UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

Kazalo

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Povzetek

Compound Poisson process and its application in finance

Abstract

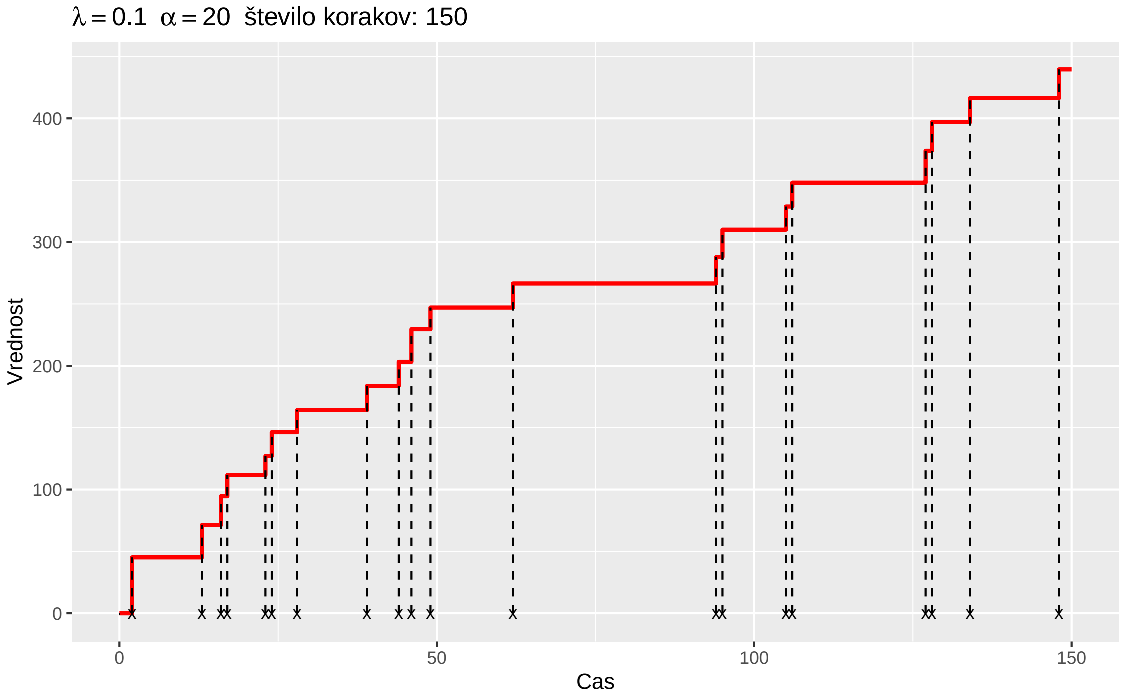
Prevod zgornjega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2020): 60G07 60G20 60G51

Ključne besede: slučajni procesi, sestavljeni Poissonov proces, Cramér–Lundbergov model

Keywords: stochastic processes, compound Poisson process, Cramér–Lundberg model

Uvodni tekst in motivacija za študiranje procesa, nakaži da boš obravnaval Cramer-Ludenbergov model



Slika 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa

Definicija 1.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (E, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T, je družina slučajnih elementov $X_t : \Omega \to E$, ki so $(\mathcal{F}, \Sigma)$-merljivi za vsak $t \in T$.

Opomba 1.2. V delu se bomo omejili na primer, ko T predstavlja čas, torej $T = [0, \infty)$ in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, kjer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ predstavlja Borelovo $\sigma-$algebro na $\mathbb{R}$.

Definicija 1.3. Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$. Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora Ω priredi slučajno funkcijo $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.4. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Trditev 1.5. *Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Potem ima $(X_t)_{t \geq 0}$ neodvisne prirastke natanko tedaj, ko je za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \infty$ prirastek $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od slučajnega vektorja $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$:

$(\Leftarrow)$: □

Definicija 1.6. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Definicija 1.7. Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t\geq 0}$, definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, pravimo *Poissonov proces* z intenzivnostjo λ, če zadošča naslednjim pogojem:

(1) $N_0 = 0$ $\mathbb{P}$-skoraj gotovo.
(2) $(N_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
(3) Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t-s))$,

Opomba 1.8. Vidimo, da v definiciji ne zahtevamo, da so skoki procesa le $+1$. To sledi iz...

