# BROWNOVO GIBANJE

ANEJ ROZMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku motiviramo idejo Brownovega gibanja in podamo njegovo matematično definicijo. Definiramo osnovne pojme kot so slučajni proces, trajektorija, prirastek, filtracija in čas ustavljanja. Predstavimo in dokažemo nekaj osnovnih lastnosti ter rezultatov, kot je simetričnost Brownovega gibanja, šibka lastnost Markova, krepka lastnost Markova, princip zracljenja in presenetljiv rezultat, da je trajektorija Brownovega gibanja neodvedljiva funkcija.

## BROWNIAN MOTION

In this paper we motivate the idea of Brownian motion and give its mathematical definition. We define basic concepts such as a stochastic process, sample path, increment, filtration and stopping time. We present and prove some basic properties and results, such as the symmetry of Brownian motion, weak Markov property, strong Markov property, reflection principle and the surprising result that the sample path of Brownian motion is nowhere differentiable.

## 1. Uvod

Določeni posebni primeri slučajnih procesov so skozi zgodovino doživeli obsežen matematični razvoj. Brownovo gibanje je najbolj znano in zgodovinsko prvo, ki je bilo temeljito raziskano. Kot fizičen pojav ga je prvi opisal angleški botanik Robert Brown leta 1827. Matematični opis Brownovega gibanja je prvič izpeljal iz fizikalnih zakonov Albert Einstein leta 1905. Od takrat je celotna teorija slučajnih procesov doživela znaten napredek. Fizikalno teorijo Brownovega gibanja so nadalje izpopolnili Fokker, Planck, Ornstein in drugi. Matematična teorija je počasneje napredovala, ker je natančen matematični opis modela postavljal težave, medtem ko so bila nekatera vprašanja, na katera so fiziki iskali odgovore na podlagi tega modela, precej preprosta in intuitivna. Na veliko vprašanj je odgovoril Bachelier v njegovi disertaciji leta 1900. Prvo jasno matematično formulacijo teorije pa je podal Wiener v svoji disertaciji leta 1918 in kasnejših člankih, zato je alternativno poimenovnanje Brownovega gibanja Wienerjev proces. Je primer slučajnega procesa, ki se danes skupaj z njegovimi posplošitvami pojavlja na številnih področjih kot so biologija, finance, fizika, itd. V članku se bomo osredotočili na matematično izpeljavo osnovnega Brownovega gibanja na $\mathbb{R}$ ter nekaj lastnosti in ne na uporabo na že prej omenjenih področjih. Prvo pa si poglejmo nekaj osnovnih definicij, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

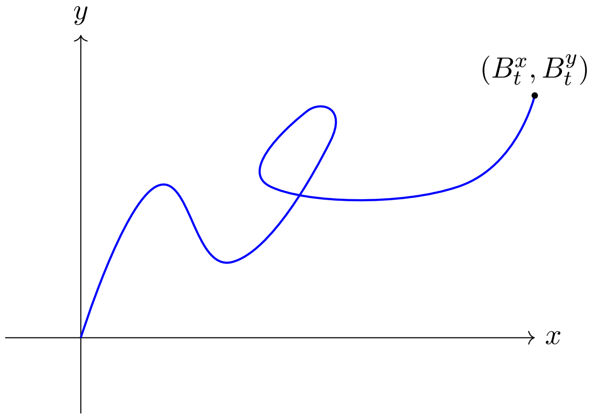
**Definicija 1.** Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter $(S, \Sigma)$ merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s $T$, je družina slučajnih spremenljivk $X_t : \Omega \to S$ za $t \in T$.

**Opomba 1.** Za naše namene bomo privzeli, da je $T = [0, \infty)$, $(\mathcal{F}, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, kjer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ predstavlja Borelovo $\sigma$-algebro na $\mathbb{R}$.

**Definicija 2.** Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$.

## 2. Motivacija in definicija Brownovega gibanja

V duhu fizikalnih začetkov teorije Brownovega gibanja si za motivacijo oglejmo naključno gibanje delca v $\mathbb{R}^2$. Zaradi preprostosti bomo zahtevali, da se gibanje začne v koordinatnem izhodišču. Želeli bi tudi, da so poti delca zvezne, saj nam nenadni skoki ne bi pomagali pri opisovanju pojava.




