AT2 - Métodos Matemáticos para Gestão da Informação

Juliane Pires

PARTE A — Matrizes como estrutura de dados

1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a) A + B

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}$$

b) A - B

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) 2A

$$2 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

d) $\mathbf{A}^T$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Considere a matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Informe a ordem da matriz.

A matriz tem 2 linhas e 3 colunas, ou seja, é uma matriz 2×3

.

b) Identifique o elemento $\mathbf{C_{23}}$.

O elemento C_{23} é o elemento que está na linha 2 e na coluna 3, ou seja, é o **4**.

c) Calcule a média da primeira linha.

$(5 + 2 + 1) \div 3 = 8 \div 3 = \mathbf{2,66}$

d) Calcule a amplitude da segunda linha.

A amplitude da segunda linha é o cálculo do maior velor pelo menor valor da linha, ou seja: $6 - 3 = \mathbf{3}$

PARTE B — Distâncias e Agrupamento Hierárquico (Complete Linkage)

Considere os vetores:

$P1 = (1, 1)$
$P2 = (2, 3)$
$P3 = (6, 5)$
$P4 = (7, 4)$

3. Matriz de distâncias (Euclidiana)

a) Calcule todas as distâncias Euclidianas entre os pontos.

$\underset{1,2}{D} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = \mathbf{2,23}$
$\underset{1,3}{D} = \sqrt{(1-6)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} = \mathbf{6,40}$
$\underset{1,4}{D} = \sqrt{(1-7)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \mathbf{6,70}$
$\underset{2,3}{D} = \sqrt{(2-6)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \mathbf{4,47}$
$\underset{2,4}{D} = \sqrt{(2-7)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} = \mathbf{5,09}$
$\underset{3,4}{D} = \sqrt{(6-7)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = \mathbf{1,41}$

b) Construa a matriz de distâncias 4×4.

	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$
$P1$	0	2,23	6,40	6,70
$P2$	2,23	0	4,47	5,09
$P3$	6,40	4,47	0	1,41
$P4$	6,70	5,09	1,41	0

4. Agrupamento hierárquico (Complete Linkage)

Utilizando a matriz do exercício anterior:

a) Identifique o primeiro par agrupado e a respectiva altura.

O primeiro par agrupado é a menor distância diferente de <u>*zero*</u>, ou seja: $(P3, P4)$, sendo a altura no dendograma $= 1,41$.

b) Construa a matriz reduzida após a primeira fusão.

1 Calcula-se a distância do novo grupo (P3,P4) em relação aos pontos restantes (P1 e P2):

→ Distância de (P3,P4) até P1:
$d((P3, P4), P1) = max(d(P3, P1), d(P4, P1)) = max(6,40; 6,70) = 6,70$

→ Distância de (P3,P4) até P2:
$d((P3, P4), P2) = max(d(P3, P2), d(P4, P2)) = max(4,47; 5,09) = 5,09$

2 Monta-se a nova matriz:

	$P1$	$P2$	$(P3, P4)$
$P1$	0	2,23	6,70
$P2$	2,23	0	5,09
$(P3, P4)$	6,70	5,09	0

c) Identifique o segundo agrupamento.

A menor distância na nova matriz é a do agrupamento $(P1, P2)$, sendo a sua altura no dendograma $\mathbf{2,23}$.

d) Calcule a distância final entre os dois clusters restantes e monte a matriz.

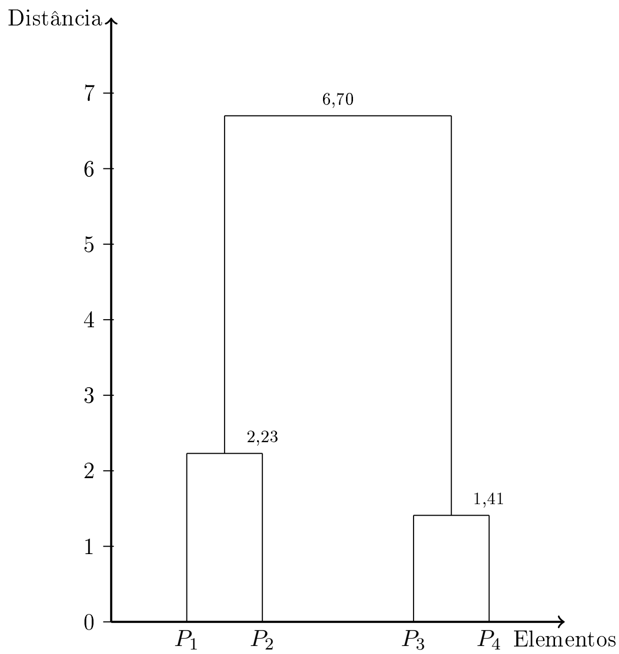
① Calcula-se a distância do novo grupo (P1,P2) em relação ao agrupamento anterior (P3,P4):

