

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

**Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

## KAZALO

1. Uvod	5
2. Sestavljeni Poissonova porazdelitev	7
2.1. Rodovne, momentno-rodovne in karakteristične funkcije	7
2.2. Porazdelitev	8
2.3. Panjerjeva rekurzivna shema	11
3. Sestavljeni Poissonov proces	15
3.1. Osnovne lastnosti	15
3.2. Markiranje	18
4. Cramér–Lundbergov model	22
4.1. Proces tveganja in verjetnost propada	22
4.2. Verjetnost preživetja kot integralska enačba	25
4.3. Lahkorepe porazdelitve	28
4.4. Težkorepe porazdelitve	35
5. Priloga	40
Slovar strokovnih izrazov	45
Literatura	45

# Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

## POVZETEK

V prvem delu diplome najprej definiramo sestavljeni Poissonovo porazdelitev in izpeljemo obliko njenih rodovnih funkcij, obravnavamo neno povezavo s splošnimi porazdelitvami in izpeljemo Panjerejevo rekurzivno shemo. Nato definiramo sestavljeni Poissonov proces in pokažemo nekaj osnovnih lastnosti kot je neodvisnost in stacionarnost prirastkov. Izpeljemo nekaj rezultatov, ki jih dobimo, ko sestavljeni Poissonov proces markiramo. V drugem delu diplome obravnavamo aplikacijo sestavljenega Poissonovega procesa v Cramér–Lundbergovem modelu. Definiramo verjetnost propada in preživetja ter slednjo izrazimo z defektno prenovitveno enačbo. Dokažemo Lundbergovo neenakost in obravnavamo asimptotično obnašanje verjetnosti propada, ko zahtevke modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. Obnašanje verjetnosti propada na koncu praktično prikažemo z večkratnim simuliranjem procesa tveganja.

## Compound Poisson process and its application in finance

### ABSTRACT

In the first half of the diploma, we define the compound Poisson distribution and derive the form of its generating functions. We discuss its connection with general distributions and derive the Panjer recursion scheme. We then define the compound Poisson process and show some basic properties such as the independence and stationarity of increments. We derive some results that follow from a space-time decomposition of the compound Poisson process. In the second half of the diploma, we discuss the application of the compound Poisson process in the Cramér–Lundberg model. We define the probability of ruin and survival and express the latter as a defective renewal equation. We prove the Lundberg inequality and discuss the asymptotic behavior of the probability of ruin when claims are modeled with light-tailed and heavy-tailed distributions. We practically demonstrate the behavior of the probability of ruin by repeatedly simulating the risk process.

**Math. Subj. Class. (2020):** 60G07 60G20 60G51

**Ključne besede:** slučajni proces, sestavljeni Poissonova porazdelitev, Panjerjeva rekurzivna shema, sestavljeni Poissonov proces, markiranje, Cramér–Lundbergov model, Verjetnost propada, lahkorepa porazdelitev, težkorepa porazdelitev

**Keywords:** stochastic process, compound Poisson distribution, Panjer recursion scheme, compound Poisson process, space-time decomposition, Cramér–Lundberg model, probability of ruin, light-tailed distribution, heavy-tailed distribution

## ZAHVALA

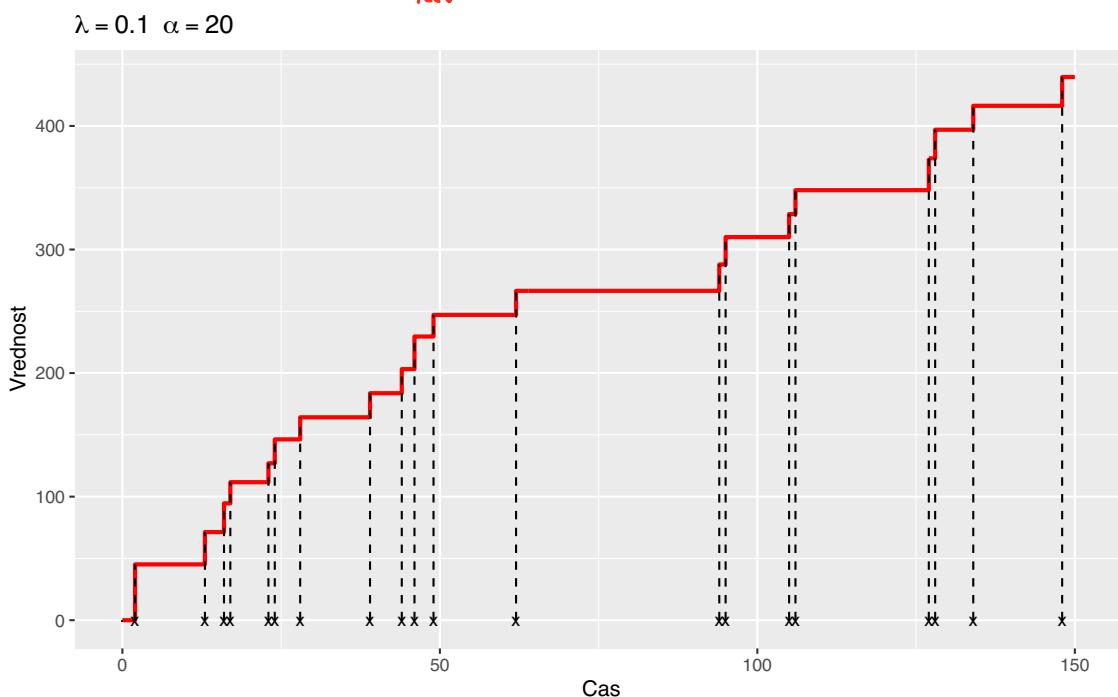
V nastajanju :)

\* Dobar dinstvo Riemannova s- bilnosti u izmjeni 4.24

## 1. UVOD

ALI MISLITE SPREMENJANJE VREDNOSTI  
FINANČNIH INSTRUMENTOV S ČASOM?

Na različnih področjih financ so se v zadnjem stoletju razvile raznovrstne verjetnostne tehnike, kako modelirati različne vrednostne procese finančnih instrumentov. V delu se osredotočimo na zavarovalništvo, kjer želimo modelirati različne produkte zavarovanja, ki jih zavarovalnice ponujajo, da lahko ustrezeno določimo višino premije, ki jo bodo zavarovanci plačevali. Zadovoljiti želimo neke zastavljene metrike tveganja in dobiti verjetnostna zagotovila, da lahko skozi čas pričakujemo dobček. Standarden pristop k problemu je uporaba sestavljenih porazdelitev oziroma procesov, kjer skozi čas se števamo naključno število neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki predstavljajo višino posameznih zahtevkov zavarovancev. Prvi tak model za opis poslovanja zavarovalnice je v začetku 20. stoletja razvil Filip Lundberg, <sup>in</sup> je danes eden izmed najbolj raziskanih in uporabljenih modelov v teoriji tveganja. Model temelji na sestavljenem Poissonovem procesu, kjer predpostavimo, da je stevilo zahtevkov, ki jih zavarovalnica prejme v nekem časovnem intervalu, Poissonovo porazdeljeno.



SLIKA 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa z intenzivnostjo  $\lambda = 0,1$  in eksponentno porazdeljenimi zahtevki;  $X_i \sim \text{Exp}(20)$ .

Sliko 1 v kontekstu zavarovalništva interpretiramo kot kumulativno obveznost zavarovalnice svojim zavarovancem v nekem časovnem intervalu.

Vsebina se v grobem deli na dva dela. Drugo in tretje poglavje sta namenjeni tehnični obravnavi ključnih lastnosti sestavljenih Poissonovih porazdelitev in procesa. V četrtem poglavju pa se posvetimo praktični obravnavi uporabe sestavljenega Poissonovega procesa v zavarovalništvu.

V drugem poglavju definiramo sestavljeno Poissonovo porazdelitev in izpeljemo obliko njenih rodovnih funkcij. Težava, ki si jo delijo sestavljeni porazdelitve, je, da se njihove porazdelitvene funkcije izražajo s konvolucijami, ki pa se zelo redko

PREDLAGAM KAR : da so redko analitično izračunljive

TEŽAVA 2 BESEDO OCENJEVANJE JE,  
DA IMAM V STATISTIKI SPECIFIČEN POMEN.

analitično izračunljive. Zato izpeljemo Panjerjevo rekurzivno shemo, ki je ena iz-  
med najbolj popularnih metod za numerično ocenjevanje sestavljenih Poissonovih  
porazdelitv.

V tretjem poglavju definiramo sestavljeni Poissonov proces in izpeljemo nekaj  
osnovnih lastnosti, kot sta neodvisnost in stacionarnost prirastkov ter pričakovana  
vrednost. Poglavlje zaključimo z izpeljavo rezultatov, ki jih dobimo, ko sestavljeni  
Poissonov proces markiramo.

V četrtem poglavju se posvetimo Cramér–Lundbergovemu modelu, ki je prvi mo-  
del, ki je bil uporabljen za modeliranje tveganja v zavarovalništvu. Osredotočimo se  
na verjetnost propada in zanjo izpeljemo prenovitveno enačbo. Obravnavamo asimp-  
totiko verjetnosti propada, ko zahtevke modeliramo z luhkorepimi in težkorepimi  
porazdelitvami.

V delu privzamemo, da je bralec seznanjen z osnovami verjetnosti, homogenega  
Poissonovega procesa in prenovitvenimi procesi. Na slike, vire in rezultate, ki jih  
izpeljemo v delu, se sklicujemo z modro barvo ■. Na koncu dela je priloga, kjer je  
zbrana velika večina definicij in izrekov, s katerimi naj bi bil bralec seznanjen pred  
branjem dela. Na njih se skličemo, ko jih prvič omenimo v delu ~~ter~~ pri dokazih  
trditev ~~in~~ jih označimo z rdečo barvo ■.

~~ter~~  
<sup>in</sup>

ČE IMATE TEŽAVO, ALI  
PRIDEVNIKU DATI U ALI NE,  
POSTANIE V MNÖŽINO:  
na praktičnih zgledih →  
na praktičnem zgledu

## 2. SESTAVLJENA POISSONOVА PORAZDELITEV

Razdelek je prirejen po [1], [2] in [4].

Sestavljen Poissonova porazdelitev je osnovni gradnik za sestavljeni Poissonov proces, ki ga obravnavamo v naslednjem razdelku. Lastnosti, ki jih dokažemo, so direktno prenosljive na sam proces. Izplejemo obliko rodovnih funkcij, porazdelitveno funkcijo, zanimive rezultate v povezavi s splošnimi slučajnimi spremenljivkami in Panjerjevo rekurzivno shemo, ki jo prikažemo na praktičnem zgledu.

**Definicija 2.1.** Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje neodvisnih (med seboj in  $N$ ) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

sestavljen Poissonovo porazdelitev.

**Opomba 2.2.** V primeru, ko je  $X_i = 1$  za vsak  $i \in \mathbb{N}$ , je  $S \sim \text{Pois}(\lambda)$ .

**Opomba 2.3.** Na enak način definiramo splošne sestavljenne porazdelitve kjer je  $N$  poljubna slučajna spremenljivka, ki zavzema vrednosti v  $\mathbb{N}_0$ . Konkreten primer nas zanima zaradi njegove povezave s sestavljenim Poissonovim procesom. V nadaljevanju bomo uporabljali oznako

$$S_0 = 0 \quad \text{in} \quad S_k = \sum_{i=1}^k X_i \quad \text{za } k \in \mathbb{N};$$

SEMLE DAJE MAŁO PRESLEDKA,  
RECINO 1>.

opazimo, da se brezpogojna porazdelitev slučajne spremenljivke  $S_k$  ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke  $S \mid \{N = k\}$ .

**2.1. Rodovne, momentno-rodovne in karakteristične funkcije.** Ključno orodje pri dokazovanju lastnosti slučajnih spremenljivk so rodovne funkcije 5.1, saj so zelo uporabne pri obravnavi vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk in (če obstajajo) popolnoma določajo njihovo porazdelitev.

**Trditev 2.4.** Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje neodvisnih (med seboj in  $N$ ) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z momentno-rodovno funkcijo  $M_{X_1}$ . Potem ima za  $u \in \mathbb{R}$  momentno-rodovna funkcija  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  obliko

$$M_S(u) = e^{\lambda(M_{X_1}(u)-1)}.$$

Dokaz. Velja

$$\text{TO VELJA ZA VSAK, LAHKO TUNI! } \varphi_S(u) = \mathbb{E}[\exp[uS]]$$

KOMPLEKSEN  $u$ , ZA KATEREGA  
OBSTAJA  $M_{X_1}(u)$ . NI Nujno, DA JE

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\exp[uS \mid N=k]] \mathbb{P}(N=k)$$

TO RES ZA VSE REALNE  $u$ ,

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\exp[uS_k]] \mathbb{P}(N=k)$$

V SPLOŠNEM JE OBSTUJ

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[e^{uX_1}]^k}_{M_{X_1}(u)^k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ZALOTOVLJEN LĘ ZA ČISTI  
IMAGINARNA ŠTEVILA.



## (\*) PREDLAGAM MALENKOST REORGANIZACIJE:

NAJBOLJ TEMELJNA JE V RÉSNICI TRDITEV 2.6.

TA JE SPLOŠNEJŠA - MI TREBA, DA JE V PODISSENOVÁ.

ZATO BI SODILA V PRILOGO NA MESTO SEDANJE

DEFINICIJE 5.11, KJER BI ŽE PREJ DEFINIRALI SPLOŠNE  
SESTAVLJENE PORAZDELITVE: ČE JE  $\mu$  VERJETNOSTNA  
PORAZDELITEV NA  $N$ , BI SESTAVLJENO PORAZDELITEV  $\mu$   
DEFINIRALI KOT PORAZDELITEV SLUČAJNE VSOTE

$$S = \sum_{k=1}^N X_k \quad (\text{OB DOGOVORU, DA JE } S=0, \text{ ČE JE } N=0),$$

KJER SO  $X_1, X_2, \dots$  ENAKO PORAZDELJENE REALNE  
SLUČAJNE SPREMENLJIVKE, NEDVISENE TAKO MED SEBOJ  
KOT TUDI OJ N. NATO PA BI NAPISALI, ČE Ž,  
IZRAČUNAJMO MOMENTO-RODOVNO ØZIROMA KARAKTERISTIČNO  
FUNKCIJO TAKE SESTAVLJENE PORAZDELITVE, TER IZPELJALI,  
DA JE

$$M_S(u) = G_N(M_{X_1}(u)),$$

OD Koder brži sledi tudi

$$\varphi_S(u) = G_N(\varphi_1(u)),$$

TRDITEV 2.4 IN POSLEDICA 2.5 STA SEDAJ NA DLANI -  
LAHIKO BI JU NAVEDLI KAR SKUPAJ,

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M_{X_1}(u)\lambda)^k}{k!}$$

$$= e^{\lambda(M_{X_1}(u)-1)}.$$

*Ali kje potrebujemo rodovno funkcijo sestavljene*  $\square$

**Posledica 2.5.** Rodovna in karakteristična funkcija  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  imata obliko  $G_S(u) = e^{\lambda(G_{X_1}(u)-1)}$  in  $\varphi_S(u) = e^{\lambda(\varphi_{X_1}(u)-1)}$ . *Poissonove porazdelitve?*

*Dokaz.* V splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke  $X$  enaka njeni momentno-rodovni funkciji izvrednoteni v  $iu$  za  $u \in \mathbb{R}$ , torej  $\varphi_X(u) = M_X(iu)$ . Rodovna funkcija pa je enaka momentno-rodovni funkciji izvrednoteni v  $\ln(u)$  za  $u > 0$ , torej  $G_X(u) = M_X(\ln(u))$ , če obstajata.  $\square$

V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo  $\varphi_S$ , saj je ta vedno definirana za vsak  $u \in \mathbb{R}$ . Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med  $\varphi_S$  in  $G_N$ .

**Trditev 2.6.** Karakteristično funkcijo  $\varphi_S$  lahko izrazimo kot kompozitum rodovne funkcije  $G_N$  in karakteristične funkcije  $\varphi_{X_1}$ .

$$\varphi_S(u) = G_N(\varphi_{X_1}(u)).$$

*Dokaz.* Po enačbi (1) iz trditve 2.4 za  $u \in \mathbb{R}$  velja

$$\begin{aligned} \varphi_S(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{X_1}(u)^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= G_N(\varphi_{X_1}(u)). \end{aligned}$$

*Porazdelitvena funkcija*  $\square$

**2.2. Porazdelitev.** Z uporabo izreka o popolni verjetnosti s pogojevanjem na  $N$  pridemo do formule za *porazdelitev* slučajne spremenljivke  $S$ . Za  $x \in \mathbb{R}$  velja

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S \leq x \mid N = k) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k \leq x) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_{X_1}^{*k}(x) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \end{aligned}$$

kjer je  $F_{X_1}^{*k}(x)$   $k$ -ta konvolucija 5.2 funkcije  $F_{X_1}$ .

