

## Lista zadań 1a – Aparat matematyczny

Andrzej Więckowski

1. Pokazać, że wartości własne operatorów hermitowskich są liczbami rzeczywistymi.
2. Pokazać  $(\langle n|m \rangle)^* = \langle m|n \rangle$  oraz  $(\langle n|A|m \rangle)^* = \langle m|A^\dagger|n \rangle$ .
3. Unormować stany:  $|\psi\rangle = |0\rangle - i|1\rangle$ ,  $|\phi\rangle = 3i|0\rangle - |1\rangle$  ( $|0\rangle, |1\rangle$  są unormowane).
4. Definiujemy komutator operatorów  $[A, B] = AB - BA$  oraz antykomutator  $\{A, B\} = AB + BA$ . Pokazać następujące związki (anty-)komutacyjne:
  - (a)  $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$ , gdzie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;
  - (b)  $[A, B] = -[B, A]$ ,  $\{A, B\} = \{B, A\}$ ;
  - (c)  $[\alpha, A] = 0$ , gdzie  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
  - (d)  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ ;
  - (e)  $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ .
  - (f)  $[A, B] = 0 \rightarrow [f(A), B] = 0$
5. Policzyc komutatory operatora położenia  $\hat{x}_i = x_i$  oraz pędu  $\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$  (uwaga, czasami będę pomijał symbol  $\hat{\phantom{x}}$ ):
  - (a)  $[\hat{x}_i, \hat{x}_j], [\hat{p}_i, \hat{p}_j]$ ;
  - (b)  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j], [\hat{x}_i, \hat{p}_j^2]$ .
6. Pokazać, że jeśli  $[A, B] = 0$ , to operatory mają wspólne stany własne.
7. Pokazać hermitowskość operatora  $\hat{p}_i$ . (★ pokazać bez całkowania)
8. Policzyc komutatory dla orbitalnego momentu pędu  $L_i = \varepsilon_{ijk}x_jp_k$ :
  - (a)  $[L_i, x_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}x_k$
  - (b)  $[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}p_k$
  - (c)  $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$
  - (d)  $[L_i, \vec{L}^2] = 0$