

## Lista zadań 2 – Bariery, studnie i tunelowanie

Andrzej Więckowski

1. Pokazać, że dla fali  $\psi(\vec{r}, t) = N \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$ , całka normalizacyjna nie istnieje.
2. Pokazać, że  $\frac{d}{dt}\langle A \rangle = i\langle [\hat{H}, A] \rangle + \langle \dot{A} \rangle$ .
3. **Twierdzenie Ehrenfesta**—pokazać, że (dla cząstki o masie  $m$  w polu  $\vec{F} = -\nabla V$ ):
  - (a)  $\frac{d}{dt}\langle \vec{r} \rangle = \frac{1}{m}\langle \vec{p} \rangle$ ;
  - (b)  $\frac{d}{dt}\langle \vec{p} \rangle = -\langle \nabla V \rangle$ .
4. (a) Rozseparować równanie:  $i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \frac{p^2}{2m}\psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}, t)$ , na część czasową i część przestrzenną [ $\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r})f(t)$ ].  
(b) Rozwiązanie części czasowej:  $f(t) = Ce^{-iEt}$ .  
(c) Pokazać, że  $\psi(\vec{r}, t)$  to rozwiązanie stacjonarne i  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  nie zależy jawnie od czasu.
5. **Nieskończona bariera potencjału**—znaleźć rozwiązania równania  $\psi(\vec{r}, t)$  dla cząstki o masie  $m$  w potencjale  $V(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x > 0 \end{cases}$ , dla  $V_0 \rightarrow \infty$ .
6. **Nieskończona studnia potencjału**—znaleźć rozwiązania równania  $\psi(\vec{r}, t)$  dla cząstki o masie  $m$  w potencjale  $V(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & |x| < x_0 \\ V_0, & |x| > x_0 \end{cases}$ , dla  $V_0 \rightarrow \infty$ . Znaleźć poziomy energetyczne cząstki  $E(n)$ , średnie położenie  $\langle x \rangle$ , średni pęd  $\langle p \rangle$ .
7. **Tunelowanie, przejście przez „krawężnik”**—znaleźć rozwiązania równania  $\psi(\vec{r}, t)$  dla cząstki o masie  $m$  w potencjale  $V(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & L < x < 0 \\ V_0, & 0 < x < L \end{cases}$ , dla  $V_0 > 0$ . Rozważyć dwa przypadki  $E < V_0$  oraz  $E > V_0$ . Jak wyraża się transmisja  $T = \frac{|\psi_{\text{tran}}|^2}{|\psi_{\text{in}}|^2}$  dla tych przypadków ( $\psi_{\text{tran}}$  część po przejściu, a  $\psi_{\text{in}}$  część padająca)?