PREDLOG UTEMELJITVE DIREKTNE RIEMANNOVE INTEGRABILNOSTI

POTREBUJEMO NASLEDNJO OKREPITEV TRDITVE 5.27.
PRESENETLJIVO JE NISEM NAŠEL NA INTERNETU, ČEPRAV JE PREPROSTA. MORDA PA JO NAJDETE VI. :)

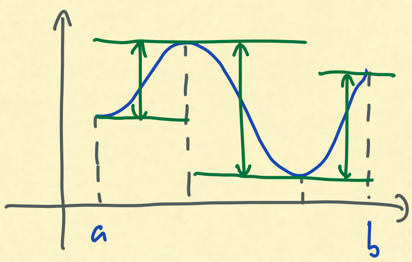
DEF. TOTALNA VARIACIJA FUNKCIJE f NA INTERVALU I JE DEFINIRANA KOT

$$V(f; I) := \sup_{\substack{x_0, x_1, \ldots, x_n \in I \\ x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n}} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

LAHKO JE KONČNA ALI NESKONČNA.

ZA $a \leq b$ DEFINIRAJMO ŠE $V(f; a, b) := V(f; [a,b])$ IN $V(f; a, \infty) := V(f; [a, \infty))$.

SLIKA:



TOTALNA VARIACIJA JE VSOTA PRIKAZANIH RAZMIKOV.

ZA PLANINCE TOREJ TOTALNA VARIACIJA POMENI, KOLIKO VIŠINCEV SO SKUPAJ NAREDILI – NE GLEDE NA TO, ALI NAVZGOR ALI NAVZDOL.

NEKAJ OSNOVNIH LASTNOSTI, KI JIH NI TEŽKO DOKAZATI:

* ZA $x, y \in [a,b]$ JE $|f(x) - f(y)| \leq V(f; a, b)$.

* $\sup\limits_{a \leq t \leq b} f(t) - \inf\limits_{a \leq t \leq b} f(t) \leq V(f; a, b)$

* ZA $x \in [a,b]$ JE $\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt - f(x) \right| \leq V(f; a, b)$.

* $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt - \inf\limits_{t \in [a,b]} f(t) \leq V(f; a, b)$

* $\sup\limits_{t \in [a,b]} f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \leq V(f; a, b)$

* ZA $a \leq b \leq c$ VELJA $V(f; a, c) = V(f; a, b) + V(f; b, c)$.

* ZA $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ IN $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ VELJA

  $V(f; a, \infty) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} V(f; a_{k-1}, a_k)$.

* ČE JE f NENARAŠČAJOČA, JE $V(f; a, b) = f(a) - f(b)$

  IN $V(f; a, \infty) = f(a) - \lim\limits_{b \to \infty} f(b)$; ČE JE TOREJ f

  NAVZDOL NEDOMEJENA, JE $V(f; a, \infty) = \infty$.

* $V(cf; I) = |c|\, V(f; I)$ (OB DOGOVORU $0 \cdot \infty = 0$)

* $V(f+g; I) \leq V(f; I) + V(g; I)$

NADALJE JE ZNANO TUDI, DA IMA f KONČNO TOTALNO VARIACIJO NA INTERVALU I NATANKO TEDAJ, KO SE DA IZRAZITI KOT RAZLIKA DVEH OMEJENIH NEPADAJOČIH FUNKCIJ, A TEGA NE BOSTE POTREBOVALI.

ZA VEČ O TOTALNI VARIACIJI SI LAHKO POGLEDATE ČLANEK „BOUNDED VARIATION" NA VIKIPEDIJI IN NPR. V KNJIGI

EVANS, GARIEPY: MEASURE THEORY AND FINE PROPERTIES OF FUNCTIONS

ALI

HLADNIK: REALNA ANALIZA - ZAPISKI PREDAVANJ

https://users.fmf.uni-lj.si/hladnik/3st/Ra.pdf

RUDIN TA KONCEPT PRESENETLJIVO IZPUSTI, ČE PA TO GOTOVO ŠE NAJDE V BOLJŠIH UČBENIKIH ANALIZE.

