UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

Kazalo

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

POVZETEK

Compound Poisson process and its application in finance

ABSTRACT

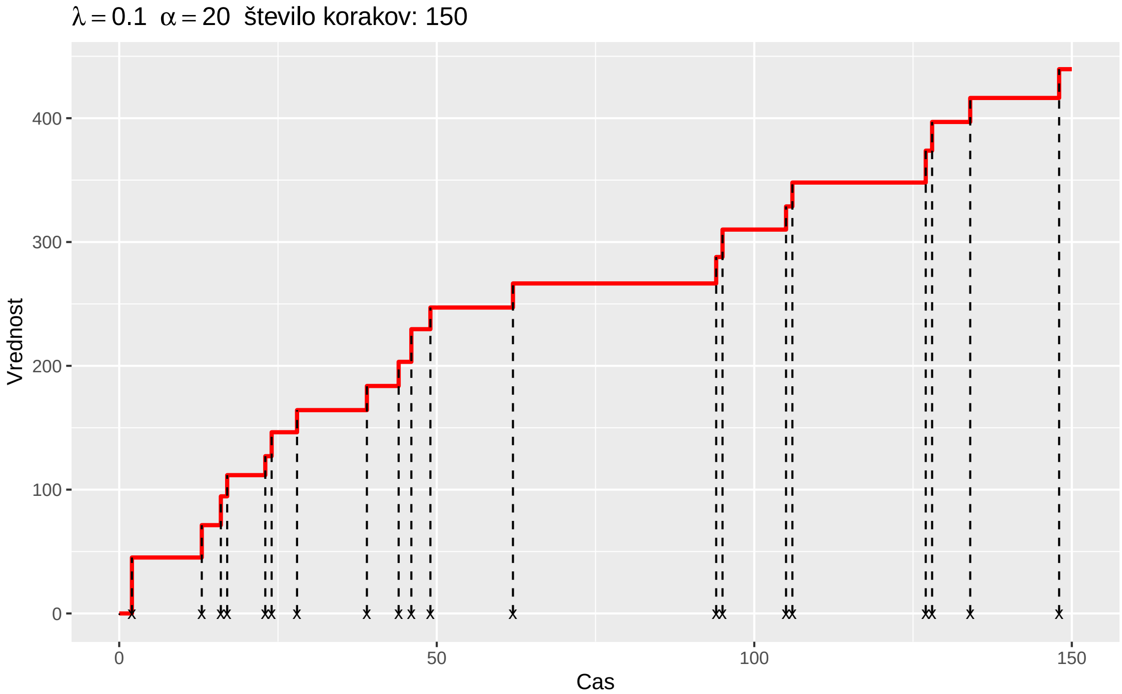
Math. Subj. Class. (2020): 60G07 60G20 60G51

Ključne besede: slučajni procesi, sestavljeni Poissonov proces, Cramér–Lundbergov model

Keywords: stochastic processes, compound Poisson process, Cramér–Lundberg model

1. Uvod

Uvodni tekst in motivacija za študiranje procesa, nakaži da boš obravnaval Cramer-Ludenbergov model



Slika 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa

Definicija 1.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (E, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T, je družina slučajnih elementov $X_t : \Omega \to E$, ki so $(\mathcal{F}, \Sigma)$-merljivi za vsak $t \in T$.

Opomba 1.2. V delu se bomo omejili na primer, ko T predstavlja čas, torej $T = [0, \infty)$ in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, kjer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ predstavlja Borelovo $\sigma-$algebro na $\mathbb{R}$.

Definicija 1.3. Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$. Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora Ω priredi slučajno funkcijo $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.4. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Trditev 1.5. *Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Potem ima $(X_t)_{t \geq 0}$ neodvisne prirastke natanko tedaj, ko je za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \infty$ prirastek $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od slučajnega vektorja $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$:

$(\Leftarrow)$: □

Definicija 1.6. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Definicija 1.7. Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t\geq 0}$, definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, pravimo *Poissonov proces* z intenzivnostjo λ, če zadošča naslednjim pogojem:

(1) $N_0 = 0$ $\mathbb{P}$-skoraj gotovo.
(2) $(N_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
(3) Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t-s))$,

Opomba 1.8. Vidimo, da v definiciji ne zahtevamo, da so skoki procesa le $+1$. To sledi iz...

2. Sestavljeni Poissonov proces

Povzetek poglavja/krajsi uvod

Definicija 2.1. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Naj bo $(X_i)_{i\geq 1}$ zaporedje neodvisnih (med sabo in $(N_t)_{t\geq 0}$) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Potem je *sestavljeni Poissonov proces* $(S_t)_{t\geq 0}$ definiran kot

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Opomba 2.2. Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$ za vsak i, dobimo ravno HPP. Bolj v splošnem, če za X_i postavimo $X_i = \alpha$, potem velja $S_t = \alpha N_t$.

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$ označevali s $HPP(\lambda)$ ali naborom slučajnih spremenljivk $(N_t)_{t\geq 0}$ (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s CPP ali naborom slučajnih spremenljivk $(S_t)_{t\geq 0}$ (angl. Compound Poisson Process), kjer bo vsota sledila $HPP(\lambda)$.