**Zgled 2.7.** Poglejmo enega enostavnnejših primerov, ko so  $X_1, X_2, \dots$  porazdeljene kot

$$X_1 \sim \text{Exp}(a), \quad \text{torej z gostoto} \quad f_{X_1}(x) = ae^{-ax} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

kjer je  $a > 0$ . Vemo, da je  $k$ -ta konvolucija porazdelitve slučajne spremenljivke  $X_1$  porazdelitev Gamma( $k, a$ ) in ima gostoto

$$f_{X_1+\dots+X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Za  $s > 0$  velja

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^s \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} dx \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} && \text{Tonelli 5.20} \\ &= \int_0^s \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!k!} (a\lambda)^k x^{k-1} e^{-(ax+\lambda)} dx}_{f_S(x)}. \end{aligned}$$

Vidimo, da lahko že celo v primeru, ko poznamo eksplisitno formulo za  $F_{X_1}^{*k}$ , težko pridemo do porazdelitve slučajne spremenljivke  $S$  v zaključeni obliki. V praksi se zato poslužujemo numeričnega ocenjevanja.  $\diamond$

Vemo, da za neodvisne slučajne spremenljivke  $X_1, \dots, X_n$ , ki so porazdeljene kot  $X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1), \dots, X_n \sim \text{Pois}(\lambda_n)$ , velja, da je njihova vsota  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  porazdeljena kot  $S \sim \text{Pois}(\lambda)$ , kjer je  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Izkaže se, da ima sestavljena Poissonova porazdelitev podobno lastnost.

**Definicija 2.8.** Naj bo  $(\lambda_k)_{k=1}^n$  zaporedje pozitivnih realnih števil, za katerega velja  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ . Naj bodo  $F_1, \dots, F_n$  porazdelitvene funkcije realnih slučajnih spremenljivk  $X_1, \dots, X_n$ . Potem *porazdeliti s porazdelitveno funkcijo*

$$F = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k$$

pravimo *mešanica porazdelitev  $F_1, \dots, F_n$  teh slučajnih spremenljivk z natančimi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$* .

Očitno je  $F$  porazdelitvena funkcija. Če definiramo slučajno spremenljivko

$$I \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{in je leta mešanica od vseh od} \\ \text{slučajnih spremenljivk } X_1, X_2, \dots, X_n \end{array}$$

vidimo, da je  $F$  porazdelitev slučajne spremenljivke  $X_I = \mathbb{1}_{\{I=1\}} X_1 + \dots + \mathbb{1}_{\{I=n\}} X_n$ , kar enostavno pokažemo z uporabo zakona o popolni verjetnosti. Za poljuben  $n \in \mathbb{N}$  in  $x \in \mathbb{R}$  velja

*z indeksom ] je poučnejše!*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_I \leq x) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_I \leq x \mid I = k) \mathbb{P}(I = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \leq x) \lambda_k \\ &= \sum_{k=1}^n F_k(x) \lambda_k. \end{aligned}$$

Z enakim argumentom lahko pokažemo, da je  $\varphi_X(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{X_k}(u)$ .

**Trditev 2.9.** Naj imajo neodvisne slučajne spremenljivke  $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$  sestavljeni Poissonovo porazdelitev, torej

$$S^{(k)} = \sum_{i=1}^{N_k} X_i^{(k)} \quad \text{za } k = 1, \dots, n,$$

kjer je  $N_k \sim \text{Pois}(\lambda_k)$  za  $\lambda_k > 0$  in za vsak  $k = 1, \dots, n$  je  $(X_i^{(k)})_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem velja

$$S = \sum_{k=1}^n S^{(k)} \sim \sum_{i=1}^N Y_i,$$

kjer je  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  s parametrom  $\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$  in  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z mešano porazdelitvijo

$$F_{Y_1} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} F_{X_1^{(k)}}.$$

slučajne spremenljivke

Dokaz. Karakteristična funkcija  $S^{(k)}$  ima obliko

$$\varphi_{S^{(k)}}(u) = e^{\lambda_k (\varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1)}.$$

Ker so  $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$  neodvisne, velja

$$\begin{aligned} \varphi_S(u) &= \prod_{k=1}^n \varphi_{S^{(k)}}(u) \\ &= \prod_{k=1}^n \exp \left[ \lambda_k (\varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1) \right] \\ &= \exp \left[ \underbrace{\lambda \left( \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} \varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1 \right)}_{\varphi_{Y_1}(u)} \right]. \end{aligned}$$

Po izreku o enoličnosti 5.16 sledi  $S \sim \sum_{i=1}^N Y_i$ .  $\square$

Na podoben način pokažemo, kako se sestavljena Poissonova porazdelitev izraža v primeru, ko so slučajne spremenljivke  $X_i$  diskretno porazdeljene.

**Trditev 2.10.** Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots, X_n$  neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od  $N$ ) enako porazdeljene po shemi

$$\left( \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} & \dots \end{array} \right),$$

kjer je  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  poljubno zaporedje realnih števil in  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje pozitivnih realnih števil, za katerega velja  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda$ . Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^N X_j, \quad \text{s porazdelitvami}$$

kjer so  $Y_1, Y_2, \dots$  neodvisne slučajne spremenljivke porazdeljene kot  $\text{Pois}(\lambda_1), \text{Pois}(\lambda_2), \dots$

Dokaz. S  $\varphi_{Z_n}(u)$  označimo karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke  $Z_n := a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_n Y_n$  in s  $\varphi_Z(u)$  karakteristično funkcijo  $Z := \sum_{j=1}^N X_j$ . Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(a_j u) \\ &= \prod_{j=1}^n \exp [\lambda_j (e^{a_j i u} - 1)] \\ &= \exp \left[ \sum_{j=1}^n \lambda_j (e^{a_j i u} - 1) \right].\end{aligned}$$

Po trditvi 2.6 velja

$$\begin{aligned}\text{ALI NE BI RAJE } \varphi_Z(u) &= G_N(\varphi_{X_1}(u)) \\ &= \exp [\lambda (\varphi_{X_1}(u) - 1)] \\ \text{DIREKTNO UPORABILI } \varphi_Z(u) &= \exp \left[ \lambda \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda} e^{a_j i u} - 1 \right) \right] \\ \text{POSLEDICE 2.5? } \varphi_Z(u) &= \exp \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (e^{a_j i u} - 1) \right].\end{aligned}$$

Vidimo, da zaporedje  $\varphi_{Z_n}(u)$  za vsak  $u \in \mathbb{R}$  po točkah konvergira k  $\varphi_Z(u)$ , torej

$$\varphi_{Z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_Z$$

po Lévijevem izreku o kontinuiteti 5.17 velja  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$ .  $\square$

Rezultat je zanimiv predvsem zato, ker nam za razliko od trditve 2.9 pove, da lahko slučajno vsoto izrazimo kot linearne kombinacije oziroma vrsto Poissonovih slučajnih spremenljivk.

**3.3. Panjerjeva rekurzivna shema.** Poglejmo si popularno metodo za numerično ocenjevanje sestavljenih Poissonovih porazdelitev v praksi. Kot smo videli v zgledu 2.7, je računanje eksplisitne porazdelitve  $S$  v končni obliki v splošnem nemogoče. Izkaže pa se, da jo je v posebnih primerih vselej mogoče rekurzivno izraziti in ustrezno pospološiti na širši razred porazdelitev.

**Trditve 2.11.** (Panjer) Naj bo  $N$  diskretna slučajna spremenljivka, za katero velja

$$\mathbb{P}(N = n) = \left( a + \frac{b}{n} \right) \mathbb{P}(N = n - 1) \quad \text{za } n \in \mathbb{N} \text{ in } a, b \in \mathbb{R}. \quad \text{ob dogovoru, da je } S = 0$$

Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki zavzemajo vrednosti v  $\mathbb{N}_0$ . Potem za  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  velja

$$\mathbb{P}(S = 0) = \begin{cases} \mathbb{P}(N = 0), & \text{če } \mathbb{P}(X_1 = 0) = 0, \\ \mathbb{E}[\mathbb{P}(X_1 = 0)^N], & \text{sicer, } \leftarrow \text{OB DOGOVORU } 0^0 := 1 \text{ ČA FORMULA} \\ \text{VELJA TUDI ZA PRIMER, KO JE } \mathbb{P}(X_1 = 0) = 0. \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(S = n) = \frac{1}{1 - a\mathbb{P}(X_1 = 0)} \sum_{k=1}^n \left( a + \frac{bk}{n} \right) \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(S = n - k). \quad (2)$$

V DOKAZU PREDLAGAM  $k \rightarrow j$ ,  $i \rightarrow l$ , DA BO IMELA ČRKA I ISTO VLOGO  
IN DA NE BO ČRKE I (ČEPAV V TEM DELU NE DELAMO S KOMPLEKSNIМИ ŠTEVILI).

Dokaz. Najprv se osredotočimo na primer  $n = 0$ . Velja  $\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(S = 0, N > 0)$ .

All je treba primer, ko je  $N = 0$ , GLEDATI POSEBEJ?  
ZAKAJ NE BI PREPRESTO

Če velja  $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$ , je enakost očitna. Če velja  $\mathbb{P}(X_1 = 0) > 0$ , po zakonu za nasali kar:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = 0) &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S = 0, N > 0 \mid N = k) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = 0)^k \mathbb{P}(N = k) \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{P}(X_1 = 0)^N].\end{aligned}$$

Za  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \left( a + \frac{b}{k} \right) \mathbb{P}(N = k-1).\end{aligned}\tag{3}$$

Če sedaj upoštevamo, da so  $X_i$  neodvisne in enako porazdeljene, opazimo, da velja in posledično  $X_1, \dots, X_k$  enako porazdeljene pa jijo na  $S_k$

$$1 = \mathbb{E} \left[ \frac{S_k}{S_k} \mid S_k \right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left[ \frac{X_i}{S_k} \mid S_k \right] = k \mathbb{E} \left[ \frac{X_1}{S_k} \mid S_k \right],$$

torej je

$$\mathbb{E} \left[ \frac{X_1}{S_k} \mid S_k \right] = \frac{1}{k}$$

in posledično

$$\mathbb{E} \left[ a + \frac{bX_1}{n} \mid S_k = n \right] = a + \frac{b}{k}.$$

Nadaljnje velja

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ a + \frac{bX_1}{n} \mid S_k = n \right] &= \sum_{i=0}^n \left( a + \frac{bi}{n} \right) \mathbb{P}(X_1 = i \mid S_k = n) \\ &= \sum_{i=0}^n \left( a + \frac{bi}{n} \right) \frac{\mathbb{P}(X_1 = i, S_k - X_1 = n - i)}{\mathbb{P}(S_k = n)} \\ &= \sum_{i=0}^n \left( a + \frac{bi}{n} \right) \frac{\mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(S_{k-1} = n - i)}{\mathbb{P}(S_k = n)}\end{aligned}\tag{5}$$

TOLE BI BICO SICER TREBA UTEMELJITI Z (ZREMELJIVOSTJO; 2A POLUBNO PERMUTACIJO  
IN VEZJA

(4)  
 $(X_{\bar{x}(1)}, X_{\bar{x}(2)}, \dots, X_{\bar{x}(l)}) \sim$   
 $\sim (X_1, X_2, \dots, X_l).$

KJER SO OKLEPAJI OSNOVNE VELIKOSTI, JIH NE STAVITE Z \left in \right, SAS TA DVA UKAZA NAZEDNA DOJATEN PRESLEDEK. TUDI TISTE MALO POVEČANE RAZE STAVITE Z \big| in \big|.

Če sedaj vstavimo enakost (4) v (3) in upoštevamo (5), dobimo

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left( a + \frac{bi}{n} \right) \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(S_{k-1} = n - i) \mathbb{P}(N = k - 1).$$

*kar nam da*

Po Tonellijevem izreku 5.20 lahko zamenjamo vrstni red vsot, da dobimo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = n) &= \sum_{i=0}^n \left( a + \frac{bi}{n} \right) \mathbb{P}(X_1 = i) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{k-1} = n - i) \mathbb{P}(N = k - 1) \\ &= \sum_{i=0}^n \left( a + \frac{bi}{n} \right) \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(S = n - i). \end{aligned}$$

Izpostavimo prvi člen vsote in izraz preoblikujemo.

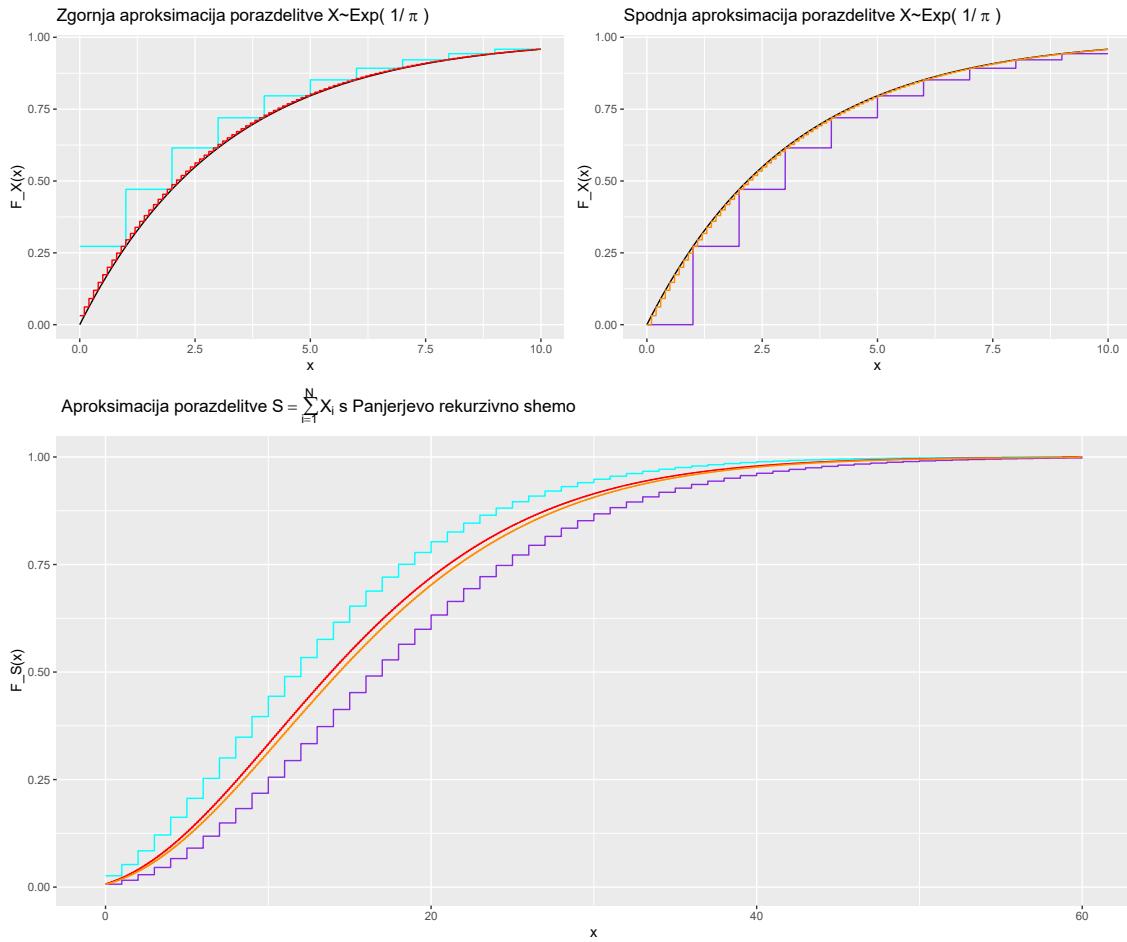
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = n) &= a\mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(S = n) + \sum_{i=1}^n \left( a + \frac{bi}{n} \right) \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(S = n - i), \\ \mathbb{P}(S = n) &= \frac{1}{1 - a\mathbb{P}(X_1 = 0)} \sum_{i=1}^n \left( a + \frac{bi}{n} \right) \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(S = n - i). \end{aligned}$$

S tem je trditve dokazana.

**Opomba 2.12.** Izkaže se, da le tri porazdelitve ustrezajo rekurzivni izražavi iz trditve 2.11. Te so Pois( $\lambda$ ), Bin( $p$ ) in NegBin( $r, p$ ). Pravimo jim *porazdelitve Panjerjevega razreda*. V primeru  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a = 0$  in  $b = \lambda$  velja  $\mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = (0 + \frac{\lambda}{n}) \mathbb{P}(N = n - 1)$ . Tudi v ostalih primerih (argument je podan v [4] na strani 122) se izkaže, da je  $a < 1$ , tako da je enačba (2) res dobro definirana.

**Opomba 2.13.** Zahtevo, da  $X_i$  zavzemajo vrednosti v  $\mathbb{N}_0$  se splača poslošiti, tako da zahtevamo le, da  $X_i$  zavzemajo vrednosti v  $h\mathbb{N}_0$  za neki  $h > 0$ . V tem primeru zapišemo  $S = h \sum_{i=1}^N \frac{X_i}{h}$  in tako rekurzivna zveza velja za  $\frac{S}{h}$ . Tako lahko aproksimiramo splošne slučajne spremenljivke, ki zavzemajo vrednosti v  $[0, \infty)$ , poljubno natančno.

**Zgled 2.14.** (Nadaljevanje zgleda 2.7) Recimo, da imamo konkretni porazdelitvi  $N \sim \text{Pois}(9,17)$  in  $X_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\pi})$ . S stopničastima funkcijama  $F_h^u$  in  $F_h^l$  aproksimiramo porazdelitveno funkcijo  $F_{X_1}$  za vrednosti  $h \in \{1, 0,1\}$ . (Aproksimacije so na sliki 2 in so obarvane;  $F_1^u$  modra,  $F_{0,1}^u$  rdeča,  $F_1^l$  vijolična in  $F_{0,1}^l$  oranžna). Za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $F_h^u(x) = F_{X_1}((n+1)h)$  za  $x \in [nh, (n+1)h)$  in  $F_h^l(x) = F_{X_1}(nh)$  za  $x \in [nh, (n+1)h)$ . S Panjerjevo rekurzivno shemo izračunamo približke porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke  $S$  na intervalu  $[0, 60]$ .



