目　　录

一、基本概念 1

1.1 常用参数的实际意义 1

1.2 新古典主义 (Neoclassical) 2

1.3 卡尔多事实 (Kaldor Facts) 4

二、Solow 模型 5

2.1 卡布道格拉斯 (Cobb-Douglass) 生产函数的性质 5

2.2 基本概念和等式 6

2.2.1 基本假设 6

2.2.2 资本运行规律 6

2.3 稳态以及参数变化对稳态影响 8

2.4 自由市场和各方最优 9

2.5 黄金储蓄率和动态无效 11

2.5.1 黄金储蓄率 11

2.5.2 动态无效（帕累托无效） 13

2.6 平衡增长路径 14

2.6.1capital per effective labor 的概念 14

2.6.2 平衡增长路径 16

2.7 新的生产函数 CES 17

三、Ramsey 模型 20

3.1 基本概念和等式 20

3.2 自由市场下的均衡......21
3.2.1 HH 最优的求解......22
3.2.2 Firms 最优的求解......25
3.3 Social Planner 的最优决策......29
3.4 稳态与动态有效性......30
3.5 税收对模型的影响......31
3.5.1 不会影响 Equilibrium 的税收......32
3.5.2 会影响 Equilibrium 的税收......32
3.5.3 各路神奇的税收......33
四、OLG 模型......34
4.1 基本概念和等式......34
4.2 工资和利率对储蓄的影响......35
4.3 自由市场下的均衡......36
4.3.1 HH 的最优决策......37
4.3.2 Firm 的最优决策......38
4.3.3 Market Clear 推出的稳态......38
4.4 稳态与动态无效性......39
4.4.1 Steady State 的计算......39
4.4.1 黄金储蓄......40
4.5 政府的税收、债券和社保......40
4.4.1 税收对 OLG 模型的影响......40
4.4.2 政府债券对 OLG 模型的影响......42
4.4.3 社保对 OLG 模型的影响......42
4.4.4 更复杂的政府行为（第二次 midterm 例题）......43

五、Endogenous 模型 48
5.1 基本概念和等式 48
5.2 长期增长条件 49
5.3 罗默外部模型 (Romer’s Externality Model) 50
5.3.1 概念与基本等式 50
5.3.2 自由市场的情况 50
5.3.3 党中央的决策 52
5.4 人力资本模型 (Lucas Model) 52
5.4.1 基本假设和等式 52
5.4.2 如何求解 Social Planner Problem 53
5.4.3 长期发展 (Long-run Growth) 的条件 55
5.4.4 平衡增长路径的证明 56
5.5 二部门分离的模型 (Two Sectors) 59
5.5.1 模型假设与基本等式 59
5.5.2 厂商的最优决策 60
5.5.3 价格或资金配比的决定 61
5.5.4 平衡增长路径 62
六、RBC 模型 64
6.1 基本概念和等式 64
6.2 自由市场下的均衡 65
6.2.1 厂商的最优决策 65
6.2.2 HH 的最优决策 65
6.2.3 Firm 和 HH 的均衡 67
6.3 唯一的考点——S 恒定的情况 68

6.3.1 储蓄率恒定的条件 68
6.3.2 劳动力供给恒定的事实 69
6.3.3 技术冲击对经济产出的作用 70
七、消费行为研究 72
7.1 消费行为的特点 72
7.1.1 消费的相对稳定性 72
7.1.2 关于定价 72
7.2 包含两个周期的确定性模型 73
7.2.1 基本假设和公式 73
7.2.2 CRRA 下的跨期替代弹性 74
7.2.3 因素变动对消费选择的影响 75
*7.2.4（跨期）替代弹性的实际意义 77
7.3 包含多个周期的确定性模型 81
7.3.1 基本假设和公式 81
7.3.2 Permanent and transitory disturbance 82
7.4 包含两个周期的不确定性模型 83
7.5 霍尔随机漫步模型——包含多个周期的不确定性模型 84
7.5.1 随机漫步的基本意义 84
7.5.2 简单的多周期不确定性模型 85
7.5.3 随机漫步理论的实证研究 86
7.5.4 凯恩斯消费函数和 permanent income 的推论 87

一、基本概念

1.1 常用参数的实际意义

F：生产函数

Y：生产总量

K：社会资本总量

I：投资总量

C：消费总量

S：储蓄总量

以上这些经济参数的单元都不是“元”，这些都是东西，如果有单位，可以是“件”，如果要用货币来衡量，则需要乘以价格。

K 也不是常说的货币资本，而是“以实物形式存在的生产要素”。

C 并不是商业意义上的消费，而是“消耗”。是经济体中所有个体为了获得效用而消耗掉的产品。而 I 是经济体中所有个体为了创造更多的产品而消耗掉的产品。

比如买一辆汽车用了两万刀，如果用于环美旅行了，最后报废，就是消费了两万刀。用于运营 Uber 了最后报废，就是投资行为（因为消耗掉了这辆车但是生产出了更多的劳务）。

这里的 S 储蓄也不是银行存款那种狭义的储蓄。它指的是这期生产出来，但是没有被消费掉，省下了的物质资源。

δ：资本折旧速率（不是通胀率，和货币没有关系，是物质资源在生产过程中的损耗。

1.2 新古典主义 (Neoclassical)

新古典主义增长模型的特点：

①经济产出生产是关于生产要素（资本、劳动力、技术）的函数

②资本增加等于投资减去上期资本折旧

新古典主义生产函数的性质：

①齐一次

$$F(\mu K, \mu L) = \mu F(K, L)$$

这个性质表明新古典注意生产函数是规模效益不变的（Constant return on scale）。当全部投入的要素都增加一个百分比，产出也会增加同样的百分比。

②一阶导数大于 0，二阶导数小于 0（凹函数）

③最终收敛（之后会证明）

④欧拉定理适用：

$$Y = F(K, L) = F_K K + F_L L \quad \text{（非常重要）}$$

或

$$\varepsilon_K + \varepsilon_L = 1 \quad \text{（不重要）}$$

欧拉定理在经济学中又称分配尽净定理。这个定理的内在含义是，在自由竞争市场中，所有生产要素获得的报酬总量正好等于生产出产品的总量。在非常重要的等式中，F_K和F_L是资本和劳动力这两种生产要素的价格，K 和 L 是这两种生产要素的使用量。所以等式右边就是两种生产要素要求的总报酬，等于等式左边的总产出。

生产函数性质的推论：

$$y = f(k) = F(k,1) \quad ①$$

$$F_K(K,L) = f'(k) \quad ②$$

$$F_L(K,L) = f(k) - kf'(k) \quad ③$$

其中$\mathrm{k} = \frac{K}{L}$，表示每劳动力的平均资本量（Capital per labor）

$\mathrm{y} = \frac{Y}{L} = f(k)$，表示每劳动力的产出。可以看出，在这种模型下，每劳动力的产出只与每劳动力平均资本量有关，与劳动力数量无关（因为规模效益不变）。

对恒等式①两边求导可得$\mathrm{F}_K(\mathrm{k},1) = \mathrm{f'}(\mathrm{k})$

因为$\mathrm{F}(\mathrm{K},\mathrm{L})$是关于 K 和 L 的齐一次函数，所以$\mathrm{F}_K(\mathrm{K},\mathrm{L})$是关于 K 和 L 的齐 0 次函数，那么根据欧拉定理，有$\mathrm{F}_K(\mathrm{k},1) = \mathrm{F}_K(\mathrm{K},\mathrm{L})$，所以有恒等式②成立。

等式③是由等式②和非常重要等式$\mathrm{F}(\mathrm{K},\mathrm{L}) = F_K K + F_L L$ 联立得出的。

1.3 卡尔多事实 (Kaldor Facts)

卡尔多事实是基于对西方国百年的经济增长的观测，总结出来的经验结论。由于解释事实是经济模型最重要的功能之一，所以很多之后的概念提出都会和卡尔多事实有关。它包含六个事实：

1) 生产速率稳定增长

2) 人均资本存量稳定增长

3) 实际利率大体稳定

4) 产出与资本的比例$\frac{Y_t}{K_t}$基本保持不变

5) 各种生产要素获得报酬的比例基本不变

6) 人均产出的增长率在各国之间有很大差别，收入和利润份额较高的国家倾向于有较高的资本一产出比例

二、Solow 模型

2.1 卡布道格拉斯 (Cobb-Douglass) 生产函数的性质

卡布道格拉斯生产函数是新古典主义生产函数中的一种。

一种最常见的简单形式的卡布道格拉斯函数是长这样的：

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

其中 Y 指本期生产总值，K 是期初资本总量，L 是期初劳动力总量，α是一个固定的参数。

卡布道格拉斯函数是关于 K 和 L 的齐一次函数，所以有新古典主义生产函数的所有性质：

$$\begin{cases} F(\mu K, \mu L) = \mu F(K, L) \\ Y = F(K, L) = F_K K + F_L L \\ \varepsilon_K + \varepsilon_L = 1 \\ F_K(K, L) = f'(k) \\ F_L(K, L) = f(k) - k f'(k) \end{cases}$$

这里的每个式子都有非常重要的含义。在 1.2 中已经给出，这里不再重复。

ε_K和ε_L表示资本和劳动这两种生产要素的弹性。在点(K_0, L_0)上的弹性为：

$$\begin{cases} \varepsilon_K = F_K(K_0, L_0) \dfrac{K_0}{F(K_0, L_0)} \\ \varepsilon_L = F_L(K_0, L_0) \dfrac{L_0}{F(K_0, L_0)} \end{cases}$$

这个了解就行，并不会考生产函数的弹性。

2.2 基本概念和等式

索罗模型的由来什么的就不说了，有兴趣的自己点进去看介绍。

2.2.1 基本假设

它有一个最基本的假设：**固定储蓄率 s**

这意味着索罗模型不是一个 optimal 的模型——个体在拿到 y 的收入之后，只能消费(1-s)y，储蓄 sy。

2.2.2 资本运行规律

如果我们把经济体中所有的商品都抽象成一样东西，那就是物质资本，capital。Capital 可以用来消费、可以用来存着、再投资去生产新的 capital。既然可以存着，就有了 capital 的跨期移动公式：

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

这个等式被称为 law of capital motion。它说 t+1 期可用于生产的资本和两个因素有关，第一个是 t 期已经在用了的资本，由于折旧δ的存在，还剩下$1-\delta$的部分还能在下期继续使用。第二个是 t 期新增的投资。

所以，想要下期资本多，增加本期投资就好了。但是投资不是你想投想投就能投的，因为有下面两个被成为 budget constrain 的不等式：

$$\begin{cases} Y \geq C + S \\ S \geq I \end{cases}$$

啥意思呢？第一个意思是，这一期如果只生产出来 Y 的商品，那么可供消费和储蓄的总量是不能超过这个生产总量的。

第二个不等式的意思是，如果一共只有 S 的储蓄，那么这期的总投资是不能超过这个储蓄量的。

如果这两个不等式都取等号：

$$\begin{cases} Y = C + S \\ S = I \end{cases}$$

那么第一个条件被成为**商品市场出清（Good Market Clearing）**，第二个被成为**资本市场出清（Capital Market Clearing）**。

市场出清可以理解为供求相等。比如商品市场出清就是商品的供给和需求相等，这意味着所有生产出来的商品都是有用的，要么用来消费，要么用来储蓄。资本市场出清就是资本的供给和需求相等，这意味着所有的储蓄，都投入到下期生产中，不会闲置着。

两个条件和初级宏微观里的 GDP 核算方法是相符的。

在简单的二部门经济中，支出法核算的 GDP 为：

$$Y = C + I$$

收入法计算的 GDP 为

$$Y = C + S$$

（已经忘了什么是 GDP 以及 GDP 和核算方法的，可以重新翻一下高鸿业的《西方经济学》）

所以有

$$I = S$$

市场出清的概念非常重要。之后的许多结论建立在市场出清条件上。

所以，把 I=S 代入$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$，得到了：

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + S_t$$

又因为在索罗模型中规定储蓄率固定为 s，那么$S_t = sY_t$，所以：

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sY_t$$

这个就是索罗模型中专用的 law of capital motion

此时，如果假设 t 期劳动力数量为L_t，劳动力以 n 的恒定速率增长——

$$L_{t+1} = (1+n)L_t$$

则 Law of capital motion 可以写成 intensive form：

$$L_{t+1}k_{t+1} = (1-\delta)k_tL_t + sy_tL_t$$

两边同除以L_{t+1}：

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)k_t}{(1+n)} + \frac{sy_t}{(1+n)}$$

因为 n 不会太大，所以为了方便计算上式一般写成约等式：

$$k_{t+1} \approx (1-\delta-n)k_t + sy_t \quad ①$$

2.3 稳态以及参数变化对稳态影响

①式其实是一个关于 k 的 差分方程：

$$k_{t+1} = (1-\delta-n)k_t + sk_t^{\alpha} \quad ②$$

因为$1-\delta-n<1$，$\alpha<1$并且$s<1$，所以这个差分方程决定的k_t的路径一定是收敛的（违背了卡尔多事实）。那个收敛点就叫做 steady state（稳态）。在 steady state 上有：

$$k_{t+1}=k_t=k^*$$

将上式代入②式，可得：

$$(\delta+n)k^*=s{k^*}^{\alpha} \quad ③$$

解得：

$$k^*=\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

③式有着特别的意义：在达到稳态的时候，所有新增的投资（等式右边）都用来弥补折旧和人口增长引起的人均资本减少（等式左边），以恰好保持人均资本不变。

2.4 自由市场和各方最优

这里自由市场(Decentralized)是对立于 social planner 的一个概念。

Social Planner 是经济模型中一个虚拟的人，他以整个经济体中的资源限制为 budget constrain，对经济运行进行规划，使得社会总体的效用最大。

而 Decentralized market 是由多个方面组成的市场。每个方面都以各自的资源限制为 budget constrain，对自己的经济行为进行规划，从而使自己的利益达到最大。

这两个概念无比重要，Decentralized Market 中的个体的最优决策有时恰好能和 Social Planner 的最优决策达成一致；有时则出现类似于囚徒困境的结局：各自最

