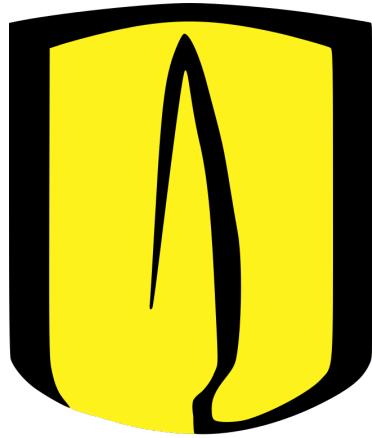


Universidad de Los Andes

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Computación



Laboratorio 5: Optimización Multiobjetivo

ISIS3302 - Modelado, Simulacion Y Optimizacion

Integrantes

Andrés Santiago Neira Socha (a.neiras@uniandes.edu.co) - 202123126
Kevin Alvarez (k.alvarezr@uniandes.edu.co) - 202022834

2025-20

Contenido

1 Problema 1: Planificación de envíos humanitarios	2
1.1 Descripción del problema	2
1.2 Formulación matemática	2
1.3 Método de la suma ponderada	4
1.4 Resultados numéricos	4
1.5 Análisis de los resultados	5
2 Problema 2: Optimización Multiobjetivo en Planificación de Rutas de Inspección	5
2.1 Formulación Matemática	5
2.1.1 Definición del Problema	5
2.1.2 Supuestos del Modelo	6
2.1.3 Conjuntos	6
2.1.4 Parámetros	6
2.1.5 Variables de Decisión	6
2.1.6 Funciones Objetivo	6
2.1.7 Restricciones	7
2.1.8 Tipo de Problema	7
2.2 Selección y Justificación del Método de Resolución	8
2.2.1 Elección del Método Multiobjetivo	8
2.2.2 Justificación del Método Seleccionado	8
2.3 Implementación y Análisis	8
2.3.1 Descripción de la Implementación y Resultados	8
2.4 Análisis y Discusión Adicional	10
2.4.1 Impacto del Cambio en la Importancia Relativa entre los Objetivos	10
2.4.2 Solución de Compromiso Seleccionada	11

1 Problema 1: Planificación de envíos humanitarios

1.1 Descripción del problema

Se considera una misión humanitaria en la que se deben enviar diferentes tipos de recursos a varias zonas afectadas por una emergencia. Se dispone de una flota de 4 aviones, cada uno con capacidad limitada de peso y volumen, y cada avión puede realizar hasta dos viajes.

Los recursos a transportar son alimentos básicos, medicinas, equipos médicos, agua potable y mantas. Para cada recurso se conoce el peso por unidad, el volumen por unidad, la disponibilidad máxima en el centro de acopio y el impacto social (medido en miles de USD por tonelada). Cada zona afectada tiene unas necesidades mínimas en toneladas de cada recurso.

Adicionalmente, se consideran varias restricciones operativas: (i) cada viaje de un avión se asigna a lo sumo a una zona; (ii) las medicinas no pueden transportarse en el avión 1 por razones de seguridad; (iii) en un mismo viaje no se pueden transportar simultáneamente agua potable y equipos médicos; (iv) los equipos médicos son indivisibles y deben transportarse en unidades enteras.

El problema es de naturaleza multiobjetivo, con dos criterios:

- Maximizar el impacto social total generado por los envíos.
- Minimizar el costo total de transporte de la operación.

Para abordar este problema se utilizó el método de la suma ponderada.

1.2 Formulación matemática

Conjuntos e índices

- R : conjunto de recursos, $R = \{\text{alimentos, medicinas, equipos, agua, mantas}\}$,
 J : conjunto de aviones, $J = \{1, 2, 3, 4\}$,
 V : conjunto de viajes por avión, $V = \{1, 2\}$,
 Z : conjunto de zonas afectadas, $Z = \{A, B, C, D\}$.