→ Distância de (P3,P4) para P1 e (P3,P4) para P2:
$d((P3, P4), (P1, P2)) = max(d((P3, P4), P1), d((P3, P4), P2)) = max(6,70; 5,09) =$ $\mathbf{6,70}$

② Monta-se a nova matriz:

	$(P1, P2)$	$(P3, P4)$
$(P1, P2)$	0	6,70
$(P3, P4)$	6,70	0

e) Indique as três alturas do dendrograma e desenhe-o esquematicamente.



f) Ao cortar o dendrograma na altura 4, informe os dois clusters formados (apenas conjuntos).

$C1 = (P1, P2); C2 = (P3, P4)$

PARTE B2 — Similaridade de Cosseno + Complete Linkage (Curadoria de Conteúdos)

Uma equipe de Gestão da Informação está organizando automaticamente documentos digitais com base em dois indicadores:

X: Grau de conteúdo técnico
Y: Grau de conteúdo aplicado

Os vetores são:

$D1 = (2, 3)$
$D2 = (8, 7)$
$D3 = (3, 2)$

$D4 = (7, 8)$

5. Similaridade e Agrupamento

a) Calcule a norma de cada vetor.

$$||\underset{D1}{V}|| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3,60$$
$$||\underset{D2}{V}|| = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113} = 10,63$$
$$||\underset{D3}{V}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3,60$$
$$||\underset{D4}{V}|| = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113} = 10,63$$

b) Calcule a similaridade de cosseno entre todos os pares de documentos.

$$\underset{D1,D2}{S} = \frac{D1 \times D2}{||D1|| \times ||D2||} = \frac{2\times8+3\times7}{3{,}60\times10{,}63} = \frac{37}{38{,}268} = \mathbf{0,966}$$
$$\underset{D1,D3}{S} = \frac{D1 \times D3}{||D1|| \times ||D3||} = \frac{2\times3+3\times2}{3{,}60\times3{,}60} = \frac{12}{12{,}96} = \mathbf{0,925}$$
$$\underset{D1,D4}{S} = \frac{D1 \times D4}{||D1|| \times ||D4||} = \frac{2\times7+3\times8}{3{,}60\times10{,}63} = \frac{38}{38{,}268} = \mathbf{0,992}$$
$$\underset{D2,D3}{S} = \frac{D2 \times D3}{||D2|| \times ||D3||} = \frac{8\times3+7\times2}{10{,}63\times3{,}60} = \frac{38}{38{,}268} = \mathbf{0,992}$$
$$\underset{D2,D4}{S} = \frac{D2 \times D4}{||D2|| \times ||D4||} = \frac{8\times7+7\times8}{10{,}63\times10{,}63} = \frac{112}{112{,}996} = \mathbf{0,991}$$
$$\underset{D3,D4}{S} = \frac{D3 \times D4}{||D3|| \times ||D4||} = \frac{3\times7+2\times8}{3{,}60\times10{,}63} = \frac{37}{38{,}268} = \mathbf{0,966}$$

c) Construa a matriz de similaridade de cosseno (dica: a diagonal principal vale 1).

