Laboratorio 1: Fundamentos de Modelado Matemático e Implementación en Pyomo

Kevin David Alvarez Romero
Universidad de los Andes
k.alvarezr@uniandes.edu.co
202022834

Andrés Santiago Neira Socha
Universidad de los Andes
a.neiras@uniandes.edu.co
202123126

I. Problema 1

I-A. *Parte A*

I-A1. *Definición del problema:*

- Bajo un criterio de maximización, se busca optimizar la selección de tareas de un equipo de desarrollo con el fin de maximizar el valor total asociado a la prioridad de dichas tareas. Para ello, se deben elegir las tareas de manera que la suma de sus puntos de historia no exceda la capacidad global del equipo, establecida en 52 unidades, sin considerar la cantidad de desarrolladores ni sus capacidades individuales.

I-A2. *Supuestos del modelo:*

- **Supuesto 1:** Se asume que no nos interesa el número de desarrolladores del equipo ni sus capacidades individuales.
  Justificación: No es necesario tenerlos en cuenta ya que únicamente existe una restricción global de puntos de historia (52) para todo el equipo.
- **Supuesto 2:** Se considera que cada tarea es indivisible, es decir, no puede ser fraccionada ni realizada parcialmente.
  Justificación: Las tareas deben completarse en su totalidad para generar valor, por lo que no tendría sentido considerar fracciones de una misma tarea.
- **Supuesto 3:** Se supone que el valor de una tarea está completamente representado por la prioridad asignada.
  Justificación: No se incluyen otros factores como dependencias entre tareas o el esfuerzo percibido, simplificando el problema a una única métrica de valor.
- **Supuesto 4:** El modelo se modela como un programa lineal entero (LP/MILP).
  Justificación: Se asume linealidad tanto en la función objetivo como en las restricciones, lo que permite utilizar técnicas estándar de optimización lineal.

I-A3. *Notación matemática:*

- **Conjuntos:**
  I = conjunto de tareas disponibles.
- **Parámetros:**
  - V_i = valor de prioridad de la tarea i, definido según la escala:

    $$\text{Máxima} = 7,\ \text{Alta} = 6,\ \text{Media-Alta} = 5,\ \text{Media} = 4$$
    $$\text{Media-Baja} = 3,\ \text{Baja} = 2,\ \text{Mínima} = 1$$
  - P_i = puntos de historia asociados a la tarea i.
  - C = capacidad total de puntos de historia del equipo, con $C = 52$ en este caso.
- **Variables de decisión:**

  $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la tarea } i \in I \text{ es seleccionada} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  donde X_i es una variable binaria, con dominio $X_i \in \{0, 1\}$.

I-A4. *Formulación del modelo:*

Función objetivo:

$$\max \sum_{i \in I} V_i \, X_i$$

Restricciones:

Capacidad global del equipo:

$$\sum_{i\in I} P_i\, X_i \leq C$$

I-B. *Parte B*

I-B1. *Definición del problema:*

- Bajo un criterio de maximización, se busca optimizar la selección de tareas de un equipo conformado por 4 desarrolladores con el fin de maximizar el valor total asociado a la prioridad de dichas tareas. En este caso, se debe tener en cuenta que cada desarrollador posee una capacidad máxima de 15 puntos de historia, lo que introduce restricciones individuales además de la selección global de tareas.

I-B2. *Supuestos del modelo:*

- **Supuesto 1:** Se considera que cada tarea es indivisible, es decir, no puede ser fraccionada ni realizada parcialmente. **Justificación:** Las tareas deben completarse en su totalidad para generar valor, por lo que no tendría sentido considerar fracciones de una misma tarea.
- **Supuesto 2:** Cada desarrollador puede realizar varias tareas siempre y cuando no exceda su capacidad individual de 15 puntos de historia. **Justificación:** Se simplifica al considerar que no hay limitaciones adicionales como especialización de tareas o eficiencia diferente entre desarrolladores.
- **Supuesto 3:** El valor de una tarea esta completamente representado por su prioridad. **Justificación:** No se incluyen otros factores como dependencias entre tareas o el esfuerzo percibido, simplificando el problema a una única métrica de valor.
- **Supuesto 4:** El modelo se modela como un programa lineal entero (LP/MILP). **Justificación:** Se asume linealidad tanto en la función objetivo como en las restricciones, lo que permite utilizar técnicas estándar de optimización lineal.

