UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

Kazalo

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Povzetek

V prvem delu diplome najprej definiramo splošen slučajni proces v zveznem času in osnovne lastnosti, ki jih študiramo. Nato definiramo sestavljeno Poissonovo porazdelitev in izpeljemo rodovne funkcije, obravnavamo njeno povezavo s splošnimi porazdelitvami in izpeljemo Panjerejevo rekurzivno shemo. Definiramo sestavljeni Poissonov proces in dokažemo neodvisnost in stacionarnost prirastkov, njegovo razčlenitev glede na čas in prostor ter ga obravnavamo, kot gradnik neskončno deljivih procesov ti. Lévijevih procesov. V drugem delu diplome obravnavamo aplikacijo sestavljenega Poissonovega procesa v Cramér–Lundbergovem modelu. Definiramo verjetnost propada in obravnavamo njeno obnašanje v odvisnoti od začetnega kapitala. Dokažemo Lundbergovo neenakost in asimptotično obnašanje verjetnosti propada, ko zahtevke modeliramo z lažkorepo in težkorepo porazdelitvijo. Obnašanje verjetnosti propada na koncu praktično prikažemo z večkratkim simuliranjem procesa tveganja.

Compound Poisson process and its application in finance

Abstract

In the first part of the diploma, we define a general stochastic process in continuous time and basic properties that we study. We then define the compound Poisson distribution and derive the generating functions, discuss its connection with general distributions, and derive the Panjer recursion method. We define the compound Poisson process and prove the independence and stationarity of increments, its decomposition with respect to time and space, and consider it as a building block of infinitely divisible processes, i.e. Lévy processes. In the second part of the diploma, we consider the application of the compound Poisson process in the Cramér–Lundberg model. We define the probability of ruin and consider its behavior depending on the initial capital. We prove the Lundberg inequality and the asymptotic behavior of the probability of ruin when claims are modeled with light-tailed and heavy-tailed distributions. We practically demonstrate the behavior of the probability of ruin at the end with repeated simulation of the risk process.

Math. Subj. Class. (2020): 60G07 60G20 60G51

Ključne besede: slučajni proces, sestavljena Poissonova porazdelitev, Panjerjeva rekurzivna shema, sestavljeni Poissonov proces, razčlenitev glede na čas, razčlenitev glede na prostor, neskončna deljivost, Cramér–Lundbergov model, Verjetnost propada, lahkorepa porazdelitev, težkorepa porazdelitev

Keywords: stochastic process, compound Poisson distribution, Panjer recursion scheme, compound Poisson process, decompostition of time, decompostion of space, infinite divisibility, Cramér–Lundberg model, probability of ruin, light-tailed distribution, heavy-tailed distribution

Zahvala

V nastajanju :)

* NEODVISNOST PRIRASTKOV
* Dokaz izreka 4.23 (direktna R. ∫-limita $2\exp(\ln(1-\bar{F}_{X_n}(u)))$)
* Morda rešitev defektne prenovitvene enačbe s sestavljeno geometrijsko porazdelitvijo

PREVERITI:

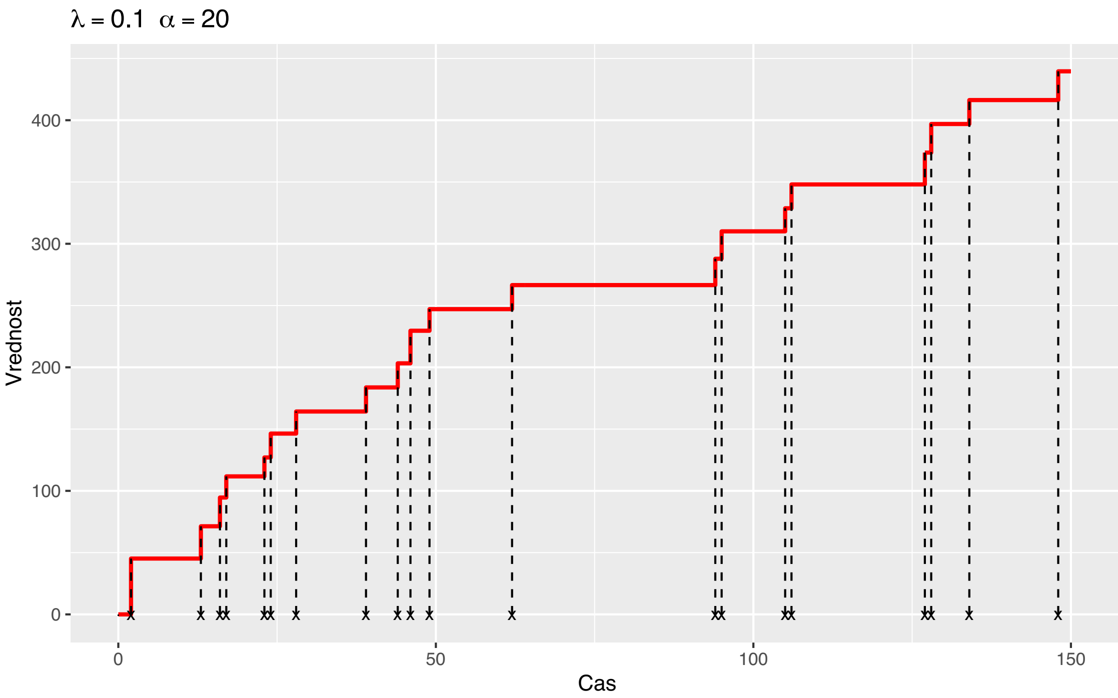
* oznake za [illegible] integraciji
* razlike med težko- in lahkorepimi porazd.
  majhnimi in velikimi zahtevki
  stabilnimi in volatilnimi zahtevki

MAIL 19.7:

PREGLEDATI opombo 2.10

JE EKVIVALENCA Z 2024_06_13.pdf V REDU PREDSTAVLJENA?

Uvodni tekst in motivacija za študiranje procesa, nakaži da boš obravnaval Cramer-Ludenbergov model



SLIKA 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa

TELE ZELO FORMALNE DEFINICIJE BOLJ SODIJO NA ZAČETEK 3. POGLAVJA.

Definicija 1.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (E, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T, je družina slučajnih elementov $X_t : \Omega \to E$, ki so $(\mathcal{F}, \Sigma)$-merljivi za vsak $t \in T$.

Opomba 1.2. V delu se bomo omejili na primer, ko T predstavlja čas, torej $T = [0, \infty)$, in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, kjer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ predstavlja Borelovo $\sigma-$algebro na $\mathbb{R}$. TULE BI BIL BOLJ NA MESTU ENOJNI VEZAJ.

Definicija 1.3. Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R}$; $t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$. Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora Ω priredi slučajno funkcijo $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.4. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Definicija 1.5. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

¡ŠE ENA DEFINICIJA PRIDE VMES!

Definicija 1.6. Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t\geq 0}$, definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, pravimo *Poissonov proces* z intenzivnostjo λ, če zadošča naslednjim pogojem:

homogeni (HPP)

(1) $N_0 = 0$ $\mathbb{P}$-skoraj gotovo.
(2) $(N_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
(3) Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t-s))$,

2. Sestavljena Poissonova porazdelitev

Razdelek je prirejen po [1], [2] in [3].

Sestavljena ~~p~~Poissonova porazdelitev je osnovni gradnik za sestavljeni Poissonov proces, ki ga obravnavamo v naslednjem razdelku. Lastnosti, ki jih dokažemo, so direktno prenosljive na sam proces. Obravnavamo porazdelitev in kako te pridemo, rodovne funkcije, zanimive rezultate v povezavi s splošnmi slučajnimi spremenljivkami in Panjerjevo rekurzivno shemo, ki jo prikažemo na praktičnem zgledu.

Definicija 2.1. Naj bo $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih (med seboj in N) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

sestavljeno Poissonovo porazdelitev.

DODAJTE OPOMBO, DA ZA PRIMER, KO JE KAR $X_i=1$ ZA VSE i, DOBIMO POISSONOVO PORAZDELITEV. TA OPOMBA JE NAMREČ MOTIVACIJA ZA TRDITEV 2.8 (TAM OMENITE, DA JO LAHKO GLEDAMO KOT POSPLOŠITEV TE TRIVIALNE OPOMBE, KI PA IMA TEŽO).

Opomba 2.2. V splošnem lahko obravnavamo sestavljene porazdelitve, kjer je N poljubna slučajna spremenljivka, ki zavzema vrednosti v $\mathbb{N}_0$. Konkreten primer nas zanima zaradi njegove povezave s sestavljenim Poissonovim procesom. V nadaljevanju bomo uporabljali oznako

$$S_0 = 0 \quad \text{in} \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \quad \text{za } k \in \mathbb{N};$$

~~za pogojno porazdelitev $S \mid \{N = k\}$~~.

opazimo, da se (brezpogojna) porazdelitev slučajne spremenljivke S_k ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke S glede na $N=k$.

2.1. **Porazdelitev.** Z uporabo izreka o popolni verjetnosti s pogojevanjem na N pridemo do formule za $\underbrace{\text{porazdelitev } S}_{\text{slučajne spremenljivke}}$. Za $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}
F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S \leq x \mid N = k)\mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k \leq x)\mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} F_{X_1}^{*k}(x) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},
\end{aligned}$$

V PRILOGI DEFINIRAJTE KONVOLUCIJO IN SE TU SKLIČITE NA DEFINICIJO. (*)

kjer je $F_{X_1}^{*k}$~~(x)~~ k-ta konvolucija funkcije F_{X_1}. ~~porazdelitev k-te konvolucije slučajne spremenljivke X_1~~.

Zgled 2.3. Poglejmo enega enostavnejših primerov, ko so $X_1, X_2, \ldots$ porazdeljene kot

$$X_1 \sim \mathrm{Exp}(a), \quad \text{torej z gostoto} \quad f_{X_1}(x) = ae^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

(*) DEFINIRAJTE:

* KONVOLUCIJO DVEH VERJETNOSTNIH PORAZDELITEV KOT PORAZDELITEV VSOTE USTREZNIH DVEH NEODVISNIH SLUČAJNIH SPREMENLJIVK;
* KONVOLUCIJO DVEH OMEJENIH NEPADAJOČIH FUNKCIJ KOT USTREZNI RIEMANN-STIELTJESOV INTEGRAL, Z OPAŽANJEM, DA SE TAKO KONVOLUCIJA KUMULATIVNIH PORAZDELITVENIH FUNKCIJ DVEH VERJETNOSTNIH PORAZDELITEV UJEMA S KUMULATIVNO PORAZDELITVENO FUNKCIJO KONVOLUCIJE TEH DVEH PORAZDELITEV;
* k-TO KONVOLUCIJO VERJETNOSTNE PORAZDELITVE IN OMEJENE NEPADAJOČE FUNKCIJE.

STROGO GLEDANO NI SMISELNO GOVORITI O k-TI KONVOLUCIJI SLUČAJNE SPREMENLJIVKE, TEMVEČ LE O k-TI KONVOLUCIJI VERJETNOSTNE PORAZDELITVE.

kjer je
porazdelitev slučajne spremenljivke X_1 porazdelitev

s ~~parametrom~~ $a > 0$. Vemo, da je k-ta konvolucija ~~X_1 porazdeljena kot~~ $\mathrm{Gamma}(k, a)$ in ima gostoto

$$f_{X_1+\cdots+X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Za $s > 0$ velja

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^s \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} dx \, \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \text{Tonelli (5.12)} \\ &= \int_0^s \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!k!} (a\lambda)^k x^{k-1} e^{-(ax+\lambda)}}_{f_S(x)} \, dx. \end{aligned}$$

lahko celo

Vidimo, da ~~že~~ v primeru, ko poznamo eksplicitno formulo za $F_{X_1}^{*k}$, težko pridemo do ~~kakršne koli~~ porazdelitve S v ~~končni~~ obliki. V praksi se zato poslužujemo numeričnega ocenjevanja. slučajne spremenljivke zaključeni (ZA MOJ OKUS NAJUSTREZNEJŠI PREVOD ANGLEŠKEGA IZRAZA CLOSED FORM)

2.2. Rodovne funkcije

momentno-rodovna in karakteristična

Trditev 2.4. *Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih (med seboj in N) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk s karakteristično funkcijo φ_{X_1}. Potem ima za $u \in \mathbb{R}$ karakteristična funkcija $S = \sum_{i=1}^N X_i$ obliko*

$$\varphi_S(u) = e^{\lambda(\varphi_{X_1}(u)-1)}.$$

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned} \varphi_S(u) &= \mathbb{E}\left[\exp\left[iuS\right]\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iuS \mid N = k\right]\right] \mathbb{P}\left(N = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iuS_k\right]\right] \mathbb{P}\left(N = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{iuX_1}\right]^k}_{\varphi_{X_1}(u)^k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (1) \\ &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{X_1}(u)\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{\lambda(\varphi_{X_1}(u)-1)}. \end{aligned}$$

ZAKAJ NE KAR $e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi_{X_1}(u)\lambda)^k}{k!}$?

∎

(*)

Posledica 2.5. *Rodovna in momentno rodovna funkcija $S = \sum_{i=1}^N X_i$ imata obliko*

$$G_S(u) = e^{\lambda(G_{X_1}(u)-1)}, \qquad \text{in} \qquad M_S(u) = e^{\lambda(M_{X_1}(u)-1)}.$$

Dokaz. V splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke X enaka njeni rodovni funckij izvrednoteni v e^{iu}, torej $\varphi_X(u) = G_X(e^{iu})$ in momentno rodovni funkciji izvrednoteni v iu, torej $\varphi_X(u) = M_X(iu)$, če obstajata. ∎

(*) TOLE ZAPOREDJE JE MALO NERODNO: ČE ŽELIMO POSLEDICO 2.5 IZPELJATI IZ TRDITVE 2.4, POTREBUJEMO IZREK O ENOLIČNOSTI HOLOMORFNIH FUNKCIJ.

NARAVNEJŠI POTEK:

* MOMENTNO-RODOVNO FUNKCIJO M_X SLUČAJNE SPREMENLJIVKE X DEFINIRAMO ZA VSE KOMPLEKSNE ARGUMENTE z, ZA KATERE JE $\mathbb{E}[e^{\mathrm{Re}(z) X}] < \infty$.

* TRDITEV 2.4 FORMULIRAMO ZA MOMENTNO-RODOVNE FUNKCIJE.

* POSLEDICA 2.5 NAS ZADEVA KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE:

  $$\varphi_X(u) = M_X(iu) \quad ; u \in \mathbb{R}$$

  IN RODOVNE FUNKCIJE:

  $$G_X(u) = M_X(\ln u) \quad ; u > 0$$

TUDI RODOVNO FJO GLEDAMO V KOMPLEKSNEM: $G_N(\varphi_{X_1})$!

V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo φ_S, saj je ta vedno definirana za vsak $u \in \mathbb{R}$. Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med φ_S in G_S.

Lema 2.6. *Karakteristično funckijo φ_S lahko izrazimo kot kompozitum rodovne funkcije G_N in karaterističtne funkcije φ_{X_1}.*

$$\varphi_S(u) = G_N\left(\varphi_{X_1}(u)\right).$$

Dokaz. Po enačbi (1) iz trditve 2.4 za $u \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}\varphi_S(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{X_1}(u)^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= G_N\left(\varphi_{X_1}(u)\right).\end{aligned}$$

□

Vemo, da za neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$, ki so porazdeljene kot $X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1)$, …, $X_n \sim \text{Pois}(\lambda_n)$, velja, da je njihova vsota $S = \sum_{i=1}^n X_i$ porazdeljena kot $S \sim \text{Pois}(\lambda)$, kjer je $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Izkaže se, da ima sestavljena poissonova porazdelitev podobno lastnost.

