UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

TAREA

Anchuras cráneos

ESTADÍSTICA

29 MAYO 2025

Ane Acha Gonzalez

ESTADÍSTICA - INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Ejercicio 1. La siguiente tabla contiene, en un editable Excel, dos variables: la primera es dicotómica con valores 1 (predinástico temprano) y 2 (predinástico tardío) y la segunda contiene la anchura de cráneos (mm.) encontrados en un yacimiento arqueológico. La idea es analizar si existen diferencias en la longitud de la anchura de los cráneos egipcios a medida que pasa el tiempo. Creo que mayoritariamente tenemos una idea de que las cabezas egipcias son más alargadas y cuando ya llegamos a los romanos son más redondeadas. El cine se ha encargado de hacer muy gráfico todo esto.

Se pide:

a) Obtener con Python las diferentes medidas de centralización y dispersión, asimetría y curtosis estudiadas. Así mismo, obtener el diagrama de caja y bigotes. Se debe hacer por separado para la sub-muestra de los cráneos del predinástico temprano y para la sub-muestra de los del predinástico tardío. Comentar los resultados obtenidos. Estos comentarios son obligatorios.

Obtenemos las Medidas de ambas muestras:

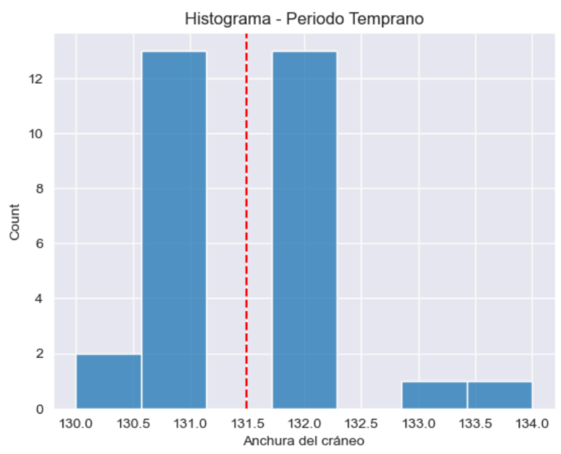
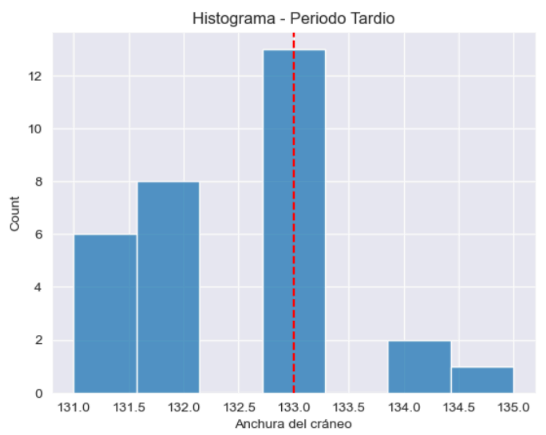
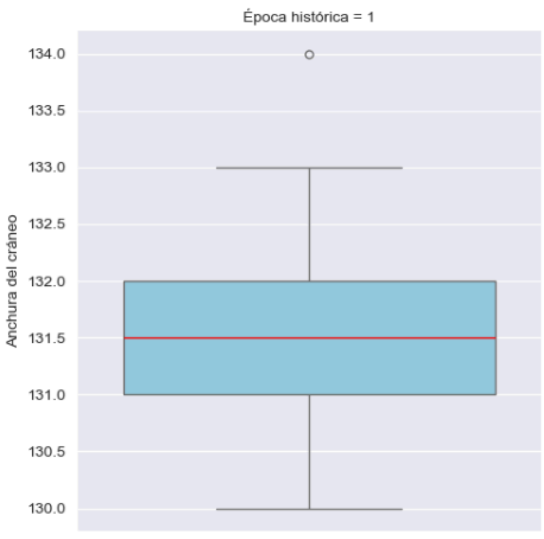
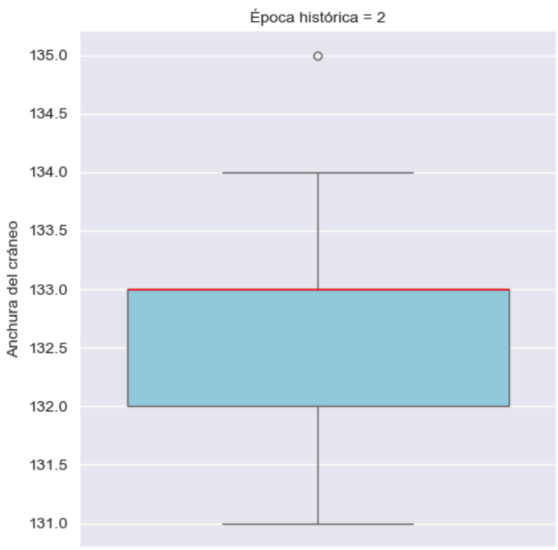
MUESTRA PERIODO TEMPRANO