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$
$D1$	1	0,966	0,925	0,992
$D2$	0,966	1	0,992	0,991
$D3$	0,925	0,992	1	0,966
$D4$	0,992	0,991	0,966	1

d) Converta a matriz de similaridade em matriz de dissimilaridade usando $d = 1 - \cos(\theta)$

$d_{ij} = 1 - s_{ij}$

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$
$D1$	0	0,034	0,075	0,008
$D2$	0,034	0	0,008	0,009
$D3$	0,075	0,008	0	0,034
$D4$	0,008	0,009	0,034	0

e) A partir dessa matriz de dissimilaridade, execute o agrupamento hierárquico usando Complete Linkage:

$\rightarrow$ Indique o primeiro agrupamento e sua altura:
1.1 O primeiro agrupamento é a menor distância diferente de $\underline{zero}$, ou seja: $(D2, D3)$, sendo a sua altura no dendograma $= 0,008$.

1.2 Matriz reestruturada:
$\rightarrow$. Distância de (D2, D3) em relação a D1 e D4:
• (D2,D3) até D1:
$d((D2, D3), D1) = max(d(D2, D1), d(D3, D1)) = max(0,034; 0,075) = \mathbf{0,075}$
• (D2,D3) até D4:
$d((D2, D3), D4) = max(d(D2, D4), d(D3, D4)) = max(0,009; 0,034) = \mathbf{0,034}$

1.3 Nova matriz:

	$D1$	$(D2, D3)$	$D4$
$D1$	0	0,075	0,008
$(D2, D3)$	0,075	0	0,034
$D4$	0,008	0,034	0

1.4 Segundo agrupamento:
Agrupamento escolhido: $(D1, D4)$
Altura no dendograma: $0,008$

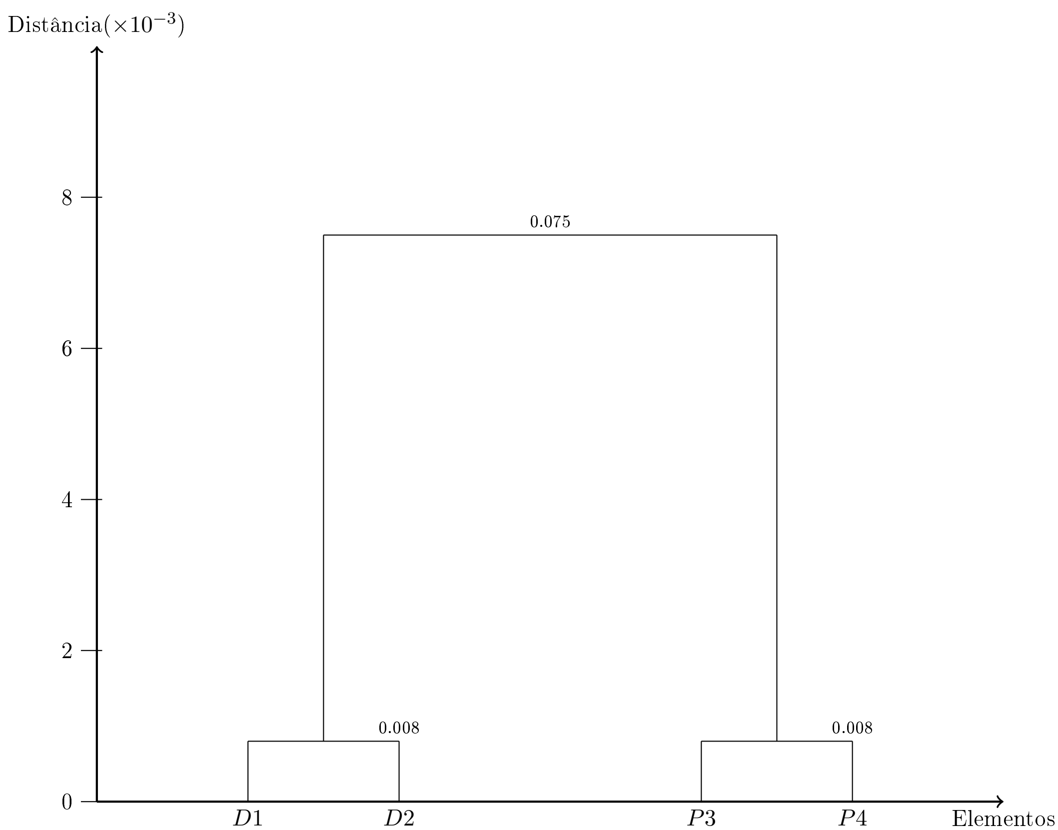
(1.5) Reestruturação da matriz:
→ Distância de (D1,D4) até (D2,D3)
$d((D1, D4), (D2, D3)) = max(D1(D2, D3), (D4(D2, D3)) = max(0,075; 0,034) =$ $\mathbf{0,075}$

