

Podstawy fizyki kwantowej

Lista zadań 4 – Spin

Andrzej Więckowski

Macierze Pauliego można przedstawić w następującej postaci:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definicja operatora spinu: $S^i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i$. Rozważamy cząstki o spinie $S = \frac{1}{2}$.

1. Pokazać, że:
 - (a) $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$;
 - (b) $\det(\sigma_i) = -1$;
 - (c) $i\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \mathbb{1}$;
2. Sprawdzić następujące relacje:
 - (a) $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sigma^{ijk}\sigma_k$;
 - (b) $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$;
3. Udowodnić, że $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma_k$;
4. Pokazać, że $S^2 = \frac{3}{4} = S(S+1)$.
5. Definiujemy operatory drabinkowe $S^\pm = S^x \pm iS^y$, pokazać, że:
 - (a) $[S^+, S^-] = 2S^z$;
 - (b) $[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm$;
 - (c) $S^2 = \vec{S} \cdot \vec{S} = (S^x)^2 + (S^y)^2 + (S^z)^2 = \frac{1}{2}(S^+S^- + S^-S^+) + (S^z)^2$.
6. Stany $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ są stanami własnymi operatora S^z . Sprawdzić działanie S^\pm na $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$.
7. Układ jest opisany danym hamiltonianem: $\hat{H} = \Delta S^x + J(S^+S^- + S^-S^+)$
 - (a) Wyznaczyć energie oraz stany własne tego hamiltonianu;
 - (b) Rozwiązać równanie Schrödingera $\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$, gdzie warunki początkowe $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ to: $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$ (podpowiedź: aby rozwiązać układ równań różniczkowych policz pochodną jednego równania, aby otrzymać drugą pochodną \ddot{a} , a następnie dokonaj podstawienia $a = e^{\lambda t}$).