优决策的结果并不是整体的最优。这正是经济学家们无比关心的，自由市场是否有效的问题。

这里的 Solow 模型的市场中有两方面的力量，一方面是厂商（firm），无数个小厂商之间没有差别，它们融资、招工、生产，盈利后给工人发工资，给投资者发利息。另一种是 Household（HH），他们工作、投资、消费、储蓄。

自由市场（Decentralized Market）在索罗模型中应用不多，因为索罗模型不是 optimal 的模型，HH 在里面没有决策的空间，每期拿到的收入必须消费掉(1-s)而留下 s

但是厂商在这里还是可以决策的。厂商可以决定的是 a)招多少工人用于生产 b)借多少资本用于生产，他们决策的目的是让利润最大化。设厂商利润为π：

$$\pi = F(K,L) - RK - WL$$

因为技术没有差别，所有厂商的生产函数都是 F，K 和 L 是厂商决定借入的资本量和雇佣的员工量，R 和 W 是由市场供求关系决定的资本的价格（利率）和劳动力的价格（工资）。

厂商最优的一阶条件（Firm FOC）：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial K} = F_K - R = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial L} = F_L - W = 0 \end{cases}$$

由新古典主义生产函数的性质：

$$\begin{cases} F_K(K,L) = f'(k) \\ F_L(K,L) = f(k) - kf'(k) \end{cases}$$

所以厂商最优决定了两种生产要素的价格：

$$\begin{cases} R = f'(k) \\ W = f(k) - kf'(k) \end{cases}$$

这个在索罗模型中没有什么用，但是在之后的所有模型中都是关键条件。

2.5 黄金储蓄率和动态无效

2.5.1 黄金储蓄率

因为索罗模型中规定了恒定的储蓄率，所以，又引入了黄金储蓄率这个概念。黄金储蓄率，和黄金没有毛关系。它指的是令稳态时，消费达到最大的储蓄率。用s_{gold}来表示。之所以有这个概念，是因为买买买是经济模型中个体获得快乐的唯一方式，所以在什么储蓄率下，可以让大家最大限度地买买买很重要。

因为商品市场出清，所以消费可以表示为：

$$\mathrm{C = Y - I = (1 - s)Y}$$

写成 intensive form：

$$\mathrm{c = (1 - s)y}$$

那么在稳态时：

$$c^* = (1 - s)y^* = (1 - s)f(k^*)$$

将已经用 law of capital motion 解出的k^*代入：

$$c^* = (1 - s)(\frac{s}{\delta + n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

这样就得到了c^*和 s 的关系式，对它求导就能知道让c^*最大时的s_{gold}的值了。但是这个函数太难导了，所以可以用一个 math trick 可以节省计算量。

根据 2.3 中的③式，在稳态时，所有新增的投资都用来弥补折旧和人口增长引起的人均资本减少

$$(\delta + n)k^* = sf(k^*)$$

而剩余部分的生产则全部用来消费了：

$$c^* = (1 - s)f(k^*)$$

两式相加可得c^*关于k^*的表达式：

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$$

对上式求导可得令c^*最大的k^*的值

$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = f'\left(k^*\right) - \left(\delta + n\right) = 0$$

解得

$${k^*}_{gold} = \left(\frac{\delta + n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

联立上式与k^*关于 s 的表达式：

$$k^* = (\frac{\delta + n}{s})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

就能解出s_{gold}：

$$s_{gold} = \alpha$$

2.5.2 动态无效（帕累托无效）

在这里动态无效（Dynamic Inefficiency）和帕累托无效（Pareto Inefficiency）是一个意思：一个经济体还可能在其他人效用水平不变的情况下，通过重新配置资源和产品，使得一个或一些人的效用水平有所提高。

在经济体达到 steady state 时，如果储蓄率为黄金储蓄率时，显然是帕累托有效的。因为此时的每期消费达到了最大。再去进行任何改变也无法提高效用。

但是，即便是储蓄率低于黄金储蓄率，经济体仍然是帕累托有效的。因为虽然提高储蓄率可以形成一个新的 steady state 使c^*更大。但是提高储蓄率的前提是减少当前 HH 的消费。换句话说，必须靠减少当前 HH 的效用，才能增加未来 HH 的效用。显然这仍然属于帕累托最优的情况。

可是如果储蓄率已经高于黄金储蓄率，那么我们可以通过降低储蓄率的方式来获得一个新的 steady state 使c^*更大（使未来的 HH 更优），且降低储蓄率不但不会令当前的 HH 收到损失，还会给当前的 HH 带来更多的效用。显然这符合帕累托无效的定义：一个经济体还可能在其他人效用水平不变的情况下，通过重新配置资源和产品，使得一个或一些人的效用水平有所提高。

所以在这里帕累托无效的等价数学表达为：

$$s > s_{gold}$$

又因为k^*和 s 存在着正相关关系：

$$k^* = (\frac{s}{\delta + n})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

所以另一个等价的数学表达为：

$$k^* > k_{gold}$$

2.6 平衡增长路径

平衡增长路径(Balance Growth Path)是指所有 intensive 的经济指标，都以某一个稳定的速率恒定增长。在$\mathrm{F(K,L)} = K^{\alpha}\mathrm{L}^{1-\alpha}$的索罗模型中，显然是不存在平衡增长路径的，因为之前已经论证过卡布道格拉斯生产函数的索罗模型是收敛的，k_t最终收敛于k^*，不可能实现永恒的稳定增长。

所以为了解释卡尔多事实，需要在生产函数中引入技术 A。于是有了这样的卡布道格拉斯函数：

$$Y = F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

其中 A 是技术因素，以 g 的速率稳定增长。

2.6.1capital per effective labor 的概念

对于包含 A 的生产函数，依然有 capital per labor：

$$k = \frac{K}{L}$$

另外定义 capital per effective labor:

$$\hat{k} = \frac{K}{AL}$$

和 output per effective labor：

$$\hat{y} = \frac{Y}{AL}$$

由于技术不断进步，此时的 capital per labor 显然是发散的，换句话说，capital per labor 在这种情况下是不存在 steady state 的。如果要在这个模型中找到收敛的量，就应该把不断增长的技术因素消除掉。这个收敛的量就是 capital per effective labor。

写出 Law of Capital Motion：

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sY_t$$

两边同除以$\mathrm{A}_{t+1}L_{t+1}$可得：

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{(1-\delta)\hat{k}_t}{(1+n+g+ng)} + \frac{s\hat{y}_t}{(1+n+g+ng)}$$

同理用不等式表达上式

$$\hat{k}_{t+1} \approx \left(1-\delta-n-g-ng\right)\hat{k}_t + s\hat{y}_t$$

当达到 capital per effective labor 的 steady state 的时候有$\hat{\mathrm{k}}_{\mathrm{t+1}} = \hat{\mathrm{k}}_{\mathrm{t}} = \hat{k}^*$

解得：

$$\hat{k}^* = (\frac{s}{\delta + n + g + ng})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

2.6.2 平衡增长路径

根据定义，平衡增长路径是指一系列经济指标以一个稳定的速率恒定增长。

我们已经求出来 capital per effective labor 收敛于$\hat{k}^*$，所以它肯定不是平衡增长的量。

但是 capital per labor

$$k_t = A_t \hat{k}_t$$

对于 t+1 时期：

$$k_{t+1} = A_{t+1} \hat{k}_{t+1}$$

所以在$\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t = \hat{k}^*$时

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + g$$

对于产出 Y 来说：

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = {k_{t+1}}^{\alpha} {A_t}^{1-\alpha}$$

所以：

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = (\frac{k_{t+1}}{k_t})^{\alpha} (\frac{A_{t+1}}{A_t})^{1-\alpha} = 1 + g$$

因为消费和储蓄都和 y 成正比，所以都以 g 的速率恒定增长。

所以结论就是，在技术 A 和 L 齐次的卡布道格拉斯下，当 capital per effective labor 达到 steady state 时，所有人均(per labor)经济量实现平衡增长。

2.7 新的生产函数 CES

CES 是 Constant Elasticity of Substitution 的意思。

所以在引入 CES 之前必须先引入一个概念——替代弹性。

替代弹性的定义是：要素**边际替代率**的相对变化引起**要素投入比**的变化。

边际替代率是这个意思：现在有 x 和 y 两种要素，通过某种函数 F 转化为了产出 U（U 可以是生产可以是效用）。如果当前的要素投入量是x_0和y_0，那么在维持产出 U 不变的情况下，要投入多少的 y 才能弥补 x 的减少。转化成数学问题就是。方程：

$$F(x,y)=U_0$$

（U_0为当前产出，是常数）决定的 x 和 y 的隐函数关系，求$\frac{dy}{dx}$

那么根据隐函数存在定理只要$F_y \neq 0$：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

更直观地说，边际替代率其实就是无差异曲线的切线的斜率。

要素投入比比价好理解，就是 x/y 或者 y/x 呗。

所以对于生产函数

$$Y = F(K, L)$$

替代弹性的公式为：

$$\varepsilon_{K/L} = \frac{dln(K/L)}{dln(F_L/F_K)}$$

至于为啥写成这样，我猜 ln 是为了把常系数转换成常数项，d 是为了消除常数项。

所以对于卡布道格拉斯函数

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

替代弹性恒为 1

$$\varepsilon_{K/L} = \frac{dln(K/L)}{dln((1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}/\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha})} = 1$$

然后某个闲着蛋疼的经济学家就想，有没有这个一个生产函数，让 K 和 L 的替代弹性刚好是某个常数$\frac{1}{\sigma}$，但又不要是 1 那么没意思呢。

于是（我猜）他就愉快地解了一下这个偏微分方程：

$$\frac{dln(K/L)}{dln(F_L/F_K)} = \frac{1}{\sigma}$$

然后由初始条件$\mathrm{F}(0, \mathrm{L}) = 0$和$\mathrm{F}(\mathrm{K}, 0) = 0$得到了这个偏微分方程的一个特解，就是 CES（Constant Elasticity of Substitution）函数：

$$F(K,L) = [\gamma K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\sigma)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

可以用洛必达法则证明。当$\sigma \rightarrow 1$时，这个函数就收敛于卡布道格拉斯函数：

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1}[\gamma K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\sigma)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = K^{\gamma}L^{1-\gamma}$$

不知道会怎么考，因为我们三次考试都没有考过 CES 函数。。。

祝好运。

三、Ramsey 模型

3.1 基本概念和等式

在索罗模型中，因为固定的 saving rate，HH 不需要去决定消费多少，因为他们只能消费(1-s)y 那么多。所以 Solow Model 并不是一个让 HH optimal 的模型。

而 Ramsey 模型在这点上做出了改进，它允许 HH 进行消费选择，选择依据是让终生的效用最大化。而买买买则是效用的唯一来源。

假设 HH 能一直活下去，并且有终生效用：

$$U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

其中$\beta \leq 1$是效用的折现系数(discount rate)。反应了消费者的耐心程度。β越大消费者越有耐心。这里假设β为常数。

$u(c_t)$是消费的效用函数，有两种常见的形式，一种叫 log utility：

$$u(c_t) = log(c_t)$$

另一种叫做 CRRA utility（Constant Relative Risk Aversion Utility）：

$$u(c_t) = \frac{{c_t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

当$\theta \rightarrow 1$时，CRRA 收敛于 log utility（用洛必达法则可证明）

但是由于效用的值大小不重要，重要的是它的导数，所以 CRRA 一般也写成：

$$u(c_t) = \frac{{c_t}^{1-\theta}}{1-\theta}$$

至于 CRRA 为什么长这样以及θ具体的意义，在 7.2.2 中有更具体的介绍。

问题来了，HH 虽然可以通过买买买来获得效用，但是不能随便买，因为资源是有限的，所以这里还要引入 HH 的 budget constrain：

$$a_{t+1} = (1 + r_t)a_t + w_t - c_t$$

其中a_{t+1}代表 HH 在 t+1 期初持有的资产，a_t代表 HH 在 t 期初持有的资产，r_t代表 t 期的市场利率（$r_t a_t$为 HH 在 t 期的资本所得，叫做 Capital income），w_t代表 HH 在 t 期的劳动所得（Labor income），c_t为 HH 在 t 时期的消费量。

Capital income 和 Labor income 的概念很重要，在后面讨论政府行为的时候。

3.2 自由市场下的均衡

首先这里均衡（Equilibrium）也称（Competitive Equilibrium）指的是这样一种状态：经济中的各个行为主体都通过市场实现了利益的最大化，没有人能够从这种状态的改变中获得更多的好处。

因为自由市场下有 HH 和 Firms 两种行为主体。所以自由市场的 Equilibrium 可以理解为 HH 达到最优且 Firms 达到最优。

而前面提到的市场出清是均衡的必要条件。因为如果资本市场未出清，说明仍有储蓄未用于投资，则 HH 可以通过增加投资来让自己达到更优的状态；而如果商品市

场未出清，说明 firms 生产了一些既不可以用来消费也不可以用来投资的无用商品，则 firms 可以通过减少这种商品的生产来让自己达到最优。

市场出清是必要条件不是充要条件是因为：即便市场达到出清，由于每期效用函数的凹性，HH 仍然需要均衡每期消费来达到最优；而由于生产函数的凹性，厂商需要保持一个生产规模来让利润达到最大。

所以均衡等价于：

$$\begin{cases} Max\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t) \\ Max\sum_{t=0}^{\infty}\pi_t \\ \text{市场出清} \end{cases}$$

关于市场出清的表达式在之后继续讨论。

3.2.1 HH 最优的求解

首先来求解均衡的第一个条件——HH 最优

因为要在跨期限制条件：

$$a_{t+1}=(1+r_t)a_t+w_t-c_t$$

下，最优化目标函数：

$$U_0=\sum_{t=0}^{\infty}u(c_t)$$

所以这是一个动态最优化问题。因为跨期限制条件有不变的形式，所以可以用拉格朗日乘数法求解。

写出拉格朗日函数：

$$L=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)+\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t[(1+r_t)a_t+w_t-c_t-a_{t+1}]$$

因为 HH 在 t 期能自己决定的量是c_t和a_{t+1}，所以在把这个动态问题静态化到 t 期，都是一个关于自变量c_t和a_{t+1}的有限制最优问题。最优的一阶条件为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial c_t}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial a_{t+1}}=0\\ (1+r_t)a_t+w_t-c_t-a_{t+1}=0\end{cases}$$

