, *Phys. Rev. A* 100, 062304 (2019);
5. K. Jałowiecki, A. Więckowski, P. Gawron, B. Gardas, Parallel in time dynamics with quantum annealers, *arXiv:1909.04929*, w recenzji;
6. A. Więckowski, A. Ptak, Dynamics of quantum annealers – Ising model with transverse field study, w recenzji;
7. A. Więckowski, *Proceedings of the silesian cross-border workshop on applied physics*, Majorana states in the Kitaev model with many-body interactions, ISBN: 978-80-248-3974-5 (2016).

Granty

Wykonawca grantu 2016/23/B/ST3/00647 *Dynamika niejednorodnych 2018–2020 układów kwantowych z oddziaływaniami wielociągowymi*.

Ważniejsze konferencje naukowe

- Mini-symposium on: Recent developments in the theory of topological systems, Lublin, Poland, 2019;
- XIX National Conference on Superconductivity, Bronisławów, Poland, 2019;
- Adiabatic Quantum Computing Conference, Innsbruck, Austria, 2019;
- Majorana modes and beyond, MagTop, Warsaw, Poland, 2019;
- 42th International conference of theoretical physics: 'Correlations and coherence at different scales', Ustroń, Poland, 2018;
- 26th International Conference on Atomic Physics: Summer School, Barcelona, Spain, 2018;
- XVIII National Conference on Superconductivity, Krynica Morska, Poland, 2017;
- Silesian cross-border workshop on applied physics, Ostrava, Czech Republic, 2016;
- 40th International conference of theoretical physics: 'Correlations and coherence at different scales', Ustroń, Poland, 2016.

Wybrane dowody i wyprowadzenia

W tym dodatku zamieszczono dowody i wyprowadzenia wybranych równań zaprezentowanych w rozprawie doktorskiej.

Równanie (2.12)

$$(\gamma_i^\alpha | \gamma_j^\beta) = \text{Tr}(\gamma_i^\alpha \gamma_j^\beta) / \text{Tr}(1) = \text{Tr}\left(\frac{1}{2}[\gamma_i^\alpha, \gamma_j^\beta] + \frac{1}{2}\{\gamma_i^\alpha, \gamma_j^\beta\}\right) / \text{Tr}(1) = \quad (\text{B.1})$$

$$= \frac{1}{2}\text{Tr}(\{\gamma_i^\alpha, \gamma_j^\beta\}) / \text{Tr}(1) = \frac{1}{2}\text{Tr}(2\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}) / \text{Tr}(1) = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \quad (\text{B.2})$$

Korzystając z równania (2.10): $\hat{n}_i = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_i^+ \gamma_i^-)$

Równanie (2.21)

$$\hat{H}_{\text{triv}} = \sum_i \mu_i \hat{n}_i = \frac{1}{2} \sum_i \mu_i (1 - i\gamma_i^+ \gamma_i^-). \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{H}_{\text{topo}} = \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\left(t_{ij}^0 a_i^\dagger a_j + t_{ij}^0 a_i^\dagger a_j^\dagger \right) + \text{H.c.} \right] = \quad (\text{B.4})$$

$$= \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{t_{ij}^0}{4} [(\gamma_i^+ + i\gamma_i^-)(\gamma_j^+ - i\gamma_j^-) + (\gamma_i^+ + i\gamma_i^-)(\gamma_j^+ + i\gamma_j^-)] + \text{H.c.} = \quad (\text{B.5})$$

$$= \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{t_{ij}^0}{4} \left(\gamma_i^+ \gamma_j^+ - i\gamma_i^+ \gamma_j^- + i\gamma_i^- \gamma_j^+ + \gamma_i^- \gamma_j^- + \gamma_i^+ \gamma_j^+ + i\gamma_i^+ \gamma_j^- + i\gamma_i^- \gamma_j^+ - \gamma_i^- \gamma_j^- \right) + \text{H.c.} = \quad (\text{B.6})$$

$$= \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{t_{ij}^0}{4} \left(2\gamma_i^+ \gamma_j^+ + 2i\gamma_i^- \gamma_j^+ \right) + \text{H.c.} = i \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij}^0 \gamma_i^- \gamma_j^+ \quad (\text{B.7})$$

Równanie (2.27)

$$\tilde{n}_i = \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i = \frac{1}{4}(\gamma_{i+1}^+ + i\gamma_i^-)(\gamma_{i+1}^+ - i\gamma_i^-) = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}\gamma_{i+1}^+\gamma_i^- + \frac{i}{4}\gamma_i^-\gamma_{i+1}^+ + \frac{1}{4} = \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\gamma_i^-\gamma_{i+1}^+ \quad (\text{B.9})$$

$$\hat{H}_{\text{topo}}^{\text{chain}} = i t^0 \sum_{i=1}^{L-1} \gamma_i^- \gamma_{i+1}^+ = t^0 \sum_{i=1}^{L-1} (2\tilde{n}_i - 1) = -t^0 \sum_{i=1}^{L-1} \tilde{\mathcal{P}}_i \quad (\text{B.10})$$


Równania

W dowodach skorzystano z równań (3.3), (3.5) oraz (3.6).

(3.8)–(3.11)

$$\tilde{\mathcal{P}}_i |e\rangle_i = |e\rangle_i \quad (\text{B.11})$$

$$(1 - 2\tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i) |e\rangle_i = |e\rangle_i \quad (\text{B.12})$$

$$\tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i |e\rangle_i = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\langle e | i \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i | e \rangle_i = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\|\tilde{a}_i |e\rangle_i\| = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\tilde{a}_i |e\rangle_i = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_i |o\rangle_i = -|o\rangle_i \quad (\text{B.17})$$

$$(1 - 2\tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i) |o\rangle_i = -|o\rangle_i \quad (\text{B.18})$$

$$(1 - \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i) |o\rangle_i = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\tilde{a}_i \tilde{a}_i^\dagger |o\rangle_i = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\langle o | i \tilde{a}_i \tilde{a}_i^\dagger | o \rangle_i = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$\|\tilde{a}_i^\dagger |o\rangle_i\| = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\tilde{a}_i^\dagger |o\rangle_i = 0 \quad (\text{B.23})$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_i (\tilde{a}_i^\dagger |e\rangle_i) = (1 - 2\tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i) \tilde{a}_i^\dagger |e\rangle_i = \tilde{a}_i^\dagger |e\rangle_i - 2\tilde{a}_i^\dagger (1 - \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i) |e\rangle_i = -\tilde{a}_i^\dagger |e\rangle_i \quad (\text{B.24})$$

Wektor $\tilde{a}_i^\dagger |e\rangle_i$ jest wektorem własnym operatora $\tilde{\mathcal{P}}_i$ z wartością własną -1 , a zatem następująca relacja jest prawdziwa

$$\tilde{a}_i^\dagger |e\rangle_i = |o\rangle_i. \quad (\text{B.25})$$

$$\widetilde{\mathcal{P}}_i(\tilde{a}_i|o\rangle_i) = (1 - 2\tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i)\tilde{a}_i|o\rangle_i = +\tilde{a}_i|o\rangle_i \quad (\text{B.26})$$

Wektor $\tilde{a}_i|o\rangle_i$ jest wektorem własnym operatora $\widetilde{\mathcal{P}}_i$ z wartością własną $+1$, a zatem następująca relacja jest prawdziwa

$$\tilde{a}_i|o\rangle_i = |e\rangle_i. \quad (\text{B.27})$$



Równanie (3.25)

$$\mathcal{U} = \exp[\Gamma_i \Gamma_j \omega] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \omega^n (\Gamma_i \Gamma_j)^n = \quad (\text{B.28})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \omega^{2n} (\Gamma_i \Gamma_j)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \omega^{2n+1} (\Gamma_i \Gamma_j)^{2n+1} = \quad (\text{B.29})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \omega^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \omega^{2n+1} \Gamma_i \Gamma_j = \cos \omega + \Gamma_i \Gamma_j \sin \omega \quad (\text{B.30})$$



Równanie (3.26)

$$\mathcal{U}^\dagger \Gamma_i \mathcal{U} = (\cos \omega - \Gamma_i \Gamma_j \sin \omega) \Gamma_i (\cos \omega + \Gamma_i \Gamma_j \sin \omega) = \quad (\text{B.31})$$

$$= \Gamma_i \cos^2 \omega + \Gamma_j \sin \omega \cos \omega + \Gamma_j \sin \omega \cos \omega - \Gamma_i \sin^2 \omega = \quad (\text{B.32})$$

$$= \Gamma_i \cos(2\omega) + \Gamma_j \sin(2\omega) \quad (\text{B.33})$$



Równania (3.32), (3.33)

$$\mathcal{B}_i \mathcal{B}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \Gamma_i \Gamma_{i+1}) \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \Gamma_j \Gamma_{j+1}) = \quad (\text{B.34})$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \Gamma_i \Gamma_{i+1} + \Gamma_j \Gamma_{j+1} + \Gamma_i \Gamma_{i+1} \Gamma_j \Gamma_{j+1}) \stackrel{|i-j|>1}{=} \quad (\text{B.35})$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \Gamma_i \Gamma_{i+1} + \Gamma_j \Gamma_{j+1} + \Gamma_j \Gamma_{j+1} \Gamma_i \Gamma_{i+1}) = \mathcal{B}_j \mathcal{B}_i \quad (\text{B.36})$$

$$\mathcal{B}_i \mathcal{B}_{i+1} \mathcal{B}_i = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \Gamma_i \Gamma_{i+1}) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \Gamma_{i+1} \Gamma_{i+2}) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \Gamma_i \Gamma_{i+1}) \right] = \quad (\text{B.37})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} [1 + \Gamma_i \Gamma_{i+1} + \Gamma_{i+1} \Gamma_{i+2} + \Gamma_i \Gamma_{i+2}] [1 + \Gamma_i \Gamma_{i+1}] = \quad (\text{B.38})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} [1 + \Gamma_i \Gamma_{i+1} + \Gamma_{i+1} \Gamma_{i+2} + \Gamma_i \Gamma_{i+2} + \Gamma_i \Gamma_{i+1} - 1 + \Gamma_{i+2} \Gamma_i - \Gamma_{i+2} \Gamma_{i+1}] = \\ \quad (\text{B.39})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} [2\Gamma_i \Gamma_{i+1} + 2\Gamma_{i+1} \Gamma_{i+2}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Gamma_i \Gamma_{i+1} + \Gamma_{i+1} \Gamma_{i+2}] \quad (\text{B.40})$$

$$\mathcal{B}_{i+1}\mathcal{B}_i\mathcal{B}_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + \Gamma_{i+1}\Gamma_{i+2}] \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + \Gamma_i\Gamma_{i+1}] \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + \Gamma_{i+1}\Gamma_{i+2}] = \quad (\text{B.41})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[1 + \Gamma_i\Gamma_{i+1} + \Gamma_{i+1}\Gamma_{i+2} + \Gamma_{i+2}\Gamma_i][1 + \Gamma_{i+1}\Gamma_{i+2}] = \quad (\text{B.42})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[1 + \Gamma_i\Gamma_{i+1} + \Gamma_{i+1}\Gamma_{i+2} + \Gamma_{i+2}\Gamma_i + \Gamma_{i+1}\Gamma_{i+2} + \Gamma_i\Gamma_{i+2} - 1 + \Gamma_i\Gamma_{i+1}] = \\ \quad (\text{B.43})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[2\Gamma_i\Gamma_{i+1} + 2\Gamma_{i+1}\Gamma_{i+2}] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Gamma_i\Gamma_{i+1} + \Gamma_{i+1}\Gamma_{i+2}] \quad (\text{B.44})$$

$$\mathcal{B}_i\mathcal{B}_{i+1}\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_{i+1}\mathcal{B}_i\mathcal{B}_{i+1} \quad (\text{B.45})$$



Równania (3.43), (3.44) Korzystając z równań (3.1)–(3.3), (3.8)–(3.11) oraz (3.34)

$$\mathcal{B}_2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \Gamma_2\Gamma_3)|ee\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + i(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_1^\dagger)(\tilde{a}_2 + \tilde{a}_2^\dagger)]|ee\rangle = \quad (\text{B.46})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[|ee\rangle - i\tilde{a}_1^\dagger\tilde{a}_2^\dagger|ee\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|ee\rangle - i|oo\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle - i|1\rangle]. \quad (\text{B.47})$$

$$\mathcal{B}_2|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \Gamma_2\Gamma_3)|oo\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + i(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_1^\dagger)(\tilde{a}_2 + \tilde{a}_2^\dagger)]|oo\rangle = \quad (\text{B.48})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[|oo\rangle + i\tilde{a}_1\tilde{a}_2|oo\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|oo\rangle + i\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_1^\dagger\tilde{a}_2^\dagger|ee\rangle] = \quad (\text{B.49})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[|oo\rangle - i\tilde{a}_1\tilde{a}_1^\dagger\tilde{a}_2\tilde{a}_2^\dagger|ee\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|oo\rangle - i(1 - \tilde{a}_1^\dagger\tilde{a}_1)(1 - \tilde{a}_2^\dagger\tilde{a}_2)|ee\rangle] = \quad (\text{B.50})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[|oo\rangle - i|ee\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle - i|0\rangle] \quad (\text{B.51})$$



Równania (3.45), (3.46)

$$\mathcal{B}_2^2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{B}_2(|0\rangle - i|1\rangle) = \frac{1}{2}[|0\rangle - i|1\rangle - i(|1\rangle - i|0\rangle)] = -i|1\rangle \quad (\text{B.52})$$

$$\mathcal{B}_2^2|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{B}_2(|1\rangle - i|0\rangle) = \frac{1}{2}[|1\rangle - i|0\rangle - i(|0\rangle - i|1\rangle)] = -i|0\rangle \quad (\text{B.53})$$



Równania (3.48),

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{B}_1^\dagger |0\rangle = \exp(+i\frac{\pi}{4}) \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2^2 |0\rangle = \exp(+i\frac{\pi}{4}) \mathcal{B}_1(-i) |1\rangle = |1\rangle. \quad (\text{B.54})$$

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{B}_1^\dagger |1\rangle = \exp(-i\frac{\pi}{4}) \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2^2 |1\rangle = \exp(-i\frac{\pi}{4}) \mathcal{B}_1(-i) |0\rangle = -|0\rangle. \quad (\text{B.55})$$

$$Y = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{B}_1^\dagger \quad (\text{B.56})$$