Parámetros principales

- w_r : peso (toneladas) por unidad del recurso $r \in R$,
 v_r : volumen (m^3) por unidad del recurso $r \in R$,
 a_r : disponibilidad máxima (unidades) del recurso $r \in R$,
 p_r : impacto social (miles USD/ton) del recurso $r \in R$,
 C_j^W : capacidad de peso (ton) del avión $j \in J$,
 C_j^V : capacidad de volumen (m^3) del avión $j \in J$,
 F_j : costo fijo (miles USD) por usar el avión $j \in J$,
 c_j : costo variable (miles USD/km) del avión $j \in J$,
 d_z : distancia (km) desde la base hasta la zona $z \in Z$,
 γ_z : multiplicador de impacto social en la zona $z \in Z$,
 D_{rz} : demanda mínima (ton) del recurso r en la zona z .

Variables de decisión

$x_{rjvz} \geq 0$: unidades del recurso r enviadas en el avión j , viaje v , hacia la zona z ,
$y_{jvz} \in \{0, 1\}$: vale 1 si el avión j en el viaje v va a la zona z ,
$u_j \in \{0, 1\}$: vale 1 si se utiliza el avión j ,
$\delta_{jv}^W \in \{0, 1\}$: indica transporte de agua potable en el viaje (j, v) ,
$\delta_{jv}^E \in \{0, 1\}$: indica transporte de equipos médicos en el viaje (j, v) ,
$n_{jvz} \in \mathbb{Z}_+$: unidades enteras de equipos médicos en (j, v, z) (indivisibilidad).

Restricciones

$$\sum_{z \in Z} y_{jvz} \leq 1, \quad \forall j \in J, v \in V \quad (\text{a lo sumo una zona por viaje}) \quad (1)$$

$$y_{jvz} \leq u_j, \quad \forall j \in J, v \in V, z \in Z \quad (\text{si hay viaje, el avión se usa}) \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{v \in V} \sum_{z \in Z} x_{rjvz} \leq a_r, \quad \forall r \in R \quad (\text{disponibilidad de recursos}) \quad (3)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{z \in Z} w_r x_{rjvz} \leq C_j^W, \quad \forall j \in J, v \in V \quad (\text{capacidad de peso}) \quad (4)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{z \in Z} v_r x_{rjvz} \leq C_j^V, \quad \forall j \in J, v \in V \quad (\text{capacidad de volumen}) \quad (5)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{v \in V} w_r x_{rjvz} \geq D_{rz}, \quad \forall r \in R, z \in Z \quad (\text{satisfacción de necesidades mínimas}) \quad (6)$$

$$x_{rjvz} \leq a_r y_{jvz}, \quad \forall r \in R, j \in J, v \in V, z \in Z \quad (\text{envíos solo si el viaje va a la zona}) \quad (7)$$

$$x_{\text{med},1,v,z} = 0, \quad \forall v \in V, z \in Z \quad (\text{medicinas prohibidas en el avión 1}) \quad (8)$$

$$\sum_{z \in Z} x_{\text{water},jvz} \leq a_{\text{water}} \delta_{jv}^W, \quad \forall j \in J, v \in V \quad (9)$$

$$\sum_{z \in Z} x_{\text{equip},jvz} \leq a_{\text{equip}} \delta_{jv}^E, \quad \forall j \in J, v \in V \quad (10)$$

$$\delta_{jv}^W + \delta_{jv}^E \leq 1, \quad \forall j \in J, v \in V \quad (\text{no mezclar agua y equipos en el mismo viaje}) \quad (11)$$

$$x_{\text{equip},jvz} = n_{jvz}, \quad \forall j \in J, v \in V, z \in Z \quad (\text{indivisibilidad equipos médicos}). \quad (12)$$

Funciones objetivo El impacto social total (en miles de USD) viene dado por

$$Z_1 = \sum_{r \in R} \sum_{j \in J} \sum_{v \in V} \sum_{z \in Z} p_r w_r x_{rjvz} \gamma_z. \quad (13)$$