2.1. Osnovne lastnosti.

Trditev 2.3. *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Za nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ lahko slučajne spremeljivke $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti X_i od X_j za $i \neq j$ in N_t. Naj bo $h > 0$ in $s < t$. Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima $N_{t+h} - N_{s+h}$ členov. Ker za HPP velja $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$, je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

□

Trditev 2.4. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP in naj bosta $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$ pričakovana vrednost in $\sigma^2 = Var[X_i] < \infty$ varianca slučajnih spremenljivk X_i za vsak i. Potem sta za $t \geq 0$ pričakovana vrednost in varianca S_t enaki*

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu\lambda t \qquad in \qquad Var[S_t] = \lambda t\left(\sigma^2 + \mu^2\right).$$

Dokaz. Definiramo slučajno spremenljivko

$$Y_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \tag{1}$$

in vidimo, da je za $t \geq 0$ S_t pogojno na $N_t = k$ enako porazdeljena kot Y_k. Tako dobimo

$$\mathbb{E}[S_t \mid N_t = k] = \mathbb{E}[Y_k] = k\mu \qquad \text{in} \qquad \mathrm{Var}[S_t \mid N_t = k] = \mathrm{Var}[Y_k] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$. Torej

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu\lambda t.$$

Prek formule $\mathrm{Var}[S_t] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_t \mid N_t]] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$ računamo

$$\mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_i]\, N_t] = \sigma^2\lambda t$$

in

$$\mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}[X_i]\, N_t] = \mu^2\lambda t,$$

saj $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$. Skupaj dobimo $\mathrm{Var}[S_t] = \lambda t\,(\sigma^2 + \mu^2)$. □

2.2. **Rodovne funkcije.**

Trditev 2.5. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i, ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot X. Potem ima za $t \geq 0$ karakteristična funkcija φ_{S_t} obliko*

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)},$$

kjer φ_X označuje karakteristično funkcijo X.

Dokaz.

$$\varphi_{S_t}(u) = \mathbb{E}[\exp[iuS_t]] = \mathbb{E}\left[\exp\left[iu\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right]\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iu\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t = k\right]\right]\mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iu\sum_{i=1}^{k} X_i\right]\right]\mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{iuX}\right]^k}_{\varphi_X(u)^k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (2) \\
&= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_X(u)\lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)}
\end{aligned}
$$

□

Hitro lahko vidimo, da sta karakteristična in rodovna funkcija CPP enaki

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)} \qquad \text{in} \qquad G_{S_t}(u) = e^{\lambda t(G_X(u)-1)},$$

saj v splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke Y enaka njeni momentno rodovni funkciji izvrednoteni v iu, torej $\varphi_Y(u) = G_Y(iu)$. Rodovna pa izverdnotena v $\ln(u)$, torej $G_Y(u) = M_Y(\ln(u))$, če obstajata. V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo CPP, saj je ta vedno definirana za vsak $u \in \mathbb{R}$. Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med karakteristično funkcijo CPP in rodovno funkcijo $HPP(\lambda)$.

Trditev 2.6. *Naj bosta $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP in $(N_t)_{t\geq 0}$ $HPP(\lambda)$ neodvisna. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i, ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot X. Potem za fiksen $t \geq 0$ velja*

$$\varphi_{S_t}(u) = G_{N_t}\left(\varphi_X(u)\right).$$

Dokaz. Po enačbi (2) iz trditve 2.5 velja, da je $\varphi_{S_t}(u)$ enaka

$$
\begin{aligned}
\varphi_{S_t}(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_X(u)^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= G_{N_t}\left(\varphi_X(u)\right).
\end{aligned}
$$

□

2.3. **Porazdelitev CPP.** Sedaj se posvetimo vprašanju, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka S_t za $t \geq 0$? Iz definicije $HPP(\lambda)$ vemo, da je N_t za $t \geq 0$ porazdeljena kot Poissonova slučajna spremenljivka s parametrom λt. Fiksiramo $t \geq 0$ in dobimo

$$
\begin{aligned}
F_{S_t}(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_t \leq x \mid N_t = k)\mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{k} X_i \leq x)\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

kjer je $F_X^{*k}(x)$ porazdelitev k-te konvolucije slučajne spremenljivke X. Razen za posebne primere, je zgornji izraz za praktične namene ne-izračunljiv in nam ne pomaga veliko.

Zgled 2.7. Če pogledamo primer, ko so $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke, porazdeljene kot X

$$X \sim \text{Gamma}(a) \qquad\qquad f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}$$

s parametrom $a > 0$, lahko pridemo do razmeroma eksplicitne porazdelitve CPP. Gostota k-te konvolucije $X_1 + \cdots + X_k$ ima formulo

$$f_{X_1+\cdots+X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(na)} x^{na-1} e^{-x}.$$

Za $t \geq 0$ in $x \geq 0$ torej velja

$$\begin{aligned} F_{S_t}(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ... \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Trditev 2.8. *Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \ldots X_n$ neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od N) enako porazdeljene kot*

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots & \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} \ldots & \end{pmatrix},$$

za poljubne $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ za katere velja $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda$. Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

kjer so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne s.s. porazdeljene kot $Pois(\lambda_1), Pois(\lambda_2), \ldots$

Dokaz. S $\varphi_{Z_n}(u)$ označimo karakteristično funkcijo s.s. $Z_n := a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \cdots + a_n Y_n$ in s $\varphi_Z(u)$ karakteristično funkcijo s.s. $Z := \sum_{j=1}^N X_j$. Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{Y_j}(a_j u) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \exp\left[\lambda_j \left(e^{a_j iu} - 1\right)\right] \\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(e^{a_j iu} - 1\right)\right]. \end{aligned}$$

