Universidad de Los Andes

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Computación

Laboratorio 5: Optimización Multiobjetivo

ISIS3302 - Modelado, Simulacion Y Optimizacion

Integrantes
Andrés Santiago Neira Socha (a.neiras@uniandes.edu.co) - 202123126
Kevin Alvarez (k.alvarezr@uniandes.edu.co) - 202022834

2025-20

Contenido

1 Problema 1: Planificación de envíos humanitarios

1.1 Descripción del problema

Se considera una misión humanitaria en la que se deben enviar diferentes tipos de recursos a varias zonas afectadas por una emergencia. Se dispone de una flota de 4 aviones, cada uno con capacidad limitada de peso y volumen, y cada avión puede realizar hasta dos viajes.

Los recursos a transportar son alimentos básicos, medicinas, equipos médicos, agua potable y mantas. Para cada recurso se conoce el peso por unidad, el volumen por unidad, la disponibilidad máxima en el centro de acopio y el impacto social (medido en miles de USD por tonelada). Cada zona afectada tiene unas necesidades mínimas en toneladas de cada recurso.

Adicionalmente, se consideran varias restricciones operativas: (i) cada viaje de un avión se asigna a lo sumo a una zona; (ii) las medicinas no pueden transportarse en el avión 1 por razones de seguridad; (iii) en un mismo viaje no se pueden transportar simultáneamente agua potable y equipos médicos; (iv) los equipos médicos son indivisibles y deben transportarse en unidades enteras.

El problema es de naturaleza multiobjetivo, con dos criterios:

- Maximizar el impacto social total generado por los envíos.
- Minimizar el costo total de transporte de la operación.

Para abordar este problema se utilizó el método de la suma ponderada.

1.2 Formulación matemática

Conjuntos e índices

$$
\begin{aligned}
R &: \text{conjunto de recursos, } R = \{\text{alimentos, medicinas, equipos, agua, mantas}\},\\
J &: \text{conjunto de aviones, } J = \{1,2,3,4\},\\
V &: \text{conjunto de viajes por avión, } V = \{1,2\},\\
Z &: \text{conjunto de zonas afectadas, } Z = \{A,B,C,D\}.
\end{aligned}
$$

Parámetros principales

$$
\begin{aligned}
w_r &: \text{peso (toneladas) por unidad del recurso } r \in R,\\
v_r &: \text{volumen (m}^3\text{) por unidad del recurso } r \in R,\\
a_r &: \text{disponibilidad máxima (unidades) del recurso } r \in R,\\
p_r &: \text{impacto social (miles USD/ton) del recurso } r \in R,\\
C_j^W &: \text{capacidad de peso (ton) del avión } j \in J,\\
C_j^V &: \text{capacidad de volumen (m}^3\text{) del avión } j \in J,\\
F_j &: \text{costo fijo (miles USD) por usar el avión } j \in J,\\
c_j &: \text{costo variable (miles USD/km) del avión } j \in J,\\
d_z &: \text{distancia (km) desde la base hasta la zona } z \in Z,\\
\gamma_z &: \text{multiplicador de impacto social en la zona } z \in Z,\\
D_{rz} &: \text{demanda mínima (ton) del recurso } r \text{ en la zona } z.
\end{aligned}
$$

Variables de decisión

$x_{rjvz} \geq 0$: unidades del recurso r enviadas en el avión j, viaje v, hacia la zona z,
$y_{jvz} \in \{0,1\}$: vale 1 si el avión j en el viaje v va a la zona z,
$u_j \in \{0,1\}$: vale 1 si se utiliza el avión j,
$\delta^W_{jv} \in \{0,1\}$: indica transporte de agua potable en el viaje (j,v),
$\delta^E_{jv} \in \{0,1\}$: indica transporte de equipos médicos en el viaje (j,v),
$n_{jvz} \in \mathbb{Z}_+$: unidades enteras de equipos médicos en (j,v,z) (indivisibilidad).

