BROWNOVO GIBANJE

ANEJ ROZMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku motiviramo idejo Brownovega gibanja in podamo njegovo matematično definicijo. Definiramo osnovne pojme kot so slučajni proces, trajektorija, prirastek, filtracija in čas ustavljanja. Predstavimo in dokažemo nekaj osnovnih lastnosti ter rezultatov, kot je simetričnost Brownovega gibanja, krepka lastnost Markova, princip zracljenja in presenetljiv rezultat, da je trajektorija Brownovega gibanja neodvedljiva funkcija.

BROWNIAN MOTION

In this paper we motivate the idea of Brownian motion and give its mathematical definition. We define basic concepts such as a stochastic process, sample path, increment, filtration and stopping time. We present and prove some basic properties and results, such as the symmetry of Brownian motion, strong Markov property, reflection principle and the surprising result that the sample path of Brownian motion is nowhere differentiable.

1. Uvod

Določeni posebni primeri slučajnih procesov so skozi zgodovino doživeli obsežen matematični razvoj. Brownovo gibanje je najbolj znano in zgodovinsko prvo, ki je bilo temeljito raziskano. Kot fizičen pojav ga je prvi opisal angleški botanik Roberta Brown leta 1827. Matematični opis Brownovega gibanja je prvič izpeljal iz fizikalnih zakonov Albert Einstein leta 1905. Od takrat je celotna teorija slučajnih procesov doživela znaten napredek. Fizikalno teorijo Brownovega gibanja so nadalje izpopolnili Fokker, Planck, Ornstein in drugi. Matematična teorija je počasneje napredovala, ker je natančen matematični opis modela postavljal težave, medtem ko so bila nekatera vprašanja, na katera so fiziki iskali odgovore na podlagi tega modela, precej preprosta in intuitivna. Na veliko vprašanj je odgovoril Bachelier v njegovi disertaciji leta 1900. Prvo jasno matematično formulacijo teorije pa je Wiener podal v svoji disertaciji leta 1918 in kasnejših člankih, zato je alternativno poimenovnanje Brownovega gibanja Wienerjev proces. Je primer slučajnega procesa, ki se danes skupaj z njegovimi posplošitvami pojavlja na številnih področjih kot so biologija, finance, fizika, itd. V članku se bomo osredotočili na matematično izpeljavo osnovnega Brownovega gibanja na $\mathbb{R}$ ter nekaj lastnosti in ne na uporabo v že prej omenjenih področjih. Prvo pa si poglejmo nekaj osnovnih definicij, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

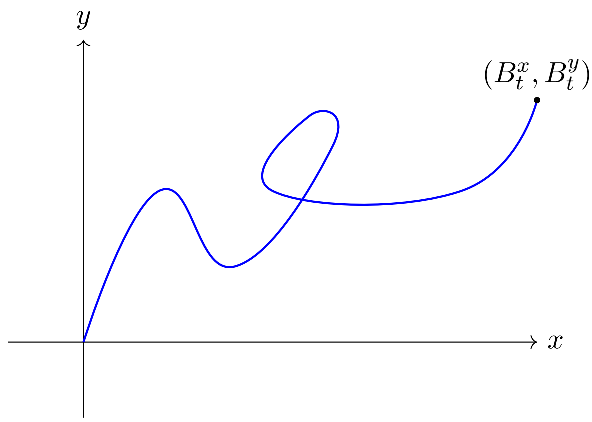
Definicija 1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (S, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T, je družina slučajnih spremenljivk $X_t : \Omega \to S$, ki so $(\mathcal{F}, \Sigma)$-merljive za vsak $t \in T$.

Opomba 1. Za naše namene bomo privzeli, da je $T = [0, \infty)$, $(\mathcal{F}, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, kjer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ predstavlja Borelovo σ-algebro na $\mathbb{R}$.

Definicija 2. Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$.

2. Motivacija in definicija Brownovega gibanja

V duhu fizikalnih začetkov teorije Brownovega gibanja si za motivacijo oglejmo naključno gibanje delca v $\mathbb{R}^2$. Zaradi preprostosti bomo zahtevali, da se gibanje začne v koordinatnem izhodišču. Želeli bi tudi, da so poti delca zvezne, saj nam nenadni skoki nebi pomagali pri opisovanju pojava.



Slika 1. Gibanje delca v xy-ravnini.

