BROWNOVO GIBANJE

ANEJ ROZMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku motiviramo idejo Brownovega gibanja in podamo njegovo matematično definicijo. Predstavimo nekaj osnovnih lastnosti in rezultatov, kot simetričnost Brownovega gibanja, čas ustavljanja, krepka lastnost Markova, princip zracljenja

BROWNIAN MOTION

In this paper we motivate the idea of Brownian motion and give its mathematical definition. We present some basic properties and results, such as symmetry of Brownian motion, stopping time, strong Markov property, reflection principle.

1. Uvod

Določeni posebni primeri slučajnih procesov so skozi zgodovino doživeli obsežen matematični razvoj. Brownovo gibanje je najbolj znano in zgodovinsko prvo, ki je bilo temeljito raziskano. Kot fizičen pojav je bilo Brownovo gibanje odkrito s strani angleškega botanika Roberta Browna leta 1827. Matematični opis tega pojava je bil prvič izpeljan iz fizikalnih zakonov s strani Einsteina leta 1905. Od takrat je področje doseglo znaten napredek. Fizikalno teorijo so nadalje izpopolnili Fokker, Planck, Ornstein in drugi. Matematična teorija je počasneje napredovala, ker je natančen matematični opis modela postavljal težave, medtem ko so bila nekatera vprašanja, na katera so fiziki iskali odgovore na podlagi tega modela, precej preprosta in intuitivna. Na veliko vprašanj je odgovoril Bachelier v njegovi disertaciji leta 1900. Prvo jasno matematično formulacijo teorije pa je Wiener podal v svoji disertaciji leta 1918 in kasnejših člankih, zato je alternativno poimenovnanje Brownovega gibanja Wienerjev proces. Je primer slučajnega procesa, ki se danes skupaj z njegovimi posplošitvami pojavlja na številnih področjih kot so biologija, finance, fizika, itd. V članku se bomo osredotočili na matematično izpeljavo osnovnega Brownovega gibanja na $\mathbb{R}$ ter nekaj lastnosti in ne na uporabo v že prej omenjenih področjih. Prvo pa si poglejmo nekaj osnovnih defnicij, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

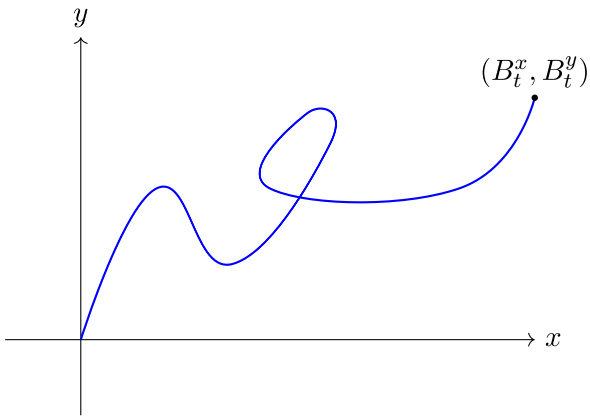
Definicija 1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (S, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T, je družina slučajnih spremenljivk $X_t : \Omega \to S$, ki so $(\mathcal{F}, \Sigma)$-merljive za vsak $t \in T$.

Opomba 1. Za naše namene bomo privzeli, da je $T = [0, \infty)$, $(\mathcal{F}, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, kjer $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ predstavlja Borelovo σ-algebro na $\mathbb{R}$.

Definicija 2. Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto X_t(\omega)$ *realizacija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$.

2. Motivacija in definicija Brownovega gibanja

Kot Robert Brown si za motivacijo oglejmo naključno gibanje delca v $\mathbb{R}^2$. Zaradi preprostosti bomo zahtevali, da se gibanje začne v koordinatnem izhodišču. Želeli bi tudi, da so poti delca zvezne, saj nam nenadni skoki nebi pomagali pri opisovanju pojava.



Slika 1. Gibanje delca v xy-ravnini.

Označimo z (B_t^x, B_t^y) položaj delca v času $t \geq 0$. Ker se delec v vse smeri giblje z enako verjetnostjo, bo pričakovana vrednost pozicije enaka $\mathbb{E}\left[(B_t^x, B_t^y)\right] = (0, 0)$. Smiselno bi bilo privzeti, da so premiki delca med seboj neodvisni, torej, da gibanje med časom 0 in t_1 (razen tega kje gibanje začnemo) ne vpliva na gibanje med časom t_1 in t_2 in tako naprej.