对c_t的偏导比较简单，可以直接求出$\frac{\partial L}{\partial c_t}=0$ 等价于：

$$\beta^t u'_{(c_t)}=\lambda_t \quad ①$$

对a_{t+1}求偏导时应该注意，因为这个拉格朗日函数其实是

$$\beta^0 u(c_0)+\lambda_0[(1+r_0)a_0+w_0-c_0-a_1]+$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\beta^t u(c_t)+\lambda_t[(1+r_t)a_t+w_t-c_t-a_{t+1}]+$$

$$\beta^{t+1}u(c_{t+1})+\lambda_{t+1}[(1+r_{t+1})a_{t+1}+w_{t+1}-c_{t+1}-a_{t+2}]+$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

这样的无穷行相加，所以在 t 期和 t+1 期都出现了a_{t+1}，所以

$$\frac{\partial L}{\partial a_{t+1}} = \lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}) - \lambda_t = 0$$

所以$\frac{\partial L}{\partial a_{t+1}} = 0$等价于

$$\lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}) = \lambda_t \quad ②$$

把①往后推一期得到λ_{t+1}的表达式，然后和①一起代入②，消去λ得：

$$\frac{u'_{(c_t)}}{u'_{(c_{t+1})}} = \beta(1 + r_{t+1})$$

这就是欧拉等式（Euler Equation）。它指出了 HH 最优决策的必要条件——保持跨期消费的边际效用在一个恰当的比例，这个比例由 interests rate 和 discount rate 决定。

代入确定的 utility function，比如 log utility 后可以得到确定形式的 Euler Equation：

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(1 + r_{t+1})$$

Euler Equation 和 Budget constrain 一起构成了 HH 最优的一阶条件

$$Max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{u'_{(c_t)}}{u'_{(c_{t+1})}} = \beta(1 + r_{t+1}) \\ (1 + r_t)a_t + w_t - c_t - a_{t+1} = 0 \end{cases}$$

但是在有限制最优问题中一阶条件只是必要条件。它们和另外两个限制条件一起构成 HH 最优的充要条件。

$$Max\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{u'_{(c_t)}}{u'_{(c_{t+1})}}=\beta(1+r_{t+1})\\(1+r_t)a_t+w_t-c_t-a_{t+1}=0\\\lim\limits_{t\to\infty}\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)^{-1}a_{t+1}=0\\\lim\limits_{t\to\infty}\beta^t u'_{(c_t)}a_t=0\end{cases}$$

第三个条件叫 No Ponzi Game，要求 HH 不能靠无限地累积债务（拆东墙补西墙）来消费，欠钱是一定要还的。

第四个条件叫 Transversality Condition，要求 HH 不能无限存钱，赚了钱是为了花的。

因为证明比较复杂，所以 501 不要求证明。在考试中表达式也不用写，只需要写出 NPG 和 TVC 即可。

3.2.2 Firms 最优的求解

因为模型假设市场中有无数个没有技术差异的小厂商，所以所有厂商都具有一样的生产函数：

$$Y_t=F(K_t,L_t)$$

所有厂商在 t 期利润表达式为：

$$\pi_t=PF(K,L)-R_tK_t-W_tL_t$$

其中 P 为市场上商品的价格，R 为资本的价格（利率），W 为劳动力的价格（工资）。这里的利率 R 不同于 HH 到手的利率 r。因为资本折旧的存在，HH 借给厂商 a 的资产，厂商虽然支付了 Ra 的利息，但是消费者的本金由于资本折旧只剩下了$(1-\delta)a$，所以厂商用δa弥补了本金的折旧后，HH 到手的实际利息收入只有 ra，所以 R 和 r 的关系是：

$$r = R - \delta$$

又由于价格是相对的，所以可以令 P=1。

$$\pi_C = F(K, L) - R_t K_t - W_t L_t$$

虽然厂商也要求长期利润最大化：

$$Max \sum_{t=0}^{\infty} \pi_t$$

但是因为厂商不能对生产要素进行跨期替代，所以长期利润最大化等价于每期利润最大化：

$$Max\, \pi_t$$

厂商选择借入资本 K 和雇佣劳动力 L 来使利润最大，一阶条件为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_C}{\partial K_t} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_C}{\partial L_t} = 0 \end{cases}$$

求得一阶条件为：

$$\begin{cases} R_t = F_{k_t} \\ W_t = F_{L_t} \end{cases}$$

由于$0 < \alpha < 1$，所以π_C对K_t和L_t的二阶偏导恒小于 0，所以对厂商来说二阶条件恒成立。一阶条件成为厂商最优的充要条件。

在这里，厂商最优条件就是R_t和W_t的表达式。原因是：由于资本和劳动力市场出清，供求必须相等。在供给量确定时，最终的实际需求量也已经被确定。厂商的计划需求只会影响到资本和劳动力的价格。在该模型中，劳动力的供给无弹性，由人口 L 直接决定，而资本供给有弹性，厂商在 t+1 期的资本需求会影响 Euler Equation 中的r_{t+1}从而改变消费者的消费决策。

此时再考虑市场出清的条件：

①首先市场出清要求资本的供给和需求相等。在这个模型中，资本的提供者是 HH，供给量是$\mathrm{a_t}$，而资本的需求者是 Firm，需求量是$\mathrm{k_t}$。所以可以写出资本市场出清的条件是：$\mathrm{k_t} = \mathrm{a_t}$。但是要注意的是，资本市场出清在 decentralized market 中被成为资产市场出清(Assets Market Clear)，感觉并没有神马差别。。。意思一样啊。。

②其次商品市场出清表示商品的供给和需求是相等的。商品的供给是$f(\mathrm{k_t})$，需求是消费者的消费需求、弥补资产折旧需求和新增资产需求。所以：

$$f(k_t) = c_t + \delta a_t + (a_{t+1} - a_t)$$

可以化简为：

$$f(k_t) = c_t - (1 - \delta)a_t + a_{t+1}$$

不难发现，其实商品市场出清的条件是冗余的。因为它和 HH 的 Budget Constrain 本质上是一样。这是因为根据瓦尔拉斯定律，当前 N-1 个市场均衡的时候，第 N 个市场自动达到均衡。

所以均衡

$$\begin{cases} Max\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t) \\ Max\sum_{t=0}^{\infty}\pi_t \\ k_t = a_t \\ f(k_t) = c_t - (1-\delta)a_t + a_{t+1} \end{cases}$$

的解为：

$$\begin{cases} \frac{u'_{(c_t)}}{u'_{(c_{t+1})}} = \beta(1+r_{t+1}) \\ (1+r_t)a_t + w_t - c_t - a_{t+1} = 0 \\ \lim_{t\to\infty}\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)^{-1}a_{t+1} = 0 \\ \lim_{t\to\infty}\beta^t u'_{(c_t)}a_t = 0 \\ R_t = \alpha K_t^{\alpha-1}L_t^{1-\alpha} \\ W_t = (1-\alpha)K_t^{\alpha}L_t^{-\alpha} \\ k_t = a_t \\ f(k_t) = c_t - (1-\delta)a_t + a_{t+1} \end{cases}$$

这八个等式就是 Equilibrium 的解。最后一个是冗余的，应该可以不写。

3.3 Social Planner 的最优决策

之前在 2.4 中有提到 Social Planner 是以整个经济体中的资源限制为 budget constrain，对经济运行进行规划，使得社会总体的效用最大的人。

首先要了解 Budget constrain 就要先写出 law of capital motion

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

不同于 Solow，由于储蓄率不固定，此时的I_t不再等于$s * Y_t$，而是等于$Y_t - C_t$

所以此时的 Law of Capital Motion 为

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + Y_t - C_t$$

Intensive Form 是

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + y_t - c_t$$

将生产函数$y_t = f(k_t)$代入得

$$k_{t+1} = \left(1-\delta\right)k_t + f\left(k_t\right) - c_t$$

Social Planner 的目标是让社会总体的效用最大化，这等价于让 HH 的人均效用最大化：

$$Max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

同上，也用拉格朗日乘数法最条件极值。

$$L=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)+\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t[f(k_t)+(1-\delta)k_t-c_t-k_{t+1}]$$

同理也能解出一阶条件是 Euler Equation 和原限制条件：

$$\begin{cases}\dfrac{u'_{(c_t)}}{u'_{(c_{t+1})}}=\beta\left(1+f'\left(k_{t+1}\right)-\delta\right)\\ k_{t+1}=(1-\delta)k_t+f\left(k_t\right)-c_t\end{cases}$$

这里不加证明地给出 TVC 是这个条件问题的二阶条件：

$$\lim_{t\to\infty}\beta^t u'_{(c_t)}k_{t+1}=0$$

所以 Social Planner 最优的解是：

$$\begin{cases}\dfrac{u'_{(c_t)}}{u'_{(c_{t+1})}}=\beta\left(1+f'_{k_{t+1}}-\delta\right)\\ k_{t+1}=(1-\delta)k_t+f\left(k_t\right)-c_t\\ \lim\limits_{t\to\infty}\beta^t u'_{(c_t)}k_{t+1}=0\end{cases}$$

可以发现这与化简后的 Competitive Equilibrium 的解是一致的。这说明了在某些条件的限制下（没有外部性，没有扭曲的政府行为等等），自由市场的 Competitive Equilibrium 是可以导致 social optimum 的。

3.4 稳态与动态有效性

在 Ramsey 模型中，稳态的定义与索罗模型中一样：$k_{t+1}=k_t=k^*$,$c_{t+1}=c_t=c^*$

所以，将$k_{t+1}=k_t=k^*$和$c_{t+1}=c_t=c^*$代入 Euler Equation 中可以得到：

$$1 = \beta(1 + f'(k^*) - \delta)$$

解得：

$$\mathrm{f}'(\mathrm{k}^*) = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta$$

为了观察动态有效性，只要比较k^*和k_{gold}即可，于是先写出c^*关于k^*的表达式：

$$c^* = f(k^*) - \delta k^*$$

根据定义，令c^*最大的k^*为k_{gold}，所以：

$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = f'\left(k_{gold}\right) - \delta = 0$$

显然$f'(k^*)$恒大于$f'\left(k_{gold}\right)$，所以

$$k^* < k_{gold}$$

所以在 Ramsey 模型下的稳态均衡是帕累托有效的，不会出现 over saving 的情况

3.5 税收对模型的影响

以上都只是 PPT 上的标准形态的模型，考试一定不会考一样的。比较常见的变化就是增加政府税收了。

大家貌似都很害怕政府税收这件事。老师出题确实也千变万化。在这里就罗列一些常见的税收及其对模型计算的影响。

3.5.1 不会影响 Equilibrium 的税收

注意这里说的不会影响 Equilibrium 的意思是不会影响均衡的解，但是求解过程步骤稍微改变下的。

常见的有两种不会影响 Equilibrium 的税收：Lump Sum Tax 和 Labor Income Tax

①Lump Sum Tax 是最简单的税收，就是人头收税。遇到这种税收时，HH 的 Budget Constrain 会改变为：

$$a_{t+1} = (1 + r_t)a_t + w_t - c_t - T$$

在拉格朗日函数中也会多一个-T，但是这不影响之后的解题过程和答案，因为求导不到这个 T。

②Labor Income Tax 是比较简单的税收，按工资比例收取，比如说比例为τ，此时 Budget Constrain 变为：

$$a_{t+1} = (1 + r_t)a_t + (1 - \tau)w_t - c_t$$

同样也不影响之后的解题过程和答案，因为并不会求导到w_t

（在收税的情况下如果让解 competitive Equilibrium 一定不要写第八个等式（商品市场出清）。因为反正是冗余的，写了吃力不讨好反而容易错。）

3.5.2 会影响 Equilibrium 的税收

常见的会影响 Equilibrium 的税收是 Capital Income Tax

Capital Income Tax 是资本收入税，其实就是利息税。这个税是收在 r 上的，不是 R 上。举个例子，比如政府收取比例为τ的 Capital Income Tax，则 Budget Constrain 变为：

$$a_{t+1} = [1 + (1-\tau)r_t]a_t + (1-\tau)w_t$$

由于这个改动在a_t的系数项，运用整体法可以很快得知，Euler Equation 会变成：

$$\frac{u'_{(c_t)}}{u'_{(c_{t+1})}} = \beta[1 + (1-\tau)r_t]$$

3.5.3 各路神奇的税收

我们没有考过消费税，但是如果有的话，假设政府征收τ比例的消费税，那么 Budget Constrain 变为：

$$a_{t+1} = (1 + r_t)a_t + w_t - (1+\tau)c_t$$

运用整体法可知，Euler Equation 会变成：

$$\frac{u'_{[(1+\tau)c_t]}}{u'_{[(1+\tau)c_{t+1}]}} = \beta(1 + r_t)$$

此时如果 utility function 是 log 的，则不影响 Equilibrium，如果不是 log 的，则会影响均衡。

税收还可以对厂家收，对各种收。没法一一穷尽。重在理解吧~

四、OLG 模型

4.1 基本概念和等式

与 Ramsey 模型不同，OLG 模型假设每个个体存活两个时期；且每个时期都有两种群体。其中 1t 表示在 t 时期的年轻人的消费，2t 表示在 t 时期的老人；1t+1 表示在 t+1 时期的年轻人，2t+1 表示在 t+1 时期的老人。对于 t 期的年轻人来说，他们的人生有两个阶段，即 1t 和 2t+1。

所以，对于任意 t 期的年轻人，有 Budget Constrain：

$$\begin{cases} c_{1t} + s_t = e_1 \\ c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + e_2 \end{cases}$$