(1.6) Nova matriz:

	$(D1, D4)$	$(D2, D3)$
$(D1, D4)$	0	0,075
$(D2, D3)$	0,075	0

(1.7) Distância final entre os clusters: $\mathbf{0,075}$

f) Desenhe o dendrograma.



g) Se o sistema precisar gerar apenas dois grandes grupos de documentos, quais documentos ficam juntos? (responda apenas com conjuntos, por exemplo: D1,D3)

$(D1, D4); (D2, D3)$

PARTE C — Sistemas Lineares

6. Resolva o sistema utilizando exclusivamente o método da adição e o gráfico:

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$$

a) Mostre explicitamente a soma das equações.

$\boxed{\text{Adição}}$ - Somam-se as equações verticalmente para cancelar uma variável !!! No entanto, aqui não precisa multiplicar nenhuma equação por nenhum número, pois o x na adição entre as duas equações já é cancelado:

1.1

$$2x + y = 9$$
$$\underline{-2x + 3y = 3}$$
$$4y = 12$$
$$\boxed{\boldsymbol{y = 3}}$$

1.2 Para encontrar o $\boldsymbol{x}$, é só substituir o $\boldsymbol{y}$ encontrado em qualquer uma das equações:

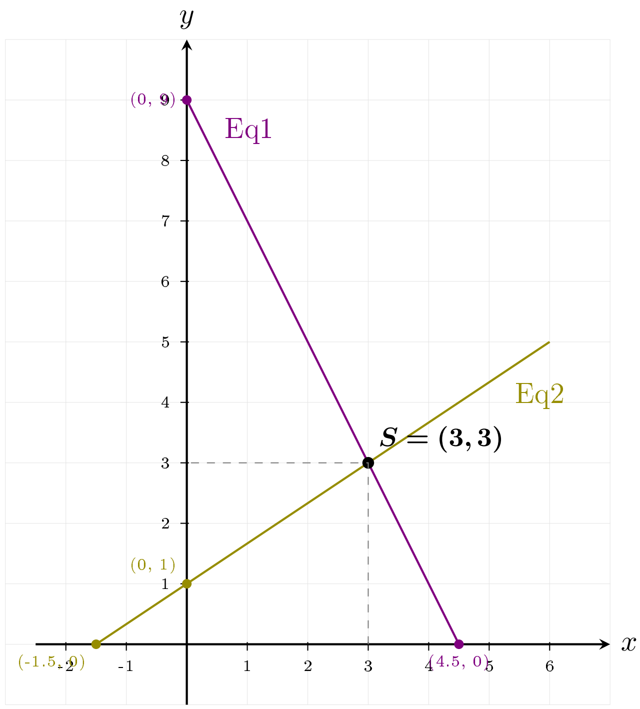
$\boxed{\text{Eq1}}$
$2x + y = 9 \rightarrow 2x + 3 = 9 \rightarrow 2x + 6 \therefore \boxed{\boldsymbol{x = 3}}$
$S = \{3, 3\}$

$\boxed{\text{Gráfico}}$ - Para a montagem do gráfico, zera-se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ nas duas equações:
$\boxed{\text{Eq1}}$
x $2x + y = 9 \rightarrow 2.0 + y = 9 \therefore \boldsymbol{y = 9}$
y $2x + y = 9 \rightarrow 2x + 0 = 9 \therefore \boldsymbol{x = 4,5}$

$\boxed{\text{Eq2}}$

(x) $-2x + 3y = 3 \rightarrow -2.0 + 3y = 3 \therefore \boldsymbol{y = 1}$

(y) $-2x + 3y = 3 \rightarrow 2x + 0 = 3 \therefore \boldsymbol{x = -1,5}$



b) Determine x e y.