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1 |0\rangle = \exp(-i\frac{\pi}{4}) \mathcal{B}_1^\dagger \mathcal{B}_2 |0\rangle = \exp(-i\frac{\pi}{4}) \mathcal{B}_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle) = \quad (\text{B.57})$$

$$= -i\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \quad (\text{B.58})$$

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1 |1\rangle = \exp(+i\frac{\pi}{4}) \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 |1\rangle = \exp(+i\frac{\pi}{4}) \mathcal{B}_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - i|0\rangle) = \quad (\text{B.59})$$

$$= -i\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \quad (\text{B.60})$$

$$H = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1 \quad (\text{B.61})$$



Równanie (5.1)

$$\bar{\Gamma} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' \Gamma(t') = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' e^{+i\hat{H}t'} \Gamma e^{-i\hat{H}t'} = \quad (\text{B.62})$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' e^{+i\hat{H}t'} \sum_{nm} \langle n | \Gamma | m \rangle |n\rangle \langle m | e^{-i\hat{H}t'} = \quad (\text{B.63})$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{nm} \int_0^t dt' e^{-i(E_m - E_n)t'} \Gamma_{nm} |n\rangle \langle m| = \quad (\text{B.64})$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{nm} \Theta\left(\frac{1}{t} - |E_n - E_m|\right) \Gamma_{nm} |n\rangle \langle m| = \quad (\text{B.65})$$

$$= \sum_{E_n = E_m} \Gamma_{nm} |n\rangle \langle m|. \quad (\text{B.66})$$



Równanie (5.6) Korzystając z własności liniowości iloczynu skalarnego oraz z tożsamości (5.7)

$$\|(\Gamma - \bar{\Gamma})\|^2 = (\Gamma - \bar{\Gamma}|\Gamma - \bar{\Gamma}) = (\Gamma|\Gamma) - (\Gamma|\bar{\Gamma}) - (\bar{\Gamma}|\Gamma) + (\bar{\Gamma}|\bar{\Gamma}) = \quad (B.67)$$

$$= 1 - (\bar{\Gamma}|\bar{\Gamma}) = 1 - \|\bar{\Gamma}\|^2. \quad (B.68)$$



Równanie (5.7) Ostatnia nierówność jest oczywista i wynika z własności przemienności iloczynu skalarnego

$$(\bar{\Gamma}|\Gamma) = (\Gamma|\bar{\Gamma}). \quad (B.69)$$

Następnie udowodniono ostatnią nierówność bez zakładania granicy $\lim_{t \rightarrow \infty}$ — dla dowolnych czasów t (jako Z oznaczono $Z = \text{Tr } \mathbb{1}$):

$$(\bar{\Gamma}|\bar{\Gamma}) = \frac{1}{Z} \text{Tr}(\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}) = \quad (B.70)$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | \left(\sum_{n'm'} \Theta\left(\frac{1}{t} - |E_{n'} - E_{m'}|\right) \Gamma_{n'm'} |n'\rangle \langle m' | \sum_{k'l'} \Theta\left(\frac{1}{t} - |E_{k'} - E_{l'}|\right) \Gamma_{k'l'} |k'\rangle \langle l' | \right) |n\rangle = \quad (B.71)$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{nn'm'k'l'} \Theta\left(\frac{1}{t} - |E_{n'} - E_{m'}|\right) \Theta\left(\frac{1}{t} - |E_{k'} - E_{l'}|\right) \Gamma_{n'm'} \Gamma_{k'l'} \delta_{nn'} \delta_{m'k'} \delta_{l'n} = \quad (B.72)$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{n'm'} \Theta\left(\frac{1}{t} - |E_{n'} - E_{m'}|\right) \Theta\left(\frac{1}{t} - |E_{m'} - E_{n'}|\right) \Gamma_{n'm'} \Gamma_{m'n'} = \quad (B.73)$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{n'm'} \Theta\left(\frac{1}{t} - |E_{n'} - E_{m'}|\right) \Gamma_{n'm'} \Gamma_{m'n'} = (\bar{\Gamma}|\Gamma), \quad (B.74)$$

gdzie skorzystano tutaj z równania (B.65) oraz z własności funkcji Heaviside'a

$$\Theta^2(x) = \Theta(x). \quad (B.75)$$



Równanie (5.17)

$$\bar{\Gamma}^\tau = \int_{-\infty}^{\infty} dt \Gamma(t) \frac{\sin(t/\tau)}{\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{+i\hat{H}t} \sum_{nm} \Gamma_{nm} |n\rangle \langle m| e^{-i\hat{H}t} \frac{\sin(t/\tau)}{\pi t} = \quad (B.76)$$

$$= \sum_{nm} \Gamma_{nm} |n\rangle \langle m| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(E_m - E_n)t} \frac{\sin(t/\tau)}{\pi t} = \quad (B.77)$$

$$= \sum_{nm} \Theta\left(\frac{1}{\tau} - |E_n - E_m|\right) \Gamma_{nm} |n\rangle \langle m| = \sum_{|E_n - E_m| < \frac{1}{\tau}} \Gamma_{nm} |n\rangle \langle m| \quad (B.78)$$



Równanie (5.18)

$$(\Gamma(t)|\Gamma) = \text{Tr}(\Gamma(t)|\Gamma)/\text{Tr}(\mathbb{1}) = \frac{1}{Z} \sum_{n'} \langle n' | \left(e^{+i\hat{H}t} \Gamma e^{-i\hat{H}t} \right) | n' \rangle = \quad (\text{B.79})$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{nm} e^{i(E_m - E_n)t} \Gamma_{nm} \Gamma_{mn} = \frac{1}{Z} \sum_{nm} e^{i(E_m - E_n)t} |\langle n | \Gamma | m \rangle|^2 \quad (\text{B.80})$$

gdzie $Z = \text{Tr } \mathbb{1}$.



Równanie (5.19)

$$(\bar{\Gamma}^\tau|\Gamma) = \frac{1}{Z} \sum_{nm} \Theta\left(\frac{1}{\tau} - |E_n - E_m|\right) |\langle n | \Gamma | m \rangle|^2 = \quad (\text{B.81})$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{nm} |\langle n | \Gamma | m \rangle|^2 \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} d\omega \delta(\omega + E_m - E_n) = \quad (\text{B.82})$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{nm} |\langle n | \Gamma | m \rangle|^2 \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega + E_m - E_n)t} = \quad (\text{B.83})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} (\Gamma(t)|\Gamma) \quad (\text{B.84})$$



Przeprowadzenie dowodu rozpoczęto od policzenia transformaty Fouriera:

**Równanie (5.22),
(5.24) oraz (5.26)**

$$(\Gamma(\omega)|\Gamma)_I = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-|t|/\tau_I} = \int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t} e^{t/\tau_I} + \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-t/\tau_I} = \quad (\text{B.85})$$

$$= \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau_I}} e^{(i\omega + \frac{1}{\tau_I})t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{i\omega - \frac{1}{\tau_I}} e^{(i\omega - \frac{1}{\tau_I})t} \Big|_0^{\infty} = \frac{2\tau_I}{1 + (\omega\tau_I)^2}. \quad (\text{B.86})$$

Z wykorzystaniem tej transformaty Fouriera wykonując proste obliczenia, można pokazać korelację związaną z mechanizmem relaksacji od oddziaływań wielociałowych:

$$(\bar{\Gamma}^\tau|\Gamma)_I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} (\Gamma(t)|\Gamma)_I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} d\omega (\Gamma(\omega)|\Gamma)_I = \quad (B.87)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} d\omega \frac{\tau_I}{1 + (\omega\tau_I)^2} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\tau_I}{\tau}\right) - \frac{1}{\pi} \arctan\left(-\frac{\tau_I}{\tau}\right) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\tau_I}{\tau}\right). \quad (B.88)$$

Analogicznie można obliczyć pełną korelację: uwzględniającą wpływ oddziaływań wielociałowych oraz relaksacji oddziaływania modów Majorany:

$$(\bar{\Gamma}^\tau|\Gamma)_{IM} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} (\Gamma(t)|\Gamma)_{IM} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} d\omega (\Gamma(\omega - \frac{1}{\tau_M})|\Gamma)_I = \quad (B.89)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} d\omega \frac{\tau_I}{1 + [(\omega - \frac{1}{\tau_M})\tau_I]^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \arctan\left[\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_M}\right)\tau_I\right] + \arctan\left[\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_M}\right)\tau_I\right] \right\}. \end{aligned} \quad (B.90) \quad (B.91)$$

Równanie (7.2) Korzystając z założenia, że $\hat{H}_{ij} \in \mathbb{R}$ i postaci operatorów γ_i^\pm [równania (2.4) oraz (2.5)]:

$$(\bar{\gamma}_i^+|\bar{\gamma}_j^-) = (\bar{a}_i + \bar{a}_i^\dagger|i(\bar{a}_j - \bar{a}_j^\dagger)) = i((\bar{a}_i|\bar{a}_j) - (\bar{a}_i|\bar{a}_j^\dagger) + (\bar{a}_i^\dagger|\bar{a}_j) - (\bar{a}_i^\dagger|\bar{a}_j^\dagger)) = \quad (B.92)$$

$$= i((\bar{a}_i|\bar{a}_j) - (\bar{a}_i|\bar{a}_j)^* + (\bar{a}_i^\dagger|\bar{a}_j) - (\bar{a}_i^\dagger|\bar{a}_j)^*) = 0. \quad (B.93)$$

Równanie (7.15)

$$1 = \langle n|\bar{\Gamma}^2|n\rangle = \langle n| \left(\sum_{n',m':E_{n'}=E_{m'}} \Gamma_{n'm'} |n'\rangle\langle m'| \right) \left(\sum_{n'',m'':E_{n''}=E_{m''}} \Gamma_{n''m''} |n''\rangle\langle m''| \right) |n\rangle = \quad (B.94)$$

$$= \sum_{n',m':E_{n'}=E_{m'}} \sum_{n'',m'':E_{n''}=E_{m''}} \Gamma_{n'm'} \Gamma_{n''m''} \delta_{nn'} \delta_{m'n''} \delta_{m''n} = \quad (B.95)$$

$$= \sum_{m:E_n=E_m} \Gamma_{nm} \Gamma_{mn} = \sum_{m:E_n=E_m} |\Gamma_{nm}|^2 \quad (B.96)$$

Skorzystano z postaci transformacji U_{sh} z równania (9.19)

Równania (9.16)–(9.18)

$$U_{\text{sh}} = (\text{i}\gamma_L^-)\gamma_{L-1}^+ \cdots \gamma_2^+(\text{i}\gamma_1^-) \quad (\text{B.97})$$

i równania sprzężonego

$$U_{\text{sh}}^\dagger = (-\text{i}\gamma_1^-)\gamma_2^+ \cdots \gamma_{L-1}^+(-\text{i}\gamma_L^-) \quad (\text{B.98})$$

do pokazania, że jest to transformacja unitarna:

$$U_{\text{sh}} U_{\text{sh}}^\dagger = (\text{i}\gamma_L^-)\gamma_{L-1}^+ \cdots \gamma_2^+(\text{i}\gamma_1^-)(-\text{i}\gamma_1^-)\gamma_2^+ \cdots \gamma_{L-1}^+(-\text{i}\gamma_L^-) = \mathbb{1} \quad (\text{B.99})$$

$$U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}} = \mathbb{1}, \quad (\text{B.100})$$

gdzie skorzystano tutaj z własności $(\gamma_i^\alpha)^2 = \mathbb{1}$. Do transformacji operatorów kreacji i anihilacji warto skorzystać z ich postaci w bazie operatorów Majorany $a_i = \frac{1}{2}(\gamma_i^+ - \text{i}\gamma_i^-)$, $a_i^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_i^+ + \text{i}\gamma_i^-)$. Poniżej pokazano, w jaki sposób transformują się operatory Majorany.

$$U_{\text{sh}} \gamma_i^+ U_{\text{sh}}^\dagger = (\text{i}\gamma_L^-)\gamma_{L-1}^+ \cdots \gamma_2^+(\text{i}\gamma_1^-)\gamma_i^+(-\text{i}\gamma_1^-)\gamma_2^+ \cdots \gamma_{L-1}^+(-\text{i}\gamma_L^-) = \quad (\text{B.101})$$

$$= \begin{cases} (-1)^L = -1, & i \text{ nieparzyste} \\ (-1)^{i-1}(-1)^{L-i} = 1, & i \text{ parzyste} \end{cases} = (-1)^i \gamma_i^+, \quad (\text{B.102})$$

gdzie skorzystano tutaj z założenia, że L jest nieparzyste oraz z reguł antykomutacji operatorów Majorany $\{\gamma_i^\alpha, \gamma_j^\beta\} = 2\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$. Analogicznie można pokazać transformację operatora γ_i^- :

$$U_{\text{sh}} \gamma_i^- U_{\text{sh}}^\dagger = (\text{i}\gamma_L^-)\gamma_{L-1}^+ \cdots \gamma_2^+(\text{i}\gamma_1^-)\gamma_i^-(-\text{i}\gamma_1^-)\gamma_2^+ \cdots \gamma_{L-1}^+(-\text{i}\gamma_L^-) = \quad (\text{B.103})$$

$$= \begin{cases} (-1)^{L-i}(-1)^{i-1} = 1, & i \text{ nieparzyste} \\ (-1)^L(-1)^{L-i} = -1, & i \text{ parzyste} \end{cases} = (-1)^i(-1)\gamma_i^-. \quad (\text{B.104})$$

Ostatecznie:

$$U_{\text{sh}} a_i U_{\text{sh}}^\dagger = U_{\text{sh}} \frac{1}{2}(\gamma_i^+ - \text{i}\gamma_i^-) U_{\text{sh}}^\dagger = (-1)^i \frac{1}{2}(\gamma_i^+ + \text{i}\gamma_i^-) = (-1)^i a_i^\dagger, \quad (\text{B.105})$$

$$U_{\text{sh}} a_i^\dagger U_{\text{sh}}^\dagger = U_{\text{sh}} \frac{1}{2}(\gamma_i^+ + \text{i}\gamma_i^-) U_{\text{sh}}^\dagger = (-1)^i \frac{1}{2}(\gamma_i^+ - \text{i}\gamma_i^-) = (-1)^i a_i. \quad (\text{B.106})$$