Po trditvi 2.6 velja

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(u) &= G_N\left(\varphi_X(u)\right) \\
&= \exp\left[\lambda\left(\varphi_X(u)-1\right)\right] \\
&= \exp\left[\lambda\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j}{\lambda}e^{a_j iu}-1\right)\right] \\
&= \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\left(e^{a_j iu}-1\right)\right]
\end{aligned}$$

Vidimo, da velja

$$\varphi_{Z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_Z,$$

torej po Lévijevem izreku o kontinuiteti velja $Z_\infty := \lim_{n\to\infty} Z_n \sim Z$. □

Posledica 2.9. *Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poljubno zaporedje realnih števil in $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih realnih števil, za katere velja $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = \lambda$ in*

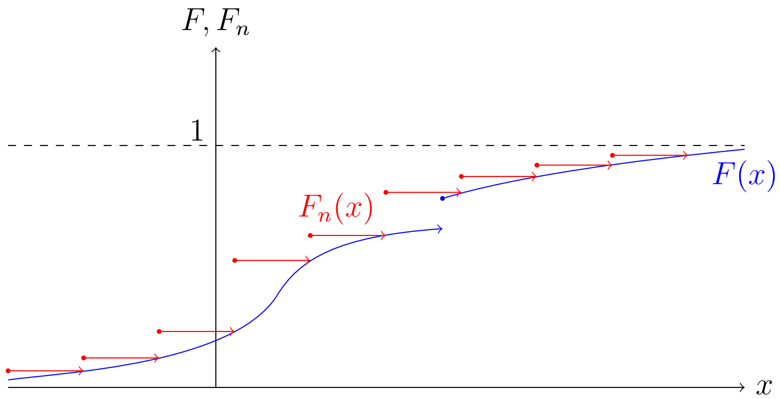
$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \dots \end{pmatrix}.$$

Potem velja

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{d} \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

Dokaz. Ker velja $\varphi_{Z_n}(u) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_Z(u)$ za vsak $u\in\mathbb{R}$, po Lévijevem izreku o zveznosti sledi, da $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$. □

Kaj pa v primeru, ko so X_i zvezno porazdeljene? Tedaj se problema lotimo na sledeč način. Definiramo $F_n(x) := F(\frac{m}{n})$ kjer je $F(x)$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke Z_n in $m = \min\{k\in\mathbb{Z} \mid \frac{k}{n} > F_n(x)\}$.



Slika 2. Aproksimacija F s F_n

Kot je razvidno iz slike 2, je $F_n(x)$ stopničasta funkcija, ki aproksimira porazdelitveno funkcijo $F(x)$. Velja $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ povsod kjer je F zvezna.

2.4. **CPP kot martingal.**

Definicija 2.10. Slučajni proces X_t prilagojen glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ martingal, če velja

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$$

za vsak $0 \leq s \leq t$.

Pokažimo, da v splošnem CPP ni martingal.

Trditev 2.11. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bodo X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ za vsak i. Potem je S_t martingal natanko tedaj, ko je $\mu = 0$.*

Dokaz. Naj bo $0 \leq s \leq t$. Potem velja

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s + S_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_t - S_s\right] + \mathbb{E}\left[S_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mu\lambda(t-s) + S_s
\end{aligned}$$

Enakost $\mu\lambda(t-s) + S_s = S_s$ velja $\iff$ $\mu\lambda(t-s) = 0$ $\iff$ $\mu = 0$. □

Opomba 2.12. Seveda, če velja $\mu \geq 0$, potem je S_t submartingal, če pa $\mu \leq 0$, je S_t supermartingal.

Trditev 2.13. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bodo X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ za vsak i, Potem je proces*

$$S_t - \mu\lambda t$$

martingal.

Dokaz. Naj bosta $0 \leq s < t$. Prirastek $S_t - S_s$ je neodvisen od $\mathcal{F}_s$ in ima pričakovano vrednost $\mu\lambda(t-s)$. Torej

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t - \mu\lambda t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s\right] + S_s - \mu\lambda t \\
&= \mu\lambda(t-s) + S_s - \mu\lambda t \\
&= S_s - \mu\lambda s.
\end{aligned}$$

□

3. Cramér-Lundbergov model

V tem razdelku obravnavamo najbolj intenzivno raziskan model v teoriji propada, običajno imenovan Cramér-Lundbergov model. V svoji najosnovnejši obliki ga je v zgodnjih 1900. letih izpeljal švedski aktuar Filip Lundberg, da bi ocenil ranljivost zavarovalnice za propad. Čeprav je model v svoji ideji dokaj preprost, lepo zajema bistvo dinamike ravni rezerv zavarovalne družbe in njene izpostavljenosti tveganju, kar pojasnjuje, zakaj je postal temeljni merilni model v teoriji propada. V preteklem stoletju je bilo razvitih veliko tehnik za analizo Cramér-Lundbergovega modela, ki so se večinoma osredotočile na kvantifikacijo verjetnosti propada. V razdelku podamo pregled glavnih rezultatov in osnovnih tehnik, ter jih ponazorimo na primerih, ko zavarovalniške zahtevke modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami.