	Medida	Anchura del cráneo
0	count	30.0
1	mean	131.533333
2	std	0.819307
3	min	130.0
4	25%	131.0
5	50%	131.5
6	75%	132.0
7	max	134.0
8	moda	(131, 132)
9	rango	4
10	varianza	0.671264
11	CoeficientePerson	0.006229
12	CoeficienteFisher	0.645941
13	CoeficienteCurtosis	1.160893

MUESTRA PERIODO TARDÍO

	Medida	Anchura del cráneo
0	count	30.000000
1	mean	132.466667
2	std	1.008014
3	min	131.000000
4	25%	132.000000
5	50%	133.000000
6	75%	133.000000
7	max	135.000000
8	moda	133.000000
9	rango	4.000000
10	varianza	1.016092
11	CoeficientePerson	0.007610
12	CoeficienteFisher	0.191826
13	CoeficienteCurtosis	-0.280029

Además mostraremos histogramas de ambas muestras:

MUESTRA PERIODO TEMPRANO	MUESTRA PERIODO TARDÍO
	
	

Bien con las diferentes medidas de centralización y dispersión, asimetría y curtosis calculadas en las tablas y la información adicional que nos proporcionan el histograma y el diagrama de caja, podemos mencionar las siguientes características de las distribuciones:

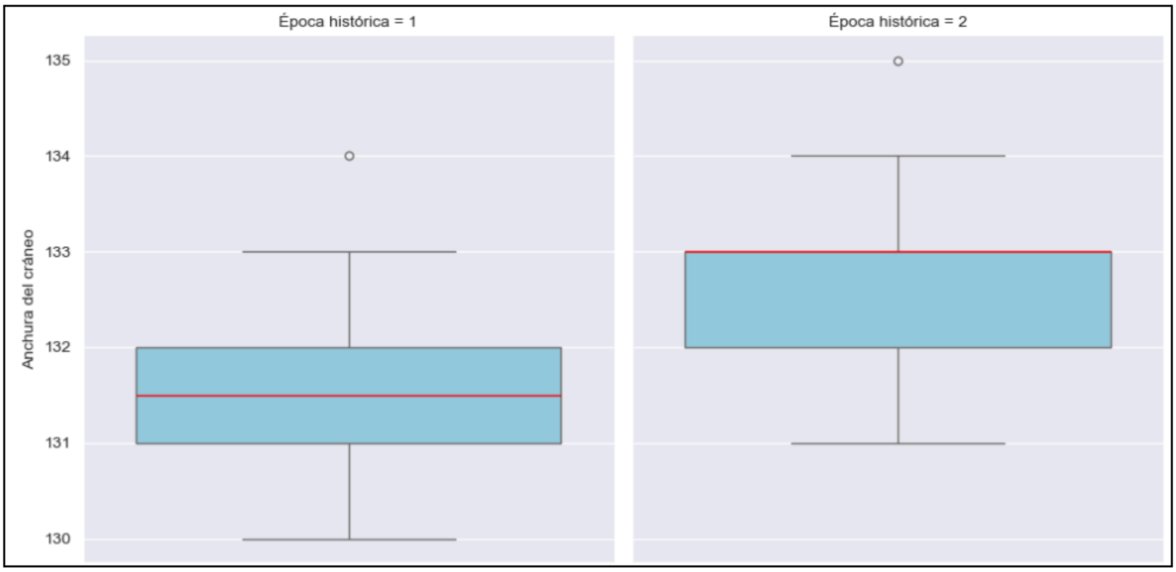
Análisis periodo temprano de la anchura del cráneo