Definicija 2.7. Naj bo $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih realnih števil za katerega velja $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$. Naj bodo $F_1, F_2, \ldots$ porazdelitvene funckcije realnih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ Potem

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k$$

pravimo *mešanica porazdelitev* $F_1, F_2, \ldots$

Očitno je F porazdelitvena funckija. Če definiramo

$$I \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots \end{pmatrix},$$

vidimo, da je F porazdelitev slučajne spremenljivke $X = \mathbb{1}_{\{I=1\}} X_1 + \cdots + \mathbb{1}_{\{I=n\}} X_n$, kar enostavno pokažemo z uporabo zakona o popolni verjentnosti. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \le x\right) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X \le x \mid I = k\right) \mathbb{P}\left(I = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_k \le x\right) \lambda_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \lambda_k.\end{aligned}$$

Z enakim argumentom lahko pokažemo, da je $\varphi_X(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_{X_k}(u)$.

Trditev 2.8. *Naj imajo neodvisne slučajne spremenljivke $S_1, \ldots, S_n$ sestavljeno Poissonovo porazdelitev, torej*

$\to S^{(k)}$

$$S_k = \sum_{i=1}^{N_k} X_i^{(k)} \quad \text{za } k = 1, \ldots, n,$$

kjer je $N_k \sim Pois(\lambda_k)$ za $\lambda_k > 0$ in za vsak $k = 1, \ldots, n$ je $(X_i^{(k)})_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem velja

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k \sim \sum_{i=1}^{N} Y_i,$$

kjer je $N \sim Pois(\lambda)$ s parametrom $\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ in $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z mešano porazdelitvijo

$$F_{Y_1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda} F_{X_1^{(k)}}.$$

Dokaz. Karakteristična funkcija S_k ima obliko

$$\varphi_{S_k}(u) = e^{\lambda_k \left(\varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1 \right)}.$$

Ker so $S_1, \ldots, S_n$ neodvisne, velja

$$\begin{aligned}
\varphi_S(u) &= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{S_k}(u) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \exp \left[\lambda_k \left(\varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1 \right) \right] \\
&= \exp \left[\lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda} \varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

Po izreku o enoličnosti (5.8) sledi $S \sim \sum_{i=1}^{N} Y_i$.

□

Na podoben način pokažemo, kako se sestavljena Poissonova porazdelitev izraža v primeru, ko so slučajne spremenljivke X_i diskretno porazdeljene.

Trditev 2.9. *Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \ldots X_n$ neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od N), enako porazdeljene ~~kot~~* po shemi

$$\cancel{X_1 \sim} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} \ldots \end{pmatrix},$$

kjer $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je poljubno zaporedje realnih števil in $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih realnih števil, za katerega velja $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda$. Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

kjer so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke porazdeljene kot $Pois(\lambda_1), Pois(\lambda_2), \ldots$

Dokaz. S $\varphi_{Z_n}(u)$ označimo karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $Z_n := a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \cdots + a_n Y_n$ in s $\varphi_Z(u)$ karakteristično funkcijo $Z := \sum_{j=1}^{N} X_j$. Po neodvisnosti velja

$$\varphi_{Z_n}(u) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{Y_j}(a_j u)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \exp\left[\lambda_j\left(e^{a_j iu} - 1\right)\right]$$

$$= \exp\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\left(e^{a_j iu} - 1\right)\right].$$

Po lemi 2.6 velja

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(u) &= G_N\left(\varphi_{X_1}(u)\right) \\
&= \exp\left[\lambda\left(\varphi_{X_1}(u) - 1\right)\right] \\
&= \exp\left[\lambda\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda} e^{a_j iu} - 1\right)\right] \\
&= \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\left(e^{a_j iu} - 1\right)\right].
\end{aligned}$$

FORMULA SE NE SME DOTIKATI FORMULE! V SLOVENŠČINI SE JE TREBA MALO BOLJ ZNAJTI, KER NA TAKIH MESTIH NI VEJICE:

... da zaporedje $\varphi_{Z_n}(u)$ za vsak $u \in \mathbb{R}$ po točkah konvergira ...

Vidimo, da za vsak $u \in \mathbb{R}$ $\varphi_{Z_n}(u)$ po točkah konvergira k $\varphi_Z(u)$, torej

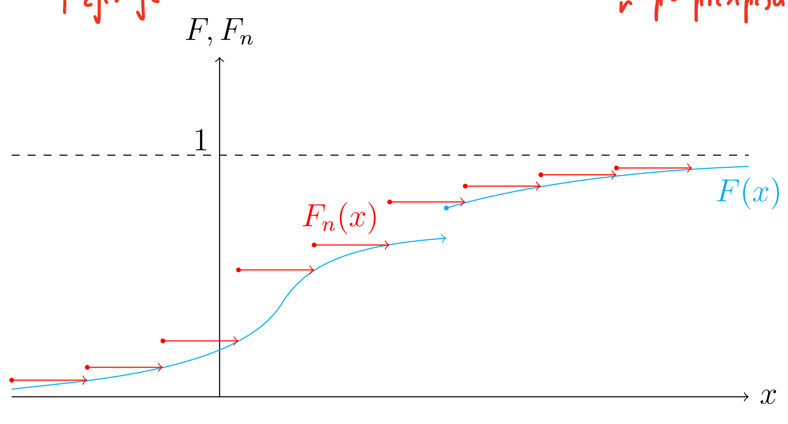
$$\varphi_{Z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_Z$$

po Lévijevem izreku o kontinuiteti (5.9) velja $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$. □

Rezultat je zanimiv predvsem zato, ker nam za razliko od trditve 2.8 pove, da lahko slučajno vsoto izrazimo kot linearno kombinacijo oziroma vrsto Poissonovih slučajnih spremenljivk.

Opomba 2.10. Kaj pa v primeru, ko X_i niso diskretno porazdeljene? Ali lahko trditev 2.9 posplošimo? Izkaže se, da tudi v splošnem dobimo konvergenco v porazdelitvi (nisem prepričan če je to res). Naj bo $F(x)$ porazdelitvena funkcija realnoštevilske realne slučajne spremenljivke X_1. Ideja je, da definiramo funkcijo e $F_n(x) := F(\frac{k+1}{n})$ ~~na intervalu~~ za $x \in$ $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ ~~za~~ , kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

F_n po predpisu



Slika 2. Aproksimacija F s F_n

Kot je razvidno iz slike 2, je $F_n(x)$ stopničasta funkcija, ki aproksimira porazdelitveno funkcijo $F(x)$. Vemo, da F_n ustreza diskretni porazdelitvi

$$\begin{pmatrix} \cdots & \frac{k}{n} & \frac{k+1}{n} & \frac{k+2}{n} & \cdots \\ \cdots & F(\frac{k}{n}) - F(\frac{k-1}{n}) & F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) & F(\frac{k+2}{n}) - F(\frac{k+1}{n}) & \cdots \end{pmatrix}.$$

Izkaže se, da gre $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ povsod, kjer je F zvezna, ampak dokaz presega obseg tega dela. Interesirani bralec ga lahko najde v [4] (moram dobiti dejansko referenco).

2.3. **Panjerjeva rekurzivna shema.** Poglejmo si popularno metodo za računaje sestavljene Poissonove porazdelitve v praksi. Kot smo videli v zgledu 2.3, je računanje eksplicitne porazdelitve S v končni obliki v splošnem nemogoče. Izkaže pa se, da jo je v posebnih primerih vselej mogoče rekurzivno izraziti in ustrezno posplošiti na širši razred porazdelitev.

Trditev 2.11. *(Panjer) Naj bo N diskretna slučajna spremenljivka, za katero velja*

$$\mathbb{P}(N=n)=\left(a+\frac{b}{n}\right)\mathbb{P}\left(N=n-1\right) \quad \textit{za } n\in\mathbb{N} \textit{ in } a,b\in\mathbb{R}.$$

Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki zavzemajo vrednosti v $\mathbb{N}_0$. Potem za $S=\sum_{i=1}^N X_i$ velja

$$\mathbb{P}\left(S=0\right)=\begin{cases}\mathbb{P}\left(N=0\right), & \textit{če } \mathbb{P}(X_1=0)=0,\\ \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(X_1=0\right)^N\right], & \textit{sicer,}\end{cases}$$

in za $n\in\mathbb{N}$ velja

$$\mathbb{P}\left(S=n\right)=\frac{1}{1-a\mathbb{P}\left(X_1=0\right)}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)\mathbb{P}\left(X_1=k\right)\mathbb{P}\left(S=n-k\right). \tag{2}$$

Dokaz. Prvo se osredotočimo na primer $n=0$. Velja

$$\mathbb{P}\left(S=0\right)=\mathbb{P}\left(N=0\right)+\mathbb{P}\left(S=0,N>0\right).$$

Če velja $\mathbb{P}(X_1=0)=0$, je enakost očitna. Če velja $\mathbb{P}(X_1=0)>0$, po zakonu za popolno pričakovano vrednsot računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S=0\right)&=\mathbb{P}\left(N=0\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(S=0,N>0\mid N=k\right)\mathbb{P}\left(N=k\right)\\ &=\mathbb{P}\left(N=0\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(S_k=0\right)\mathbb{P}\left(N=k\right)\\ &=\mathbb{P}\left(N=0\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(X_1=0\right)^k\mathbb{P}\left(N=k\right)\\ &=\mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(X_1=0\right)^N\right].\end{aligned}$$

Za $n\in\mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S=n\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(S_k=n\right)\mathbb{P}\left(N=k\right)\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(S_k=n\right)\left(a+\frac{b}{k}\right)\mathbb{P}\left(N=k-1\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Če sedaj upoštevamo, da so X_i neodvisne in enako porazdeljene, opazimo, da velja

$$1=\mathbb{E}\left[\frac{S_k}{S_k}\;\middle|\; S_k\right]=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\left[\frac{X_i}{S_k}\mid S_k\right]=k\mathbb{E}\left[\frac{X_1}{S_k}\mid S_k\right],$$

POENOTITE NAVPIČNICE NA \Bigm| ALI \biggm|.

torej je

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1}{S_k}\;\middle|\; S_k\right] = \frac{1}{k}$$

in posledično

$$\mathbb{E}\left[a + \frac{bX_1}{n}\;\middle|\; S_k = n\right] = a + \frac{b}{k}. \tag{4}$$

Nadaljno velja

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[a + \frac{bX_1}{n}\;\middle|\; S_k = n\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(a + \frac{bi}{n}\right)\mathbb{P}\left(X_1 = i \mid S_k = n\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(a + \frac{bi}{n}\right)\frac{\mathbb{P}\left(X_1 = i, S_k - X_1 = n - i\right)}{\mathbb{P}\left(S_k = n\right)} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(a + \frac{bi}{n}\right)\frac{\mathbb{P}\left(X_1 = i\right)\mathbb{P}\left(S_{k-1} = n - i\right)}{\mathbb{P}\left(S_k = n\right)}
\end{aligned} \tag{5}$$

Če sedaj vstavimo enakost (4) v (3) in upoštevamo (5), dobimo

$$\mathbb{P}\left(S = n\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(a + \frac{bi}{n}\right)\mathbb{P}\left(X_1 = i\right)\mathbb{P}\left(S_{k-1} = n - i\right)\mathbb{P}\left(N = k - 1\right).$$

Po Tonellijevem izreku (5.12) lahko zamenjamo vrstni red integracije, da dobimo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S = n\right) &= \sum_{i=0}^{n}\left(a + \frac{b}{n}\right)\mathbb{P}\left(X_1 = i\right)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(S_{k-1} = n - i\right)\mathbb{P}\left(N = k - 1\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(a + \frac{b}{n}\right)\mathbb{P}\left(X_1 = i\right)\mathbb{P}\left(S = n - i\right).
\end{aligned}$$

Izpostavimo prvi člen vsote in izraz preoblikujemo.

$$\mathbb{P}\left(S = n\right) = a\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right)\mathbb{P}\left(S = n\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{b}{n}\right)\mathbb{P}\left(X_1 = i\right)\mathbb{P}\left(S = n - i\right),$$

$$\mathbb{P}\left(S = n\right) = \frac{1}{1 - a\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right)}\sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{b}{n}\right)\mathbb{P}\left(X_1 = i\right)\mathbb{P}\left(S = n - i\right).$$

REFERENCA ?

S tem je trditev dokazana. □

Opomba 2.12. Izkaže se, da le ~~3~~ tri porazdelitve ustrezajo pogojem iz trditve 2.11. Te so Pois(λ), Bin(p) in NegBin(r, p). Pravimo jim *porazdelitve Panjerjevega razreda.* V primeru $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ za $n \in \mathbb{N}$, $a = 0$ in $b = \lambda$ velja $\mathbb{P}\left(N = n\right) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \left(0 + \frac{\lambda}{n}\right)\mathbb{P}\left(N = n - 1\right)$. Tudi v ostalih primerih se izkaže, da je $a < 1$, tako da je enačba (2) res dobro definirana.

se splača posplošiti, tako da

Opomba 2.13. Zahtevo, da X_i zavzemajo vrednosti v $\mathbb{N}_0$, lahko sprostimo. V resnici lahko zahtevamo le, da X_i zavzemajo vrednosti v $h\mathbb{N}_0$ za neki $h > 0$. V tem primeru zapišemo $S = h\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i}{h}$ in tako rekurzivna zveza velja za $\frac{S}{h}$. Tako lahko kot v ideji opombe 2.10 aproksimiramo splošne slučajne spremenljivke, ki zavzemajo vrednsoti v $[0, \infty)$, poljubno natančno.

S STALIŠČA SAME PANJER-JEVE REKURZIJE NAMREČ TA POSPLOŠITEV NIMA POSEBNE DODANE VREDNOSTI, JO PA IMA S STALIŠČA UPORABE.

KAKŠEN POSEBEN RAZLOG RABE ŠTEVILA π?