3.1. **Proces tveganja in verjetnost propada.**

Definicija 3.1. Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ *CPP*. *Proces tveganja* v Cramér-Lundbergovem modelu definiramo kot

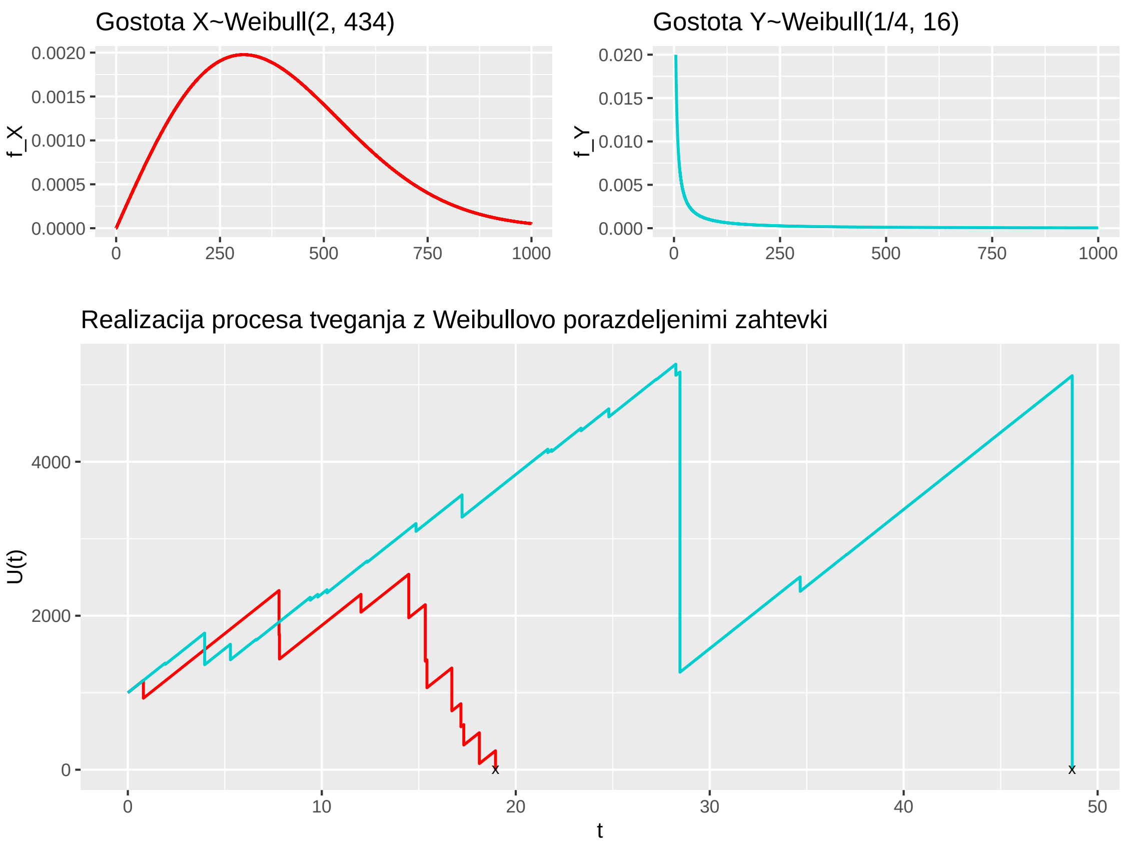
$$U_t = u + p(t) - S_t,$$

kjer je $u \geq 0$ začetni kapital zavarovalnice in $p(t)$ funkcija prihodkov iz premij.

Opomba 3.2. V resnici lahko veliko lastnosti procesa tveganja izpeljemo brez da predpostavimo, da prihodi zahtevkov v $(S_t)_{t\geq 0}$ sledijo Poissonovemu procesu, ampak splošnemu prenovitvenemu procesu (4.11) in zato na začetku ne bomo uporabljali rezultatov, ki smo jih do sedaj izpeljali.

Vrednost U_t predstavlja kapital zavarovalnice ob času $t \geq 0$. Standardno je za $p(t)$ vzeti deterministično funkcijo $p(t) = ct$, kjer je $c > 0$ stopnja prihodkov premij. Uporaba linearne funkcije za modeliranje premijskega dohodka v Cramér-Lundbergovem modelu ponuja realističen približek zato, ker zavarovalnice pogosto doživljajo stabilno povečevanje premijskega dohodka skozi čas. Poleg tega je izbira linearne funkcije preprosta, zato bomo v nadaljevanju privzeli, da je $p(t) = ct$. Poglejmo si realizaciji procesa tveganja, ko so zahtevki X_i porazdeljeni Weibullovo (4.7) z različnimi parametri.

Zgled 3.3. Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu z začetnim kapitalom $u = 1000$ in $p(t) = 200t$ ter intenzivnostjo prihodov zahtevkov $\lambda = 1$. Naj bodo v prvem primeru (rdeča) zahtevki porazdeljeni kot $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$ in v drugem primeru (modra) kot $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$.



Slika 3. Realizaciji procesa tveganja

Pri obeh realizacijah vidimo, da proces tveganja v nekem trenutku pade pod 0 (tam ga tudi ustavimo). Čeprav je pričakova vrednost $\mathbb{E}[Y_i] = 384 \approx \mathbb{E}[X_i] = 217\sqrt{\pi} \approx 384,62$ opazimo bistveno razliko med realizacijama. V rdečem primeru proces pade pod 0 po več zaporednih manjših izgubah, v modrem primeru pa po eni zelo veliki izgubi. V nadaljevanju bomo primera ločili, ampak pred tem definirajmo kako obravnavamo dogodek, ko proces tveganja pade pod 0.