SLIKA 2. Aproksimacija porazdelitve  $S$  s Panjerjevo rekurzivno shemo.

Vidimo, da že za  $h = 0,1$  dobimo zelo natančno aproksimacijo porazdelitve. Danes Panjerjeva metoda predstavlja alternativo Monte Carlo metodam. Njena glavna prednost je, da z manjšanjem koraka  $h$  dosežemo poljubno natančno točno aproksimacijo neke porazdelitve. Monte Carlo metode so bolj splošne, saj temeljijo zgolj na ponavljanju simulacij in se lahko uporabljajo za modeliranje bolj zapletenih porazdelitev, ki ne ~~zadovoljujejo pogojev~~ trditve 2.11, ali njene posplošitve v opombi 2.12.

*zadoščajo pogojem*

◇

### 3. SESTAVLJENI POISSONOV PROCES

Razdelek je prirejen po [1], [2], in [3].

Sedaj se posvetimo študiranju sestavljenega Poissonovega procesa. Bralec lahko najde osnovne definicije in lastnosti splošnih slučajnih procesov, ki nas zanimajo, med definicijama 5.3 in 5.8 v prilogi. Najprej dokažemo in izpeljemo nekaj osnovnih lastnosti procesa kot so neodvisnot in stacionarnost prirastov, pričakovana vrednost in varianca. Na koncu obravnavamo markiranje procesa glede čas in njegovo vrednost ter dokažemo nekaj zanimivih posledic.

Sestavljeni Poissonov proces temelji na homogenem Poissonovem procesu, zato najprej podamo definicijo s katero bomo delali, saj ima homogeni Poissonov proces več karakterizacij.

**Definicija 3.1.** Naj bo  $\lambda > 0$ . Družini slučajnih spremenljivk  $(N_t)_{t \geq 0}$ , definiranimi na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  z vrednostmi v  $\mathbb{N}_0$ , pravimo *homogeni Poissonov proces* z intenzivnostjo  $\lambda$ , če zadošča naslednjim pogojem:

- (1)  $N_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -skoraj gotovo.
- (2)  $(N_t)_{t \geq 0}$  ima neodvisne in stacionarne prirastke,
- (3) Za  $0 \leq s < t$  velja  $N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t - s))$ ,

**Opomba 3.2.** V delu bomo z  $V_n$  označevali čas  $n$ -tega prihoda v homogenem Poissonovem procesu in s  $T_n$   $n$ -ti medprihodni čas. Za medprihodne čase velja, da so neodvisni in enako porazdeljeni, kot  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Ta lastnost je tudi alternativna definicija procesa, kot poseben primer prenovitvenega procesa 5.24. Bralec lahko najde dokaz ekvivalence v [10] na strani 15.

**Definicija 3.3.** Naj bo  $(N_t)_{t \geq 0}$  homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda$ . Naj bo  $(X_i)_{i \geq 1}$  zaporedje neodvisnih (med sabo in  $(N_t)_{t \geq 0}$ ) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem je *sestavljeni Poissonov proces*  $(S_t)_{t \geq 0}$  definiran kot družina slučajnih spremenljivk

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0.$$

**Opomba 3.4.** Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces naravna poslošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za  $X_i$  vzamemo konstantno funkcijo  $X_i = 1$  za vsak  $i$ , dobimo le tega. Bolj v splošnem, če je  $X_i = \alpha$  deterministična funkcija, potem velja  $S_t = \alpha N_t$ .

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda > 0$  označevali s  $\text{HPP}(\lambda)$  ali naborom slučajnih spremenljivk  $(N_t)_{t \geq 0}$  (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s  $\text{CPP}$  ali naborom slučajnih spremenljivk  $(S_t)_{t \geq 0}$  (angl. Compound Poisson Process), kjer prihodi sledijo implicitno podanemu  $\text{HPP}(\lambda)$ .

**3.1. Osnovne lastnosti.** Pri študiranju slučajnih procesov nas najprej zanimajo neke osnovne lastnosti, s katerimi je lažje delati kot z neštevnim naborom slučajnih spremenljivk in s pomočjo katerih lahko pokažemo globje rezultate o procesu.

, in katerega je  $X_0$  konstanta,

**Trditev 3.5.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  imel neodvisne in stacionarne prirastke natanko tedaj, ko za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$  velja

$$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n} \sim X_{t_{n+1}-t_n}. \quad (6)$$

Dokaz. ( $\Rightarrow$ ) : Recimo, da ima  $(X_t)_{t \geq 0}$  neodvisne in stacionarne prirastke. Za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$  nas zanima porazdelitev slučajne spremenljivke  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ . Po trditvi 5.9 vemo, da je ta enaka porazdelitvi slučajne spremenljivke  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid g(X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  za poljubno borelovo funkcijo  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , ki jo definiramo na sledeč način:

B

$$g(x_0, x_1, \dots, x_n) = (g_0, g_1, \dots, g_n),$$

$$g_0 = x_0,$$

$$g_1 = x_1 - x_0,$$

⋮

$$g_n = x_n - x_{n-1}.$$

funkcija

$g$  je očitno merljiva, saj jo definiramo le z odštevanjem. Vidimo, da je

$$g(X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = (X_0, X_{t_1} - X_0, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}).$$

Po neodvisnosti prirastkov  $(X_t)_{t \geq 0}$  sledi, da je porazdelitev slučajne spremenljivke  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$  neodvisna od slučajnega vektorja  $(X_0, X_{t_1} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ . Po stacionarnosti prirastkov  $(X_t)_{t \geq 0}$  nato sledi veljavnost (6).

( $\Leftarrow$ ) : Recimo, da za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$  velja (6). Ne vem kako bi napisal to smer implikacije.  $\square$

**Trditev 3.6.** CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.

Dokaz. Po trditvi 3.5 je dovolj pokazati, da za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$  velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid S_{t_1}, \dots, S_{t_n} \sim S_{t_{n+1}-t_n}.$$

Naj bodo  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  in  $k_1 \leq \dots \leq k_n$ . Na dogodku  $\{N_{t_n} = k_n\}$  velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} = \sum_{i=k_n+1}^{k_n + N_{t_{n+1}} - N_{t_n}} X_i,$$

zato je

$$\begin{aligned} S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n} \\ \sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n + N_{t_{n+1}} - N_{t_n}} X_i \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n}. \end{aligned}$$

Ker pa so  $X_1, \dots, X_{k_n}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  neodvisne, sledi, da sta neodvisna tudi vektorja

$$(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, X_1, \dots, X_{k_n}) \text{ in } (N_{t_{n+1}} - N_{t_n}, X_{k_n+1}, \dots),$$

SEM MOGORE DATJE MENO VECJI PRESLEDKI,  
NPR. OBAKRAT Izquad.

(\*) TUDI DOKAŽI IMPLIKACIJE  $\Rightarrow$  NI V REDU:

NE MOREMO NAMREČ PO TRDITVI §.9 SKLEPATI, DA

JE  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  ENAKO

$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ , SAJ ŠE

NE VEMO, DA JE POGOJNA PORAZDELITEV

$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  FUNKCIJSKO NEODVISNA OD

$X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ : TO MORAMO ŠELE DOKAŽATI!

PRAVA POT: KER JE  $X_0$  KONSTANTNA, LAHKO PIŠEMO

$X_0 = x_0$ . PO PREDPOSTAVKI TER DEFINICIJAH §.6 IN §.7

JE  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_{t_1} - x_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \sim$

$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \sim X_{t_{n+1} - t_n}$ . PO TRDITVI §.9 JE POTEM

ZA POLJUBNO BORELOVO FUNKCIJO  $g$  (TUDI)

$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid g(X_{t_1} - x_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \sim X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ .

ČE VZAMEMO

$g(y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_0 + y_1, x_0 + y_1 + y_2, \dots, x_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ ,

JE  $g(X_{t_1} - x_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$

IN DOBIMO ŽELENI REZULTAT.

$\Leftarrow$ ; ZDAJ PA VZAMEMO  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) := (x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$ .

Po PREPOSTAVKI JE  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n} | X_{t_1}, \dots, X_{t_n} \sim X_{t_{n+1} - t_n}$ .

Po TRDITVI S.9 JE POTEM TUDI  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$  NEODVISNA

OD  $(X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$  IN ENAKO

PORAZDELJENA KOT  $X_{t_{n+1} - t_n}$ . Z INDUKCIJO DOBIMO,

DA SO POTEM TUDI PRIRASTKI  $X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$   
MED SEBOJ NEODVISNI. QED

z njima pa tudi vektor  $(N_{t_1}, \dots, N_{t_n}, X_1, \dots, X_{k_n})$  in slučajna spremenljivka  $\sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i$ . Torej je

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n} \sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i.$$

Vemo, da po stacionarnosti prirastkov HPP velja  $N_{t_{n+1}} - N_{t_n} \sim N_{t_{n+1}-t_n}$ . Ker pa je zaporedje  $X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots$  neodvisno od  $N_{t_{n+1}} - N_{t_n}$ , zaporedje  $X_1, X_2, \dots$  neodvisno od  $N_{t_{n+1}-t_n}$  ter ker sta zaporedji  $X_1, X_2, \dots$  in  $X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots$  enako porazdeljeni, je tudi

$$N_{t_{n+1}} - N_{t_n}; X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots \sim N_{t_{n+1}-t_n}; X_1, X_2, \dots$$

in zato tudi

$$\begin{aligned} S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n} \\ \sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i \neq \sum_{i=1}^{N_{t_{n+1}-t_n}} X_i = S_{t_{n+1}-t_n}. \end{aligned}$$

po trditvi 5.9

Potem pa je tudi

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, \sum_{i=1}^{k_1} X_i, \dots, \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i \sim S_{t_{n+1}-t_n},$$

 Ker na dogodku  $\{N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n\}$  velja

$$\sum_{i=1}^{k_1} X_i = S_{t_1}, \dots, \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i = S_{t_n} - S_{t_{n-1}},$$

je končno

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, S_{t_1}, \dots, S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

ozziroma

spet

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1}, \dots, N_{t_n}, S_{t_1}, \dots, S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

in po trditvi 5.9 velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid S_{t_1}, \dots, S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}.$$

□

**Opomba 3.7.** Podobno kot v opombi 2.3 bomo od zdaj naprej za  $t \geq 0$  pogojno porazdelitev  $S_t \mid \{N_t = k\}$  označevali s

$$S_{t,0} = 0 \quad \text{in} \quad S_{t,k} = \sum_{i=1}^k X_i \quad \text{za } k \in \mathbb{N}.$$

TO JE SLUČAJNA SPREMENLJIVKA,  
NE POGOJNA PORAZDELITEV!  
TAKA, KOT JE, TA OPOMBA NI  
SMISELNA.

**Trditev 3.8.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP in naj bosta  $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$  pričakovana vrednost in  $\sigma^2 = \text{Var}[X_i] < \infty$  varianca slučajnih spremenljivk  $X_i$ . Potem sta za  $t \geq 0$  pričakovana vrednost in varianca  $S_t$  enaki

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu \lambda t \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2).$$

STE HOJELI NAPISATI, DA ZA

$$W_t = \sum_{i=1}^t X_i \quad \text{VELJA} \quad S_t \mid N_t = k \sim W_k.$$

RAJE UPORABITE OZNAKO BREZ  $t$ , NPP.  $W_t$ .

Dokaz. Za  $t \geq 0$  in  $k \in \mathbb{N}_0$  velja

$$\mathbb{E}[S_t | N_t = k] = \mathbb{E}[S_{t,k}] = k\mu \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t | N_t = k] = \text{Var}[S_{t,k}] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja  $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t | N_t]]$ . Torej  $\downarrow$

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t | N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu \lambda t.$$

Prek formule  $\text{Var}[S_t] = \mathbb{E}[\text{Var}[S_t | N_t]] + \text{Var}[\mathbb{E}[S_t | N_t]]$  računamo

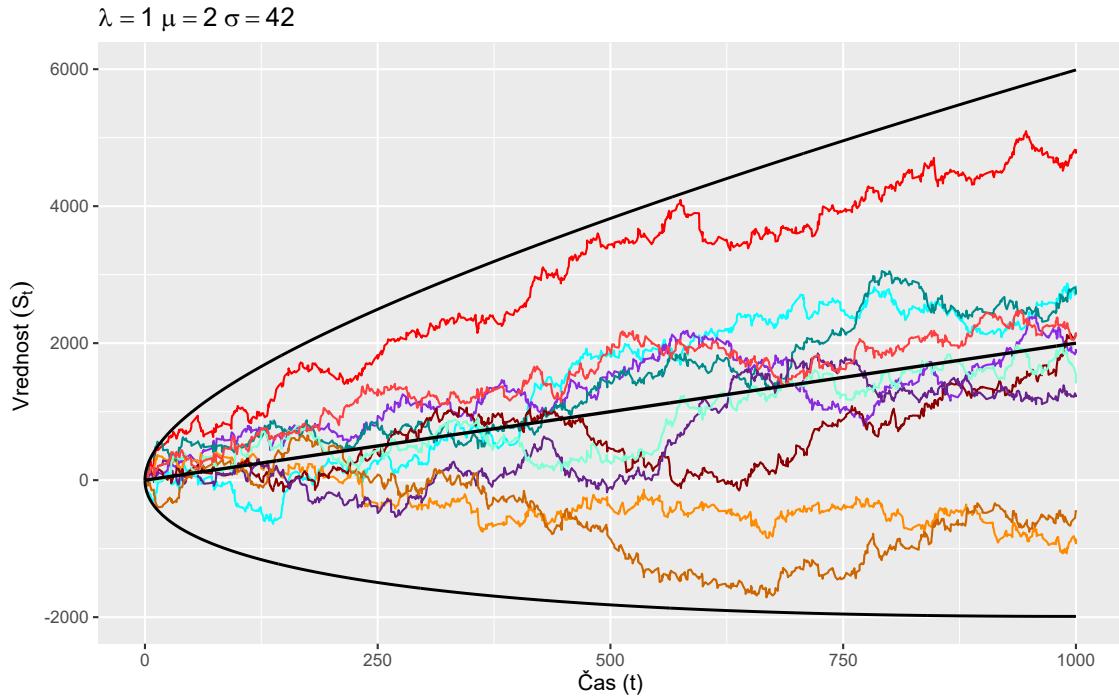
$$\mathbb{E}[\text{Var}[S_t | N_t]] = \mathbb{E}[\text{Var}[X_i] N_t] = \sigma^2 \lambda t$$

in

$$\downarrow \quad \text{Var}[\mathbb{E}[S_t | N_t]] = \text{Var}[\mathbb{E}[X_i] N_t] = \mu^2 \lambda t.$$

Če enačbi sestejemo, dobimo  $\text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2)$ .  $\square$

**Zgled 3.9.** Poglejmo si primer ko je zaporedje  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  porazdeljeno kot  $X_1 \sim N(2, 42)$ . Tedaj za  $t \geq 0$  velja  $\mathbb{E}[S_t] = 2t$  in  $\text{Var}[S_t] = t(2^2 + 42^2) = 1768t$  ter  $\sigma_{S_t} = \sqrt{1768t}$ . Simuliramo 10 realizacij CPP do časa  $T = 1000$ , ki jih prikažemo na sliki 3 skupaj s funkcijami  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$  in  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$ .



SLIKA 3. Trajektorije CPP s funkcijami  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$  in  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$

$\diamond$

**3.2. Markiranje.** V trditvi 2.9 smo pokazali, da ima vsota neodvisnih sestavljenih Poissonovih porazdelitev spet sestavljeno Poissonovo porazdelitev. Podobno lahko CPP razdelimo na več neodvisnih sestavljenih Poissonovih procesov, tako da ga markiramo glede na čas in vrednost posameznega prihoda.

Kot običajno izračimo  $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ , kjer slučajne spremenljivke zadostčijo,

**Izrek 3.10.** (o markiranju) Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP. Naj bo  $A_1, \dots, A_n$  disjunktna <sup>do</sup> particija množice  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Potem so za fiksen  $t \geq 0$  slučajne spremenljivke

podmnožice

$$S_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(V_i, X_i), \quad j = 1, \dots, n$$

**KAKOR RAZUMEM, NI NUJNO, DA JE UNJA TEH MNOŽIC  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ .**

SPOMNITE, DA SO V TAKO KJI V OPOMBI 3.2. (7)

med seboj neodvisne. Še več, za vsak  $j = 1, \dots, n$  ima  $j$

**TAKO KOT JE ZDAJ, JE POVEDANO  
PREVEĽ NAENKRAT IN LAHKO ZTEJE BRACCA.**

$$S_t^{(j)} \sim \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i),$$

sestavljen Poissonovo porazdelitev, kjer je  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih (med sabo, ter še od  $N_t$  in  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk  $kot U_1 \sim U([0, t])$ .