Označimo z (B_t^x, B_t^y) položaj delca v času $t \geq 0$. Ker se delec v vse smeri giblje z enako verjetnostjo, bo pričakovana vrednost pozicije enaka $\mathbb{E}\left[(B_t^x, B_t^y)\right] = (0,0)$. Smiselno bi bilo privzeti, da so premiki delca med seboj neodvisni, torej, da gibanje med časom 0 in t_1 (razen pozicije iz katere gibanje nadaljujemo) ne vpliva na gibanje med časom t_1 in t_2 in tako naprej.

Definicija 3. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s,t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ prirastki (slučajne spremenljivke)

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

V našem primeru to zapišemo, da so slučajni vektorji $(B_{t_2}^x, B_{t_2}^y) - (B_{t_1}^x, B_{t_1}^y),\ \ldots, (B_{t_n}^x, B_{t_n}^y) - (B_{t_{n-1}}^x, B_{t_{n-1}}^y)$ med seboj neodvisni. Prav tako bi bilo smiselno privzeti, da če si izberemo nek časovni interval $[s,t]$, je porazdelitev prirastka odvisna le od dolžine tega časovnega intervala in ne od tega, kje gibanje gledamo.

Definicija 4. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Če to velja vidimo, da je (B_t^x, B_t^y) vsota neodvisnih enako porazdeljenih prirastkov. Po centralnem limitnem izreku bi torej pričakovali, da je vektor (B_t^x, B_t^y) normalno porazdeljen. Spomnimo se, da je slučajna spremenljivka X normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo μ in varianco σ^2, če je njena gostota porazdelitve enaka

$$f_X(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Zaradi neodvisnosti prirastkov bo tudi $\mathrm{Var}(B_t^x) = \mathrm{Var}(B_t^y) = t$, torej odvisna le od tega koliko časa opazujemo delec. Ta razmislek nas privede do definicije Brownovega gibanja na $\mathbb{R}$, kjer bi ga radi matematično karakterizirali.

Definicija 5. Slučajnemu procesu $(B_t)_{t\geq 0}$ definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\mathbb{R}$ pravimo *Brownovo gibanje*, če zadošča naslednjim pogojem:

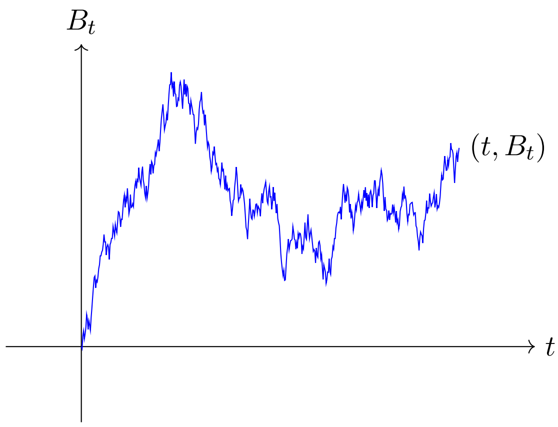
1. $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$,
2. trajektorije $(B_t)_{t\geq 0}$ $(t \mapsto B_t)$ so $\mathbb{P}$-skoraj gotovo zvezne,
3. proces $(B_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne prirastke t.j. za $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ so slučajne spremenljivke $B_{t_2} - B_{t_1},\ B_{t_3} - B_{t_2},\ \ldots,\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ med seboj neodvisne.
4. Za $0 \leq s < t < \infty$ je $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

Vprašanje, ki se nam porodi je, ali sploj obstajta verjetnostni prostor in slučajni proces, ki zadoščata zgornjim zahtevam. Odgovor je pritrdilen in ga podamo v obliki izreka.

Izrek 1. *Obstaja verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in izbira slučajnih spremenljivk $B_t : \Omega \to \mathbb{R}$ za $t \geq 0$, ki ustrezajo definiciji Brownovega gibanja.*

Dokaz. Dokaz izreka je precej tehničen in nezanimiv za namen članka, zato ga bomo izpustili. Najtežji del je pokazati, da so trajektorije zvezne. Lahko ga najdemo v [1]. □

Od sedaj naprej bomo vedno z $(B_t)_{t\geq 0}$ označili Brownovo gibanje, ki bo vedno definirano na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in se nanj (razen po potrebi) ne bomo sklicevali. Priročno bo v mislih držati sliko primera trajektorije 2.



Slika 2. Primer trajektorije eno-dimenzionalnega Brownovega gibanja do časa t.

