BROWNOVO GIBANJE

ANEJ ROZMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku motiviramo idejo Brownovega gibanja in podamo njegovo matematično definicijo. Predstavimo nekaj osnovnih lastnosti in rezultatov, kot simetričnost Brownovega gibanja,

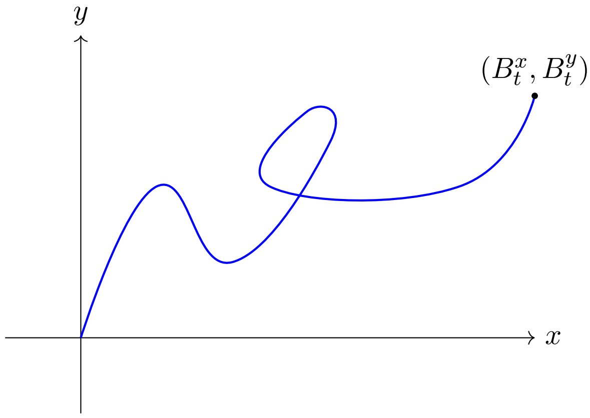
BROWNIAN MOTION

1. Uvod

Določeni posebni primeri slučajnih procesov so skozi zgodovino doživeli obsežen matematični razvoj. Brownovo gibanje je najbolj znano in zgodovinsko prvo, ki je bilo temeljito raziskano. Kot fizičen pojav je bilo Brownovo gibanje odkrito s strani angleškega botanika Roberta Browna leta 1827. Matematični opis tega pojava je bil prvič izpeljan iz fizikalnih zakonov s strani Einsteina leta 1905. Od takrat je področje doseglo znaten napredek. Fizikalno teorijo so nadalje izpopolnili Fokker, Planck, Ornstein in drugi. Matematična teorija je počasneje napredovala, ker je natančen matematični opis modela postavljal težave, medtem ko so bila nekatera vprašanja, na katera so fiziki iskali odgovore na podlagi tega modela, precej preprosta in intuitivna. Veliko odgovorov je bilo pridobljenih heuristično s strani Bachelierja v njegovi disertaciji leta 1900. Prvo jasno matematično formulacijo teorije pa je Wiener podal v svoji disertaciji leta 1918 in kasnejših člankih, zato je alternativno ime za Brownovo gibanje Wienerjev proces. Brownovo gibanje je primer kontinuiranega časa, kontinuiranega prostora stanj Markovskega procesa, ki se danes skupaj z njegovimi posplošitvami pojavlja na številnih področjih kot so biologija, finance in kot že omenjena, fizika. V članku se bomo osredotočili na matematično izpeljavo osnovnega Brownovega gibanja na $\mathbb{R}$ ter njegove lastnosti in ne na uporabo v zgoraj omenjenih področjih.

2. Motivacija in definicija Brownovega gibanja

Kot Robert Brown si za motivacijo oglejmo naključno gibanje delca v $\mathbb{R}^2$. Smiselno bi bilo, da zahtevamo, da se gibanje začne v koordinatnem izhodišču. Želeli bi tudi, da so poti oziroma trajektorije delca zvezne, saj nam nenadni skoki nebi pomagali pri opisovanju pojava.



Slika 1. Primer trajektorije Brownovega gibanja v xy-ravnini.

Označimo z (B_t^x, B_t^y) položaj delca v času $t \geq 0$. Ker se delec v vse smeri giblje z enako verjetnostjo, bo pričakovana vrednost pozicije enaka $\mathbb{E}\left[(B_t^x, B_t^y)\right] = (0, 0)$. Smiselno bi bilo privzeti, da so premiki delca med časi $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ med seboj neodvisni, torej, da gibanje med časom 0 in t_1 (razen tega kje gibanje začnemo) ne vpliva na gibanje med časom t_1 in t_2 in tako naprej. Matematično to zapišemo, da so vektorji $(B_{t_2}^x, B_{t_2}^y) - (B_{t_1}^x, B_{t_1}^y), \ \ldots, (B_{t_n}^x, B_{t_n}^y) - (B_{t_{n-1}}^x, B_{t_{n-1}}^y)$ med seboj neodvisni. Če to velja vidimo, da je (B_t^x, B_t^y) vsota neodvisnih prirastkov. Po centralnem limitnem izreku bi torej pričakovali, da je vektor (B_t^x, B_t^y) normalno porazdeljen. Spomnimo se, da je slučajna spremenljivka X normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo μ in varianco σ^2, če je njena gostota porazdelitve enaka

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Zaradi neodvisnosti prirastkov bo tudi $\mathrm{Var}(B_t^x) = \mathrm{Var}(B_t^y) = t$, torej odvisna le od tega koliko časa opazujemo delec. Te opazke nas privedejo do definicije Brownovega gibanja na $\mathbb{R}$, kjer bi jih radi matematično karakterizirali.