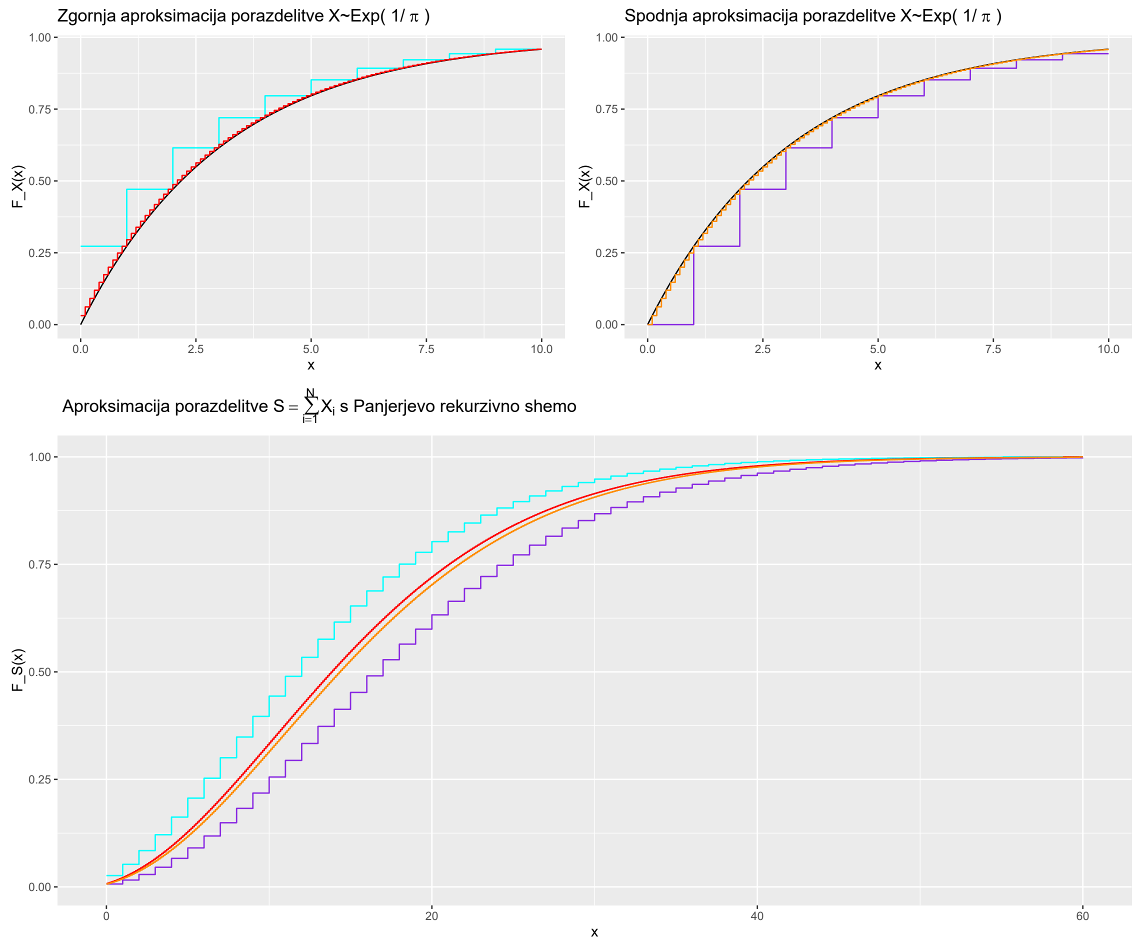
STAVITE {,}, SICER TEX MISLI, DA GRE ZA NAŠTEVANJE, IN VRINE PRESLEDEK.

Zgled 2.14. (Nadaljevanje zgleda 2.3) Recimo, da imamo konkretni porazdeltivi $N \sim \text{Pois}(9)$ in $X_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\pi})$. Podobno kot v opombi 2.10 s stopničastima funkcijama F_h^u in F_h^l aproksimiramo porazdelitveno funkcijo F_{X_1} za ~~različne~~ vrednosti $h \in \{1,\ 0,1\}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $F_h^u(x) = F_{X_1}((n+1)h)$ za $x \in \big[nh, (n+1)h\big)$ in $F_h^l(x) = F_{X_1}(nh)$ za $x \in \big[nh, (n+1)h\big)$. S Panjerjevo rekurzivno shemo izračunamo približke ~~porazdelitve~~ S na intervalu $[0, 60]$. Rezulate prikažemo na sliki 3.

h=1 (prva barva) in h=0,1 (druga barva).

porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke S

VSAK h NAJ IMA SVOJO BARVO. POLEG TEGA PA DECIMALNO VEJICO STAVITE KOT {,}, SICER TEX MISLI, DA GRE ZA NAŠTEVANJE, IN NAREDI PRESLEDEK.



Slika 3. Aproksimacija porazdelitve S s Panjerjevo rekurzivno shemo.

{,}

◇

Vidimo, da že za $h = 0,1$ dobimo zelo natančno aproksimacijo porazdelitve. Danes Panjerjeva metoda predstavlja alternativo Monte Carlo metodam. Njena glavna prednost je, da z manjšanjem koraka h dosežemo poljubno natančno točno aproksimacijo neke porazdelitve. Monte Carlo metode so bolj splošne, saj temeljijo zgolj na ponavljanju simulacij in se lahko uporabljajo za modeliranje bolj zapletenih porazdelitev, ki ne zadovoljujejo pogojev trditve 2.11.

3. Sestavljeni Poissonov proces

Razdelek je prirejen po [1], [2], in [3].

Pokažemo, da ima sestavljeni Poissonov proces neodvisne in stancionarne prirastke. Markiranje, pokazemo da spada v sirsi razred slucajnih procesov t.i. Levijevih procesov.

Definicija 3.1. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Naj bo $(X_i)_{i\geq 1}$ zaporedje neodvisnih (med sabo in $(N_t)_{t\geq 0}$) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Potem je *sestavljeni Poissonov proces* $(S_t)_{t\geq 0}$ definiran kot družina sl. spr.

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Opomba 3.2. Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$ za vsak i, dobimo ravno HPP. Bolj v splošnem, če je $X_i = \alpha$ deterministična funkcija, potem velja $S_t = \alpha N_t$. STAVIJE POKONČNO! PREDLAGAM \DeclareMathOperator{\HPP}{HPP} \DeclareMathOperator{\CPP}{CPP}.

V nadaljevanju bomo homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$ označevali s $HPP(\lambda)$ ali naborom slučajnih spremenljivk $(N_t)_{t\geq 0}$ (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s CPP ali naborom slučajnih spremenljivk $(S_t)_{t\geq 0}$ (angl. Compound Poisson Process), kjer bo vsota sledila $HPP(\lambda)$. NEJASNO!

3.1. Osnovne lastnosti.

Trditev 3.3. *Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in naj velja $X_0 = 0$ s.g. Potem ima $(X_t)_{t\geq 0}$ neodvisne prirastke natanko tedaj, ko je za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \infty$ prirastek $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od slučajnega vektorja $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.*

VERJETNO JE NAJBOLJE SEM POSTAVITI \newline.

(*)

Dokaz. Glavna ideja je upoštevati vektorje $(X_0, X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ in $(X_0, X_{t_1} - X_0, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ ter opaziti, da lahko katerikoli od teh dveh vektorjev uporabimo za pridobitev drugega s preprostim seštevanjem ali odštevanjem.

SPREMENJENO

DOBRO PREMISLI!

Dejstvo 1: Popravimo pozitivni celi števili n, k. Naj bodo $Y, W_1, ..., W_n$ ~~naključne~~ slučajne spremenljivke. Če je Y neodvisen od naključnega vektorja $(W_1, ..., W_n)$, je Y tudi neodvisen od $h(W_1, ..., W_n)$, kjer je $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ neka Borelova merljiva funkcija.

Dejstvo 2: Popravimo $n \geq 2$ kot celo število. Če so $(A_1, A_2, ..., A_n)$ naključne spremenljivke, tako da je za vsak $i \in \{2, ..., n\}$, A_i neodvisen od $(A_1, ..., A_{i-1})$, potem so $A_1, ..., A_n$ medsebojno neodvisni.

Prva smer: Predpostavimo, da ima $(X_t)_{t\geq 0}$ lastnost, da je $X_0 = 0$ z gotovostjo in tudi lastnost neodvisnih prirastkov. Popravimo n kot pozitivno celo število in popravimo $\{t_i\}_{i=1}^{n+1}$ tako, da velja $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1}$. Želimo pokazati, da je $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od $(X_0, X_{t_1}, ..., X_{t_n})$.

Ker je $X_0 = 0$ z gotovostjo, vemo, da je $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od $(X_0, X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$. Tako (po Dejstvu 1) vemo, da je $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od $h(X_0, X_{t_1} - X_0 ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ za katerokoli merljivo funkcijo $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$. Opazimo, da

$$X_0 = 0 \; X_{t_1} = X_0 + (X_{t_1} - X_0) \; X_{t_2} = X_0 + (X_{t_1} - X_0) + (X_{t_2} - X_{t_1}) \; \vdots \; X_{t_n} = X_0 + (X_{t_1} - X_0) + \tag{6}$$

RAZLOMITE: ZADNJI IZRAZ SE SPLOH NE VIDI V CELOTI!

(*) ZA DOKAZ NEODVISNOSTI IN STACIONARNOSTI PRIRASTKOV BO PRIŠEL ZELO PRAV NASLEDNJI REZULTAT, KI BI MU LAHKO REKLI PRINCIP SENDVIČA, A NISEM ZASLEDIL, DA BI BIL ZNAN POD TEM IMENOM:

<u>TRDITEV</u> ČE JE $X \mid Z \sim Y$, JE TUDI $X \mid Z \sim X \mid g(Z) \sim Y$

SPLOŠNEJE, ČE JE $X \mid Z \sim Y \mid h(g(Z))$, JE TUDI

$X \mid Z \sim X \mid g(Z) \sim Y \mid h(g(Z))$.

PRI TEM STA g IN h POLJUBNI MERLJIVI FUNKCIJI.

TA REZULTAT JE ŠE PRIPRAVNEJE FORMULIRATI S σ-ALGEBRAMI. ČE SO VAM DOMAČE, JIH UPORABITE:

<u>TRDITEV</u> NAJ BOSTA X IN Y SLUČAJNI SPREMENLJIVKI NA $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. ČE JE $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{H}$ IN $X \mid \mathcal{G} \sim Y$, JE TUDI $X \mid \mathcal{G} \sim X \mid \mathcal{H} \sim Y$

SPLOŠNEJE, ČE JE $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathcal{K}$ IN $X \mid \mathcal{G} \sim Y \mid \mathcal{K}$, JE TUDI

$X \mid \mathcal{G} \sim X \mid \mathcal{H} \sim Y \mid \mathcal{K}$.

<u>DOKAZ</u> $X \mid \mathcal{G} \sim Y$ POMENI, DA IMA X POGOJNO NA $\mathcal{G}$ VEDNO ISTO PORAZDELITEV, POTEM PA MORA BITI TO TUDI BREZPOGOJNA PORAZDELITEV, PRAV TAKO PA TUDI POGOJNA PORAZDELITEV GLEDE NA MANJŠO σ-ALGEBRO $\mathcal{H}$. NADALJE JE X NEODVISNA OD $\mathcal{G}$, POTEM PA MORA BITI NEODVISNA TUDI OD MANJŠE σ-ALGEBRE $\mathcal{H}$. SPLOŠNEJŠA RAZLIČICA PA JE VSE SKUPAJ POGOJNO NA $\mathcal{K}$.

QED

O POGOJNI NEODVISNOSTI NEKAJ PIŠE V FRISTEDTU & GRAYU, KOLIKOR SE SPOMNIM, PA POGOJEVANJE ZELO RAZDELA KNJIGA LOÈVE: PROBABILITY THEORY.

PRAVO MESTO ZA „PRINCIP SENDVIČA" BO NAJBRŽ V PRILOGI.

V TEM DUHU SE ŽE SPLAČA NADGRADITI TRDITEV 3.3:

TRDITEV PROCES $(X_t)_{t\geq 0}$ IMA STACIONARNE IN NEODVISNE PRIRASTKE NATANKO TEDAJ, KO ZA POLJUBNE $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq t_{n+1}$ VELJA $X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_0, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} \sim X_{t_{n+1}-t_n}$.

TRDITEV ZLAHKA IZPELJEMO IZ PRINCIPA SENDVIČA: SAMI NAPIŠITE KRATEK DOKAZ.

Tako je $(X_0, X_{t_1}, ..., X_{t_n}) = h(X_0, X_{t_1} - X_0, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ za merljivo funkcijo $h = (h_0, ..., h_n)$, definirano z

$$h_0(a_0, ..., a_n) = a_0 \; h_1(a_0, ..., a_n) \quad = a_0 + a_1 \vdots \; h_n(a_0, ..., a_n) \quad = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \tag{7}$$

□

V INDEKS

V INDEKS

Obratna smer: Predpostavimo, da $(X_t)t \geq 0$ zadošča za vse pozitivne cele števile n in vse čase $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq tn + 1$, da je $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od $(X_0, ..., X_{t_n})$. Želimo pokazati, da ima lastnost neodvisnih prirastkov. Popravimo n. Po Dejstvu 1 vemo, da je $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od $h(X_0, ..., X_{t_n})$ za katerokoli merljivo funkcijo h. Jasno je, da obstaja merljiva funkcija, ki preslika čiste čase $(X_0, ..., X_{t_n})$ v njihove razlike $(X_1 - X_0, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$. Tako je $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od $(X_1 - X_0, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$. Po Dejstvu 2 velja, da ima $(X_t)_{t \geq 0}$ lastnost neodvisnih prirastkov. ~~□~~

□

Trditev 3.4. *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Za nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ lahko slučajne spremeljivke $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti X_i od X_j za $i \neq j$ in N_t. Naj bo $h > 0$ in $s < t$. Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

STAVITE POKONČNO!

Vsota ima $N_{t+h} - N_{s+h}$ členov. Ker za HPP velja $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$, je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j \sim \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

□

Trditev 3.5. *Naj bo $(S_t)_{t \geq 0}$ CPP in naj bosta $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$ pričakovana vrednost in $\sigma^2 = Var[X_i] < \infty$ varianca slučajnih spremenljivk X_i. Potem sta za $t \geq 0$ pričakovana vrednost in varianca S_t enaki*

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu\lambda t \qquad in \qquad Var[S_t] = \lambda t \left(\sigma^2 + \mu^2\right).$$

Dokaz. Definiramo slučajno spremenljivko

$$Y_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \tag{8}$$

in vidimo, da je za $t \geq 0$ S_t pogojno na $N_t = k$ enako porazdeljena kot Y_k. Tako dobimo

$$\mathbb{E}[S_t \mid N_t = k] = \mathbb{E}[Y_k] = k\mu \qquad \text{in} \qquad \text{Var}[S_t \mid N_t = k] = \text{Var}[Y_k] = k\sigma^2.$$

(*) DOKAZ TRDITVE 3.4

PO TRDITVI OD PREJ JE DOVOLJ DOKAZATI, DA ZA POLJUBNE $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1}$ VELJA

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n} \sim S_{t_{n+1} - t_n}.$$

NAJ BO $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ IN $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$.