W celu pokazania, że hamiltoniany transformują się tak jak w równaniu (9.20), należy **Równanie (9.20)** pokazać, w jaki sposób transformują się wszystkie wyrazy hamiltonianów:

- część związana z przeskokiem częstek

$$U_{\text{sh}} a_i^\dagger a_j U_{\text{sh}}^\dagger = U_{\text{sh}} a_i^\dagger U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}} a_j U_{\text{sh}}^\dagger = (-1)^{i+j} a_i a_j^\dagger = (-1) a_i a_j^\dagger = a_j^\dagger a_i = (a_i^\dagger a_j)^\dagger, \quad (\text{B.107})$$

- część związana z kreacją częstek

$$U_{\text{sh}} a_i^\dagger a_j^\dagger U_{\text{sh}}^\dagger = U_{\text{sh}} a_i^\dagger U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}} a_j^\dagger U_{\text{sh}}^\dagger = (-1)^{i+j} a_i a_j = (-1) a_i a_j = a_j a_i = (a_i^\dagger a_j^\dagger)^\dagger, \quad (\text{B.108})$$

- część związana z potencjałem jednocząstkowym

$$U_{\text{sh}} \tilde{n}_i U_{\text{sh}}^\dagger = U_{\text{sh}} a_i^\dagger U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}} a_i U_{\text{sh}}^\dagger - \frac{1}{2} = (-1)^{2i} a_i a_i^\dagger - \frac{1}{2} = 1 - a_i^\dagger a_i \frac{1}{2} = -\tilde{n}_i, \quad (\text{B.109})$$

- część związana z potencjałem dwucząstkowym

$$U_{\text{sh}} \tilde{n}_i \tilde{n}_j U_{\text{sh}}^\dagger = U_{\text{sh}} \tilde{n}_i U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}} \tilde{n}_j U_{\text{sh}}^\dagger = (-\tilde{n}_i)(-\tilde{n}_j) = \tilde{n}_i \tilde{n}_j, \quad (\text{B.110})$$

gdzie $i \neq j$ i zgodnie z założeniami nieparzystego L , układ tworzy dwudzielną sieć, dla której $i + j$ jest liczbą nieparzystą i skorzystano z relacji antykomutacji operatorów fermionowych $a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i = 1$, unitarności $U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}} = \mathbb{1}$ i transformacji (B.105) oraz (B.106). Wszystkie wyrazy poza wyrazem związanym z potencjałem jednocząstkowym, są niezmienne względem transformacji U_{sh} . Należy zwrócić uwagę, że poza zmianą znaku w $\mu_i(t)$, transformacja U_{sh} zmienia $\Delta_{ij} \rightarrow \Delta_{ij}^*$, co nie wpływa na spektrum energetyczne hamiltonianu. Ostatecznie pokazano, że

$$U_{\text{sh}} \hat{H}_{J_{12}}(\Delta_{ij}) U_{\text{sh}}^\dagger = \hat{H}_{J_{34}}(\Delta_{ij}). \quad (\text{B.111})$$



Równanie (9.21)

Lokalny operator parzystości transformuje się w następujący sposób:

$$U_{\text{sh}} \mathcal{P}_i U_{\text{sh}}^\dagger = U_{\text{sh}} (1 - 2a_i^\dagger a_i) U_{\text{sh}}^\dagger = 1 - 2U_{\text{sh}} a_i^\dagger U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}} a_i U_{\text{sh}}^\dagger = \quad (\text{B.112})$$

$$= 1 - 2(-1)^i a_i (-1)^i a_i^\dagger = 1 - 2(1 - a_i^\dagger a_i) = -1 + 2a_i^\dagger a_i = -\mathcal{P}_i, \quad (\text{B.113})$$

a całkowity operator parzystości

$$U_{\text{sh}} \mathcal{P} U_{\text{sh}}^\dagger = \prod_i U_{\text{sh}} \mathcal{P}_i U_{\text{sh}}^\dagger = \prod_i (-1) \mathcal{P}_i = (-1)^L \mathcal{P} = -\mathcal{P}, \quad (\text{B.114})$$

gdzie skorzystano z relacji antykomutacji operatorów fermionowych $a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i = 1$, unitarności $U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}} = \mathbb{1}$ i transformacji (B.105) oraz (B.106) oraz założenia nieparzystego L .



Zagadnienie własne hamiltonianu $\hat{H}_{J_{12}}$:

$$\hat{H}_{J_{12}}(\Delta_{ij})|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (\text{B.II5})$$

$$U_{\text{sh}}\hat{H}_{J_{12}}(\Delta_{ij})|n\rangle = E_n U_{\text{sh}}|n\rangle, \quad (\text{B.II6})$$

$$U_{\text{sh}}\hat{H}_{J_{12}}(\Delta_{ij})U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}}|n\rangle = E_n U_{\text{sh}}|n\rangle, \quad (\text{B.II7})$$

$$\hat{H}_{J_{34}}(\Delta_{ij}^*)U_{\text{sh}}|n\rangle = E_n U_{\text{sh}}|n\rangle, \quad (\text{B.II8})$$

gdzie skorzystano z transformacji (B.III), unitarności $U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}} = \mathbb{1}$. Ostatnie równanie to zagadnienie własne hamiltonianu $\hat{H}_{J_{34}}(\Delta_{ij}^*)$, a stanem własnym jest $U_{\text{sh}}|n\rangle$.

Stan własny $|n\rangle$ ma określona parzystość p_n

$$\mathcal{P}|n\rangle = p_n|n\rangle, \quad (\text{B.II9})$$

a stan własny $U_{\text{sh}}|n\rangle$ ma parzystość p'_n

$$\mathcal{P}U_{\text{sh}}|n\rangle = p'_n U_{\text{sh}}|n\rangle, \quad (\text{B.I20})$$

$$U_{\text{sh}}^\dagger \mathcal{P}U_{\text{sh}}|n\rangle = p'_n U_{\text{sh}}^\dagger U_{\text{sh}}|n\rangle, \quad (\text{B.I21})$$

$$-\mathcal{P}|n\rangle = p'_n|n\rangle, \quad (\text{B.I22})$$

$$\mathcal{P}|n\rangle = -p'_n|n\rangle. \quad (\text{B.I23})$$

Na podstawie tych rozważań wynika, że stan $U_{\text{sh}}|n\rangle$ ma parzystość $p'_n = -p_n$ która jest przeciwna do parzystości stanu $|n\rangle$. Skorzystano tutaj z postaci transformacji odwrotnej

$$U_{\text{sh}}^\dagger \mathcal{P}U_{\text{sh}} = -U_{\text{sh}}^\dagger (U_{\text{sh}} \mathcal{P}U_{\text{sh}}^\dagger) U_{\text{sh}} = -\mathcal{P}. \quad (\text{B.I24})$$



Równanie (9.26)

$$|\psi(2\mathcal{T})\rangle = e^{i(\bar{\phi}_{\text{dyn}}^{e,J_{12}} + \bar{\phi}_{\text{dyn}}^{e,J_{34}} + \bar{\phi}_{\text{geo}}^{e,J_{12}} + \bar{\phi}_{\text{geo}}^{e,J_{34}})} a_0|0\rangle_{t=0} + e^{i(\bar{\phi}_{\text{dyn}}^{o,J_{12}} + \bar{\phi}_{\text{dyn}}^{o,J_{34}} + \bar{\phi}_{\text{geo}}^{o,J_{12}} + \bar{\phi}_{\text{geo}}^{o,J_{34}})} a_1|1\rangle_{t=0} = \quad (\text{B.I25})$$

$$= e^{i(\bar{\phi}_{\text{dyn}}^{e,J_{12}} + \bar{\phi}_{\text{dyn}}^{e,J_{34}} + \bar{\phi}_{\text{geo}}^{e,J_{12}} + \bar{\phi}_{\text{geo}}^{e,J_{34}})} \left(a_0|0\rangle_{t=0} + e^{-i(\Delta\bar{\phi}_{\text{dyn}}^{o,J_{12}} + \Delta\bar{\phi}_{\text{dyn}}^{o,J_{34}} + \Delta\bar{\phi}_{\text{geo}}^{o,J_{12}} + \Delta\bar{\phi}_{\text{geo}}^{o,J_{34}})} a_1|1\rangle_{t=0} \right) = \quad (\text{B.I26})$$

$$= e^{i\chi R(\theta)} |\psi\rangle, \quad (\text{B.I27})$$





Dwuqubitowy układ z zerowymi modami Majorany

W tym krótkim dodatku zaprezentowano układ zawierający sześć *MZM*, który może posłużyć za model układu dwuqubitowego. W odróżnieniu od analizy przeprowadzonej w sekcji 3.2, w takim układzie można skonstruować bramki dwuqubitowe.

Układ zawierający sześć *MZM* musi posiadać $2^{6/2} = 8$ zdegenerowanych stanów podstawowych, po cztery stany z określona parzystością. Tak jak napisano w sekcji 3.2, przejścia pomiędzy stanami o różej parzystości są niedozwolone. Analizę w tym rozdziale przeprowadzono dla stanów nieparzystych: $|eoe\rangle$, $|eeo\rangle$, $|oee\rangle$, $|ooo\rangle$.¹ Bazę dwuqubitowego układu można ponumerować w następujący sposób:

$$|eoe\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad (\text{C.1})$$

$$|eeo\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad (\text{C.2})$$

$$|oee\rangle \rightarrow |10\rangle, \quad (\text{C.3})$$

$$|ooo\rangle \rightarrow |11\rangle. \quad (\text{C.4})$$

¹Oczywiście identyczną analizę można przeprowadzono dla stanów parzystych: $|eee\rangle$, $|ooe\rangle$, $|oeo\rangle$, $|ooo\rangle$.

W odróżnieniu od sekcji 3.2, układ wraz z operacjami wyplatania tworzy grupę \mathfrak{B}_6 . Ta grupa posiada 10 generatorów $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1^\dagger, \dots, \mathcal{B}_5^\dagger$. Następnie przeprowadzono analizę działania wybranych operatorów wyplatania oraz ich złożen na stany bazowe układu dwuqubitowego i odtworzono część wyników jakie otrzymano dla układu reprezentującego pojedynczy qubit. Na potrzeby dalszej reprezentacji działania poszczególnych operatorów wyplatania

i ich złożień, przyjęto następującą postać wektorów bazowych:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Operatory \mathcal{B}_1 oraz \mathcal{B}_5 mają podobne działanie, ale funkcjonują dla różnych qubitów w układzie dwuqubitowym. Można to w prosty sposób pokazać analogicznie jak pokazano to w sekcji 3.2. Poniżej zaprezentowano postać operatorów \mathcal{B}_1 oraz \mathcal{B}_5 :

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(+i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(+i\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

$$\mathcal{B}_5 = \begin{bmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(+i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(+i\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Ich podwójne działanie można zapisać w następujący sposób:

$$Z_1 \equiv \mathcal{B}_1^2 = -i\sigma_1^z \equiv -i(\sigma^z \otimes \mathbb{1}), \quad (\text{C.8})$$

$$Z_2 \equiv \mathcal{B}_5^2 = -i\sigma_2^z \equiv -i(\mathbb{1} \otimes \sigma^z). \quad (\text{C.9})$$

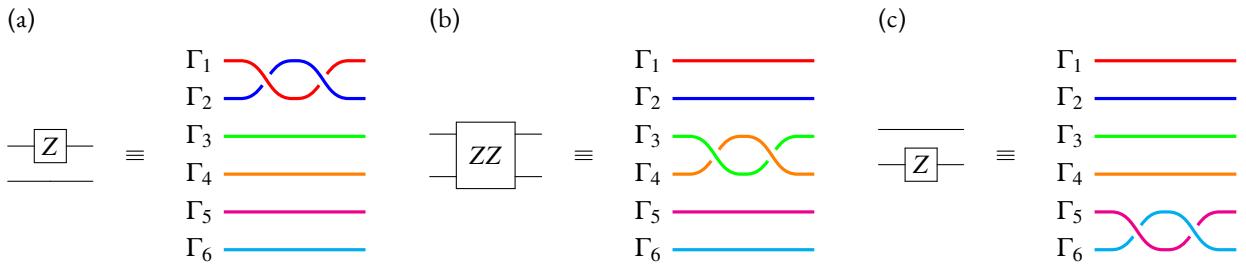
Interesujące jest działanie generatora \mathcal{B}_3

$$\mathcal{B}_3 = \begin{bmatrix} \exp(+i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(+i\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

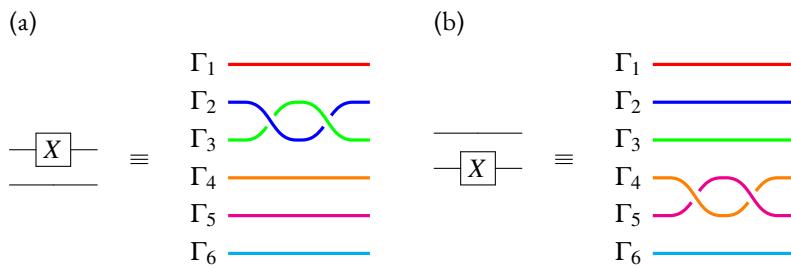
Podwójne działanie takiego operatora \mathcal{B}_3 jest równoważne z działaniem bramki dwuqbittowej Isinga ZZ

$$ZZ_{12} \equiv \mathcal{B}_3^2 = -i\mathcal{B}_1^2\mathcal{B}_5^2 = i\sigma_1^z\sigma_2^z \equiv i(\sigma^z \otimes \sigma^z). \quad (\text{C.11})$$

Porównanie realizacji operacji \mathcal{B}_1^2 , \mathcal{B}_3^2 , \mathcal{B}_5^2 można znaleźć na rysunku C.1. Analogicznie można przeprowadzić analizę dla pozostałych generatorów \mathcal{B}_2 oraz \mathcal{B}_4 , które można przed-



Rysunek C.1: (a) Bramka Z_1 oraz jej reprezentacja \mathcal{B}_1^2 ; (b) Bramka ZZ_{12} oraz jej reprezentacja \mathcal{B}_3^2 ; (c) Bramka Z_2 oraz jej reprezentacja \mathcal{B}_5^2 .