2. Sestavljeni Poissonov proces

Povzetek poglavja/krajsi uvod

Definicija 2.1. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Naj bo $(X_i)_{i\geq 1}$ zaporedje neodvisnih (med sabo in $(N_t)_{t\geq 0}$) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Potem je *sestavljeni Poissonov proces* $(S_t)_{t\geq 0}$ definiran kot

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Opomba 2.2. Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$ za vsak i, dobimo ravno HPP. Bolj v splošnem, če za X_i postavimo $X_i = \alpha$, potem velja $S_t = \alpha N_t$.

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$ označevali s $HPP(\lambda)$ ali naborom slučajnih spremenljivk $(N_t)_{t\geq 0}$ (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s CPP ali naborom slučajnih spremenljivk $(S_t)_{t\geq 0}$ (angl. Compound Poisson Process), kjer bo vsota sledila $HPP(\lambda)$.

2.1. Osnovne lastnosti.

Trditev 2.3. *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Za nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ lahko slučajne spremeljivke $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti X_i od X_j za $i \neq j$ in N_t. Naj bo $h > 0$ in $s < t$. Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima $N_{t+h} - N_{s+h}$ členov. Ker za HPP velja $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$, je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

□

Trditev 2.4. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP in naj bosta $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$ pričakovana vrednost in $\sigma^2 = Var[X_i] < \infty$ varianca slučajnih spremenljivk X_i za vsak i. Potem sta za $t \geq 0$ pričakovana vrednost in varianca S_t enaki*

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu\lambda t \qquad \textit{in} \qquad Var[S_t] = \lambda t \left(\sigma^2 + \mu^2\right).$$

Dokaz. Definiramo slučajno spremenljivko

$$Y_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \tag{1}$$

in vidimo, da je za $t \geq 0$ S_t pogojno na $N_t = k$ enako porazdeljena kot Y_k. Tako dobimo

$$\mathbb{E}[S_t \mid N_t = k] = \mathbb{E}[Y_k] = k\mu \qquad \text{in} \qquad \mathrm{Var}[S_t \mid N_t = k] = \mathrm{Var}[Y_k] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$. Torej

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu\lambda t.$$

Prek formule $\mathrm{Var}[S_t] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_t \mid N_t]] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$ računamo

$$\mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_i]\, N_t] = \sigma^2\lambda t$$

in

$$\mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}[X_i]\, N_t] = \mu^2\lambda t,$$

saj $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$. Skupaj dobimo $\mathrm{Var}[S_t] = \lambda t\,(\sigma^2 + \mu^2)$. □

2.2. **Rodovne funkcije.**

Trditev 2.5. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i, ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot X. Potem ima za $t \geq 0$ karakteristična funkcija φ_{S_t} obliko*

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)},$$

kjer φ_X označuje karakteristično funkcijo X.

Dokaz.

$$\varphi_{S_t}(u) = \mathbb{E}[\exp[iuS_t]] = \mathbb{E}\left[\exp\left[iu\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right]\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iu\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t = k\right]\right] \mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iu\sum_{i=1}^{k} X_i\right]\right] \mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{iuX}\right]^k}_{\varphi_X(u)^k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (2) \\
&= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_X(u)\lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)}
\end{aligned}
$$

□

Hitro lahko vidimo, da sta karakteristična in rodovna funkcija CPP enaki

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)} \qquad \text{in} \qquad G_{S_t}(u) = e^{\lambda t(G_X(u)-1)},$$

saj v splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke Y enaka njeni momentno rodovni funkciji izvrednoteni v iu, torej $\varphi_Y(u) = G_Y(iu)$. Rodovna pa izverdnotena v $\ln(u)$, torej $G_Y(u) = M_Y(\ln(u))$, če obstajata. V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo CPP, saj je ta vedno definirana za vsak $u \in \mathbb{R}$. Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med karakteristično funkcijo CPP in rodovno funkcijo $HPP(\lambda)$.

