UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

Potencialni naslov:Sestavljen Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

Kazalo

Potencialni naslov:Sestavljen Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Povzetek

Compound Poisson process and its application in finance

Abstract

Prevod zgornjega povzetka v angleščino.

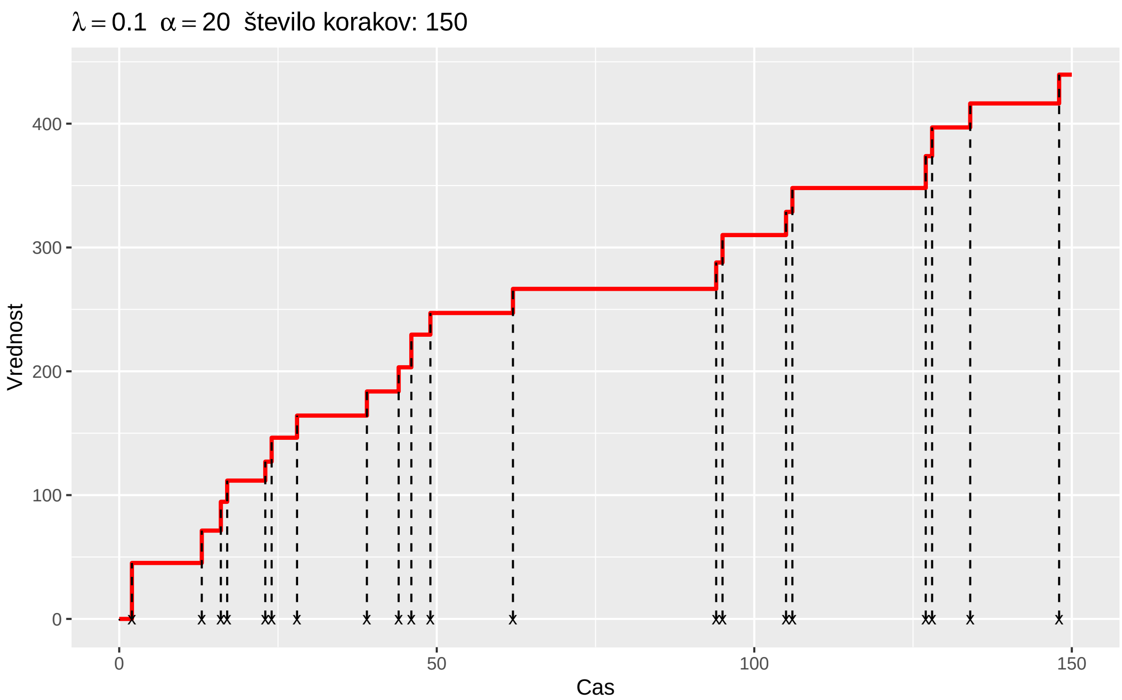
Math. Subj. Class. (2020): 60G07 60G20 60G51

Ključne besede: slučajni procesi, sestavljen Poissonov proces

Keywords: stochastic processes, compound Poisson process

1. Uvod

Poissonov proces šteje število prihodov v danem časovnem intervalu, kjer narava prihodov sledi določenim omejitvam. Sestavljen Poissonov proces, je podoben Poissonovemu, razen da je vsak prihod utežen z neko slučajno spremenljivko. Na primer, stranke, ki gredo v trgovino, sledijo Poissonovemu procesu, znesek denarja, ki ga porabijo, pa lahko sledi sestavljenemu Poissonovemu procesu. Slika 1 prikazuje primer trajktorije. Na osi x je čas, na osi y pa kumulativna vsota vseh prihodov do tega časovnega trenutka.



Slika 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa

Hitro vidimo, da je to zelo zanimiva ideja slučajnega procesa, ki ima veliko potencialnih uporab. Mogoce:V delu se bomo osredotočili na njegovo uporabo v financah. Za začetek definirajmo osnovne pojme ter Sestavljen Poissonov proces.