其中s_t为个体在年轻的时候的储蓄，r_{t+1}为 t+1 时的市场利率，e_1是年轻人的工资收入，e_2是老人的工资收入（如果还有力气工作的话。。。T.T）

每个个体有总效用：

$$U_0 = u_{(c_{1t})} + \beta u_{(c_{2t+1})}$$

其中β为效用的时间折现率。μ可以是 log utility function 或者 CRRA utility function

生产函数为卡布道格拉斯

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

特别需要注意的是，OLG 模型汇中一般假设资本折旧率$\delta = 1$（因为每个周期时间跨度太久了），人口以恒定速率 n 增长。

4.2 工资和利率对储蓄的影响

假设 HH 只在年轻时工作，获得工资w，效用函数为 CRRA

此时 HH 的 Budget Constrain：

$$\begin{cases} c_{1t}+s_t=w_t \\ c_{2t+1}=(1+r_{t+1})s_t \end{cases}$$

终生效用为：

$$U_0=\frac{{c_{1t}}^{1-\theta}}{1-\theta}+\beta\frac{{c_{2t+1}}^{1-\theta}}{1-\theta}$$

首先合并 Budget Constrain，写成净现值为 0 的等式：

$$c_{1t}+\frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}}=w_t$$

写出拉格朗日函数：

$$L=\frac{{c_{1t}}^{1-\theta}}{1-\theta}+\beta\frac{{c_{2t+1}}^{1-\theta}}{1-\theta}+\lambda(w_t-c_{1t}-\frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}})$$

对c_{1t}和c_{2t+1}偏导为 0。得到 Euler Equation：

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=[\beta(r_{t+1}+1)]^{\frac{1}{\theta}}$$

因为资本折旧率$\delta=1$，所以也可以写成：

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=(\beta R_{t+1})^{\frac{1}{\theta}}$$

将 Budget Constrain 代入上式后化简，得到s_t的表达式：

$$s_t = \frac{w_t}{1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}} R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}}$$

由上式可知，s_t是关于工资和下期利率的函数。下面用s_t对两个自变量分别求偏导：

$$\frac{\partial s_t}{\partial w_t} = \frac{1}{1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}} R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}} > 0$$

所以储蓄随工资增加而增加。

$$\frac{\partial s_t}{\partial R_{t+1}} = \frac{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) \beta^{-\frac{1}{\theta}} R_{t+1}^{-\frac{1}{\theta}} w_t}{\left(1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}} R_{t+1}^{-\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)}\right)^2}$$

由上式可知，当$\theta = 1$时（log utility），$\frac{\partial s_t}{\partial R_{t+1}} = 0$，此时$s_t$与$R_{t+1}$无关；当$\theta > 1$时，$\frac{\partial s_t}{\partial R_{t+1}} < 0$，此时$s_t$随$R_{t+1}$的增大而减小；当$\theta < 1$时，$\frac{\partial s_t}{\partial R_{t+1}} > 0$，此时$s_t$随$R_{t+1}$的增大而增大。

4.3 自由市场下的均衡

下面来计算一种最简单的 OLG 模型

假设 HH 只在年轻时工作，获得工资w_t。效用函数为$u_c = \ln c$

4.3.1 HH 的最优决策

此时 HH 的 Budget Constrain：

$$\begin{cases} c_{1t} + s_t = w_t \\ c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t \end{cases}$$

终生效用为：

$$U_0 = ln\, c_{1t} + \beta\, ln\, c_{2t+1}$$

写出拉格朗日函数：

$$L = ln\, c_{1t} + \beta\, ln\, c_{2t+1} + \lambda(w_t - c_{1t} - \frac{c_{2t+1}}{1 + r_{t+1}})$$

对c_{1t}和c_{2t+1}偏导为 0。得到 Euler Equation：

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(r_{t+1} + 1)$$

因为$r_{t+1} = R_{t+1} - \delta$，所以上式也可写成：

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta R_{t+1}$$

将 Budget Constrain 代入上式后化简，得到s_t的表达式：

$$s_t = \frac{\beta w_t}{1 + \beta}$$

4.3.2 Firm 的最优决策

Firm 的最优条件还是由生产函数的一阶偏导给出：

$$R_t = F_{K_t} = \alpha {k_t}^{\alpha-1}$$

$$w_t = F_{L_t} = (1-\alpha){k_t}^{\alpha}$$

注意，OLG 模型中的L_t，由于老人不工作，所以只计算年轻人数量。t 期的老人数量为L_{t-1}

4.3.3 Market Clear 推出的稳态

在 OLG 模型中，如果商品市场出清（Market Clear）：

$$Y = C + S$$

写成 Intensive Form 是：

$$y = c + s$$

资本市场出清的表达式为：

$$K_{t+1} = S_t$$

两边同除以人口 t+1 期劳动力数量L_{t+1}，得到 Intensive Form：

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{1+n}$$

将 HH 的关于s_t的表达式中的s_t用上式替换，w_t用 Firm FOC 中的w_t替换，得到等式：

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha){k_t}^{\alpha}}{(1+n)(1+\beta)} \quad ①$$

这就是 log utility function 的简单 OLG 模型 Equilibrium 的表达式。

当效用函数为 CRRA 时，用同样的方法，可以求得s_t的表达式为：

$$s_t = \frac{w_t}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}}$$

此时将 Firm 的 FOC 和资本市场出清的条件代入得到：

$$k_{t+1} = \frac{(1-\alpha){k_t}^{\alpha}}{(1+n)[1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}(\alpha {k_t}^{\alpha-1})^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}]}$$

这就是 CRRA 效用函数下的 Equilibrium 表达式

4.4 稳态与动态无效性

4.4.1 Steady State 的计算

由于在 Steady State 时$k_{t+1} = k_t = k^*$，所以将①中的k_{t+1}和k_t都用k^*替换后得到：

$$k^* = \frac{\beta(1-\alpha){k^*}^{\alpha}}{(1+n)(1+\beta)}$$

解出：

$$k^* = [\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

4.4.1 黄金储蓄

4.5 政府的税收、债券和社保

4.4.1 税收对 OLG 模型的影响

假设政府对 t 时期的年轻人收取 g 的 Lump-sum tax

HH 的 budget constrain 变为：

$$\begin{cases} c_{1t} + s_t = w_t - g \\ c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t \end{cases}$$

CRRA 下的 Euler Equation：

$$\frac{c_{2t+1}}{c_{1t}} = [\beta(1 + r_{t+1})]^{\frac{1}{\theta}}$$

将 Budget constrain 代入 Euler Equation：

$$s_t = \frac{w_t - g}{1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}} R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}}$$

观察此时的 Resource Constrain：

$$c_t = y_t - i_t - g = y_t - s_t - g$$

因为储蓄的减少，消费增加了$\frac{g}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}}$，因为政府税收，消费较少了 g，显然：

$$\frac{g}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}} < g$$

所以 Lump-sum tax 会同时减小储蓄和消费，对经济体不利。

如果政府对年轻人征取比例为τ的 labor income tax，budget constrain 变为：

$$\begin{cases} c_{1t} + s_t = (1-\tau)w_t \\ c_{2t+1} = (1+r_{t+1})s_t \end{cases}$$

将 Budget constrain 代入 CRRA 的 Euler Equation：

$$s_t = \frac{(1-\tau)w_t}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}}$$

与 Lump-sum tax 同理，Labor income tax 导致因储蓄较少而增加的消费为

$\frac{\tau w_t}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}}$，而因税收而直接挤出的消费为$\tau w_t$，显然：

$$\frac{\tau w_t}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}} < \tau w_t$$

所以 Labor income tax 会同时减小储蓄和消费，对经济体不利。

4.4.2 政府债券对 OLG 模型的影响

假设政府在 t 时期对年轻人发行d_t的债券。债券在 t+1 期到期，到期利率为r_{t+1}

HH 的 budget constrain 变为：

$$\begin{cases} c_{1t} + s_t + d_t = w_t \\ c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(s_t + d_t) \end{cases}$$

将 Budget constrain 代入 Euler Equation：

$$s_t + d_t = \frac{w_t}{1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}} R_{t+1}^{-\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)}}$$

此时，saving rate 为

$$s = \frac{s_t + d_t}{w_t} = \frac{1}{1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}} R_{t+1}^{-\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)}}$$

发行债券并不影响储蓄率。

4.4.3 社保对 OLG 模型的影响

Fully Funded Social Security：政府对 t 时期的年轻人征收d_t的社保金，并在 t+1 期返还给老人（t 时期的年轻人）$(1 + r_{t+1})d_t$的养老金。

HH 的 budget constrain 同政府发行债券。

社会的储蓄率不变

结论：Fully Funded Social Security 并不能使经济体变成帕累托有效。

Pay As You Go：政府对 t 时期的年轻人征收d_t的社保金，并在 t 时期将这些社保金发放给老人。因为人口以 n 的固定速率增长，所以 t 时期的老人能得到 $(1+n)\, d_t$

此时 HH 的 budget constrain 为：

$$\begin{cases} c_{1t} + s_t + d_t = w_t \\ c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + (1+n)\, d_t \end{cases}$$

CRRA 下的 Euler Equation：

$$\frac{c_{2t+1}}{c_{1t}} = [\beta(R_{t+1})]^{\frac{1}{\theta}}$$

将 budget constrain 代入 Euler Equation 化简得：

$$s_t = \frac{w_t - d_t}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}} R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}} - \frac{(1+n)d_t}{R_{t+1}+\beta^{\frac{1}{\theta}} R_{t+1}^{\frac{1}{\theta}}} < \frac{w_t}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}} R_{t+1}^{-(\frac{1-\theta}{\theta})}}$$

此时，政府在不改变 Y 的情况下，减小了 I，增加了 C

所以 Pay As You go Social Security 能使 over saving 的 OLG 模型达到帕累托最优。

4.4.4 更复杂的政府行为（第二次 midterm 例题）

假设政府同时采用了 Fully Funded 和 Pay As You Go 这两种社保。有模型设定如下：

生产函数为无技术因素的卡布道格拉斯：

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

恒定的人口增长速率 n>0，恒定的折旧率$\delta = 0$

每个个体存活两期，终生效用为：

$$U_0 = ln(c_{1t}) + ln(c_{2t+1})$$

政府在 t 时期对年轻人每人征收数量的为 T 的固定税收。其中的一部分γT在 t+1 的时候还给这些曾经年轻过的老人，利率与市场利率相同，还款额为$\gamma \mathrm{T}(1 + r_{t+1})$。其中的另一部分$(1-\gamma)$T直接当场分给 t 期的老人，每个老人拿到$(1-\gamma)(1+\mathrm{n})\mathrm{T}$

求：①Competitive Equilibrium ②γ变化对 Dynamic Efficiency 的作用

此时 HH 的 budget constrain 为：

$$\begin{cases} c_{1t} + s_t + T = w_t \\ c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + (1 + r_{t+1})\gamma T + (1-\gamma)(1+n)T \end{cases}$$

合并消去s_t得：

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t - c_{1t} - T) + (1 + r_{t+1})\gamma \mathrm{T} + (1-\gamma)(1+\mathrm{n})\mathrm{T}$$

整理得到净现值模式的 Budget Constrain：

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t - (1-\gamma)\mathrm{T} + \frac{(1-\gamma)(1+\mathrm{n})\mathrm{T}}{1 + r_{t+1}}$$

写出拉格朗日函数：

$$L = \ln(c_{1t}) + \ln(c_{2t+1}) + \lambda(w_t - (1-\gamma)\mathrm{T} + \frac{(1-\gamma)(1+\mathrm{n})\mathrm{T}}{1 + r_{t+1}} - c_{1t} - \frac{c_{2t+1}}{1 + r_{t+1}})$$

对c_{1t}和c_{2t+1}求偏导得到欧拉等式：

$$\frac{c_{2t+1}}{c_{1t}} = 1 + r_{t+1}$$

把 Budget Constrain 代入欧拉等式：

$$\frac{(1+r_{t+1})s_t + (1+r_{t+1})\gamma T + (1-\gamma)(1+n)T}{w_t - s_t - T} = 1 + r_{t+1}$$

化简得：

$$s_t = \frac{w_t - T - \gamma T}{2} - \frac{(1-\gamma)(1+n)T}{2(1+r_{t+1})}$$

因为 Capital Market Clear：

$$K_{t+1} = s_t L_t + \gamma T L_t$$

将s_t代入，两边同除以L_t写成 Intensive Form：

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}[\frac{w_t - T + \gamma T}{2} - \frac{(1-\gamma)(1+n)T}{2(1+r_{t+1})}]$$

将中括号中关于$T(1-\gamma)$提取公因式：

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}[\frac{w_t}{2} - \frac{(1-\gamma)(2+n+r_{t+1})T}{2(1+r_{t+1})}]$$

将$w_t = F_L$（Firm 的 FOC）代入上式：

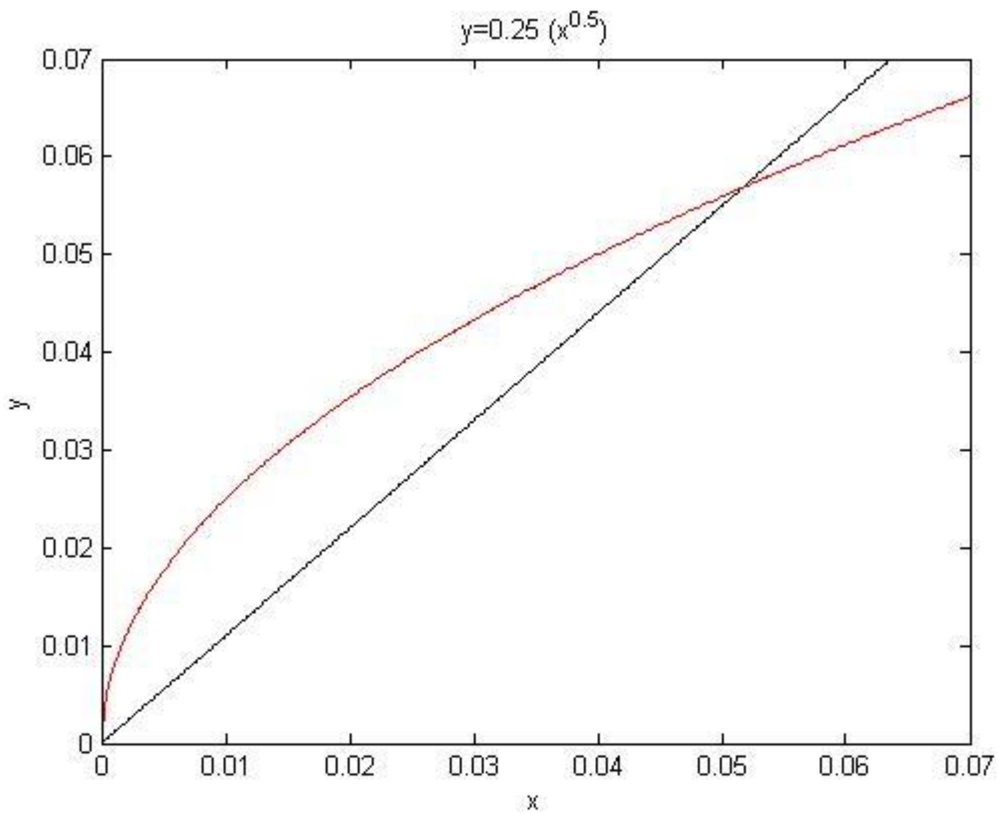
$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}[\frac{(1-\alpha)k_t^{\alpha}}{2} - \frac{(1-\gamma)(2+n+r_{t+1})T}{2(1+r_{t+1})}]$$