- Los **cuartiles** 25%, 50% y 75% son de 131, 131.5 y 132 mm respectivamente, lo que muestra una distribución bastante simétrica. Esto se muestra visualmente en la caja de diagramas. El rango intercuartílico (Q3 - Q1) es estrecho, lo que refleja que los datos están muy agrupados. Además, el bigote inferior llega hasta 130 mm y el superior hasta 133 mm, pero se observa un **valor atípico** (outlier) en 134 mm.
- En cuanto a las medidas de posición, la **media** es de 131.53 mm, la **moda** es 131 y 132, ya que son los valores más repetidos, y la **mediana** 131.5mm, como hemos mencionado anteriormente. La mediana se sitúa en 131.5 mm, indicando que la mitad de los valores se encuentran por debajo y por encima de esta medida.
- El valor **máximo** de la anchura del cráneo es 134 mm y el **mínimo** es 130 mm, por lo tanto, el **rango** es de 4 mm. Siguiendo con las medidas de dispersión, la **varianza** es de 0.671264 y la **desviación estándar** es de aproximadamente 0.82 mm. El coeficiente de variación de Pearson es de 0.006229, lo cual indica una baja dispersión.
- Para medir la asimetría se utiliza el coeficiente de asimetría de **Fisher**. En este caso, con un valor de 0.645941, se indica una **asimetría positiva**, es decir, hay una mayor concentración de valores a la derecha de la mediana.
- Por otro lado, el **coeficiente de curtosis** es 1.160893, lo cual sugiere una distribución **leptocúrtica**, esto es, presenta un mayor grado de concentración alrededor de la mediana en comparación con una distribución normal, como muestra el histograma.

Análisis periodo tardío de la anchura del cráneo

- Lo primero que debe llamar nuestra atención es que la **mediana, el cuartil 50 y el cuartil 75** son iguales, además en el diagrama de cajas se ve como ambos valores coinciden en una línea. De esto podemos mencionar que el valor 134 se repite en el 25% de los datos. Dándole este 25% de repitencia del valor 134 la **moda**.
- Además, de este mismo diagrama de caja podemos observar que posee un **valor atípico** en 135 mm.
- Este outlier es el valor máximo de la anchura del cráneo y el mínimo es 131 mm, por lo tanto, el rango también es de 4 mm. El coeficiente de variación de Pearson es de aproximadamente 0.007, lo cual indica una baja dispersión.
- Además, con el **Coeficiente de Asimetría** (con valor 0.191826) nos indica que los valores están más concentrados a la derecha del eje de simetría (mediana). Cabe anotar que con la visualización del histograma pareciera que hay más valores a la izquierda, sin embargo, recordemos que el valor 133 es moda, mediana y cuartil 75.
- El **coeficiente de Curtosis**, con un valor de -0.280, nos indica una distribución **platicúrtica** la cual muestra valores menos concentrados en la mediana a comparación con la distribución normal y datos más concentrados en las colas.

COMPARATIVA DIAGRAMAS DE CAJAS DE AMBAS MUESTRAS



Haciendo una observación preliminar a la comparativa entre ambas muestras, sin profundizar demasiado por el momento —ya que más adelante realizaremos un análisis más detallado—, se puede apreciar que el ancho de los cráneos del período temprano es menor en comparación con los del período tardío. Esto se evidencia al observar las medidas de tendencia central, donde la mediana del período temprano es de 131.5 mm, claramente por debajo de la mediana del período tardío, que se sitúa en 133 mm. Esta diferencia inicial ya sugiere una posible evolución morfológica que deberá ser explorada con mayor profundidad en el análisis posterior.

b) Determinar si cada una de las dos sub-muestras sigue una distribución normal utilizando el test de Kolmogorov-Smirnov.

