AT3 - Métodos Matemáticos para Gestão da Informação

Juliane Pires

1. Uma plataforma de conteúdos educacionais observou que o engajamento médio dos usuários depende do número de notificações semanais enviadas. Um modelo simplificado para esse comportamento é dado por:

$$E(x) = -2x^2 + 16x + 10$$

onde x = número de notificações por semana e $E(x)$ = índice de engajamento

Tarefas:

Identifique o sinal do coeficiente a e explique o que isso indica sobre o formato da curva.

O sinal do coeficiente a (-2) é negativo, ou seja, isso indica que a parábola estará voltada pra baixo. Neste problema, é procurado um <u>ponto de máximo</u>.

b) Calcule o vértice da função.

X_v**:**

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{2(-2)} = \frac{-16}{-4} = 4 \therefore x = 4$$

Y_v**:**

$$E(4) = -2(4)^2 + 16(4) + 10$$

$$E(4) = -2(16) + 64 + 10$$

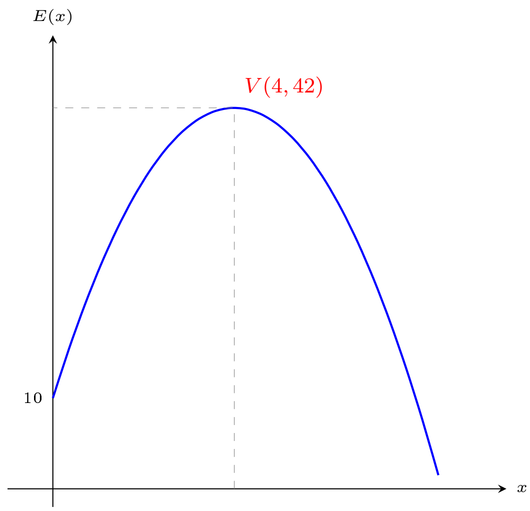
$$E(4) = -32 + 64 + 10 = 42 \therefore y = 42$$

O vértice é $\mathbf{V(4, 42)}$

c) Interprete o significado do vértice no contexto do problema.

No contexto do problema, o X_v indica o ponto em que a quantidade de notificações por semana (4). Já o Y_v indica o índice máximo de engajamento que a plataforma atinge com essa quantidade de notificações semanais.

d) Faça um esboço do gráfico.



e) Responda: Qual é o número ideal de notificações semanais? O que acontece se a plataforma enviar notificações em excesso?

O número ideal é de **4 notificações por semana** ($x = 4$). Caso a plataforma envie mais do que 4 notificações na semana, o engajamento começa a cair, podendo ficar menor do que o índice inicial de 10 ou chegar a zero devido ao incômodo aos usuários.

2. Uma equipe de Gestão da Informação modelou o custo anual de manutenção de uma base de dados em função do número de atualizações realizadas por ano. O modelo obtido foi:

$$C(x) = x^2 - 12x + 50$$

onde x = número de atualizações por ano e $C(x)$ = custo total (em unidades monetárias)

a) Identifique o sinal do coeficiente a e explique o que isso indica sobre o formato da curva.

O sinal do coeficiente a é positivo, ou seja, a parábola estará voltada para cima. Aqui, procura-se um ponto de mínimo.

b) Calcule o vértice da função.

X_v**:**

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2(1)} = \frac{12}{2} = 6$$

Y_v**:**

$$C(6) = (6)^2 - 12(6) + 50$$

$$C(6) = 36 - 72 + 50$$

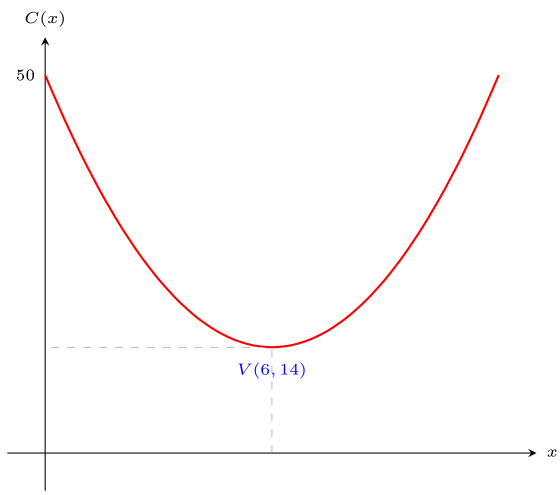
$$C(6) = -36 + 50 = 14$$

O vértice é $\mathbf{V(6,14)}$.

c) Interprete o significado do vértice no contexto do problema.