Rysunek C.2: (a) Bramka X_1 oraz jej reprezentacja \mathcal{B}_2^2 , (b) Bramka X_2 oraz jej reprezentacja \mathcal{B}_4^2 .

stawić w następującej postaci:

$$\mathcal{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.12})$$

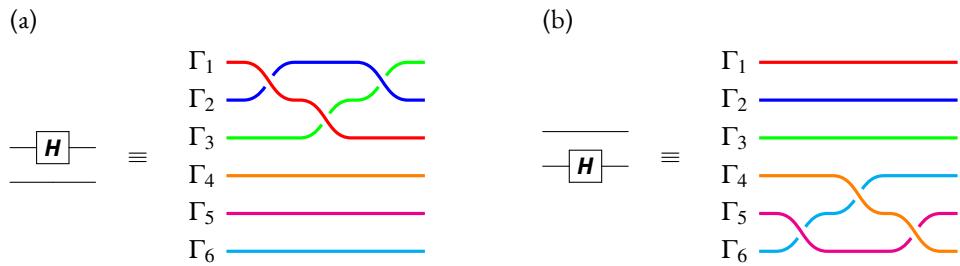
$$\mathcal{B}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.13})$$

Podwójne działanie takich operatorów odpowiada realizacjom bramek X na odpowiednich qubitach:

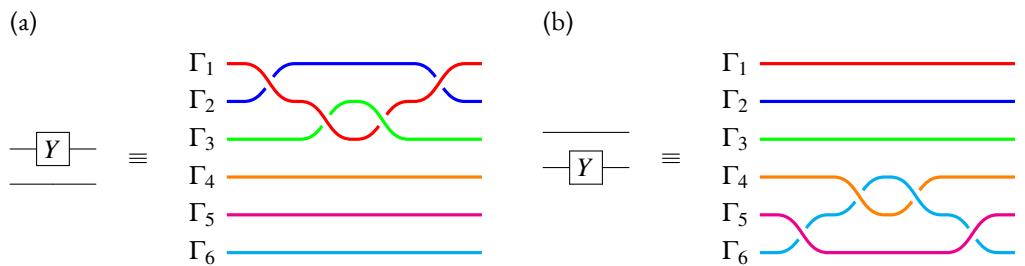
$$X_1 = \mathcal{B}_2^2 = -i(\sigma_1^x) \equiv -i(\sigma^x \otimes \mathbb{1}), \quad (\text{C.14})$$

$$X_2 = \mathcal{B}_4^2 = -i(\sigma_2^x) \equiv -i(\mathbb{1} \otimes \sigma^x). \quad (\text{C.15})$$

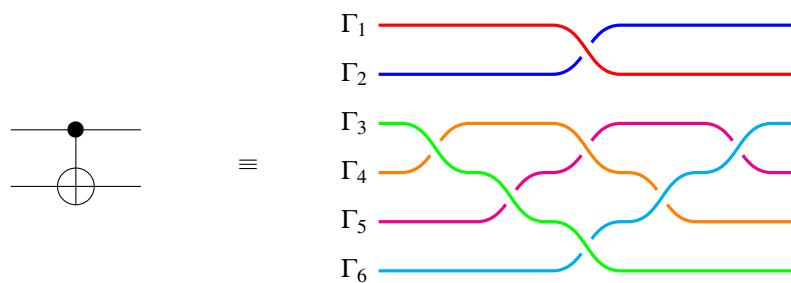
Realizację operacji \mathcal{B}_2^2 oraz \mathcal{B}_4^2 można znaleźć na rysunku C.2.



Rysunek C.3: (a) Bramka H_1 oraz jej reprezentacja $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1$; (b) Bramka H_2 oraz jej reprezentacja $\mathcal{B}_5\mathcal{B}_4\mathcal{B}_5$.



Rysunek C.4: (a) Bramka Y_1 oraz jej reprezentacja $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2^2\mathcal{B}_1^\dagger$; (b) Bramka Y_2 oraz jej reprezentacja $\mathcal{B}_5\mathcal{B}_4^2\mathcal{B}_5^\dagger$.



Rysunek C.5: Realizacja bramki CNOT oraz jej reprezentacja $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3\mathcal{B}_4\mathcal{B}_3\mathcal{B}_5\mathcal{B}_4^\dagger\mathcal{B}_3^\dagger$.

Korzystając z wymienionych generatorów $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_5$ oraz ich sprzężeń, można utworzyć inne bramki:

- bramki Hadamarda \mathbf{H} (przedstawione na rysunku C.3)

$$\mathbf{H}_1 = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1 \equiv -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{1}, \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1 \equiv -\frac{i}{\sqrt{2}} \mathbb{1} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

- bramki Y (przedstawione na rysunku C.4)

$$Y_1 = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{B}_1^\dagger = -i(\sigma_1^y) \equiv -i(\sigma^y \otimes \mathbb{1}), \quad (\text{C.18})$$

$$Y_2 = \mathcal{B}_5 \mathcal{B}_4^2 \mathcal{B}_5^\dagger = -i(\sigma_2^y) \equiv -i(\mathbb{1} \otimes \sigma^y), \quad (\text{C.19})$$

- bramki CNOT (przedstawiona na rysunku C.5)

$$\text{CNOT} = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3 \mathcal{B}_4 \mathcal{B}_3 \mathcal{B}_5 \mathcal{B}_4^\dagger \mathcal{B}_3^\dagger = e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.20})$$



Akronimy

DMRG ang. *density matrix renormalization group*. 15, 17, 24, 79,

ED dokładna diagonalizacja (ang. *exact diagonalization*). 15, 25, 43, 79, 80,

FSS skalowanie rozmiarowe (ang. *finite size scaling*). 49, 67, 73, 75, 95, 104,

IRAM ang. Implicitly restarted Arnoldi method. 43,

LDOS lokalna gęstość stanów (ang. *local density of states*). 67, 68, 77, 84,

LIOM lokalne całki ruchu (ang. *local integral of motion*). 40, 45, 63, 67, 84,

LUE lokalna unitarna równoważność (ang. *local unitary equivalence*). 63, 64, 67, 70, 71, 83, 84,

MBL lokalizacja wielu ciał (ang. *many body localization*). 45, 49,

MZM zerowe mody Majorany (ang. *Majorana zero modes*). 1, 2, 5–10, 12–24, 27–34, 45–51, 57–59, 63–68, 70, 71, 73–75, 77, 79, 80, 83–92, 95–97, 99–101, 103–109, 127, , 135, 137

NAS statystyka nie-abelowa (ang. *non-Abelian statistics*). 6, 12, 13, 29, 57,

OBC otwarte warunki brzegowe (ang. *open boundary condition*). 42, 49, 64, 80,

ODE równania różniczkowe zwyczajne (ang. *ordinary differential equation*). 55,

PBC periodyczne warunki brzegowe (ang. *periodic boundary condition*).

SO spin-orbita. 7–9, 14,

TDSE zależne od czasu równanie Schrödingera (ang. *time dependent Schrödinger equation*). 53, 57, 93,

TISE niezależne od czasu równanie Schrödingera (ang. *time independent Schrödinger equation*). [40](#), [43](#),

Spis symboli

$\{A, B\} = AB + BA$, antykomutator operatorów.

\mathcal{B}_{γ_i} baza operatorów Majorany γ_i . [20](#), [21](#), [45](#), [48](#)

β termodynamiczna odwrotność temperatury. [47](#)

CNOT bramka CNOT . [33](#), [89](#), [130](#), [131](#)

$R(\theta)$ bramka fazowa. [33](#), [34](#), [89–91](#), [99](#), [101](#), [105](#), [125](#)

H bramka Hadamarda. [33](#), [89](#), [119](#), [130](#), [131](#)

X bramka X . [33](#), [91](#), [105](#), [129](#)

Y bramka Y . [33](#), [119](#), [130](#), [131](#)

Z bramka Z . [32](#), [91](#), [101](#), [105](#), [128](#), [129](#)

ZZ bramka ZZ Isinga. [128](#), [129](#)

ε błąd wyplatania. [95–97](#), [99–102](#), [104](#), [105](#)

t_{ij}^0 całka przeskoku. [14–16](#), [22–24](#), [41](#), [64](#), [65](#), [75](#), [80](#), [83](#), [91](#), [92](#), [115](#)

t czas. [34](#), [45](#), [48–50](#), [53–58](#), [89–101](#), [103–105](#), [108](#), [119–122](#), [124](#), [125](#)

\mathcal{T} całkowity czas ewolucji. [57](#), [58](#), [90](#), [96](#), [99–101](#), [125](#)

T czas segmentu ewolucji. [90](#), [92–96](#), [99](#), [103–105](#)

τ skala czasowa. [48–51](#), [64–66](#), [68](#), [69](#), [71](#), [72](#), [74–76](#), [80–83](#), [120–122](#), [138](#)

τ_M skala czasowa związana z mechanizmem relaksacji na skutek oddziaływań MZM –
 MZM . [50](#), [51](#), [65](#), [66](#), [74](#), [75](#), [122](#)

τ_I skala czasowa związana z mechanizmem relaksacji na skutek oddziaływań wielociało-
wych. [50](#), [51](#), [74](#), [75](#), [121](#), [122](#)

$\delta(x)$ delta Diraca. [50](#), [121](#),

δ_{ij} delta Kroneckera. [14](#), [19–21](#), [27](#), [38](#), [115](#), [120](#), [122](#), [123](#)

- ξ długość korelacji. 46
- E energia. 24, 34, 40, 45, 47, 48, 64, 67, 70, 71, 73, 94, 98, 119–122, 125
- δE degeneracja (różnica energii) stanów podstawowych z podprzestrzeni z parzystą i nieparzystą liczbą cząstek. 16, 34, 63, 67–70, 73, 74, 83, 84, 89, 90, 95–97, 99
- ΔE szczelina energetyczna. 57, 67–70, 83–85, 93, 94
- ϕ_{AA} faza Aharonova–Anandana. 57, 58, 90, 94
- ϕ_{Berry} faza Berry’ego. 57, 58, 90, 94, 101
- ϕ_{dyn} faza dynamiczna. 57–59, 89, 90, 96, 99, 125
- ϕ_{geo} faza geometryczna. 57–59, 90, 96, 99, 125
- φ_{ij}^{sc} faza parametru nadprzewodnictwa. 91
- $\Delta\phi$ różnica odpowiednich faz z podprzestrzeni z parzystą i nieparzystą liczbą cząstek. 59, 94–97, 99, 101, 102, 104, 105, 125
- ϕ_{ex} faza wymiany. 58
- w_{loss} straty wiarygodności (eng. *fidelity loss*). 57, 90, 93
- $J_k(x)$ funkcja Bessla pierwszego rodzaju rzędu k . 56,
- $\Theta(x)$ funkcja Heaviside’a. 50, 65, 119–121,
- \mathfrak{B}_M M -włókowna grupa warkoczowa Artina (ang. braid group). 30, 31, 33, 89, 101, 127
- \hat{H} hamiltonian. 14, 21–24, 38–42, 45–47, 49, 53–58, 64, 65, 67, 71, 80, 91, 93, 97, 98, 100, 115, 116, 119–122, 124, 125
- $(A|B)$ iloczyn Hilberta–Schmitda operatorów.
- \otimes iloczyn Kroneckera. 31, 37, 90, 128, 129, 131
- i jednostka urojona. 14, 19–24, 27–29, 32–34, 48, 50, 53–57, 59, 67, 71, 73, 91, 96, 98, 99, 115, 116, 118–123, 125, 128, 129, 131
- $[A, B] = AB - BA$, komutator operatorów.
- λ korelacja ($\bar{\Gamma}|\Gamma$). 47–50, 64–76, 80–84
- N liczba cząstek. 37–39, 42
- e liczba Eulera. 33, 34, 46–48, 50, 56, 57, 59, 71, 73, 96, 99, 119–122, 125, 131
- π liczba pi. 30, 32–34, 48, 50, 53, 56, 59, 67, 74, 91, 92, 95, 97, 99–102, 119–122, 128, 131, 138

L	liczba węzłów. 19 , 21 , 23–25 , 27 , 37–40 , 42 , 46 , 49 , 50 , 64–76 , 79–86 , 88 , 90 , 91 , 94–96 , 98 , 99 , 101 , 102 , 104 , 105 , 116 , 123 , 124
ℓ	liczba węzłów pojedynczego łańcucha trójzłączego. 91 , 92
$\mathbb{1}$	macierz jednostkowa/operator jednostkowy. 19 , 20 , 31 , 46–48 , 64 , 98 , 115 , 120 , 121 , 123–125 , 128 , 129 , 131
K	macierz korelacji $(\bar{\gamma}_i \gamma_j)$. 48 , 49 , 64 , 67
$\mathcal{O}(\omega)$	macierz obrotu. 100 , 101 ,
$\mathbb{0}$	macierz/operator/wektor zerowy. 40
σ^i	macierze Pauliego (w przestrzeni spinów). 14 , 32 , 33 , 128 , 129 , 131 ,
τ^i	macierze Pauliego (w przestrzeni cząstka–dziura).
m	masa.
\mathcal{O}	notacja duże O . 43 , 46
a_i	operator anihilacji bezspinowego fermionu. 14 , 19 , 20 , 22–24 , 27 , 28 , 38 , 41 , 42 , 64 , 80 , 91 , 98 , 115–118 , 122–124
\hat{T}	operator chronologiczny. 53
a_i^\dagger	operator kreacji bezspinowego fermionu. 14 , 19 , 20 , 22–24 , 27 , 28 , 31 , 38 , 39 , 41 , 42 , 64 , 80 , 91 , 98 , 115–118 , 122–124
\hat{n}_i	operator liczby cząstek. 20 , 22–24 , 27 , 28 , 38 , 41 , 79 , 115 , 116 , 137
\tilde{n}_i	operator liczby cząstek \hat{n}_i pomniejszony o $\frac{1}{2}$. 41 , 42 , 64 , 80 , 91 , 98 , 124 ,
\hat{N}	operator liczby wszystkich cząstek. 38 , 41 , 73 , 74
γ_i	operator Majorany. 19–24 , 45 , 47–49 , 64 , 66 , 67 , 71 , 85 , 98 , 100 , 115 , 116 , 122 , 123 , 135 , 137 , 138
\mathcal{P}	operator parzystości. 20 , 23 , 24 , 28 , 29 , 32 , 39 , 41 , 98 , 116 , 117 , 124 , 125
\mathcal{B}_i	operator wyplatania (eng. <i>braiding operator</i>). 30–33 , 117–119 , 127–131
Ψ	kwantowe pole cząstek o spinie $\frac{1}{2}$.
V_{ij}	potencjał oddziaływanego fermion-fermion. 16 , 41 , 64 , 66–76 , 80–88 , 91 , 99 , 101 , 102
μ_i	potencjał chemiczny. 7 , 8 , 12 , 14–17 , 22 , 24 , 41 , 64 , 66 , 69 , 70 , 73 , 75 , 79–88 , 90–95 , 97–99 , 101–103 , 105 , 108 , 115 , 124
\mathcal{U}	propagator. 29 , 30 , 53 , 54 , 117
Ω	całkowite przekrycie <i>MZM</i> . 85 , 87 , 88