Dokaz. Za splošen  $\lambda$  velja lasnost vrstilnih statistik 5.21, torej, porazdeljenih enakomerno

$$(V_1, \dots, V_k \mid N_t = k) \sim (U_{(1)}, \dots, U_{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tako lahko za  $j \in \{1, \dots, n\}$  vsoto (7), pogojno na dogodek  $\{N_t = k\}$ , zapišemo kot

$$S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\} \sim \sum_{i=1}^k X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_{(i)}, X_i).$$

Vrstni red sumandov je nepomemben. Z upoštevanjem neodvisnosti in enake porazdeljenosti  $X_i$ , pogojno porazdelitev  $S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\}$  zapišemo kot

$$S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\} \sim \sum_{i=1}^k X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i).$$

(bolj natančen argument bralec lahko najde v [4] na strani 28.) Sedaj si poglejmo skupno karakteristično funkcijo slučajnega vektorja  $(S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)})$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}}(u_1, \dots, u_n) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left[ iu_1 S_t^{(1)} + \dots + iu_n S_t^{(n)} \right] \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ iu_1 S_t^{(1)} + \dots + iu_n S_t^{(n)} \right] \mid N_t = k \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{j=1}^n iu_j \sum_{i=1}^k X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \right] \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n iu_j X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \right] \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^n iu_j X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \right] \right]. \end{aligned}$$

Opazimo, da imamo v eksponentu sestavljen Poissonovo vsoto, za katero poznamo obliko karakteristične funkcije iz posledice 2.5. Za namene berljivosti označimo eksponent karakteristične funkcije kot

pišimo

$$\varphi_{S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}}(u_1, \dots, u_n) = e^{g(u_1, \dots, u_n)},$$

kjer je

$$g(u_1, \dots, u_n) = \lambda t \left( \underbrace{\mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{j=1}^n i u_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1) \right] \right]}_{(i)} - 1 \right). \quad (8)$$

Ker so množice  $A_j$  disjunktne, lahko (i) izrazimo kot integral<sup>1</sup>, da dobimo

$$\begin{aligned} (i) &= \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}} e^{\sum_{j=1}^n i u_j x \mathbb{1}_{A_j}(u, x)} dF_{U_1, X_1}(u, x) \\ &= \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}} \prod_{j=1}^n e^{i u_j x \mathbb{1}_{A_j}(u, x)} dF_{U_1, X_1}(u, x) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}} e^{i u_j x \mathbb{1}_{A_j}(u, x)} dF_{U_1, X_1}(u, x) \right. \\ &\quad \left. - \int_{([0, \infty) \times \mathbb{R}) \setminus A_j} dF_{U_1, X_1}(u, x) \right). \end{aligned}$$

Desno stran enačbe

Enačbo (8) tako poenostavimo ✓

$$\begin{aligned} &\lambda t \left( \left( \sum_{j=1}^n (\mathbb{E} [\exp (i u_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1))] - (1 - \mathbb{P}((U_1, X_1) \in A_j))) \right) - 1 \right) \\ &= \lambda t \sum_{j=1}^n (\mathbb{E} [\exp (i u_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1))] - 1) \end{aligned} \quad (9)$$

in vidimo, da je (9) ravno vsota eksponentov karakterističnih funkcij  $\varphi_{S_t^{(j)}}$ . Tako sledi, da so slučajne spremenljivke  $S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}$  neodvisne in po obliki karakteristične funkcije vidimo, da so res porazdeljene sestavljen Poissonovo. □

Izrek o markiranju CPP ima vrsto uporabnih posledic. Direktno nam poda enostaven alternativni dokaz za neodvisnost prirastkov.

**Posledica 3.11.** CPP ima neodvisne prirastke.

*Dokaz.* Naj bo  $A_1, \dots, A_n$  disjunktna particija množice  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  za realna števila  $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq t < \infty$  definirana kot

$$A_1 = [0, t_1] \times \mathbb{R}, \quad A_j = [t_{j-1}, t_j] \times \mathbb{R}, \quad \text{za } j = 2, \dots, n \quad \text{(in } A_{n+1} = [t_n, \infty) \times \mathbb{R}).$$

Potem so po izreku o markiranju slučajne spremenljivke  $S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}$  neodvisne in enako porazdeljene kot po osnovni ekvivalenci  $i \leq N_{t_j} \Leftrightarrow V_i \leq t_j$  včas.

$$S_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_{t_j}} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) = \sum_{i=N_{t_{j-1}}+1}^{N_{t_j}} X_i = S_{t_j} - S_{t_{j-1}} \quad \text{za } j = 1, \dots, n.$$

<sup>1</sup> V delu integral s takšnim zapisom območja integracije označuje Lebesgueov integral po Lebesgueovi ali Lebesgue-Stieltjesovi meri porojeni z ustrezno porazdelitveno funkcijo.

SLEMI TUDI STACIONARNOST PRIRASTKOV, SAJ JE  $\mathbb{1}(t_{j-1} \leq U_i < t_j) \sim \mathbb{1}(V_i < t_j - t_{j-1})$

IN ZATRAJI NEODVISNOSTI TUDI  $X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) = X_i \mathbb{1}(t_{j-1} \leq U_i < t_j) \sim X_i \mathbb{1}(V_i < t_j - t_{j-1})$ .

④ KRAJŠA IZPELJAVA:

KER SO MNÖŽICE  $A_1, A_2, \dots, A_n$  DISJUNKTNE, VELJA IDENTITETA

$$\exp\left(\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)\right) - 1 = \sum_{j=1}^n (\exp(\mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)) - 1) \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)$$

TOREJ

$$\begin{aligned} & E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)\right) - 1\right] \\ &= \sum_{j=1}^n E\left[(\exp(\mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)) - 1) \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)\right] \\ &= \sum_{j=1}^n E\left[(\exp(\mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)) - 1)\right]. \end{aligned}$$

(\*\*) POSLEDICI 3.11 ZLATICA DODAMO TUDI STACIONARNOST

PRIRASIKOV. TU PA ZADES POTREBUJEMO

$$S_{t_j} - S_{t_{j-1}} = S_t^{(j)} \sim \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)$$

KER JE  $U_i \sim U[0, t]$ , JE  $\mathbb{1}(t_{j-1} < U \leq t_j) \sim \mathbb{1}(U \leq t_j - t_{j-1})$ ,

ZARADI NEODVISNOSTI PA JE TUDI

$$\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}(t_{j-1} < U \leq t_j) \sim \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}(U \leq t_j - t_{j-1}), \text{ TOREJ } S_{t_j} - S_{t_{j-1}} \sim S_{t_j - t_{j-1}}.$$

QED

**Posledica 3.12.** Če v predpostavkah izreka o markiranju CPP sprostimo  $t \geq 0$ , so procesi  $(S_t^{(j)})_{t \geq 0}$  med seboj neodvisni in imajo neodvisne prirastke.

*Dokaz.* Najprej fiksiramo  $j = 1, \dots, n$  in pokažemo, da ima  $(S_t^{(j)})_{t \geq 0}$  neodvisne prirastke, z enakim argumentom kot v prejšnji posledici. Za realna števila  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_\infty$  definiramo  $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k)$  in množice

$$A_k^* = A_j \cap (\Delta_k \times \mathbb{R}), \quad k = 1, \dots, m.$$

Po izreku o markiranju so slučajne spremenljivke

$$\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_k^*}(V_i, X_i) \sim \sum_{i=N_{t_{k-1}}+1}^{N_{t_k}} X_i \mathbb{1}_{A_j}(V_i, X_i) = S_{t_k}^{(j)} - S_{t_{k-1}}^{(j)}$$

med seboj neodvisne. Neodvisnost procesov  $(S_t^{(1)})_{t \geq 0}, \dots, (S_t^{(n)})_{t \geq 0}$  pokažemo po definiciji 5.8. Za  $j = 1, \dots, n$  in  $m_j \in \mathbb{N}$  naj bodo  $0 = t_0^{(j)} < t_1^{(j)} < \dots < t_{m_j}^{(j)} < \infty$  poljubni nabori realnih števil. Definiramo  $\Delta_k^{(j)} = [t_{k-1}^{(j)}, t_k^{(j)})$  in množice

$$A_k^{*(j)} = A_j \cap (\Delta_k^{(j)} \times \mathbb{R}), \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m_j,$$

ki so očitno disjunktna particija množice  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  za vsak  $j = 1, \dots, n$ . Naj bo  $t = \max_{j=1, \dots, n} t_{m_j}^{(j)}$ . Po izreku o markiranju so prirastki porazdeljeni kot

$$\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_k^{*(j)}}(U_i, X_i) \sim S_{t_k^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{k-1}^{(j)}}^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m_j$$

in med seboj neodvisni. Podobno kot v trditvi 3.5 za  $j = 1, \dots, n$  lahko tvorimo Borelovo funkcijo  $g_j : \mathbb{R}^{m_j+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_j+1}$ , da velja

$$g_j \left( S_{t_1^{(j)}}^{(j)} - S_{t_0^{(j)}}^{(j)}, \dots, S_{t_{m_j}^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{m_j-1}^{(j)}}^{(j)} \right) = \left( S_{t_0^{(j)}}^{(j)}, \dots, S_{t_{m_j}^{(j)}}^{(j)} \right).$$

in ker so prirastki med seboj neodvisni, smo tako po definiciji pokazali neodvisnost procesov  $(S_t^{(1)})_{t \geq 0}, \dots, (S_t^{(n)})_{t \geq 0}$ .  $\square$

**Zgled 3.13.** Markiranje je v praksi posebej uporabno pri analizi produktov proporcionalnega pozavarovanja, kjer si zavarovalnica (cedent) in pozavarovalnica delita obveznosti in dobiček glede na velikost zahtevkov. Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP v katerem se števamo nenegativne slučajne spremenljivke  $X_i$ , ki predstavljajo zahtevke, ki jih zavarovalnica prejema, in  $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_n < \infty$  pozitivna realna števila. Za fiksen  $t \geq 0$  so množice  $A_1, \dots, A_{n+1}$  in  $B$  disjunktna particija množice  $[0, \infty)^2$  oblike

$$A_j = [0, t) \times [d_{j-1}, d_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad A_{n+1} = [0, t) \times [d_n, \infty) \text{ in } B = [t, \infty) \times [0, \infty).$$

Po izreku o markiranju vemo, da so slučajne spremenljivke  $S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}$  med seboj neodvisne in imajo sestavljen Poissonovo porazdelitev. Tako lahko analiziramo posamezen sloj kot produkt sam zase in ustrezno določimo delež premij, ki ga pozavarovalnica dobi za kritje zahtevkov določenega sloja. Če v pogodbi ne določimo končnega časa  $t$  (seveda to ni realno), nam posledica 3.12 zagotavlja, da so procesi  $(S_t^{(1)})_{t \geq 0}, \dots, (S_t^{(n)})_{t \geq 0}$  vselej medsebojno neodvisni.  $\diamond$

## ELEGANTNEJŠI DOKAŽI:

PO DEFINICIJI NEODVISNOSTI SLUČAJNIH PROCESOV

JE DOVOLJ DOKAZATI, DA SO ZA POLJUBNE

$$0 = t_0^{(j)} < t_1^{(j)} < \dots < t_{m_j}^{(j)} ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{VSI PRIZASTKI } S_{t_k^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{k-1}^{(j)}}^{(j)} ; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m_j$$

MED SEBOJ NEODVISNI. VELJA:

$$S_{t_k^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{k-1}^{(j)}}^{(j)} = \sum_{i=N_{t_{k-1}^{(j)}}+1}^{N_{t_k^{(j)}}} X_i \mathbb{1}_{A_j}(V_i, X_i).$$

IZ OSNOVNE EKVIVALENCE  $i \leq N_{t_k^{(j)}} \Leftrightarrow V_i \leq t_k^{(j)}$  DOBIMO,

DA JE TUDI

$$S_{t_k^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{k-1}^{(j)}}^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_k} X_i \mathbb{1}_{A_{jk}}(V_i, X_i),$$

KJER JE  $t = \max \{ t_{m_1}^{(1)}, t_{m_2}^{(2)}, \dots, t_{m_n}^{(n)} \}$  IN  $A_{jk} = A_j \cap ((t_{k-1}^{(j)}, t_k^{(j)}) \times \mathbb{R})$ .

NEODVISNOST ZDAJ SLEDI IZ DISJUNKTNOSTI MNOŽIC  $A_{jk}$

IN IZREKA O MARKIRANJU.

QED

## 4. CRAMÉR–LUNDBERGOV MODEL

Razdelek je prirejen po [3], [4], [5] in [9].

V tem razdelku obravnavamo najbolj intenzivno raziskan model v teoriji propada, običajno imenovan Cramér–Lundbergov model. V svoji najosnovnejši obliki ga je v zgodnjih 1900. letih izpeljal švedski aktuar Filip Lundberg, da bi ocenil ranljivost zavarovalnice za propad. Ceprav je model v svoji ideji dokaj preprost, zajema bistvo povezave ravni rezerv zavarovalnice in njene izpostavljenosti tveganju, kar je razlog, zakaj je postal temeljni meritni model v teoriji propada. V preteklem stoletju je bilo razvitih veliko tehnik za analizo Cramér–Lundbergovega modela, ki so se večinoma osredotočale na kvantifikacijo verjetnosti propada zavarovalnice. V razdelku definiramo model in izpeljemo Lundbergovo neenakost ter asimptotično obnašanje verjetnosti propada v primeru, ko zavarovalniške zahtevke modeliramo z luhkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. V zgledih pokažemo, kako do rezultatov, ki nam jih zagotavlja teorija, pridemo v praksi z Monte Carlo simulacijami procesa tveganja.

### 4.1. Proces tveganja in verjetnost propada.

**Definicija 4.1.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP, kjer so slučajne spremenljivke  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , ki jih seštevamo s.g. nenegativne. *Proces tveganja* v Cramér–Lundbergovem modelu definiramo kot družino slučajnih spremenljivk

$$U_t = u + p(t) - S_t, \quad t \geq 0,$$

kjer je  $u \geq 0$  začetni kapital zavarovalnice<sup>2</sup> in  $p(t)$  funkcija prihodkov iz premij.

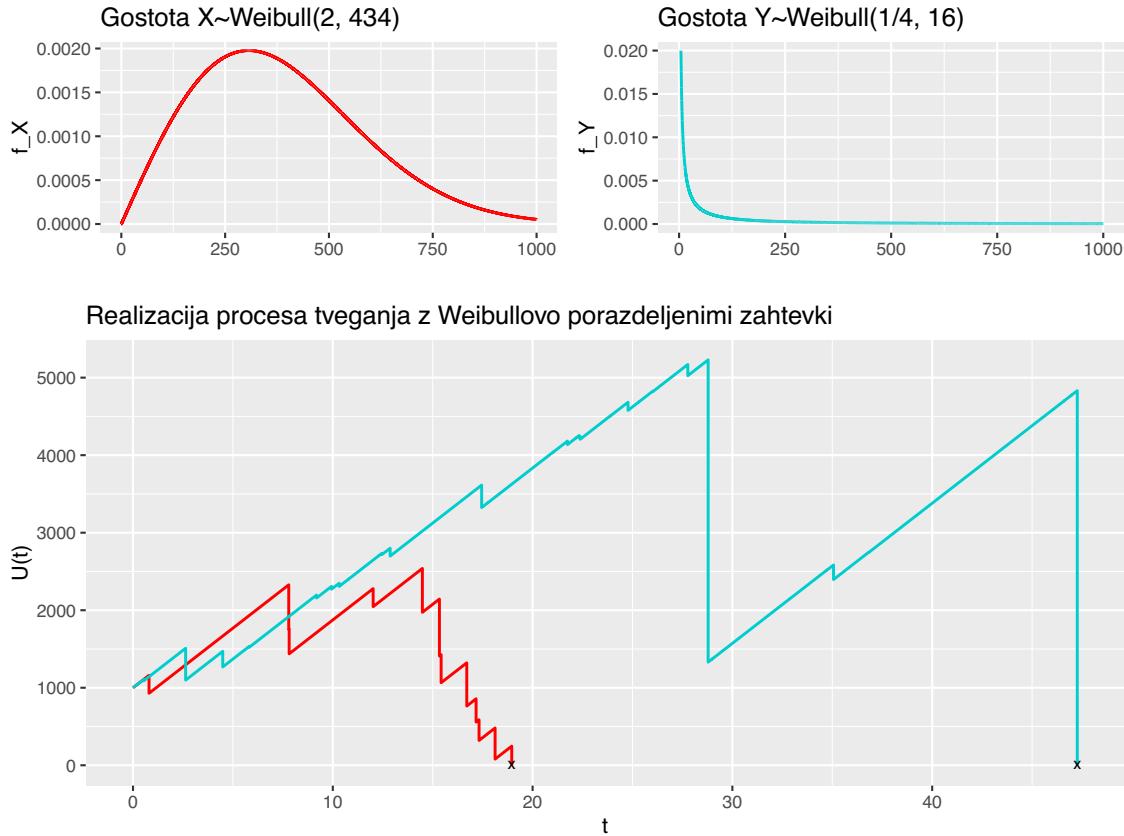
**Opomba 4.2.** V resnici lahko veliko lastnosti procesa tveganja izpeljemo brez predpostavke, da prihodi zahtevkov v  $(S_t)_{t \geq 0}$  sledijo homogenemu Poissonovemu procesu, ampak lahko privzamemo, da sledijo splošnemu prenovitvenemu procesu. Zato bomo pri dokazovanju nekaterih rezultatov medprihodne čase zahtevkov  $T_i$  obravnavali v splošnem, ne da bi predpostavili, da so eksponentno porazdeljeni.

Vrednost  $U_t$  predstavlja kapital zavarovalnice ob času  $t \geq 0$ . Standardno je vzeti deterministično funkcijo  $p(t) = ct$ , kjer je  $c > 0$  stopnja prihodkov premij. Uporaba linearne funkcije za modeliranje premijskega dohodka v Cramér–Lundbergovem modelu ponuja realističen približek zato, ker zavarovalnice pogosto doživljajo stabilno povečevanje premijskega dohodka skozi čas. Poleg tega je izbira linearne funkcije preprosta, zato bomo v nadaljevanju privzeli  $p(t) = ct$ . Poglejmo si realizaciji procesa tveganja, ko so zahtevki  $X_i$  porazdeljeni Weibullovo 5.10 z različnimi parametri.