El costo total de transporte (en miles de USD) es

$$Z_2 = \sum_{j \in J} F_j u_j + \sum_{j \in J} \sum_{v \in V} \sum_{z \in Z} c_j d_z y_{jvz}. \quad (14)$$

1.3 Método de la suma ponderada

Para transformar el problema multiobjetivo en uno escalar, se utilizó el método de la suma ponderada. Dado un par de pesos $\alpha \in [0, 1]$ y $1 - \alpha$, se considera la función:

$$\max \quad Z(\alpha) = \alpha Z_1 - (1 - \alpha) Z_2. \quad (15)$$

De esta forma:

- $\alpha = 0$ corresponde a minimizar exclusivamente el costo Z_2 ;
- $\alpha = 1$ corresponde a maximizar exclusivamente el impacto social Z_1 ;
- valores intermedios de α representan distintos compromisos entre ambos criterios.

Para este laboratorio se resolvió el modelo para los valores $\alpha \in \{0.0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 1.0\}$ utilizando el paquete Pyomo en Python y el solver glpk.

1.4 Resultados numéricos

La Tabla 1 resume los valores obtenidos de los objetivos para cada valor de α :

Table 1: Resultados del método de la suma ponderada para el Problema 1.

α	Z_1 (impacto, miles USD)	Z_2 (costo, miles USD)
0.00	20611.60	284.40
0.10	24885.10	297.30
0.25	24885.10	297.40
0.50	24885.10	297.30
0.75	24885.10	297.30
0.90	24885.10	297.30
1.00	24706.20	294.70

En la Figura 2 se representa el frente aproximado en el plano (Z_2, Z_1) , donde cada punto corresponde a una solución óptima para un valor de α .

```
(pyomo_env) D:\KEVIN\UNIVERSIDAD\Trabajos\8vo semestre\MOS\Laboratorios\5>python problema1.py
Método de la Suma Ponderada (solo):

Resolviendo para alpha = 0.00 ...
-> Z1 = 20611.60, Z2 = 284.40
Resolviendo para alpha = 0.10 ...
-> Z1 = 24885.10, Z2 = 297.30
Resolviendo para alpha = 0.25 ...
-> Z1 = 24885.10, Z2 = 297.40
Resolviendo para alpha = 0.50 ...
-> Z1 = 24885.10, Z2 = 297.30
Resolviendo para alpha = 0.75 ...
-> Z1 = 24885.10, Z2 = 297.30
Resolviendo para alpha = 0.90 ...
-> Z1 = 24885.10, Z2 = 297.30
Resolviendo para alpha = 1.00 ...
-> Z1 = 24706.20, Z2 = 294.70
```

Figure 1: Frente de compromiso costo–impacto obtenido mediante la suma ponderada.