Δ_{ij}	przerwa nadprzewodząca. 8, 9, 14–16, 22, 24, 41, 64–66, 68, 70, 72–76, 80–86, 88, 90–92, 95, 97–99, 101, 102, 124, 125
\mathcal{H}	przestrzeń Hilberta. 22, 31, 37–40, 42, 43
G	przewodność różniczkowa. 9, 10, 12, 13
Tr	ślad (eng. <i>trace</i>). 20, 46–48, 64, 115, 120, 121
H.c.	sprzężenie hermitowskie (eng. <i>Hermitian conjugate</i>). 14, 22, 24, 41, 42, 64, 80, 91, 115
\bar{A}	średnia po nieskończonym czasie operatora A .
\bar{A}^τ	średnia po skali czasowej τ operatora A [definicja (5.17)].
\hbar	stała Plancka podzielona przez 2π . 53, 64, 80, 91
$ \psi\rangle$	stan kwantowy. 24, 27–29, 31–34, 38–40, 42, 45, 47, 48, 53–59, 64, 71, 73, 90, 93, 96, 98, 99, 116–122, 125, 127, 128
\oplus	suma prosta. 37–40, 67
U_{sh}	transformacja Shiba'y. 98, 123–125
J_{12}	trójzłącze. 90, 92, 93, 96–99, 101, 108, 124, 125,
$T_k(x)$	wielomian Czebyszewa stopnia k . 56,
α_i	współczynniki z bazy γ_i zerowej mody Majorany. 21, 22, 45–49, 64, 66–68, 71, 79, 84–88, 100
\mathbb{R}	zbiór liczb rzeczywistych. 21, 29, 56, 122
\mathbb{C}	zbiór liczb zespolonych. 37
V_Z	oddziaływanie Zeemana. 8
Γ_i	zerowa moda Majorany. 19, 21, 23, 27–33, 45–51, 64–68, 71–73, 80, 85, 86, 88, 90–93, 100, 101, 117–122, 129, 130, 136

Spis URL

twierdzenie o dwumianie	https://pl.wikipedia.org/wiki/Dwumian_Newtona
big endian	https://en.wikipedia.org/wiki/Endianness
kombinacyjny system liczbowy	https://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorial_number_system
SOLIDstate	https://github.com/andywiecko/SOLIDstate
Armadillo	http://arma.sourceforge.net/
wrapper	https://en.wikipedia.org/wiki/Wrapper_library
twierdzenie min-max	https://en.wikipedia.org/wiki/Min-max_theorem
metoda punktu środkowego	https://en.wikipedia.org/wiki/Midpoint_method
funkcja Bessela	https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcje_Bessela
termodynamiczna odwrotność temperatury	https://en.wikipedia.org/wiki/Thermodynamic_beta
bramka CNOT	https://en.wikipedia.org/wiki/Controlled_NOT_gate
bramka fazowa	https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_logic_gate#Phase_shift
bramka Hadamarda	https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_logic_gate#Hadamard_(H)_gate
bramka X	https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_logic_gate#PauliX_gate
bramka Y	https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_logic_gate#Pauli-Y_gate
bramka Z	https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_logic_gate#Pauli-Z_gate
bramka ZZ Isinga	https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_logic_gate#Ising_(ZZ)_coupling_gate
delta Diraca	https://pl.wikipedia.org/wiki/Delta_Diraca
delta Kroneckera	https://pl.wikipedia.org/wiki/Symbol_Kroneckera
funkcja Heaviside'a	https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja_skokowa_Heaviside%E2%80%99a
grupa warkoczowa	https://en.wikipedia.org/wiki/Braid_group
iloczyn Kroneckera	https://pl.wikipedia.org/wiki/Iloczyn_Kroneckera
jednostka urojona	https://pl.wikipedia.org/wiki/Jednostka_urojona
liczba Eulera	https://pl.wikipedia.org/wiki/Podstawa_logarytmu_naturalnego
liczba pi	https://pl.wikipedia.org/wiki/Pi
macierze Pauliego	https://pl.wikipedia.org/wiki/Macierze_Pauliego
notacja duże O	https://pl.wikipedia.org/wiki/Asymptotyczne_tempo_wzrostu
stała Plancka	https://en.wikipedia.org/wiki/Planck_constant
suma prosta	https://pl.wikipedia.org/wiki/Suma_prosta_przestrzeni_liniowych
wielomiany Czebyszewa	https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Czebyszewa

Spis rysunków

1.1	Spektrum energetyczne oraz topologiczny wykres fazowy dla nanodrutu półprzewodnikowego sprzężonego z nadprzewodnikiem [10].	8
1.2	Przewodność różniczkowa dI/dV w funkcji napięcia V [36].	9
1.3	Układ pomiarowy oraz przewodność różniczkowa – porównanie wyników doświadczalnych z numerycznymi [44].	II
1.4	Zdjęcie ze skaningowego mikroskopu elektronowego struktury 4 nanodrutów [42]. . . .	II
1.5	Topografia nadprzewodzącego ołowiu Pb, z naniesionymi 3 nanodrutami żelaza Fe [46].	12
1.6	Przestrzenna i energetyczna przewodność różniczkowa $G = dI/dV$ [46].	12
1.7	Diagram fazowy modelu Kitaeva z oddziaływaniami wielociałowymi pomiędzy najbliższymi sąsiadami. Źródło: [123]	15
1.8	Degeneracja stanu podstawowego. Źródło: [130]	16
1.9	Wpływ oddziaływań pomiędzy najbliższymi sąsiadami U oraz nieporządku σ_μ na granice obszaru topologicznego w modelu Kitaeva.	16
2.1	Konstrukcja stanu fermionowego z operatorów Majorany.	20
2.2	Ilustracja faz topologicznych w modelu Kitaeva	23
3.1	Ilustracja grupy warkoczowej	31
3.2	Realizacja bramki Z	32
3.3	Realizacja bramki X	33
3.4	Realizacja bramki Y	33
3.5	Realizacja bramki H	33

4.1	Schematyczna konstrukcja hamiltonianu Kitaeva wg bloków o określonej liczbie częstek.	41
4.2	Niezerowe elementy hamiltonianu	42
5.1	Schematyczne porównanie strong i soft <i>MZM</i> .	46
7.1	Funkcja korelacyjna $\lambda(\tau)$ dla układu z oddziaływaniami oraz bez oddziaływań wieloświatłowych. Czas życia <i>MZM</i> .	66
7.2	Rozkład przestrzenny <i>MZM</i>	68
7.3	Porównanie degeneracji stanu podstawowego, szczeliny energetycznej z funkcją autokorelacją $\lambda(\tau)$ w funkcji μ i V .	68
7.4	Porównanie degeneracji stanu podstawowego, szczeliny energetycznej z funkcją autokorelacją $\lambda(\tau)$ w funkcji Δ i V .	69
7.5	Skalowanie rozmiarowe funkcji autokorelacji $\lambda(\tau)$ w funkcji Δ i V .	69
7.6	Kwadrat modułów elementów macierzowych mody Majorany.	72
7.7	Średnia liczba obsadzeń $\langle \hat{N} \rangle$ oraz degeneracja stanu podstawowego δE	74
7.8	Wyniki funkcji autokorelacji $\lambda(\tau)$ wraz z dopasowaną funkcją λ_{fit}	75
7.9	Skalowanie rozmiarowe współczynników relaksacji $1/\tau_M$ oraz $1/\tau_I$.	76
7.10	Ekstrapolowane funkcje autokorelacyjne λ w granicy termodynamicznej.	76
8.1	Funkcja autokorelacyjna λ w funkcji potencjału chemicznego μ oraz oddziaływań V_r .	81
8.2	Funkcja autokorelacyjna λ w funkcji przerwy nadprzewodzącej Δ oraz oddziaływań V_r .	81
8.3	Skalowanie czasowe funkcji autokorelacyjnej λ w funkcji potencjału chemicznego μ oraz oddziaływań V_3 .	82
8.4	Skalowanie rozmiarowe funkcji autokorelacyjnej λ w funkcji przerwy nadprzewodzącej Δ oraz oddziaływaniami V_4 .	82
8.5	Degeneracja stanu podstawowego δE w funkcji μ oraz V_r .	84
8.6	Szczelina energetyczna ΔE w funkcji μ oraz V_r .	85
8.7	Wpływ zasięgu r oddziaływanego V_r na rozkład przestrzenny <i>MZM</i> , Γ^+ oraz Γ^- .	86
8.8	Lokalne przekrycie $ \alpha_i^+ \alpha_i^- $ dla <i>MZM</i> Γ^+ oraz Γ^- .	86
8.9	Całkowite przekrycie Ω pomiędzy <i>MZM</i> , Γ^+ oraz Γ^- , w funkcji oddziaływań V_r oraz potencjału chemicznego μ .	88
8.10	Numer węzła dla którego lokalne przekrycie $ \alpha_i^+ \alpha_i^- $ jest największe, w funkcji oddziaływań V_r oraz potencjału chemicznego μ .	88

9.1	Test adiabatyczności wymiany MZM	90
9.2	Układ dwóch trójłącz wraz z realizacją wybranych bramek kwantowych.	91
9.3	Schematyczny protokół wyplatania MZM na trójłączu	93
9.4	Standardowy protokół wyplatania – potencjał μ_i w funkcji t/T	94
9.5	Pojedyncza operacja wyplatania na pojedynczym trójłączu.	95
9.6	Podwójne wyplatanie MZM oraz rozkłady przestrzenne przed i po pojedynczym wyplataniu MZM	99
9.7	Błąd wyplatania w funkcji parametrów hamiltonianu układu.	102
9.8	Rozszerzony protokół wyplatania.	103
9.9	Skalowanie rozmiarowe trójłączu dla rozszerzonego protokołu wyplatania.	104
9.10	Faza wymiany oraz faza geometryczna dla rozszerzonego protokołu wyplatania MZM	105
C.1	Reprezentacja bramek: Z_1, Z_2, ZZ_{12}	129
C.2	Reprezentacja bramek: X_1, X_2	129
C.3	Reprezentacja bramek: H_1, H_2	130
C.4	Reprezentacja bramek: Y_1, Y_2	130
C.5	Relizacja bramki CNOT.	130

Bibliografia

[Cytujące strony są wypisane po każdej referencji.]

- [1] A. Więckowski, M. M. Maśka, oraz M. Mierzejewski. Identification of Majorana Modes in Interacting Systems by Local Integrals of Motion. *Phys. Rev. Lett.*, 120:040504, 2018. [s. 1, 19, 21, 24, 40, 45, 50, 63, 64, 65, 77, 85, oraz 91.]
- [2] A. Więckowski oraz A. Ptak. Influence of long-range interaction on Majorana zero modes. *Phys. Rev. B*, 100:144510, 2019. [s. 2, 21, 25, 40, 79, 87, oraz 91.]
- [3] A. Więckowski, M. Mierzejewski, oraz M. Kupczyński. Majorana phase gate based on the geometric phase. *Phys. Rev. B*, 101:014504, 2020. [s. 2, 34, 58, 89, 90, oraz 106.]
- [4] P. A. M. Dirac oraz R. H. Fowler. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. A*, 117:610, 1928. [s. 5.]
- [5] E. Majorana. Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone. *Il Nuovo Cimento*, 14:171, 1937. [s. 5.]
- [6] A. Y. Kitaev. Unpaired Majorana fermions in quantum wires. *Phys. Uspekhi*, 44:131, 2001. [s. 5, 19, 22, 24, 34, 65, 80, 83, 92, oraz 107.]
- [7] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, oraz S. Das Sarma. Non-abelian anyons and topological quantum computation. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1083, 2008. [s. 5, 6, 7, 27, oraz 109.]
- [8] C. Beenakker. Search for Majorana Fermions in Superconductors. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 4:113, 2013. [s. 5 oraz 7.]
- [9] S. R. Elliott oraz M. Franz. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics. *Rev. Mod. Phys.*, 87:137, 2015. [s. 5 oraz 7.]
- [10] R. M. Lutchyn, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, P. Krogstrup, C. M. Marcus, oraz Y. Oreg. Majorana zero modes in superconductor-semiconductor heterostructures. *Nat. Rev. Mater.*, 3(5):52, 2018. [s. 5, 7, 8, 9, 10, oraz 141.]
- [11] R. Pawlak, S. Hoffman, J. Klinovaja, D. Loss, oraz E. Meyer. Majorana fermions in magnetic chains. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 107:1, 2019. [s. 5.]