NA DOGODKU $\{N_{t_n} = k_n\}$ JE $S_{t_{n+1}} - S_{t_n} = \sum_{i=k_n+1}^{k_n + N_{t_{n+1}} - N_{t_n}} X_i$, ZATO JE:

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, X_2, \dots, X_{k_n} \sim$$

$$\sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n + N_{t_{n+1}} - N_{t_n}} X_i \mid N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, X_2, \dots, X_{k_n}$$

KER PA SO $X_1, X_2, \dots, N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}$ VSE NEODVISNE, STA NEODVISNA TUDI VEKTORJA $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}; X_1, X_2, \dots, X_{k_n})$ IN $(N_{t_{n+1}} - N_{t_n}; X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots)$, Z NJIMA PA TUDI VEKTOR $(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_n}; X_1, X_2, \dots, X_n)$ IN SLUČAJNA SPREMENLJIVKA $\sum_{i=k_n+1}^{k_n + N_{t_{n+1}} - N_{t_n}} X_i$. TOREJ JE:

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, X_2, \dots, X_{k_n} \sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n + N_{t_{n+1}} - N_{t_n}} X_i.$$

VEMO, DA JE $N_{t_{n+1}} - N_{t_n} \sim N_{t_{n+1}-t_n}$. KER PA JE ZAPOREDJE $X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \ldots$ NEODVISNO OD $N_{t_{n+1}} - N_{t_n}$, ZAPOREDJE $X_1, X_2, \ldots$ NEODVISNO OD $N_{t_{n+1}-t_n}$ TER KER STA ZAPOREDJI $X_1, X_2, \ldots$ IN $X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \ldots$ ENAKO PORAZDELJENI, JE TUDI

$$N_{t_{n+1}} - N_{t_n} ; X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \ldots \sim N_{t_{n+1}-t_n} ; X_1, X_2, \ldots$$

IN ZATO TUDI

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, \ldots, N_{t_n} = k_n, X_1, X_2, \ldots, X_{k_n} \sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_{k_n+i} \sim \sum_{i=1}^{N_{t_{n+1}-t_n}} X_i = S_{t_{n+1}-t_n}.$$

POTEM PA JE TUDI:

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n, \sum_{i=1}^{k_1} X_i, \sum_{i=k_1+1}^{k_2} X_i, \ldots, \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

KER NA DOGODKU $\{N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, \ldots, N_{t_n} = k_n\}$ VELJA

$$\sum_{i=1}^{k_1} X_i = S_{t_1}, \sum_{i=k_1+1}^{k_2} X_i = S_{t_2} - S_{t_1}, \ldots, \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i = S_{t_n} - S_{t_{n-1}},$$

JE KONČNO

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n, S_{t_1}, S_{t_2} - S_{t_1}, \ldots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

OZIROMA

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1}, N_{t_2}, \ldots, N_{t_n}, S_{t_1}, S_{t_2} - S_{t_1}, \ldots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

IN PO „PRINCIPU SENDVIČA"

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid S_{t_1}, S_{t_2} - S_{t_1}, \ldots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}.$$

QED

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$. Torej

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu\lambda t.$$

Prek formule $\mathrm{Var}[S_t] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_t \mid N_t]] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$ računamo

$$\mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_i]\, N_t] = \sigma^2\lambda t$$

in

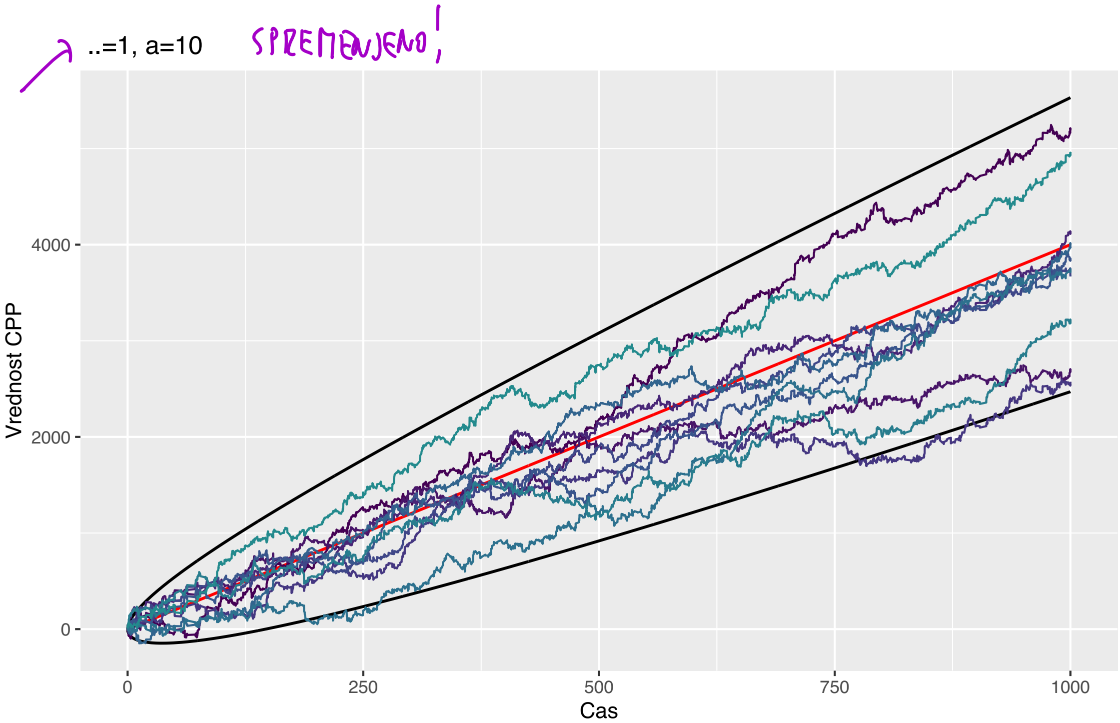
$$\mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}[X_i]\, N_t] = \mu^2\lambda t.$$

Če enačbi sestejemo, dobimo $\mathrm{Var}[S_t] = \lambda t\,(\sigma^2 + \mu^2)$. □

Zgled 3.6. Poglejmo si primer, ko je zaporedje $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ porazdeljeno kot $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\pi})$ Tedaj za $t \geq 0$ velja $\mathbb{E}[S_t] = \pi t$ in $\mathrm{Var}[S_t] = t(\pi^2 + \pi^4)$ ter $\sigma_{S_t} = \sqrt{22t}$. Simuliramo 10 realizacij CPP do časa $T = 1000$, ki jih prikažemo na sliki 4 skupaj s fun~~c~~kcijami $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$ in $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$.

SPREMENJENO!

?



SLIKA 4. Trajektorije CPP s fun~~c~~kcijama $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$ in $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$

◊

3.2. **Markiranje sestavljenega Poissonovega procesa.** Pokažimo obraten rezultat kot v trditvi 2.9, tako da razčlenimo CPP na več neodvisnih CPP z razčlenitvijo časa in prostora slučajnih spremenljivk X_i.

TO BO TREBA ŠE NAPISATI!

3.3. **Neskončna deljivost.**

Definicija 3.7. Naj bo X slučajna spremenljivka. Pravimo, da je X *neskončno deljiva*, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstajajo neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$, za katere ~~tako, da~~ velja

$$X \sim X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

AHA, TO ŠE NI NAPISANO. ZDAJ JE!

TODA ALI TO POTREBUJEMO KJE DRUGJE V DELU? DELO JE ŽE TAKO DOVOLJ DOLGO, ZATO BI LAHKO TA RAZDELEK TUDI IZPUSTILI.

ZA TO JE TREBA PAZITI, KAKO JE DEFINIRANO!

Ekvivalento lahko definiramo neskončno deljivost prek karakteristične funkcije. Pravimo, da je slučajna spremenljivka X neskončno deljiva, če je za vsak $n \in \mathbb{N}$ funkcija $(\varphi_X(u))^{\frac{1}{n}}$ karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke.

Zgled 3.8. Naj bo $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Potem je X neskončno deljiva. To neposredno sledi iz dejstva, da je karakteristična funkcija vsote n.e.p. s.s. enaka produktu karakterističnih funkcij, torej za $n \in \mathbb{N}$ in $u \in \mathbb{R}$ velja $\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(u) = \varphi_X(u)^n$. Če vzamemo $X_i \sim \text{Pois}(\frac{\lambda}{n})$, potem je

$$\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(u) = (\varphi_{X_i}(u))^n = \left(e^{\frac{\lambda}{n}(e^{iu}-1)}\right)^n = e^{\lambda(e^{iu}-1)} = \varphi_X(u).$$

$\diamondsuit$

Sedaj pokažimo, da je sestavljena Poissonova porazdelitev neskončno deljiva, še več, pokažimo, da če je S neskončno deljiva slučajna spremenljivka in zavzema vrednosti v $\mathbb{N}_0$, potem ima sestavljeno Poissonovo porazdelitev.

ima vsaka neskončno deljiva slučajna spremenljivka, ki zavzame vrednosti v $\mathbb{N}_0$,

Trditev 3.9. *Naj bo S slučajna spremenljivka, porazdeljena sestavljeno Poissonovo s parametrom $\lambda > 0$. Potem je S neskončno deljiva.*

Dokaz. Zapišimo $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, kjer so X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke s skupno karakteristično funkcijo $\varphi_X(u)$ in $N \sim \text{Pois}(\lambda)$. Iz trditve 2.4 vemo, da je karakteristična funkcija S za $u \in \mathbb{R}$ enaka

slučajne spremenljivke

$$\varphi_S(u) = \varphi_N(\varphi_X(u)) = e^{\lambda(\varphi_X(u)-1)}.$$

Potem za $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\varphi_S(u) = \left(e^{\frac{\lambda}{n}(\varphi_X(u)-1)}\right)^n$$

in vidimo, da je fukcija $u \mapsto e^{\frac{\lambda}{n}(\varphi_X(u)-1)}$ karakteristična funckija slučajne spremenljivke $S_i = \sum_{i=1}^{M} X_i$ kjer je $M \sim \text{Pois}(\frac{\lambda}{n})$. $\square$

Trditev 3.10. *Naj bo S slučajna spremenljivka, ki zavzame vrednosti v $\mathbb{N}_0$ in je neskončno deljiva. Potem ima S sestavljeno Poissonovo porazdelitev.*

Dokaz. Označimo rodovno funkcijo S z

$$G_S(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S=k)}_{p_k} u^k.$$

Pokazali bomo, da je $G_S(\cancel{u})$ enaka rodovni funkciji neke slučajne spremenljivke, ki ima sestavljeno Poissonovo porazdelitev. Ker za nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke velja $\mathbb{P}(S=k) = \frac{G_S^{(k)}(0)}{k!}$, bo to pomenilo, da je S sestavljeno Poissonova, saj v tem primeru rodovna funkcija določa porazdelitev S. Ker je S neskončno deljiva, ~~potem~~ je funkcija za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$G_{S_n}(u) := (G_S(u))^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S_n=k)}_{p_{k_n}} u^k$$

rodovna funkcija neke slučajne spremenljivke S_n in za vsak $u \in \mathbb{R}$ velja enakost

$$G_{S_n}(u) = (G_{S_1}(u))^n \quad \text{oziroma} \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{k_n} u^k\right)^n.$$

DODAJTE MALO PROSTORA, PRIPOROČAM \kern 1.5em.

Če razširimo desno stran enačbe in predpostavimo $p_0 = 0$, dobimo, da ~~p~~ mora biti $p_{0_n} = 0$ in posledično tudi $p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = 0$. Ker to velja za poljuben $n \in \mathbb{N}$ dobimo, da je $G_S(u) = 0$, kar pa je protislovje. Torej $p_0 > 0$ in zagotovo $G_S(u) > 0$ za $u \in [0, 1]$. Velja $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{G_S(u)}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ za $t \in [0, 1]$. Velja $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

ZAKAJ TOLIKO PROSTORA? MORDA BO TREBA NASTAVITI \raggedbottom.

$$\ln\left(\left(\frac{G_S(u)}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(1 + \left(\left(\frac{G_S(u)}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right) \approx \left(\frac{G_S(u)}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \text{ ko } n \to \infty.$$

Za $u = 1$ dobimo

$$\ln\left(\left(\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \approx \left(\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} - 1 \text{ ko } n \to \infty.$$

$\square$

Sedaj trditev 3.10 nadgradimo. . . $\neq$

TU GRE V RESNICI ZA PORAZDELITVE. PREDLAGAM:

Trditev 3.11. *Naj ima slučajna ~~spremenljivka S neskončno deljivo~~ porazdelitev. Potem ~~lahko S~~ zapišemo izrazimo kot limito slučajni spremenljivk, ki imajo sestavljeno Poissonovo porazdelitev.*

Vsaka neskončno deljiva verjetnostna porazdelitev na $[0,\infty)$ je šibka limita sestavljenih Poissonovih porazdelitev.

PODAJTE REFERENCO.

POTREBNO?

Definicija 3.12. (Lévijev proces) Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ stohastični proces. Pravimo, da je $(X_t)_{t\geq 0}$ Lévijev proces, če velja

in stacionarne

(1) $X_0 = 0$ skoraj gotovo,
(2) $(X_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne prirastke,
~~(3) $(X_t)_{t\geq 0}$ je stacionaren, torej ima enako porazdelitev za vsak $t \geq 0$.~~

SAM (X_t) PA JE STACIONAREN LE, ČE JE SKORAJ GOTOVO ENAK NIČ!

TU STAVITE --.

4. Cramér-Lundbergov model

Razdelek je prirejen po [3], [4], [5] in [9].

V tem razdelku obravnavamo najbolj intenzivno raziskan model v teoriji propada, običajno imenovan Cramér-Lundbergov model. V svoji najosnovnejši obliki ga je v zgodnjih 1900. letih izpeljal švedski aktuar Filip Lundberg, da bi ocenil ranljivost zavarovalnice za propad. Čeprav je model v svoji ideji dokaj preprost, zajema bistvo povezave ravni rezerv zavarovalnice in njene izpostavljenosti tveganju, kar je razlog, zakaj je postal temeljni merilni model v teoriji propada. V preteklem stoletju je bilo razvitih veliko tehnik za analizo Cramér-Lundbergovega modela, ki so se večinoma osredotočale na kvantifikacijo verjetnosti propada zavarovalnice. V razdelku definiramo model in izpeljemo Lundbergovo neenakost ter asimptotično obnašanje verjetnosti propada v primeru, ko zavarovalniške zahtevke modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. V zgledih pokažemo, kako do rezu~~l~~tatov, ki nam jih zagot~~v~~alja teorija, pridemo v praksi z Monte Carlo simulacijami procesa tveganja.