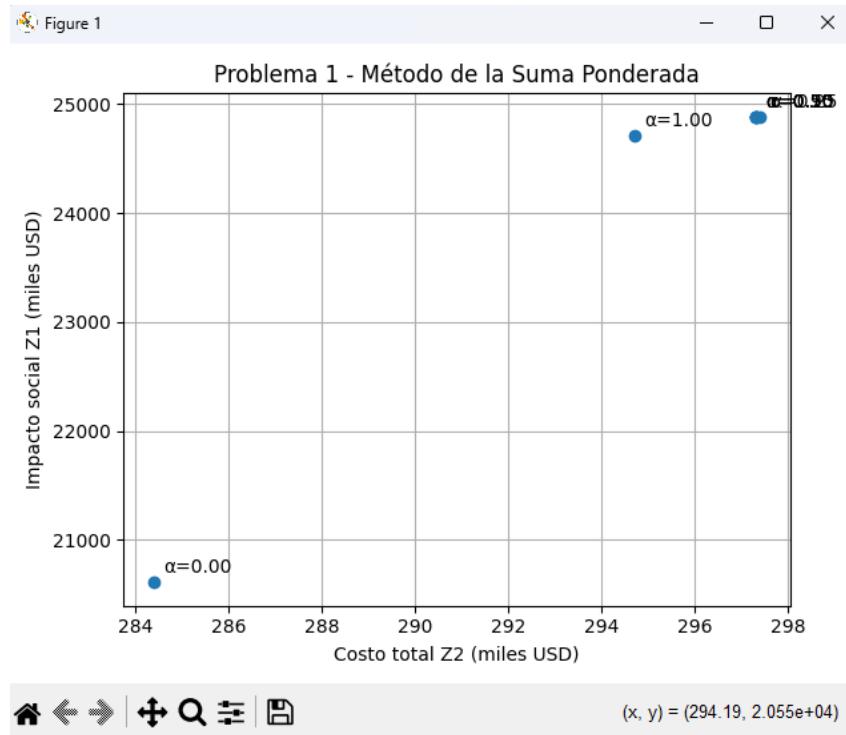


Figure 2: Grafica de resultados

1.5 Análisis de los resultados

Se observa que:

- La solución con $\alpha = 0$ (énfasis completo en el costo) alcanza el menor costo $Z_2 = 284,40$ miles USD, pero con un impacto social relativamente menor $Z_1 = 20611,60$ miles USD.
- Para valores de α en el rango 0,10–0,90 el modelo converge a la misma solución, con $Z_1 \approx 24885,10$ y $Z_2 \approx 297,3$ miles USD. Esto indica que existe una región del frente de Pareto donde distintas ponderaciones llevan al mismo compromiso costo–impacto.
- Con $\alpha = 1$ (sólo impacto) se obtiene un impacto ligeramente inferior (24706,20) respecto a la solución anterior, pero con un costo algo menor (294,70). En este caso la solución puramente de impacto no es muy diferente de la solución de compromiso que se obtiene para $0,10 \leq \alpha \leq 0,90$.

Comparando las soluciones extremas, pasar de la solución de costo mínimo ($\alpha = 0$) a la solución de mayor impacto ($\alpha \approx 0,10$ –0,90) implica aumentar el costo en torno a 13 miles de USD, pero permite incrementar el impacto social en aproximadamente 4200 miles de USD. Este tipo de análisis permite al responsable de la misión decidir si el aumento de costo se justifica por la ganancia en impacto social.

2 Problema 2: Optimización Multiobjetivo en Planificación de Rutas de Inspección

2.1 Formulación Matemática

2.1.1 Definición del Problema

Se desea planificar rutas de inspección para un equipo técnico encargado de verificar el estado de infraestructura en nueve localidades. El equipo:

- Parte del depósito central (nodo 0),
- Visita un subconjunto de localidades (nodos 1 a 9),
- Regresa al depósito,
- Sin permitir subrutas internas.

El objetivo es encontrar rutas eficientes considerando simultáneamente tres criterios:

1. Minimizar la distancia total recorrida.
2. Maximizar la calidad total obtenida de las inspecciones realizadas.
3. Minimizar el riesgo acumulado de los tramos recorridos.

Debido a la naturaleza conflictiva de los objetivos, buscamos generar soluciones eficientes desde el punto de vista de Pareto.

2.1.2 Supuestos del Modelo

- Solo se dispone de un equipo de inspección.
- Cada localidad puede ser visitada como máximo una vez.
- El depósito debe ser el inicio y el final de la ruta.
- No se permite la formación de subrutas desconectadas.
- Los valores de riesgo no especificados se modelan con riesgo medio.
- El modelo es determinístico y todos los parámetros son conocidos previamente.