Trditev 2.6. *Naj bosta $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP in $(N_t)_{t\geq 0}$ $HPP(\lambda)$ neodvisna. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i, ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot X. Potem za fiksen $t \geq 0$ velja*

$$\varphi_{S_t}(u) = G_{N_t}\left(\varphi_X(u)\right).$$

Dokaz. Po enačbi (2) iz trditve 2.5 velja, da je $\varphi_{S_t}(u)$ enaka

$$
\begin{aligned}
\varphi_{S_t}(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_X(u)^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= G_{N_t}\left(\varphi_X(u)\right).
\end{aligned}
$$

□

2.3. **Porazdelitev CPP.** Sedaj se posvetimo vprašanju, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka S_t za $t \geq 0$? Iz definicije $HPP(\lambda)$ vemo, da je N_t za $t \geq 0$ porazdeljena kot Poissonova slučajna spremenljivka s parametrom λt. Fiksiramo $t \geq 0$ in dobimo

$$
\begin{aligned}
F_{S_t}(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_t \leq x \mid N_t = k)\mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i \leq x\Big) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

kjer je $F_X^{*k}(x)$ porazdelitev k-te konvolucije slučajne spremenljivke X. Razen za posebne primere, je zgornji izraz za praktične namene ne-izračunljiv in nam ne pomaga veliko.

Zgled 2.7. Če pogledamo primer, ko so $X_1, X_2, \dots$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke, porazdeljene kot X

$$X \sim \text{Gamma}(a) \qquad\qquad f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}$$

s parametrom $a > 0$, lahko pridemo do razmeroma eksplicitne porazdelitve CPP. Gostota k-te konvolucije $X_1 + \cdots + X_k$ ima formulo

$$f_{X_1+\cdots+X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(na)} x^{na-1} e^{-x}.$$

Za $t \geq 0$ in $x \geq 0$ torej velja

$$\begin{aligned} F_{S_t}(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ... \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Trditev 2.8. *Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \dots X_n$ neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od N) enako porazdeljene kot*

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \dots & \frac{\lambda_n}{\lambda} \end{pmatrix},$$

za poljubne $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ in $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ za katere velja $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda$. Potem velja

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

kjer so $Y_1, \dots Y_n$ neodvisne s.s. porazdeljene kot $Pois(\lambda_1), \dots Pois(\lambda_n)$.

Dokaz. S $\varphi_{Z_n}(u)$ označimo karakteristično funkcijo s.s. $Z_n := a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \cdots + a_n Y_n$ in s $\varphi_Z(u)$ karakteristično funkcijo s.s. $Z := \sum_{j=1}^N X_j$. Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{Y_j}(a_j u) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \exp\left[\lambda_j \left(e^{a_j i u} - 1\right)\right] \\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(e^{a_j i u} - 1\right)\right]. \end{aligned}$$

Po trditvi 2.6 velja

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(u) &= G_N\left(\varphi_X(u)\right) \\
&= \exp\left[\lambda\left(\varphi_X(u)-1\right)\right] \\
&= \exp\left[\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\lambda}e^{a_j i u}-1\right)\right] \\
&= \exp\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(e^{a_j i u}-1\right)\right] = \varphi_{Z_n}(u).
\end{aligned}$$

Ker se karakteristični funkciji φ_{Z_n} in $\varphi_{Z'}$ ujemata, sledi da sta Z_n in Z enako porazdeljeni. □

Posledica 2.9. *Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poljubno zaporedje realnih števil in $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih realnih števil, za katere velja $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = \lambda$ in*

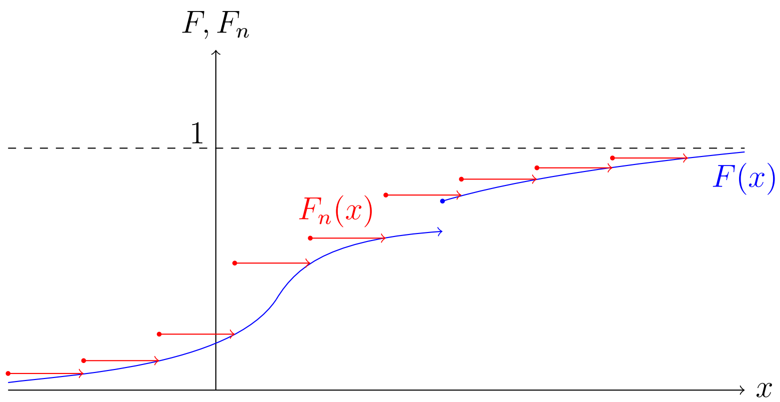
$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \dots \end{pmatrix}.$$

Potem velja

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{d} \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

Dokaz. Ker velja $\varphi_{Z_n}(u) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_Z(u)$ za vsak $u \in \mathbb{R}$, po Lévijevem izreku o zveznosti sledi, da $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$. □

Kaj pa v primeru, ko so X_i zvezno porazdeljene? Tedaj se problema lotimo na sledeč način. Definiramo $F_n(x) := F(\frac{m}{n})$ kjer je $F(x)$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke Z_n in $m = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid \frac{k}{n} > F_n(x)\}$.