**Zgled 4.3.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu z začetnim kapitalom  $u = 1000$  in  $p(t) = 200t$  ter intenzivnostjo prihodov zahtevkov  $\lambda = 1$ . Naj bodo v prvem primeru (rdeča) zahtevki porazdeljeni kot  $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$  in v drugem primeru (modra) kot  $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$ .

<sup>2</sup> Proces tveganja vedno gledamo v odvisnosti od začetnega kapitala  $u$ , zato za fiksen  $u \geq 0$  pripadajočo verjetnost označimo s  $\mathbb{P}_u$ .

To pojasnilo bolj sedi k definiciji<sup>22</sup> 4.5. predlagam dosledno uporabo indeksa pri vseh verjetnostih in pričakovanih vrednostih, ki se nanašajo na proces tveganja: spet jiti ni toliko, indeksa seveda ni npr. pri  $\mathbb{P}(\sup_{u \leq t} U_u > u)$ .



SLIKA 4. Realizaciji procesa tveganja

Pri obeh realizacijah vidimo, da proces tveganja v nekem trenutku pade pod 0 (tam ga tudi ustavimo). Čeprav je pričakova vrednost  $\mathbb{E}[Y_i] = 384 \approx \mathbb{E}[X_i] = 217\sqrt{\pi} \approx 384,62$  opazimo bistveno razliko med realizacijama. V rdečem primeru proces pade pod 0 po več zaporednih manjših izgubah, v modrem primeru pa po eni zelo veliki izgubi. V nadaljevanju bomo primera ločili, ampak pred tem definirajmo osnovne pojme, ki jih bomo obravnavali v razdelku.

◇

**Definicija 4.4.** Propad definiramo kot dogodek, da proces tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  kadar koli pade pod 0. Torej  $\text{Iv je torej dogodek } \{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\}$ .

in času ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\}, \quad \text{NA TEM NIŠTU SIE DEFINIRALI}$$

pravimo čas propada. Seveda ~~med dogodkom~~ velja enakost ~~če enega od obetih dogodkov,~~

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} = \{T < \infty\}.$$

**Definicija 4.5.** Verjetnost propada definiramo kot funkcijo  $\psi(u) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  s predpisom

$$\psi(u) = \mathbb{P}_u(T < \infty).$$

*pravil*

**Definicija 4.6.** Po konstrukciji procesa tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  je verjetnost propada mogoča le ob prihodih zahtevkov. Z  $V_n$  označimo čas, ob katerem prispe  $n$ -ti zahtevek, in definiramo *ogrodje procesa tveganja* kot  $(U_{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Trditev 4.7.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu in  $(U_{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$  njegovo ogrodje ter  $T_n := V_n - V_{n-1}$  medprihodni čas  $n$ -tega zahtevka ( $V_0 = T_0 = 0$ ). Potem velja

$$\psi(u) = \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right),$$

kjer je  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  kumulativna izguba po  $n$  zahtevkih in  $Y_i = X_i - cT_i$  izguba  $i$ -tega prihoda.

*Dokaz.* S pomočjo ogrodja procesa tveganja lahko dogodek propada zapišemo kot

$$\begin{aligned} \{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} &= \left\{ \inf_{t \geq 0} U_t < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} U_{V_n} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \{u + p(V_n) - S_{V_n}\} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ u + cV_n - \sum_{i=1}^n X_i \right\}}_{-Z_n} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \{-Z_n\} < -u \right\} \\ &= \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right\}, \end{aligned}$$

kar nam da želeno enakost.  $\square$

Tako verjetnost propada prevedemo na prehodno verjetnost diskretnega slučajnega sprehoda  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Cilj obravnavanja verjetnosti propada v Cramér–Lundbergovem modelu je, da se izognemo skoraj gotovemu propadu oziroma, da je verjetnost, da kumulativna izguba  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  preseže  $u$ , tako majhna, da lahko v praksi dogodek propada izključimo.

**Trditev 4.8.** Naj bo  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje slučajnih spremenljivk, definirano kot  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke  $Y_i$  z  $\mathbb{E}[Y_i] < \infty$ . Če velja  $\mathbb{E}[Y_i] \geq 0$ , za vsak  $u > 0$  velja

$$\mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right) = 1.$$

*Dokaz.* Zaporedje slučajnih spremenljivk  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zadošča predpostavkam krepkega zakona velikih števil 5.15. Velja

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} = \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} \mathbb{E}[Y_n].$$

SKORAJ  
GOTOVELA  
PROPADA  
SI RES NE  
ŽELIMO!

Torej bo  $Z_n$  v primeru, ko je  $\mathbb{E}[Y_n] > 0$ , skoraj gotovo asimptotično linearno naraščal proti  $\infty$  kot  $\mathbb{E}[Y_n] n \rightarrow \infty$  in bo za poljuben  $u > 0$  veljalo zato bo vrljalo celo

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n = \infty\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

za poljuben  $u > 0$

Dokaz za primer, ko je  $\mathbb{E}[Y_n] = 0$  je precej bolj tehničen in ne preveč informativen, zato ga bomo izpustili. Izkaže se, da vedno obstajata neki podzaporedji  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , za kateri gre  $Z_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{s.g.} \infty$  in  $Z_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty$ . Dokaz lahko bralec najde v [6] v poglavju 4.  $\square$

**Opomba 4.9.** Iz trditve 4.8 (ob predpostavkah  $\mathbb{E}[X_i] < \infty$  in  $\mathbb{E}[T_i] < \infty$ ) sledi, da moramo premijo (in s tem  $c$ ) izbrati tako, da bo  $\mathbb{E}[Y_i] < 0$ , saj bo tako  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty$  in je to edini primer, ko lahko upamo, da verjetnost propada ne bo enaka 1.

**Definicija 4.10.** Pravimo, da proces tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  v Cramér–Lundbergovem modelu zadošča *pogoju neto zaslужka* (ang. *net profit condition*), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]}, \quad \text{oziroma} \quad c = (1 + \rho) \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} \quad \text{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljevanju imenovali NPC.

Zahteva NPC za analizo poslovanja zavarovalnice je dokaj intuitivna, saj pove, da mora biti v nekem časovnem intervalu pričakovani dohodek iz premij večji od pričakovanega izplačila zahtevkov.

**4.2. Verjetnost preživetja kot integralska enačba.** Od sedaj naprej predpostavimo, da je  $(S_t)_{t \geq 0}$  v procesu tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  sestavljeni Poissonov proces. V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo asimptotično vedenje  $\psi(u)$ , ko gre  $u \rightarrow \infty$ . Verjetnost propada zelo redko lahko eksplicitno izračunamo, ampak veliko lahko povemo o redu konvergencije s tem, da jo izrazimo kot integralsko enačbo.

**Definicija 4.11.** Za lepšo notacijo v nadaljevanju definiramo funkcijo *verjetnosti preživetja* kot  $\theta(u) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  s predpisom

$$\theta(u) = \mathbb{P}_u(T = \infty) = 1 - \psi(u).$$

**Lema 4.12.** (*Integralska enačba za verjetnost preživetja*) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC, ter naj velja  $\mathbb{E}[X_1] < \infty$  in, da imajo slučajne spremenljivke  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gostoto. Potem  $\theta$  zadošča naslednji enakosti

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1 + \rho)} \int_{(0, u]} \theta(u - x) d\bar{F}_{X_1}(x), \tag{10}$$

kjer je  $\bar{F}_{X_1}$  porazdelitev integriranega repa 5.23 slučajne spremenljivke  $X_1$ .

*Dokaz.* Po trditvi 4.7 velja

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  in  $Y_i = X_i - cT_i$ . Torej je

$$\theta(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq u\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(\{Z_n \leq u \text{ za } \forall n \in \mathbb{N}\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{Y_1 \leq u\} \cap \{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \text{ za } \forall n \geq 2\}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y_1 \leq u\}} \mathbb{P}\left(\{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \text{ za } \forall n \geq 2\} \mid Y_1\right)\right].
\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je  $Y_1 = X_1 - cT_1$  in je torej dogodek  $\{Y_1 \leq u\}$  enak dogodku  $\{X_1 \leq u + cT_1\}$ . Poleg tega velja, da je  $(Z_n - Y_1 \mid Y_1)_{n \geq 2} \sim (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , saj so  $Y_i$  neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Upoštevamo še, da je  $T_1$  medprihodni čas v HPP( $\lambda$ ) in dobimo

$$\begin{aligned}
\theta(u) &= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,u+ct]} \mathbb{P}\left(\{Z_n \leq u - (x - ct) \mid n \in \mathbb{N}\}\right) dF_{X_1}(x) dF_{T_1}(t) \\
&= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,u+ct]} \theta(u - x + ct) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda t} dt.
\end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko  $z = u + ct$  (torej  $t = \frac{z-u}{c}$  in  $dt = \frac{dz}{c}$ ) in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_{(u,\infty)} e^{-\frac{\lambda z}{c}} \underbrace{\int_{(0,z)} \theta(z-x) dF_{X_1}(x)}_{g(z)} dz.$$

Ker ima porazdelitev  $F_{X_1}$  gostoto in je  $\theta$  zvezna omejena funkcija, sledi, da je funkcija  $g$  zvezna in jo lahko (po osnovnem izreku analize) odvajamo, da dobimo

$$\theta'(u) = \frac{\lambda}{c} \theta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,u)} \theta(u-x) dF_{X_1}(x).$$

Če sedaj obe strani integriramo po  $u$ , dobimo

$$\int_{(0,t]} \theta'(u) du = \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(u) du - \overbrace{\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \int_{(0,u]} \theta(u-x) dF_{X_1}(x) du}^{(i)} \quad (ii) \quad (11)$$

Na integralu  $(i)$  uporabimo per partes ( $\alpha = \theta(u-x)$  in  $d\beta = dF_{X_1}(x)$ ) ter upoštevamo, da ima  $F_{X_1}$  gostoto.

$$\begin{aligned}
(i) &= (\theta(u-x) F_{X_1}(x)) \Big|_0^u + \int_{(0,u)} \theta'(u-x) F_{X_1}(x) dx \\
&= \theta(0) F_{X_1}(u) - \int_{(0,u)} \theta'(u-x) F_{X_1}(x) dx.
\end{aligned}$$

Upoštevamo, da je  $F_{X_1}(0) = 0$ , saj je  $X_1 > 0$  skoraj gotovo. Vstavimo  $(i)$  v  $(ii)$  in dobimo

$$(ii) = -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0) F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \int_{(0,u]} \theta'(u-x) F_{X_1}(x) dx du.$$

Po Tonellijevem izreku 5.20 lahko zamenjamo vrstni red integracije.

$$\begin{aligned}
(ii) &= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0) F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) \int_{[x,t]} \theta'(u-x) dudx \\
&= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0) F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) (\theta(t-x) - \theta(0)) dx. \\
&= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) \theta(t-x) dx.
\end{aligned}$$

Vstavimo (ii) v enačbo (11) in dobimo

$$\begin{aligned}
\theta(t) - \theta(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) \theta(t-x) dx, \\
\theta(t) &= \theta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} (1 - F_{X_1}(x)) \theta(t-x) dx \\
&= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,u]} \theta(u-x) d\bar{F}_{X_1}(x).
\end{aligned}$$

Pri enakosti v zadnji vrstici smo upoštevali

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1+\rho} \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]}$$

in zamenjali oznako spremenljivke  $t \mapsto u$ . S tem je lema dokazana.  $\square$

**Opomba 4.13.** Konstanto  $\theta(0)$ , ki se pojavi v (10), lahko izračunamo. Ker  $c$  zadošča NPC, po argumentu v dokazu trditve 4.8 velja

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty.$$

Po zveznosti  $\mathbb{P}$  od spodaj sledi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq u \right) = \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq \infty \right) = 1.$$

Če torej v enačbi (10) pošljemo  $u \rightarrow \infty$ , dobimo

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \theta(u) = 1 = \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{(0,u]}(x) \theta(u-x) d\bar{F}_{X_1}(x).$$

Po izreku o monotoni konvergenci 5.18 sledi

$$\begin{aligned}
1 &= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,\infty)} 1 d\bar{F}_{X_1}(x) \\
&= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}.
\end{aligned}$$

Torej je  $\theta(0) = \frac{\rho}{1+\rho}$ . Enakost upoštevamo v enačbi (10) in uvedemo oznako  $\frac{1}{1+\rho} = q$ , da dobimo

$$\theta(u) = (1-q) + q \int_{(0,u]} \theta(u-x) d\bar{F}_{X_1}(x). \quad (12)$$

**Opomba 4.14.** Integralska enačba (12) skoraj ustreza definiciji prenovitvene enačbe 5.25, s to bistveno razliko, da  $q\bar{F}_{X_1}$  ni verjetnostna mera, saj velja  $\lim_{x \rightarrow \infty} q\bar{F}_{X_1}(x) = q < 1$ . Taki enačbi pravimo defektna prenovitvena enačba. V splošnem defektne prenovitvene enačbe lahko rešujemo s pomočjo Banachovega izreka o negibni točki 5.29. Da funkcija  $\theta$  reši enačbo (12), lahko povemo tako, da je negibna točka operatorka

$$Ag(u) = (1 - q) + q \int_{(0,u]} g(u - x) d\bar{F}_{X_1}(x), \quad (13)$$

saj je ta skrčitev na prostoru omejenih funkcij  $B([0, \infty))$ , opremljenim s supremum metriko

$$d_\infty(f, g) = \sup_{u \in [0, \infty)} |f(u) - g(u)|, \quad f, g \in B([0, \infty)).$$

To enostavno pokažemo z oceno

$$\begin{aligned} \sup_{u \in [0, \infty)} |Af(u) - Ag(v)| &= \sup_{u \in [0, \infty)} \left| q \int_{(0,u]} f(u - x) - g(u - x) d\bar{F}_{X_1}(x) \right| \\ &\leq \sup_{u \in [0, \infty)} q \int_{(0,u]} |f(u - x) - g(u - x)| d\bar{F}_{X_1}(x) \\ &\leq \sup_{u \in [0, \infty)} q \int_{(0,u]} d_\infty(f, g) d\bar{F}_{X_1}(x) \\ &\leq q \int_{(0,\infty)} d_\infty(f, g) d\bar{F}_{X_1}(x) \\ &= qd_\infty(f, g). \end{aligned}$$

EKSILICITNA RAZJAVA REŠITVE,  
KI SE ŽDAJ NAHaja V DOKAŽU  
IZREKA 4.30, SOOI ŽE SEM!

**4.3. Lakhorepe porazdelitve.** Pri analizi asimptotike verjetnosti propada se bomo najprej omejili na primer, ko ima porazdelitev slučajnih spremenljivk  $X_i$ , ki jih seštevamo v CPP lahek rep, saj je bila osnovna teorija, ki sta jo razvila H. Cramér in F. Lundberg, izpeljana pod to predpostavko.

**Definicija 4.15.** Pravimo, da ima slučajna spremenljivka  $X$  *lahkorepo porazdelitev*, če za nek  $\varepsilon > 0$  velja

$$\mathbb{E}[e^{uX}] = M_X(u) < \infty \quad \text{za } u \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Sicer pravimo, da ima  $X$  *težkorepo porazdelitev*.

**Opomba 4.16.** V razdelku večinoma delamo z nenegativnimi slučajnimi spremenljivkami. Za te momentno-rodovna funkcija vedno obstaja vsaj na intervalu  $(-\infty, 0]$ .

**Zgled 4.17.** (Nadaljevanje zgleda 4.3) V zgledu smo obravnavali proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, kjer so zahtevki (rdeča)  $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$  in (modra)  $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$ . Opazili smo, da je v prvem primeru propad posledica več manjših izgub, v drugem pa ene velike izgube. To je značilnost težkorepih porazdelitev. Za Weibullovo porazdelitev velja, da ima za parameter  $a \geq 1$  lahek, za  $a < 1$  pa težak rep.

*Dokaz.* Momentno-rodovna funkcija  $X \sim \text{Weibull}(a, b)$  je enaka

$$M_X(u) = \int_0^\infty e^{ux} \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} dx \quad \left(y = \frac{x}{b}, dy = \frac{dx}{b}\right)$$

$$= a \int_0^\infty e^{uby} y^{a-1} e^{-y^a} dy.$$

Vidimo, da na spodnji meji 0 ni težav za noben  $a > 0$ , medtem ko v neskončnosti za  $a \in (0, 1)$  integral divergira, saj se eksponent poenostavi v  $y^a(uby^{1-a} - 1) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$ . Če v nadaljevanju predpostavimo  $a \geq 1$  in uvedemo  $z = y^a$  ( $dz = ay^{a-1}dy$ ) pa lahko pridemo do naslednje oblike za momentno rodovno funkcijo  $X$ .

$$\begin{aligned} M_X(u) &= \int_0^\infty e^{ubz^{\frac{1}{a}}} e^{-z} dz \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(ubz^{\frac{1}{a}})^k}{k!} e^{-z} dz \quad \text{Tonelli 5.20} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \int_0^\infty z^{\frac{k}{a}} e^{-z} dz \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k}{a} + 1\right). \end{aligned}$$

◇

**Opomba 4.18.** V praksi z lahkorepnimi porazdelitvami modeliramo zahtevke, kjer verjentosti ekstremnih dogodkov (torej zelo velikih zahtevkov) eksponentno pada proti 0. To neposredno sledi iz definicije 4.15 in neenakosti Markova 5.13, saj za vsak  $x > 0$  in  $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  velja

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(e^{uX} > e^{ux}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{uX}]}{e^{ux}}.$$

**Definicija 4.19.** Naj velja, da ima slučajna spremenljivka  $Y_1 = X_1 - cT_1$  iz trditve 4.7 lahek rep. Če obstaja enoličen  $\ell > 0$ , za katerega velja

$$M_{Y_1}(\ell) = 1,$$

temu številu pravimo *Lundbergov koeficient*.