Definicija 1.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (S, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T, je družina slučajnih spremenljivk $X_t : \Omega \to S$, ki so $(\mathcal{F}, \Sigma)$-merljive za vsak $t \in T$.

Opomba 1.2. Držali se bomo konvencije, da T predstavlja čas, torej $T = [0, \infty)$. V tem primeru govorimo o zveznem slučnem procesu.

Definicija 1.3. Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$.

Opomba 1.4. Na slučajni proces lahko gledamo tudi kot na predpis, ki nam iz vorčnega prostora Ω priredi slučajno funkcijo $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.5. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Definicija 1.6. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Definicija 1.7. Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t\geq 0}$ definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$ pravimo *Poissonov proces* z intenzivnostjo λ, če zadošča naslednjim pogojem:

(1) $N_0 = 0$ $\mathbb{P}$-skoraj gotovo.
(2) $(N_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
(3) Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t-s))$,

Opomba 1.8. Vidimo, da v definiciji ne zahtevamo, da so skoki procesa le $+1$...

Definicija 1.9. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Naj bo $(X_i)_{i\geq 1}$ zaporedje neodvisnih (med sabo in N_t) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Potem je *sestavljen Poissonov proces* $(S_t)_{t\geq 0}$ definiran kot

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Opomba 1.10. Vidimo, da je Poissonov proces le poseben primer sestavljenega Poissonovega procesa, ko za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$ za vsak i. Bolj v splošnem, če za X_i postavimo $X_i = \alpha$, potem velja $S_t = \alpha N_t$.

V nadaljevanju bomo Poissonovemu procesu rekli HPP (angl. Homogeneous Poisson Process) in sestavljenemu Poissonovemu procesu CPP (angl. Compound Poisson Process).

2. Lastnosti sestavljenega Poissonovega procesa

V tem poglavju si bomo ogledali osnovne lastnosti sestavljenega Poissonovega procesa. Pogledali si bomo...

Trditev 2.1. *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Za nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ lahko slučajne spremeljivke $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti X_i od X_j za $i \neq j$ in N_t. Naj bo $h > 0$ in $s < t$. Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima $N_{t+h} - N_{s+h}$ členov. Ker za HPP velja $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$, je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

$\square$

Definicija 2.2. neki

Izračunajmo pričakovano vrednost in varianco CPP. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ HPP z intenzivnostjo λ in naj bo $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ pričakovana vrednost slučajnih spremenljivk X_i za vsak i. Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$. Torej

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[S_t|N_t = k]\, \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{E}[X_i]\, \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= \mu\lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \mu\lambda t.
\end{aligned}$$

Za izračun variance potrebujemo dodatno predpostavko, da imajo slučajne spremenljivke X_i drugi moment. V tem primeru označimo $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$. Velja $\mathrm{Var}[S_t] = \mathbb{E}[S_t^2] - \mathbb{E}[S_t]^2$, torej potrebujemo izračunati se drugi moment. Ponovno uporabimo formulo za popolno pričakovano vrednost

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t^2\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_t^2 \mid N_t = k\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i^2 + \sum_{i\neq j} X_i X_j\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(kE\left[X_i^2\right] + k(k-1)\mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_j]\right) \mathbb{P}(N_t = k)
\end{aligned}$$

Prek formule $\mathrm{Var}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2$ dobimo

$$\mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \sigma^2 + \mu^2.$$

Izraz $kE[X_i^2] + k(k-1)\mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_j]$ se poenostavi v $k\sigma^2 + k^2\mu^2$, torej

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t^2\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k\sigma^2 + k^2\mu^2\right) \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sigma^2\mathbb{E}[N_t] + \mu^2\mathbb{E}\left[N_t^2\right] \\
&= \sigma^2\lambda t + \mu^2(\lambda t + \lambda^2 t^2),
\end{aligned}$$

kjer upoštevamo, da $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[S_t\right] &= \sigma^2\lambda t + \mu^2(\lambda t + \lambda^2 t^2) - (\mu\lambda t)^2 \\ &= \sigma^2\lambda t + \mu^2\lambda t + \mu^2\lambda^2 t^2 - \mu^2\lambda^2 t^2 \\ &= \lambda t\left(\sigma^2 + \mu^2\right). \end{aligned}$$