Definicija 3. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ $X_t - X_s$ definiramo *prirastek procesa* na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t\geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

V našem primeru to zapišemo, da so vektorji $(B_{t_2}^x, B_{t_2}^y) - (B_{t_1}^x, B_{t_1}^y),\ \ldots, (B_{t_n}^x, B_{t_n}^y) - (B_{t_{n-1}}^x, B_{t_{n-1}}^y)$ med seboj neodvisni. Prav tako bi bilo smiselno privzeti, da če si izberemo nek časovni interval $[s, t]$, je porazdelitev prirastka $X_t - X_s$ odvisna le od dolžine intervala in ne od tega, kje ga začnemo.

Definicija 4. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

V našem primeru to zapišemo, da imata vektorja $(B_{t_2}^x, B_{t_2}^y) - (B_{t_1}^x, B_{t_1}^y)$ in $(B_{t_2-t_1}^x, B_{t_2-t_1}^y)$ enako porazdelitev. Če to velja vidimo, da je (B_t^x, B_t^y) vsota neodvisnih prirastkov. Po centralnem limitnem izreku bi torej pričakovali, da je vektor (B_t^x, B_t^y) normalno porazdeljen. Spomnimo se, da je slučajna spremenljivka X normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo μ in varianco σ^2, če je njena gostota porazdelitve enaka

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Zaradi neodvisnosti prirastkov bo tudi $\mathrm{Var}(B_t^x) = \mathrm{Var}(B_t^y) = t$, torej odvisna le od tega koliko časa opazujemo delec. Ta razmislek nas privede do definicije Brownovega gibanja na $\mathbb{R}$, kjer bi ga radi matematično karakterizirali.

Definicija 5. Slučajnemu procesu $(B_t)_{t \geq 0}$ definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\mathbb{R}$ pravimo *Brownovo gibanje*, če zadošča naslednjim pogojem:

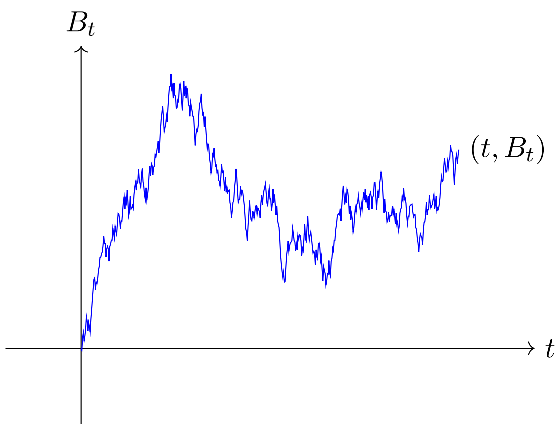
1. $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$,
2. trajektorije $(B_t)_{t \geq 0}$ so $\mathbb{P}$-skoraj gotovo zvezne,
3. proces $(B_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne prirastke t.j. za $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ so slučajne spremenljivke $B_{t_2} - B_{t_1},\ B_{t_3} - B_{t_2},\ \ldots,\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ med seboj neodvisne.
4. Za $0 \leq s < t < \infty$ je $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.

Prvo vprašanje, ki se nam porodi, je, ali sploj obstajta verjetnostni prostor in slučajni proces, ki zadoščata zgornjim zahtevam. Odgovor je pritrdilen in ga podamo v obliki izreka.

Izrek 1. *Obstaja verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in izbira slučajnih spremenljivk $B_t : \Omega \to \mathbb{R}$ za $t \geq 0$, ki ustrezajo definiciji Brownovega gibanja.*

Dokaz. Dokaz izreka je precej tehničen in nezanimiv za namen članka, zato ga bomo izpustili. Najtežji del je pokazati, da so realizacije zvezne. Lahko ga najdemo v [1]. $\square$

Od sedaj naprej bomo vedno z $(B_t)_{t \geq 0}$ označili Brownovo gibanje, ki bo vedno definirano na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in se nanj (razen po potrebi) ne bomo sklicevali. Priročno bo v mislih držati sliko realizacije 2.



Slika 2. Primer realizacije eno-dimenzionalnega Brownovega gibanja do časa t.