**Trditev 4.20.** Brž ko Lundbergov koeficient  $\ell$  (pod predpostavkami definicije 4.19 in pogoja NPC) obstaja, je enolično določen.

*Dokaz.* Zaradi konveksnosti eksponentne funkcije je množica  $I = \{u \in \mathbb{R} \mid M_{Y_1}(u) < \infty\}$  konveksna, torej je  $I$  interval, poltrak ali kar cela realna os. Po predpostavki obstaja pozitiven  $\ell \in I$  za katerega vejla  $M_{Y_1}(\ell) = 1$ . Ker ima  $Y_1$  lahek rep, obstaja  $\varepsilon > 0$ , da je  $M_{Y_1}(u) < \infty$  za  $u \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I$ . Ker velja  $M_{Y_1}(0) = 1$  in  $M'_{Y_1}(0) = \mathbb{E}[Y_1] < 0$  (zaradi pogoja NPC) ter  $M''_{Y_1}(u) = \mathbb{E}[Y_1^2 e^{Y_1 u}] > 0$  ( $Y_1 \neq 0$  skoraj gotovo) za  $u > 0$ , je  $M_{Y_1}$  zvezna konveksna funkcija na  $I$ , kjer v okolici ničle pada. Tako je  $\ell$  zaradi konveksnosti  $M_{Y_1}$  enolično določen. □

**Izrek 4.21.** (Lundbergova neenakost) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in zanj obstaja Lundbergov koeficient  $\ell$ . Potem za vsak  $u > 0$  velja

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u}.$$

*Dokaz.* Neenakost bomo dokazali z indukcijo. Za  $u > 0$  in  $n \in \mathbb{N}$  definiramo

$$\psi_n(u) = \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u \right),$$

kjer je  $Z_k = \sum_{i=1}^k Y_i$  kumulativna izguba po  $k$  zahtevkih enako definirana kot v trditvi 4.7. Vidimo, da je (po zveznosti  $\mathbb{P}$  od spodaj)  $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$ , torej moramo pokazati, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $\psi_n(u) \leq e^{-\ell u}$ .

( $n = 1$ ) : Uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$\psi_1(u) = \mathbb{P} (e^{\ell Z_1} > e^{\ell u}) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = e^{-\ell u}.$$

( $n \rightarrow n + 1$ ) : S  $F_{Y_1}$  označimo porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke  $Y_1$ . Potem velja

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n+1} Z_k > u \right) \\ &= \underbrace{\mathbb{P} (Y_1 > u)}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{P} \left( \max_{2 \leq k \leq n+1} \{Y_1 + (Z_k - Y_1)\} > u, Y_1 \leq u \right)}_{(ii)} \end{aligned}$$

Najprej se posvetimo (ii). Po indukcijski predpostavki velja

$$\begin{aligned} (ii) &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} \{x + Z_k\} > u \right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u - x \right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \psi_n(u - x) dF_{Y_1}(x) \\ &\stackrel{\text{L.P.}}{\leq} \int_{(-\infty, u]} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x). \end{aligned}$$

Za oceno (i) kot v primeru  $n = 1$  uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$(i) = \psi_1(u) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = \int_{(u, \infty)} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).$$

Če torej seštejemo (i) in (ii) dobimo željeno oceno

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x) \\ &= e^{-\ell u} M_{Y_1}(\ell) \\ &= e^{-\ell u}. \end{aligned}$$

□

**Opomba 4.22.** Iz izreka 4.21 je razvidno, da lahko v praksi z dovolj visokim začetnim kapitalom  $u$  verjetnost propada zadovoljivo omejimo blizu 0. Seveda je meja odvisna tudi od Lundbergovega koeficiente  $\ell$ .

**Zgled 4.23.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja, da so zahtevki neodvisno eksponentno porazdeljeni s parametrom  $\mu > 0$ . Vemo, da ima momentno rodovna funkcija  $X_1$  obliko

$$M_{X_1}(u) = \frac{\mu}{\mu - u} \quad \text{za } u < \mu.$$

Tako dobimo, da ima momentno rodovna funkcija  $Y_1 = X_1 - cT_1$  obliko

$$M_{Y_1}(u) = M_{X_1}(u)M_{T_1}(-cu) = \frac{\mu}{\mu - u} \frac{\lambda}{\lambda + cu} \quad \text{za } u \in (-\frac{\lambda}{c}, \mu).$$

Sedaj lahko izračunamo Lundbergov koeficient  $\ell$

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(\ell) &= 1, \\ \frac{\mu}{\mu - \ell} \frac{\lambda}{\lambda + c\ell} &= 1, \\ \mu\lambda &= (\mu - \ell)(\lambda + c\ell), \\ \mu\lambda &= \mu\lambda - \ell\lambda + \mu c - c\ell^2, \\ 0 &= \mu c - c\ell - \lambda. \end{aligned}$$

Dobimo

$$\ell = \mu - \frac{\lambda}{c}. \quad (14)$$

Velja  $\ell \in (0, \mu)$ , saj v našem modelu velja pogoj NPC,

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} = \frac{\lambda}{\mu} < c \iff \mu > \frac{\lambda}{c}.$$

Če uporabimo alternativno formulacijo NPC pogoja, dobimo

$$c = (1 + \rho) \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \ell = \mu - \frac{\lambda}{(1 + \rho) \frac{\lambda}{\mu}} = \mu \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right). \quad (15)$$

Tako dobimo zgornjo mejo za verjetnost propada

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u} = e^{-\mu u \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right)}$$

in vidimo, da povečanje stopnje prihodkov premij čez neko mejo ne bistveno vpliva na oceno, saj  $\downarrow$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{-\mu u \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right)} = e^{-\mu u}.$$

V nadaljevanju bomo videli, da je Lundbergova neenakost v primeru eksponentno porazdeljenih zahtevkov skoraj točna vrednost verjetnosti propada, zgrešena le za konstanto. V splošnem pa je zelo težko določiti Lundbergov koeficient kot funkcijo parametrov porazdelitev  $X_1$  in  $T_1$  in zato uporabljamo numerične metode za njegovo aproksimacijo kot na primer Monte Carlo simulacije.  $\diamond$

Sedaj izplejemo enega temeljnih rezultatov v teoriji tveganja, ki ga je leta 1930 dokazal Harald Cramér. Za lahkorepe porazdileitve bomo določili točen red konvergencije verjetnosti propada.

**Izrek 4.24.** (Asimptotika verjetnosti propada, lahkorepe porazdelitve) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient  $\ell$ . Naj imajo slučajne spremenljivke  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gostoto. Potem obstaja konstanta  $C > 0$ , za katere velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{\ell u} \psi(u) = C.$$

*Dokaz.* Najprej preoblikujemo enačbo (12), tako da upoštevamo  $\theta = 1 - \psi$

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= (1 - q) + q \int_{(0,u]} (1 - \psi(u - x)) d\bar{F}_{X_1}(x), \\ \psi(u) &= q(1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + \int_{(0,u]} \psi(u - x) d(q\bar{F}_{X_1}(x)). \end{aligned} \quad (16)$$

SEM SOTI  
KOMENTAR,  
DA IZRAŽAVA  
REŠITVE, KI  
JO DOBIJO  
IZ BANACHOVEGA  
SKRČITVENEGA  
NAČELA, ZA  
ŠTUDIJ ASIMPTOTIKE  
ZAL NI NAJBOLJ  
PRIPRAVNA, ČETUDI  
JE DOKAJ  
EKSPlicitna.

Vidimo, da je enačba (16) še vedno defektna prenovitvena enačba. Iskanja rešitve bi se lahko lotili na način, ki ga opišemo v opombi 4.14, ampak v primeru lahkorepih porazdelitev se izkaže, da s trikom lahko enačbo (16) prevedemo na pravo prenovitveno enačbo. Za  $x > 0$  definiramo funkcijo  $F_\ell$  kot Esscherjevo transformacijo funkcije  $q\bar{F}_{X_1}$ .

$$F_\ell(x) = \int_{(0,x]} e^{\ell y} d(q\bar{F}_{X_1}(y)) = \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,x]} e^{\ell y} (1 - F_{X_1}(y)) dy, \quad (17)$$

Pokažimo, da je  $F_\ell$  porazdelitvena funkcija. Očitno je naraščajoča in velja

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_\ell(x) &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,\infty)} e^{\ell y} (1 - F_{X_1}(y)) dy \quad (\alpha = 1 - F_{X_1}(y), d\beta = e^{\ell y} dy) \\ &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \left( \left( \frac{(1 - F_{X_1}(y)) e^{\ell y}}{\ell} \right) \Big|_0^\infty + \frac{1}{\ell} \int_{(0,\infty)} e^{\ell y} f_{X_1}(y) dy \right) \\ &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \frac{1}{\ell} \left( \mathbb{E}[e^{\ell X_1}] - 1 \right). \end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je  $q = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{c\mathbb{E}[T_1]}$ , definicijo Lundbergovega koeficiente ter dejstvo, da je  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$  medprihodni čas v HPP( $\lambda$ ), da dobimo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_\ell(x) &= \frac{\mathbb{E}[e^{\ell X_1}] - 1}{c\ell \mathbb{E}[T_1]} \\ &= \frac{\frac{\lambda + c\ell}{\lambda} - 1}{c\ell \frac{1}{\lambda}} = 1. \end{aligned}$$

Če torej enačbo (16) pomnožimo z  $e^{\ell u}$ , dobimo

$$\begin{aligned} e^{\ell u} \psi(u) &= q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)} \psi(u - x) e^{\ell x} d(q\bar{F}_{X_1}(x)) \\ &= q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)} \psi(u - x) dF_\ell(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Vidimo, da sedaj enačba (18) ustrez obliki prenovitvene enačbe za par  $(q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)), F_\ell)$  in ker je funkcija  $u \mapsto q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  omejena na končnih

intervalih in  $F_\ell$  nearitmetična, lahko uporabimo Smithov ključni prenovitveni izrek 5.28, da dobimo rešitev

$$e^{\ell u} \psi(u) = q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + q \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)} (1 - \bar{F}_{X_1}(u-x)) dM^\ell(x), \quad (19)$$

kjer je  $M^\ell$  prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodnimi časi, ki imajo porazdelitveno funkcijo  $F_\ell$ . V splošnem  $M^\ell$  težko določimo. Če pa je  $u \mapsto q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  direktno Riemannovo integrabilna 5.26, nam Smithov izrek da asimptotično vedenje rešitve (19), ko gre  $u \rightarrow \infty$ . Direktno Riemannovo integrabilnost preverimo tako, da upoštevamo

$$\int_{(0,\infty)} x e^{\ell x} (1 - \bar{F}_{X_1}(x)) dx < \infty,$$

in funkcijo  $u \mapsto q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  zapišemo kot

$$q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) = q \int_{(u,\infty)} e^{\ell x} d\bar{F}_{X_1}(x) - q \ell \int_{(u,\infty)} (1 - \bar{F}_{X_1}(x)) e^{\ell x} dx.$$

**Tu ne vem kako lepo argumentirati rezultatov. Lahko napisšem samo pravilo za odvajanje produkta?** Tako vidimo, da je  $u \mapsto q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  razlika dveh ne-naraščajočih Riemannovo integrabilnih funkcij in je zato po kriteriju 5.27 direktno Riemannovo integrabilna. Dobimo

$$C = \lim_{u \rightarrow \infty} e^{\ell u} \psi(u) = \frac{q}{\alpha} \int_{(0,\infty)} e^{\ell x} (1 - \bar{F}_{X_1}(x)) dx, \quad (20)$$

kjer je  $\alpha = \int_{(0,\infty)} x dF_\ell(x)$ . S tem je izrek dokazan.  $\square$

**Zgled 4.25.** (Nadaljevanje zgleda 4.23) Vemo, da rešitve prenovitvene enačbe (19) iz izreka 4.24 v splošnem ne moremo eksplisitno izračunati. V zgledu 4.23 pa smo privzeli, da zahtevke modeliramo z eksponentno porazdelitvijo, torej  $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ . V tem primeru se izkaže, da lahko eksplisitno izračunamo verjetnost propada. Če si pogledamo enačbo (19), vidimo, da moramo izračunati le porazdelitev integriranega repa  $\bar{F}_{X_1}(u)$  in prenovitveno mero Esscherjeve transformacije  $F_\ell$ . Za eksponentno porazdelitev velja

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_1}(u) &= \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,u)} (1 - F_{X_1}(t)) dt \\ &= \mu \int_{(0,u)} e^{-\mu t} dt \\ &= F_{X_1}(u), \end{aligned}$$

saj je pozabljiva. Prenovitveno mero Esscherjeve transformacije pa dobimo tako, da najprej izračunamo porazdelitveno funkcijo  $F_\ell$  podano v enačbi (17).

$$\begin{aligned} F_\ell(u) &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,u]} e^{\ell x} (1 - F_{X_1}(x)) dx \\ &= \frac{\mu}{1 + \rho} \int_{(0,u]} e^{-x(\mu - \ell)} dx. \end{aligned}$$

Upoštevamo rezultat (15), torej  $\ell = \mu \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right)$  in vidimo, da je  $F_\ell$  porazdelitvena funkcija eksponentne slučajne spremenljivke s parametrom  $\frac{\mu}{1+\rho}$  oziroma  $\mu q$ . Torej je prenovitvena mera  $M^\ell(t)$  preprosto pričakovana število prihodov do časa  $t$  v HPP( $\mu q$ ), torej  $M^\ell(t) = \mu qt$ . Če vstavimo rezultata v enačbo (19), dobimo

$$\begin{aligned} e^{\ell u} \psi(u) &= q e^{\ell u} e^{-\mu u} + q \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)} e^{-\mu(u-x)} dM^\ell(x) \\ &= q e^{-u(\mu-\ell)} + \mu q^2 \int_{(0,u]} e^{-(\mu-\ell)(u-x)} dx \\ &= q e^{-u(\mu-\ell)} + \mu q^2 \frac{1}{\mu-\ell} \left( 1 - e^{-u(\mu-\ell)} \right) \\ &= q e^{-u(\mu-\ell)} + \frac{\mu}{(1+\rho)^2} \frac{1+\rho}{\mu} \left( 1 - e^{-u(\mu-\ell)} \right) \\ &= q e^{-u(\mu-\ell)} + q \left( 1 - e^{-u(\mu-\ell)} \right) \\ &= q = \frac{1}{1+\rho}. \end{aligned}$$

Končno dobimo, da je verjetnost propada enaka

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\ell u}. \quad (21)$$

◇

Vidimo, da se  $\psi(u)$  z oceno, ki jo dobimo z Lundbergovo neenakostjo v zgledu 4.23, res razlikuje le za konstanto  $\frac{1}{1+\rho}$ . To je seveda zelo poseben primer, ko lahko vse količine izračunamo eksplicitno. Pokažimo, kako bi do približkov funkcije  $\psi(u)$  v praksi lahko prišli z Monte Carlo simulacijami.