Inzračunajmo še momentno rodovno funckijo CPP. Označimo z $M_X(u)$ momentno rodovno funkcijo s.s X_i za vsak i in z M_{S_t} momentno rodovno funkcijo CPP.

$$\begin{aligned} M_{S_t}(u) = \mathbb{E}\left[\exp\left[uS_t\right]\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left[u\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right]\right] \\ &= \mathbb{P}\left(N_t = 0\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left[u\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t = k\right]\right]\mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(N_t = 0\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left[u\sum_{i=1}^{k} X_i\right]\right]\mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\ &= e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\mathbb{E}\left[e^{uX}\right]^n}_{M_X(u)^n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(M_X(u)\lambda t\right)^k}{k!} \\ &= e^{\lambda t(M_X(u)-1)} \end{aligned}$$

Iz opombe 1.10, sledi, da če za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$, dobimo HPP. Tako vidimo, da je momentno rodovna funkcija HPP enaka $M_{S_t}(u) = e^{\lambda t(e^u - 1)}$. Poleg tega takoj dobimo, da sta karakteristična in rodovna funkcija CPP enaki

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)} \qquad \text{in} \qquad G_{S_t}(u) = e^{\lambda t(G_X(u)-1)}.$$

2.1. **Martingalska lastnost in kvdratična variacija.**

Definicija 2.3. Slučajni proces X_t prilagojen glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ martingal, če velja

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$$

a vsak $0 \leq s \leq t$.

Pokažimo, da v splošnem CPP ni martingal.

Trditev 2.4. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bodo X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ za vsak i. Potem je S_t martingal natanko tedaj, ko je $\mu = 0$.*

Dokaz. Naj bo $0 \leq s \leq t$. Potem velja

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[S_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s + S_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s\right] + \mathbb{E}\left[S_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mu\lambda(t-s) + S_s \end{aligned}$$

Enakost $\mu\lambda(t-s) + S_s = S_s$ velja $\iff \mu\lambda(t-s) = 0 \iff \mu = 0.$ $\square$

Trditev 2.5. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bodo X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ za vsak i, Potem je proces*

$$S_t - \mu\lambda t$$

martingal.

Dokaz. Naj bosta $0 \leq s < t$. Prirastek $S_t - S_s$ je neodvisen od $\mathcal{F}_s$ in ima pričakovano vrednost $\mu\lambda(t-s)$. Torej

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t - \mu\lambda t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[S_t - S_s] + S_s - \mu\lambda t \\ &= \mu\lambda(t-s) + S_s - \mu\lambda t \\ &= S_s - \mu\lambda s.\end{aligned}$$

□

Če v nadaljevanju predpostavimo, da $\mu \neq 0$, lahko govorimo o kvadratični variaciji CPP.

Definicija 2.6. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. *Kvadratična variacija* procesa $(X_t)_{t\geq 0}$ je definirana kot

$$\langle X \rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)^2,$$

kjer je $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ zaporedje časovnih točk.

2.2. **Čas prvega prehoda.** Postavimo si vprašanje, kdaj bo CPP prvič dosegel nek $a \in \mathbb{R}$. Seveda v primeru, če so X_i zvezno porazdeljene, je ta vrednost 0. Lahko pa govorimo o tem, kadaj bo to vrednost presegel. Naj bo $T_a = \inf\{t \geq 0; S_t \geq a\}$ čas prvega prehoda CPP. V tem poglavju bomo izračunali porazdelitev T_a.

Če pogledamo dogodek $\{T_a \leq t\}$, vidimo, da je enak dogodku $\cup_{n=1}^{\infty}\{S_{\frac{t}{n}} \geq a\}$. Ker vemo

Slovar strokovnih izrazov

Literatura

[1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
[2] S.M. Ross, Stochatic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).