3. Lastnosti

3.1 Osnovne lastnosti in časi ustavljanja

Poglejmo si nekaj osnovnih lastnosti Brownovega gibanja, ki nam bodo prišle prav pri dokazovanju pomembnejših rezultatov v nadaljevanju.

Trditev 2. *Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in $0 \leq s < t < \infty$. Potem velja:*

1. *$Cov(B_t, B_s) = s$.*
2. *Brownovo gibanje je "simetrično", torej $(-B_t)_{t\geq 0}$ je tudi Brownovo gibanje.*

Dokaz. 1. Ker velja $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, sledi

$$\begin{aligned} Cov(B_t, B_s) &= Cov(B_s + B_t - B_s, B_s) \\ &= Cov(B_s, B_s) + Cov(\underbrace{B_t - B_s, B_s}_{neodivsni}) \\ &= s + 0 = s. \end{aligned}$$

2. Zveznost trajektorij, neodivsnost in stacionarnost prirastkov so lastnosti, ki se ohranjajo pri linearnih transformacijah. Če pogledamo razliko $(-B_t) - (-B_s)$ za $0 \leq s < t$, dobimo

$$\begin{aligned} (-B_t) - (-B_s) &= -(B_t - B_s) \\ &\sim -N(0, t-s) \\ &\sim N(0, t-s). \end{aligned}$$

□

Definicija 6. Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. S $\mathcal{F}_t$ označimo σ-algebro generirano s $\sigma(B_s \mid 0 \leq s \leq t)$. Družini $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ pravimo *Brownova filtracija.*

Opomba 2. V splošnem je filtracija $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ družina naraščajočih σ-algeber, torej $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ za $s \leq t$, ki je lahko končna ali neskončna.

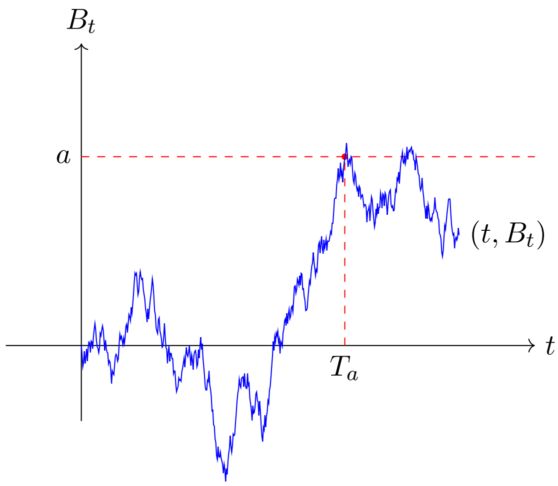
Definicija 7. Naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija. Slučajna spremenljivka $T : \Omega \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je *čas ustavljanja* glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če je za vsak $t \in \mathbb{R}$ dogodek $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Torej če je T čas ustavljanja in poznamo pot Brownovega gibanja do t, potem vemo, ali je $T \leq t$ ali ne. Poglejmo si primer časa ustavljanja in primer slučajne spremenljivke, ki ni čas ustavljanja.

Primer 1. Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in $a \in \mathbb{R}$. Potem je

$$T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$$

čas ustavljanja glede na Brownovo filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Še več, velja $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$.



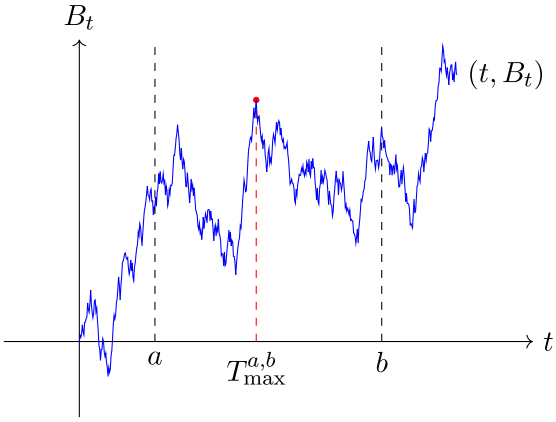
Slika 3. Primer trajektorije T_a.

Opomba 3. Ker je T_a definiran za poljuben $a \in \mathbb{R}$, vidimo, da bo bo Brownovo gibanje v nekem času $t \geq 0$ “obiskalo“ poljubno veliko realno število z verjetnostjo 1.