$\diamondsuit$

Definicija 3.4. *Propad* definiramo kot dogodek, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ kadarkoli pade pod 0. Torej

$$\big\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\big\}$$

in času

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\},$$

pravimo *čas propada*. Seveda velja enakost med dogodkoma

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} = \{T < \infty\}.$$

Definicija 3.5. *Verjetnost propada* je definirana kot funckija $\psi(u) : (0, \infty) \to [0, 1]$ podana s predpisom

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty \mid U_0 = u).$$

Definicija 3.6. Po konstrukciji procesa tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ je verjentost propada mogoča le ob prihodih zahtevkov. S T_n označimo čas n-tega prihoda in definiramo *ogrodje procesa tveganja* kot $(U_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Trditev 3.7. *Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu in $(U_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ njegovo ogrodje ter $W_n := T_n - T_{n-1}$ medpirhodni čas n-tega zahtevka ($W_0 = T_0 = 0$). Potem velja*

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ komulativna izguba po n prihodih in $Y_i = X_i - cW_i$ izguba i-tega prihoda.

Dokaz. S pomočjo ogrodja procesa tveganja lahko dogodek propada zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\left\{\inf_{t\geq 0} U_t < 0\right\} &= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} U_{T_n} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{u + p(T_n) - S_{T_n}\} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \Big\{u + \underbrace{cT_n - \sum_{i=1}^n X_i\Big\}}_{-Z_n} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{-Z_n\} < -u\right\}
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u \right\},$$

kar nam da željeno enakost. □

Tako verjetnost propada prevedemo na prehodno verjetnost diskretnega slučajnega sprehoda $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo asimptotično vedenje $\psi(u)$, ko gre $u \to \infty$. Cilj obravnavanja verjetnosti propada v Cramér-Lundbergovem modelu je, da se izognemo propadu z verjetnostjo 1 oziroma, da je verjetnost, da $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ preseže u tako majhna, da lahko v praksi dogodek propada izključimo.

Trditev 3.8. *Naj bo $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk definirano kot $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke Y_i z $\mathbb{E}[Y_i] = \mu < \infty$. Potem za vsak $u > 0$ velja*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u \right) = 1 \quad \text{za } u > 0,$$

če velja $\mathbb{E}[Y_i] \geq 0$.

Dokaz. Zaporedje slučajnih spremenljivk $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zadostuje krepkemu zakonu velikih števil (4.6), torej velja

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots Y_n}{n} = \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mathbb{E}[Y_n].$$

Torej bo Z_n v primeru ko je $\mu > 0$ skoraj gotovo asimptotično linearno narašcal proti ∞ kot μn in bo za poljuben $u > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u \right) = 1.$$

Dokaz za primer, ko je $\mu = 0$ je precej bolj tehničen in ne preveč informativen, zato ga bomo izpustili. Lahko ga najdemo v [Spitzer, 138]. □

Opomba 3.9. Iz trditve 3.8 (ob predpostavkah $\mathbb{E}[X_i] < \infty$ in $\mathbb{E}[W_i] < \infty$) sledi, da moramo premijo c izbrati tako, da bo $\mathbb{E}[Y_i] < 0$, saj je to edini način, ko lahko upamo, da verjetnost propada ne bo enaka 1.

Definicija 3.10. Pravimo, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ v Cramér-Lundbergovem modelu zadostuje *pogoju neto zaslužka* (ang. *net profit condition*), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]} \quad \text{oziroma} \quad c = (1+\rho)\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]} \quad \text{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljenvanju imenovali NPC.

Zahteva NPC za analizo poslovanja zavarovalnice je kar intuitivna, saj pove, da mora v neki čavni enoti biti pričakoan dohodek iz premij večji od pričakovanega izplačila zahtevkov.

Zgled 3.11 (Nadaljevnaje zgleda 3.3)**.** V zgledu 3.3 smo obravnavali proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, kjer so zahtevki (rdeča) $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$ in (modra) $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$. Opazili smo, da je v prvem primeru propad posledica več manjših izgub, v drugem pa ene velike izgube. Razlog za to je ta, da ima Weibullova porazdelitev za $a \geq 1$ lahkorepno, za $a < 1$ pa težkorepno porazdelitev.

Dokaz. Momentno rodovna funkcija $X \sim \text{Weibull}(a, b)$ je enaka

$$\begin{aligned} M_X(u) &= \int_0^\infty e^{ux} \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} dx \qquad \left(y = \tfrac{x}{b},\ dy = \tfrac{dx}{b}\right) \\ &= \int_0^\infty e^{uby} a y^{a-1} e^{-y^a} dy. \end{aligned}$$

Vidimo, da je zgornji integral končen za $a \geq 1$ in divergira za $a < 1$, če v nadaljevanju predpostavimo $a \geq 1$ in uvedemo $z = y^a$, $dz = ay^{a-1}dy$ dobimo

$$\begin{aligned} M_X(u) &= \int_0^\infty e^{ubz^{\frac{1}{a}}} e^{-z} dz \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(ubz^{\frac{1}{a}})^k}{k!} e^{-z} dz \qquad\qquad \text{Tonelli 4.5} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \int_0^\infty z^{\frac{k}{a}} e^{-z} dz \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k}{a} + 1\right). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

3.2. **Lahkorepe porazdelitve.**

3.2.1. *Lundbergova neenakost.* Od sedaj naprej bomo predpostavili, da je S_t v procesu tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ CPP. Najprej se bomo omejili na primer, ko ima porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i, ki jih seštevamo v CPP lahek rep, saj je bila osnovna teorija, ki sta jo razvila Cramér in Lundberg, izpeljana pod to predpostavko.