**Slika 1.** Gibanje delca v xy-ravnini.

Označimo z $(B_t^x, B_t^y)$ položaj delca v času $t \geq 0$. Ker se delec v vse smeri giblje z enako verjetnostjo, bo pričakovana vrednost pozicije enaka $\mathbb{E}\left[(B_t^x, B_t^y)\right] = (0,0)$. Smiselno bi bilo privzeti, da so premiki delca med seboj neodvisni, torej, da gibanje med časom 0 in $t_1$ (razen pozicije, iz katere gibanje nadaljujemo) ne vpliva na gibanje med časom $t_1$ in $t_2$ in tako naprej.

**Definicija 3.** Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s,t]$. Proces $(X_t)_{t\geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ prirastki (slučajne spremenljivke)

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

V našem primeru so slučajni vektorji $(B_{t_2}^x, B_{t_2}^y) - (B_{t_1}^x, B_{t_1}^y),\ \ldots, (B_{t_n}^x, B_{t_n}^y) - (B_{t_{n-1}}^x, B_{t_{n-1}}^y)$ med seboj neodvisni. Prav tako bi bilo smiselno privzeti, da če si izberemo nek časovni interval $[s,t]$, je porazdelitev prirastka odvisna le od dolžine tega časovnega intervala in ne od tega, kje gibanje gledamo.

**Definicija 4.** Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Če to velja vidimo, da je $(B_t^x, B_t^y)$ vsota neodvisnih enako porazdeljenih prirastkov. Po centralnem limitnem izreku bi torej pričakovali, da je vektor $(B_t^x, B_t^y)$ normalno porazdeljen. Spomnimo se, da je slučajna spremenljivka $X$ normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo $\mu$ in varianco $\sigma^2$, če je njena gostota porazdelitve enaka

$$f_X(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Zaradi neodvisnosti prirastkov bo tudi $\mathrm{Var}(B_t^x) = \mathrm{Var}(B_t^y) = ct$ za nek $c > 0$, torej odvisna le od tega koliko časa opazujemo delec. Ta razmislek nas privede do definicije Brownovega gibanja na $\mathbb{R}$, kjer bi ga radi matematično karakterizirali.

**Definicija 5.** Slučajnemu procesu $(B_t)_{t\geq 0}$, definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\mathbb{R}$ pravimo *Brownovo gibanje*, če zadošča naslednjim pogojem:

1. $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$,
2. trajektorije $(B_t)_{t\geq 0}$ $(t \mapsto B_t)$ so $\mathbb{P}$-skoraj gotovo zvezne,
3. proces $(B_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne prirastke t.j. za $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ so slučajne spremenljivke $B_{t_2} - B_{t_1},\ B_{t_3} - B_{t_2},\ \ldots,\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ med seboj neodvisne.
4. Za $0 \leq s < t < \infty$ je $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

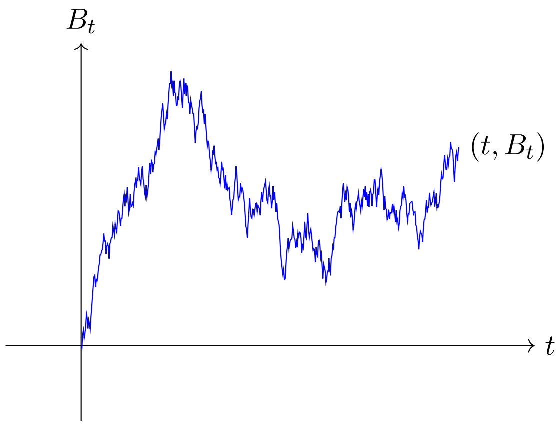
**Opomba 2.** Hitro lahko vidimo, da po četrti lastnosti sledi, da so prirastki procesa stacionarni.

Vprašanje, ki se nam porodi je, ali sploh obstaja verjetnostni prostor in slučajni proces, ki zadoščata zgornjim zahtevam. Odgovor je pritrdilen in ga podamo v obliki izreka.