2.1.3 Conjuntos

$$N = \{0, 1, \dots, 9\} \quad (\text{nodos: 0 es el depósito})$$

$$N_0 = N \setminus \{0\} = \{1, \dots, 9\} \quad (\text{localidades})$$

2.1.4 Parámetros

$$dist_{ij} = \text{distancia entre nodos } i \text{ y } j$$

$$risk_{ij} = \text{nivel de riesgo asociado al desplazamiento } (i, j)$$

$$qual_i = \text{calidad de inspección obtenida si se visita la localidad } i$$

2.1.5 Variables de Decisión

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo viaja directamente de } i \text{ a } j, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall i, j \in N$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la localidad } i \text{ es visitada,} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall i \in N_0$$

$$u_i \in \mathbb{R}_+ \quad \text{variables Miller-Tucker-Zemlin para eliminación de subrutas}$$

2.1.6 Funciones Objetivo

Minimizar Distancia Total Recorrida

$$\min Z_1 = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} dist_{ij} \cdot x_{ij}$$

Maximizar Calidad Total Obtenida

$$\max Z_2 = \sum_{i \in N_0} qual_i \cdot y_i$$

Minimizar Riesgo Total Acumulado

$$\min Z_3 = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} risk_{ij} \cdot x_{ij}$$

2.1.7 Restricciones

No permitir bucles

$$x_{ii} = 0 \quad \forall i \in N$$

Grado de entrada y salida en localidades

$$\sum_{j \in N, j \neq i} x_{ij} = y_i \quad \forall i \in N_0$$

$$\sum_{j \in N, j \neq i} x_{ji} = y_i \quad \forall i \in N_0$$

Entrada y salida única del depósito

$$\sum_{j \in N_0} x_{0j} = 1$$

$$\sum_{j \in N_0} x_{j0} = 1$$

Al menos una localidad visitada

$$\sum_{i \in N_0} y_i \geq 1$$

Restricciones MTZ para evitar subrutas

$$u_i \leq M \cdot y_i \quad \forall i \in N_0$$

$$u_i \geq y_i \quad \forall i \in N_0$$

$$u_i + 1 \leq u_j + M(1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N_0, i \neq j$$

2.1.8 Tipo de Problema

Se trata de un modelo de:

- Optimización **combinatoria**,
- **No lineal** en los objetivos de múltiples criterios,
- Formulación de tipo **TSP** (Traveling Salesman Problem),
- Con **variables binarias** y **restricciones lineales**.

Por lo tanto, es un **Problema de Programación Entera Mixta (MIP)** con optimización multiobjetivo.

2.2 Selección y Justificación del Método de Resolución

2.2.1 Elección del Método Multiobjetivo

Para resolver el Problema 2 de planificación de rutas de inspección con múltiples objetivos

$$\min Z_1, \quad \max Z_2, \quad \min Z_3,$$

se seleccionó el método **ϵ -constraint** como estrategia de optimización multiobjetivo.

Este método consiste en transformar uno de los objetivos en la función objetivo principal y convertir los restantes en restricciones parametrizadas mediante límites ϵ . En nuestro caso, la formulación adoptada fue:

$$\min Z_1 \quad \text{sujeto a} \quad Z_2 \geq \epsilon_1, \quad Z_3 \leq \epsilon_2.$$

Se ejecutaron múltiples iteraciones variando los valores de ϵ_1 y ϵ_2 con el fin de obtener un conjunto de soluciones eficientes de Pareto que representan diferentes niveles de compromiso entre distancia, calidad y riesgo.

2.2.2 Justificación del Método Seleccionado

La elección del método ϵ -constraint está fundamentada en las siguientes razones:

- **Permite modelar frentes de Pareto no convexos.** A diferencia del método de la suma ponderada, que puede fallar en identificar soluciones en regiones no convexas del frente de Pareto, el método ϵ -constraint es capaz de explorar todo el espectro del frente eficiente.
- **Adecuado para objetivos con escalas y unidades diferentes.** En este problema, Z_1 (distancia), Z_2 (calidad) y Z_3 (riesgo) operan en magnitudes distintas y no son directamente comparables, lo que dificulta definir pesos significativos en el método ponderado.
- **Facilita la incorporación de preferencias del decisor.** Las restricciones sobre calidad mínima y riesgo máximo representan criterios reales de operación en inspecciones de infraestructura, haciendo el modelo más interpretable para tomadores de decisiones.
- **Permite analizar de forma explícita los trade-offs.** Al variar sistemáticamente los valores de ϵ , se observa cómo las rutas óptimas cambian cuando se exige mayor seguridad o mayor cobertura de inspección.
- **Adecuado para problemas combinatorios como el TSP.** La formulación basada en MILP con variables binarias encaja de manera natural con la estructura del método ϵ -constraint.