$x = 3, y = 3$

7. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

a) Escreva o sistema na forma matricial Ax = b.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

b) Monte a matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 11 \end{array}\right]$$

c) Resolva utilizando o método de Gauss (escalonamento).

1.1 Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 11 \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ Pivô $=$ 1 / Alvo para zerar $=$ 3 $\therefore$ Fator $=$ Alvo $\div$ Pivô $\rightarrow 3 \div 1 = \mathbf{3}$

1.2 Operação para zerar o alvo: $L_2 = L_2 - 3 \times L_1$

1.3 Calculando a segunda linha da matriz:
$L_2 = 3 - 3 \times 1 = 0$
$L_2 = 4 - 3 \times 2 = -2$
$L_2 = 11 - 3 \times 5 = -4$
1.3.1 Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

1.4 Agora, encontra-se o $\boldsymbol{y}$:

$-2y = -4$
$y = \frac{-4}{-2} \rightarrow \boldsymbol{y = 2}$

1.5 Por fim, o $\boldsymbol{x}$:
$x + 2 = 5$
$x + 2 \times 2 = 5 \therefore \boldsymbol{x = 1}$

d) Apresente a solução final.

$S = \{1, 2\}$

8. Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

a) Resolva o sistema.

Multiplicando a Eq_2 por -2 e resolvendo por adição:

$$\begin{array}{c} 2x + 4y = 6 \\ -2x - 4y = -6 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

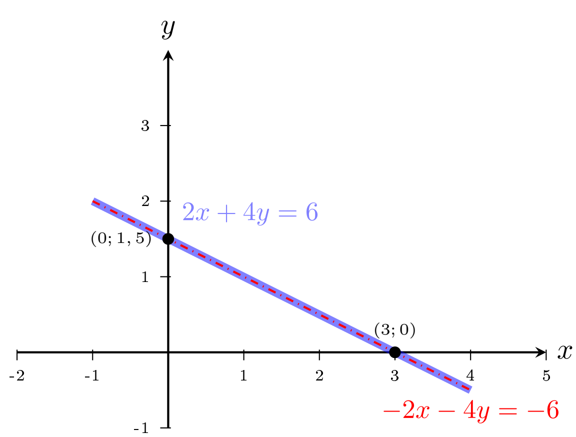
b) O que ocorre durante o processo de resolução?

No processo de adição do sistema, o resultado é igual a *zero* na adição de todas as variáveis de ambas as equações. Isso ocorre porque a Equação 1 é apenas a informação multiplicada por dois da Equação 2 ($Eq_1 = 2 \times Eq_2$), ou seja, as equações do sistema têm exatamente as mesmas informações. Assim, o determinante resulta em *zero*.

c) Classifique o sistema (solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução).

Infinitas soluções possíveis (SPI $\rightarrow$ Sistema Possível e Indeterminado).

d) Desenhe o gráfico correspondente.



e) Explique em uma frase objetiva o significado desse resultado.

Frase: o sistema possui infinitas soluções porque as duas equações que o compõe são iguais, isto é, a equações representam a mesma reta no plano cartesiano
Colocando a frase em um exemplo: se isso fosse aplicado em uma situação real, por exemplo: duas planilhas de dados dos gastos de uma empresa em um trimestre, com dois tipos de atributos ($Eq1$ para despesas operacionais e $Eq2$ para despesas tributárias), os dados sobre os gastos estariam incorretos e as informações financeiras estariam perdidas. O erro nesse tipo de problema já pode ser encontrado prontamente ao perceber que o determinante desse sistema será igual a zero.

9. Sistema 3×3 (Gauss)

Resolva o sistema abaixo usando escalonamento de Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + z = 9 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

a) Escreva a matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

b) Realize o escalonamento.