I-B3. *Notación matemática:*

- **Conjuntos:**
  - I = conjunto de tareas disponibles.
  - J = conjunto de desarrolladores.
- **Parámetros:**
  - V_i = valor de prioridad de la tarea i.
  - P_i = puntos de historia asociados a la tarea i.
  - C_d = capacidad máxima de puntos de historia por desarrollador ($C_d = 15$).
  - C_t = capacidad total o global del equipo ($C_t = 52$).
- **Variables de decisión:**

  $$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el desarrollador } j \in J \text{ realiza la tarea } i \in I \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  donde X_{ij} es una variable binaria, con dominio $X_{ij} \in \{0, 1\}$.

I-B4. *Formulación del modelo:*

Función objetivo:

$$\text{máx} \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} V_i\, X_{ij}$$

Restricciones:

Capacidad global del equipo:

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} P_i\, X_{ij} \leq C_t$$

Capacidad individual de cada desarrollador:

$$\sum_{i\in I} P_i\, X_{ij} \leq C_d \quad \forall j \in J$$

Asignación única de tareas:

$$\sum_{j\in J} X_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in I$$

I-B5. *Respuesta a preguntas:*

- **¿Cúal fue la diferencia en realizar la asignación de forma global vs de forma individual?** En la asignación global únicamente se considera un conjunto de decisiones, correspondiente a las tareas. Esto simplifica el problema a seleccionar aquellas que maximizan el valor sin exceder la capacidad total del equipo. En cambio, en la asignación individual es necesario introducir un segundo conjunto, el de desarrolladores, lo cual aumenta la complejidad del modelo al tener que considerar simultáneamente las tareas y las capacidades individuales de cada miembro del equipo.
- **¿Para la parte B, es necesario la restricción de puntos de historia global o la podríamos eliminar?** La restricción de puntos de historia global sigue siendo necesaria, ya que si únicamente se controlara la capacidad individual (15 puntos por cada desarrollador), la suma de todos los desarrolladores podría llegar a 60 puntos, superando así el límite global de 52. No obstante, esta restricción podría eliminarse en escenarios donde la suma de todas las capacidades individuales no exceda la capacidad global, garantizando automáticamente que no se viole dicho límite.

II. Problema 2

II-A. Parte A

II-A1. Definición del problema:

- Bajo un criterio de maximización, se busca que una empresa con tres empleados asigne trabajos de manera que se maximicen las ganancias totales. Cada uno de los cinco trabajos tiene una duración específica y cada trabajador cuenta con una disponibilidad horaria limitada, por lo que la asignación debe respetar dichas restricciones de tiempo.

II-A2. Supuestos del modelo:

- **Supuesto 1:** Los trabajos son atómicos, es decir, se realizan completos o no se realizan.
  Justificación: Se simplifica el modelo al evitar fraccionar trabajos en partes, lo cual sería más complejo y no corresponde a la lógica planteada en el enunciado.
- **Supuesto 2:** Cada trabajador puede realizar varios trabajos, siempre que la suma de las horas requeridas no supere su disponibilidad horaria.
  Justificación: Se asume que los trabajadores pueden distribuir su tiempo en diferentes tareas, lo cual es realista mientras se respete su límite de horas.
- **Supuesto 3:** El modelo se modela como un programa lineal entero (LP/MILP).
  Justificación: Se asume linealidad tanto en la función objetivo como en las restricciones, lo que permite utilizar técnicas estándar de optimización lineal.

II-A3. Notación matemática:

- **Conjuntos:**
  - I = conjunto de trabajadores.
  - J = conjunto de trabajos.
- **Parámetros:**
  - G_j = ganancia obtenida al realizar el trabajo j (\$).
  - H_j = intensidad horaria requerida por el trabajo j (en horas).
  - H_i = intensidad horaria máxima que puede soportar el trabajador i (en horas).
- **Variables de decisión:**

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajador } i \in I \text{ realiza el trabajo } j \in J \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde X_{ij} es una variable binaria, con dominio $X_{ij} \in \{0, 1\}$.