O resultado mostra que o número ideal de atualizações por ano (x) é igual a 6. Já o Y_v representa o custo mínimo anual, que é de 14 unidades monetárias.

d) Faça um esboço do gráfico.



e) Responda: Quantas atualizações por ano minimizam o custo? Por que atualizar menos ou mais do que isso aumenta o custo total?

É possível minimizar o custo com 6 atualizações por ano. Se houver menos de 6 atualizações, o custo pode aumentar devido à falta de manutenção consistente. Já se houver mais de 6 atualizações, o custo pode aumentar devido ao excesso de processamento e demanda operacional desnecessária.

3. Uma equipe de Gestão da Informação está avaliando um pipeline de tratamento de dados. A qualidade média da informação aumenta com o tempo de processamento no início, mas depois começa a cair devido à introdução de ruídos e redundâncias. Esse comportamento é modelado por:

$$Q(x) = -x^2 + 12x + 5$$

Ao mesmo tempo, o tempo de processamento acumulado cresce de forma linear:

$$T(x) = 3x + 5$$

onde:
x = **número de horas de processamento**
$Q(x)$ = **índice de qualidade da informação**
$T(x)$ = **custo temporal do processamento**

a) Monte o sistema de equações que representa o momento em que qualidade e tempo possuem o mesmo valor numérico.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 12x + 5 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

b) Resolva o sistema.

$$-x^2 + 12x + 5 = 3x + 5$$
$$-x^2 + 9x = 0$$
$$x(-x + 9) = 0$$

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 9$

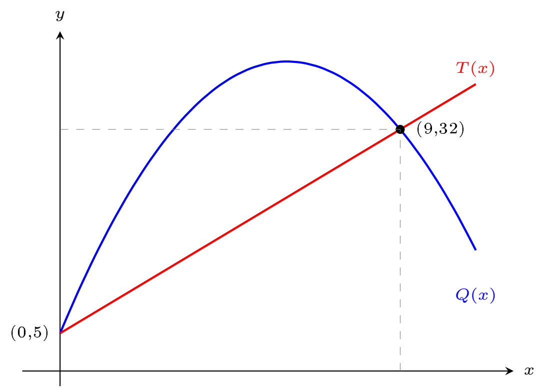
Substituindo em $T(x)$ para encontrar y:

- Para $x = 0 : y = 3(0) + 5 = 5 \therefore P_1(0, 5)$
- Para $x = 9 : y = 3(9) + 5 = 32 \therefore P_2(9, 32)$

c) Interprete o significado da solução encontrada.

No início do processamento ($x = 0$), ambas as variáveis de ganho de qualidade e custo temporal partem do valor 5. Após 9 horas de processamento, esses valores voltam a se equilibrar no índice 32.

d) Esboce o gráfico e identifique o ponto de intersecção.



e) Em que intervalo o ganho de qualidade supera o custo de tempo?

Quando $Q(x) > T(x)$, ou seja, no intervalo:

$$\mathbf{0 < x < 9}$$

f) Explique o que esse resultado indica para a tomada de decisão do gestor.

O resultado indica que gestor deve operar no intervalo em que o processamento é vantajoso, ou seja, até a 9ª hora. A pipeline deve ser interrompida antes desse limite, no ponto de máxima qualidade ($x = 6$), pois o custo temporal e a perda de qualidade deixam a operação ineficiente após 9horas.

4. Uma empresa comercializa três tipos de serviços: Plano A, Plano B e Plano C. Em três dias diferentes, foram registrados os seguintes faturamentos:
Dia 1: A + 2B + C → R\$ 21
Dia 2: 2A + B + 3C → R\$ 32
Dia 3: 3A + B + 2C → R\$ 37
Considere:
x = **valor do Plano A**
y = **valor do Plano B**
z = **valor do Plano C**

a) Monte o sistema linear.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 21 \\ 2x + y + 3z = 32 \\ 3x + y + 2z = 37 \end{cases}$$

b) Resolva por Gauss.

Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 21 \\ 2 & 1 & 3 & 32 \\ 3 & 1 & 2 & 37 \end{array}\right]$$

1: Zerar a segunda linha, primeira coluna e a terceira linha, primeira coluna: $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 21 \\ 0 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & -5 & -1 & -26 \end{array}\right]$$

2: Zerar a terceira linha, segunda coluna: $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{3}L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 21 \\ 0 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -8/3 & -28/3 \end{array}\right]$$

Substituindo:

- $-\frac{8}{3}z = -\frac{28}{3} \implies 8z = 28 \therefore z = 3,5$
- $-3y + 3,5 = -10 \implies -3y = -13,5 \therefore y = 4,5$

- $x + 2(4,5) + 3,5 = 21 \implies x + 9 + 3,5 = 21 \therefore x = 8,5$

S = {8,5; 4,5; 3,5}

c) Escreva a matriz dos coeficientes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

d) Calcule o determinante principal D pela Regra de Sarrus.

$D = |A| = (1 \cdot 1 \cdot 2) + (2 \cdot 3 \cdot 3) + (1 \cdot 2 \cdot 1) - (3 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 3 \cdot 1) - (2 \cdot 2 \cdot 2)$

$$D = 2 + 18 + 2 - 3 - 3 - 8 = 22 - 14 = 8$$

e) Calcule D_x, D_y e D_z também por Sarrus.

- $D_x = \left[\begin{array}{ccc|cc} 21 & 2 & 1 & 21 & 2 \\ 32 & 1 & 3 & 32 & 1 \\ 37 & 1 & 2 & 37 & 1 \end{array}\right] = (42 + 222 + 32) - (37 + 63 + 128) =$ $296 - 228 = \mathbf{68}$

- $D_y = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 21 & 1 & 1 & 21 \\ 2 & 32 & 3 & 2 & 32 \\ 3 & 37 & 2 & 3 & 37 \end{array}\right] = (64 + 189 + 74) - (96 + 111 + 84) =$ $327 - 291 = \mathbf{36}$

- $D_z = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 21 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 32 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 37 & 3 & 1 \end{array}\right] = (37 + 192 + 42) - (63 + 32 + 148) =$ $271 - 243 = \mathbf{28}$

f) Aplique a Regra de Cramer.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{68}{8} = 8,5$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{36}{8} = 4,5$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{28}{8} = 3,5$$

g) Compare Gauss e Cramer.

Ambos os métodos resultam em: $x = 8,5$; $y = 4,5$; $z = 3,5$. O método de Gauss é mais utilizado em sistemas grandes, enquanto Cramer é mais utilizado para verificação de variáveis específicas em sistemas 3×3.

h) Interprete: qual plano é o mais caro?

O plano mais caro é o Plano A, com o valor de R$ 8,50.

5. Uma empresa presta dois tipos de serviço:
Serviço A rende R$ 8 por atendimento
Serviço B rende R$ 5 por atendimento
Existe um custo fixo diário de R$ 30.
Por limitação de equipe e tempo, a empresa consegue realizar no máximo 12 atendimentos por dia, somando A e B.
Considere:
$x =$ **número de atendimentos do Serviço A**
$y =$ **lucro diário (em R$)**

a) Suponha inicialmente que todos os atendimentos sejam do tipo A.

Considera-se apenas a produtividade e receita do Serviço A para x.

b) Escreva a função do lucro em função de x.

$$L_A(x) = 8x - 30$$

c) Agora suponha que todos sejam do tipo B.

Aqui, x representa a quantidade de atendimentos do tipo B.

d) Escreva a função correspondente.

$$L_B(x) = 5x - 30$$

e) Em ambos os casos:

f) Identifique crescimento.

Ambas as funções são lineares e com coeficiente a ($a_A = 8$ e $a_B = 5$). Portanto, ambas são funções crescentes.

g) Encontre o ponto de equilíbrio

Ponto de equilíbrio $\implies y = 0$

- **A:** $8x - 30 = 0 \implies 8x = 30 \therefore x = 3,75 \approx x = 4$.
  São necessários **4 atendimentos** para começar a ter lucro.
- **B:** $5x - 30 = 0 \implies 5x = 30 \therefore x = 6$.
  São necessários **6 atendimentos** para cobrir os custos fixos.

h) Calcule o lucro máximo possível considerando $0 \leq x \leq 12$.