Definicija 1. Slučajnemu procesu $(B_t)_{t\geq 0}$ definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\mathbb{R}$ pravimo *Brownovo gibanje*, če zadošča naslednjim pogojem:

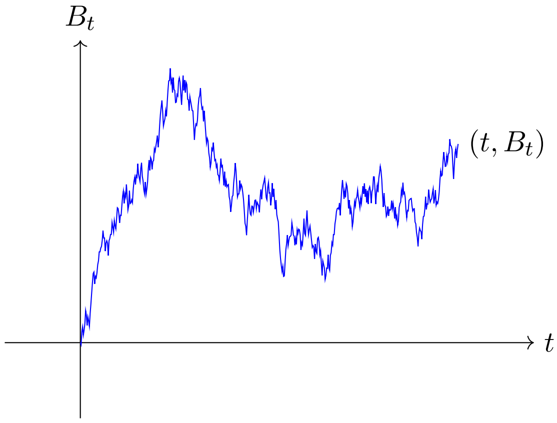
1. $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$,
2. trajektorije $(B_t)_{t\geq 0}$ so $\mathbb{P}$-skoraj gotovo zvezne,
3. proces $(B_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne prirastke t.j. za $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ so slučajne spremenljivke $B_{t_2} - B_{t_1}, \ B_{t_3} - B_{t_2}, \ \ldots, \ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ med seboj neodvisne.
4. Za $0 \leq s < t < \infty$ je $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

Prvo vprašanje, ki se nam porodi, je, ali sploj obstajta verjetnostni prostor in slučajni proces, ki zadoščata zgornjim zahtevam. Odgovor je pritrdilen in ga podamo v obliki izreka.

Izrek 1. *Obstaja verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in izbira slučajnih spremenljivk $B_t : \Omega \to \mathbb{R}$ za $t \geq 0$, ki ustrezajo definiciji Brownovega gibanja.*

Dokaz. Dokaz izreka je precej tehničen in nezanimiv za namen članka, zato ga bomo izpustili. Lahko ga najdemo v [1]. □

Od sedaj naprej bomo privzeli, da je $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje vedno definirano na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in se nanj (razen po potrebi) ne bomo sklicevali. Priročno bo v mislih držati sliko 2.



Slika 2. Primer trajektorije eno-dimenzionalnega Brownovega gibanja.

3. Lastnosti

3.1 Osnovne lastnosti

Poglejmo si nekaj osnovnih lastnosti Brownovega gibanja, ki nam bodo prišle prav v nadaljevanju članka.

Trditev 2. *Naj bo* $(B_t)_{t\geq 0}$ *Brownovo gibanje in* $0 \leq s < t < \infty$. *Potem velja*

$$Cov(B_t, B_s) = s$$

Dokaz. Ker je $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, sledi

$$Cov(B_t, B_s) = Cov(B_s + B_t - B_s, B_s) = Cov(B_s, B_s) + Cov(B_t - B_s, B_s) = s + 0 = s.$$

□

Za nadaljevanje bomo potrebovali naslednjo trditev iz teorije mere.

Trditev 3. *Če velja* $\mathbb{E}[f(X)g(X)] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{E}[g(X)]$. *za vsak par omejenih zveznih funkcij* f, g, *potem sta* X *in* Y *neodvisni.*

Definicija 2. Naj bo X slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ pod-σ-algebra. X je *neodvisna* od $\mathcal{G}$, če za vsako omejeno zvezno funkcijo f velja

$$\mathbb{E}[f(X)1_G] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{P}(G)$$

za vsak $G \in \mathcal{G}$.