**Izrek 1.** *Obstaja verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in izbira slučajnih spremenljivk $B_t : \Omega \to \mathbb{R}$ za $t \geq 0$, ki ustrezajo definiciji Brownovega gibanja.*

*Dokaz.* Dokaz izreka je precej tehničen in nezanimiv za namen članka, zato ga bomo izpustili. Najtežji del je pokazati, da so trajektorije zvezne. Lahko ga najdemo v [1]. $\square$

Od sedaj naprej bomo vedno z $(B_t)_{t\geq 0}$ označili Brownovo gibanje, ki bo vedno definirano na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in se nanj (razen po potrebi) ne bomo sklicevali. Priročno bo v mislih držati sliko primera trajektorije 2.




**Slika 2.** Primer trajektorije eno-dimenzionalnega Brownovega gibanja do časa $t$.

## 3. Lastnosti

### 3.1 Osnovne lastnosti in časi ustavljanja

Poglejmo si nekaj osnovnih lastnosti Brownovega gibanja, ki nam bodo prišle prav pri dokazovanju pomembnejših rezultatov v nadaljevanju.

**Trditev 2.** *Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in $0 \leq s < t < \infty$. Potem velja:*

1. *$Cov(B_t, B_s) = s$.*
2. *Brownovo gibanje je "simetrično", torej $(-B_t)_{t\geq 0}$ je tudi Brownovo gibanje.*

*Dokaz.* 1. Ker velja $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, sledi

$$\begin{aligned} Cov(B_t, B_s) &= Cov(B_s + B_t - B_s, B_s) \\ &= Cov(B_s, B_s) + Cov(\underbrace{B_t - B_s, B_s}_{neodivsni}) \\ &= s + 0 = s. \end{aligned}$$

2. Zveznost trajektorij, neodivsnost in stacionarnost prirastkov so lastnosti, ki se ohranjajo pri linearnih transformacijah. Če pogledamo razliko $(-B_t) - (-B_s)$ za $0 \leq s < t$, dobimo

$$\begin{aligned} (-B_t) - (-B_s) &= -(B_t - B_s) \\ &\sim -N(0, t-s) \\ &\sim N(0, t-s). \end{aligned}$$

□

**Definicija 6.** Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. S $\mathcal{F}_t$ označimo $\sigma$-algebro generirano s $\sigma(B_s \mid 0 \leq s \leq t)$. Družini $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ pravimo *Brownova filtracija.*

**Opomba 3.** V splošnem je filtracija $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ družina naraščajočih $\sigma$-algeber, torej $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ za $s \leq t$, ki je lahko končna ali neskončna.

**Izrek 3.** *Naj bo $B_t$ Brownovo gibanje in $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ Brownova filtracija. Za vsak fiksen $t \geq 0$ je proces $\{B_{t+s} - B_t \mid s \geq 0\}$ Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_t$.*

*Dokaz.* Naj bo $t \geq 0$. Zaradi neodvisnosti prirastkov sta slučajni spremenljivki

$$B_{t+s} - B_t \text{ in } B_t$$

neodvisni. Proces očitno žadošča pogojem 1, 2 in 3 iz definicije Brownovega gibanja. Naj bo $t \leq u < s < \infty$ in označimo z $X_s = B_{t+s} - B_t$. Velja

$$\begin{aligned} X_s - X_u &= (B_{t+s} - B_t) + (B_{t+u} - B_t) \\ &= B_{t+s} - B_{t+u} \\ &\sim N(0, s-u), \end{aligned}$$

zaradi stacionarnosti prirastkov. □

**Opomba 4.** Zgornjemu izreku pravimo tudi lastnost Markova. Med drugim iz tega sledi, da je Brownovo gibanje markovski proces.

Vprašanje ki se pojavi je, kaj pa če naključno ustavimo proces. Ali zgornja lastnost še vedno velja?