Para $(x = 12)$:

- **Lucro máximo de A:** $L_A(12) = 8(12) - 30 = 96 - 30 = \text{R\$}\,66,00$.
- **Lucro máximo de B:** $L_B(12) = 5(12) - 30 = 60 - 30 = \text{R\$}\,30,00$.

i) Compare os dois cenários e responda: qual tipo de serviço é mais vantajoso? Justifique.

O Serviço A, porque possui maior contribuição no lucro (R$ 8), além de atingir o ponto de equilíbrio mais rápido (em apenas 4 atendimentos) e também apresenta um lucro máximo 120% superior ao do B dentro da mesma quantidade de equipe e tempo.

6. Uma instituição está implantando um novo repositório digital. No momento inicial, o sistema possui 500 documentos e passa a crescer 25% ao mês, impulsionado por projetos de digitalização e submissões automáticas.
Esse crescimento pode ser modelado por:

$$D(x) = 500 \cdot 1,25^x$$

onde:
x= **número de meses** $D(x) =$ **quantidade de documentos no repositório**
A equipe de TI informa que a infraestrutura atual suporta, com bom desempenho, até 1.200 documentos.

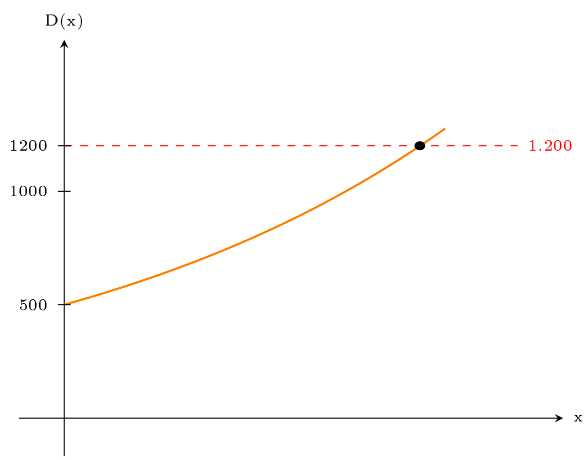
1. Complete a tabela

- $x = 0 : D(0) = 500 \cdot 1,25^0 = 500 \cdot 1 = 500$
- $x = 1 : D(1) = 500 \cdot 1,25^1 = 625$

- $x = 2 : D(2) = 500 \cdot 1,25^2 = 500 \cdot 1,5625 = 781,25$
- $x = 3 : D(3) = 500 \cdot 1,25^3 = 500 \cdot 1,95 \approx 976,56$

X (meses)	0	1	2	3
D(x)	500	625	781,25	976,56

2. Construa o gráfico da função exponencial no plano cartesiano.



3. Responda em palavras:

a) O crescimento é constante ou acelerado?

O crescimento é acelerado. Em uma função exponencial a taxa de crescimento se desenvolve em função de um valor cada vez maior (25% sobre o acumulado).

b) Existe ponto máximo?

Não existe um ponto máximo, pois a função cresce e tende ao infinito conforme o tempo passa.

c) Determine, usando logaritmo, após quantos meses o repositório ultrapassa 1.200 documentos.

x para $D(x) > 1200$:

$$500 \cdot 1,25^x = 1200$$

$$1,25^x = \frac{1200}{500} = 2,4$$

Aplicando logaritmo nos dois lados:

$$\log(1,25^x) = \log(2,4)$$

$$x \cdot \log(1,25) = \log(2,4)$$

$$x = \frac{\log(2,4)}{\log(1,25)} \approx \frac{0,3802}{0,0969} \approx 3,92 \text{ meses}$$

d) Interprete o valor encontrado.

O valor de aproximadamente 3,92 mostra que o limite de documentos será atingido antes do final do 4^{o} mês.

e) Em qual intervalo de tempo a infraestrutura atual é suficiente?
A infraestrutura é suficiente no intervalo $[0; 3,92]$, ou seja, do início até aproximadamente a terceira semana do quarto mês.

f) Explique o que esse resultado indica para o planejamento da equipe de Gestão da Informação.