En contraste:

- El método de **suma ponderada** requiere definir pesos subjetivos y no garantiza cobertura completa del frente eficiente.
- El método **lexicográfico** impondría prioridad absoluta a un objetivo, lo cual no es realista en decisiones operativas donde todos los criterios deben ser negociables.

Por lo tanto, el método ϵ -constraint permite una representación más fiel del proceso de toma de decisiones y proporciona un conjunto diversificado de soluciones de compromiso aptas para análisis operacional.

2.3 Implementación y Análisis

2.3.1 Descripción de la Implementación y Resultados

La implementación computacional del modelo formulado se desarrolló utilizando el entorno de programación Python 3.10 con el paquete Pyomo para la formulación del modelo MILP y el solver HiGHS para

la resolución de los problemas mono-objetivo y las instancias del método ϵ -constraint. Adicionalmente, se emplearon **Pandas** para el manejo de datos y **Matplotlib** para la visualización del frente de Pareto.

En primer lugar, se calcularon los valores extremos de cada función objetivo mediante la optimización independiente de Z_1 , Z_2 y Z_3 . Los valores obtenidos se presentan a continuación:

$$Z1_{\min} = 58.00, \quad Z2_{\max} = 769.00, \quad Z3_{\min} = 4.00, \quad Z3_{\max} = 62.00,$$

Estos resultados iniciales definen los límites efectivos del espacio de soluciones y permiten parametrizar adecuadamente los valores de ϵ para la generación del frente de Pareto.

Posteriormente, se aplicó el método ϵ -constraint, tomando como objetivo primario la minimización de la distancia recorrida Z_1 y estableciendo sucesivos niveles mínimos de calidad Z_2 y máximos permitidos de riesgo Z_3 . Los resultados numéricos obtenidos se muestran en la Figura 3.

```
Calculando extremos del Problema 2...
Z1_min ≈ 58.00
Z2_max ≈ 769.00
Z3_min ≈ 4.00
Z3_max ≈ 62.00

--- Método ε-constraint (Problema 2) ---
Resolviendo con Z2 >= 230.70 (≈30% de Z2_max) y Z3 <= 21.40 (≈30% entre Z3_min y Z3_max)...
    → Z1 = 123.00, Z2 = 253.00, Z3 = 18.00
Resolviendo con Z2 >= 307.60 (≈40% de Z2_max) y Z3 <= 27.20 (≈40% entre Z3_min y Z3_max)...
    → Z1 = 156.00, Z2 = 348.00, Z3 = 25.00
Resolviendo con Z2 >= 384.50 (≈50% de Z2_max) y Z3 <= 33.00 (≈50% entre Z3_min y Z3_max)...
    → Z1 = 171.00, Z2 = 430.00, Z3 = 27.00
Resolviendo con Z2 >= 461.40 (≈60% de Z2_max) y Z3 <= 38.80 (≈60% entre Z3_min y Z3_max)...
    → Z1 = 199.00, Z2 = 511.00, Z3 = 38.00
Resolviendo con Z2 >= 538.30 (≈70% de Z2_max) y Z3 <= 44.60 (≈70% entre Z3_min y Z3_max)...
    → Z1 = 240.00, Z2 = 586.00, Z3 = 43.00
Resolviendo con Z2 >= 615.20 (≈80% de Z2_max) y Z3 <= 50.40 (≈80% entre Z3_min y Z3_max)...
    → Z1 = 266.00, Z2 = 616.00, Z3 = 43.00
Resolviendo con Z2 >= 692.10 (≈90% de Z2_max) y Z3 <= 56.20 (≈90% entre Z3_min y Z3_max)...
    → Z1 = 282.00, Z2 = 694.00, Z3 = 45.00
```

Figure 3: Resultados numéricos obtenidos mediante el método ϵ -constraint.