Definicija 3. Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. S $\mathcal{F}_t$ označimo σ-algebro generirano z$\sigma(B_s \mid 0 \leq s \leq t)$. Družini $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ pravimo *Brownova filtracija.*

Izrek 4. *Za vsak fiksen $t \geq 0$ je proces $\{B_{t+s} - B_t \mid s \geq 0\}$ Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_t$.*

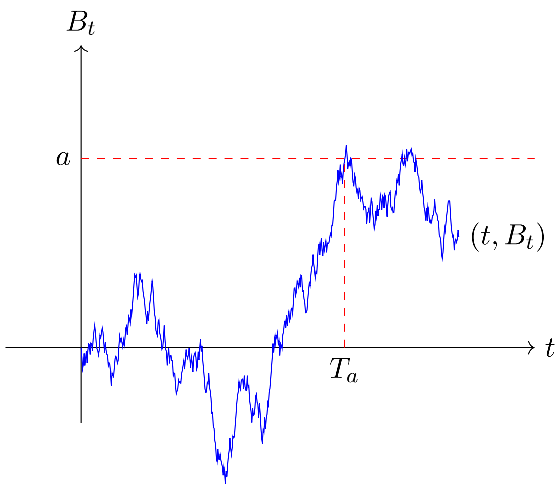
Dokaz. Naj bo $0 \leq t < \infty$ in $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \infty$. Potem je $B_{t+s_1} - B_t$, $B_{t+s_2} - B_{t+s_1}$, $\ldots$, $B_{t+s_n} - B_{t+s_{n-1}}$ neodvisen od $\mathcal{F}_t$, saj je neodvisen od B_t in je $\mathcal{F}_t$ generiran z B_t. Torej je $\{B_{t+s} - B_t \mid s \geq 0\}$ neodvisen od $\mathcal{F}_t$. □

Definicija 4. Naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija. Slučajna spremenljivka $T : \Omega \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je *čas ustavljanja* glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če je za vsak $t \in \mathbb{R}$ dogodek $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Primer 1. Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in $a \in \mathbb{R}$. Potem je

$$T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$$

čas ustavljanja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.



Slika 3. Primer realizacije T_a.

Trditev 5. *Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Potem velja, da je simetrično, torej $-(B_t)_{t\geq 0}$ je tudi Brownovo gibanje.*

3.2 Krepka lastnost Markova

Pokažimo, da je za Brownovo gibanje velja krepka lastnost Markova. Torej, če v nekem trenutku ustavimo proces in ga gledamo od te točke dalje, bo neodvisen od dotedanjega gibanja ter bo ponovno Brownovo gibanje.

Izrek 6. *Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in T čas ustavljanja, da velja $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Definiramo proces $B^*_s = B_{T+s} - B_T$ za $s \geq 0$. Potem je $(B^*_s)_{s\geq 0}$ Brownovo gibanje, neodvisno od $\mathcal{F}_T$.*

Dokaz. trivial duh □

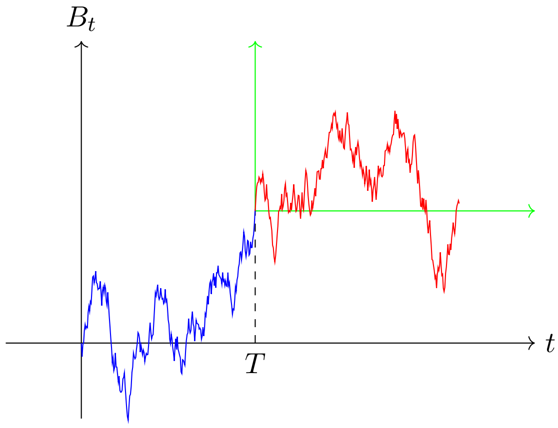
Če izrek ponazorimo s sliko.

3.3 Princip zrcaljenja

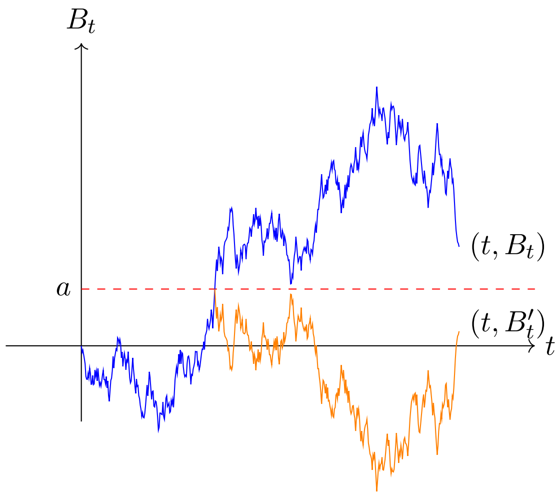
LITERATURA

[1] S. Roman, *Introduction to mathematics of finance : from risk management to options pricing*, Science **269** (2004), 238–275.

[2] W. Ketterle, D.M. Kurn, D.S. Durfee, N.J. van Druten, M.R. Andrews, M.-O. Mewes in K.B. Davis, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Physics Review Letters **75** (1995), 3969–3973.



Slika 4. Krepka lastnost Markova.



Slika 5. Primer zrcaljenja Brownovega gibanja.