**Zgled 4.26.** Kot v zgledu 4.23 predpostavimo, da so zahtevki porazdeljeni eksponentno, torej  $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ . Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov  $\lambda = 1$ , stopnja prihodkov premij  $c = 1500$  in pričakovana vrednost zahtevkov 1000 €, torej  $\mu = \frac{1}{1000}$ . Potem lahko verjetnost propada eksplicitno izračunamo po formuli (21). Prvo izračuamo  $\rho$  po formuli (15), in  $\ell$  po (14), torej

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{c\mu}{\lambda} - 1 \\ &= \frac{1500 \cdot \frac{1}{1000}}{1} - 1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

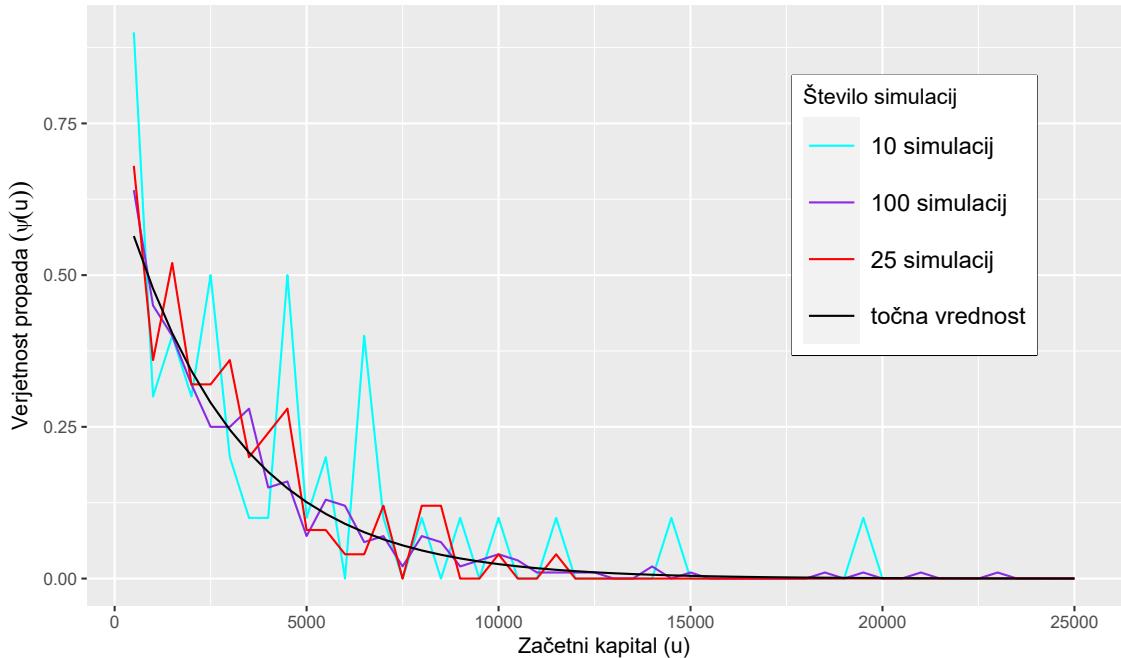
$$\begin{aligned} \ell &= \mu - \frac{\lambda}{c} \\ &= \frac{1}{1000} - \frac{1}{1500} = \frac{1}{3000}. \end{aligned}$$

Vsatvimo vrednosti v (21) in dobimo

$$\psi(u) = \frac{2}{3} e^{-\frac{u}{3000}}.$$

Sedaj definiramo zaporedje  $(u_n)_{n=1}^{50}$  s predpisom  $u_n = 500n$  in za vsak  $n$  simuliramo 10, 50 in 100 realizacij procesa tveganja, bodisi do časa  $T = 1000$  bodisi dokler ne propade in za vsak  $n$  izračunamo približek za verjetnost propada kot delež propadlih realizacij z vsemi. Aproximacijo  $\psi(u)$  prikažemo na sliki 5.

$$\lambda = 1 \quad \mu = 0.001 \quad c = 1500$$



SLIKA 5. Aproksimacija verjetnosti propada  $\psi(u)$  z Monte Carlo simulacijami.

Kot vidimo, se približki z naraščajocim številom simulacij približujejo funkciji  $\psi(u)$ , ampak, za res dobro aproksimacijo, bi morali to število krepko povečati, saj na primer za vrednost  $u = 16000$  pride  $\psi(16000) \approx 0,0032186334$ , kar je približno 0.3% in v praksi ni zanemarljivo, ampak v naši simulaciji nobena realizacija procesa tveganja ni padla pod 0.

◇

**4.4. Težkorepe porazdelitve.** Rezultati, ki smo jih izpeljali v prejšnjem razdelku, temeljijo na predpostavki zahtevkov z luhkorepimi porazdelitvami, kar interpretiramo, kot da je verjetnost zahtevkov, ki zelo odstopajo od povprečja, zelo majhna. V praksi pa se pogosto zgodi, da ta predpostavka ni izpolnjena in pojavi se vprašanje, ali lahko še vedno kaj povemo o asymptotiki verjetnosti propada. Izkaže se, da v primeru, ko je porazdelitev integriranega repa zahtevkov subeksponentna, ta točno določa asymptotično vedenje verjetnosti propada.

Subeksponentne porazdelitve so poseben razred težkorepih porazdelitev, ki ga lahko definiramo na več načinov. Za naše namene bo najbolj uporabna naslednja definicija iz [9].

**Definicija 4.27.** Verjetnostna porazdelitev  $F$  na  $[0, \infty)$  je *subeksponentna*, če za vsak  $n \geq 2$  in neodvisne slučajne spremenljivke  $X_1, \dots, X_n$  s to porazdelitvijo velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = n$$

in  $F(x) < 1$  za vsak  $x > 0$ .

**Opomba 4.28.** Ekvivalentna in bolj intuitivna definicija subeksponentne porazdelitve je, da velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} > x)} = 1 \quad \text{za vsak } n \geq 2,$$

kar pomeni, da je repna porazdelitev vsote  $n$ -tih slučajnih spremenljivk asimptotično primerljiva s porazdelitvijo največje. Dokaz ekvivalence lahko bralec najde v [9] na strani 437.

**Lema 4.29.** *Naj bo  $F_{X_1}$  subeksponentna porazdelitvena funkcija nenegativne slučajne spremenljivke  $X_1$ . Potem za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja pozitivna konstanta  $K(\varepsilon) < \infty$ , da za vsak  $n \geq 2$  in  $x \geq 0$  velja*

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} \leq K(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n.$$

*Dokaz.* Fiksiramo  $n \geq 2$  in  $x \geq 0$ . Ulomek preoblikujemo

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} &= \frac{(1 - F_{X_1}^{*n}(x)) + F_{X_1}(x) - F_{X_1}(x)}{1 - F_{X_1}(x)} \\ &= 1 + \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*n}(x)}{1 - F_{X_1}(x)}. \end{aligned}$$

Naj bo  $a_n = \sup_{x \geq 0} \left\{ 1 + \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*n}(x)}{1 - F_{X_1}(x)} \right\}$ . Za konstanto  $M \in (0, \infty)$  lahko ocenimo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq 1 + \sup_{0 \leq x \leq M} \int_{(0,x]} \frac{1 - F_{X_1}^{*n}(x-y)}{1 - F_{X_1}(x)} dF_{X_1}(y) \\ &\quad + \sup_{x \geq M} \int_{(0,x]} \frac{1 - F_{X_1}^{*n}(x-y)}{1 - F_{X_1}(x-y)} \frac{1 - F_{X_1}(x-y)}{1 - F_{X_1}}(x) dF_{X_1}(y) \\ &\leq 1 + T + a_n \sup_{x \geq M} \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*2}(x)}{1 - F_{X_1}(x)}, \end{aligned}$$

kjer je  $T = (1 - F_{X_1})^{-1}(M) < \infty$ . Ker je  $F_{X_1}$  subeksponentna lahko za vsak  $\varepsilon > 0$  izberemo tak  $M$ , da velja

$$a_{n+1} \leq 1 + T + a_n(1 + \varepsilon)$$

in tako dobimo želeno oceno

$$a_n \leq \underbrace{(1 + T) \frac{1}{\varepsilon}}_{K(\varepsilon)} (1 + \varepsilon)^n.$$

□

**Izrek 4.30.** *(Asimptotika verjetnosti propada, težkorepe porazdelitve) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj bodo zahetevki  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  neodvisni in enako porazdeljeni z gostoto  $f_X$ , pričakovano vrednostjo  $\mathbb{E}[X] < \infty$  in naj bo  $\overline{F}_{X_1}$  subeksponentna. Potem za verjetnost propada  $\psi(u)$  velja*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)} = \frac{1}{\rho}. \tag{22}$$

*Dokaz.* Dokaza se lotimo z iskanjem negibne točke operatorja (13), ki smo ga definirali v opombi 4.14. Rešitev  $\theta = A\theta$  se izraža kot limita  $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n g_0$  za poljubno funkcijo  $g_0 \in B([0, \infty))$ . Naj bodo  $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots$  neodivne enako porazdeljene slučajne spremenljivke s porazdelitveno funkcijo  $\overline{F}_{X_1}$ . Potem  $A$  izrazimo kot

$$Ag(u) = (1 - q) + q\mathbb{E}[g(u - \overline{X}_1)]$$

in z indukcijo pokažemo, da za  $g_0 = (1 - q)\mathbb{1}(u \geq 0)$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$A^n g_0(u) = (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k \mathbb{P}(\overline{W}_k \leq u),$$

pri čemer je  $\overline{W}_k = \overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_k$  in  $\overline{W}_0 = 0$ . Enakost očitno velja za  $n = 1$ . Indukcijski korak pa pokažemo...

indukcije mi ni uspelo izpeljati. Prav tako mi ni jasno zakaj moramo razširiti razred funkcij na realno os, saj so slučajne spremenljivke nenegativne. (†)

Sledi

$$\theta(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n g_0 = (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}(\overline{W}_k \leq u). \quad (23)$$

Upoštevamo enakost

$$\begin{aligned} \psi(u) &= 1 - \theta(u) \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k - (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\overline{W}_k \leq u) \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k (1 - \mathbb{P}(\overline{W}_k \leq u)) \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}(\overline{W}_k > u). \end{aligned}$$

Limito  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)}$  lahko tako zapišemo kot

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - q) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{\mathbb{P}(\overline{W}_k > u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)}.$$

Če vzamemo  $\varepsilon < \frac{1}{q} - 1$ , lahko po lemi 4.29 zaporedje funkcij

$$f_k(n) = \frac{\mathbb{P}(\overline{W}_k > u_k)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u_k)}, \quad n \geq 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

omejimo z integrabilno funkcijo  $K(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n$  za vsak  $n \geq 2$  (glede na mero, ki šteje). Limito  $u \rightarrow \infty$  po realnih številih nadomestimo z limito po zaporedjih pozitivnih števil  $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ . Tako lahko po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci 5.19 zamenjammo vrstni red limite in vsote. Ker je  $\overline{F}_{X_1}$  subekspponentna, za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\overline{W}_k > u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)} = n.$$

④

$$n \rightarrow n+1;$$

$$\begin{aligned} A^{n+1} g(u) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{[0,u]} A^n g(u-x) dF_{\bar{X}_n}(x) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \int_{[0,u]} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \int_{[0,u-x]} dF_{\bar{W}_k}(y) dF_{\bar{X}_n}(x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left[ 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} \int_{[0,u]} \int_{[0,u-x]} dF_{\bar{W}_k}(y) dF_{\bar{X}_n}(x) \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left[ 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} \mathbb{P}(\bar{W}_k \leq u - \bar{X}_{k+1}, \bar{X}_{k+1} \leq u) \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left[ 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} \mathbb{P}(\bar{W}_{k+1} \leq u) \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \mathbb{P}(\bar{W}_k \leq u) \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} \mathbb{P}(\bar{W}_k \leq u) \quad (\text{QED}) \end{aligned}$$

Končno je

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)} &= (1 - q) \sum_{n=1}^{\infty} q^n n \\ &= \frac{q}{(1 - q)} = \frac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

□

**Opomba 4.31.** Če tako kot v definiciji sestavljene geometrijske porazdelitve 5.11 vzamemo  $G \sim \text{Geom}(1-q)$ , ki je neodvisna od  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$ , ima  $C = \bar{W}_G$  sestavljeno geometrijsko porazdelitev in za  $u \geq 0$  velja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \leq u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(G = k) \mathbb{P}(\bar{W}_k \leq u) \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}(\bar{W}_k \leq u) = \theta(u).\end{aligned}$$

Torej je  $C \sim \theta$  in posledično  $\psi(u) = \mathbb{P}(C > u) = (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}(\bar{W}_k > u)$ .

Izreka 4.24 in 4.30 pokažeta ključno razliko med luhkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. Limita (22) nam pove, da je konvergenca verjetnosti propada  $\psi$  enakega reda kot  $(1 - \bar{F}_{X_1})$ , ki pa ni zanemarljiva tudi za velike vrednosti  $u$ . To pomeni, da so zavarovalniški produkti, za katere verjamemo, da so zahtevki subexponentno porazdeljeni, nevarni, saj imajo največji zahtevki velik vpliv na celoten proces tveganja in se propad luhko zgodi zaradi enega samega velikega zahtevka kot v zgledu 4.3.

**Zgled 4.32.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja, da so zahtevki neodvisni Weibullovo porazdeljeni s parametrom  $a = \frac{1}{4}$  in  $b = 16$ , torej  $X_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$ . Dokaz, da je  $\bar{F}_{X_1}$  subeksponentna porazdelitvena funkcija, luhko bralec najde v [9] na strani 444. Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov  $\lambda = 1$  in stopnja prihodkov premij  $c = 500$ . Podobno kot v zgledu 4.26 z Monte Carlo simulacijami pokažimo, da verjetnost propada res pada proti 0 z enakim redom konvergencije kot rep  $\bar{F}_{X_1}$ , ko gre  $u \rightarrow \infty$ . Porazdelitev integriranega repa  $\bar{F}_{X_1}$  ima obliko

$$\bar{F}_{X_1}(u) = \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,u]} e^{-(\frac{x}{16})^{1/4}} dx.$$

Iz zgleda 4.3 vemo, da je  $\mathbb{E}[X_1] = 384$ . Z uvedbo nove spremenljivke  $z = x^{1/4}$  ( $dz = \frac{1}{4x^{3/4}} dx$ ) z nekaj računanja dobimo

$$\bar{F}_{X_1}(u) = 1 - \frac{(u^{3/4} + 6\sqrt{u} + 24\sqrt[4]{u} + 48) e^{-\sqrt[4]{u}/2}}{48}.$$

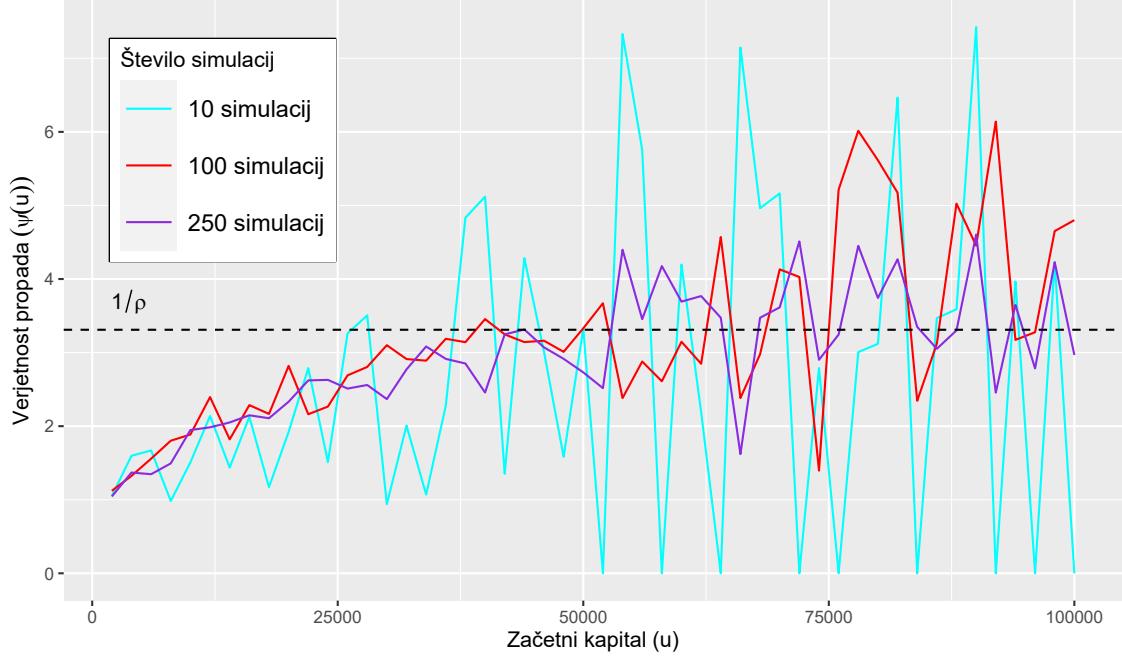
Izračunamo še

$$\rho = \frac{c\mathbb{E}[T_1]}{\mathbb{E}[X_1]} - 1 = \frac{500}{384} - 1 \approx 0.3020833.$$

Po izreku 4.30 razmerje  $\frac{\psi(u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)}$  konvergira proti  $\frac{1}{\rho} \approx 3.3103451$ . Zaporedje  $(u_n)_{n=1}^{50}$ , definirano kot  $u_n = 2000n$  za vsak  $n$ , podobno kot v zgledu 4.26 simuliramo 10, 100

in 250 realizacij procesa tveganja in za vsak  $n$  izračunamo približek za razmerje  $\frac{\psi(u_n)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u_n)}$ . Rezultate prikažemo na sliki 6.

$$\lambda = 1 \quad a=0.25 \quad b=16 \quad c=1500$$



SLIKA 6. Aproksimacija verjetnosti propada  $\psi(u)$  z Monte Carlo simulacijami (modra) in točna vrednost funkcije (rdeča).

Vidimo, da razmerje vizualno res konvergira proti  $\frac{1}{\rho}$ , ampak seveda bi za boljšo natančnost morali povečati začetni kapital  $u$  in število simulacij.  $\diamond$

## 5. PRILOGA

Priloga je namenjena predvsem za dodatne definicije in trditve s katerimi naj bi bil bralec seznanjen in so bile izpušcene v glavnem za namene preglednosti besedila. V primeru, da bralec potrebuje osvežiti določene pojme, ki se pojavljajo v besedilu, jih večino lahko najde v tem razdelku.

**Definicija 5.1.** Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka. Potem so za  $u \in \mathbb{R}$  njena *rodovna funkcija*, *momentno-rodovna funkcija* in *karakteristična funkcija* definirane kot

$$G_X(u) = \mathbb{E}[u^X], \quad M_X(u) = \mathbb{E}[e^{uX}], \quad \varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}],$$

če upanja obstajajo.