Restricciones

$$\sum_{z\in Z} y_{jvz} \leq 1, \quad \forall j \in J,\, v \in V \quad \text{(a lo sumo una zona por viaje)} \tag{1}$$

$$y_{jvz} \leq u_j, \quad \forall j \in J,\, v \in V,\, z \in Z \quad \text{(si hay viaje, el avión se usa)} \tag{2}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{v\in V}\sum_{z\in Z} x_{rjvz} \leq a_r, \quad \forall r \in R \quad \text{(disponibilidad de recursos)} \tag{3}$$

$$\sum_{r\in R}\sum_{z\in Z} w_r\, x_{rjvz} \leq C^W_j, \quad \forall j \in J,\, v \in V \quad \text{(capacidad de peso)} \tag{4}$$

$$\sum_{r\in R}\sum_{z\in Z} v_r\, x_{rjvz} \leq C^V_j, \quad \forall j \in J,\, v \in V \quad \text{(capacidad de volumen)} \tag{5}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{v\in V} w_r\, x_{rjvz} \geq D_{rz}, \quad \forall r \in R,\, z \in Z \quad \text{(satisfacción de necesidades mínimas)} \tag{6}$$

$$x_{rjvz} \leq a_r\, y_{jvz}, \quad \forall r \in R,\, j \in J,\, v \in V,\, z \in Z \quad \text{(envíos solo si el viaje va a la zona)} \tag{7}$$

$$x_{\text{med},1,v,z} = 0, \quad \forall v \in V,\, z \in Z \quad \text{(medicinas prohibidas en el avión 1)} \tag{8}$$

$$\sum_{z\in Z} x_{\text{water},jvz} \leq a_{\text{water}}\, \delta^W_{jv}, \quad \forall j \in J,\, v \in V \tag{9}$$

$$\sum_{z\in Z} x_{\text{equip},jvz} \leq a_{\text{equip}}\, \delta^E_{jv}, \quad \forall j \in J,\, v \in V \tag{10}$$

$$\delta^W_{jv} + \delta^E_{jv} \leq 1, \quad \forall j \in J,\, v \in V \quad \text{(no mezclar agua y equipos en el mismo viaje)} \tag{11}$$

$$x_{\text{equip},jvz} = n_{jvz}, \quad \forall j \in J,\, v \in V,\, z \in Z \quad \text{(indivisibilidad equipos médicos).} \tag{12}$$

Funciones objetivo El impacto social total (en miles de USD) viene dado por

$$Z_1 = \sum_{r\in R}\sum_{j\in J}\sum_{v\in V}\sum_{z\in Z} p_r\, w_r\, x_{rjvz}\, \gamma_z. \tag{13}$$

El costo total de transporte (en miles de USD) es

$$Z_2 = \sum_{j\in J} F_j\, u_j + \sum_{j\in J}\sum_{v\in V}\sum_{z\in Z} c_j\, d_z\, y_{jvz}. \tag{14}$$

1.3 Método de la suma ponderada

Para transformar el problema multiobjetivo en uno escalar, se utilizó el método de la suma ponderada. Dado un par de pesos $\alpha \in [0, 1]$ y $1 - \alpha$, se considera la función:

$$\max \quad Z(\alpha) \; = \; \alpha \, Z_1 \; - \; (1 - \alpha) \, Z_2. \tag{15}$$

De esta forma:

- $\alpha = 0$ corresponde a minimizar exclusivamente el costo Z_2;
- $\alpha = 1$ corresponde a maximizar exclusivamente el impacto social Z_1;
- valores intermedios de α representan distintos compromisos entre ambos criterios.

Para este laboratorio se resolvió el modelo para los valores $\alpha \in \{0.0, \ 0.1, \ 0.25, \ 0.5, \ 0.75, \ 0.9, \ 1.0\}$ utilizando el paquete Pyomo en Python y el solver `glpk`.

1.4 Resultados numéricos

La Tabla 1 resume los valores obtenidos de los objetivos para cada valor de α:

Table 1: Resultados del método de la suma ponderada para el Problema 1.

α	Z_1 (impacto, miles USD)	Z_2 (costo, miles USD)
0.00	20611.60	284.40
0.10	24885.10	297.30
0.25	24885.10	297.40
0.50	24885.10	297.30
0.75	24885.10	297.30
0.90	24885.10	297.30
1.00	24706.20	294.70

En la Figura 2 se representa el frente aproximado en el plano (Z_2, Z_1), donde cada punto corresponde a una solución óptima para un valor de α.

