

Sestavljeni Poissonov proces in njegova upraba v financah

Anej Rozman

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Definicija

Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t \geq 0}$, definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in z vrednostmi v \mathbb{N}_0 , pravimo Poissonov proces z intenzivnostjo λ , če zadošča naslednjim pogojem:

- ① $N_0 = 0$ \mathbb{P} -skoraj gotovo.
- ② $(N_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
- ③ Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t - s))$,

Definicija

Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo prirastek procesa $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne prirastke, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Prirastki

Definicija

Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo prirastek procesa $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne prirastke, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Definicija

Pravimo, da ima proces $(X_t)_{t \geq 0}$ stacionarne prirastke, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Sestavljeni Poissonov proces

Definicija

Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ Poissonov proces z intenzivnostjo λ . Naj bo $(X_i)_{i \geq 1}$ zaporedje neodvisnih (med sabo in $(N_t)_{t \geq 0}$) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v \mathbb{R} . Potem je sestavljeni Poissonov proces $(S_t)_{t \geq 0}$ definiran kot

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Neodvisnost in stacionarnost prirastkov

Trditev

CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.

Neodvisnost in stacionarnost prirastkov

Trditev

CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.

Dokaz.

Za nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ lahko slučajne spremenljivke $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti X_i od X_j za $i \neq j$ in N_t . □

Neodvisnost in stacionarnost prirastkov

Dokaz.

Naj bo $h > 0$ in $s < t$. Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima $N_{t+h} - N_{s+h}$ členov. Ker za $HPP(\lambda)$ velja $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$, je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$



Pričakovana vrednost in varianca

Trditev

Naj bo $(S_t)_{t \geq 0}$ CPP in naj bosta $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$ pričakovana vrednost in $\sigma^2 = \text{Var}[X_i] < \infty$ varianca slučajnih spremenljivk X_i za vsak i . Potem sta za $t \geq 0$ pričakovana vrednost in varianca S_t enaki

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu\lambda t \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2).$$

Karakteristična funkcija

Trditev

Naj bo $(S_t)_{t \geq 0}$ CPP. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i , ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot X . Potem ima za $t \geq 0$ karakteristična funkcija φ_{S_t} obliko

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)},$$

kjer φ_X označuje karakteristično funkcijo X .

Nekaj o porazdelitvi

Trditev

Naj bo $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in X_1, X_2, \dots, X_n neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od N) enako porazdeljene kot

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} \dots \end{pmatrix},$$

za neko zaporedje realnih števil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in zaporedje pozitivnih realnih števil $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ za katere velja $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda$. Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^N X_j,$$

kjer so Y_1, \dots, Y_n neodvisne s.s. porazdeljene kot $\text{Pois}(\lambda_1), \text{Pois}(\lambda_2) \dots$

Cramér–Lundbergov model: Teorija propada

Definicija

Naj bo $(S_t)_{t \geq 0}$ CPP. proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu definiramo kot

$$U_t = u + p(t) - S_t,$$

kjer je $u \geq 0$ začetni kapital in $p(t)$ funkcija prihodkov.