- [12] F. Wilczek. Majorana returns. *Nat. Phys.*, 5:614, 2009. [s. 6.]
- [13] C. Chamon, R. Jackiw, Y. Nishida, S.-Y. Pi, oraz L. Santos. Quantizing Majorana fermions in a superconductor. *Phys. Rev. B*, 81:224515, 2010. [s. 6.]
- [14] M. Leijnse oraz K. Flensberg. Introduction to topological superconductivity and Majorana fermions. *Semicond. Sci. Technol.*, 27(12):124003, 2012. [s. 6 oraz 27.]
- [15] C. W.J. Beenakker. Annihilation of Colliding Bogoliubov Quasiparticles Reveals their Majorana Nature. *Phys. Rev. Lett.*, 112:070604, 2014. [s. 6.]
- [16] M. Sato oraz Y. Ando. Topological superconductors: a review. *Rep. Prog. Phys.*, 80:076501, 2017. [s. 6.]
- [17] N. Read oraz D. Green. Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect. *Phys. Rev. B*, 61:10267, 2000. [s. 6.]
- [18] D. A. Ivanov. Non-Abelian Statistics of Half-Quantum Vortices in p -Wave Superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 86:268, 2001. [s. 6 oraz 27.]
- [19] V. Lahtinen oraz J. K. Pachos. A Short Introduction to Topological Quantum Computation. *SciPost Phys.*, 3:021, 2017. [s. 6 oraz 27.]
- [20] A. B. Somendra Mohan Bhattacharjee, Mahan Mj. *Topology and Condensed Matter Physics*. Texts and Readings in Physical Sciences 19. Springer Singapore, 1 edition, 2017. [s. 6.]
- [21] A. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Ann. Phys.*, 303:2, 2003. [s. 7.]
- [22] S. Das Sarma, M. Freedman, oraz C. Nayak. Topologically Protected Qubits from a Possible Non-Abelian Fractional Quantum Hall State. *Phys. Rev. Lett.*, 94:166802, 2005. [s. 7.]
- [23] T. Stanescu. *Introduction to Topological Quantum Matter & Quantum Computation*. CRC Press, 2016. [s. 7, 13, 19, oraz 27.]
- [24] B. Field oraz T. Simula. Introduction to topological quantum computation with non-Abelian anyons. *Quantum Sci. Technol.*, 3:045004, 2018. [s. 7 oraz 27.]
- [25] M. Z. Hasan oraz C. L. Kane. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, 82:3045, 2010. [s. 7.]
- [26] C. W. J. Beenakker. Search for non-Abelian Majorana braiding statistics in superconductors, 2019. [arXiv:1907.06497](https://arxiv.org/abs/1907.06497). [s. 7 oraz 30.]
- [27] M. Cheng, R. M. Lutchyn, oraz S. Das Sarma. Topological protection of Majorana qubits. *Phys. Rev. B*, 85:165124, 2012. [s. 7.]
- [28] G. E. Moore. Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, 38, 1965. [s. 7.]

- [29] J. Alicea. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems. *Rep. Prog. Phys.*, 75:076501, 2012. [s. 7.]
- [30] B. Kiczek oraz A. Ptak. Influence of the orbital effects on the Majorana quasi-particles in a nanowire. *J. Phys. Condens. Matter*, 29(49):495301, 2017. [s. 7.]
- [31] M. Sato. Nodal structure of superconductors with time-reversal invariance and Z_2 topological number. *Phys. Rev. B*, 73:214502, 2006. [s. 8.]
- [32] M. Sato oraz S. Fujimoto. Topological phases of noncentrosymmetric superconductors: Edge states, Majorana fermions, and non-Abelian statistics. *Phys. Rev. B*, 79:094504, 2009. [s. 8.]
- [33] M. Sato, Y. Takahashi, oraz S. Fujimoto. Non-Abelian Topological Order in s -Wave Superfluids of Ultracold Fermionic Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 103:020401, 2009. [s. 8.]
- [34] M. Sato, Y. Takahashi, oraz S. Fujimoto. Non-Abelian topological orders and Majorana fermions in spin-singlet superconductors. *Phys. Rev. B*, 82:134521, 2010. [s. 8.]
- [35] M. T. Deng, C. L. Yu, G. Y. Huang, M. Larsson, P. Caroff, oraz H. Q. Xu. Anomalous zero-bias conductance peak in a Nb–InSb nanowire–Nb hybrid device. *Nano Lett.*, 12:6414, 2012. [s. 9.]
- [36] V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, oraz L. P. Kouwenhoven. Signatures of Majorana Fermions in Hybrid Superconductor-Semiconductor Nanowire Devices. *Science*, 336:1003, 2012. [s. 9, 10, oraz 141.]
- [37] A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, oraz H. Shtrikman. Zero-bias peaks and splitting in an Al-InAs nanowire topological superconductor as a signature of Majorana fermions. *Nat. Phys.*, 8:887, 2012. [s. 9.]
- [38] A. D. K. Finck, D. J. Van Harlingen, P. K. Mohseni, K. Jung, oraz X. Li. Anomalous Modulation of a Zero-Bias Peak in a Hybrid Nanowire-Superconductor Device. *Phys. Rev. Lett.*, 110:126406, 2013. [s. 9.]
- [39] F. Nichele, A. C. C. Drachmann, A. M. Whiticar, E. C. T. O’Farrell, H. J. Suominen, A. Fornieri, T. Wang, G. C. Gardner, C. Thomas, A. T. Hatke, P. Krogstrup, M. J. Manfra, K. Flensberg, oraz C. M. Marcus. Scaling of Majorana zero-bias conductance peaks. *Phys. Rev. Lett.*, 119:136803, 2017. [s. 9.]
- [40] Ö. Güçlü, H. Zhang, J. D. S. Bommer, M. W. A. de Moor, D. Car, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, A. Geresdi, K. Watanabe, T. Taniguchi, oraz L. P. Kouwenhoven. Ballistic Majorana nanowire devices. *Nat. Nanotech.*, 13:192, 2018. [s. 9.]
- [41] M. T. Deng, S. Vaitiekėnas, E. B. Hansen, J. Danon, M. Leijnse, K. Flensberg, J. Nygård, P. Krogstrup, oraz C. M. Marcus. Majorana bound state in a coupled quantum-dot hybrid-nanowire system. *Science*, 354:1557, 2016. [s. 9.]

- [42] S. Gazibegovic, D. Car, H. Zhang, S. C. Balk, J. A. Logan, M. W. A. de Moor, M. C. Cassidy, R. Schmits, D. Xu, G. Wang, P. Krogstrup, R. L. M. Op het Veld, K. Zuo, Y. Vos, J. Shen, D. Bouman, B. Shojaei, D. Pennachio, J. S. Lee, P. J. van Veldhoven, S. Koelling, M. A. Verheijen, L. P. Kouwenhoven, C. J. Palmstrøm, oraz E. P. A. M. Bakkers. Epitaxy of advanced nanowire quantum devices. *Nature*, 548:434, 2017. [s. 9, 10, 11, oraz 141.]
- [43] M.-T. Deng, S. Vaitiekėnas, E. Prada, P. San-Jose, J. Nygård, P. Krogstrup, R. Aguado, oraz C. M. Marcus. Nonlocality of Majorana modes in hybrid nanowires. *Phys. Rev. B*, 98:085125, 2018. [s. 9 oraz 85.]
- [44] H. Zhang, C.-X. Liu, S. Gazibegovic, D. Xu, J. A. Logan, G. Wang, N. Van Loo, J. D. Bommer, M. W. De Moor, D. Car, et al. Quantized Majorana conductance. *Nature*, 556:74, 2018. [s. 9, 10, 11, oraz 141.]
- [45] D. Wang, L. Kong, P. Fan, H. Chen, S. Zhu, W. Liu, L. Cao, Y. Sun, S. Du, J. Schneeloch, R. Zhong, G. Gu, L. Fu, H. Ding, oraz H.-J. Gao. Evidence for Majorana bound states in an iron-based superconductor. *Science*, 362:333, 2018. [s. 9.]
- [46] S. Nadj-Perge, I. K. Drozdov, J. Li, H. Chen, S. Jeon, J. Seo, A. H. MacDonald, B. A. Bernevig, oraz A. Yazdani. Observation of Majorana fermions in ferromagnetic atomic chains on a superconductor. *Science*, 346:602, 2014. [s. 9, 12, 13, oraz 141.]
- [47] R. Pawlak, M. Kisiel, J. Klinovaja, T. Meier, S. Kawai, T. Glatzel, D. Loss, oraz E. Meyer. Probing atomic structure and Majorana wavefunctions in mono-atomic Fe chains on superconducting Pb surface. *njp Quantum Inf.*, 2:16035, 2016. [s. 9.]
- [48] B. E. Feldman, M. T. Randeria, J. Li, S. Jeon, Y. Xie, Z. Wang, I. K. Drozdov, B. A. Bernevig, oraz A. Yazdani. High-resolution studies of the Majorana atomic chain platform. *Nat. Phys.*, 13:286, 2016. [s. 9.]
- [49] M. Ruby, B. W. Heinrich, Y. Peng, F. von Oppen, oraz K. J. Franke. Exploring a proximity-coupled Co chain on Pb(110) as a possible Majorana platform. *Nano Lett.*, 17:4473, 2017. [s. 9.]
- [50] S. Jeon, Y. Xie, J. Li, Z. Wang, B. A. Bernevig, oraz A. Yazdani. Distinguishing a Majorana zero mode using spin-resolved measurements. *Science*, 358:772, 2017. [s. 9 oraz 14.]
- [51] H. Kim, A. Palacio-Morales, T. Posske, L. Rózsa, K. Palotás, L. Szunyogh, M. Thorwart, oraz R. Wiesendanger. Toward tailoring Majorana bound states in artificially constructed magnetic atom chains on elemental superconductors. *Sci. Adv.*, 4:eaar5251, 2018. [s. 9.]
- [52] H.-H. Sun oraz J.-F. Jia. Detection of Majorana zero mode in the vortex. *njp Quant. Mater.*, 2:34, 2017. [s. 9.]
- [53] T. Machida, Y. Sun, S. Pyon, S. Takeda, Y. Kohsaka, T. Hanaguri, T. Sasagawa, oraz T. Tamegai. Zero-energy vortex bound state in the superconducting topological surface state of Fe(Se,Te). *Nat. Mater.*, 18:811, 2019. [s. 9.]

- [54] K. Jiang, X. Dai, oraz Z. Wang. Quantum Anomalous Vortex and Majorana Zero Mode in Iron-Based Superconductor Fe(Te,Se). *Phys. Rev. X*, 9:011033, 2019. [s. 9.]
- [55] C.-K. Chiu, T. Machida, Y. Huang, T. Hanaguri, oraz F.-C. Zhang. Scalable Majorana vortex modes in iron-based superconductors. *Sci. Adv.*, 6(9), 2020. [s. 9.]
- [56] G. C. Ménard, S. Guissart, C. Brun, R. T. Leriche, M. Trif, F. Debontridder, D. Demaille, D. Roditchev, P. Simon, oraz T. Cren. Two-dimensional topological superconductivity in Pb/Co/Si(III). *Nat. Commun.*, 8:2040, 2017. [s. 9.]
- [57] A. Palacio-Morales, E. Mascot, S. Cocklin, H. Kim, S. Rachel, D. K. Morr, oraz R. Wiesendanger. Atomic-scale interface engineering of Majorana edge modes in a 2D magnet-superconductor hybrid system. *Sci. Adv.*, 5(7), 2019. [s. 9.]
- [58] I. van Weperen, B. Tarasinski, D. Eeltink, V. S. Pribiag, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, oraz M. Wimmer. Spin-orbit interaction in InSb nanowires. *Phys. Rev. B*, 91:201413, 2015. [s. 9.]
- [59] J. Shabani, M. Kjaergaard, H. J. Suominen, Y. Kim, F. Nichele, K. Pakrouski, T. Stankevic, R. M. Lutchyn, P. Krogstrup, R. Feidenhans'l, S. Kraemer, C. Nayak, M. Troyer, C. M. Marcus, oraz C. J. Palmstrøm. Two-dimensional epitaxial superconductor-semiconductor heterostructures: A platform for topological superconducting networks. *Phys. Rev. B*, 93:155402, 2016. [s. 9.]
- [60] K. Flensberg. Tunneling characteristics of a chain of Majorana bound states. *Phys. Rev. B*, 82:180516, 2010. [s. 10.]
- [61] E. Prada, P. San-Jose, oraz R. Aguado. Transport spectroscopy of NS nanowire junctions with Majorana fermions. *Phys. Rev. B*, 86:180503, 2012. [s. 10.]
- [62] T. D. Stanescu, S. Tewari, J. D. Sau, oraz S. Das Sarma. To Close or Not to Close: The Fate of the Superconducting Gap Across the Topological Quantum Phase Transition in Majorana-Carrying Semiconductor Nanowires. *Phys. Rev. Lett.*, 109:266402, 2012. [s. 10.]
- [63] J. Liu, A. C. Potter, K. T. Law, oraz P. A. Lee. Zero-Bias Peaks in the Tunneling Conductance of Spin-Orbit-Coupled Superconducting Wires with and without Majorana End-States. *Phys. Rev. Lett.*, 109:267002, 2012. [s. 10.]
- [64] D. Rainis, L. Trifunovic, J. Klinovaja, oraz D. Loss. Towards a realistic transport modeling in a superconducting nanowire with Majorana fermions. *Phys. Rev. B*, 87:024515, 2013. [s. 10, 14, oraz 85.]
- [65] K. T. Law, P. A. Lee, oraz T. K. Ng. Majorana Fermion Induced Resonant Andreev Reflection. *Phys. Rev. Lett.*, 103:237001, 2009. [s. 10.]
- [66] J. J. He, T. K. Ng, P. A. Lee, oraz K. T. Law. Selective Equal-Spin Andreev Reflections Induced by Majorana Fermions. *Phys. Rev. Lett.*, 112:037001, 2014. [s. 10.]