Esse resultado indica que é necessário expandir a capacidade da infraestrutura atual, e que a equipe tem menos de 4 meses para adquirir novos servidores ou contratar mais espaço em nuvem.

7. Crescimento exponencial de base de dados institucional
Uma base de dados institucional inicia suas operações com 400 registros e cresce a uma taxa de 20% ao mês, em função da digitalização contínua de documentos.
Esse crescimento é modelado pela função:

$$D(x) = 400 \cdot 1,2^x$$

Onde:
x = **número de meses**
$D(x)$ = **número de registros na base**

a) Classifique o tipo de função e justifique.

É uma função exponencial, pois a variável x encontra-se no expoente de uma base constante $(1,2)$. Como a base é maior que 1, a função mostra um crescimento acelerado (20% ao mês).

b) Calcule o número aproximado de registros após 3 meses.

Para $x = 3$:

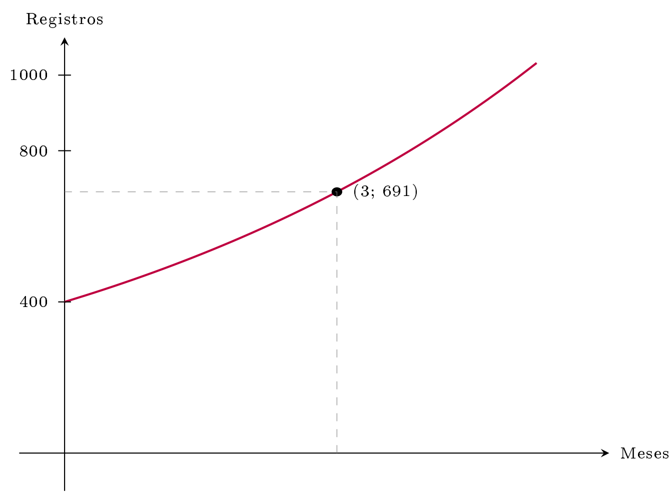
$$D(3) = 400 \cdot 1,2^3$$

$$D(3) = 400 \cdot (1,728)$$

$$D(3) = 691,2$$

Após 3 meses, a base terá aproximadamente **691 registros**.

c) Esboce o gráfico da função.



d) O crescimento é constante ou acelerado? Explique.

O crescimento é acelerado, pois em uma função exponencial, a taxa de 20% ao mês incide sempre sobre o valor do mês anterior, ou seja, a cada mês o total absoluto em números de registros é maior que o do mês anterior, gerando uma curva cada vez mais inclinada e que tende ao infinito.

e) O modelo apresenta ponto máximo? Justifique.

Não, pois como a base $1,2$ é maior que 1, o limite da função quando x tende ao infinito é infinito. Em uma situação real, o crescimento só iria parar se houvesse uma limitação de armazenamento ou interrupção dadigitalização.

8. Planejamento de infraestrutura e uso de logaritmo
Considere a base de dados do exercício anterior. A equipe de TI informa que a infraestrutura atual suporta, com bom desempenho, até 1.000 registros.

a) Monte a equação que permite determinar após quantos meses a base atinge 1.000 registros.

$$400 \cdot 1,2^x = 1.000$$

b) Resolva a equação utilizando logaritmo.

$$1,2^x = \frac{1.000}{400}$$
$$1,2^x = 2,5$$

Aplicando o logaritmo nos dois lados:

$$\log(1,2^x) = \log(2,5)$$

$$x \cdot \log(1,2) = \log(2,5)$$
$$x = \frac{\log(2,5)}{\log(1,2)}$$

Para $(\log(2,5) \approx 0,3979$ e $\log(1,2) \approx 0,0791)$:

$$x \approx \frac{0,3979}{0,0791} \approx 5,03$$

c) Interprete o valor encontrado no contexto do problema.

O valor $x \approx 5,03$ mostra que a base de dados atingirá sua capacidade msxima de 1.000 registros no inicio do 5º mês. Isso significa que a equipe de TI precisa melhorar a infraestrutura em 5 meses, a fim de que o desempenho não seja comprometido.

d) Explique por que o uso do logaritmo é necessário nessa situação.