Slika 2. Aproksimacija F s F_n

Kot je razvidno iz slike 2, je $F_n(x)$ stopničasta funkcija, ki aproksimira porazdelitveno funkcijo $F(x)$. Velja $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ povsod kjer je F zvezna.

2.4. **CPP kot martingal.**

Definicija 2.10. Slučajni proces X_t prilagojen glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ martingal, če velja

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$$

za vsak $0 \leq s \leq t$.

Pokažimo, da v splošnem CPP ni martingal.

Trditev 2.11. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bodo X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ za vsak i. Potem je S_t martingal natanko tedaj, ko je $\mu = 0$.*

Dokaz. Naj bo $0 \leq s \leq t$. Potem velja

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s + S_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s\right] + \mathbb{E}\left[S_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mu\lambda(t-s) + S_s\end{aligned}$$

Enakost $\mu\lambda(t-s) + S_s = S_s$ velja $\iff$ $\mu\lambda(t-s) = 0$ $\iff$ $\mu = 0$. □

Opomba 2.12. Seveda, če velja $\mu \geq 0$, potem je S_t submartingal, če pa $\mu \leq 0$, je S_t supermartingal.

Trditev 2.13. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bodo X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ za vsak i, Potem je proces*

$$S_t - \mu\lambda t$$

martingal.

Dokaz. Naj bosta $0 \leq s < t$. Prirastek $S_t - S_s$ je neodvisen od $\mathcal{F}_s$ in ima pričakovano vrednost $\mu\lambda(t-s)$. Torej

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_t - \mu\lambda t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s\right] + S_s - \mu\lambda t \\ &= \mu\lambda(t-s) + S_s - \mu\lambda t \\ &= S_s - \mu\lambda s.\end{aligned}$$

□

3. Cramér-Lundbergov model

zgodovinski uvod in uporaba

3.1. **Predpostavke in omejitve modela.**

Definicija 3.1. Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP in naj bodo X_i n.e.p. s.s. z enako porazdelitvijo kot X in $\mathbb{E}\left[X\right] = \mu$ ter $\mathrm{Var}\left[X\right] = \sigma^2$. Potem *proces tveganja* v Cramér-Lundbergovem modelu definiramo kot

$$U_t = u + ct - S_t,$$

kjer je $u \geq 0$ začetni kapital zavarovalnice in $c > 0$ stopnja prihodkov iz premij.

3.2. **Verjetnost propada.** Propad bomo definirali kot dogodek, ko bo vrednost procesa tveganja postala negativna.

Definicija 3.2. Za $0 < T \leq \infty$ je *Verjetnost propada* v Cramér-Lundbergovem modelu definirana kot

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(U_t < 0 \text{ za nek } T \geq t > 0),$$

če gledamo proces na končnem intervalu in kot

$$\psi(u) = \mathbb{P}(U_t < 0 \text{ za nek } t > 0),$$

če gledamo proces na neskončnem intervalu. Označimo še

$$\tau(T) = \inf\{t \mid T \geq t \geq, U_t < 00\},$$

kot *čas propada*, kjer se držimo konvencije, da je $\inf \emptyset = \infty$ in pišemo $\tau = \tau(\infty)$ za čas propada na neskončnem intervalu.

Seveda takoj lahko opazimo, da je $\mathbb{E}[U_t] = u + ct - \mathbb{E}[S_t] = u + ct - \mu\lambda t$. Kar nam da prvo intuicijo o stopnji prihodkov premij c.

3.3. **Aproksimacije.**

3.4. **Uporaba modela na podatkih...**

Slovar strokovnih izrazov

Literatura

[1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
[2] S.M. Ross, Stochatic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
[3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).