Para la prueba de Kolmogorov tendremos:

H0 -> la distribución 1-2 sigue una distribución normal

H1 -> La distribución 1-2 no sigue una distribución normal

Para esta prueba primero normalizamos los valores (valor – Media) /DesvStd

Obteniendo los siguientes resultados:

```
Resultados de la submuestra 1:
Estadístico: 0.2460415331404474, Valor p: 0.04379464338101191
La submuestra 1 no sigue una distribución normal

Resultados de la submuestra 2:
Estadístico: 0.23809252465886277, Valor p: 0.05572704984817678
La submuestra 2 sigue una distribución normal
```

COMENTARIOS SOBRE LA PRUEBA DE KOLMOGÓROV-SMIRNOV:

Muestra 1:

La muestra posee un estadístico de 0.2460 aproximadamente. La tabla de K-SMR para una muestra de 30 y un alfa de 0.05, el valor crítico es de 0.24170. Con esto, podemos ver que el D observado es mayor que el D esperado, por lo que se rechaza la hipótesis nula (H0). Además, el p-valor es de 0.0437, el cual es menor que 0.05.

Entonces concluimos: a un nivel de confianza del 95% existe suficiente evidencia para rechazar la H0, luego la muestra 1 no sigue una distribución normal.

Muestra 2:

La muestra posee un estadístico de 0.2380 y según la tabla K-SMR, para una muestra de 30 y un alfa de 0.05 el valor crítico es de 0.24170. Como podemos ver, el valor D observado es menor que el D esperado, por lo que se acepta la H0. Además, el p-valor es de 0.0557, mayor que 0.05.

Entonces concluimos: a un nivel de confianza del 95% no existe suficiente evidencia para rechazar la H0, luego la muestra sigue una distribución normal.

NOTA: La normalidad de la distribución es un supuesto fundamental para realizar posteriormente los contrastes estadísticos paramétricos, por lo que verificar este requisito es clave antes de continuar con el análisis. En caso de no cumplirse, como ocurre con la muestra 1, los análisis que realicemos podrían no ser del todo fiables o podrían requerir métodos estadísticos no paramétricos para obtener resultados válidos.

Ejercicio 2.

a) Con los mismos datos del ejercicio anterior, obtener un intervalo de confianza (de nivel 0.9, de nivel 0.95 y de nivel 0.99) para la diferencia entre las medias de la anchura de la cabeza en ambos periodos históricos. Interpretar los resultados obtenidos y discutirlos en función del test de normalidad del ejercicio anterior. La interpretación debe ser rigurosa desde el punto de vista estadístico y también marcada por el story telling, es decir, comprensible desde el punto de vista de las variables respondiendo a la pregunta ¿en qué época la cabeza era más ancha?

Para abordar este problema debemos asegurarnos de que se cumplen las siguientes condiciones:

1. Definir si las muestras son independientes – asumimos independencia de las muestras.
2. Sabemos que las varianzas poblacionales son desconocidas.
3. Demostrar si las varianzas poblacionales son iguales o diferentes.

A continuación, evaluaremos si las varianzas poblacionales pueden considerarse iguales o diferentes. Esta comprobación no solo es fundamental por sí misma, sino que también resultará útil para abordar la parte b de esta pregunta. Para ello, aplicaremos el test de Levene, que permite contrastar la homogeneidad de varianzas entre dos muestras.

H0: Las muestras poseen varianzas poblacionales iguales S1 = S2

H1: Las muestras poseen varianzas poblacionales diferentes S1 != S2

Consideraciones:

- Para probar si las varianzas poblacionales son iguales o diferentes, tomaremos un intervalo de confianza del 90% -- esto un alfa/2 de 0.05

- Esta prueba es de dos colas, ya que probamos si las dsvStd son iguales o diferentes
- Además, recordemos que en la prueba de Kolmogorov (apartado anterior), ya determinamos que no ambas muestras siguen una distribución normal, por lo tanto los resultados de este análisis no son del todo confiables, ya que compromete la validez del test.