TRDITEV 1 VSAKA FUNKCIJA $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, ZA KATERO OBSTAJA POSPLOŠENI RIEMANNOV INTEGRAL $\int_0^\infty f(t)\,dt$ IN IMA OMEJENO TOTALNO VARIACIJO NA $[0,\infty)$, JE DIREKTNO RIEMANNOVO INTEGRABILNA.

V LUČI TEGA, DA JE $f = g - h$ ZA NEKI NENARAŠČAJOČI FUNKCIJI g IN h, JE TA TRDITEV PODOBNA TRDITVI S.27. TODA TRDITEV 1 NE ZAHTEVA, DA STA g IN h VSAKA POSEBEJ RIEMANNOVO INTEGRABILNI: DOVOLJ JE, DA JE INTEGRABILNA NJUNA RAZLIKA, FUNKCIJA f.

DOKAZ TRDITVE 1. ZA $\delta > 0$ OCENIMO:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta]} f(t)\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\delta}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} f(t)\,dt + V(f;k\delta,(k+1)\delta)\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\int_0^{\infty} f(t)\,dt + V(f;0,\infty) < \infty$$

IN

$$\delta\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta]} f(t) - \delta\sum_{k=0}^{\infty}\inf_{t\in[k\delta,(k+1)\delta]} f(t) =$$

$$= \delta\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta]} f(t) - \inf_{t\in[k\delta,(k+1)\delta]} f(t)\Big) \leq$$

$$\leq \delta\sum_{k=0}^{\infty} V(f;k\delta,(k+1)\delta) = \delta\, V(f;0,\infty);$$

SLEDNJE GRE PROTI NIČ, KO GRE δ PROTI NIČ. QED

TOLE ZGORAJ TOREJ SODI V DODATEK. ČE NE ŽELITE UVESTI POJMA TOTALNE VARIACIJE, LAHKO TUDI VES ČAS DELATE Z RAZLIKO DVEH NEPADAJOČIH FUNKCIJ.

ZDAJ PA K DOKAZU IZREKA 4.24.

<u>TRDITEV 2</u> BRŽ KO JE $\mathbb{E}\left[e^{\ell X_1}\right] < \infty$, JE FUNKCIJA

$$f(u) := e^{\ell u}\left(1 - \bar{F}_{X_1}(u)\right)$$

DIREKTNO RIEMANNOVO INTEGRABILNA.

<u>DOKAZ</u>. NAJPREJ POKAŽIMO, DA JE $\lim_{u\to\infty} f(u) = 0$ IN DA OBSTAJA RIEMANNOV INTEGRAL $\int_0^\infty f(u)\,du$. ZA TA NAMEN OCENIMO:

$$f(u) = \frac{e^{\ell u}}{E(X_1)} \int_{(u,\infty)} dF_{X_1}(x) \leq \frac{1}{E(X_1)} \int_{(u,\infty)} e^{\ell x}\, d\bar{F}_{X_1}(x)$$

IN KER JE

$$\int_{(0,\infty)} e^{\ell x}\, d\bar{F}_{X_1}(x) = \mathbb{E}\left[e^{\ell X_1}\right] < \infty,$$

MORA BITI $\lim_{u\to\infty} f(u) = 0$. NADALJE PO TONELLIJEVEM IZREKU VELJA:

$$\int_{[0,\infty)} f(x)\,dx = \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)} \int_{[0,\infty)} e^{lu} \int_{(u,\infty)} dF_{X_1}(x)\,du =$$

ZDAJ SE MI ZDI, DA JE NA TEM MESTU VENDARLE BOLJE PISATI TAKO, DA POUDARIMO, DA GRE ZA LEBESGUEOV INTEGRAL.

$$= \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)} \int_{[0,\infty)} \int_0^x e^{lu}\,du\,dF_{X_1}(x) =$$

$$= \frac{1}{l\,\mathbb{E}(X_1)} \int_{[0,\infty)} (e^{lx}-1)\,dF_{X_1}(x) =$$

$$= \frac{\mathbb{E}[e^{lX_1}]-1}{\mathbb{E}(X_1)} < \infty$$

KER JE f ZVEZNA (SAJ JE $\bar{F}_{X_1}$ ZVEZNA), MORA OBSTAJATI TUDI POSPLOŠENI RIEMANNOV INTEGRAL $\int_u^\infty f(u)\,du$.