4.1. **Proces tveganja in verjetnost propada.**

Definicija 4.1. Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP, kjer so slučajne spremenljivke $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ki jih seštevamo, s.g. nenegativne. *Proces tveganja* v Cramér-Lundbergovem modelu definiramo kot

$$U_t = u + p(t) - S_t,$$

kjer je $u \geq 0$ začetni kapital zavarovalnice in $p(t)$ funkcija prihodkov iz premij.

predpostavke

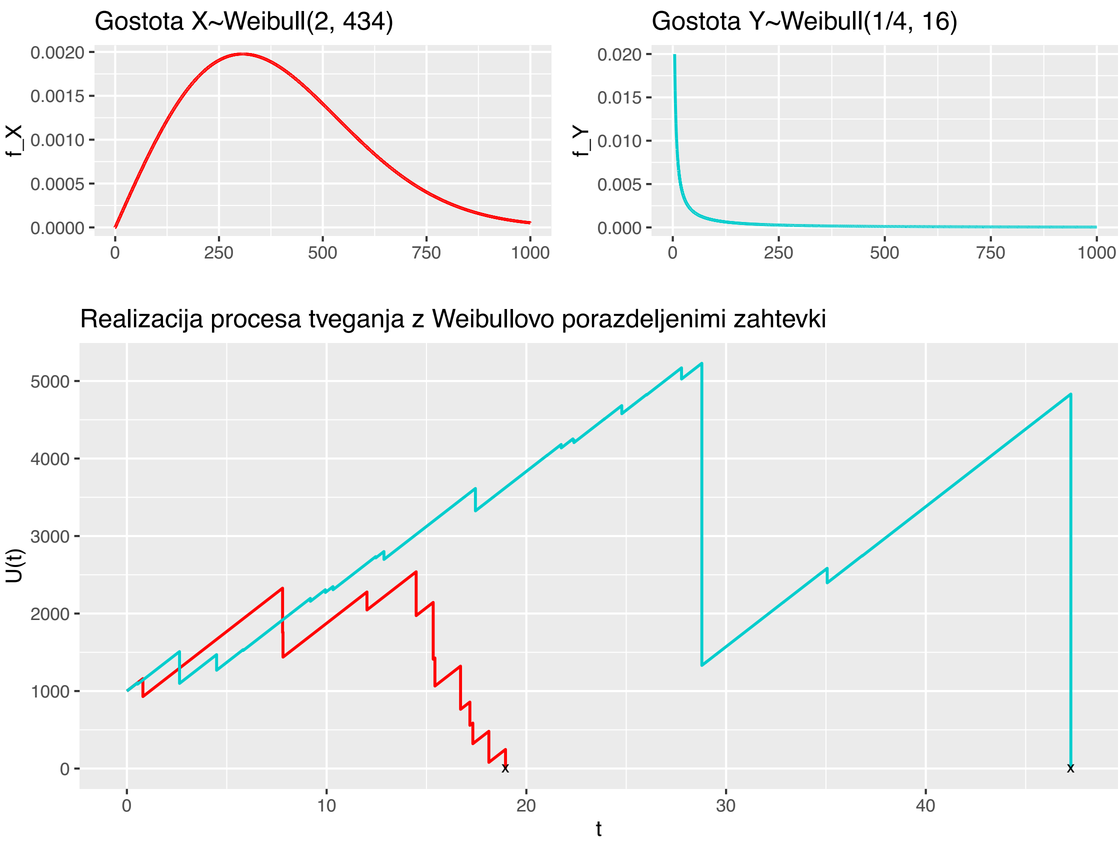
Opomba 4.2. V resnici lahko veliko lastnosti procesa tveganja izpeljemo brez ~~da~~ ~~predpostavimo,~~ da prihodi zahtevkov v $(S_t)_{t\geq 0}$ sledijo homogenemu Poissonovemu procesu, ampak splošnemu prenovitvenemu procesu (5.15). Zato bomo pri dokazovanju nekaterih rezultatov medprihodne čase zahtevkov T_i obravnavali v splošnem, ~~brez~~ da bi predpostavili, da so eksponentno porazdeljeni.

ne

lahko privzamemo, da sledijo

Vrednost U_t predstavlja kapital zavarovalnice ob času $t \geq 0$. Standardno je za $p(\cancel{t})$ vzeti deterministično funkcijo $p(t) = ct$, kjer je $c > 0$ stopnja prihodkov premij. Uporaba linearne funkcije za modeliranje premijskega dohodka v Cramér-Lundbergovem modelu ponuja realističen približek zato, ker zavarovalnice pogosto doživljajo stabilno povečevanje premijskega dohodka skozi čas. Poleg tega je izbira linearne funkcije preprosta, zato bomo v nadaljevanju privzeli $p(t) = ct$. Poglejmo si realizaciji procesa tveganja, ko so zahtevki X_i porazdeljeni Weibullovo (5.3) z različnimi parametri.

Zgled 4.3. Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu z začetnim kapitalom $u = 1000$ in $p(t) = 200t$ ter intenzivnostjo prihodov zahtevkov $\lambda = 1$. Naj bodo v prvem primeru (rdeča) zahtevki porazdeljeni kot $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$ in v drugem primeru (modra) kot $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$.



SLIKA 5. Realizaciji procesa tveganja

Pri obeh realizacijah vidimo, da proces tveganja v nekem trenutku pade pod 0 (tam ga tudi ustavimo). Čeprav je pričakova vrednost $\mathbb{E}[Y_i] = 384 \approx \mathbb{E}[X_i] = 217\sqrt{\pi} \approx 384{,}62$ opazimo bistveno razliko med realizacijama. V rdečem primeru proces pade {,} pod 0 po več zaporednih manjših izgubah, v modrem primeru pa po eni zelo veliki izgubi. V nadaljevanju bomo primera ločili, ampak pred tem definirajmo osnovne pojme, ki jih bomo obravnavali v razdelku.

$\diamondsuit$

Definicija 4.4. *Propad* definiramo kot dogodek, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ kadarkoli pade pod 0. Torej

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\}$$

in času ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\},$$

pravimo *čas propada*. Seveda velja enakost med dogodkoma

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} = \{T < \infty\}.$$

Definicija 4.5. *Verjetnost propada* je definirana kot funkcija $\psi(\cancel{u}) : (0, \infty) \to [0, 1]$ ~~podana s predpisom~~

po predpisu

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty \mid \cancel{U_0 = u}).$$

TO NI POGOJNA VERJETNOST! KOREKTNEJE BI BILO PRED DEFINICIJO OMENITI, DA DOGAJANJE ČESTO GLEDAMO V ODVISNOSTI OD u, IN POSTAVITI DOGOVOR, DA VERJETNOST PRI ZAČETNEM KAPITALU u OZNAČIMO S $\mathbb{P}_u$. TAKO LAHKO KOREKTNEJE DEFINIRAMO $\psi(u) = \mathbb{P}_u(T < \infty)$.

ALI ZAHTEVEK ŽE ODŠTEJEMO?

Definicija 4.6. Po konstrukciji procesa tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ je verjetnost propada mogoča le ob prihodih zahtevkov. Z V_n označimo čas ~~n-tega prihoda~~, ob katerem prispe n-ti zahtevek, in definiramo ??? *ogrodje procesa tveganja* kot $(U_{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$. ...

Trditev 4.7. *Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu in $(U_{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$ njegovo ogrodje ter $T_n := V_n - V_{n-1}$ medprihodni čas n-tega zahtevka ($V_0 = T_0 = 0$). Potem velja*

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ komulativna (u) izguba po n ~~prihodih~~ zahtevkih in $Y_i = X_i - cT_i$ izguba i-tega prihoda.

TAKO KOT AKUMULATOR!

Dokaz. S pomočjo ogrodja procesa tveganja lahko dogodek propada zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} &= \left\{\inf_{t\geq 0} U_t < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} U_{V_n} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{u + p(V_n) - S_{V_n}\} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{u + \underbrace{cV_n - \sum_{i=1}^{n} X_i}_{-Z_n}\right\} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{-Z_n\} < -u\right\} \\
&= \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right\},
\end{aligned}$$

želeti → želen
deliti → deljen

kar nam da žel~~j~~eno enakost. □

Tako verjetnost propada prevedemo na prehodno verjetnost diskretnega slučajnega sprehoda $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo asimptotično vedenje $\psi(u)$, ko gre $u \to \infty$. Cilj obravnavanja verjetnosti propada v Cramér-Lundbergovem modelu je, da se izognemo skoraj gotovemu propadu oziroma, da je verjetnost, da komulativna (u) izguba $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ preseže, u tako majhna, da lahko v praksi dogodek propada izključimo.

Trditev 4.8. *Naj bo $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk, definirano kot $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke Y_i z $\mathbb{E}[Y_i] < \infty$. Če velja $\mathbb{E}[Y_i] \geq 0$, ~~potem~~ za vsak $u > 0$ velja*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

Dokaz. Zaporedje slučajnih spremenljivk $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zadošča predpostavkam krepkega zakona velikih števil (5.7), torej velja

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots Y_n}{n} = \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mathbb{E}[Y_n].$$

Torej bo Z_n v primeru, ko je $\mathbb{E}[Y_n] > 0$, skoraj gotovo asimptotično linearno naraščal proti ∞ kot $\mathbb{E}[Y_n]\, n$ in bo za poljuben $u > 0$ veljalo

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

Dokaz za primer, ko je $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ je precej bolj tehničen in ne preveč informativen, zato ga bomo izpustili. Izkaže se, da obstajata neki podzaporedji $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

za katere gre ~~da~~ $Z_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{s.g.} \infty$ in $Z_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{s.g.} -\infty$. Dokaz lahko najdemo v [6]. □

Opomba 4.9. Iz trditve 4.8 (ob predpostavkah $\mathbb{E}[X_i] < \infty$ in $\mathbb{E}[T_i] < \infty$) sledi, da moramo premijo (in s tem c) izbrati tako, da bo $\mathbb{E}[Y_i] < 0$, saj bo tako $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} -\infty$ in je to edini primer, ko lahko upamo, da verjetnost propada ne bo enaka 1.

Definicija 4.10. Pravimo, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ v Cramér-Lundbergovem modelu zadošča *pogoju neto zaslužka* (ang. *net profit condition*), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]}, \quad \text{oziroma} \quad c = (1+\rho)\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} \quad \text{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljenvanju imenovali NPC.

dokaj

Zahteva NPC za analizo poslovanja zavarovalnice je ~~kar~~ intuitivna, saj pove, da mora biti v nekem časovnem intervalu pričakovani dohodek iz premij večji od pričakovanega izplačila zahtevkov.

Definicija 4.11. Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *lahkorepo porazdelitev*, če za nekij $\varepsilon > 0$ velja

$$\mathbb{E}\left[e^{uX}\right] = M_X(u) < \infty \quad \text{za } u \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Sicer ~~$M_X(u)$ obstaja le za $u \in (-\infty, 0]$ in~~ pravimo, da ima X *težkorepo porazdelitev*.

TO PUKAJ NE VELJA NUJNO - VELJA NPR., ČE JE $X \geq 0$.

Zgled 4.12 (Nadaljevanje zgleda 4.3)**.** V zgledu 4.3 smo obravnavali proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, kjer so zahtevki (rdeča) $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$ in (modra) $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$. Opazili smo, da je v prvem primeru propad posledica več manjših izgub, v drugem pa ene velike izgube. To je značilnost težkorepih porazdelitev. ~~in~~ Za Weibullovo porazdelitev velja, da ima za parameter $a \geq 1$ lahek, za $a < 1$ pa težak rep.

Dokaz. Momentno rodovna funkcija $X \sim \text{Weibull}(a, b)$ je enaka

$$M_X(u) = \int_0^\infty e^{ux}\frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} dx \qquad \left(y = \tfrac{x}{b},\ dy = \tfrac{dx}{b}\right)$$

$$= a\int_0^\infty e^{uby} y^{a-1} e^{-y^a} dy.$$

na spodnji meji, noben, medtem

Vidimo, da ~~v~~ 0 ni težav za ~~poljuben~~ $a > 0$, ~~ampak~~ za $a \in (0,1)$ v neskončnosti

integral ~~funkcija~~ divergira, saj se eksponent poenostavi v $y^a(uby^{1-a} - 1) \xrightarrow{y\to\infty} \infty$. Če v nadaljevanju predpostavimo $a \geq 1$ in uvedemo $z = y^a$ $\left(dz = ay^{a-1}dy\right)$ pa lahko pridemo do ~~lepe~~ naslednje oblike za momentno rodovno funkcijo X:

$$M_X(u) = \int_0^\infty e^{ubz^{\frac{1}{a}}} e^{-z} dz$$

SPRAVITE CELO VERIGO NA ISTO STRAN.

$$= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(ubz^{\frac{1}{a}})^k}{k!} e^{-z} dz \qquad \text{Tonelli (5.12)}$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \int_0^\infty z^{\frac{k}{a}} e^{-z} dz$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right).$$

$\diamondsuit$

4.2. **Lahkorepe porazdelitve.** Od sedaj naprej bomo predpostavili, da je $(S_t)_{t\geq 0}$ v procesu tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ CPP. Najprej se bomo omejili na primer, ko ima porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i, ki jih seštevamo v CPP lahek rep, saj je bila osnovna teorija, ki sta jo razvila Cramér in Lundberg, izpeljana pod to predpostavko.

4.2.1. *Lundbergova neenakost.*

Opomba 4.13. V praksi z lahkorepnimi porazdelitvami modeliramo zahtevke, kjer verjentosti ekstremnih dogodkov (torej zelo velikih zahtevkov) eksponentno pada proti 0. To neposredno sledi iz definicije 4.11 in neenakosti Markova (5.6), saj za vsak $x > 0$ in $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ velja

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}\left(e^{uX} > e^{ux}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{uX}\right]}{e^{ux}}.$$

Definicija 4.14. Naj velja, da ima slučajna spremenljivka $Y_1 = X_1 - cT_1$ iz trditve 4.7 lahek rep. Če obstaja enoličen $\ell > 0$, za katerega velja

$$M_{Y_1}(\ell) = 1,$$

temu številu
~~potem ℓ~~ pravimo *Lundbergov koeficient.*

Trditev 4.15. Brž ko
~~Če~~ Lundbergov koeficient ℓ (pod predpostavkami definicije 4.14 in pogoja NPC) obstaja, potem je enolično določen.

strogo

Dokaz. Ker ima Y_1 lahek rep, obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $M_{Y_1}(u) < \infty$ za $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Ker velja $M_{Y_1}(0) = 1$ in $M'_{Y_1}(0) = \mathbb{E}[Y_1] < 0$ (zaradi pogoja NPC) ter $M''_{Y_1}(u) = \mathbb{E}\left[Y_1^2 e^{Y_1 u}\right] > 0$ ($Y_1 \neq 0$ skoraj gotovo) za $u > 0$, je $M_{Y_1}(u)$ zvezna konveksna funkcija na intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kjer v okolici ničle pada. Po predpostavki obstaja tak $\ell > 0$, da je $M_{Y_1}(\ell) = 1$, ki pa je zaradi konveksnosti funkcije enolično določen. $\square$ (*)

Izrek 4.16. *(Lundbergova neenakost) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in ~~naj~~ zanj obstaja Lundebrgov koeficient ℓ. Potem za vsak $u > 0$ velja*

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u}.$$

Dokaz. Neenakost bomo dokazali z indukcijo. Za $u > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\psi_n(u) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Z_k > u\right)$$

(*) TU NASTOPI MANJŠI TEHNIČNI PROBLEM, KER NI NUJNO, DA JE A PRIORI $\ell \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. BOLJE JE REČI:

Zaradi konveksnosti eksponentne funkcije je množica $I = \{u \in \mathbb{R} \,;\, M_{Y_1}(u) < \infty\}$ konveksna, torej interval, poltrak ali cela realna os. Po predpostavki obstaja tak $\ell \in I$, da je $M_{Y_1}(\ell) = 1$.

NATO SMISELNO NADALJUJTE Z OBSTOJEČIM DOKAZOM, ZA KATEREGA MISLIM, DA JE DOVOLJ PODROBEN.

in vidimo, da je (po zveznosti $\mathbb{P}$ od spodaj) $\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u)$, torej moramo pokazati, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\psi_n(u) \leq e^{-\ell u}$.

JE $M_{Z_1}(\ell)=1$?

(n = 1): Uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$\psi_1(u) = \mathbb{P}\left(e^{\ell Z_1} > e^{\ell u}\right) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = e^{-\ell u}.$$

(n $\to$ n+1): S F_{Y_1} označimo ~~porazdelitev Y_1~~ porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke. Potem velja

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n+1} Z_k > u\right) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}\left(Y_1 > u\right)}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{P}\left(\max_{2\leq k\leq n+1} \{Y_1 + (Z_k - Y_1)\} > u, Y_1 \leq u\right)}_{(ii)}\end{aligned}$$

Najprej se posvetimo (ii). Po indukcijski predpostavki velja

$$\begin{aligned}(ii) &= \int_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} \{x + Z_k\} > u\right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Z_k > u - x\right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty,u]} \psi_n(u-x) dF_{Y_1}(x) \\ &\overset{\text{I.P.}}{\leq} \int_{(-\infty,u]} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).\end{aligned}$$

Za oceno (i) kot v primeru $n = 1$ uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$(i) = \psi_1(u) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = \int_{(u,\infty)} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x). \qquad (*)$$

Če torej seštejemo (i) in (ii) dobimo želeno oceno

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x) \\ &= e^{-\ell u} M_{Y_1}(\ell) \\ &= e^{-\ell u}.\end{aligned}$$

□

Opomba 4.17. Iz izreka 4.16 je razvidno, da z dovolj visokim začetnim kapitalom u verjetnost propada lahko v praksi zadovoljivo omejimo blizu 0. Seveda je meja odvisna tudi od Lundbergovega koeficienta ℓ in krepko temelji na predpostavki lahkorepnih porazdelitev, ki pa v praksi pogosto niso izpolnjene.