其实等式右边的r_{t+1}也是关于k_{t+1}的函数（$r_{t+1}=R_{t+1}=\alpha \mathrm{k}_{t+1}{}^{\alpha-1}$），但是为了方便计算，命题时会说明把$r_{t+1}$当常数处理。

当达到 Steady State 时，$k_{t+1}=k_t=\mathrm{k}^*$：

$$k^*=\frac{1}{1+n}[\frac{(1-\alpha)k^{*^{\alpha}}}{2}-\frac{(1-\gamma)(2+n+r_{t+1})T}{2(1+r_{t+1})}]$$

这么丑的方程，不知道你会不会解，反正我不会。不过方程的图像大致如下：



横轴是k^*，红色曲线为$\frac{(1-\alpha)\mathrm{k}^{*\alpha}}{2}$，黑色直线为$(1+\mathrm{n})\mathrm{k}^*$。红线到黑线的垂直距离为$\frac{(1-\gamma)(2+\mathrm{n}+r_{t+1})\mathrm{T}}{2(1+r_{t+1})}$。由于$\frac{(1-\gamma)(2+\mathrm{n}+r_{t+1})\mathrm{T}}{2(1+r_{t+1})}$衡正，所以红线在黑线上方的是有效区间。当 T 等于 0 时，k^*的解在右交点。从图中可以看出，k^*随着 t 增大（两线距离增加）而减小。

所以考试的时候可以写，分析方程可得：k^*与γ反相关，所以

当γ增加时，k^*减小，所以有如下结论：

```
Main()
{
    If k* > k^gold    printf("increasing of γ is positive to the economy")
    Else      printf("increasing of γ is negative to future generations")
}
```

五、Endogenous 模型

5.1 基本概念和等式

内生增长模型的出现是因为之前讨论的新古典主义模型的三个缺陷：

①TFP（全要素生产率，可以理解为科技进步）无法被衡量

②随经济增长解释力下降

③预测了每劳动力资本的生产率 f(K)最终收敛，明显与现实不符

模型假设：经济高度发达，生产变成资本集中型，Labor 变得不再重要，所以

Specialized L=1

生产函数：

$$F(K,L) = f(k) = Ak \quad ①$$

FOC 厂商最优:

$$R = f'(k) = A \quad ②$$

CRRA 的 HH Euler Equation:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(R_{t+1} + 1 - \delta)]^{\frac{1}{\theta}} \quad ③$$

Combining① ②③：

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(A+1-\delta)]^{\frac{1}{\theta}} \quad ④$$

所以 C 以恒定的β$(A+1-\delta)^{\frac{1}{\theta}}$-1 的速率增长

Law of capital Motion:

$$k_{t+1} - k_t = Ak_t - c_t - \delta k_t$$

两边同除以k_t

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} + \frac{c_t}{k_t} = A - \delta \quad ⑤$$

观察⑤，如果

$$\gamma_c > \gamma_k$$

存在一个时期 t 使得$k_t = 0$，显然不可行，如果

$$\gamma_c < \gamma_k$$

违反了 TVC，不可行

所以：

$$\gamma_c = \gamma_k = \gamma_Y = \gamma_I$$

达到 Balance Growth Path

5.2 长期增长条件

长期增长需要：

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} > 1 \quad ⑥$$

和

$$\frac{c_t}{k_t} > 0 \quad ⑦$$

Combining⑥ 和④得：

$$A + 1 - \delta > \frac{1}{\beta}$$

Combining⑦和⑤得：

$$(A + 1 - \delta)^{1-\theta} < \frac{1}{\beta}$$

5.3 罗默外部模型 (Romer’s Externality Model)

5.3.1 概念与基本等式

罗默外部模型的基础假设是**知识是追逐利润的厂商进行投资决策的产物**，厂商在投入资本 K 生产的同时产生了一个和 K 成正比的知识溢出$\overline{K}$。$\overline{K}$会像 AK model 里的 A 一样作为技术因素作用于生产当中，但是厂商意识不到$\overline{K}$和它们投入资金 K 的关系，**厂商在决策时把$\overline{K}$当作一个既定的常数**（其实$\overline{K}$是 K 的正比例函数）。

5.3.2 自由市场的情况

生产函数为

$$F(K, L, \overline{k}) = AK^{\alpha}\overline{K}^{\rho}L^{1-\alpha}$$

为方便计算，假设$\rho = \alpha - 1$，生产函数变为

$$F\left(K, L, \bar{k}\right) = AK^{\alpha}\bar{K}^{1-\alpha}L^{1-\alpha}$$

FOC：

$$W_t = F_L = (1-\alpha)AK_t^{\alpha}L_t^{-\alpha}\bar{K}_t^{1-\alpha}$$

$$R_t = F_K = \alpha AK_t^{\alpha-1}L_t^{1-\alpha}\bar{K}_t^{1-\alpha}$$

为方便计算，假设 L=1，$\bar{K} = K$，FOC 为：

$$W_t = (1-\alpha)AK_t$$

$$R_t = \alpha A$$

CRRA 的 HH Euler Equation:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(R_{t+1} + 1 - \delta)]^{\frac{1}{\theta}}$$

将 FOC 代入得到 HH 的 Euler Equation：

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(\alpha A + 1 - \delta)]^{\frac{1}{\theta}}$$

5.3.3 党中央的决策

因为党中央是无所不知的，所以在党中央看来的生产函数，$\bar{K}$可以直接用 K 来表示。假设$\bar{K}$=K，L=1，Social Planner 的生产函数：

$$F(K, L, \bar{k}) = AK^{\alpha}\bar{K}^{1-\alpha}L^{1-\alpha} = AK$$

Social Planner 的 Euler Equation

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(A + 1 - \delta)]^{\frac{1}{\theta}}$$

显然：

$$(\frac{c_{t+1}}{c_t})^{Social\ Planner} > (\frac{c_{t+1}}{c_t})^{Competitive\ Equlibrium}$$

5.4 人力资本模型 (Lucas Model)

5.4.1 基本假设和等式

人力资本模型假设劳动者的能力也像物质资本那样需要用投资来提高，并且每个时期也会折旧（用进废退）

生产函数为关于 K 和 H 的卡布道格拉斯

$$Y = F(K, H) = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$$

Budget Constrain 变为：

$$Y_t = C_t + I_K + I_H$$

两边同除以L_t:

$$\frac{Y_t}{L_t} = c_t + i_K + i_H \quad ①$$

Law of Capital Motion 有两个：

$$K_{t+1} = (1-\delta_K)K_t + I_{K_t}$$

$$H_{t+1} = (1-\delta_H)H_t + I_{H_t}$$

两边同除以 L（假设$L_{t+1} = L_t$）

$$k_{t+1} = (1-\delta_K)k_t + i_{K_t} \quad ②$$

$$h_{t+1} = (1-\delta_H)h_t + i_{H_t} \quad ③$$

5.4.2 如何求解 Social Planner Problem

②加③之后代入①得到 Social Planner Problem

$$Max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Budget Constrain 为

$$c_t + k_{t+1} + h_{t+1} = F(k_t, h_t) + (1-\delta_K)k_t + (1-\delta_H)h_t$$

用拉格朗日乘数法

$$\mathrm{L}=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}u(c_t)+\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t[\mathrm{F}(k_t,h_t)+(1-\delta_K)k_t+(1-\delta_H)h_t-c_t-k_{t+1}-\mathrm{h}_{t+1}]$$

对c_t，k_{t+1}，h_{t+1}求偏导，得到两个 CRRA 的 Euler Equation

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=[\beta(F_k(k_{t+1},h_{t+1})+1-\delta_K)]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=[\beta(F_H(k_{t+1},h_{t+1})+1-\delta_H)]^{\frac{1}{\theta}}$$

因为 F 为齐一次函数，所以根据 Euler Formular 有：

$$F_k(k_t,h_t)=F_k\left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}},1\right)$$

$$F_H(k_t,h_t)=F_H\left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}},1\right)$$

所以老师的 Slides 上面写了这样的 Euler Equation：

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=[\beta\left(F_k\left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}},1\right)+1-\delta_K\right)]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=[\beta\left(F_H\left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}},1\right)+1-\delta_H\right)]^{\frac{1}{\theta}}$$

其实并没有什么差别，只是这样等式右边就全是大写字母了比较适合强迫症患者。

合并两个 Euler Equation 得到

$$F_k\left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}},1\right)+1-\delta_K=F_H\left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}},1\right)+1-\delta_H$$

在这里$F_{\mathrm{k}}-\delta_K$和$F_{\mathrm{H}}-\delta_H$分别代表投资物质资本 K 和人力资本 H 带来的净边际效益（边际效益减去不变的折旧率）。在均衡条件下，no-arbitrage（无套利）条件要求市场对各类投资的边际效益应该相等，否则资本将涌向边际收益更高的投资，又因为投资的边际效益递减，最后一定会行成$F_{\mathrm{k}}-\delta_K=F_{\mathrm{H}}-\delta_H$的均衡。

5.4.3 长期发展 (Long-run Growth) 的条件

现在如果假设物质资本和人力资本折旧速度一样快：

$$\delta_K=\delta_H$$

联立生产方程和 no-arbitrage condition：

$$Y=F(K,H)=AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$$

$$F_k\left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}},1\right)+1-\delta_K=F_H\left(\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}},1\right)+1-\delta_H$$

上式对 K 和 H 求偏导后代入下式，解得：

$$\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}}=\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

所以在任何一个时期，K 和 H 的比例都是不变的

将这个比例代入到 Euler Equation 里，得到

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=[\beta(A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}+1-\delta_K)]^{\frac{1}{\theta}}$$

所以c_{t+1}比c_t也是一个常数

于是只要

$$[\beta(A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}+1-\delta_K)]^{\frac{1}{\theta}}>1$$

就符合 Long-run Growth 了

5.4.4 平衡增长路径的证明

要证明平衡增长要证明

$$\gamma_c=\gamma_K=\gamma_H=\gamma_Y=\gamma_{I_K}=\gamma_{I_H}=某一个常数$$

上面已经证明了

$$\gamma_c=[\beta\left(A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}+1-\delta_K\right)]^{\frac{1}{\theta}}-1$$

联立 K 和 H 的比例和生产方程：

$$\begin{cases}\dfrac{K_{t+1}}{H_{t+1}}=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\\ Y=F(K,H)=AK^{\alpha}H^{1-\alpha}\end{cases}$$

消去 H 得

$$Y = F\left(K, \frac{（1-\alpha）K}{\alpha}\right) = A\ （\frac{(1-\alpha)}{\alpha}）^{1-\alpha} K$$

令

$$A\ （\frac{(1-\alpha)}{\alpha}）^{1-\alpha} = B$$

得

$$Y = BK$$

所以人力资本模型在$\delta_K = \delta_H$的条件下是特殊的 AK model

所以可以用类似 5.1 中的方法证明 BGP

写出 Good Market Clear：

$$Y_t = C_t + I_K + I_H \quad ⑤$$

和两个 Law of Capital Motion：

$$K_{t+1} = (1-\delta_K)K_t + I_{K_t} \quad ⑥$$

$$H_{t+1} = (1-\delta_H)H_t + I_{H_t} \quad ⑦$$

Combining⑤⑥⑦得到：

$$K_{t+1} + H_{t+1} = (1-\delta_K)K_t + (1-\delta_H)H_t + Y_t - C_t$$

因为$\delta_K = \delta_H = \delta$，所以

$$K_{t+1} + H_{t+1} = (1-\delta)(K_t + H_t) + Y_t - C_t$$

因为$\mathrm{H} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} K$

$$K_{t+1} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} K_{t+1} = (1-\delta)(K_t + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} K_t) + Y_{\mathrm{t}} - C_t$$

两边同除以K_t得

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} * (1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}) = (1-\delta)(1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}) + B - \frac{C_t}{K_t}$$

已知C_t恒定增长，如果K_t增速更大会违反 TVC，如果C_t增速更大经济体会萎缩，

所以$\frac{C_t}{K_t}$为常数。所以$\frac{K_{t+1}}{K_t}$也为常数，即 K 恒定增长，且$\gamma_c = \gamma_K$

Y 和 H 都是 K 的正比例函数，显然$\gamma_K = \gamma_H = \gamma_Y$

在等式

$$Y_t = C_t + I_t$$

中，显然$\gamma_Y = \gamma_C = \gamma_I$

观察两个 Law of Capital Motion：

$$K_{t+1} = (1-\delta_K)K_t + I_{K_t}$$

$$H_{t+1} = (1-\delta_H)H_t + I_{H_t}$$

上式两边同除以K_t，下式两边同除以H_t可以得到

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1-\delta_K) + \frac{I_{K_t}}{K_t}$$

$$\frac{H_{t+1}}{H_t} = (1-\delta_H) + \frac{I_{H_t}}{H_t}$$

前面已证 K 和 H 以恒定速率增长，所以等式左边是常数，所以等式最右项$\frac{I_{K_t}}{K_t}$和$\frac{I_{H_t}}{H_t}$也是常数。所以$\gamma_{I_K} = \gamma_{I_H} = \gamma_K = \gamma_H$

所以

$$\gamma_c = \gamma_K = \gamma_H = \gamma_Y = \gamma_{I_K} = \gamma_{I_H}$$

$$= [\beta\left(A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} + 1 - \delta_K\right)]^{\frac{1}{\theta}} - 1$$