- [67] A. Zazunov, S. Plugge, oraz R. Egger. Fermi-Liquid Approach for Superconducting Kondo Problems. *Phys. Rev. Lett.*, 121:207701, 2018. [s. [10](#).]
- [68] C. Moore, T. D. Stanescu, oraz S. Tewari. Two-terminal charge tunneling: Disentangling Majorana zero modes from partially separated Andreev bound states in semiconductor-superconductor heterostructures. *Phys. Rev. B*, 97:165302, 2018. [s. [10](#).]
- [69] M. Hell, K. Flensberg, oraz M. Leijnse. Distinguishing Majorana bound states from localized Andreev bound states by interferometry. *Phys. Rev. B*, 97:161401, 2018. [s. [10](#).]
- [70] C.-X. Liu, J. D. Sau, oraz S. Das Sarma. Distinguishing topological Majorana bound states from trivial Andreev bound states: Proposed tests through differential tunneling conductance spectroscopy. *Phys. Rev. B*, 97:214502, 2018. [s. [10](#).]
- [71] Y.-H. Lai, J. D. Sau, oraz S. Das Sarma. Presence versus absence of end-to-end nonlocal conductance correlations in Majorana nanowires: Majorana bound states versus Andreev bound states. *Phys. Rev. B*, 100:045302, 2019. [s. [10](#).]
- [72] K. Yavilberg, E. Ginossar, oraz E. Grosfeld. Differentiating Majorana from Andreev bound states in a superconducting circuit. *Phys. Rev. B*, 100:241408, 2019. [s. [10](#).]
- [73] J. Danon, A. B. Hellenes, E. B. Hansen, L. Casparis, A. P. Higginbotham, oraz K. Flensberg. Nonlocal Conductance Spectroscopy of Andreev Bound States: Symmetry Relations and BCS Charges. *Phys. Rev. Lett.*, 124:036801, 2020. [s. [10](#).]
- [74] R. Tuovinen, E. Perfetto, R. van Leeuwen, G. Stefanucci, oraz M. A. Sentef. Distinguishing Majorana zero modes from impurity states through time-resolved transport. *New J. Phys.*, 21(10):103038, 2019. [s. [10](#).]
- [75] G. Kells, D. Meidan, oraz P. W. Brouwer. Near-zero-energy end states in topologically trivial spin-orbit coupled superconducting nanowires with a smooth confinement. *Phys. Rev. B*, 86:100503, 2012. [s. [10](#).]
- [76] J. Alicea, Y. Oreg, G. Refael, F. Von Oppen, oraz M. P. Fisher. Non-Abelian statistics and topological quantum information processing in 1D wire networks. *Nat. Phys.*, 7:412, 2011. [s. [12](#), [14](#), [59](#), [91](#), [92](#), oraz [105](#).]
- [77] P. Bonderson, M. Freedman, oraz C. Nayak. Measurement-Only Topological Quantum Computation. *Phys. Rev. Lett.*, 101:010501, 2008. [s. [12](#).]
- [78] P. Bonderson, M. Freedman, oraz C. Nayak. Measurement-only topological quantum computation via anyonic interferometry. *Ann. Phys.*, 324(4):787 – 826, 2009. [s. [12](#).]
- [79] T. Hyart, B. van Heck, I. C. Fulga, M. Burrello, A. R. Akhmerov, oraz C. W. J. Beenakker. Flux-controlled quantum computation with Majorana fermions. *Phys. Rev. B*, 88:035121, 2013. [s. [12](#).]
- [80] S. Vijay oraz L. Fu. Teleportation-based quantum information processing with Majorana zero modes. *Phys. Rev. B*, 94:235446, 2016. [s. [12](#).]

- [81] D. Aasen, M. Hell, R. V. Mishmash, A. Higginbotham, J. Danon, M. Leijnse, T. S. Jespersen, J. A. Folk, C. M. Marcus, K. Flensberg, oraz J. Alicea. Milestones Toward Majorana-Based Quantum Computing. *Phys. Rev. X*, 6:031016, 2016. [s. 12.]
- [82] S. Plugge, A. Rasmussen, R. Egger, oraz K. Flensberg. Majorana box qubits. *New J. Phys.*, 19(1):012001, 2017. [s. 12.]
- [83] J. Manousakis, C. Wille, A. Altland, R. Egger, K. Flensberg, oraz F. Hassler. Weak Measurement Protocols for Majorana Bound State Identification. *Phys. Rev. Lett.*, 124:096801, 2020. [s. 13.]
- [84] R. M. Lutchyn, J. D. Sau, oraz S. Das Sarma. Majorana Fermions and a Topological Phase Transition in Semiconductor-Superconductor Heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 105:077001, 2010. [s. 14.]
- [85] Y. Oreg, G. Refael, oraz F. von Oppen. Helical Liquids and Majorana Bound States in Quantum Wires. *Phys. Rev. Lett.*, 105:177002, 2010. [s. 14.]
- [86] J. Klinovaja, P. Stano, oraz D. Loss. Transition from Fractional to Majorana Fermions in Rashba Nanowires. *Phys. Rev. Lett.*, 109:236801, 2012. [s. 14.]
- [87] T. Karzig, G. Refael, oraz F. von Oppen. Boosting Majorana Zero Modes. *Phys. Rev. X*, 3:041017, 2013. [s. 14.]
- [88] J. Li, H. Chen, I. K. Drozdov, A. Yazdani, B. A. Bernevig, oraz A. H. MacDonald. Topological superconductivity induced by ferromagnetic metal chains. *Phys. Rev. B*, 90:235433, 2014. [s. 14.]
- [89] E. Vernek, P. H. Penteado, A. C. Seridonio, oraz J. C. Egues. Subtle leakage of a Majorana mode into a quantum dot. *Phys. Rev. B*, 89:165314, 2014. [s. 14.]
- [90] R. Wakatsuki, M. Ezawa, Y. Tanaka, oraz N. Nagaosa. Fermion fractionalization to Majorana fermions in a dimerized Kitaev superconductor. *Phys. Rev. B*, 90:014505, 2014. [s. 14.]
- [91] A. Heimes, D. Mendler, oraz P. Kotetes. Interplay of topological phases in magnetic adatom-chains on top of a Rashba superconducting surface. *New J. Phys.*, 17(2):023051, 2015. [s. 14.]
- [92] D. A. Ruiz-Tijerina, E. Vernek, L. G. G. Dias da Silva, oraz J. C. Egues. Interaction effects on a Majorana zero mode leaking into a quantum dot. *Phys. Rev. B*, 91:115435, 2015. [s. 14 oraz 105.]
- [93] M. M. Maśka, A. Gorczyca-Goraj, J. Tworzydło, oraz T. Domański. Majorana quasiparticles of an inhomogeneous Rashba chain. *Phys. Rev. B*, 95:045429, 2017. [s. 14 oraz 63.]
- [94] M. M. Maśka oraz T. Domański. Polarization of the Majorana quasiparticles in the Rashba chain. *Sci. Rep.*, 7:16193, 2017. [s. 14.]
- [95] A. Ptok, A. Kobialka, oraz T. Domański. Controlling the bound states in a quantum-dot hybrid nanowire. *Phys. Rev. B*, 96:195430, 2017. [s. 14 oraz 105.]

- [96] C.-X. Liu, J. D. Sau, T. D. Stanescu, oraz S. Das Sarma. Andreev bound states versus Majorana bound states in quantum dot-nanowire-superconductor hybrid structures: Trivial versus topological zero-bias conductance peaks. *Phys. Rev. B*, **96**:075161, 2017. [s. 14.]
- [97] E. Prada, R. Aguado, oraz P. San-Jose. Measuring Majorana nonlocality and spin structure with a quantum dot. *Phys. Rev. B*, **96**:085418, 2017. [s. 14 oraz 85.]
- [98] D. Chevallier, P. Szumniak, S. Hoffman, D. Loss, oraz J. Klinovaja. Topological phase detection in Rashba nanowires with a quantum dot. *Phys. Rev. B*, **97**:045404, 2018. [s. 14.]
- [99] K. Padavić, S. S. Hegde, W. DeGottardi, oraz S. Vishveshwara. Topological phases, edge modes, and the Hofstadter butterfly in coupled Su-Schrieffer-Heeger systems. *Phys. Rev. B*, **98**:024205, 2018. [s. 14.]
- [100] A. Alecce oraz L. Dell'Anna. Extended Kitaev chain with longer-range hopping and pairing. *Phys. Rev. B*, **95**:195160, 2017. [s. 14.]
- [101] M. Gau, S. Plugge, oraz R. Egger. Quantum transport in coupled Majorana box systems. *Phys. Rev. B*, **97**:184506, 2018. [s. 14.]
- [102] C.-B. Hua, R. Chen, D.-H. Xu, oraz B. Zhou. Disorder-induced Majorana zero modes in a dimerized kitaev superconductor chain. *Phys. Rev. B*, **100**:205302, 2019. [s. 14.]
- [103] A. Kobialka, N. Sedlmayr, M. M. Maśka, oraz T. Domański. Dimerization-induced topological superconductivity in a Rashba nanowire. *Phys. Rev. B*, **101**:085402, 2020. [s. 14.]
- [104] A. Kobialka oraz A. Ptak. Electrostatic formation of the Majorana quasiparticles in the quantum dot-nanoring structure. *J. Phys. Condens. Matter*, **31**:185302, 2019. [s. 14 oraz 85.]
- [105] A. Kobialka, T. Domański, oraz A. Ptak. Delocalisation of Majorana quasiparticles in plaquette-nanowire hybrid system. *Sci. Rep.*, **9**:12933, 2019. [s. 14.]
- [106] C. Wille, R. Egger, J. Eisert, oraz A. Altland. Simulating topological tensor networks with Majorana qubits. *Phys. Rev. B*, **99**:115117, 2019. [s. 14.]
- [107] J. Schulenborg oraz K. Flensberg. Absence of supercurrent sign reversal in a topological junction with a quantum dot. *Phys. Rev. B*, **101**:014512, 2020. [s. 14.]
- [108] B. van Heck, A. R. Akhmerov, F. Hassler, M. Burrello, oraz C. W. J. Beenakker. Coulomb-assisted braiding of Majorana fermions in a Josephson junction array. *New J. Phys.*, **14**(3):035019, 2012. [s. 14.]
- [109] I. C. Fulga, B. van Heck, M. Burrello, oraz T. Hyart. Effects of disorder on Coulomb-assisted braiding of Majorana zero modes. *Phys. Rev. B*, **88**:155435, 2013. [s. 14.]
- [110] B. van Heck, T. Hyart, oraz C. W. J. Beenakker. Minimal circuit for a flux-controlled Majorana qubit in a quantum spin-hall insulator. *Phys. Scr.*, **T164**:014007, 2015. [s. 14.]

- [iii] T. Karzig, Y. Oreg, G. Refael, oraz M. H. Freedman. Universal Geometric Path to a Robust Majorana Magic Gate. *Phys. Rev. X*, 6:031019, 2016. [s. 14.]
- [ii2] M. Sekania, S. Plugge, M. Greiter, R. Thomale, oraz P. Schmitteckert. Braiding errors in interacting Majorana quantum wires. *Phys. Rev. B*, 96:094307, 2017. [s. 14, 57, 58, 90, 91, 92, oraz 95.]
- [ii3] B. Braunecker oraz P. Simon. Interplay between Classical Magnetic Moments and Superconductivity in Quantum One-Dimensional Conductors: Toward a Self-Sustained Topological Majorana Phase. *Phys. Rev. Lett.*, 111:147202, 2013. [s. 14.]
- [ii4] F. Pientka, L. I. Glazman, oraz F. von Oppen. Topological superconducting phase in helical Shiba chains. *Phys. Rev. B*, 88:155420, 2013. [s. 14.]
- [ii5] J. Klinovaja, P. Stano, A. Yazdani, oraz D. Loss. Topological superconductivity and Majorana fermions in RKKY systems. *Phys. Rev. Lett.*, 111:186805, 2013. [s. 14.]
- [ii6] Y. Kim, M. Cheng, B. Bauer, R. M. Lutchyn, oraz S. Das Sarma. Helical order in one-dimensional magnetic atom chains and possible emergence of Majorana bound states. *Phys. Rev. B*, 90:060401, 2014. [s. 14.]
- [ii7] B. Braunecker oraz P. Simon. Self-stabilizing temperature-driven crossover between topological and non-topological ordered phases in one-dimensional conductors. *Phys. Rev. B*, 92:241410, 2015. [s. 14.]
- [ii8] T.-P. Choy, J. M. Edge, A. R. Akhmerov, oraz C. W. J. Beenakker. Majorana fermions emerging from magnetic nanoparticles on a superconductor without spin-orbit coupling. *Phys. Rev. B*, 84:195442, 2011. [s. 14.]
- [ii9] S. Nadj-Perge, I. K. Drozdov, B. A. Bernevig, oraz A. Yazdani. Proposal for realizing Majorana fermions in chains of magnetic atoms on a superconductor. *Phys. Rev. B*, 88:020407, 2013. [s. 14.]
- [i20] A. Gorczyca-Goraj, T. Domański, oraz M. M. Maśka. Topological superconductivity at finite temperatures in proximitized magnetic nanowires. *Phys. Rev. B*, 99:235430, 2019. [s. 14.]
- [i21] E. M. Stoudenmire, J. Alicea, O. A. Starykh, oraz M. P. Fisher. Interaction effects in topological superconducting wires supporting Majorana fermions. *Phys. Rev. B*, 84:014503, 2011. [s. 14, 15, 63, 70, 80, oraz 91.]
- [i22] F. Hassler oraz D. Schuricht. Strongly interacting Majorana modes in an array of Josephson junctions. *New J. Phys.*, 14:125018, 2012. [s. 14, 63, oraz 91.]
- [i23] H. Katsura, D. Schuricht, oraz M. Takahashi. Exact ground states and topological order in interacting Kitaev/Majorana chains. *Phys. Rev. B*, 92:115137, 2015. [s. 14, 15, 24, 40, 64, 65, oraz 141.]
- [i24] N. M. Gergs, L. Fritz, oraz D. Schuricht. Topological order in the Kitaev/Majorana chain in the presence of disorder and interactions. *Phys. Rev. B*, 93:075129, 2016. [s. 14 oraz 15.]