Zgled 4.18. Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja, da so zahtevki neodvisno eksponentno porazdeljeni s parametrom $\mu > 0$, torej $X_i \overset{\text{n.e.p.}}{\sim} \text{Exp}(\mu)$ za vsak i. Vemo, da ima momentno rodovna funkcija X_i obliko

(*) PODPIRAM NOTACIJO $\int_A g\,dF$, KJER JE A MNOŽICA (TIPIČNO INTERVAL), A NEKJE POJASNITE, DA GRE TU ZA LEBESGUEOV INTEGRAL PO LEBESGUE-STIELTJESOVI MERI, KI PRIPADA FUNKCIJI F IN NE RIEMANN-STIELTJESOV INTEGRAL.

$$M_{X_i}(u) = \frac{\mu}{\mu - u} \text{ za } u < \mu.$$

Tako dobimo, da ima momentno rodovna funkcija $Y_1 = X_1 - cT_1$ obliko

$$M_{Y_1}(u) = M_{X_1}(u) M_{T_1}(-cu) = \frac{\mu}{\mu - u} \frac{\lambda}{\lambda + cu} \text{ za } u \in (-\tfrac{\lambda}{c}, \mu).$$

Sedaj lahko izračunamo Lundbergov koeficient ℓ

$$\begin{aligned}
M_{Y_1}(\ell) &= 1, \\
\frac{\mu}{\mu - \ell} \frac{\lambda}{\lambda + c\ell} &= 1, \\
\mu\lambda &= (\mu - \ell)(\lambda + c\ell), \\
\mu\lambda &= \mu\lambda - \ell\lambda + \mu c - c\ell^2, \\
0 &= \mu c - c\ell - \lambda.
\end{aligned}$$

Dobimo

$$\ell = \mu - \frac{\lambda}{c}. \tag{9}$$

Velja $\ell \in (0, \mu)$, saj v našem modelu velja pogoj NPC,

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} = \frac{\lambda}{\mu} < c \iff \mu > \frac{\lambda}{c}.$$

Če uporabimo alternativno formulacijo NPC pogoja, dobimo

$$c = (1 + \rho)\frac{\lambda}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \ell = \mu - \frac{\lambda}{(1 + \rho)\frac{\lambda}{\mu}} = \mu \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right). \tag{10}$$

Tako dobimo zgornjo mejo za verjetnost propada

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u} = e^{-\mu u \left(\frac{\rho}{1+\rho} \right)}$$

in vidimo, da povečanje stopnje prihodkov premij čez neko mejo ne bistveno vpliva na oceno, saj

$$\lim_{\rho \to \infty} e^{-\mu u \left(\frac{\rho}{1+\rho} \right)} = e^{-\mu u}.$$

V nadaljevanju bomo videli, da je Lundbergova neenakost v primeru eksponentno porazdeljenih zahtevkov skoraj točna vrednost verjetnosti propada, zgrešena le za konstanto. V splošnem pa je zelo težko določiti Lunbergov koeficient kot funkcijo parametrov porazdelitev X_1 in T_1 in zato uporabljamo numerične metode za njegovo aproksimacijo kot na primer Monte Carlo simulacije. $\diamondsuit$

4.2.2. *Asimptotika verjetnosti propada.* Sedaj se posvetimo vprašanju, kako se obnaša verjetnost propada v Cramér-Lundbergovem modelu, ko gre $u \to \infty$, in izpeljemo enega temeljnih rezultatov v teoriji tveganja.

Definicija 4.19. Za lažjo notacijo v nadaljevanju definiramo funkcijo *verjentosti preživetja* kot $\theta(u) : (0, \infty) \to [0, 1]$ s predpisom

$$\theta(u) = \mathbb{P}(T = \infty \mid U_0 = u) = 1 - \psi(u).$$

$\mathbb{P}_u(T = \infty)$

$\int_a^b g\,dF$ JE R.-S. INTEGRAL IN JE ZELO ODVISEN OD $F(a)$ IN $F(b)$, ČE IMA F TAM SKOK.

$\int_{(a,b)} g\,dF$ JE L. $\int$ PO PRIPADAJOČI MERI IN JE ODVISEN OD $\lim_{x\downarrow a} F(x)$ IN $\lim_{x \uparrow b} F(x)$.

Lema 4.20. *(Integralska enačba za verjetnost preživetja) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC, ~~in~~ ter naj velja $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ ~~ter~~ in da imajo slučajne spremenljivke $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gostoto. Potem $\theta(\cancel{u})$ zadošča naslednji enakosti*

POTREBNO?

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1+\rho)\mathbb{E}[X_1]}\int_{(0,u]}(1 - F_{X_1}(x))\theta(u-x)dx. \tag{11}$$

IZ TEGA SLEDI ZVEZNOST, OMEJENOST PA IZ PREDPOSTAVKE, DA JE $\mathbb{E}(X_1) = \int_{(0,\infty)} (1-F_{X_1}(x))dx < \infty$.

Dokaz. Po trditvi 4.7 velja

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ in $Y_i = X_i - cT_i$. Torej je

$$\begin{aligned}
\theta(u) &= \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \leq u\right)\\
&= \mathbb{P}\Big(\cancel{\{Z_n \leq u \mid n\in\mathbb{N}\}}\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\{Y_1 \leq u\} \cap \{\cancel{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1} \mid n \geq 2\}\Big)\\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{Y_1\leq u\}}\mathbb{P}\Big(\{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \mid n\geq 2\} \;\Big|\; Y_1\Big)\Big].
\end{aligned}$$

$\forall n\in\mathbb{N}.\ Z_n \le u$

$\forall n \geq 2.\ Z_n - Y_1 \le u - Y_1$

Sedaj upoštevamo, da je $Y_1 = X_1 - cT_1$ in je torej dogodek $\{Y_1 \leq u\}$ enak dogodku $\{X_1 \leq u + cT_1\}$. Poleg tega velja, da je $(Z_n - Y_1)_{n\geq 2} \sim (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, saj so Y_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Upoštevamo še, da je T_1 medprihodni čas v $HPP(\lambda)$, ~~da~~ in dobimo

POGOJNO NA Y_1

$$\begin{aligned}
\theta(u) &= \int_{(0,\infty)}\int_{(0,u+ct]}\mathbb{P}\Big(\{Z_n \leq u - (x - ct) \mid n\in\mathbb{N}\}\Big)dF_{X_1}(x)dF_{T_1}(t)\\
&= \int_{(0,\infty)}\int_{(0,u+ct]}\theta(u - x + ct)dF_{X_1}(x)\lambda e^{-\lambda t}dt.
\end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko $z = u + ct$ $\left(\text{torej } t = \frac{z-u}{c} \text{ in } dt = \frac{dz}{c}\right)$ in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda u}{c}}\int_{(u,\infty)} e^{-\frac{\lambda z}{c}}\underbrace{\int_{(0,z)}\theta(z-x)dF_{X_1}(x)}_{g(z)}dz.$$

Ker ima porazdelitev F_{X_1} gostoto in je θ zvezna omejena funkcija, je funkcija $g(\cancel{z})$ zvezna in jo lahko (po osnovnem izreku analize) odvajamo, da dobimo

JE REŠ NUJNO ZVEZNA?

$$\theta'(u) = \frac{\lambda}{c}\theta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,u)}\theta(u-x)dF_{X_1}(x).$$

Če sedaj obe strani integriramo po u, dobimo

TAKO KOT JE TOLE FORMULIRANO, BI SE MORAL ZAIMEK NANAŠATI NA g, V RESNICI PA SE NANAŠA NA θ. POPRAVITE!

$$\int_{(0,t]} \theta'(u)du = \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(u)du - \overbrace{\frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \underbrace{\int_{(0,u]} \theta(u-x)dF_{X_1}(x)}_{(i)}\, du}^{(ii)}. \tag{12}$$

Na integralu (i) uporabimo per partes $\big(\alpha = \theta(u-x)$ in $d\beta = dF_{X_1}(x)\big)$ ter upoštevamo, da ima F_{X_1} gostoto.

$$\begin{aligned}
(i) &= \big(\theta(u-x)F_{X_1}(x)\big)\Big|_0^u + \int_{(0,u)} \theta'(u-x)F_{X_1}(x)dx \\
&= \theta(0)F_{X_1}(u) - \int_{(0,u)} \theta'(u-x)F_{X_1}(x)dx.
\end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $F_{X_1}(0) = 0$, saj je $X_1 > 0$ skoraj gotovo. Vstavimo (i) v (ii) in dobimo

$$(ii) = -\frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(0)F_{X_1}(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]}\int_{(0,u]} \theta'(u-x)F_{X_1}(x)dxdu.$$

Po Tonellijevem izreku (5.12) lahko zamenjamo vrstni red integracije.

$$\begin{aligned}
(ii) &= -\frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(0)F_{X_1}(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} F_{X_1}(x)\int_{[x,t]} \theta'(u-x)dudx \\
&= -\frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(0)F_{X_1}(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} F_{X_1}(x)\big(\theta(t-x) - \theta(0)\big)dx. \\
&= -\frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} F_{X_1}(x)\theta(t-x)dx.
\end{aligned}$$

Vstavimo (ii) v enačbo (12) in dobimo

$$\begin{aligned}
\theta(t) - \theta(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} F_{X_1}(x)\theta(t-x)dx, \\
\theta(t) &= \theta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \big(1 - F_{X_1}(x)\big)\theta(t-x)dx.
\end{aligned}$$

Če sedaj upoštevamo enakost

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{\mathbb{E}[X_1]}$$

in zamenjamo oznako spremenljivke $t \mapsto u$, dobimo željeno enakost (11).

$\square$

Opomba 4.21. Enačbo (11) lahko zapišemo tudi v obliki

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}\int_{(0,u]} \theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x), \tag{13}$$

kjer je $\overline{F}_{X_1}$ porazdelitev integriranega repa (5.14) slučajne spremenljivke X_1.

Opomba 4.22. Konstanto $\theta(0)$, ki se pojavi v (11) in (13), lahko izračunamo. Ker c zadošča NPC, analogno trditvi 4.8 velja

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} -\infty.$$

Po zveznosti $\mathbb{P}$ od spodaj sledi

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \le u\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \le \infty\right) = 1.$$

Če torej v enačbi (13) pošljemo $u \to \infty$, dobimo

$$\lim_{u\to\infty} \theta(u) = 1 = \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \lim_{u\to\infty} \int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{(0,u]}(x)\theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x).$$

Po izreku o monotoni konvergenci (5.10) sledi

$$\begin{aligned} 1 &= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,\infty)} 1 d\overline{F}_{X_1}(x) \\ &= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}. \end{aligned}$$

Torej je $\theta(0) = \frac{\rho}{1+\rho}$. Enakost upoštevamo v enačbi (13) in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,u]} \theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x). \tag{14}$$

Izrek 4.23. *(Asimptotika verjetnosti propada, lahkorepe porazdelitve) Naj bo $(U_t)_{t\ge0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient ℓ. ~~Naj imajo slučajne spremenljivke $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gostoto.~~ Potem obstaja konstanta $C > 0$ ~~da~~ za katero velja*

$$\lim_{u\to\infty} e^{\ell u}\psi(u) = C.$$

ZA DIREKTNO RIEMANNOVO INTEGRABILNOST BO MORDA TREBA ŠE PRIVZETI, DA MRF OBSTAJA ŠE MALO ČEZ ℓ.

Dokaz. Najprej preoblikujemo enačbo (14), tako da upoštevamo $\theta = 1 - \psi$

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,u]} \big(1 - \psi(u-x)\big)d\overline{F}_{X_1}(x), \\ \psi(u) &= \frac{1}{1+\rho}\big(1 - \overline{F}_{X_1}(u)\big) + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,u]} \psi(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x). \end{aligned}$$

Za lažjo notacijo uvedemo oznako $q = \frac{1}{1+\rho}$ in dobimo

$$\psi(u) = q\big(1 - \overline{F}_{X_1}(u)\big) + \int_{(0,u]} \psi(u-x)d\big(q\overline{F}_{X_1}(x)\big). \tag{15}$$

MORDA BI ŠLO TUDI S SESTAVLJENO GEOMETRIJSKO PORAZDELITVIJO, A MI NI JASNO, KAKO POTEM PRIDE NOTER ℓ.

Vidimo, da ima enačba (15) obliko prenovitvene enačbe (5.16) z bistveno razliko, da $q\overline{F}_{X_1}$ ni verjetnostna mera, saj velja $\lim_{x\to\infty} q\overline{F}_{X_1}(x) = q < 1$. Enačbi (15) pravimo defektna prenovitvena enačba. Za $x > 0$ definiramo funkcijo F_ℓ kot Esscherjevo transformacijo funkcije $q\overline{F}_{X_1}$.

$$F_\ell(x) = \int_{(0,x]} e^{\ell y} d\big(q\overline{F}_{X_1}(y)\big) = \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,x]} e^{\ell y}\big(1 - F_{X_1}(y)\big)dy,$$

Pokažimo, da je F_ℓ porazdelitvena funkcija. Očitno je naraščajoča in velja

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F_\ell(x) &= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\int_{(0,\infty)} e^{\ell y}\big(1-F_{X_1}(y)\big)dy \qquad \big(\alpha = 1-F_{X_1}(y),\ d\beta = e^{\ell y}dy\big) \\
&= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\left(\left(\frac{\big(1-F_{X_1}(y)\big)e^{\ell y}}{\ell}\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{\ell}\int_{(0,\infty)} e^{\ell y} f_{X_1}(y)dy\right) \\
&= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\frac{1}{\ell}\left(\mathbb{E}\left[e^{\ell X_1}\right]-1\right).
\end{aligned}
$$

Sedaj upoštevamo, da je $q = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{c\mathbb{E}[T_1]}$, ~~in~~ definicijo Lundbergovega koeficienta ter dejstvo, da je $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ medprihodni čas v $\mathrm{HPP}(\lambda)$, da dobimo

STE TO KJE OMENILI? ČE NE, OMENITE V PRILOGI.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F_\ell(x) &= \frac{\mathbb{E}\left[e^{\ell X_1}\right]-1}{c\ell\ \mathbb{E}\left[T_1\right]} \\
&= \frac{\frac{\lambda+c\ell}{\lambda}-1}{c\ell\frac{1}{\lambda}} = 1.
\end{aligned}
$$