证毕

5.5 二部门分离的模型 (Two Sectors)

5.5.1 模型假设与基本等式

二部门分离模型应用于高度发达的国家，假设这个国家的投资是资本集中的，不需要 Labor 参与（类似于英美发达之后转移投资到海外，只有资本参与投资品的生产）。但是消费品的生产还是需要劳动力参与的。所以形成了两部门一个 AK 一个卡布道格拉斯的情况。

$$I = AK_I$$

$$C = BK_C^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

其中K_I是用于生产投资品的资本，K_C是用于生产消费品的资本，K_I和K_C符合：

$$K_I = \phi K$$

$$K_C = (1-\phi)K$$

Φ是资本用于生产投资品的比例，$(1-\phi)$为资本用于生产消费品的比例

这个模型有一个神奇的生产函数-_-：

$$Y = C + I = BK_C^{\alpha}L^{1-\alpha} + AK_I$$

5.5.2 厂商的最优决策

因为 C 和 I 具有了不同的生产函数，所以假设消费品和投资品具有不同的价格P_C和

P_I

对于生产投资品的 Firm 来说：

$$\pi_I = P_I AK_I - R_I K_I$$

利润最大化——令利润对K_I的偏导等于 0，解得

$$R_I = P_I A$$

对于生产消费品的 Firm 来说：

$$\pi_C = P_C B K_C^{\alpha} L^{1-\alpha} - R_C K_C - W_C L$$

利润最大化——令利润对K_C的偏导等于 0，解得

$$R_C = P_C \alpha B K_C^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$

No-arbitrage Condition 要求$R_I = R_C$，所以得到

$$P_I A = P_C \alpha B K_C^{\alpha-1} L^{1-\alpha} \quad ①$$

5.5.3 价格或资金配比的决定

将$K_C = (1 - \phi)K$代入①后得到：

$$P_I A = P_C \alpha B \left(\frac{L}{(1-\phi)K}\right)^{1-\alpha}$$

上式中其实有两个变量一个是$\frac{P_I}{P_C}$，一个是ϕ

如果把价格的比例当作内生变量，可以假设ϕ为常数，即每期资本中都有固定的一部分被用来投资，另一部分被用来消费。这个固定的比例决定了投资品与消费品的价格比：

$$\frac{P_I}{P_C} = \frac{\alpha B}{A}\left(\frac{L}{(1-\phi)K}\right)^{1-\alpha} \quad ②$$

如果把价格当作外生变量，ϕ就可以表示为$\frac{P_I}{P_C}$的函数：

$$\phi = 1 - \frac{L\left(\frac{A P_I}{\alpha B P_C}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{K}$$

5.5.4 平衡增长路径

下面假设ϕ为常数，讨论在这个模型中是否存在平衡增长路径

考虑 Law of Capital Motion：

$$K_{t+1} - K_t = AK_{I_t} - \delta K_t$$

两边同除以K_t得到

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = A\phi - \delta = \gamma_K$$

可知γ_K为常数

又因为

$$C = BK_C^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

$$K_C = (1 - \phi)K$$

所以(假设 Labor 不变)

$$\gamma_C = \frac{C_{t+1}}{C_t} - 1 = \left(\frac{K_{C_{t+1}}}{K_{C_t}}\right)^{\alpha} - 1 = (\gamma_K + 1)^{\alpha} - 1 = (A\phi - \delta + 1)^{\alpha} - 1$$

因为

$$I = AK_I$$

$$K_I = \phi K$$

所以

$$\gamma_I = \gamma_K = A\phi - \delta$$

在 t=t 和 t=t+1 时分别应用② 式(假设 Labor 不变)：

$$\frac{P_{I_t}}{P_{C_t}} = \frac{\alpha B}{A}\left(\frac{L}{(1-\phi)K_t}\right)^{1-\alpha}$$

$$\frac{P_{I_{t+1}}}{P_{C_{t+1}}} = \frac{\alpha B}{A}\left(\frac{L}{(1-\phi)K_{t+1}}\right)^{1-\alpha}$$

两式相除整理得

$$\frac{P_{I_{t+1}}/P_{C_{t+1}}}{P_{I_t}/P_{C_t}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha-1} = (A\phi - \delta + 1)^{\alpha-1}$$

如果 Specialize $P_C = 1$，则

$$\frac{P_{I_{t+1}}}{P_{I_t}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha-1} = (A\phi - \delta + 1)^{\alpha-1}$$

所以平衡增长路径不存在。

六、RBC 模型

6.1 基本概念和等式

RBC 模型中劳动力的供给不是无弹性的，所以生产函数变为

$$Y = F(K, AN) = K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha}$$

其中 N 为市场中的劳动力供给，A 为劳动力的技术水平。

因为劳动力的供给不是无弹性的，所以市场中的所有 HH 在一个时期的效用为：

$$u_t = ln(C_t) + bln(1 - N_t)$$

其中 b 为闲暇效用与消费效用的比值，简称“懒度”

因为所有 t+1 时期发生的事情都是不确定的，经济体中的个体和厂商根据数学期望来做最优决策，于是 HH 对未来第 t 期的效用期望为就成了：

$$E(u_t) = \sum_{s^{\tau}\ /s^{t}} \beta^{\tau}\pi(s^{\tau})[ln(C_{\tau}) + bln(1 - N_{\tau})]$$

其中s^{τ_t}为 t 时期的某一种可能性，$\pi(s^{\tau_t})$为这种可能性发生的概率，$\widehat{\tau_t}$为 t 时期的可能性数-1

所以 HH 在未来无限个时期的总效用为：

$$U_t = \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^{\tau}\ /s^{t}} \beta^{\tau}\pi(s^{\tau})[ln(C_{\tau}) + bln(1 - N_{\tau})]$$

6.2 自由市场下的均衡

6.2.1 厂商的最优决策

$$R_t = F_{K_t} = \alpha(\frac{A_t N_t}{K_t})^{1-\alpha} = \alpha(\frac{Y_t}{K_t})$$

$$W_t = F_{N_t} = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\alpha} A_t^{1-\alpha} = (1-\alpha)(\frac{Y_t}{N_t})$$

6.2.2 HH 的最优决策

HH 在劳动时间 N 选择上的最优决策，已经效用函数为

$$U_t = \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau \ / s^t} \beta^\tau \pi(s^\tau)[ln(C_\tau) + bln(1-N_\tau)]$$

Budget Constrain：

$$C_t + a_{t+1} = W_t N_t + (1+r_t)a_t$$

注意这里的 a 指的是所有 HH 的总资产，且仍有拉格朗日函数：

$$L = \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau \mid s^t} \beta^t \pi(s^\tau)[\ln(C_\tau) + bln(1-N_\tau)] + \sum_{\tau=t}^{\infty} \lambda_\tau [\mathrm{W}_\tau N_\tau + (1+r_\tau)a_\tau - c_\tau - a_{\tau+1}]$$

HH 要选择N_t, C_t令效用最大，则令 L 对N_t, C_t偏导等于 0，解得

$$W_t = \frac{bC_t}{1-N_t} \quad ①$$

这个等式的实际意义是，HH 的时间用来休息能产生闲暇效用，用来工作能赚到工资去消费，获得消费效用。那么 HH 的最优决策是让自己的时间对用于休息和工作产生的边际效用相等。

除了选择 N 以外，消费者还要选择每期消费，来让自己的总效用最大

写出拉格朗日函数：

$$L = \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau \mid s^t} \beta^t \pi(s^\tau)[\ln(C_\tau) + bln(1-N_\tau)] + \sum_{\tau=t}^{\infty} \lambda_\tau [\mathrm{W}_\tau N_\tau + (1+r_\tau)a_\tau - c_\tau - a_{\tau+1}]$$

L 对C_t， a_{t+1}， N_t求偏导等于 0，解出 Euler Equation：

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t[\frac{1+r_{t+1}}{C_{t+1}}]$$

因为

$$r_t = R_t - \delta$$

所以 EQ 也可写成

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t\left[\frac{1+R_{t+1}-\delta}{C_{t+1}}\right] \quad ②$$

将①代入②消去C_t和C_{t+1}，可以得到关于的N_t的 Euler Equation：

$$\frac{1}{1-N_t} = \beta W_t E_t \left[\frac{1+R_{t+1}-\delta}{W_{t+1}(1-N_{t+1})}\right]$$

E 表示括号中内容的数学期望

6.2.3 Firm 和 HH 的均衡

Firm 和 HH 在资本供求上的均衡可以表示为：

$$r_t = R_t - \delta = \alpha\left(\frac{Y_t}{K_t}\right) - \delta$$

Firm 和 HH 在劳动力供求上的均衡可以表示为：

$$W_t{}^{SP} = W_t{}^{DM}$$

分别将 firm 和 HH 的最优决策下的W_t表达式代入，得：

$$(1-\alpha)\left(\frac{Y_t}{N_t}\right) = \frac{bC_t}{1-N_t}$$

化简得

$$\frac{bN_t}{1-N_t} = \frac{1-\alpha}{1-s_t} \quad ③$$

其中$1-s_t = \frac{C_t}{Y_t}$，s_t*表示 t 时期的储蓄率。*

6.3 唯一的考点——S 恒定的情况

因为 RBC 模型在没有计算机的情况下难以求解，唯一可能出题的是以下这种情况：

假设经济体的储蓄率恒定为 s，且资产的折旧率$\delta = 1$

6.3.1 储蓄率恒定的条件

此时 Good Market Clear：

$$Y = C + I = (1 - s)Y + sY$$

Capital Market Clear：

$$K_{t+1} = sY_t$$

与 Euler Equation 联立得：

$$\frac{1}{(1-s)Y_t} = \beta E_t[\frac{R_{t+1}}{(1-s)Y_{t+1}}] \quad ④$$

又因为

$$R_t = F_{K_t} = \alpha(\frac{A_t N_t}{K_t})^{1-\alpha} = \alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} \quad ⑤$$

联立④⑤得：

$$\frac{1}{(1-s)Y_t} = \beta E[\frac{\alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}}{(1-s)Y_{t+1}}]$$

$$\frac{1}{(1-s)Y_t} = \beta E[\frac{\alpha}{(1-s)K_{t+1}}]$$

$$\frac{1}{(1-s)Y_t} = \beta \frac{\alpha}{(1-s)sY_t}$$

$$\alpha\beta = s$$

所以如果一个 RBC 模型具有固定的储蓄率必须满足$\boldsymbol{\alpha\beta = s}$

6.3.2 劳动力供给恒定的事实

在 6.2.3 中已证，由于在均衡状态下的劳动力供求相等，有：

$$\frac{bN_t}{1-N_t} = \frac{1-\alpha}{1-s_t}$$

又由于储蓄率不变，$\mathrm{s_t = s}$，*所以*N_t可以表达为：

$$N_t = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+(1-s)b}$$

可知，当储蓄率不变的时候，劳动力供给亦为常数。

这里出现了一个问题：尽管 HH 可以对其劳动供给进行跨期替代（自由选择每期的劳动时间），但是在 s 恒定的情况下，劳动的供给也是常数。**原因是：技术或资本的变化，通过工资和通过利率给劳动力带来的变化正好抵消。比如说，技术进步**

会提高当期的工资，从而吸引更多的劳动力进入市场；但是同时，技术进步会带来产值的增加，因为不变的储蓄率，产值增加意味着储蓄总量的增加，而储蓄总量的增加会降低利率，降低利率对劳动力有挤出效应。吸引和挤出效应正好抵消，所以劳动力供给不会产生变化。

6.3.3 技术冲击对经济产出的作用

在 RBC 模型中，技术进步由表达式：

$$lnA_t = \gamma lnA_{t-1} + \varepsilon_t \quad ⑥$$

给出，其中γ是技术的恒定增长速率，ε_t代表了技术冲击（比如爱迪生这种大牛的出现）。

那么现在讨论**技术冲击$\boldsymbol{\varepsilon_t}$对当期的产出$\boldsymbol{Y_t}$的影响**

对 RBC 的生产函数两边取对数得：

$$lnY_t = \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln(A_t N_t)$$

由于储蓄率恒定为 s，且资产的折旧率$\delta = 1$
所以$K_{t+1} = sY_t$，N_t为常数，上式可写为：

$$lnY_t = \alpha \ln s + (1-\alpha) \ln N + \alpha \ln\ Y_{t-1} + (1-\alpha) \ln A_t$$

为方便表示，令常数$\alpha \ln s + (1-\alpha) \ln N = \phi$，将上式移项可得：

$$(1-\alpha) \ln A_t = lnY_t - \alpha \ln\ Y_{t-1} - \phi \quad ⑦$$

在 t-1 期时也有

$$(1-\alpha)\ln A_{t-1} = lnY_{t-1} - \alpha \ln\ Y_{t-2} - \phi \quad ⑧$$

将⑦和⑧代入⑥中，消去$\ln A_t$和$\ln A_{t-1}$得：

$$lnY_t - \alpha \ln\ Y_{t-1} - \phi = \gamma(lnY_{t-1} - \alpha \ln\ Y_{t-2} - \phi) + (1-\alpha)\varepsilon_t$$

化简得：

$$\ln Y_t = (\gamma + \alpha)\ln Y_{t-1} - \gamma\alpha \ln\ Y_{t-2} + (1-\alpha)\varepsilon_t + (1-\gamma)\phi$$

这就是 AR(2)等式（将$\boldsymbol{Y_t}$表达为$\boldsymbol{Y_{t-1}}$，$\boldsymbol{Y_{t-2}}$和$\boldsymbol{\varepsilon_t}$的函数）。表达式中不能出现 A，K 或其它别的字母。

