

Lista zadań 1b – Aparat matematyczny

Andrzej Więckowski, Krzysztof Gawarecki

1. Udowodnić nierówność Schwarz: $|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$.
2. Pokazać, że jeżeli dla operatorów A, B, C spełniona jest następująca relacja: $[A, B] = iC$, to $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle C\rangle|$, gdzie: $\Delta A = \sqrt{(A - \langle A\rangle)^2}$ i $\langle \cdot \rangle$ to wartość oczekiwana.
3. Znaleźć funkcje własne operatora położenia \hat{x} .
4. Znaleźć funkcje własne operatora pędu \hat{p} .
5. Pokazać, że dla fali $\psi(\vec{r}, t) = N \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$, całka normalizacyjna nie istnieje.
- 6* Pokazać, że $\forall \psi \in \mathcal{H} \langle \psi|A|\psi\rangle = \langle \psi|B|\psi\rangle \rightarrow \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H} \langle \phi_1|A|\phi_2\rangle = \langle \phi_1|B|\phi_2\rangle \quad (A = B)$
7. Udowodnić, że:

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R},$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}.$$

8. Funkcja falowa pewnej cząstki jest określona przez $\psi(x) = N e^{-\alpha x^2}$.
 - (a) Wyznaczyć stałą normalizacyjną N .
 - (b) Znaleźć reprezentację pędową $\tilde{\psi}(p_x)$ funkcji falowej.
 - (c) Obliczyć średnią wartość położenia $\langle x \rangle$, pędu $\langle p_x \rangle$ oraz ich odchylenia standardowe $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_{p_x} \rangle$