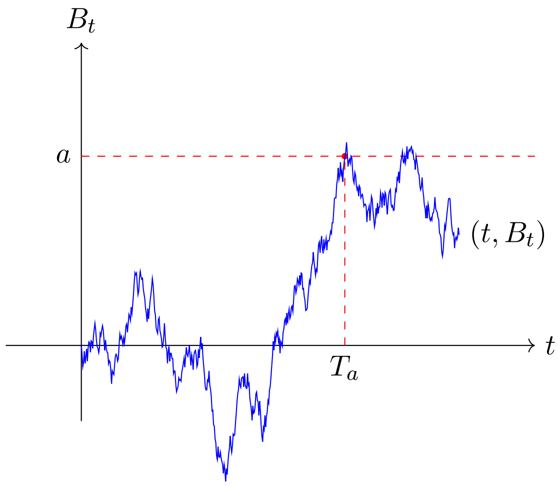
**Definicija 7.** Naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija. Slučajna spremenljivka $T : \Omega \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je *čas ustavljanja* glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če je za vsak $t \in \mathbb{R}$ dogodek $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Torej, če je $T$ čas ustavljanja in poznamo pot Brownovega gibanja do $t$, potem vemo, ali se je $T$ zgodil ali ne. Poglejmo si primer časa ustavljanja in primer slučajne spremenljivke, ki ni čas ustavljanja.

**Primer 1.** Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in $a \in \mathbb{R}$. Potem je

$$T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$$

čas ustavljanja glede na Brownovo filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Še več, velja $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$.



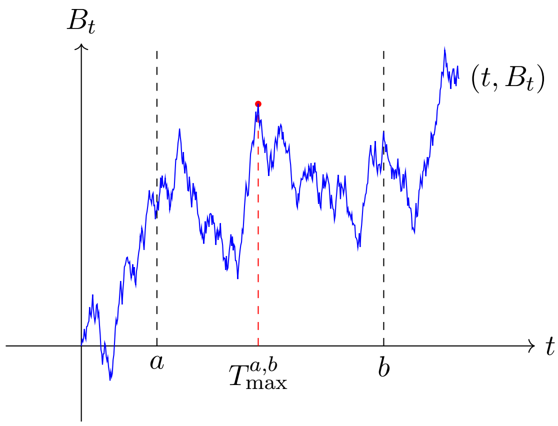

**Slika 3.** Primer realizacije $T_a$.

**Opomba 5.** Ker je $T_a$ definiran za poljuben $a \in \mathbb{R}$, vidimo, da bo bo Brownovo gibanje v nekem času $t \geq 0$ obiskalo poljubno veliko realno število z verjetnostjo 1.

**Primer 2.** Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in $a < b \in \mathbb{R}$. Potem je

$$T_{\max}^{a,b} = \inf\{t \in [a, b] \mid \max\{B_t\}\}$$

primer slučajne spremenljivke, ki ni čas ustavljanja glede na Brownovo filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, saj velja npr. $\{T_{\max}^{a,b} \leq \frac{a+b}{2}\} \notin \mathcal{F}_{\frac{a+b}{2}}$.




**Slika 4.** Primer realizacije $T_{\max}^{a,b}$.

Intuitivna razlaga časa ustavljanja je naslednja. Če proces opazujemo do časa $t$, potem bi radi v $t$ imeli vse informacije, da lahko povemo ali se je $T$ zgodil ali ne (kakšno vrednost je zavzel $T$). V primeru [2] to ne velja, saj moramo vedeti vse kar se je zgodilo do časa $b$, da lahko povemo kje je maksimum.

### 3.2 Krepka lastnost Markova

Pokažimo, da za Brownovo gibanje velja krepka lastnost Markova. Da to pokažemo potrebujemo nekaj definicij in pomožnih rezultatov, ki jih ne bomo dokazovali, saj niso vsebinsko povezani s temo članka.

**Definicija 8.** Naj bo $X$ slučajna spremenljivka defnirana na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ pod-$\sigma$-algebra. $X$ je *neodvisna* od $\mathcal{G}$, če za vsako omejeno zvezno funkcijo $f$ velja

$$\mathbb{E}\left[f(X)\mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\right]\mathbb{P}(G)$$

za vsak $G \in \mathcal{G}$.

**Lema 4.** *Naj bosta $\overline{X}, \overline{Y}$ slučajna vektorja. Če velja*

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(Y_i)\right]$$

*za vse omejene zvezne funkcije $f_1, \ldots, f_n$ potem sta $\overline{X}$ in $\overline{Y}$ enako porazdeljena.*

**Definicija 9.** Naj bo $T$ čas ustavljanja. Potem je $\sigma$-algebra $\mathcal{F}_T$ definirana kot

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ za vsak } t \geq 0\}.$$

$\mathcal{F}_T$ je *povzetek* dogajanja do časa $T$.