Primer 2. Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in $a < b \in \mathbb{R}$. Potem je

$$T_{\max}^{a,b} = \{t \in [a,b] \mid \max\{B_t\}\}$$

primer slučajne spremenljivke, ki ni čas ustavljanja glede na Brownovo filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, saj velja npr. $\{T_{\max}^{a,b} \leq \frac{a+b}{2}\} \notin \mathcal{F}_{\frac{a+b}{2}}$.



Slika 4. Primer trajektorije $T_{\max}^{a,b}$.

Intuitivna razlaga časa ustavljanja je naslednja. Če proces opazujemo do časa t, potem bi radi v t imeli vse informacije, da lahko povemo ali se je T zgodil ali ne (kakšno vrednost je zavzel T). V primeru [2] to ne velja, saj moramo vedeti vse kar se je zgodilo do časa b, da lahko povemo kje je maksimum.

3.2 Krepka lastnost Markova

Pokažimo, da za Brownovo gibanje velja krepka lastnost Markova. Da to pokažemo potrebujemo nekaj definicij in pomožnih rezultatov, ki jih ne bomo dokazovali (dokaz v [3]).

Definicija 8. Naj bo X slučajna spremenljivka defnirana na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ pod-σ-algebra. X je *neodvisna* od $\mathcal{G}$, če za vsako omejeno zvezno funkcijo f velja

$$\mathbb{E}\left[f(X)\mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\right]\mathbb{P}(G)$$

za vsak $G \in \mathcal{G}$.

Lema 3. *Naj bosta $\overline{X}, \overline{Y}$ slučajna vektorja. Če velja*

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(Y_i)\right]$$

za vse omejene zvezne funkcije $f_1, \ldots, f_n$ potem sta $\overline{X}$ in $\overline{Y}$ enako porazdeljena.

Definicija 9. Naj bo T čas ustavljanja. Potem je σ-algebra $\mathcal{F}_T$ definirana kot

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ za vsak } t \geq 0\}.$$

$\mathcal{F}_T$ je *povzetek* dogajanja do časa T.

Formalno za slučajni proces $(X_t)_{t\geq 0}$ definiran na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, velja krepka lastnost Markova, če za vsak čas ustavljanja T, pogojno na dogodek $\{T < \infty\}$, velja, da je za vsak $t \geq 0$, X_{T+t} neodvisen od $\mathcal{F}_T$.

Izrek 4. *Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in T čas ustavljanja, za katerega velja velja $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Definiramo proces $B^*_s = B_{T+s} - B_T$ za $s \geq 0$. Potem je $(B^*_s)_{s\geq 0}$ Brownovo gibanje, neodvisno od $\mathcal{F}_T$.*

Dokaz. Predpostavino, da T zavzema vrednosti v $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ \ldots, \}$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Potem za $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \infty$ in $G \in \mathcal{F}_T$ ter $f_1, \ \ldots, f_n$ (omejene zvezne funkcije) računamo

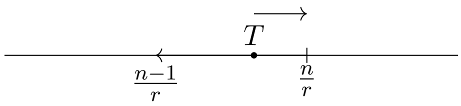
$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{T+s_k} - B_{T+s_{k-1}}\right)\mathbb{1}_G\right] = & \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{T+s_k} - B_{T+s_{k-1}}\right)\mathbb{1}_G \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})\right] \\
&= \text{ (Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci) } = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{T+s_k} - B_{T+s_{k-1}}\right)\mathbb{1}_G\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})\right] = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{\frac{m}{n}+s_k} - B_{\frac{m}{n}+s_{k-1}}\right)\underbrace{\mathbb{1}_G\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})}_{\in\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}}\right] = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{\frac{m}{n}+s_k} - B_{\frac{m}{n}+s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})\right]\right) = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k} - B_{s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})\right]\right) = \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k} - B_{s_{k-1}}\right)\right]\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k} - B_{s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k} - B_{s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{P}\left(G\right)
\end{aligned}
$$

S tem smo pokazali, da velja $B^*_s = B_{T+s} - B_T$. Proces $(B^*_s)_{s\geq 0}$ ima naselednje lastnosti:

1. zveznost trajektorij,

2. Po lemi 3 velja, da so vektorji $(B^*_{s_2} - B^*_{s_1}, \ \ldots, B^*_{s_n} - B^*_{s_{n-1}})$ in $(B_{s_2} - B_{s_1}, \ \ldots, B_{s_n} - B_{s_{n-1}})$ enako porazdeljeni za poljuben nabor $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \infty$ in prvi vektor je neodvisen od $\mathcal{F}_T$.