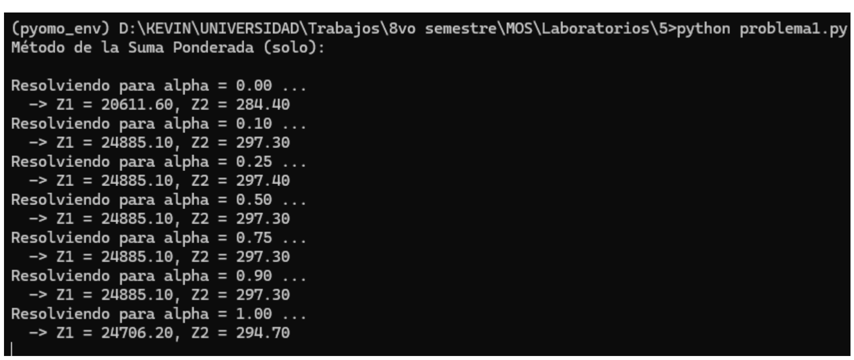

Figure 1: Frente de compromiso costo–impacto obtenido mediante la suma ponderada.

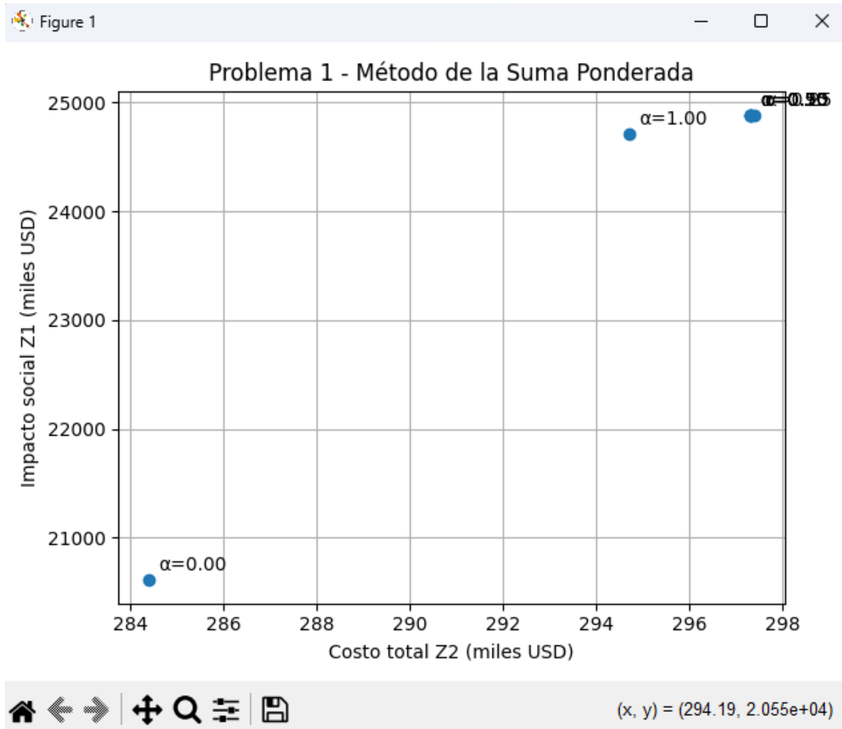

Figure 2: Grafica de resultados

1.5 Análisis de los resultados

Se observa que:

- La solución con $\alpha = 0$ (énfasis completo en el costo) alcanza el menor costo $Z_2 = 284{,}40$ miles USD, pero con un impacto social relativamente menor $Z_1 = 20611{,}60$ miles USD.
- Para valores de α en el rango 0,10–0,90 el modelo converge a la misma solución, con $Z_1 \approx 24885{,}10$ y $Z_2 \approx 297{,}3$ miles USD. Esto indica que existe una región del frente de Pareto donde distintas ponderaciones llevan al mismo compromiso costo–impacto.
- Con $\alpha = 1$ (sólo impacto) se obtiene un impacto ligeramente inferior (24706,20) respecto a la solución anterior, pero con un costo algo menor (294,70). En este caso la solución puramente de impacto no es muy diferente de la solución de compromiso que se obtiene para $0{,}10 \leq \alpha \leq 0{,}90$.

Comparando las soluciones extremas, pasar de la solución de costo mínimo ($\alpha = 0$) a la solución de mayor impacto ($\alpha \approx 0{,}10$–$0{,}90$) implica aumentar el costo en torno a 13 miles de USD, pero permite incrementar el impacto social en aproximadamente 4200 miles de USD. Este tipo de análisis permite al responsable de la misión decidir si el aumento de costo se justifica por la ganancia en impacto social.