Los valores obtenidos para cada una de las iteraciones se resumen en la siguiente tabla:

Frac. Z_2	Z_1	Z_2	Z_3
30%	123.00	253.00	18.00
40%	156.00	348.00	25.00
50%	171.00	430.00	27.00
60%	199.00	511.00	38.00
70%	240.00	586.00	43.00
80%	266.00	616.00	43.00
90%	282.00	694.00	45.00

Finalmente, se construyó el frente de Pareto tridimensional representando la relación simultánea entre distancia total (Z_1), calidad de inspección (Z_2) y riesgo total (Z_3). La Figura 4 muestra esta visualización:

Problema 2 - Frente de Pareto (ϵ -constraint)

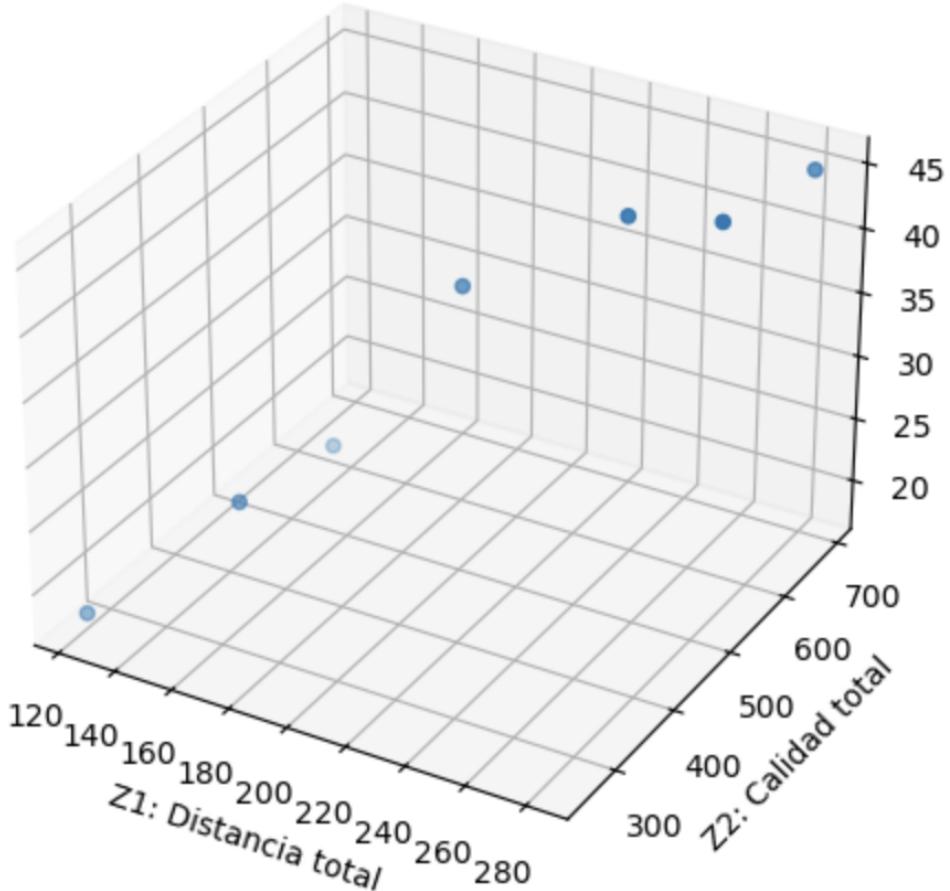


Figure 4: Frente de Pareto tridimensional obtenido mediante el método ϵ -constraint.