Torej $(B^*_s)_{s\geq 0}$ je Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_T$. Kaj pa, če T zavzema vrednosti v $[0, \infty)$? V tem primeru za T z vrednostmi v $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ \ldots\}$ definiramo $T_r = \frac{1}{r}\lceil rT\rceil$ za $r \in \mathbb{N}$. Torej največji večkratnik $\frac{1}{r}$, ki je $\geq T$.



Preverili bi lahko, da je T_r res čas ustavljanja. Ker je $T_r \geq T$ velja $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}_{T_r}$. Velja $T_r \downarrow T$ ko $r \to \infty$. Torej za $G \in \mathcal{F}_T$ velja

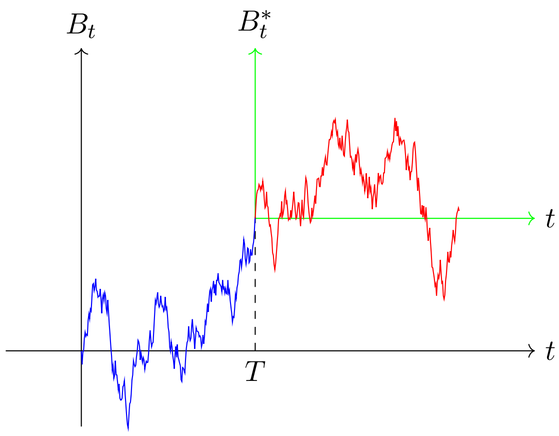
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B^*_{s_k} - B^*_{s_{k-1}}\right)\mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k} - B_{s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{P}(G) \\
&\| \\
&\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{T_r+s_k} - B_{T_r+s_{k-1}}\right)\mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{T_r+s_k} - B_{T_r+s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{P}(G)
\end{aligned}$$

Ko gre $r \to \infty$, po zveznosti trajektorij sledi $(B_{T_r+s_k} - B_{T_r+s_{k-1}}) \to (B_{T+s_k} - B_{T+s_{k-1}})$ $\mathbb{P}$-skoraj gotovo. Po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci lahko v prejšnjih izračunih nesemo limito pod $\mathbb{E}$ in dobimo

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B^*_{s_k} - B^*_{s_{k-1}}\right)\mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k} - B_{s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{P}(G)$$

$\square$

Izrek ponazorimo s sliko 5. Če Brownovo gibanje slučajno ustavimo in gledamo na proces od tega trenutka dalje, bo to še vedno Brownovo gibanje neodvisno od dogajanja do T.

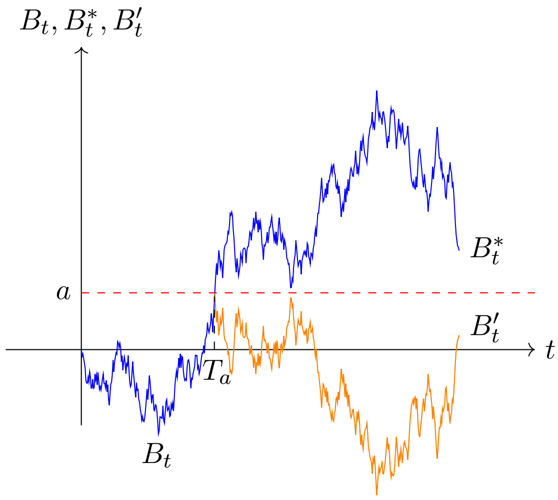


Slika 5. Krepka lastnost Markova.

3.3 Princip zrcaljenja

Definiramo čas ustavljanja $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$ (glej sliko 3, lahko bi izbrali poljuben čas ustavljanja za katerega velja $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$) in v tej vrednosti glede na premico $y = a$ zrcalimo trajektorijo Brownovega gibanja (glej sliko 6). Krepka lastnost Markova nam pove, da je $B^*_t = B_{T_a+t} - B_{T_a}$ Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_{T_a}$. Vemo tudi, da je $(-B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Naprej od časa T_a lahko Brownovo gibanje "podaljšamo" s katerimkoli neodvisnim Brownovim gibanjem (neodvisnim od $\mathcal{F}_{T_a}$). Označimo to tretje Brownovo gibanje z B'_t. Naj bo $x < a$ realno število. Izračunati želimo

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t}\{B_t\} \geq a,\ B_t \leq x\right).$$



Slika 6. Primer zrcaljenja Brownovega gibanja.