Definicija 3.12. Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *lahkorepno porazdelitev*, če velja

$$\mathbb{E}\left[e^{uX}\right] = M_X(u) < \infty \quad \text{za } u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

za nek $\varepsilon > 0$. Sicer pravimo, da ima X *težkorepno porazdelitev.*

Opomba 3.13. V praksi z lahkorepnimi porazdelitvami modeliramo zahtevke, kjer verjentosti ekstremnih dogodkov (torej zelo velikih zahtevkov) eksponentno pada proti 0. To direktno sledi iz definicije 3.12 in neenakosti Markova 4.12, saj za vsak $x > 0$ in $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ velja

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}\left(e^{uX} > e^{ux}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{uX}\right]}{e^{ux}}.$$

Definicija 3.14. Naj velja, da ima slučajna spremenljivka Y_1 iz trditve 3.7 lahek rep. Če obstaja pozitivna enolična rešitev enačbe

$$M_{1Y_1}(\ell) = 1,$$

številu ℓ pravimo *Lundbergov koeficient.*

Trditev 3.15. *mogoče dokazi da je ℓ res enolična rešitev.*

Izrek 3.16. *(Lundbergova neenakost) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj zanj obstaja Lundebrgov koeficient ℓ. Potem za vsak $u > 0$ velja*

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u}.$$

Dokaz. Neenakost bomo dokazali z indukcijo. Za $u > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\psi_n(u) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Z_k > u\right)$$

in vidimo, da je (po zveznosti $\mathbb{P}$ od spodaj) $\psi(u) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(u)$, torej moramo pokazati, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\psi_n(u) \leq e^{-\ell u}$.
(n = 1): Kot v opombi 3.13 uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$\psi_1(u) = \mathbb{P}\left(e^{\ell Z_1} > e^{\ell u}\right) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = e^{-\ell u}.$$

(n → n+1): Označimo s F_{Y_1} porazdeliltev Y_1. Potem velja

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n+1} Z_k > u\right)\\ &= \underbrace{\mathbb{P}\left(Y_1 > u\right)}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{P}\left(\max_{2\leq k\leq n+1}\left\{Y_1 + (Z_k - Y_1)\right\} > u, Y_1 \leq u\right)}_{(ii)}\end{aligned}$$

Najprej se posvetimo (ii). Po indukcijski predpostavki velja

$$\begin{aligned}(ii) &= \int_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left\{x + Z_k\right\} > u\right) dF_{Y_1}(x)\\ &= \int_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Z_k > u - x\right) dF_{Y_1}(x)\\ &\overset{\text{I.P.}}{=} \int_{(-\infty,u]} \psi_n(u-x) dF_{Y_1}(x)\\ &\leq \int_{(-\infty,u]} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).\end{aligned}$$

Za oceno (i) kot v primeru $n = 1$ uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$(i) = \psi_1(u) = \int_{(u,\infty)} dF_{Y_1}(x) \leq \int_{(u,\infty)} e^{\ell(x-u)} dF_{Y_1}(x).$$

Če torej seštejemo (i) in (ii) dobimo željeno oceno

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{\ell(x-u)} dF_{Y_1}(x)\\ &= e^{-\ell u} M_{Y_1}(\ell)\\ &= e^{-\ell u}.\end{aligned}$$

□

Opomba 3.17. Iz izreka 3.16 je razvidno, da z dovolj visokim začetnim kapitalom u verjetnost propada lahko v praksi zadovoljivo omejimo blizu 0. Seveda je meja odvisna tudi od Lundbergovega koeficienta ℓ in krepko temelji na predpostavki lahkorepnih porazdelitev, ki pa v praksi pogosto niso izpolnjene.

Zgled 3.18. Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC. Naj nadalje velja da so X_i eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke s parametrom μ ($X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ za vsak i). Vemo, da ima momentno rodovna funkcija X_i obliko

$$M_{X_i}(u) = \frac{\mu}{\mu - u} \text{ za } u < \mu. \tag{3}$$

Tako dobimo, da ima momentno rodovna funkcija $Y_1 = X_1 - cW_1$ obliko

$$M_{Y_1}(u) = M_{X_1}(u)M_{W_1}(-cu) = \frac{\mu}{\mu - u}\frac{\lambda}{\lambda + cu} \text{ za } u \in (-\tfrac{\lambda}{c}, \mu).$$

Sedaj lahko izračunamo Lundbergov koeficient ℓ

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(\ell) &= 1, \\ \frac{\mu}{\mu - \ell}\frac{\lambda}{\lambda + c\ell} &= 1, \\ \mu\lambda &= (\mu - \ell)(\lambda + c\ell), \\ \mu\lambda &= \mu\lambda - \ell\lambda + \mu c - c\ell^2, \\ 0 &= \mu c - c\ell - \lambda. \end{aligned}$$

Dobimo

$$\ell = \mu - \frac{\lambda}{c} \in (0, \mu),$$

saj v našem modelu velja NPC pogoj

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[W_1]} = \frac{\lambda}{\mu} < c \iff \mu > \frac{\lambda}{c}.$$

Če uporabimo alternativno formulacijo NPC pogoja, dobimo

$$c = (1+\rho)\frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \ell = \mu - \frac{\lambda}{(1+\rho)\frac{\lambda}{\mu}} = \mu\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right).$$

Tako dobimo zgornjo mejo za verjetnost propada

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u} = e^{-\mu u\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)}$$

in vidimo, da povečanje premije čez neko mejo ne bistveno vpliva na oceno, saj

$$\lim_{\rho\to\infty} e^{-\mu u\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)} = e^{-\mu u}.$$

V nadaljevanju bomo videli, da je Lundbergova neenakost v primeru eksponentno porazdeljenih zahtevkov skoraj točna vrednost verjetnosti propada, zgrešena le za konstanto. V splošnem pa je zelo težko določiti Lunbergov koeficient kot funkcijo parametrov porazdelittev X_1 in W_1 in zato uporabljamo numerične metode za njegovo aproksimacijo kot na primer Monte Carlo simulacije. $\diamondsuit$

3.2.2. *Cramérjeva meja za propad.* Sedaj se bomo posvetili enemu najpomembnejših rezultatov v teoriji propada.

