Podstawy fizyki kwantowej

Lista zadań 2 – Bariery, studnie i tunelowanie

Andrzej Więckowski

1. Pokazać, że $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = i\langle[\hat{H}, A]\rangle + \langle\dot{A}\rangle$.

2. **Twierdzenie Ehrenfesta**—pokazać, że (dla cząstki o masie m w polu $\vec{F} = -\nabla V$):
   (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{r}\rangle = \frac{1}{m}\langle\vec{p}\rangle$;
   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{p}\rangle = -\langle\nabla V\rangle$.

3. **Równanie Schrödingera**
   (a) Rozseparować równanie: $i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \frac{p^2}{2m}\psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}, t)$, na część czasową i część przestrzenną $[\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r})f(t)]$.
   (b) Rozwiązanie części czasowej: $f(t) = Ce^{-iEt}$.
   (c) Pokazać, że $\psi(\vec{r}, t)$ to rozwiązanie stacjonarne i $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ nie zależy jawnie od czasu.

4. **Nieskończona bariera potencjału**—znaleźć rozwiązania równania $\psi(x, t)$ dla cząstki o masie m w potencjale $V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x > 0 \end{cases}$, dla $V_0 \to \infty$.

5. **Nieskończona studnia potencjału**—znaleźć rozwiązania równania $\psi_n(x, t)$ dla cząstki o masie m w potencjale $V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ V_0, & L < x < 0 \end{cases}$, dla $V_0 \to \infty$. Dla cząstki w stanie $|\psi\rangle = |\psi_n\rangle$ znaleźć:
   (a) poziomy energetyczne E_n,
   (b) średnie położenie $\langle x\rangle$,
   (c) średni pęd $\langle p\rangle$, (czy możemy policzyć $\langle p\rangle$ znając tylko $\langle x\rangle$?),
   (d) powtórzyć podpunkty (b), (c) dla cząstki w stanie $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_n\rangle + i|\psi_m\rangle)$ dla $n \neq m$.

6. **Tunelowanie, przejście przez „krawężnik”**—znaleźć rozwiązania równania $\psi(x, t)$ dla cząstki o masie m w potencjale $V(x) = \begin{cases} 0, & L < x < 0 \\ V_0, & 0 < x < L \end{cases}$, dla $V_0 > 0$. Rozważyć dwa przypadki $E < V_0$ oraz $E > V_0$. Jak wyraża się transmisja $T = \frac{|\psi_{\text{tran}}|^2}{|\psi_{\text{in}}|^2}$ dla tych przypadków (ψ_{tran} część po przejściu, a ψ_{in} część padająca)?