Ta verjetnost je enaka

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t}\{B_t'\} \geq a,\ B_t' \leq x\right),$$

ampak ta verjetnost pa je enaka (glej sliko 6)

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t}\{B_t\} \geq a,\ B_t \geq 2a - x\right).$$

Če velja $B_t \geq 2a - x$, velja tudi $\max_{0\leq s\leq t}\{B_t\} \geq a$. Torej je

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t}\{B_t\} \geq a,\ B_t \leq x\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(B_t \geq 2a - x\right) =$$

$$1 - \mathit{\Phi}\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right),$$

kjer je $\mathit{\Phi}$ porazdelitvena funkcija normalne porazdelitve. Če označimo $Y_t = \max_{0\leq s\leq t}\{B_t\}$, potem je

$$\mathbb{P}\left(Y_t \geq a,\ B_t \leq x\right) = 1 - \mathit{\Phi}\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right).$$

Našli smo porazdelitev vektorja (Y_t, B_t). Upoštevamo, da je

$$\mathbb{P}\left(Y_t \geq a,\ B_t \leq x\right) = \mathbb{P}\left(Y_t \geq a\right) - \mathbb{P}\left(Y_t \geq a,\ B_t > x\right)$$

in računamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial a \partial x}\left(1 - \mathit{\Phi}\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right)\right) &= -\frac{\partial}{\partial a}\mathit{\Phi}'\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{\sqrt{t}} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(2a-x)^2}{2t}\right]\frac{1}{\sqrt{t}} = \\ &= \frac{2(2a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left[-\frac{(2a-x)^2}{2t}\right]\end{aligned}$$

Če integriramo po x do na $(-\infty, a]$ dobimo gostoto Y_t

$$\int_{-\infty}^{a} f_{Y_t,B_t}(a,x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left[-\frac{a^2}{2t}\right],$$

kar pa pomeni, da ima Y_t enako porazdelitev kot $|B_t|$.

Ker za dogodek $\{T_a \leq t\}$ velja $\{T_a \leq t\} = \{Y_t \geq a\}$ sledi

$$\mathbb{P}(T_a \leq t) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right).$$

Po odvajanju po t dobimo

$$f_{T_a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left[-\frac{a^2}{2t}\right]$$

3.4 Neodvedljivost

Za zaključek pokažimo še idejo dokaza, da je trajektorija Brownovega gibanja nedovedjiva funkcija $t \mapsto B_t$ za vsak $t \in [0, \infty)$. V celotnem dokazu (glej [1]) uporabimo naslednji rezultat.

Lema 5. *Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in naj bo $a > 0$ realno število. Potem je slučajni proces $(X_t)_{t\geq 0}$ definiran s predpisom $X_t = \frac{1}{a}B_{a^2t}$ tudi Brownovo gibanje.*

Dokaz. Zveznost trajektorij, neodivsnost in stacionarnost prirastkov so lastnosti, ki se ohranjajo pri tovrstni transformaciji. Če pogledamo razliko $X_t - X_s$ za $0 < s < t$, dobimo

$$\begin{aligned} X_t - X_s &= \tfrac{1}{a}B_{a^2t} - \tfrac{1}{a}B_{a^2s} \\ &= \tfrac{1}{a}\left(B_{a^2t} - B_{a^2s}\right) \\ &\sim N\left(0, \tfrac{1}{a^2}(a^2t - a^2s)\right) \\ &\sim N(0, t-s). \end{aligned}$$

□

Izrek 6. *Trajektorija Brownovega gibanja je neodvedljiva funkcija $\mathbb{P}$-skoraj gotovo.*

Dokaz. Kot omenjeno, celoten dokaz najdemo v [1]. Heuristično pojasnilo zakaj odvod ne obstaja je naslednje. Recimo, da bi poskušali izračunati odvod kot

$$\lim_{h\to 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h}.$$

Vemo pa, da velja $B_{t+h} - B_t \sim N(0, h)$, torej

$$\frac{B_{t+h} - B_t}{h} \sim N(0, \tfrac{1}{h}).$$

Ta slučajna spremenljivka ne konvergira v nobenem smislu ko gre $h \to 0$. □

LITERATURA

[1] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples, Fifth Edition*, eKnjiga, Cambridge University Press, 2019.
[2] Tukej bo vir do dokaza za dokaz pomoznih trditev za krepko lastnost markova
[3] M. Perman, *Zapiski predavanj finančne matematike 2* 2021
[4] S. Karlin in H. M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, 1975.