O logaritmo é necessário porque a variável (x) está no expoente. Em funções de crescimento exponencial, não é' possível isolar o tempo usando operações aritméticas básicas, logo, o logaritmo funciona como a operação inversa da exponencial, permitindo trazer o expoente para a linha de base e tornando a equação possível de resolver.

9. Crescimento exponencial no desempenho esportivo acumulado
Um atleta inicia um ciclo de treinos com um índice de desempenho igual a 50. A cada semana, seu desempenho aumenta 10%, devido ao efeito acumulado dos treinos.
Esse comportamento é modelado por:

$$P(x) = 50 \cdot 1,1^x$$

Onde:
x = **número de semanas**
$P(x)$ = **índice de desempenho**

a) Calcule o desempenho após 4 semanas.

Para $x = 4$:

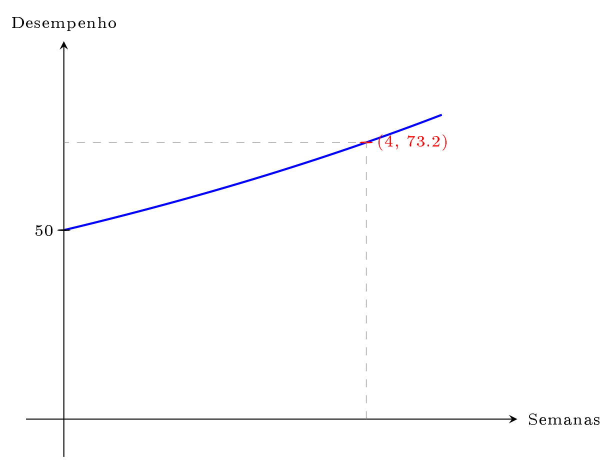
$$P(4) = 50 \cdot 1,1^4$$

$$P(4) = 50 \cdot 1,4641$$

$$P(4) = 73,205$$

Após 4 semanas, o índice de desempenho do atleta será de aproximadamente **73,2**.

b) Faça um esboço do gráfico da função.



c) O crescimento observado é linear ou exponencial? Justifique.

O crescimento é exponencial, poisa taxa de aumento de 10% incide sobre o desempenho da semana anterior. Isso afeta o ganho de desempenho, que cresce mais a cada semana que passa.

d) Compare esse tipo de crescimento com o modelo quadrático estudado anteriormente.

O modelo quadrático descreve comportamentos que atingem um ponto de máximo ou mínimo, e é usado para encontrar saturação ou custos mínimos. Já o crescimento exponencial não apresenta ponto de retorno ou saturação natural dentro da fórmula, ele cresce de forma cada vez mais rápida. Enquanto o quadrático pode ser usado em processos com limites preestabelecidos, o exponencial modela processos acumulativos, por exemplo.

10. Uso de logaritmo para análise de metas
Considerando a função do exercício anterior, a equipe técnica deseja saber após quantas semanas o desempenho do atleta ultrapassa o valor 80.

a) Monte a equação correspondente ao problema.

x necessário para que $P(x)$ ultrapasse o valor 80:

$$50 \cdot 1,1^x = 80$$

b) Resolva utilizando logaritmo.

$$1,1^x = \frac{80}{50}$$
$$1,1^x = 1,6$$

Aplicando o logaritmo:

$$\log(1,1^x) = \log(1,6)$$

$$x \cdot \log(1,1) = \log(1,6)$$

$$x = \frac{\log(1,6)}{\log(1,1)}$$

Para $(\log(1,6) \approx 0,2041$ e $\log(1,1) \approx 0,0414)$:

$$x \approx \frac{0,2041}{0,0414} \approx 4,93$$

c) Interprete o resultado encontrado.

O valor $x4,93$ indica que o atleta atingirá a meta 80 durante a 5ª semana de treinos. Portanto, para garantir que o valor 80 seja ultrapassado, são necessárias pelo menos 5 semanas de treino.

d) Explique a diferença entre usar a função exponencial e usar o logaritmo nesse contexto.