Če torej enačbo (15) pomnožimo z $e^{\ell u}$, dobimo

$$
\begin{aligned}
e^{\ell u}\psi(u) &= qe^{\ell u}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big) + \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}\psi(u-x)e^{\ell x}d\big(q\overline{F}_{X_1}(x)\big) \\
&= qe^{\ell u}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big) + \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}\psi(u-x)dF_\ell(x). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Vidimo, da sedaj enačba (16) ustreza obliki $\underbrace{\big(qe^{\ell u}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big), F_\ell\big)}^{\text{prenovitvene enačbe za par}}$ ~~prenovitvene enačbe~~. ~~in~~ Ker je funkcija $u \mapsto$ $qe^{\ell u}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big)$ omejena na končnih intervalih in F_ℓ nearitmetična, lahko uporabimo Smithov ključni prenovitveni izrek (5.19), da dobimo rešitev

$$
e^{\ell u}\psi(u) = qe^{\ell u}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big) + q\int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u-x)\big)dM^\ell(x), \qquad (17)
$$

kjer je M^ℓ prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodnimi časi, ki imajo porazdelitveno funkcijo F_ℓ. V splošnem težko določimo M^ℓ. ~~ampak, če je~~ Če pa je $u \mapsto$ $qe^{\ell u}(1-\overline{F}_X(u))$ direktno Riemannovo integrabilna, nam Smithov izrek da asimptotično vedenje rešitve (17), ko gre $u\to\infty$. Direktno Riemannovo integrabilnost preverimo tako, da zapišemo

SKLICUJTE SE NA DEFINICIJO V PRILOGI!

$$
qe^{\ell u}(1-\overline{F}_{X_1}(u)) = \int_{()}
$$

Tako vidimo, da je $qe^{\ell u}(1-\overline{F}_{X_1}(u))$ razlika dveh nenaraščajočih Riemannovo integrabilnih funkcij in je zato po kriteriju (5.18) direktno Riemannovo integrabilna. Dobimo

$$
C = \lim_{u\to\infty} e^{\ell u}\psi(u) = \frac{q}{\alpha}\int_{(0,\infty)} e^{\ell x}(1-\overline{F}_{X_1}(x))dx, \qquad (18)
$$

kjer je $\alpha = \int_{(0,\infty)} x dF_\ell(x)$. S tem je izrek dokazan. $\square$

Opomba 4.24. Izrek 4.23 nam pove, da v primeru zahtevkov z lahkorepimi porazdelitvami verjentost propada asimptotično točno ekspo~~e~~nent[n]o pada proti 0[,] s tem ko začetni kapital u raste čez vse meje.

eksplicitno

Zgled 4.25. (Nadaljevna[n]je zgleda 4.18) Vemo, da rešitve prenovitvene enačbe (17) iz izreka 4.23 v splošnem ne moremo izraču[n]anti. V zgledu 4.18 smo pa privzeli, da zahtevke modeliramo z eksponentno porazdelitvijo, torej $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$. V tem primeru se izkaže, da lahko eksplicitno izračunamo verjen[t]tost propada. Če si pogledamo enačbo (17), vidimo, da moramo izračunati le porazdelitev integriranega repa $\overline{F}_{X_1}(u)$ in prenovitveno mero Esscherjeve transformacije F_ℓ. Za eksponentno porazdelitev velja

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1}(u) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} \int_{(0,u)} \big(1 - F_{X_1}(t)\big)dt \\
&= \mu \int_{(0,u)} e^{-\mu t} dt \\
&= F_{X_1}(u),
\end{aligned}$$

saj je pozabljiva. Prenovitveno mero Esscherjeve transformacije pa dobimo tako, da ~~prvo~~ izračunamo porazdelitveno fun[c]kijo F_ℓ podano v enačbi (13).

najprej

$$\begin{aligned}
F_\ell(u) &= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} \int_{(0,u]} e^{\ell x}\big(1 - F_{X_1}(x)\big)dx \\
&= \frac{\mu}{1+\rho} \int_{(0,u]} e^{-x(\mu-\ell)} dx.
\end{aligned}$$

Upoštevamo rezultat (10), torej $\ell = \mu\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)$ in vidimo, da je F_ℓ porazdelitvena funkcija eksponentne slučajne spremenlj[i]vke s param[e]terom $\frac{\mu}{1+\rho}$ oziroma μq. Torej je prenovitvena mera $M^\ell(t)$ preprosto pričakovano število prihodov do časa t v HPP(μq), torej $M^\ell(t) = \mu q t$. Če vstavimo rezultata v enačbo (17)[,] dobimo

$$\begin{aligned}
e^{\ell u}\psi(u) &= q e^{\ell u} e^{-\mu u} + q \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)} e^{-\mu(u-x)} dM^\ell(x) \\
&= q e^{-u(\mu-\ell)} + \mu q^2 \int_{(0,u]} e^{-(\mu-\ell)(u-x)} dx \\
&= q e^{-u(\mu-\ell)} + \mu q^2 \frac{1}{\mu-\ell}\left(1 - e^{-u(\mu-\ell)}\right) \\
&= q e^{-u(\mu-\ell)} + \frac{\mu}{(1+\rho)^2} \frac{1+\rho}{\mu}\left(1 - e^{-u(\mu-\ell)}\right) \\
&= q e^{-u(\mu-\ell)} + q\left(1 - e^{-u(\mu-\ell)}\right) \\
&= q = \frac{1}{1+\rho}.
\end{aligned}$$

Končno dobimo, da je verjetnost propada enaka

$$\psi(u) = \tfrac{1}{1+\rho} e^{-\ell u}. \tag{19}$$

$\diamondsuit$

Vidimo, da se $\psi(u)$ z oceno, ki jo dobimo z Lundbergovo neenakostjo v zgledu 4.18 res razlikuje le za konstanto $\frac{1}{1+\rho}$. To je seveda zelo poseben primer, ko lahko vse količine izračunamo eksplicitno. Pokažimo kako bi do približkov funkcije $\psi(u)$ v praksi lahko prišli z Monte Carlo simulacijami.

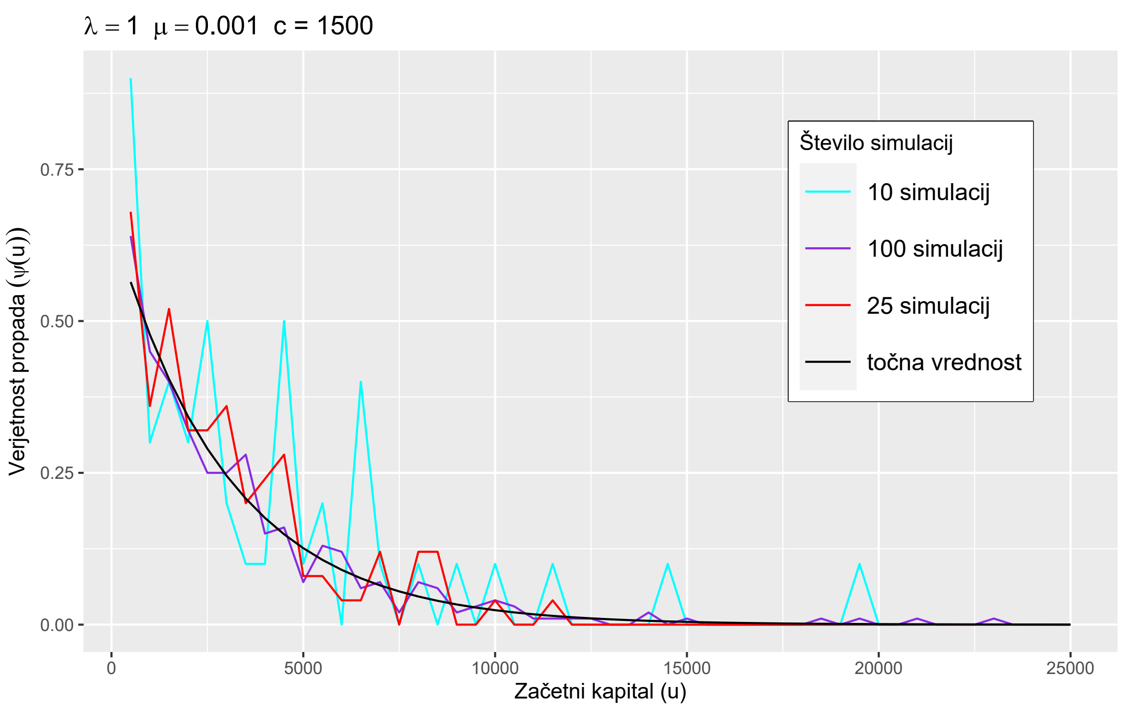
Zgled 4.26. Kot v zgledu 4.18 predpostavimo, da so zahtevki porazdeljeni eksponentno, torej $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$. Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov $\lambda = 1$, stopnja prihodkov premij $c = 1500$ in pričakovana vrednost zahtevkov 1000 €, torej $\mu = \frac{1}{1000}$. Potem lahko verjetnost propada eksplicitno izračunamo po formuli (19). Prvo izračuamo ρ po formuli (10), in ℓ po (9), torej

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{c\mu}{\lambda} - 1 \\ &= \frac{1500 \cdot \frac{1}{1000}}{1} - 1 = \frac{1}{2}, \\ \ell &= \mu - \frac{\lambda}{c} \\ &= \frac{1}{1000} - \frac{1}{1500} = \frac{1}{3000}. \end{aligned}$$

Vsatvimo vrednosti v (19) in dobimo

$$\psi(u) = \tfrac{2}{3} e^{-\frac{u}{3000}}.$$

Sedaj definiramo zaporedje $(u_n)_{n=1}^{50}$ s predpisom $u_n = 500n$ in za vsak n simuliramo $10, 50$ in 100 realizacij procesa tveganja, bodisi do časa $T = 1000$ bodisi dokler ne propade in za vsak n izračunamo približek za verjetnost propada kot delež propadlih realizacij z vsemi. Aproksimacijo $\psi(u)$ prikažemo na sliki 6.



Slika 6. Aproksimacija verjetnosti propada $\psi(u)$ z Monte Carlo simulacijami.

Kot vidimo, se približki z naraščajocim številom simulacij priližujejo funckciji $\psi(u)$, ampak, za res dobro aproksimacijo, bi morali to število krepko povečati, saj na primer za vrednost $u = 16000$ ~~je~~ pride $\psi(16000) \approx 0.0032186334$, kar je približno 0,3% in v praksi ni zanemarljivo, ampak v naši simulaciji nobena realizacija procesa tveganja ni padla pod 0.

b

$\diamondsuit$

4.3. **Težkorepe porazdelitve.** Rezultati, ki smo jih izpeljali v prejšnjem podpoglavju, temeljijo na predpostavki zahtevkov z lahkorepimi porazdelitvami, kar interpretiramo, kot da je verjetnost zahtevkov, ki zelo odstopajo od povprečja, zelo majhna. V praksi pa se pogosto zgodi, da ta predpostavka ni izpolnjena in pojavi se vprašanje, ali lahko še vedno kaj povemo o asimptotiki verjetnosti propada. Izkaže se, da v primeru, ko je porazdelitev integriranega repa zahtevkov subeksponentna, ta točno določa asimptotično vedenje verjetnosti propada. Subeksponentne porazdelitve so poseben razred težkorepih porazdelitev.

razdelku

SUBEKSPONENTNOST SE LAHKO RAZUME NA VEČ NAČINOV. PODAJTE REFERENCO, V KATERI JE SUBEKSPONENTNOST DEFINIRANA NA TA NAČIN ([9]?)

Definicija 4.27. Naj bo $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk s porazdelitveno funkcijo F, za katero velja $F < 1$ za vsak $x > 0$. Pravimo, da je porazdelitev F *subeksponentna*, če velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = n \quad \text{za vsak} \quad n \geq 2.$$

(*)

Opomba 4.28. Ekvivalentna in bolj intuitivna definicija subeksponentne porazdelitve je, da velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > x)}{\mathbb{P}(\max\{X_1, \ldots, X_n\} > x)} = 1 \quad \text{za vsak} \quad n \geq 2,$$

kar pomeni, da je repna porazdelitev vsote n-tih slučajnih spremenljivk asimptotično primerljiva s porazdelitvijo največje. Dokaz ekvivalence lahko bralec najde v [9] na strani 437.

Izrek 4.29. *(Asimptotika verjetnosti propada, težkorepe porazdelitve) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj bodo zahtevki $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ neodvisni in enko porazdeljeni z gostoto f_X, pričakovano vrednostjo $\mathbb{E}[X] < \infty$ in naj bo $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna. Potem za verjetnost propada $\psi(u)$ velja*

a

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)} = \frac{1}{\rho}. \tag{20}$$

BI TO FORMULIRALI POSEBEJ?

porazdelitveno funkcijo sestavljene geometrijske porazdelitve

bomo pokazali

Dokaz. Najprej pokažimo, da lahko verjetnost preživetja iz leme 4.20 predstavimo kot ~~sestavljeno geometrijsko porazdelitev~~ (5.4). Če definiramo $G \sim \text{Geom}(\frac{\rho}{1+\rho})$ in zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $(\overline{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ s porazdelitveno funkcijo $\overline{F}_{X_1}$, ~~se izkaže~~, da $C = \sum_{i=1}^{G} \overline{X}_i$ zadošča enačbi

porazdelitvena funkcija F_C slučajne spremenljivke

NAREDITE SAMOSTOJNO OZNAKO!

$$\cancel{\theta}(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_{(0,u]} \cancel{\theta}(u-x)\,d\overline{F}_{X_1}(x), \tag{\cancel{14}}$$

F_c F_c

ki je natanko enačba (14) z F_c namesto θ.

Porazdelitvena funkcija F_C ima obliko

$$\mathbb{P}(C \leq u) = \mathbb{P}(G = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(G = n)\,\mathbb{P}\left(\overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n \leq u\right)$$

(*) NARAVNEJŠA FORMULACIJA DEFINICIJE:

Verjetnostna porazdelitev na $[0, \infty)$ je subeksponentna, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ in neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s to porazdelitvijo velja ...

$$= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^n}\mathbb{P}\left(\overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n \leq u\right). \tag{21}$$

Za preglednost ponovno uvedemo oznako $q = \frac{1}{1+\rho}$ in $p = \frac{\rho}{1+\rho}$ in enačbo (21) preoblikujemo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C \leq u) &= p + qp\overline{F}_{X_1}(u) + p\sum_{n=2}^{\infty} q^n \mathbb{P}\left(\overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n \leq u\right) \\
&= p + qp\overline{F}_{X_1}(u) + qp\sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1}\int_{(0,u]} \mathbb{P}\left(x + \overline{X}_2 + \cdots + \overline{X}_n \leq u\right) d\overline{F}_{X_1}(x) \\
&= p + q\int_{(0,u]} p\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1}\mathbb{P}\left(\overline{X}_2 + \cdots + \overline{X}_n \leq u - x\right)\right] d\overline{F}_{X_1}(x) \\
&= p + q\int_{(0,u]} \mathbb{P}(C \leq u - x)\, d\overline{F}_{X_1}(x).
\end{aligned}$$

MORDA RAJE $C \sim \theta$ ALI PA $F_C = \theta$?

Vidimo, da F_C ~~C~~ zadošča enačbi (14), torej je res $\theta \sim C$. Limito $\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)}$ lahko tako zapišemo kot

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)} = \lim_{u\to\infty} p\sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{\mathbb{P}\left(\overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n > u\right)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)}.$$

Limito in vsoto lahko zamenjamo, saj če definiramo zaporedje funkcij ... Ker je $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna, za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

(*2)

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}\left(\overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n > u\right)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)} = n.$$

Končno je

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)} = p\sum_{n=1}^{\infty} q^n n = \frac{1}{\rho}.$$

□

Opomba 4.30. Pokažemo lahko tudi, da je F_C ~~C~~ edina porazdelitvena funkcija ~~porazdelitev~~, ki zadošča (14) v razredu funkcij

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} = \{F \mid F : \mathbb{R} \to [0,\infty) &\text{ omejena, nepadajoča, zvezna z desne} \\
&\text{in za } x < 0 : F(x) = 0\}.
\end{aligned}$$

Trditev sledi direktno iz lastnosti Laplace-Stieltjesove transformacije, saj lahko vsak $F \in \mathscr{F}$ zapišemo kot aF_X za primerno konstanto $a \geq 0$ in porazdelitveno funkcijo neke nenegativne slučajne spremenljivke X. Bolj formalen dokaz lahko bralec najde v [4] na strani 173.

