

Lista zadań 3 – Oscylator harmoniczny

Andrzej Więckowski

Hamiltonian oscylatora harmonicznego: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$, $k = m\omega^2$. Dla układu opisanym następującym hamiltonianem rozwiązać zadania:

1. Pokazać, że energie własne $E_n > 0$ (podpowiedź: $[x, p] \neq 0$);
2. Zdefiniujemy operatory kreacji i anihilacji: $a^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega x)$, $a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega x)$:
 - (a) wyrazić hamiltonian za pomocą a, a^\dagger : $H = (a^\dagger a + \frac{1}{2})\hbar\omega$;
 - (b) sprawdzić, że $[a, a^\dagger] = 1$;
 - (c) zdefiniujemy $N = a^\dagger a$ i pokażmy, że: $[N, a] = -a$, $[N, a^\dagger] = a^\dagger$, $[H, a] = -\hbar\omega$, $[H, a^\dagger] = \hbar\omega$;
 - (d) $|n\rangle$ jest stanem własnym oscylatora, sprawdzić jakie jest działanie operatorów kreacji anihilacji na ten stan: $a|n\rangle$, $a^\dagger|n\rangle$;
3. Definiujemy stan podstawowy $|0\rangle$: $a|0\rangle=0$, ile wynosi E_0 ? Ile wynosi E_n ?
4. Przedstawić operatory a, a^\dagger, x, p w postaci macierzy;
5. Znaleźć funkcję falową dla stanu podstawowego, pokazać jak generować funkcje dla n -tego stanu;
6. Policzyc $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ w stanie $|n\rangle$;
7. Policzyc $\langle x \rangle$ dla superpozycji stanów $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, jak to się zmienia w czasie? Policzyc średnią $\langle \bar{x} \rangle = \int_0^{T=2\pi/\omega} dt \langle x(t) \rangle$.