A função explonencial é aplicada quando se conhece o tempo (x) e é preciso prever o resultado (ou seja, o desempenho). Ou seja, a função exponencial faz uma projeção para o futuro. Já o uso do logaritmo é feito quando se conhece a meta ou o resultado e busca-se o tempo necessário para atingi-lo. O logaritmo planeja de maneira inversa e permite determinar prazos a partir de objetivos preestabelecidos.

11. Planejamento de Produção e Saturação de Demanda
Uma empresa está analisando a produção semanal de um serviço especializado.
O lucro obtido com a produção, considerando ganhos iniciais e posterior saturação do mercado, é modelado pela função:

$$L(x) = -x^2 + 14x + 20$$

Ao mesmo tempo, o custo operacional total cresce de forma linear com a quantidade produzida, sendo modelado por:

$$C(x) = 4x + 8$$

onde:
x = **número de serviços realizados por semana**
$L(x)$ = **lucro bruto**
$C(x)$ = **custo operacional**

a) Monte o sistema de equações que representa os pontos em que lucro e custo assumem o mesmo valor.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 14x + 20 \\ y = 4x + 8 \end{cases}$$

b) Resolva o sistema.

$$-x^2 + 14x + 20 = 4x + 8$$
$$-x^2 + 10x + 12 = 0$$

Multiplicando por -1:

$$x^2 - 10x - 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(-12) = 100 + 48 = 148$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{148}}{2}$$

- $x_1 \approx \frac{10-12,16}{2} \approx -1,08$ (Não é utilizado, pois $x \geq 0$)
- $x_2 \approx \frac{10+12,16}{2} \approx 11,08$

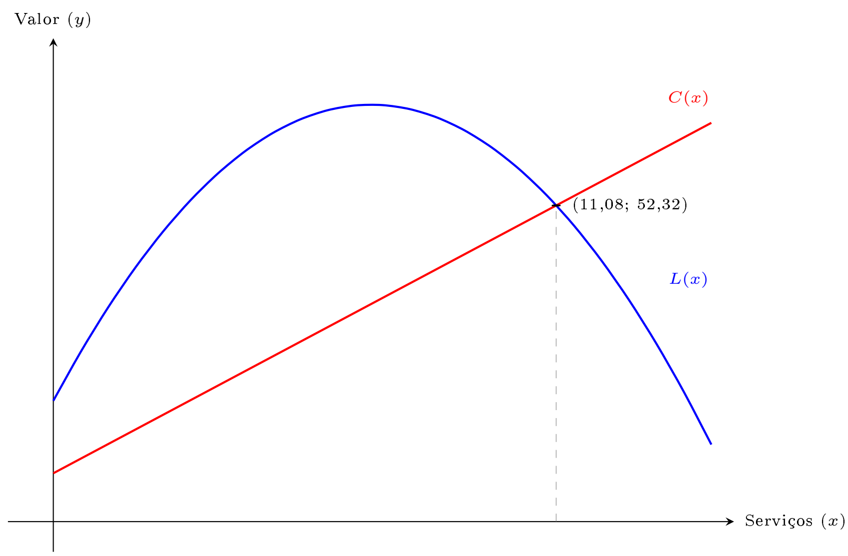
Valor de y para $x \approx 11,08$:

$$y = 4(11,08) + 8 \approx 44,32 + 8 = 52,32$$

c) Interprete o significado das soluções encontradas no contexto do problema.

O ponto de equilíbrio econômico acontece quanso a empresa realiza aproximadamente 11 atendimentos na semana. Neste ponto, o custo operacional consome todo o lucro bruto no total de aproximadamente 52,32.

d) Faça um esboço dos gráficos das duas funções e identifique os pontos de intersecção.



e) Determine o intervalo em que o lucro é maior que o custo.

O lucro é maior que o custo quando a curva azul está acima da reta vermelha:

$$\mathbf{0 \leq x < 11,08}$$

f) Explique o que esse resultado indica para a tomada de decisão da empresa.

O resultado indica que a empresa possui uma operação que gera lucro apenas até o 11º atendimento na semana. Devido à saturação do mercado, observada na queda da parábola, realizar mais de 11 serviços por semana gera prejuízo, pois o custo operacional passa a crescer mais rápido que o retorno financeiro. O ideal é operar próximo ao vértice do lucro, dado por $(x = 7)$.