Formalno za slučajni proces $(X_t)_{t\geq 0}$ definiran na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, velja krepka lastnost Markova, če za vsak čas ustavljanja $T$, pogojno na dogodek $\{T < \infty\}$, velja, da je za vsak $t \geq 0$, $X_{T+t}$ odvisen le od $X_T$.

**Izrek 5.** *Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in $T$ čas ustavljanja, za katerega velja velja $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Definiramo proces $B^*_s = B_{T+s} - B_T$ za $s \geq 0$. Potem je $(B^*_s)_{s\geq 0}$ Brownovo gibanje, neodvisno od $\mathcal{F}_T$.*

*Dokaz.* Predpostavino, da $T$ zavzema vrednosti v $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots,\}$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Potem za $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \infty$ in $G \in \mathcal{F}_T$ ter $f_1, \ldots, f_n$ (omejene zvezne funkcije) računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{T+s_k} - B_{T+s_{k-1}}\right)\mathbb{1}_G\right] &= \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{T+s_k} - B_{T+s_{k-1}}\right)\mathbb{1}_G \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})\right] \\
&= \text{(Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci)} = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{T+s_k} - B_{T+s_{k-1}}\right)\mathbb{1}_G\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})\right] = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{\frac{m}{n}+s_k} - B_{\frac{m}{n}+s_{k-1}}\right)\underbrace{\mathbb{1}_G\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})}_{\in\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}}\right] = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{\frac{m}{n}+s_k} - B_{\frac{m}{n}+s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G\mathbb{1}(T = \tfrac{m}{n})\right]\right) =
\end{aligned}$$

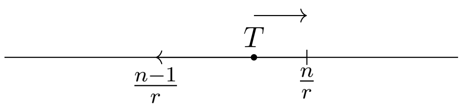
$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k}-B_{s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G \mathbb{1}(T=\tfrac{m}{n})\right]\right)= \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k}-B_{s_{k-1}}\right)\right]\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G \mathbb{1}(T=\tfrac{m}{n})\right]= \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k}-B_{s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{1}(T=\tfrac{m}{n})\right]= \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k}-B_{s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{P}\left(G\right)
\end{aligned}
$$

S tem smo pokazali, da velja $B_s^* = B_{T+s} - B_T$. Proces $(B_s^*)_{s\geq 0}$ ima naslednje lastnosti:

1. zveznost trajektorij,

2. Po lemi 4 velja, da so vektorji $(B_{s_2}^* - B_{s_1}^*,\ \ldots, B_{s_n}^* - B_{s_{n-1}}^*)$ in $(B_{s_2} - B_{s_1},\ \ldots, B_{s_n} - B_{s_{n-1}})$ enako porazdeljeni za poljuben nabor $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \infty$ in prvi vektor je neodvisen od $\mathcal{F}_T$.

Torej $(B_s^*)_{s\geq 0}$ je Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_T$. Kaj pa, če $T$ zavzema vrednosti v $[0,\infty)$? V tem primeru za $T$ z vrednostmi v $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n},\ \ldots\}$ definiramo $T_r = \frac{1}{r}\lceil rT\rceil$ za $r \in \mathbb{N}$. Torej največji večkratnik $\frac{1}{r}$, ki je $\geq T$.




Preverili bi lahko, da je $T_r$ res čas ustavljanja. Za $T_r$ tudi velja krepka lastnost Markova. Ker je $T_r \geq T$ velja $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}_{T_r}$. Velja $T_r \downarrow T$ ko $r \to \infty$. Torej za $G \in \mathcal{F}_T$ velja