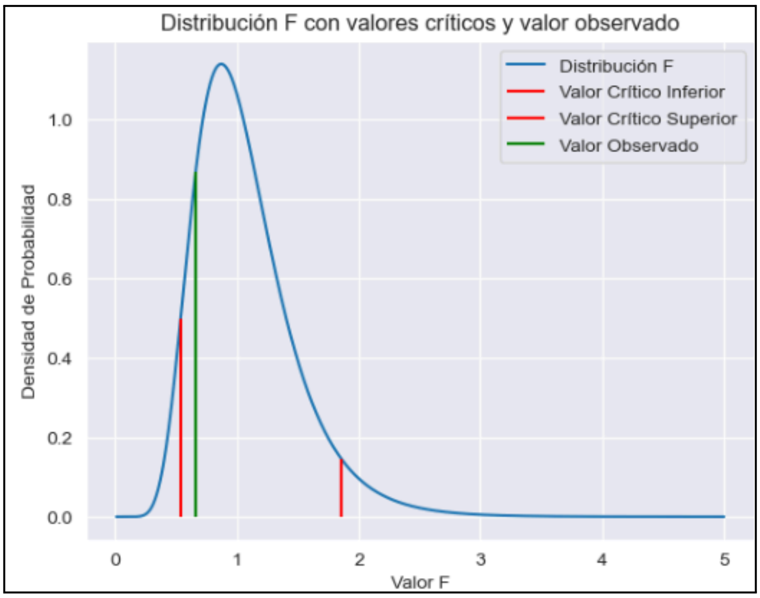
Con apoyo de Python calcularemos los valores críticos correspondientes recordando que el alfa/2 es 0.05 y además las muestras son de 30 dándonos grados de libertad de (29,29):

```
la zona de aprobacion de la H0 es: 0.5373999648406917 <F< 1.8608114354760754
```

Además calculando el valor F de la división de las desv. Estándar de las muestras tenemos:

```
0.6606334841628961
```

Como observamos el valor obtenido se encuentra dentro de la zona de aceptación de la H0, gráficamente podemos mencionar que.



A partir del gráfico y de los valores críticos y observados obtenidos en la prueba F, podemos concluir que, con un nivel de confianza del 90%, no existe evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula (H0). Por lo tanto, se acepta la H0, lo que indica que las varianzas poblacionales de ambas muestras, correspondientes al período temprano y al período tardío, son iguales.

Ahora, con los resultados obtenidos, se considera que las varianzas de ambas muestras son iguales, sabiendo que las condiciones bajo el cual el ejercicio opera, podemos calcular los intervalos de confianza – ya que este intervalo depende del Error Estándar Estimado y este varía según las condiciones. Bajo esta condición, y asumiendo muestras independientes, normales y varianzas poblacionales desconocidas pero iguales, podemos calcular el Error Estándar Estimado. Sin embargo, dado que una de las muestras no cumple con el supuesto de normalidad, debemos ser cautelosos, ya que esto puede afectar la fiabilidad de los intervalos de confianza calculados. Finalmente, el Error Estándar Estimado se determina de la siguiente manera:

$$\frac{\sqrt{(n_1 S_X^2 + n_2 S_Y^2)[(1/n_1)+(1/n_2)]}}{\sqrt{n_1+n_2-2}}$$

Con esto nos falta calcular el valor crítico T con grados de libertad (n1+n2-2) y un alfa dependiendo de que intervalo de confianza adoptemos. Con ayuda de Python tendremos el siguiente resultado:

```
los intervalos de confianza para la diferencia de medias con un 90% de confianza es: (-1.3365370179152296, -0.5301296487514446)
----------------------------------------------------------------------------------------------------------
los intervalos de confianza para la diferencia de medias con un 95% de confianza es: (-1.416177718044257, -0.45048894862241723)
----------------------------------------------------------------------------------------------------------
los intervalos de confianza para la diferencia de medias con un 99% de confianza es: (-1.575758231239763, -0.29090843542691114)
```

Como observamos ya disponemos de los intervalos de confianza para la diferencia de medias (X1-X2) donde

X1 = Periodo Temprano

X2 = Periodo Tardío

Podemos concluir que, a niveles de confianza del 90%, 95% y 99%, al no incluir el valor 0 en el intervalo de confianza, existe evidencia suficiente para afirmar que las medias poblacionales son significativamente diferentes. Además, dado que nuestra comparación es (X1 – X2) y el intervalo es negativo, podemos decir que los cráneos del período temprano son menos anchos que los del período tardío.

Es importante insistir en que, debido a la falta de normalidad observada en la muestra 1, los resultados podrían no ser del todo fiables.

b) Utilizar el test t para contrastar la hipótesis de que ambas medias son iguales. Explicar qué condiciones se deben cumplir para poder aplicar ese contraste. Determinar si se cumplen. Admitiremos de forma natural la independencia entre ambas muestras, así que esa condición no hace falta comprobarla.