1 Fator: 2

1.2 Para zerar a linha 2, coluna 1: $L_2 = L_2 - 2 \times L_1$

1.3 Cálculos da L_2:
$L_2 = 2 - 2 \times 1 = 0$
$L_2 = 1 - 2 \times 1 = -1$
$L_2 = 1 - 2 \times 1 = -1$
$L_2 = 9 - 2 \times 6 = -3$

1.4 Agora, zera-se a linha 3, coluna 1:
Fator: 1

Para zerar a linha 3, coluna 1: $L_3 = L_3 - L_1$
1.5 Cálculos da L_3:
$L_3 = 1 - 1 = 0$
$L_3 = 2 - 1 = 1$
$L_3 = 3 - 1 = 2$
$L_3 = 14 - 6 = 8$

1.6 Matriz atualizada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

2 Agora, é preciso zerar o elemento na linha 3, coluna 2:
Fator: -1
Para zerar a linha 3, coluna 2: $L_3 = L_3 + L_2$

2.1 Cálculos da L_3:
$L_3 = 0 + 0 = 0$
$L_3 = 1 + (-1) = 0$
$L_3 = 2 + (-1) = 1$
$L_3 = 8 + (-3) = 5$

3 Matriz escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

c) Apresente a solução (x,y,z).

$1z = 5 \therefore \boxed{\text{z = 5}}$
$0 - y - 5 = -3 \rightarrow -y = 2 \therefore \boxed{\text{y = -2}}$
$x - 2 + 5 = 6 \rightarrow x = 6 - 3 \therefore \boxed{\text{x = 3}}$

S = { 3, -2, 5}

10. Questão de sala de aula (MATRIZES)

Uma equipe de pesquisa está analisando 4 unidades de saúde quanto ao uso de dados e tecnologia em suas rotinas.
Foram definidos dois indicadores (normalizados entre 0 e 10):
X1: Grau de digitalização de prontuários
X2: Uso de dados para tomada de decisão
A matriz de dados é:

Unidade	**X1**	**X2**
U1	2	1
U2	3	3
U3	7	6
U4	8	2

Cada unidade é representada por um vetor em $\mathbb{R}^2$:
$U1 = (2, 1)$
$U2 = (3, 3)$
$U3 = (7, 6)$
$U4 = (8, 2)$

Pede-se:
– Calcule a distância Euclidiana entre todos os pares de unidades
– Monte a matriz de distâncias
– Realize o agrupamento hierárquico usando complete linkage (ligação completa)
– Esboce o dendrograma
– Considere um corte que gere dois grupos e interprete o resultado.

1 Cálulo da distância Euclidiana:
$\underset{1,2}{U} = \sqrt{(2-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = \mathbf{2,24}$
$\underset{1,3}{U} = \sqrt{(2-7)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = \mathbf{7,07}$
$\underset{1,4}{U} = \sqrt{(2-8)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37} = \mathbf{6,08}$
$\underset{2,3}{U} = \sqrt{(3-7)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

$\underset{2,4}{U} = \sqrt{(3-8)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} = \mathbf{5,09}$
$\underset{3,4}{U} = \sqrt{(7-8)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} = \mathbf{4,12}$

2 Matriz de distâncias:

	$U1$	$U2$	$U3$	$U4$
$U1$	0	2,24	7,07	6,08
$U2$	2,24	0	5	5,09
$U3$	7,07	5	0	4,12
$U4$	6,08	5,09	4,12	0

3 Agrupamento hierárquico com complete linkage:
$\rightarrow$ Escolha do par mais próximo (menor distância):
$(U1, U2)$ | Altura no dendograma: $2,24$

4 Atualização da matriz com o cálculo entre a distância do agrupamento (U1, U2) e as distâncias U3 e U4:

• Distância de (U1, U2) até U3:
$d((U1, U2), U3) = max(d(U1, U3), d(U2, U3)) = max(7,07; 5) = \mathbf{7,07}$

• Distância de (U1, U2) até U4:
$d((U1, U2), U4) = max(d(U1, U4), d(U2, U4)) = max(6,08; 5,09) = \mathbf{6,08}$