- [125] F. Domínguez, J. Cayao, P. San-Jose, R. Aguado, A. L. Yeyati, oraz E. Prada. Zero-energy pinning from interactions in Majorana nanowires. *npj Quantum Mater.*, 2:13, 2017. [s. 14, 15, 63, 85, oraz 91.]
- [126] A. Manolescu, D. C. Marinescu, oraz T. D. Stanescu. Coulomb interaction effects on the Majorana states in quantum wires. *J. Phys. Condens. Matter*, 26:172203, 2014. [s. 15, 63, oraz 91.]
- [127] Y. Peng, F. Pientka, L. I. Glazman, oraz F. von Oppen. Strong Localization of Majorana End States in Chains of Magnetic Adatoms. *Phys. Rev. Lett.*, 114:106801, 2015. [s. 15 oraz 91.]
- [128] R. Thomale, S. Rachel, oraz P. Schmitteckert. Tunneling spectra simulation of interacting Majorana wires. *Phys. Rev. B*, 88:161103(R), 2013. [s. 15, 24, 40, 79, oraz 91.]
- [129] J.-J. Miao, H.-K. Jin, F.-C. Zhang, oraz Y. Zhou. Majorana zero modes and long range edge correlation in interacting Kitaev chains: analytic solutions and density-matrix-renormalization-group study. *Sci. Rep.*, 8(1):488, 2018. [s. 15.]
- [130] H. T. Ng. Decoherence of interacting Majorana modes. *Sci. Rep.*, 5:12530, 2015. [s. 15, 16, 73, 91, oraz 141.]
- [131] J.-J. Miao, H.-K. Jin, F.-C. Zhang, oraz Y. Zhou. Exact Solution for the Interacting Kitaev Chain at the Symmetric Point. *Phys. Rev. Lett.*, 118:267701, 2017. [s. 15.]
- [132] P. Jordan oraz E. Wigner. Über das Paulische Äquivalenzverbot. *Z. Phys.*, 47(9):631, 1928. [s. 15.]
- [133] N. M. Gergs, L. Fritz, oraz D. Schuricht. Topological order in the Kitaev/Majorana chain in the presence of disorder and interactions. *Phys. Rev. B*, 93:075129, 2016. [s. 16, 17, 24, 63, 79, oraz 91.]
- [134] S. Das Sarma, M. Freedman, oraz C. Nayak. Majorana zero modes and topological quantum computation. *npj Quantum Inf.*, 1:15001, 2015. [s. 19, 21, 27, 33, 34, 46, 89, oraz 105.]
- [135] G. Kells. Many-body Majorana operators and the equivalence of parity sectors. *Phys. Rev. B*, 92:081401, 2015. [s. 24, 46, oraz 65.]
- [136] M. Kozarzewski, M. Mierzejewski, oraz P. Prelovšek. Suppressed energy transport in the strongly disordered Hubbard chain. *Phys. Rev. B*, 99:241113(R), 2019. [s. 25 oraz 79.]
- [137] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, oraz F. Laloë. *Quantum mechanics*. Wiley, New York, NY, 1977. [s. 30.]
- [138] C. C. Adams. *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. American Mathematical Soc., 2004. [s. 30.]
- [139] L.-W. Yu oraz M.-L. Ge. More about the doubling degeneracy operators associated with Majorana fermions and Yang-Baxter equation. *Sci. Rep.*, 5:8102, 2015. [s. 30.]
- [140] L. H. Kauffman. Majorana fermions and representations of the braid group. *Int. J. Mod. Phys. A*, 33:1830023, 2018. [s. 30.]
- [141] M. A. Nielsen oraz I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 10th edition, 2011. [s. 33, 57, 89, oraz 101.]

- [142] S. Bravyi oraz A. Kitaev. Universal quantum computation with ideal Clifford gates and noisy ancillas. *Phys. Rev. A*, 71:022316, 2005. [s. 34, 89, oraz 108.]
- [143] J. W. Negele oraz H. Orland. *Quantum many-particle systems*. Advanced book classics. Westview, Boulder, CO, 1988. Addison-Wesley edition. [s. 37.]
- [144] A. L. Fetter oraz J. D. Walecka. *Quantum theory of many-particle systems*. Dover Books on Physics. Dover, New York, NY, 2003. [s. 37.]
- [145] A. W. Sandvik. Computational studies of quantum spin systems. *ATP Conf. Proc.*, 1297(1):135–338, 2010. [s. 37.]
- [146] P. Coleman. *Introduction to Many-Body Physics*. Cambridge University Press, 2015. [s. 37.]
- [147] E. F. Beckenbach. *Applied Combinatorial Mathematics*. 1964. [s. 39.]
- [148] C. Sanderson oraz R. Curtin. Armadillo: a template-based C++ library for linear algebra. *J. Open Source Softw.*, 1:26, 2016. [s. 42.]
- [149] C. Sanderson oraz R. Curtin. Practical Sparse Matrices in C++ with Hybrid Storage and Template-Based Expression Optimisation. *Math. Comput. Appl.*, 24(3), 70, 2019. [s. 42.]
- [150] A. N. Krylov. On the numerical solution of equation by which are determined in technical problems the frequencies of small vibrations of material systems. *Math. Comput.*, 4:491, 1931. [s. 43.]
- [151] R. B. Lehoucq oraz D. C. Sorensen. Deflation Techniques for an Implicitly Restarted Arnoldi Iteration. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 17:789, 1996. [s. 43.]
- [152] M. Mierzejewski, P. Prelovšek, oraz T. Prosen. Identifying Local and Quasilocal Conserved Quantities in Integrable Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 114:140601, 2015. [s. 45.]
- [153] M. Mierzejewski, T. Prosen, oraz P. Prelovšek. Approximate conservation laws in perturbed integrable lattice models. *Phys. Rev. B*, 92:195121, 2015. [s. 45, 47, oraz 50.]
- [154] M. Serbyn, Z. Papić, oraz D. A. Abanin. Local Conservation Laws and the Structure of the Many-Body Localized States. *Phys. Rev. Lett.*, 111:127201, 2013. [s. 45.]
- [155] D. A. Huse, R. Nandkishore, oraz V. Oganesyan. Phenomenology of fully many-body-localized systems. *Phys. Rev. B*, 90:174202, 2014. [s. 45.]
- [156] A. Chandran, I. H. Kim, G. Vidal, oraz D. A. Abanin. Constructing local integrals of motion in the many-body localized phase. *Phys. Rev. B*, 91:085425, 2015. [s. 45.]
- [157] J. Z. Imbrie, V. Ros, oraz A. Scardicchio. Local integrals of motion in many-body localized systems. *Ann. Phys. (Berl.)*, 529:1600278, 2017. [s. 45.]
- [158] M. Mierzejewski, M. Kozarzewski, oraz P. Prelovšek. Counting local integrals of motion in disordered spinless-fermion and Hubbard chains. *Phys. Rev. B*, 97:064204, 2018. [s. 45.]

- [159] G. Goldstein oraz C. Chamon. Exact zero modes in closed systems of interacting fermions. *Phys. Rev. B*, 86:115122, 2012. [s. 46 oraz 71.]
- [160] D. V. Else, P. Fendley, J. Kemp, oraz C. Nayak. Prethermal Strong Zero Modes and Topological Qubits. *Phys. Rev. X*, 7:041062, 2017. [s. 46 oraz 71.]
- [161] J. Kemp, N. Y. Yao, C. R. Laumann, oraz P. Fendley. Long coherence times for edge spins. *J. Stat. Mech.: Theory Exp.*, 2017:063105, 2017. [s. 46 oraz 71.]
- [162] J. Alicea oraz P. Fendley. Topological Phases with Parafermions: Theory and Blueprints. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 7:119, 2016. [s. 46 oraz 64.]
- [163] M. Reed oraz B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. IV Analysis of Operators*. Academic Press, New York, 1978. [s. 48.]
- [164] P. Prelovšek, M. Mierzejewski, O. Barišić, oraz J. Herbrych. Density correlations and transport in models of many-body localization. *Ann. Phys. (Berl.)*, 529:1600362, 2017. [s. 49.]
- [165] M. Rigol oraz B. S. Shastry. Drude weight in systems with open boundary conditions. *Phys. Rev. B*, 77:161101, 2008. [s. 49.]
- [166] J. Sirker, N. P. Konstantinidis, F. Andraschko, oraz N. Sedlmayr. Locality and thermalization in closed quantum systems. *Phys. Rev. A*, 89:042104, 2014. [s. 49.]
- [167] W. Magnus. On the exponential solution of differential equations for a linear operator. *Commun. Pure Appl. Math.*, 7:649, 1954. [s. 54.]
- [168] C. Moler oraz C. Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Rev.*, 45:3, 2003. [s. 55.]
- [169] C. Runge. Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Math. Ann.*, 46:167, 1895. [s. 55.]
- [170] W. Kutta. Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen. *Zeit. Math. Phys.*, 46:435, 1901. [s. 55.]
- [171] E. Suli oraz D. Mayers. *An introduction to numerical analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. [s. 55.]
- [172] G. Torres-Vega. Chebyshev scheme for the propagation of quantum wave functions in phase space. *J. Chem. Phys.*, 99:1824, 1993. [s. 55.]
- [173] A. Weiße, G. Wellein, A. Alvermann, oraz H. Fehske. The kernel polynomial method. *Rev. Mod. Phys.*, 78:275, 2006. [s. 55.]
- [174] H. Fehske, J. Schleede, G. Schubert, G. Wellein, V. S. Filinov, oraz A. R. Bishop. Numerical approaches to time evolution of complex quantum systems. *Phys. Lett. A*, 373:2182, 2009. [s. 55.]

- [175] A. Alvermann, H. Fehske, oraz P. B. Littlewood. Numerical time propagation of quantum systems in radiation fields. *New J. Phys.*, 14:105008, 2012. [s. 55.]
- [176] Y. Aharonov oraz J. Anandan. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1593, 1987. [s. 57.]
- [177] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 392:45, 1984. [s. 57.]
- [178] T. Karzig, A. Rahmani, F. von Oppen, oraz G. Refael. Optimal control of Majorana zero modes. *Phys. Rev. B*, 91:201404, 2015. [s. 57.]
- [179] C. S. Amorim, K. Ebihara, A. Yamakage, Y. Tanaka, oraz M. Sato. Majorana braiding dynamics in nanowires. *Phys. Rev. B*, 91:174305, 2015. [s. 57.]
- [180] J. Anandan, J. Christian, oraz K. Wanelik. Resource Letter GPP-1: Geometric Phases in Physics. *Am. J. Phys.*, 65:180, 1997. [s. 58.]
- [181] D. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson international edition. Pearson Prentice Hall, 2005. [s. 58.]
- [182] N. Mukunda oraz R. Simon. Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism. *Ann. Phys.*, 228:205, 1993. [s. 58.]
- [183] F. D. M. Haldane. 'Luttinger liquid theory' of one-dimensional quantum fluids. I. Properties of the Luttinger model and their extension to the general 1D interacting spinless Fermi gas. *J. Phys. C*, 14:2585, 1981. [s. 63 oraz 91.]
- [184] S. Gangadharaiah, B. Braunecker, P. Simon, oraz D. Loss. Majorana edge states in interacting one-dimensional systems. *Phys. Rev. Lett.*, 107:036801, 2011. [s. 63 oraz 91.]
- [185] A. Vuik, D. Eeltink, A. R. Akhmerov, oraz M. Wimmer. Effects of the electrostatic environment on the Majorana nanowire devices. *New J. Phys.*, 18:033013, 2016. [s. 63.]
- [186] R. M. Lutchyn, T. D. Stanescu, oraz S. Das Sarma. Search for Majorana fermions in multiband semiconducting nanowires. *Phys. Rev. Lett.*, 106:127001, 2011. [s. 63.]
- [187] A. R. Akhmerov, J. P. Dahlhaus, F. Hassler, M. Wimmer, oraz C. W. J. Beenakker. Quantized Conductance at the Majorana Phase Transition in a Disordered Superconducting Wire. *Phys. Rev. Lett.*, 106:057001, 2011. [s. 63.]
- [188] X. Chen, Z.-C. Gu, oraz X.-G. Wen. Classification of gapped symmetric phases in one-dimensional spin systems. *Phys. Rev. B*, 83:035107, 2011. [s. 63.]
- [189] L. Fidkowski oraz A. Kitaev. Effects of interactions on the topological classification of free fermion systems. *Phys. Rev. B*, 81:134509, 2010. [s. 64.]

- [190] A. A. Abrikosov, I. Dzyaloshinskii, L. P. Gorkov, oraz R. A. Silverman. *Methods of quantum field theory in statistical physics*. Dover, New York, NY, 1975. [s. 67.]
- [191] G. D. Mahan. *Many Particle Physics, Third Edition*. Plenum, New York, 2000. [s. 67.]
- [192] H. Matsui, T. Sato, T. Takahashi, S.-C. Wang, H.-B. Yang, H. Ding, T. Fujii, T. Watanabe, oraz A. Matsuda. BCS-like Bogoliubov quasiparticles in high-T_c superconductors observed by angle-resolved photoemission spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 90:217002, 2003. [s. 84.]
- [193] D. Chevallier oraz J. Klinovaja. Tomography of Majorana fermions with STM tips. *Phys. Rev. B*, 94:035417, 2016. [s. 84.]
- [194] E. Dumitrescu, B. Roberts, S. Tewari, J. D. Sau, oraz S. Das Sarma. Majorana fermions in chiral topological ferromagnetic nanowires. *Phys. Rev. B*, 91:094505, 2015. [s. 85.]
- [195] A. Ptak, A. Cichy, oraz T. Domański. Quantum engineering of Majorana quasiparticles in one-dimensional optical lattices. *J. Phys.: Condens. Matter*, 30:355602, 2018. [s. 85.]
- [196] F. Peñaranda, R. Aguado, P. San-Jose, oraz E. Prada. Quantifying wave-function overlaps in inhomogeneous Majorana nanowires. *Phys. Rev. B*, 98:235406, 2018. [s. 85.]
- [197] Y.-H. Chan, C.-K. Chiu, oraz K. Sun. Multiple signatures of topological transitions for interacting fermions in chain lattices. *Phys. Rev. B*, 92:104514, 2015. [s. 91.]
- [198] J. S. Hofmann, F. F. Assaad, oraz A. P. Schnyder. Edge instabilities of topological superconductors. *Phys. Rev. B*, 93:201116, 2016. [s. 91.]
- [199] Q.-B. Cheng, J. He, oraz S.-P. Kou. Verifying non-Abelian statistics by numerical braiding Majorana fermions. *Phys. Lett. A*, 380:779, 2016. [s. 95.]
- [200] M. Ezawa. Non-Abelian braiding of Majorana-like edge states and scalable topological quantum computations in electric circuits, 2019. arXiv:1907.06911. [s. 95.]
- [201] F. H. L. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper, oraz V. E. Korepin. *The One-Dimensional Hubbard Model*. Cambridge University Press, 2005. [s. 98.]
- [202] J. Klinovaja oraz D. Loss. Composite Majorana fermion wave functions in nanowires. *Phys. Rev. B*, 86:085408, 2012. [s. 105.]
- [203] S. Bravyi. Universal quantum computation with the $v = 5/2$ fractional quantum Hall state. *Phys. Rev. A*, 73:042313, 2006. [s. 105.]
- [204] N. E. Bonesteel, L. Hormozi, G. Zikos, oraz S. H. Simon. Braid topologies for quantum computation. *Phys. Rev. Lett.*, 95:140503, 2005. [s. 109.]
- [205] S. Trebst, M. Troyer, Z. Wang, oraz A. W. W. Ludwig. A Short Introduction to Fibonacci Anyon Models. *Prog. Theor. Phys. Supp.*, 176:384–407, 2008. [s. 109.]