Observación: Quiero insistir en que debéis hacer el test t para la diferencia de medias incluso si las condiciones no se cumplieran. En ese caso discutir la validez de los resultados obtenidos.

Abordaremos este ejercicio mencionando que para poder probar la diferencia de medias de dos poblaciones, debemos asegurarnos de que se cumplan 3 condiciones:

1. Normalidad de los datos: Se utilizó la prueba de Kolmogorov-Smirnov para evaluar esta condición, y se encontró que solo una de las muestras sigue una distribución normal. Por lo tanto, aunque se procede con el análisis, es importante enfatizar que los resultados no son del todo fiables, ya que la falta de normalidad en una de las muestras compromete la validez del test.

2. Homocedasticidad: En el ejercicio anterior se comprobó, mediante la prueba F, que las varianzas de ambas muestras pueden considerarse homogéneas, es decir, se cumple la condición de homocedasticidad. Sin embargo, dado que no se verifica la normalidad en ambas muestras, esta conclusión debe tomarse con precaución, ya que la falta de normalidad puede afectar la validez de los resultados obtenidos.

3. Independencia de las observaciones: El ejercicio nos exige que esta condición, y asumimos que se cumple.

Entonces para continuar con el ejercicio, asumiendo que se cumplen todas las condiciones para el test, planteamos nuestras hipótesis:

H0 ⟶ Las medias de ambas muestras son iguales M0 = M1

H1 ⟶ Las medias de ambas muestras son diferentes M0 != M1

Consideraciones:

- Como tenemos una prueba de demostrar si las medias son iguales o diferentes, esta corresponde a una prueba de dos colas
- Además, consideramos un intervalo de confianza de 95% por lo que alfa medios será de 0.025 a cada lado de las colas.
- También tomamos los grados de libertad correspondientes a n1+n2-2

Con ayuda de Python, calcularemos los valores críticos de la prueba esto para la distribución T que dependerá de los grados de libertad y el alfa a cada lado de la cola que ya determinamos que es 0.025 obteniendo:

```
la zona de aceptacion para la prueba es : -2.001717484145236 , 2.0017174841452356
```

Calcularemos el valor observado T:

T = (Mmuestral1 – Mmuestral2) – (Xpoblacional1 – Xpoblacional2) / ErrorStandarEstimado

Como estamos probando en H0 que las medias poblacionales son iguales la diferencia representada en el calculo del T es 0 (Xpoblacional1 – Xpoblacional2 = 0)

Quedandonos el T de la siguiente manera: t = (Mmuestral1 - Mmuestral2) / Error Standr Estimado

Recordemos que el ErrorStandarEstimado ⟶ ya lo tenemos calculado del ejercicio 2.a

Nos quedaría calcular el T siendo:

```
el valor critico de T es : -3.869299739267822
```

Además, podemos plantear el gráfico de esta prueba siendo:

Teniendo toda esta información correspondiente podemos determinar que:

Con un intervalo de confianza del 95% se rechaza la hipótesis nula (H0) de que las medias de ambas muestras son iguales, por lo que podemos concluir que las medias poblacionales son diferentes.

Esto indica que la anchura de los cráneos del período temprano es significativamente distinta a la del período tardío.

Más aún, la media de la anchura de los cráneos del período temprano es menor que la del período tardío, como se observa claramente en el gráfico. El valor observado se encuentra a la izquierda de los valores críticos, lo que confirma que los cráneos del período temprano tienen una menor anchura.

En conclusión, existe una diferencia estadísticamente significativa en la anchura craneal entre ambos períodos, mostrando que los cráneos del período temprano son menos anchos que los del período tardío. Sin embargo, es importante considerar que el cumplimiento de ciertas condiciones estadísticas puede influir en la fiabilidad de estos resultados.

Por ello, es necesario criticar los resultados obtenidos a la luz de las limitaciones del análisis, especialmente en lo que respecta a la normalidad de los datos. Como alternativa más adecuada ante el incumplimiento de dichos supuestos, se propone realizar la prueba no paramétrica de Mann-Whitney, que no requiere normalidad y es más robusta ante estas situaciones.

Este ejercicio tiene como objetivo generar conciencia sobre la importancia de aplicar cada técnica estadística en el contexto adecuado, evitando utilizarlas de forma mecánica o sin una evaluación crítica de sus condiciones.