4.1 Nova matriz:

	$(U1, U2)$	$U3$	$U4$
$(U1, U2)$	0	7,07	6,08
$U3$	7,07	0	4,12
$U4$	6,08	4,12	0

5 Segunda iteração:
5.1 Escolha do par mais próximo (menor distância):

$(U3, U4)$ | Altura no dendograma: $4,12$

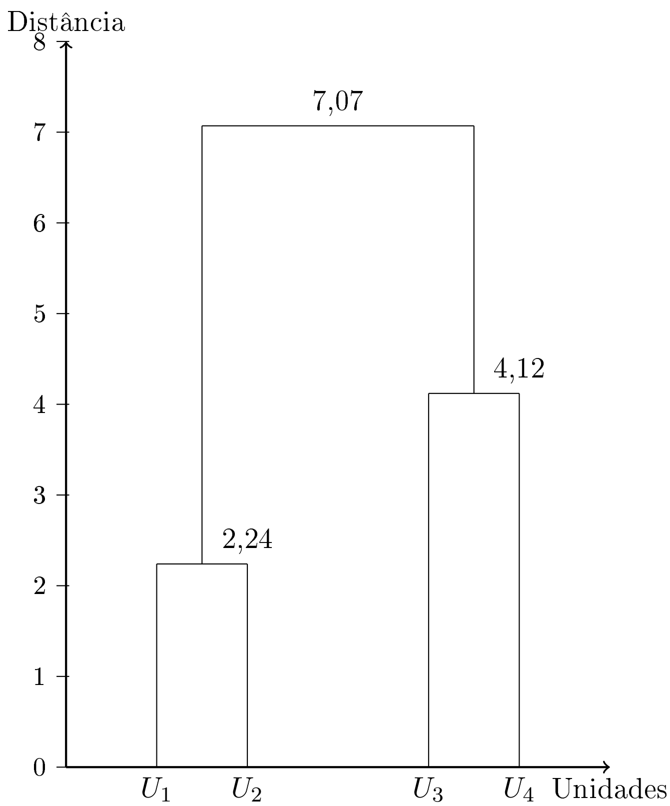
5.2 Cálculo das distâncias entre (U1, U2) e (U3, U4):
$d((U1, U2), (U3, U4)) = max(d((U1, U2), U3), d((U1, U2), U4)) = max(7,07; 6,08) =$ $\mathbf{7,07}$

5.3 Matriz atualizada:

	$(U1, U2)$	$(U3, U4)$
$(U1, U2)$	0	7,07
$(U3, U4)$	7,07	0

6 Terceira iteração - apenas uma distância:
Distância entre (U1, U2) e (U3, U4) = $\mathbf{7,07}$, e também é a altura dos dois agrupamentos no dendograma.

7 Esboce o dendrograma.



8 Considere um corte que gere dois grupos e interprete o resultado.

É possível gerar dois grups em um corte na distância **6**, por exemplo. Observa-se, primeiramente, que U1 e U2 usam os dados e digitalizam prontuários de forma bem semelhante, mas o uso de tecnologias por essas unidades de saúde ainda é baixo$(2,24)$. Por outro lado, as unidades U3 e U4 utilizam a tecnologia de forma bastante similar entre si e com maior frequência do que o agrupamento (U3, U4) $(4,12)$. Aqui, pode-se concluir que um possível incentivo ao uso da tecnologia em USs deve ser reforçado em U1 e U2, e melhorado, mas não com tanta urgência, em U3 e U4.

11. QUESTÃO EXTRA (SISTEMAS LINEARES)

Problema 1: O Data Center
Você é gerente de infraestrutura de uma startup. Vocês alugam servidores na nuvem de três tipos: Básico (x), Standard (y) e Premium (z). O financeiro perdeu o contrato com os preços unitários, mas temos as notas fiscais totais de três departamentos.
O Sistema (Recursos Consumidos):
- **Eq 1 (Quantidade): O total de máquinas alugadas foi 17.**
- **Eq 2 (Memória RAM): O consumo total d e RAM foi 56 GB.**
- **Eq 3 (Armazenamento): O consumo total de HD foi 35 TB.**

$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ 2x + 4y + 8z = 56 \\ x + 3y + 5z = 35 \end{cases}$$

Sua Missão: Descubra quantos servidores de cada tipo (X, Y, Z) a empresa possui.