DA DOKAŽEMO, DA IMA f OMEJENO TOTALNO VARIACIJO, JO IZRAZIMO KOT RAZLIKO DVEH NEPADAJOČIH FUNKCIJ. ZA TA NAMEN UPORABIMO INTEGRACIJO PER PARTES ZA POSPLOŠEN RIEMANN-STIELTJESOV INTEGRAL:

$$f(u) = -e^{lx}(1-\bar{F}_{X_1}(x))\Big|_u^\infty = -\int_u^\infty (1-\bar{F}_{X_1}(x))\,d(e^{lx}) + \int_u^\infty e^{lx}\,d\bar{F}_{X_1}(x)$$

(PISAVA TU POVE, DA DELAMO Z RIEMANN-STIELTJESOVIM IN NE Z LEBESGUEOVIM INTEGRALOM)

$$= -l\int_u^\infty f(x)\,dx + \int_u^\infty e^{lx}\,d\bar{F}_{X_1}(x)$$

(HLADNIK, IZREK 5, PRI ČEMER ZGORNJO MEJO POŠLJEMO PROTI NESKONČNO). ENAKOST VELJA, BRŽ KO OBSTAJA EDEN OD INTEGRALOV - TAKRAT OBSTAJA TUDI DRUGI.

PRVI INTEGRAL (KI GA LAHKO GLEDAMO KOT RIEMANNOV ALI RIEMANN-STIELTJESOV INTEGRAL) PA OBSTAJA, KER OBSTAJA $\int_0^\infty f(u)\,du$. TAKO JE $f = g - h$, KJER JE $g(u) = \int_u^\infty e^{lx}\, d\bar{F}_{X_1}(x)$ (KAR JE ENAKO $\int_{[u,\infty)} e^{lx}\, d\bar{F}_{X_1}(x)$ IN ZARADI ZVEZNOSTI FUNKCIJE TUDI $\int_{(u,\infty)} e^{lx}\, d\bar{F}_{X_1}(x)$) IN $h(u) = l\int_u^\infty f(x)\,dx$. FUNKCIJI g IN h STA OČITNO NENARAŠČAJOČI IN KER JE $\lim_{u\to\infty} g(u) = \lim_{u\to\infty} h(u) = 0$, IMATA OMEJENO TOTALNO VARIACIJO. TOREJ FUNKCIJA f ZADOŠČA PREDPOSTAVKAM TRDITVE 1.

QED

NAMESTO INTEGRACIJE PER PARTES ZA POSPLOŠENI RIEMANN-STIELTJESOV INTEGRAL SE DA UPORABITI TUDI TONELLIJEV IZREK:

$$\begin{aligned}
\int_u^\infty e^{lx}\left(1-\bar{F}_{X_1}(x)\right)dx &= \int_{[u,\infty)} e^{lx} \int_{(x,\infty)} d\bar{F}_{X_1}(y)\,dx \\
&= \int_{[u,\infty)} \int_{[u,y)} e^{lx}\,dx\, d\bar{F}_{X_1}(y) \\
&= \frac{1}{l}\int_{[u,\infty)} \left(e^{ly} - e^{lu}\right) d\bar{F}_{X_1}(y) \\
&= \frac{1}{l}\left[\frac{1}{\mathbb{E}(X_1)} \int_u^\infty e^{ly}\left(1-F_{X_1}(y)\right)dy - f(u)\right]
\end{aligned}$$

KONČNOST PRVEGA INTEGRALA POKAŽEMO TAKO KOT PREJ. TAKO DOBIMO ISTI RAZCEP FUNKCIJE f.

PREDNOST TE POTI JE, DA NI TREBA PREVERITI, DA JE $\lim_{u \to \infty} f(u) = 0$, SLABOST PA, DA POTEGNEMO ZAJCA IZ KLOBUKA. ZATO SEM BOLJ ZA PRVO POT.