Definicija 3.19. Za lažjo notacijo v nadaljevanju definiramo funkcijo *verjentosti preživetja* kot $\theta(u) : (0, \infty) \to [0, 1]$ s predpisom

$$\theta(u) = \mathbb{P}\left(T = \infty \mid U_0 = u\right) = 1 - \psi(u).$$

Lema 3.20. *Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj velja $\mathbb{E}\left[X\right] < \infty$ ter, da je F_X absolutno zvezna glede na Lebesgueovo mero $\mathcal{L}$. Potem $\theta(u)$ zadošca naslednji enakosti*

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1+\rho)\mathbb{E}\left[X\right]} \int_{(0,u]} \Big((1 - F_X(x))\theta(u-x)\Big) dx. \tag{4}$$

Dokaz. Po trditvi 3.7 velja

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ in $Y_i = X_i - cW_i$. Torej je

$$\begin{aligned}\theta(u) &= \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \leq u\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{Z_n \leq u \mid \forall n \in \mathbb{N}\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{Y_1 \leq u\} \cap \{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \mid \forall n \geq 2\}\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y_1 \leq u\}} \mathbb{P}\left(\{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \mid \forall n \geq 2\} \mid Y_1\right)\right].\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je $Y_1 = X_1 - cW_1$ in je torej dogodek $\{Y_1 \leq u\}$ enak dogodku $\{X_1 \leq u + cW_1\}$. Poleg tega velja, da je $(Z_n - Y_1)_{n\geq 2} \sim (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, saj so Y_i neodvisne in enako porazdeljene. Upoštevamo še, da je tokrat W_1 medprihodni čas v $HPP(\lambda)$ in je torej eksponentno porazdeljen. Tako dobimo

$$\begin{aligned}\theta(u) &= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,u+cw]} \mathbb{P}\left(\{Z_n \leq u - (x - cw) \mid \forall n \in \mathbb{N}\}\right) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda w} dw. \\ &= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,u+cw]} \theta(u - x + cw) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda w} dw.\end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko $z = u + cw$ (torej $w = \frac{z-u}{c}$ in $dw = \frac{dz}{c}$) ter dobimo

$$\theta(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_{(u,\infty)} e^{\frac{-\lambda z}{c}} \underbrace{\int_{(0,z)} \theta(z-x) dF_{X_1}(x)}_{g(z)} dz.$$

Ker ima porazdelitev F_X gostoto je funkcija $g(z)$ zvezna in celo odvedljiva, ker... $\theta(u)$ lahko tako odvajamo in dobimo

$$\theta'(u) = \frac{\lambda}{c}\theta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,u)} \theta(u-x) dF_{X_1}(x).$$

Če sedaj obe strani integriramo po u dobimo

$$\int_{(0,t]} \theta'(u)du = \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \underbrace{\int_{(0,u)} \theta(u-x)dF_{X_1}(x)}_{(i)} du, \tag{5}$$

Na integralu (i) uporabimo per partes ($\alpha = \theta(u-x)$ in $d\beta = dF_{X_1}(x)$) in dobimo

$$\begin{aligned}(i) &= (\theta(u-x)F_X(u))\Big|_0^u + \int_{(0,u)} \theta'(u-x)F_X(x)dx \\ &= \theta(0)F_X(u) - \int_{(0,u)} \theta'(u-x)F_X(x)dx.\end{aligned}$$

Kjer upoštevamo da je $F_X(0) = 0$ saj je $X > 0$ skoraj gotovo. Vstavimo (i) v enačbo (5) in dobimo

$$\theta(t) - \theta(0) = \frac{\lambda}{c}\int (0,t]\theta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(0)F_X(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]}\int_{(0,u)} \theta'(u-x)F_X(x)dxdu.$$

Po Tonellijevem izreku 4.5 lahko zamenjamo vrstni red integracije in dobimo

$$\begin{aligned}\theta(t) - \theta(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(0)F_X(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]}\int_{(x,t)} \theta'(u-x)F_X(x)dudx, \\ \theta(t) - \theta(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(0)F_X(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} F_X(x)(\theta(t-x) - \theta(0))dx, \\ \theta(t) &= \theta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(0)F_X(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} F_X(x)\theta(t-x)dx.\end{aligned}$$

Če sedaj upoštevamo enakost

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{\mathbb{E}[X]}$$

in spremenimo oznake $t \to u$ in $x \to y$ dobimo željeno enakost (4).

□

Opomba 3.21. Enačbo (4) lahko zapišemo tudi v obliki

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1+\rho)}\int_{(0,u]} \theta(u-x)dF_X^I(x)$$

kjer je $F_X^I(x)$ podana z enačbo

$$F_X^I(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_{(0,x]} (1 - F_X(y))dy. \text{ za } x > 0.$$

Hitro lahko preverimo, da je $F_X^I(x)$ porazdelitvena funkcija, saj je $F_X^I(0) = 0$, $F_X^I(x)$ je naraščajoča in $F_X^I(x) \uparrow 1$ za $x \to \infty$, ker velja $\mathbb{E}[X] = \int_{(0,\infty)}(1 - F_X(x))dx$. Po osnovnem izreku analize pa neposredno sledi enakost.