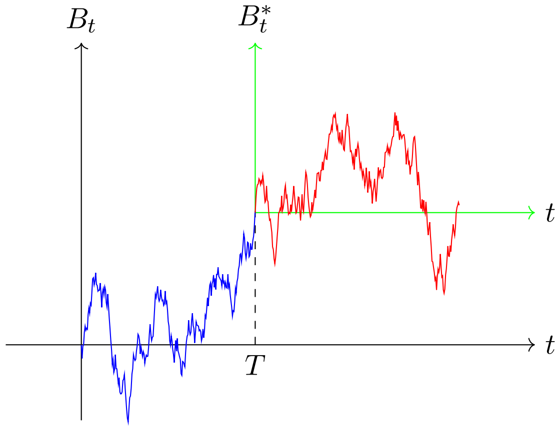
$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k}^* - B_{s_{k-1}}^*\right)\mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k}-B_{s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{P}(G) \\
&\quad \| \\
&\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{T_r+s_k}-B_{T_r+s_{k-1}}\right)\mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{T_r+s_k}-B_{T_r+s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{P}(G)
\end{aligned}
$$

Ko gre $r\to\infty$, po zveznosti trajektorij sledi $(B_{T_r+s_k} - B_{T_r+s_{k-1}}) \to (B_{T+s_k} - B_{T+s_{k-1}})$ $\mathbb{P}$-skoraj gotovo. Ker so $f_1, f_2,\ \ldots, f_n$ omejene, po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci lahko v prejšnjih izračunih nesemo limito pod $\mathbb{E}$ in dobimo

$$
\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k}^* - B_{s_{k-1}}^*\right)\mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k\left(B_{s_k}-B_{s_{k-1}}\right)\right]\mathbb{P}(G)
$$

□

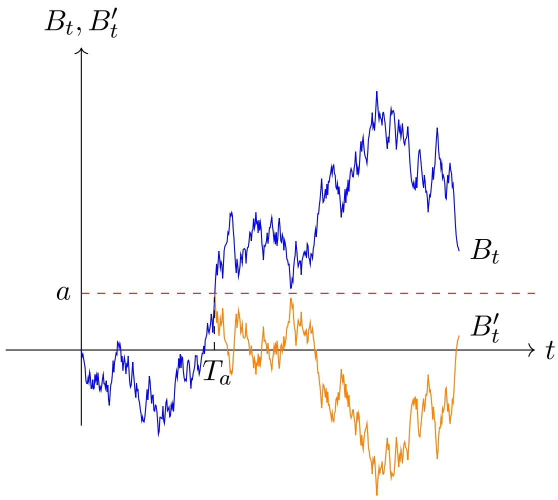
Izrek ponazorimo s sliko 5. Če Brownovo gibanje slučajno ustavimo in gledamo na proces od tega trenutka dalje, bo to še vedno Brownovo gibanje neodvisno od dogajanja do $T$.




**Slika 5.** Krepka lastnost Markova.

### 3.3 Princip zrcaljenja

Definiramo čas ustavljanja $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$ (glej sliko 3, lahko bi izbrali poljuben čas ustaljanja za katerega velja $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$) in v tej vrednosti glede na premico $y = a$ zrcalimo trajektorijo Brownovega gibanja (glej sliko 6). Krepka lastnost Markova nam pove, da je $B_t^* = B_{T_a+t} - B_{T_a}$ Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_{T_a}$. Vemo tudi, da je $(-B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Naprej od časa $T_a$ lahko Brownovo gibanje "podaljšamo" s katerimkoli neodvisnim Brownovim gibanjem (neodvisnim od $\mathcal{F}_{T_a}$). V $T_a$ torej zamenjajmo $B_t$ z njegovim zrcaljenjem čez premico $y = a$. Označimo to Brownovo gibanje z $B_t'$. Ko se vprašamo po verjetnostih za procesa $B_t$ in $B_t'$ dobimo enak odgovor.




**Slika 6.** Primer zrcaljenja Brownovega gibanja.

Naj bo $x < a$ realno število. Zanima nas

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t}\{B_s\} \geq a,\ B_t \leq x\right).$$

Ta verjetnost je enaka

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t}\{B_s'\} \geq a,\ B_t' \leq x\right),$$

ampak ta verjetnost pa je enaka (glej sliko 6)

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t}\{B_s\}\geq a,\ \underbrace{B_t\geq 2a-x}_{\text{zrcaljenje čez } a}\right).$$

Če velja $B_t \geq 2a - x$, velja tudi $\max_{0\leq s\leq t}\{B_s\} \geq a$. Torej je

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t}\{B_s\}\geq a,\ B_t\leq x\right)=$$

$$=\mathbb{P}\left(B_t\geq 2a-x\right)=$$

$$=1-\Phi\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right),$$

kjer je $\Phi$ porazdelitvena funkcija normalne porazdelitve.