II-A4. Formulación del modelo:

Función objetivo:

$$\text{máx} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} G_j \, X_{ij}$$

Restricciones:

Restricción de intensidad horaria de trabajadores:

$$\sum_{j \in J} H_j \, X_{ij} \leq H_i \quad \forall i \in I$$

Restricción de no repetición de trabajos:

$$\sum_{i \in I} X_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J$$

II-B. Parte B

II-B1. Definición del problema:

- Bajo un criterio de maximización, se busca que una empresa con tres empleados asigne trabajos de manera que se maximicen las ganancias totales. Cada trabajo tiene una duración específica y cada trabajador cuenta con una disponibilidad horaria limitada. Adicionalmente, se deben considerar restricciones especiales: el trabajo 1 solo puede ser realizado por el trabajador 1, y el trabajador 2 no puede realizar el trabajo 3.

II-B2. Supuestos del modelo:

- **Supuesto 1:** Los trabajos son atómicos, es decir, se realizan completos o no se realizan.
  Justificación: Se simplifica el modelo al evitar fraccionar trabajos en partes, lo cual sería más complejo y no corresponde a la lógica planteada en el enunciado.
- **Supuesto 2:** Cada trabajador puede realizar varios trabajos, siempre que la suma de las horas requeridas no supere su disponibilidad horaria.
  Justificación: Se asume que los trabajadores pueden distribuir su tiempo en diferentes tareas, lo cual es realista mientras se respete su límite de horas.
- **Supuesto 3:** El modelo se modela como un programa lineal entero (LP/MILP).
  Justificación: Se asume linealidad tanto en la función objetivo como en las restricciones, lo que permite utilizar técnicas estándar de optimización lineal.

II-B3. Notación matemática:

- **Conjuntos:**
  - I = conjunto de trabajadores.
  - J = conjunto de trabajos.

- **Parámetros:**
  - G_j = ganancia obtenida al realizar el trabajo j (\$).
  - H_j = intensidad horaria requerida por el trabajo j (en horas).
  - H_i = intensidad horaria máxima que puede soportar el trabajador i (en horas).
- **Variables de decisión:**

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajador } i \in I \text{ realiza el trabajo } j \in J \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde X_{ij} es una variable binaria, con dominio $X_{ij} \in \{0,1\}$.

II-B4. Formulación del modelo:

Función objetivo:

$$\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} G_j \, X_{ij}$$

Restricciones:

Restricción de intensidad horaria de trabajadores:

$$\sum_{j \in J} H_j \, X_{ij} \leq H_i \quad \forall i \in I$$

Restricción de no repetición de trabajos:

$$\sum_{i \in I} X_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J$$

Restricción de trabajo 1 asignado solo a trabajador 1:

$$\sum_{i \in I \setminus \{1\}} X_{i1} = 0$$

Restricción de trabajador 2 no asignado al trabajo 3:

$$X_{23} = 0$$

III. Problema 3

III-A. Parte A

III-A1. Definición del problema:

- Bajo un criterio de maximización, se busca optimizar la distribución de recursos humanitarios en Zambia utilizando una flota de tres aviones, de manera que se maximice el valor total de los recursos transportados. La asignación debe respetar que la cantidad de cada recurso transportado no exceda su stock disponible y que, para cada avión, no se superen sus límites de peso y volumen de carga.

III-A2. Supuestos del modelo:

- **Supuesto 1:** Si un avión elige transportar un recurso específico, debe transportarlo en su totalidad y no de manera fraccionada.
  Justificación: Se simplifica el modelo al evitar divisiones de un mismo recurso en distintos aviones, reduciendo la complejidad de la asignación.
- **Supuesto 2:** Un avión puede transportar más de un recurso siempre que no se excedan sus capacidades máximas de peso y volumen.
  Justificación: Refleja un escenario realista en el que un avión puede distribuir su espacio de carga entre diferentes tipos de recursos.
- **Supuesto 3:** El modelo se modela como un programa lineal entero (LP/MILP).
  Justificación: Se asume linealidad tanto en la función objetivo como en las restricciones, lo que permite utilizar técnicas estándar de optimización lineal.