Izrek 3.22. *(Cramérjeva meja za propad) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient*

ℓ. Naj bo F_X porazdelitev slučajnih spremenjlvk X_i, ki je absolutno zvezna glede na Lebesgueovo mero $\mathcal{L}$. Potem obstaja konstanta $C > 0$ da velja

$$\lim_{u\to\infty} e^{\ell u}\psi(u) = C.$$

Dokaz. TRIVIALNO □

Zgled 3.23 (Nadaljevnaje zgleda 3.18)**.** Vemo, da rešitve prenovitvene enačbe iz izreka 3.22 v splošnem ne moremo izračuanti. V zgledu 3.18 smo pa privzeli, da zahtevke modeliramo z eksponentno porazdelitvijo, torej $X_i \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. V tem primeru se izkaže, da lahko explicitno izračunamo verjentost propada

$$\psi(u) = \frac{e^{-u\mu\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)}}{1+\rho}, \tag{6}$$

ampak to je zelo poseben primer, ko lahko vse izračunamo eksplicitno. Pokažimo, kako bi do približka lahko prisli z Monte Carlo simulacijami.

Recimo, da v našem modelu pridemo do sklepa, da zahtevki prihajajo z intenzivnostjo $\lambda = 1$ in so eksponentno porazdeljeni s parametrom $\mu = 1$, ter da prejemamo premije s konstantno stopnjo $c = 1$. Vemo,

◊

3.3. **Težkorepe porazdelitve.**

Izrek 3.24. *Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj velja $\mathbb{E}[X] < \infty$ ter, da je F_X absolutno zvezna glede na Lebesgueovo mero $\mathcal{L}$. Naj velja še, da je porazdelitev F_X^I težkorepna. Potem velja*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-F_X^I(u)} = \frac{1}{\rho}. \tag{7}$$

Dokaz. TRIVIALNO □

4. Dostavek

Dostavek je namenjen predvsem za dodatne definicije in trditve, ki so bile izpušcene v glavnem za namene preglednosti besdila. V primeru, če bralec potrebuje osvežiti določene pojme jih večino lahko najde v tem razdelku.

Definicija 4.1. Naj bo X slučajna spremenljivka. Potem so njena *rodovna funkcija*, *momentno rodovna funkcija* in *karakteristična funkcija* definirane kot

$$G_X(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right], \quad M_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX}\right], \quad \varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX}\right],$$

če upanja obstajajo.

Izrek 4.2. *(Lévijev izrek o kontinuiteti) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk (ne nujno na istem verjetnostnem prostoru) in X še ena slučajna spremenljivka. Potem velja*

$$\varphi_{X_n}(u) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_X(u) \quad \textit{za vsak } u \in \mathbb{R}$$

natanko tedaj, ko velja

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X.$$

Dokaz. Dokaz izreka je precej tehničen in ga bomo izpustili. Podroben dokaz lahko bralec najde v [Fristedt, B.E., Gray L.F. (1996) A modern approach to probability theory]. □

Izrek 4.3. *(O enoličnosti) One to one correspondence betwwen characteristic functions and distributions.*

Definicija 4.4. Naj bo X slučajna spremenljivka in F_X njena porazdelitev. Potem za $u \in \mathbb{R}$ *Laplace-Stiltjesovo transformacijo* porazdelitve F_X definiramo kot

$$\hat{F}_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ux} dF_X(x).$$

Izrek 4.5. *(Tonelli (Prirejen)) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki definirani vsaka na svojem verjentnostnem prostoru in naj imata vsaka svojo gostoto f_X in f_Y glede na Lebesgueovo mero. Potem velja*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\mathcal{L}^2(dx,dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy \right) dx,$$

Izrek 4.6. *(Krepki zakon velikih števi) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk s pričakovano vrendostjo $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$. Potem velja*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mu.$$

Definicija 4.7. Slučajna spremenljivka X ima *Weibullovo porazdelitev* s parametri $a, b > 0$, če ima njena porazdelitev obliko

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0$$

in gostota obliko

$$f_X(x) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0.$$

Definicija 4.8. Naj bo F porazdelitvena funkcija. Potem je

$$F^{-}(x) = \int$$

porazdelitev integrarnega repa F.

Izrek 4.9. *izrek o sliki mere*

Trditev 4.10. *pricakovana vrednost kot $\int_{(0,\infty)} P(X > x)dx$ za pozitivne slucajne spremenljivke*

Dokaz. dokaz trditve □

Definicija 4.11. *Prenovitveni proces* na verjentostnem protoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je slučajni proces karatkteriziran z zaporedjem medprihodnih časov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki zavzamejo vrednosti v $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ in je podan z zvezo

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

kjer je $T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ čas n-tega prihoda.

Trditev 4.12. *(Neenakost Markova) Za vsak $x > 0$ in $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ velja*

$$\mathbb{P}\left(X > x\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{x}.$$

Izrek 4.13. *(Smith) neki*

Slovar strokovnih izrazov

trajektorija sample path

Literatura

[1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).

[2] S.M. Ross, Stochatic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).

[3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).

[4] T.Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Springer, Second Edition, (2009).