3. Lastnosti

3.1 Osnovne lastnosti

Poglejmo si nekaj osnovnih lastnosti Brownovega gibanja, ki nam bodo prišle prav v nadaljevanju članka.

Trditev 2. *Naj bo $(B_t)_{t \geq 0}$ Brownovo gibanje in $0 \leq s < t < \infty$. Potem velja:*

1. *$Cov(B_t, B_s) = s$.*
2. *Brownovo gibanje je simetrično, torej $(-B_t)_{t \geq 0}$ je tudi Brownovo gibanje.*

Dokaz. 1. Ker je $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, sledi

$$Cov(B_t, B_s) = Cov(B_s + B_t - B_s, B_s) = Cov(B_s, B_s) + Cov(B_t - B_s, B_s) = s + 0 = s.$$

2. nic se

□

Za nadaljevanje bomo potrebovali naslednjo trditev, katere dokaz za naše namene ni relevanten, ampak ga lahko najdemo v [1].

Trditev 3. *Naj bosta X, Y slučajni spremenljivki definirani na skupnem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Če velja $\mathbb{E}[f(X)g(X)] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{E}[g(X)]$ za vsak par omejenih zveznih funkcij f, g, potem sta X in Y neodvisni.*

Definicija 6. Naj bo X slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ pod-σ-algebra. X je *neodvisna* od $\mathcal{G}$, če za vsako omejeno zvezno funkcijo f velja

$$\mathbb{E}[f(X)1_G] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{P}(G)$$

za vsak $G \in \mathcal{G}$.

Definicija 7. Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. S $\mathcal{F}_t$ označimo σ-algebro generirano z$\sigma(B_s \mid 0 \leq s \leq t)$. Družini $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ pravimo *Brownova filtracija.*

Izrek 4. *Za vsak fiksen $t \geq 0$ je proces $\{B_{t+s} - B_t \mid s \geq 0\}$ Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_t$.*

Dokaz. Naj bo $0 \leq t < \infty$ in $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \infty$. Potem je $B_{t+s_1} - B_t$, $B_{t+s_2} - B_{t+s_1}$, $\ldots$, $B_{t+s_n} - B_{t+s_{n-1}}$ neodvisen od $\mathcal{F}_t$, saj je neodvisen od B_t in je $\mathcal{F}_t$ generiran z B_t. Torej je $\{B_{t+s} - B_t \mid s \geq 0\}$ neodvisen od $\mathcal{F}_t$. □

Definicija 8. Naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija. Slučajna spremenljivka $T : \Omega \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je *čas ustavljanja* glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če je za vsak $t \in \mathbb{R}$ dogodek $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Torej če je T čas ustavljanja in poznamo pot Brownovega gibanja do t, potem vemo, ali je $T \leq t$ ali ne. Poglejmo si primer časa ustavljanja in primer slučajne spremenljivke, ki ni čas ustavljanja.

Primer 1. Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in $a \in \mathbb{R}$. Potem je

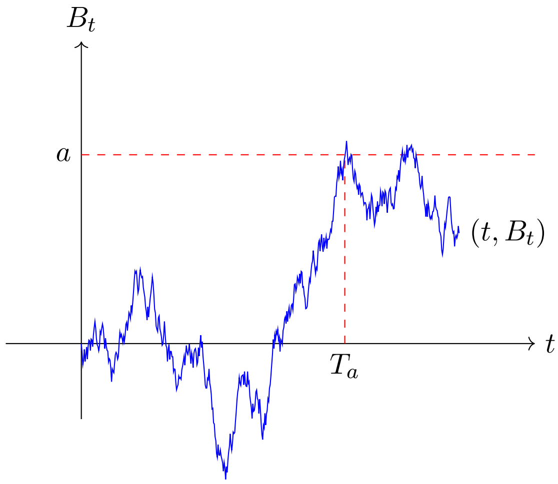
$$T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$$