III-A3. Notación matemática:

- **Conjuntos:**
  - I = conjunto de aviones.
  - J = conjunto de recursos.
- **Parámetros:**
  - Val_j = valor del recurso j.
  - $Stock_j$ = stock disponible del recurso j (en toneladas).
  - Vol_j = volumen del recurso j (en m^3).
  - CP_i = capacidad máxima de peso soportado por el avión i (en toneladas).
  - CV_i = capacidad máxima de volumen soportado por el avión i (en m^3).
- **Variables de decisión:**

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el avión } i \in I \text{ transporta el recurso } j \in J \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde X_{ij} es una variable binaria, con dominio $X_{ij} \in \{0,1\}$.

III-A4. Formulación del modelo:

Función objetivo:

$$\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} Val_j \, X_{ij}$$

Restricciones:

Restricción de peso:

$$\sum_{j \in J} Stock_j \, X_{ij} \leq CP_i \quad \forall i \in I$$

Restricción de volumen:

$$\sum_{j \in J} Vol_j \, X_{ij} \leq CV_i \quad \forall i \in I$$

Restricción de no repetición de recursos:

$$\sum_{i \in I} X_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J$$

III-B. *Parte B*

III-B1. *Definición del problema:*

- Bajo un criterio de maximización, se busca optimizar la distribución de recursos humanitarios en Zambia utilizando una flota de tres aviones, de manera que se maximice el valor total de los recursos transportados. La asignación debe respetar que la cantidad de cada recurso transportado no exceda su stock disponible y que, para cada avión, no se superen sus límites de peso y volumen. Adicionalmente, deben cumplirse métricas de seguridad e incompatibilidad: las medicinas no pueden ser transportadas en el avión 1 y los equipos médicos no pueden ser transportados en el mismo avión que el agua potable.

III-B2. *Supuestos del modelo:*

- **Supuesto 1:** Si un avión elige transportar un recurso específico, debe transportarlo en su totalidad y no de manera fraccionada.
  Justificación: Se simplifica el modelo al evitar divisiones de un mismo recurso en distintos aviones, reduciendo la complejidad de la asignación.
- **Supuesto 2:** Un avión puede transportar más de un recurso siempre que no se excedan sus capacidades máximas de peso y volumen.
  Justificación: Refleja un escenario realista en el que un avión puede distribuir su espacio de carga entre diferentes tipos de recursos.
- **Supuesto 3:** El modelo se modela como un programa lineal entero (LP/MILP).
  Justificación: Se asume linealidad tanto en la función objetivo como en las restricciones, lo que permite utilizar técnicas estándar de optimización lineal.

III-B3. *Notación matemática:*

- **Conjuntos:**
  - $I =$ conjunto de aviones.
  - $J =$ conjunto de recursos.

Indices del conjunto J:

$$\text{Alimentos Básicos} = 1, \ \text{Medicinas} = 2, \ \text{Equipos Médicos} = 3$$

$$\text{Agua potable} = 4, \ \text{Mantas} = 5$$

- **Parámetros:**
  - $Val_j =$ valor del recurso j.
  - $Stock_j =$ stock disponible del recurso j (en toneladas).
  - $Vol_j =$ volumen del recurso j (en m^3).
  - $CP_i =$ capacidad máxima de peso soportado por el avión i (en toneladas).
  - $CV_i =$ capacidad máxima de volumen soportado por el avión i (en m^3).
- **Variables de decisión:**

  $$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el avión } i \in I \text{ transporta el recurso } j \in J \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  donde X_{ij} es una variable binaria, con dominio $X_{ij} \in \{0, 1\}$.

III-B4. *Formulación del modelo:*

Función objetivo:

$$\text{máx} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} Val_j \, X_{ij}$$

Restricciones:

Restricción de peso:

$$\sum_{j \in J} Stock_j \, X_{ij} \leq CP_i \quad \forall i \in I$$

Restricción de volumen:

$$\sum_{j \in J} V_j \, X_{ij} \leq CV_i \quad \forall i \in I$$

Restricción de no repetición de recursos:

$$\sum_{i \in I} X_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J$$

Restricción de seguridad (medicinas no en avión 1):

$$X_{12} = 0$$

Restricción de incompatibilidad (equipos médicos y agua potable no en el mismo avión):

$$X_{i3} + X_{i4} \leq 1 \quad \forall i \in I$$