Podstawy fizyki kwantowej

Lista zadań 1 – Aparat matematyczny

Andrzej Więckowski

1. Pokazać, że wartości własne operatorów hermitowskich są liczbami rzeczywistymi.
2. Pokazać $(\langle n|m\rangle)^* = \langle m|n\rangle$ oraz $(\langle n|A|m\rangle)^* = \langle m|A^\dagger|n\rangle$.
3. Unormować stany: $|\psi\rangle = |0\rangle - i|1\rangle$, $|\phi\rangle = 3i|0\rangle - |1\rangle$ ($|0\rangle, |1\rangle$ są unormowane).
4. Definiujemy komutator operatorów $[A, B] = AB - BA$ oraz antykomutator $\{A, B\} = AB + BA$. Pokazać następujące związki (anty-)komutacyjne:
   (a) $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
   (b) $[A, B] = -[B, A]$, $\{A, B\} = \{B, A\}$;
   (c) $[\alpha, A] = 0$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$;
   (d) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$;
   (e) $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$.
   (f) $[A, B] = 0 \to [f(A), B] = 0$
5. Pokazać, że jeśli $[A, B] = 0$, to operatory mają wspólne stany własne.
6. Policzyć komutatory operatora położenia $\hat{x}_i = x_i$ oraz pędu $\hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$ (uwaga, czasami będę pomijać symbol `hat` $\hat{\cdot}$):
   (a) $[\hat{x}_i, \hat{x}_j]$, $[\hat{p}_i, \hat{p}_j]$;
   (b) $[\hat{x}_i, \hat{p}_j]$, $[\hat{x}_i, \hat{p}_j^2]$.
7. Pokazać hermitowskość operatora $\hat{p}_i$. ($\star$ pokazać bez całkowania)
8. Policzyć komutatory dla orbitalnego momentu pędu $L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k$:
   (a) $[L_i, x_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} x_k$
   (b) $[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k$
   (c) $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k$
   (d) $[L_i, \vec{L}^2] = 0$
9. Udowodnić nierówność Schwarza: $|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$
10. Pokazać, że jeżeli dla operatorów A, B, C spełniona jest następująca relacja: $[A, B] = iC$, to $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle C\rangle|$, gdzie: $\Delta A = \sqrt{(A - \langle A\rangle)^2}$ i $\langle \cdot \rangle$ to wartość oczekiwana.