(1) Matriz inicial:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 17 \\ 2 & 4 & 8 & 56 \\ 1 & 3 & 5 & 35 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{Pivô} \\ \text{Fator: } 2/1 = 2 \\ \text{Fator: } 1/1 = 1 \end{array}$$

(2) Zerar a coluna 1:

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1$
  - $2 - 2 \cdot 1 = 0$
  - $4 - 2 \cdot 1 = 2$
  - $8 - 2 \cdot 1 = 6$
  - $56 - 2 \cdot 17 = 56 - 34 = 22$
- $L_3 \leftarrow L_3 - 1 \cdot L_1$
  - $1 - 1 \cdot 1 = 0$

- $3 - 1 \cdot 1 = 2$
- $5 - 1 \cdot 1 = 4$
- $35 - 1 \cdot 17 = 18$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & \mathbf{2} & 6 & 22 \\ 0 & 2 & 4 & 18 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Novo Pivô} \\ \text{Fator: } 2/2 = 1 \end{array}$$

3 Zerar a coluna 2:

- $L_3 \leftarrow L_3 - 1 \cdot L_2$
  - $0 - 0 = 0$
  - $2 - 2 = 0$
  - $4 - 6 = -2$
  - $18 - 22 = -4$

4 Matriz escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 2 & 6 & 22 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

5 Encontrar os valores de x, y e z:

- **Cálculo de z:**

$$-2z = -4 \therefore \boldsymbol{z = 2}$$

- **Cálculo de y:**

$$2y + 6z = 22$$

$$2y + 6(2) = 22 \rightarrow 2y + 12 = 22 \rightarrow 2y = 10 \therefore \boldsymbol{y = 5}$$

- **Cálculo de x:**

$$x + y + z = 17$$

$$x + 5 + 2 = 17 \rightarrow x + 7 = 17 \therefore \boldsymbol{x = 10}$$

$$S = \{10, 5, 2\}$$

Problema 2: Consultoria de BI

Uma empresa de Business Intelligence cobra por hora de analistas: Júnior (x), Pleno (y) e Sênior (z). Temos os registros de horas e faturamento de três projetos, mas precisamos isolar quanto cada nível de senioridade trabalhou.

O Sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 35 & \text{(Total de horas no Projeto A)} \\ 2x + 3y + z = 75 & \text{(Total de horas no Projeto B)} \\ x + 2y + 3z = 55 & \text{(Total de horas no Projeto C)} \end{cases}$$

Sua Missão: Descubra quantas horas foram dedicadas por cada nível (x, y , z).

$$\begin{cases} x + y + z = 35 \\ 2x + 3y + z = 75 \\ x + 2y + 3z = 55 \end{cases}$$

1 Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 2 & 3 & 1 & 75 \\ 1 & 2 & 3 & 55 \end{array}\right] \leftarrow \text{Pivô}$$

1.1 Zerar o 2 (alvo da 2ª linha):
Fator $= \frac{\text{Alvo}}{\text{Pivô}} = \frac{2}{1} = 2 \therefore L_2 = L_2 - 2 \cdot L_1$

- $L_2 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$
- $L_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$
- $L_2 = 1 - 2 \cdot 1 = -1$
- $L_2 = 75 - 2 \cdot 35 = 5$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 55 \end{array}\right]$$

1.2 Zerar o 1 (alvo da 3ª linha):
Fator = Alvo/Pivô = $1/1 = 1 \therefore L_3 = L_3 - 1 \cdot L_1$

- $L_3 = 1 - 1 = 0$
- $L_3 = 2 - 1 = 1$
- $L_3 = 3 - 1 = 2$
- $L_3 = 55 - 35 = 20$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \end{array}\right]$$

1.3 Zerar o 1 (alvo da 3ª coluna):
Fator = Alvo/Pivô = $1/1 = 1 \therefore L_3 = L_3 - L_2$

- $L_3 = 0 - 0 = 0$
- $L_3 = 1 - 1 = 0$
- $L_3 = 2 + 1 = 3$
- $L_3 = 20 - 5 = 15$

1.4 Matriz escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right]$$

2 Resolve a equação da linha 3 (para z):
$3z = 15 \therefore z = 5$

2.1 Resolve a equação da linha 2 (para y):
$y - 5 = 5 \therefore y = 10$

2.2 Resolve a equação da linha 1 (para x):
$x + 10 + 5 = 35$
$x = 35 - 15 \therefore x = 20$

$S = \{20, 10, 5\}$