**Definicija 5.2.** Naj bosta  $F$  in  $G$  porazdelitveni funkciji dveh neodvisnih nenegativnih slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$ . *Konvolucijo* funkcij  $F$  in  $G$  definiramo kot Lebesgue-Stieltjesov integral

$$(F * G)(t) = \int_{[0,t]} F(t-x) dG(x) = \int_{[0,t]} G(t-x) dF(x).$$

Konvolucija ( $F * G$ ) se ujema s porazdelitveno funkcijo vsote  $X + Y$ , kar lahko enostavno pokažemo z uporabo transformacijske formule. Za neodvisne in enako porazdeljene nenegativne slučajne spremenljivke  $X_1, X_2, \dots, X_n$  s porazdelitveno funkcijo  $F_{X_1}$  rekurzivno definiramo *k-to konvolucijo* kot

$$F_{X_1}^{*k}(t) = (F_{X_1} * \dots * F_{X_1})(t) = \int_{[0,t]} F_{X_1}^{*(k-1)}(t-x) dF_{X_1}(x),$$

ki se prav tako ujema s porazdelitveno funkcijo vsote  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

**Definicija 5.3.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  verjetnostni prostor in naj bo  $T \neq \emptyset$  neprazna indeksna množica ter  $(E, \Sigma)$  merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s  $T$ , je družina slučajnih elementov  $X_t : \Omega \rightarrow E$ , ki so  $(\mathcal{F}, \Sigma)$ -merljivi za vsak  $t \in T$ .

**Opomba 5.4.** V delu se bomo omejili na primer, ko  $T$  predstavlja čas, torej  $T = [0, \infty)$  in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej  $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , kjer  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  predstavlja Borelovo  $\sigma$ -algebro na  $\mathbb{R}$ .

**Definicija 5.5.** Za fiksen  $\omega \in \Omega$  je preslikava  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto X_t(\omega)$  *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora  $\Omega$  priredi slučajno funkcijo  $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicija 5.6.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces. Potem za  $s < t$  definiramo *prirastek procesa*  $X_t - X_s$  na intervalu  $[s, t]$ . Proses  $(X_t)_{t \geq 0}$  ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$  prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

**Definicija 5.7.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak  $s < t$  in vsak  $h > 0$  velja, da ima  $X_{t+h} - X_{s+h}$  enako porazdelitev kot  $X_t - X_s$ .

\*) TE TRI FUNKCIJE JE BOLJE DEFINIRATI BOLJ LOČENO -  
VSAKO POD MAЛО DRUGAČNIMI POGOJI:

- \* PRI RODOVNITI FUNKCIJAH IMAMO TEŽAVO, ČE  
JE  $u < 0$  IN X NI CELOŠTEVILSKA. NAJBOLJE  
SE JE OMESITI NA PRIMER, KO X ZAVZAME  
VREDNOSTI V N.; TEDAJ LATHKO  $G_x(u)$  DEFINIRAMO  
ZA VSE  $u \in \mathbb{C}$   $|u| \leq 1$ .
- \* PRI MOMENTNO- RODOVNITI FUNKCIJAH NIČ NE  
STANE, ČE JIH DEFINIRAMO TUDI ZA KOMPLEKSNE  
ARGUMENTE, PRIDOBIMO PA, DA LATHKO POTEM  
PIŠEMO  $\varphi(u) = M(u)$ . SLUČAJNA SPREMENLJIVKA  
PA JE ZDAJ LATHKO POLJUBNA REALNA.
- \* DOBRO BI BILD PRIPOMNI, DA JE OBSTOJ  
MOMENTNO- RODOVNE FUNKCIJE V SPLOŠNEM ZAGOTOVLEN  
LE ZA ČISTA IMAGINARNA ŠTEVILA.
- \* V DUHU TEGLA ZA REALNE u DEFINIRAMO  
KARAKTERISTIČNO FUNKCIJO  $\varphi_x(u) := M_x(u) = E[\exp(iuX)]$ .  
MORDA VELJA PRIPOMNI, DA BI JO LATHKO DEFINIRALI  
TUDI ZA KOMPLEKSEN ARGUMENT, VENDAR PA ČE  
VREDNOSTI KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE ZA VSE  
REALNE ARGUMENTE ENOLIČNO DOLOČAJO PORAZDELITEV:  
MORDA BI ČE NA TEM MESTU NAVEDLI IZREK O  
ENOLIČNOSTI.

\*\*

PRI DOKAŽU IZREKA 3.10 POTREBUJEMO ŠE SKUPNO  
KARAKTERISTIČNO FUNKCIJO IN IZREK O NEDDVISNOSTI.  
DODAJTE !

ZA DEFINICIJO NEODVISNOSTI KAR LEPO POTREBUJEMO, DA STA PROCESA DEFINIRANA NA ISTEM VERJETNOSTNEM PROSTORU! DEFINICIJO RAJE RAZDELITE NA DVOJE, POLEG TEGA POTREBUJEMO NEODVISNOST VEC SLUCAJNIH PROCESOV NPR. V POSLEDICI 3.12.

**Definicija 5.8.** Naj bosta  $(X_t)_{t \geq 0}$  in  $(Y_t)_{t \geq 0}$  slučajna procesa ne nujno definirana na istem verjetnostnem prostoru. Pravimo, da sta  $(X_t)_{t \geq 0}$  in  $(Y_t)_{t \geq 0}$  neodvisna, če sta za vsak par  $k, j \in \mathbb{N}$  in končen nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n_k} < \infty$  in  $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{n_j} < \infty$  slučajna vektorja  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{n_k}})$  in  $(Y_{s_1}, Y_{s_2}, \dots, Y_{s_{n_j}})$  neodvisna. Po drugi strani, če velja  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{n_k}}) \sim (Y_{s_1}, Y_{s_2}, \dots, Y_{s_{n_j}})$  sta procesa enako porazdeljena.

*za poljubna končna mesta  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n_k} < \infty$*

**Trditev 5.9.** Naj bodo  $X, Y$  in  $Z$  slučajne spremenljivke ter  $g$  in  $h$  poljubni borelovi funkciji. Če velja  $X | Z \sim Y$ , velja tudi  $X | Z \sim X | g(Z) \sim Y$ . Splošneje, če je  $X | Z \sim Y | h(g(Z))$ , je tudi  $X | Z \sim X | g(Z) \sim Y | h(g(Z))$ .

*Dokaz.* Da je  $X | Z \sim Y$  pomeni, da ima  $X$  pogojno na  $\sigma(Z)$  vedno isto porazdelitev, potem pa mora biti to tudi brezpogojna porazdelitev, prav tako pa tudi pogojna porazdelitev glede na manjšo  $\sigma$ -algebro  $\sigma(g(Z))$ . Nadalje je  $X$  neodvisna od  $\sigma(Z)$ , potem pa mora biti neodvisna tudi od manjše  $\sigma$ -algebri  $\sigma(g(Z))$ . Pri splošnejši različici uporabimo enak argument za  $\sigma$ -algebro  $\sigma(h(g(Z)))$ .

□

**Definicija 5.10.** Slučajna spremenljivka  $X$  ima Weibullovo porazdelitev s parametrom  $a, b > 0$ , če ima njena porazdelitvena funkcija obliko

$$F_X(x) = 1 - e^{-(\frac{x}{b})^a} \quad \text{za } x \geq 0$$

ozioroma gostota obliko

$$f_X(x) = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-(\frac{x}{b})^a} \quad \text{za } x \geq 0.$$

**Definicija 5.11.** Naj bo  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk in  $G \sim \text{Geom}(p)$  geometrijsko porazdeljena slučajna spremenljivka s parametrom  $p \in (0, 1)$  in funkcijo verjetnosti  $P(G = k) = p(1-p)^k$  za  $k \in \mathbb{N}_0$ . Naj bo  $G$  neodvisna od  $X_i$  za vsak  $i \in \mathbb{N}$ . Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$C = \sum_{i=1}^G X_i$$

sestavljeno geometrijsko porazdelitev.

**Trditev 5.12.** Naj bo  $X$  nenegativna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , ki ima prvi moment. Potem velja

$$\mathbb{E}[X] = \int_{(0, \infty)} (1 - F_X(x)) dx.$$

*Dokaz.* Vsako število  $X \geq 0$  lahko zapišemo kot

$$X = \int_{(0, \infty)} \mathbb{1}_{\{x < X\}} dx = \int_{(0, \infty)} \mathbb{1}_{\{X < x\}} dx.$$

Če sedaj uporabimo Fubinijev izrek, dobimo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E} \left[ \int_{(0, \infty)} \mathbb{1}_{\{X < x\}} dx \right] \\ &= \int_{(0, \infty)} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{X < x\}}] dx \end{aligned}$$

$$= \int_{(0,\infty)} (1 - \mathbb{P}(X > x)) dx$$

□

**Trditev 5.13.** (Neenakost Markova) Naj bo  $X$  nenegativna slučajna spremenljivka. Potem za  $x > 0$  velja

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{x}.$$

Dokaz. Naj bo  $x > 0$ . Vélja

$$x \mathbb{1}_{\{X \geq x\}} \leq X \iff x \mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{E}[X].$$

□

**Definicija 5.14.** Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje slučajnih spremenljivk s porazdelitvenimi funkcijami  $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots$  in naj bo  $X$  slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo  $F_X$ . Pravimo da zaporedje  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira v porazdelitvi k slučajni spremenljivki  $X$ , če za vsak  $x \in \mathbb{R}$  v katerem je  $F_X$  zvezna, velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

**Izrek 5.15.** (Krepki zakon velikih števil) Naj bo  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  s pričakovano vrednostjo  $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$ . Potem velja

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} \mu.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani [stran](#).

□

**Izrek 5.16.** (Izrek o enoličnosti) Naj bosta  $X$  in  $Y$  slučajni spremenljivki, ne nujno definirani na istem verjetnostnem prostoru. Če za vsak  $u \in \mathbb{R}$  velja  $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$ , imata  $X$  in  $Y$  enako porazdelitev.

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani [stran](#).

□

**Izrek 5.17.** (Lévijev izrek o kontinuiteti) Naj bo  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje slučajnih spremenljivk (ne nujno na istem verjetnostnem prostoru) in  $X$  še ena slučajna spremenljivka. Potem za vsak  $u \in \mathbb{R}$  velja

$$\varphi_{X_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_X(u)$$

natanko tedaj, ko velja

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani [stran](#).

□

**Izrek 5.18.** (Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci) Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  in naj bo  $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  njihova limita. Naj za vsak  $\omega \in \Omega$  velja  $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \dots$  Potem velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani [stran](#).  $\square$

**Izrek 5.19.** (*Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci*) Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  in naj bo  $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  njihova limita. Naj bo  $Y$  slučajna spremenljivka definirana na istem verjetnostnem prostoru z  $\mathbb{E}[Y] < \infty$  in naj za vsak  $n \in \mathbb{N}$  in vsak  $\omega \in \Omega$  velja  $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$ . Potem je  $X$  integrabilna in velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani [stran](#).  $\square$

**Izrek 5.20.** (*Tonellijev izrek*) Naj bosta  $X$  in  $Y$  slučajni spremenljivki definirani vsaka na svojem verjetnostnem prostoru in naj imata vsaka svojo gostoto  $f_X$  in  $f_Y$  glede na Lebesgueovo mero. Potem velja

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y) \mathcal{L}^2(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani [stran](#).  $\square$

**Trditev 5.21.** (*Lastnost vrstilnih statistik*) Naj bo  $(N_t)_{t \geq 0}$  homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda > 0$ . Za  $k \in \mathbb{N}$  je pogojno na dogodek  $\{N_t = k\}$  vektor časov prihodov porazdeljen kot

$$(V_1, \dots, V_k) \mid \{N_t = k\} \sim (U_{(1)}, \dots, U_{(k)}),$$

kjer je  $(U_{(1)}, \dots, U_{(k)})$  vektor vrstilnih statistik vektorja  $(U_1, \dots, U_k)$  neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk  $U_i \sim U([0, t])$ .

Dokaz. Dokaz trditve lahko bralec najde v [4] na strani 24.  $\square$

**Definicija 5.22.** Naj bo  $X$  nenegativna slučajna spremenljivka in  $F_X$  njena porazdelitvena funkcija. Potem za  $u \in \mathbb{R}$  Laplace-Stieltjesovo transformacijo porazdelitve  $F_X$  definiramo kot

$$\hat{F}_X(u) = \int_{[0, \infty)} e^{-ux} dF_X(x).$$

**Definicija 5.23.** Naj bo  $F$  porazdelitvena funkcija neke nenegativne slučajne spremenljivke s prvim momentom. Porazdelitev integriranega repa te slučajne spremenljivke je porazdelitev s porazdelitveno funkcijo

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^x (1 - F(t)) dt.$$

**Definicija 5.24.** Prenovitveni proces na verjetnostnem protoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  je slučajni proces, določen z zaporedjem neodvisnih enako porazdeljenih medprihodnih časov  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ki zavzamejo vrednosti v  $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ , in sicer je podan z zvezno

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}},$$

kjer je  $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$  čas  $n$ -tega prihoda. Pripadajočo prenovitveno mero prenovitvenega procesa definiramo kot  $M(t) = \mathbb{E}[N_t]$  za  $t > 0$ .

**Definicija 5.25.** Prenovitvena enačba je enačba oblike

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} f(t-s)dF(s), \quad t \geq 0,$$

kjer sta neznana funkcija  $f$  in znana funkcija  $g$  definirani na  $\mathbb{R}^+$ ,  $F$  pa je porazdelitvena funkcija neke pozitivne slučajne spremenljivke  $X$ .

**Definicija 5.26.** Za nenegativno merljivo funkcijo  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  pravimo, da je direktno Riemannovo integrabilna (d.R.i.), če za vsak  $\delta > 0$  velja

$$\sum_{k \geq 0} \left( \sup_{t \in [k\delta, (k+1)\delta)} f(t) \right) < \infty \quad \text{in}$$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sum_{k \geq 0} \left( \sup_{t \in [k\delta, (k+1)\delta)} f(t) \right) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sum_{k \geq 0} \left( \inf_{t \in [k\delta, (k+1)\delta)} f(t) \right) \quad (24)$$

Če  $f$  zadošča navedenima zahtevama, definiramo njen direktni Riemannov integral

$$\text{d.R.i. } \int_0^\infty f(t) dt$$

kot limito (24). Funkcija  $f$  poljubnega predznaka je d.R.i., če sta le-taki  $f^+ = \max\{f, 0\}$  in  $f^- = \max\{-f, 0\}$ , pri čemer je

$$\text{d.R.i. } \int_0^\infty f(t) dt = \text{d.R.i. } \int_0^\infty f^+(t) dt - \text{d.R.i. } \int_0^\infty f^-(t) dt.$$

**Trditev 5.27.** (Kriterij za direktno Riemannovo integrabilnost) Naj bo  $f \geq 0$  nena-raščajoča funkcija. Potem je  $f$  direktno Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je posplošeno Riemannovo integrabilna. Tedaj je njen direktni Riemannov integral enak posplošenemu.

*Dokaz.* Dokaz trditve lahko bralec najde v [8] na strani 235.  $\square$

**Izrek 5.28.** (Smithov ključni prenovitveni izrek) Če je funkcija  $g$  iz prenovitvene enačbe  $(g, F)$  (definicija 5.25) omejena na končnih intervalih ter  $X$  ima prvi moment in ni aritmetična ( $\#a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}a) = 1$ ), je

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} g(t-s)dM(s), \quad t \geq 0,$$

enolična rešitev te enačbe. Funkcija  $M$  je prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodno porazdelitvijo  $F$ . Če je dodatno funkcija  $g$  direktno Riemannovo integrabilna velja *se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{(0,\infty)} g(t) dt.$$

( ali [ ? )

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [8] na strani 237.  $\square$

**Izrek 5.29.** (Banachov izrek o negibni točki) Naj bo  $(M, d)$  poln metrični prostor in naj bo

$$f : (M, d) \rightarrow (M, d)$$

skrčitev, torej obstaja tak  $0 \leq k < 1$ , da za vsak  $x, y \in M$  velja  $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ . Potem obstaja natanko en  $x \in M$ , da velja  $f(x) = x$ .

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [11] na strani 284.  $\square$

## SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

<b>trajektorija</b>	sample path
<b>sestavljeni procesi</b>	compound processes
<b>sestavljeni Poissonov proces</b>	compound Poisson process
<b>markiranje procesa</b>	space-time decomposition of process
<b>neskončna deljivost</b>	infinite divisibility
<b>proces tveganja</b>	risk process
<b>verjetnost propada</b>	probability of ruin
<b>ogrodje procesa tveganja</b>	skeleton process
<b>lahkorepa porazdelitev</b>	light-tailed distribution
<b>težkorepa porazdelitev</b>	heavy-tailed distribution
<b>subeksponentna porazdelitev</b>	subexponential distribution
<b>prenovitveni proces</b>	renewal process
<b>defekttna prenovitvena enačba</b>	defective renewal equation
<b>prenovitvena mera</b>	renewal function

## LITERATURA

- [1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
- [2] S.M. Ross, Stochastic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
- [3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).
- [4] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Second Edition, Springer, (2009).
- [5] M. Mandjes, O. Boxma, The Cramér–Lundberg model and its variants, Springer, (2023).
- [6] F. Spitzer, Principles of Random Walk. Second Edition, Springer, (1976).
- [7] B. Fristedt, L. Gray, A Modern Approach to Probability Theory, Springer, (1996).
- [8] S.I. Resnick, Adventures in Stochastic Processes, Birkhäuser, (1992).
- [9] R.J. Adler, R.E. Feldman, A practical guide to heavy tails: statistical techniques and applications, Birkhäuser, (1998).
- [10] K. Sato, Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, (1999).
- [11] J. Globevnik, M. Brojan, Analiza 1, DMFA–založništvo, (2016).