Izračunajmo še gostoto porazdelitve $T_a$. Če označimo $X_t = \max_{0\leq s\leq t}\{B_s\}$, potem je

$$\mathbb{P}\left(X_t\geq a,\ B_t\leq x\right)=1-\Phi\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right).$$

Našli smo porazdelitev slučajnega vektorja $(X_t, B_t)$. Parcialno odvajamo po $a$ in $x$, da dobimo gostoto porazdelitve.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial a\partial x}\left(1-\Phi\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right)\right)&=-\frac{\partial}{\partial a}\Phi'\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}=\\&=-\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(2a-x)^2}{2t}\right]\frac{1}{\sqrt{t}}=\\&=\frac{2(2a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left[-\frac{(2a-x)^2}{2t}\right]\end{aligned}$$

Če gostoto $f_{X_t,B_t}$ integriramo po $x$ na $(-\infty, a]$ dobimo gostoto $f_{X_t}$

$$\int_{-\infty}^{a} f_{X_t,B_t}(a,x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left[-\frac{a^2}{2t}\right].$$

Vidimo, da ima $X_t$ enako porazdelitev kot $|B_t|$. Ker za dogodek $\{T_a \leq t\}$ velja $\{T_a \leq t\} = \{X_t \geq a\}$ sledi

$$\mathbb{P}(T_a\leq t)=\mathbb{P}(|B_t|\geq a)=2\left(1-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right).$$

Po odvajanju po $t$ dobimo

$$f_{T_a}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left[-\frac{a^2}{2t}\right]$$

### 3.4 Neodvedljivost

Za zaključek pokažimo še idejo dokaza, da je trajektorija Brownovega gibanja neodvedjiva funkcija $t \mapsto B_t$ za vsak $t \in [0, \infty)$. V celotnem dokazu (glej [1]) uporabimo naslednji rezultat.

**Lema 6.** *Naj bo $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje in naj bo $a > 0$ realno število. Potem je slučajni proces $(X_t)_{t\geq 0}$ definiran s predpisom $X_t = \frac{1}{a}B_{a^2 t}$ tudi Brownovo gibanje.*

*Dokaz.* Zveznost trajektorij, neodivsnost in stacionarnost prirastkov so lastnosti, ki se ohranjajo pri tovrstni transformaciji. Če pogledamo razliko $X_t - X_s$ za $0 < s < t$, dobimo

$$\begin{aligned} X_t - X_s &= \tfrac{1}{a} B_{a^2 t} - \tfrac{1}{a} B_{a^2 s} \\ &= \tfrac{1}{a} \left( B_{a^2 t} - B_{a^2 s} \right) \\ &\sim N\left(0, \tfrac{1}{a^2}(a^2 t - a^2 s)\right) \\ &\sim N(0, t - s). \end{aligned}$$

□

**Izrek 7.** *Trajektorija Brownovega gibanja je neodvedljiva funkcija $\mathbb{P}$-skoraj gotovo.*

*Dokaz.* Kot omenjeno, celoten dokaz najdemo v [1]. Heuristično pojasnilo zakaj odvod ne obstaja je naslednje. Recimo, da bi poskušali izračunati odvod kot

$$\lim_{h \to 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h}.$$

Vemo pa, da velja $B_{t+h} - B_t \sim N(0, h)$, torej

$$\frac{B_{t+h} - B_t}{h} \sim N(0, \tfrac{1}{h}).$$

Te slučajne spremenljivke ne konvergirajo v nobenem smislu ko gre $h \to 0$. □

## LITERATURA


[1] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples, Fifth Edition*, eKnjiga, Cambridge University Press, 2019.

[2] M. Perman, *Zapiski predavanj finančne matematike 2*, spletni vir dostopen na izr. prof. dr. M. Permana (zadnič dostopano januar 2024).

[3] S. Karlin in H. M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, 1975.

[4] D. Stirzaker, *Stochastic Processes and Models*, Oxford University Press, 2005.