čas ustavljanja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

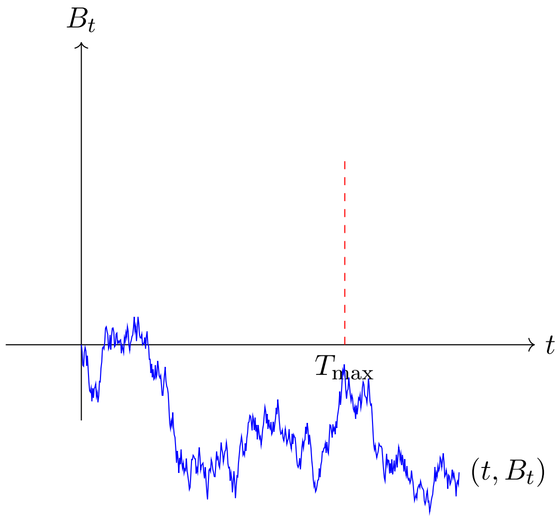
Primer 2. Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in $a < b \in \mathbb{R}$. Potem je

$$T_{\max} = \sup\{t \in [a, b] \mid B_t \geq B_s, s \in [a, b]\}$$

primer slučajne spremenljivke, ki ni čas ustavljanja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.



Slika 3. Primer realizacije T_a.



Slika 4. Primer realizacije $T_{\max}$.

3.2 Krepka lastnost Markova

Pokažimo, da je za Brownovo gibanje velja krepka lastnost Markova. Torej, če v nekem trenutku ustavimo proces in ga gledamo od te točke dalje, bo neodvisen od dotedanjega gibanja ter bo ponovno Brownovo gibanje.

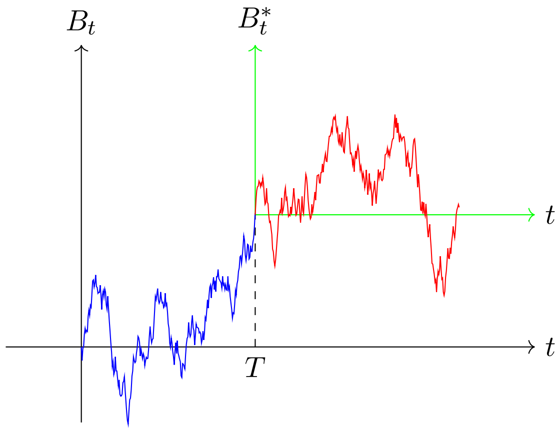
Izrek 5. *Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in T čas ustavljanja, za katerega velja velja $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Definiramo proces $B^*_s = B_{T+s} - B_T$ za $s \geq 0$. Potem je $(B^*_s)_{s\geq 0}$ Brownovo gibanje, neodvisno od $\mathcal{F}_T$.*

Dokaz. Predpostavino, da T zavzema vrednosti v $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

□

Izrek ponazorimo s sliko 5. Če Brownovo gibanje slučajno ustavimo in ga "zlepimo" z dugim Brownovim gibanjem, bo to še vedno standardno Brownovo gibanje.

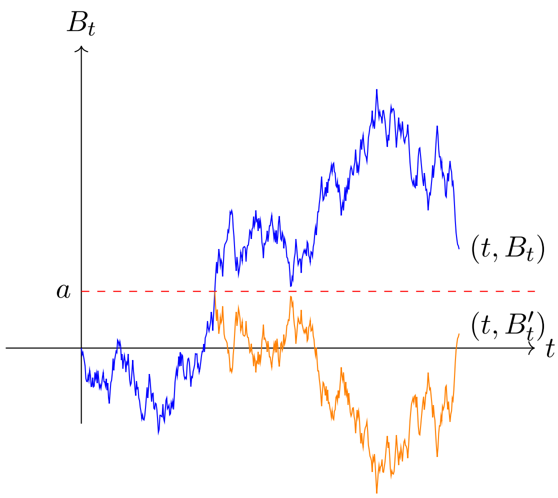
To je ravno ideja za naslednjo lastnostjo.



Slika 5. Krepka lastnost Markova.

3.3 Princip zrcaljenja

Tokrat definiramo čas ustavljanja $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$ (glej sliko 3, lahko bi izbrali poljuben čas ustaljanja) in v tej vrednosti glede na premico $y = a$ zrcalimo Brownovo gibanje. Dobimo nov slučajni proces $(B_t^*)_{t\geq 0}$, za katerega trdimo, da je Brownovo gibanje.



Slika 6. Primer zrcaljenja Brownovega gibanja.

LITERATURA

[1] S. Roman, *Introduction to mathematics of finance : from risk management to options pricing*, Science **269** (2004), 238–275.

[2] W. Ketterle, D.M. Kurn, D.S. Durfee, N.J. van Druten, M.R. Andrews, M.-O. Mewes in K.B. Davis, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Physics Review Letters **75** (1995), 3969–3973.