A partir de la representación visual se observa claramente el comportamiento típico de un problema multiobjetivo con objetivos en conflicto. A medida que aumenta la cobertura de inspección (calidad acumulada Z_2), la distancia recorrida Z_1 incrementa sustancialmente, pasando de 123 km hasta 282 km. Adicionalmente, es evidente que la reducción estricta del riesgo limita significativamente la capacidad de cobertura y obliga a rutas más conservadoras.

Este comportamiento evidencia intercambios (trade-offs) que deben ser evaluados por los tomadores de decisión: maximizar la seguridad puede disminuir la eficiencia operativa, mientras que maximizar la cobertura puede exigir recorrer zonas con mayores niveles de riesgo. Las soluciones obtenidas en el frente de Pareto ofrecen un conjunto diverso de alternativas óptimas que pueden seleccionarse bajo criterios específicos de operación.

2.4 Análisis y Discusión Adicional

2.4.1 Impacto del Cambio en la Importancia Relativa entre los Objetivos

El análisis del frente de Pareto obtenido muestra claramente que los tres objetivos del problema presentan una relación de conflicto directo: mejoras significativas en la calidad de inspección (Z_2) implican

incrementos considerables en la distancia recorrida (Z_1) y usualmente también en riesgo (Z_3).

Si en el contexto operativo se estableciera que la distancia total (o costo asociado al desplazamiento) es el criterio más importante, la decisión óptima se ubicaría en la primera solución del frente de Pareto:

$$(Z_1, Z_2, Z_3) = (123, 253, 18)$$

correspondiente a aproximadamente el 30% de la calidad máxima posible. Esta ruta privilegia eficiencia operacional y seguridad, pero sacrifica cobertura en términos de inspección.

Por el contrario, si la prioridad principal fuera maximizar la calidad de inspección sin restricciones severas en distancia y riesgo, la solución seleccionada se movería hacia:

$$(Z_1, Z_2, Z_3) = (282, 694, 45)$$

correspondiente a aproximadamente el 90% del valor máximo de Z_2 , pero con un incremento del 129% en la distancia respecto a la solución más eficiente.

Finalmente, si el factor más crítico fuera el riesgo operativo, las soluciones con $Z_3 \leq 25$ o $Z_3 \leq 27$ serían las más adecuadas, aunque limitan severamente la cobertura visitando solo localidades cercanas y de menor exposición.

Este comportamiento confirma que el modelo permite representar distintas políticas de operación según las prioridades institucionales, lo que lo convierte en una herramienta útil para la toma de decisiones estratégicas en planificación de rutas.

2.4.2 Solución de Compromiso Seleccionada

Para identificar una solución de compromiso, se considera el punto ideal teórico no alcanzable:

$$(Z_1^*, Z_2^*, Z_3^*) = (58, 769, 4),$$

y se calcula la distancia euclíadiana entre cada solución obtenida y este punto ideal normalizado en cada dimensión. Entre todas las soluciones obtenidas del frente de Pareto, la alternativa con mejor equilibrio resulta ser:

$$(Z_1, Z_2, Z_3) = (199, 511, 38),$$

correspondiente a la configuración con 60% de calidad mínima exigida. Esta solución ofrece:

- Un aumento moderado de distancia respecto a la opción más económica (incremento del 61.8% sobre $Z_{1\min}$),
- Una cobertura de inspección significativamente superior (el doble frente a la primera solución),
- Un riesgo operacional intermedio y razonable comparado con soluciones más agresivas.

Desde un punto de vista logístico y operativo, esta alternativa representa un balance adecuado entre eficiencia de recursos, cobertura de inspección y seguridad operacional, siendo por lo tanto la solución recomendada como **punto de compromiso eficiente de Pareto**. Esta elección respalda criterios de toma de decisiones realistas donde ninguno de los objetivos se privilegia de forma absoluta.