七、消费行为研究

7.1 消费行为的特点

7.1.1 消费的相对稳定性

各种统计数据表明，一个国家的消费占 GDP 的比重是相对稳定的。比如在美国，这个比例大概为 60%到百分之 70%。但是投资的比重就会随经济状况产生较大的变动。

另一个事实是，对于个体来说，虽然消费随收入的变动显然没有储蓄大。换句话说，在个人决策中，消费也保持了比较好的稳定性。

为什么呢？

①因为消费是边际消费递减的。所以要使一生的效用最大，个体倾向于使消费平均化。

②因为财富是可以跨期流动的，个体不需要在每一期都做到收支平衡。所以消费决策一般是基于对自己一生收入的预期，而不是当期的收入。

7.1.2 关于定价

通俗地说，绝对价格是商品同货币交换比例的指数。

而相对价格是商品同商品的交换比例的指数。

A 相对于 B 的价格（Relative price of A in terms of B）可以理解为：为了获得 1 单位 A 而需要放弃的 B 的数量。

在这一章中出现的价格都指相对价格。

7.2 包含两个周期的确定性模型

7.2.1 基本假设和公式

假设：在这个模型中有两个时期，t 和 t+1

HH 在两个时期的收入分别为y_t和y_{t+1}

完备的金融市场，市场利率为 r

消费的效用函数$u_{(c)}$一阶导数大于 0，二阶导数小于 0

未来效用的每期时间折现率为β

HH 的效用函数：

$$U_{(c_t,c_{t+1})} = u_{(c_t)} + \beta u_{(c_{t+1})}$$

HH 的 Budget Constrain：

$$\begin{cases} c_t + a_{t+1} = y_t \\ c_{t+1} = (1+r)a_{t+1} + y_{t+1} \end{cases}$$

两式合并，表达为输入和支出的净现值形式：

$$c_t + \frac{1}{1+r}c_{t+1} = y_t + \frac{1}{1+r}y_{t+1}$$

可以看出，c_t相对c_{t+1}的价格为 1+r

求解有条件最优化问题：

$$\begin{cases} Max： u_{(c_t)} + \beta u_{(c_{t+1})} \\ S.T.： c_t + \frac{1}{1+r}c_{t+1} = y_t + \frac{1}{1+r}y_{t+1} \end{cases}$$

解得 Euler Equation：

$$u'_{(c_t)} = \beta(1+r)u'_{(c_{t+1})}$$

可见，消费的变动与当期收入无关，与 r 和β有关。每期的消费量与总收入有关，与当期的收入无关。

7.2.2 CRRA 下的跨期替代弹性

首先定义替代弹性，替代弹性是指生产要素边际产出比的相对变动引起投入比的相对变动。用卡布道格拉斯生产函数举个例子，L 对 K 的替代弹性回答了一个问题：K/L 需要变动多少，才能引起F_K/F_L的变化。

对于

$$Y = F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

替代弹性的公式为：

$$\varepsilon_{K/L} = \frac{dln(K/L)}{dln(F_L/F_K)}$$

替代弹性反映了生产要素投入比随边际产出比变化的难易程度，替代弹性小，意味着生产要素投入比越稳定。

类似的，跨期替代弹性是指两个时期消费的边际效用比的相对变动因为消费比的相对变动。在 Two periods 模型中，c_t对c_{t+1}的跨期替代弹性为：

$$\varepsilon_{c_{t+1}/c_t} = \frac{dln(c_{t+1}/c_t)}{dln(u'_{(c_t)}/u'_{(c_{t+1})})}$$

将 CRRA Utility Function 代入上式：

$$\varepsilon_{c_{t+1}/c_t} = \frac{dln(c_{t+1}/c_t)}{dln({c_t}^{-\theta}/{c_{t+1}}^{-\theta})}$$

解得$\boldsymbol{\varepsilon_{c_{t+1}/c_t} = \frac{1}{\theta}}$

7.2.3 因素变动对消费选择的影响

HH 的消费选择并不是一成不变的。商品价格变化，收入水平变化，利率变化等等都会引起消费选择的变化。这种消费选择的变化由两种效应主导：替代效应和收入效应。

假设在 Two periods 模型中利率 r 发生变化，观察其对消费者消费选择c_t的影响。

将 CRRA Utility Function 代入 Euler Equation 得到：

$$[\beta(1+r)]^{\frac{1}{\theta}}c_t = c_{t+1}$$

将上式代入原题的 Budget Constrain 得：

$$c_t + \frac{[\beta(1+r)]^{\frac{1}{\theta}}c_t}{1+r} = y_t + \frac{1}{1+r}y_{t+1}$$

为方便计算，令 R=r+1，$\varphi=[\beta(1+r)]^{\frac{1}{\theta}}$

$$c_t=\frac{Ry_t+y_{t+1}}{R+\varphi}$$

要求c_t对 r 的导数，因为 R 和φ都是 r 的函数，先写出全微分：

$$d_{c_t}=d_R\frac{\varphi y_t-y_{t+1}}{(R+\varphi)^2}+d_\varphi(-1)\frac{Ry_t+y_{t+1}}{(R+\varphi)^2}$$

又因为：

$$\frac{d_R}{d_r}=1$$

$$\frac{d_\varphi}{d_r}=\frac{1}{\theta}\beta^{\frac{1}{\theta}}(1+r)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

令$\frac{d_\varphi}{d_\mathrm{r}}=\mu$，可知$R\mu=\frac{1}{\theta}\varphi$

所以：

$$d_{c_t}=d_r\frac{\varphi y_t-y_{t+1}}{(R+\varphi)^2}+d_r(-1)\frac{Ry_t+y_{t+1}}{(R+\varphi)^2}*\mu$$

两边除以d_r，化简：

$$\frac{d_{c_t}}{d_r}=\frac{\varphi y_t-y_{t+1}-R\mu y_t-\mu y_{t+1}}{(R+\varphi)^2}$$

整理得：

$$\frac{d_{c_t}}{d_r} = \frac{(1-\frac{1}{\theta})\varphi y_t-(1+\mu)y_{t+1}}{(R+\varphi)^2} \quad ①$$

其中 R， φ，μ都为正常数。

在①中，$\frac{\varphi y_t}{(R+\varphi)^2}$是收入效应，$-\frac{1}{\theta}\frac{\varphi y_t}{(R+\varphi)^2}$是替代效应，$\frac{-(1+\mu)y_{t+1}}{(R+\varphi)^2}$是老师说的第三效应（**The third effect**）（其实本质也是收入效应）

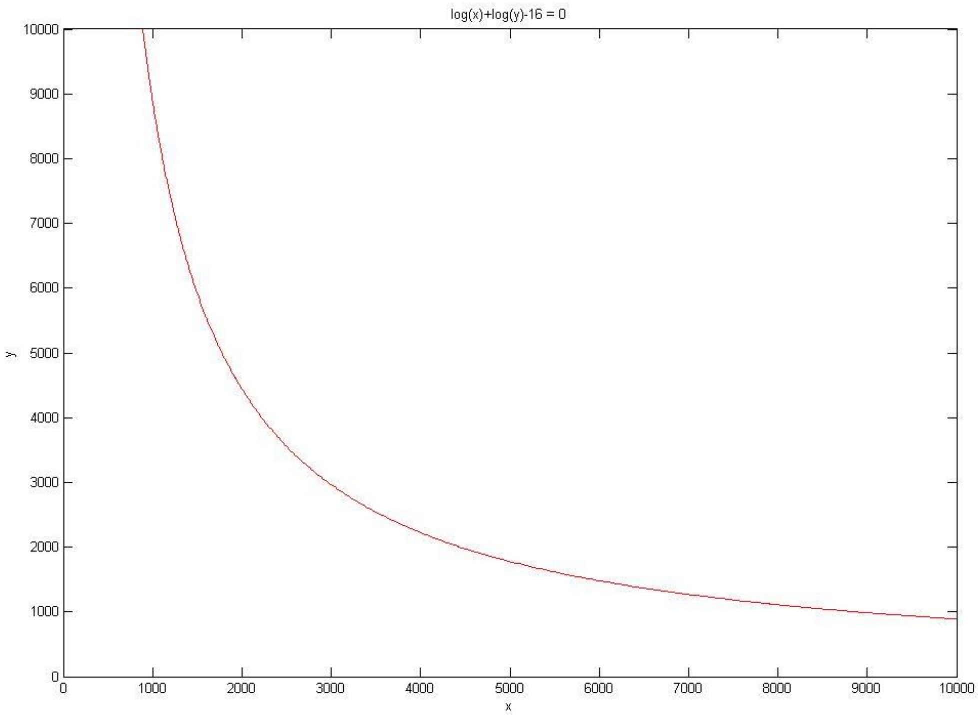
当 r 增加时，c_{t+1}的相对价格下降，于是消费者减少了一部分c_t去购买更便宜的 c_{t+1}，这是$-\frac{1}{\theta}\frac{\varphi y_t}{(R+\varphi)^2}$部分的替代效应。而$c_{t+1}$的价格下降使消费者的第一期收入$y_t$相对增加了，这部分增加了的收入，给$c_t$带来了$\frac{\varphi y_t}{(R+\varphi)^2}$的收入效应。最后因为 r 增加引起的第二期收入$y_{t+1}$的相对减少，给$c_t$带来了$\frac{-(1+\mu)y_{t+1}}{(R+\varphi)^2}$的第三效应。

显然，当$\theta = 1$时（log utility）,收入效应和替代效应正好相等。此时仍有一个负的第三效应，所以c_t会随 r 的增大而减小。而如果第二期的收入$y_{t+1} = 0$时，利率变动就不会影响消费的选择（如同 OLG 模型中 log utility 时s_t的表达式($s_t = \frac{w_t}{1+\beta}$)中没有 r，因为收入效应和替代效应抵消了，利率不会影响 HH 的储蓄选择。

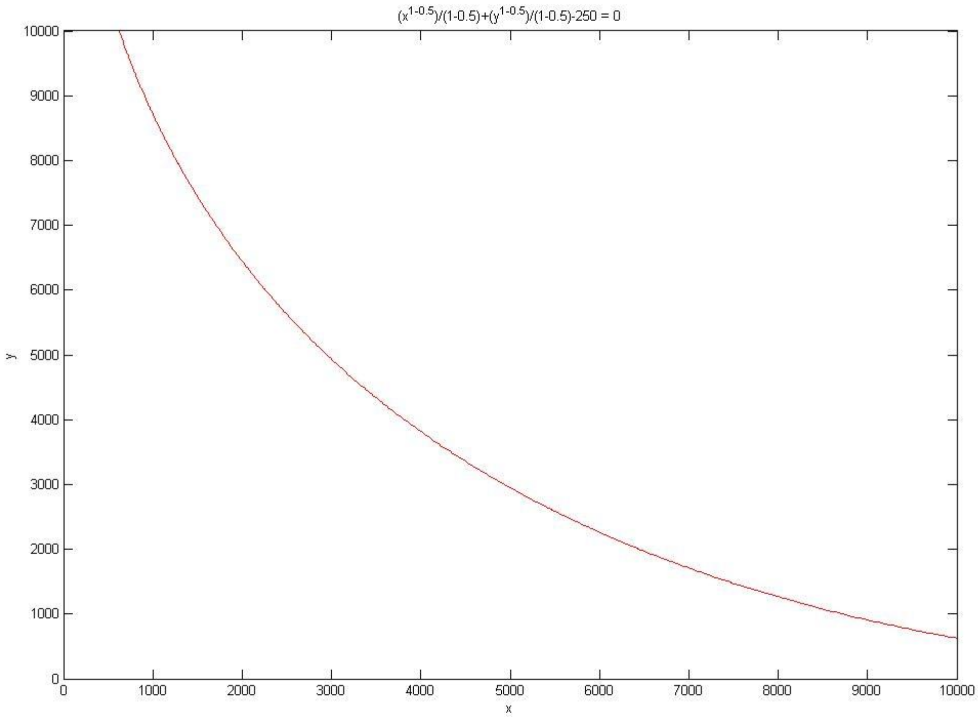
*7.2.4（跨期）替代弹性的实际意义

事实上，替代弹性描绘了两种可以互补的商品，或者是两个时期的拥有共同 budget constrain 的消费的互相可替代性。这种可替代性，直观来看，其实是无差异曲线的曲率。

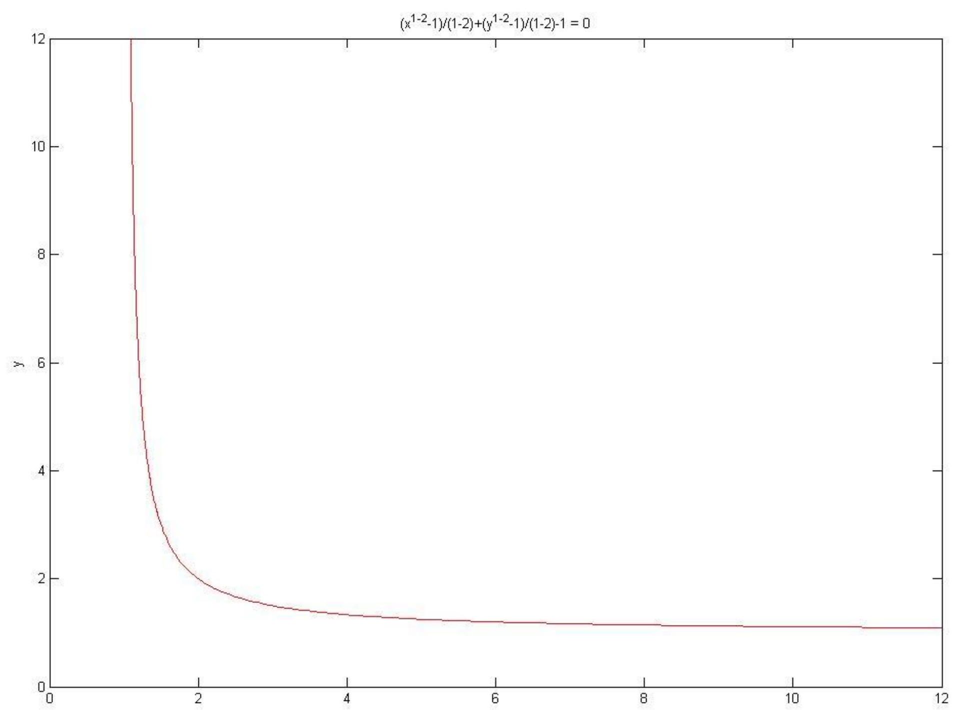
下图是 log utility 下($\theta = 1$)两个商品的无差异曲线（也可以理解为两个时期的消费的无差异曲线。



当替代弹性较大时($\theta = 0.5$)的无差异曲线：

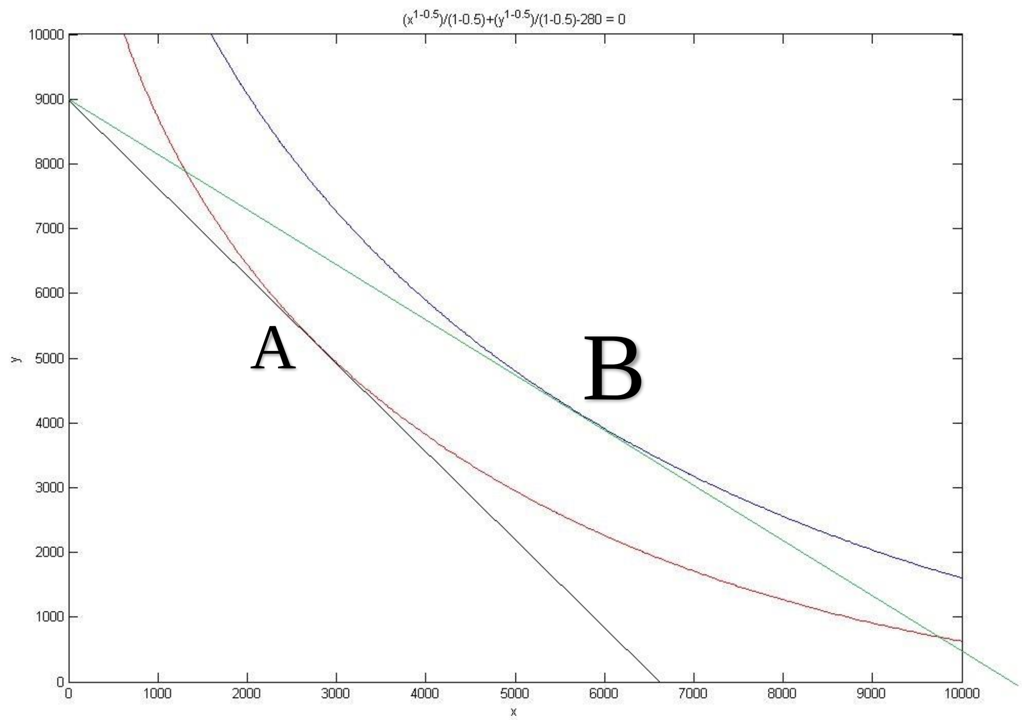


当弹性较小时$(\theta = 2)$的无差异曲线：

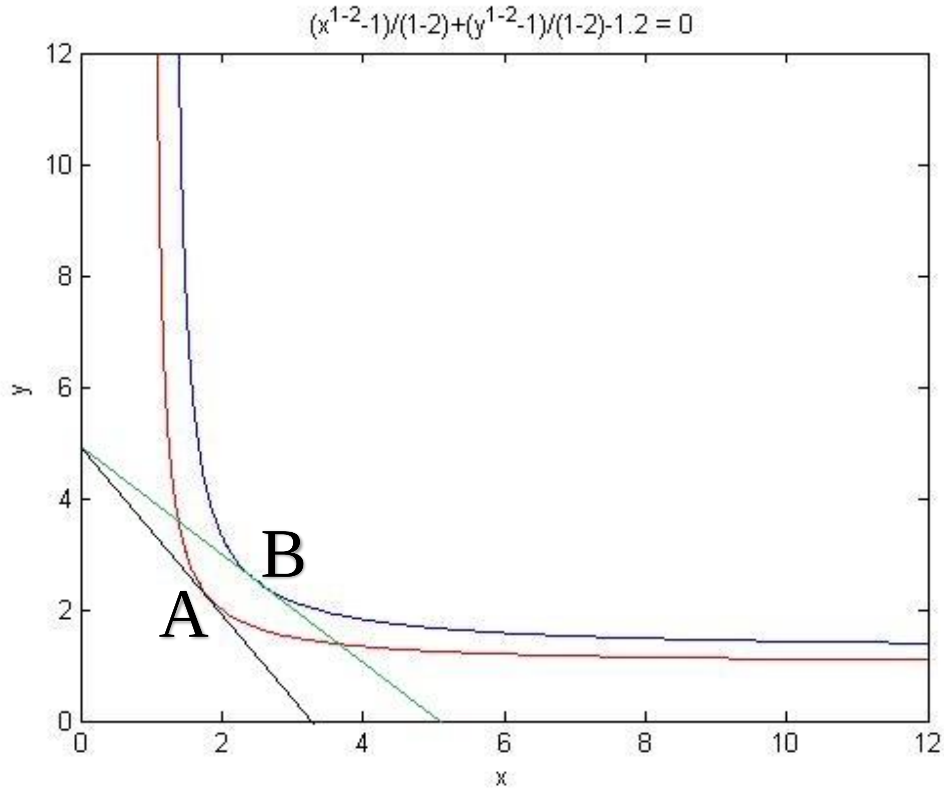


消费的相对稳定性与替代弹性之间的关系可以从下面两张图看出。

当弹性较大时($\theta = 0.5$)，在某种价格条件下，消费者的 budget constrain（黑线）与无差异曲线（红色）相切于 A 点。当横轴上的商品价格下降，新的 budget constrain （绿色）与更高效用的无差异曲线（蓝色）相切于 B。可以看出，横轴商品价格的变化导致了较大的消费选择变化。



相反地当弹性较小时($\theta = 0.5$)，有下图：



在某种价格条件下，消费者的 budget constrain（黑线）与无差异曲线（红色）相切于 A 点。当横轴上的商品价格下降，新的 budget constrain （绿色）与更高效用的无差异曲线（蓝色）相切于 B。可以看出，横轴商品价格的变化导致了较小的消费选择变化。

7.3 包含多个周期的确定性模型

7.3.1 基本假设和公式

假设：在这个模型中有多个时期，从 t=1 到 t=T

HH 在每个 t 时期的收入为y_t

完备的金融市场，市场利率为 r

消费的效用函数$u_{(c)}$一阶导数大于 0，二阶导数小于 0

未来效用的每期时间折现率为β

所以 HH 要最大化终生效用：

$$U_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{1+\rho}^{t-1} u(c_t)$$

其中$\frac{1}{1+\rho} = \beta$

净现值模式的 Budget Constrain 为：

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{1+r}^{t-1} c_t = a_1 + \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{1+r}^{t-1} y_t$$

使用拉格朗日乘数法可知，Euler Equation 依然成立：

$$u'_{(c_{t+1})} = \frac{1+\rho}{1+r} u'_{(c_t)}$$

7.3.2 Permanent and transitory disturbance

假设$\rho = r = 0$

由 Euler Equation 可推出：

$$u'_{(c_{t+1})} = u'_{(c_t)}$$

进而得知：

$$c_{t+1} = c_t = \cdots = c_1$$

所以任意时期的消费都相等：

$$c_t = \frac{1}{T}(a_1 + \sum_{t=1}^{T} y_t)$$

所以，任意一个时期收入的变化Δy_t对c_t的影响都只有$\Delta c_t = \frac{1}{T}\Delta y_t$

此时储蓄为：

$$s_t = y_t - c_t = \left(y_t - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t\right) - \frac{1}{T}a_1$$

所以，当期收入越高的时候，储蓄也会越高。根据 PIH：储蓄不过是未来的消费。

HH 通过储蓄的方式，来让自己的每期消费更加平缓。

7.4 包含两个周期的不确定性模型

假设：在这个模型中有两个时期，t 和 t+1

HH 在两个时期的收入分别为y_1和y_2，在 1 期时，y_1为已知量，y_2为随机变量，且$y_2 \in \{y^L, y^H\}$，且出现的概率分别为和$P(y^L)$和$P(y^H)$

完备的金融市场，市场利率为 r

消费的效用函数$u_{(c)}$一阶导数大于 0，二阶导数小于 0

未来效用的每期时间折现率为$\beta = \frac{1}{1+\rho}$

HH 要最大化终生效用：

$$U_0 = u(c_1) + \frac{1}{1+\rho} E_1[u(c_2)]$$

用拉格朗日法求出一阶条件，可得到：

$$u'_{(c_1)} = \frac{1+r}{1+\rho}(P(y^L) * u'_{(c_2{}^L)} + P(y^H) * u'_{(c_2{}^H)})$$

或保留期望的形式：

$$u'_{(c_1)} = \frac{1+r}{1+\rho} E_1[u'(c_2)]$$

当然如果利率 r 不是常数，也随随机变量y_2的变化而变化的话，1+r 也要放到期望里。写成：

$$u'_{(c_1)} = \frac{1}{1+\rho} E_1[(1+r)u'(c_2)]$$

7.5 霍尔随机漫步模型——包含多个周期的不确定性模型

7.5.1 随机漫步的基本意义

首先，随机漫步（random walk）是来自于物理学的一个概念，最初用来描述布朗运动的理想状态。简单说，简单的符合随机漫步的变量 X 一般具有以下形式的表达式：

$$X_{t+1} = X_t + \varepsilon_{t+1}$$

这个公式的意思是，变量 X 在 t+1 时期的值取决于 t 时期的值再加上一个随机变量 ε_{t+1}。且ε_{t+1}的期望为 0。

所以要证明消费也是符合“随机漫步”模型的，就要证明：

$$c_{t+1} = c_t + \varepsilon_{t+1}$$

7.5.2 简单的多周期不确定性模型

假设 HH 存活 T 期

HH 在每个时期 t 都不能确定 T+1 期的具体状况，但是可以用数学期望进行预测。

所以 HH 在第 1 期最大化终生的期望效用：

$$E_1[\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{1+\rho}^{t-1} u(c_t)]$$

HH 具有期望净现值形式的 Budget Constrain：

$$E_1[\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{1+r_t}^{t-1} c_t] = a_1 + E_1[\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{1+r_t}^{t-1} y_t]$$

用拉格朗日乘数法，对c_1和c_t求偏导得到欧拉等式：

$$u'_{(c_1)} = (\frac{1+r}{1+\rho})^{t-1} E_1[u'_{(c_t)}]$$

对c_t和c_{t+1}求偏导可得到欧拉等式

$$u'_{(c_t)} = \frac{1+r}{1+\rho} E_t[u'_{(c_{t+1})}]$$

假设：①当$\rho = r$ ②二次的效用函数$u(c) = c - \frac{a}{2}c^2$（②不一定需要，在老师推荐的论文中以下结论对任何 strictly concave 的效用函数都成立）。

此时欧拉等式变为：

$$E_t(c_{t+1}) = c_t$$

假设ε_{t+1}为 HH 在 t+1 期得到新信息后对原先预定决策做出的修正，t+1 期消费可表达为：

$$c_{t+1} = E_t(c_{t+1}) + \varepsilon_{t+1}$$

所以

$$c_{t+1} = c_t + \varepsilon_{t+1}$$

所以在以上前提下，HH 每期的消费是符合随机漫步的。

7.5.3 随机漫步理论的实证研究

老师推荐的论文 Stochastic Implication of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis Theory and Evidence 是一篇 Robert Hall 在 1978 年发表的关于消费行为研究的实证论文。

在他之前有 Friedman 已经提出了消费应该由 permanent income（恒常所得，就是每个 HH 可以估计的每期的平均收入；对应的概念是 transitory income，是不可预测的收入，比如捡到钱，赌博啥的）决定，因为 HH 会自发地在收入多的时候储蓄，来 smooth 自己每期的消费。

反对者表示消费不会由 permanent income 决定，①因为流动性限制等原因，消费者并不能很好真正地在各个时期之间转移自己的财富（比如你没钱的时候想先借钱来花等以后还，然后人家并不一定借给你）②消费者很难预期自己一辈子到底能赚多少钱，大部分人对自己的 permanent income 概念都没有吧应该。

于是 Hall 就怒而收集了好多数据并且做了假设检验，证明了：

①消费与 permanent income 相关，且因为 permanent income 的作用服从随机漫步。

②消费与近期收入没有多大关系，唯一那点关系还是负相关的关系（人在有钱的时候没时间花。。。）

③当期消费可以用之前几期消费的线性组合预测出来（作者试图证明的是 AR(1)：c_t与且只与c_{t-1}有关，与c_{t-2}啥的没关系，然而证明失败了。但是后来又有人证明成功了消费是 AR(1)的）

④消费量与个人之前累积的财富无关

7.5.4 凯恩斯消费函数和 permanent income 的推论

凯恩斯大神早早提出过一个消费函数，阐述了消费和收入之间的关系：

$$c = a + by$$

其中 a 表示自发消费，就是维持个体生存所必须的消费，哪怕没有收入也需要的支出。b 是消费随收入增长的系数，就是边际消费倾向(marginal propensity to consume)。

因为要收支平衡，所以 0<b<1

但是 b 具体怎么算呢，对参数 b 的估计量$\hat{b}$是这么计算的。

$$\hat{b} = \frac{cov(y,c)}{v(y)}$$

也就是说用一段时间的经济数据去计算 b 的话，b 等于收入和消费的协方差除以收入的方差。

又因为 Friedman 说了收入分为两部分，一部分是 permanent income，一部分是 transitory income，所以：

$$\hat{b} = \frac{cov(y^P + y^T, c)}{v(y^P + y^T)}$$

除此之外，Friedman 还说了消费等于 permanent income，而且还被 Hall 用数据证明了：所以

$$y^P = c$$

$$cov(y^P, c) = v(y^P)$$

而根据 transitory income 的定义（突然收入，赌博捡钱啥的），它是不可预测的，随机的。所以它和 permanent income 或者消费的协方差应该为 0（两个独立变量的协方差为 0）

$$cov(y^P, y^T) = 0$$

$$cov(y^T, c) = 0$$

因为协方差有分配律 cov(a+b,c)=cov(a,c)+cov(b,c)，所以：

$$\hat{b} = \frac{cov(y^P + y^T, c)}{v(y^P + y^T)} = \frac{cov\left(y^P, c\right) + cov\left(y^T, c\right)}{v(y)} = \frac{v(y^P)}{v(y)}$$

所以对于收入相同的两个人，或者两个经济体，permanent income 的比例越高（收入波动越小）的那个，消费越多，且边际消费倾向越大。