Zgled 4.31. Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja, da so zahtevki neodvisni Weibullovo porazdeljeni s parametroma $a = \frac{1}{4}$ in $b = 16$, torej $X_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$. Za dokaz, da je $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna, lahko bralec pogleda [.......]. Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov $\lambda = 1$ in stopnja prihodkov premij $c = 500$. Podobno kot v zgledu 4.26 z Monte Carlo simulacijami pokažimo, da verjetnost propada res pada proti 0 z

(*1)

(*1) PRVI GOOGLOV ZADETEK PRI MENI:

C. M. Goldie, C. Klüppelberg: Subexponential Distributions,

https://mediatum.ub.tum.de/doc/1120625/document.pdf

NOTRI JE NAVEDENO, DA JE WEIBULLOVA PORAZDELITEV SUBEKSPONENTNA (TRDITEV 3.6), PRAV TAKO TUDI PRIPADAJOČA PORAZDELITEV INTEGRIRANEGA REPA.

NI REČENO, DA JE TA ČLANEK URADNO OBJAVLJEN, MORALO PA BI BITI VSE SKUPAJ IZPELJANO V ČLANKIH, NA KATERE SE PREJ OMENJENI ČLANEK SKLICUJE.

(*2) LEMA 2.3 V ZGORAJ OMENJENEM ČLANKU PRAVI, DA ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA TAK $K(\varepsilon)$, DA JE

$$\frac{\mathbb{P}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n > u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)} \leq K(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n$$

ČE VZAMEMO $\varepsilon < \frac{1}{q} - 1$, IZ ZGORNJE OCENE SLEDI VELJAVNOST IZREKA O DOMINIRANI KONVERGENCI (KJER ZA INTEGRACIJO VZAMEMO SEŠTEVANJE, LIMITO $u \to \infty$ PO REALNIH ŠTEVILIH PA NADOMESTIMO Z LIMITO PO ZAPOREDJIH $u_k \to \infty$.

$$f_k(n) = q^n \frac{\mathbb{P}(\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n > u_k)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u_k)}$$

enakim redom konverjence kot rep $\overline{F}_{X_1}$, ko gre $u \to \infty$. Porazdelitev integriranega repa $\overline{F}_{X_1}$ ima obliko

$$\overline{F}_{X_1}(u) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} \int_{(0,u]} e^{-\left(\frac{x}{16}\right)^{\frac{1}{4}}} dx.$$

PRI MAJHNI PISAVI JE LEPŠE STAVITI KAR 1/4 NAMESTO \frac{1}{4}.

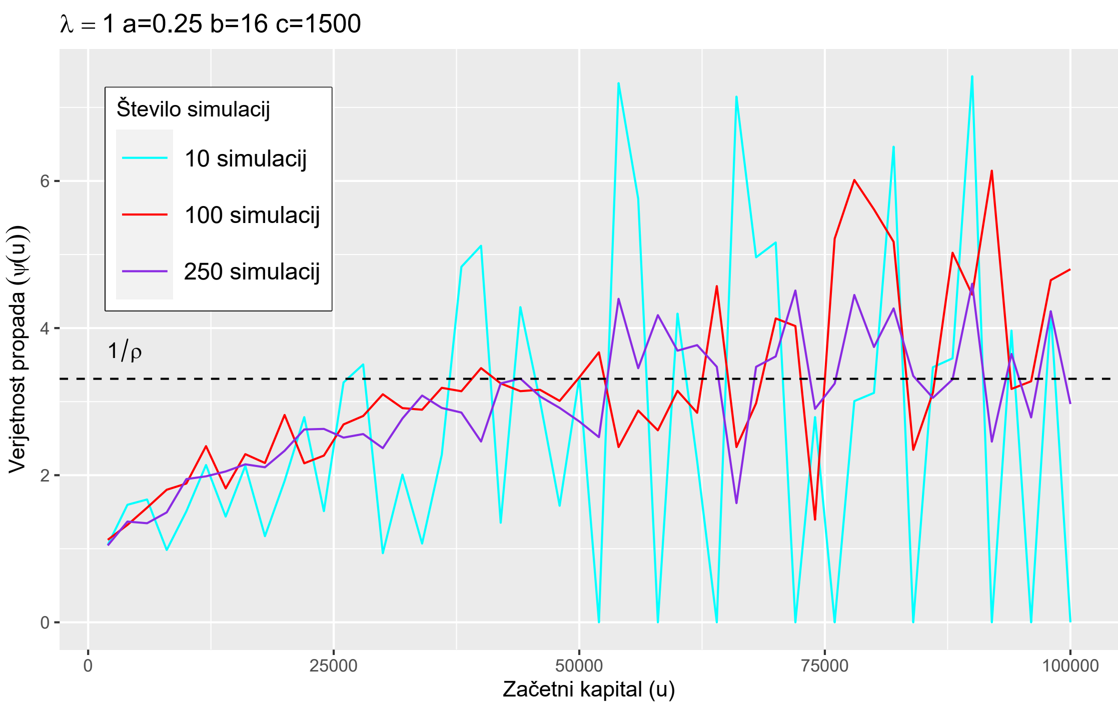
Iz zgleda 4.3 vemo, da je $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 384$. Z uvedbo nove spremenljivke $z = x^{\frac{1}{4}}$($dz = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}dx$) z nekaj računanja dobimo

$$\overline{F}_{X_1}(u) = 1 - \frac{\left(u^{\frac{3}{4}} + 6\sqrt{u} + 24\sqrt[4]{u} + 48\right) e^{-\frac{\sqrt[4]{u}}{2}}}{48}$$

Izračunamo še

$$\rho = \frac{c\mathbb{E}\left[T_1\right]}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} - 1 = \frac{500}{384} - 1 \approx 0.3020833.$$

Po izreku 4.29 razmerje $\frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)}$ konvergira proti $\frac{1}{\rho} \approx 3.3103451$. Zaporedje $(u_n)_{n=1}^{50}$, definirano kot $u_n = 2000n$ za vsak n, podobno kot v zgledu 4.26 simuliramo $10, 100$ in 250 realizacij procesa tveganja in za vsak n izračunamo približek za razmerje $\frac{\psi(u_n)}{1-\overline{F}_{X_1}(u_n)}$. Rezultate prikažemo na sliki 7. ?



SLIKA 7. Aproksimacija verjetnosti propada $\psi(u)$ z Monte Carlo simulacijami (modra) in točna vrednost funkcije (rdeča).

Vidimo, da razmerje vizualno res konvergira proti $\frac{1}{\rho}$, ampak seveda bi za boljšo natančnost morali povečati začetni kapital u in število simulacij. $\diamondsuit$

5. Priloga

Dostavek je namenjen predvsem za dodatne definicije in trditve, ki so bile izpuščene v glavnem za namene preglednosti besedila. V primeru, da bralec potrebuje osvežiti določene pojme, jih večino lahko najde v tem razdelku.

Definicija 5.1. Naj bo X slučajna spremenljivka. Potem so za $u \in \mathbb{R}$ njena *rodovna funkcija*, *momentno rodovna funkcija* in *karakteristična funkcija* definirane kot

$$G_X(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right], \quad M_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX}\right], \quad \varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX}\right],$$

če upanja obstajajo.

Definicija 5.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Naraščajočemu zaporedju σ-algeber $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ pravimo *filtracija*, če za vsak $0 \leq s \leq t$ velja $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. Za slučajni proces $(X_t)_{t\geq 0}$ pravimo, da je *prilagojen* filtraciji $\mathcal{F}$, če je X_t $\mathcal{F}_t$-merljiva za vsak $t \geq 0$.

Definicija 5.3. Slučajna spremenljivka X ima *Weibullovo porazdelitev* s parametri $a, b > 0$, če ima njena ~~porazdelitev~~ porazdelitvena funkcija obliko

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0$$

~~in~~ oziroma gostota obliko

$$f_X(x) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0.$$

Definicija 5.4. Naj bo $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk in $G \sim \text{Geom}(p)$ geometrijsko porazdeljena slučajna spremenljivka parametrom $p \in (0,1)$ in funkcijo verjetnosti $P(G = k) = p(1-p)^k$ za $k \in \mathbb{N}_0$. Naj bo G neodvisna od X_i za vsak $i \in \mathbb{N}$. Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$C = \sum_{i=1}^{G} X_i$$

sestavljeno geometrijsko porazdelitev.

Trditev 5.5. *Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ki ima prvi moment. Potem velja*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{(0,\infty)} \big(1 - F_X(x)\big)dx.$$

Vsako število $X \geq 0$

Dokaz. $\cancel{X}$ lahko zapišemo kot

$$X = \int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{\{x<X\}}dx = \int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{\{X<x\}}dx.$$

Če sedaj uporabimo fubinijev izrek, dobimo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\left[\int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{\{X<x\}}dx\right] \\ &= \int_{(0,\infty)} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X<x\}}\right]dx \\ &= \int_{(0,\infty)} \big(1 - \mathbb{P}(X > x)\big)dx\end{aligned}$$

□

Trditev 5.6. *(Neenakost Markova) Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka. Potem za $x > 0$ velja*

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{x}.$$

ČE DODAMO ENAČAJ, JE REZULTAT MALENKOST MOČNEJŠI.

Dokaz. Naj bo $x > 0$. Velja

$$x\mathbb{1}_{\{X \geq x\}} \leq X \iff x\mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{E}[X].$$

□

Izrek 5.7. *(Krepki zakon velikih števil) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s pričakovano vrendostjo $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$. Potem velja*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mu.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. □

Izrek 5.8. *(Izrek o enoličnosti) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, ne nujno definirani na istem verjetnostnem prostoru. Če za vsak $u \in \mathbb{R}$ velja $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$, ~~potem~~ imata X in Y enako porazdelitev.*

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. □

Izrek 5.9. *(Lévijev izrek o kontinuiteti) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk (ne nujno na istem verjetnostnem prostoru) in X še ena slučajna spremenljivka. Potem za vsak $u \in \mathbb{R}$ velja*

$$\varphi_{X_n}(u) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_X(u)$$

natanko tedaj, ko velja

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. □

Izrek 5.10. *(Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci) Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in naj bo $X := \lim_{n\to\infty} X_n$ njihova limita. Naj za vsak $\omega \in \Omega$ velja $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \ldots$ Potem velja*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. □

Izrek 5.11. *(Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci) Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in naj bo $X := \lim_{n\to\infty} X_n$ njihova limita. Naj bo Y slučajna spremenljivka definirana na istem verjetnostnem prostoru z $\mathbb{E}[Y] < \infty$ in naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $\omega \in \Omega$ velja $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$. Potem je X integrabilna in velja*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. □

Izrek 5.12. *(Tonellijev izrek) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki definirani vsaka na svojem verjentnostnem prostoru in naj imata vsaka svojo gostoto f_X in f_Y glede na Lebesgueovo mero. Potem velja*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\mathcal{L}^2(dx,dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy \right) dx.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. □

Definicija 5.13. Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka in F_X njena porazdelitvena funkcija. Potem za $u \in \mathbb{R}$ *Laplace-Stiltjesovo transformacijo* porazdelitve F_X definiramo kot

e

$$\hat{F}_X(u) = \int_{[0,\infty)} e^{-ux} dF_X(x).$$

Definicija 5.14. Naj bo F porazdelitvena funckija neke nenegativne slučajne spremenljivke s prvim momentom. ~~Potem je~~ Porazdelitev integriranega repa te slučajne spremenljivke je porazdelitev s porazdelitveno funkcijo

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^x (1 - F(t))\, dt$$

ira

~~*porazdelitev integrarnega repa F.*~~

Definicija 5.15. *Prenovitveni proces* na verjentostnem protoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je slučajni proces, ~~karatkteriziran~~ z zaporedjem neodvisnih enako porazdeljenih medprihodnih časov $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki zavzamejo vrednosti v $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, in je podan z zvezo

določen

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \le t\}},$$

sicer

kjer je $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ čas n-tega prihoda. Pripadajočo *prenovitveno mero* prenovitvenega procesa definiramo kot $M(t) = \mathbb{E}[N_t]$ za $t > 0$.

Definicija 5.16. *Prenovitvena enačba* je enačba oblike

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} f(t-s)dF(s), \quad t \ge 0,$$

F pa

kjer sta neznana funkcija f in znana funckija g definirani na $\mathbb{R}^+$ ~~in~~ F je porazdelitvna funkcija neke pozitivne slučajne spremenljivke X. Prenovitveno, enačbo predstavimo s parom (g, F).

Definicija 5.17. Za nenegativno merljivo funkcijo $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ pravimo, da je *direktno Riemannovo integrabilna* (d.R.i.), če za vsak $\delta > 0$ velja

$$\sum_{k\ge 0} \left(\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t) \right) < \infty \quad \text{in}$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \delta \sum_{k\ge 0} \left(\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t) \right) = \lim_{\delta\downarrow 0} \delta \sum_{k\ge 0} \left(\inf_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t) \right).$$

OŠTEVILČITE TO FORMULO.

definiramo njen direktni Riemannov integral

Če f zadošča navedenima zahtevama, ~~potem je limita v drugi zahtevi točno vrednost direktnega Riemannovega integral~~a

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty f(t)\, dt.$$

kot limito (SKLIČITE SE NA OŠTEVILČENO FORMULO).

Funkcija f poljubnega predznaka je d.R.i., če sta le-taki $f^+ = \max\{f, 0\}$ in $f^- = \max\{-f, 0\}$, pri čemer je

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty f(t)\, dt = \text{d.R.i.} \int_0^\infty f^+(t)\, dt - \text{d.R.i.} \int_0^\infty f^-(t)\, dt.$$

Trditev 5.18. *(Kriterij za direktno Riemannovo integrabilnost) Naj bo $f \geq 0$ naraščajoča funkcija. Potem je f direktno Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je posplošeno Riemannovo integrabilna. Tedaj je njen direktni Riemannov integral enak posplošenemu.*

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [8] na strani 235. □

Izrek 5.19. *(Smithov ključni prenovitveni izrek) Če je funkcija g iz prenovitvene enačbe (g, F) (definicija 5.16) omejena na končnih intervalih ~~in~~ ter X ima prvi moment ~~ter~~ in ni aritmetična ($\nexists a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}a) = 1$), ~~potem~~ je*

„TER" JE VEDNO ZUNANJI.

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} g(t-s) dM(s), \quad t \geq 0,$$

enolična rešitev te enačbe. Funkcija *M~~(s)~~ je prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodno porazdelitvijo F. Če je dodatno funkcija g direktno Riemannovo integrabilna, velja*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{(0,\infty)} g(t) dt.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [8] na strani 237. □

Slovar strokovnih izrazov

trajektorija sample path
slučajni proces stochastic process
sestavljeni Poissonov proces compound Poisson process
neskončna deljivost infinite divisibility
proces tveganja risk process
verjetnost propada probability of ruin
ogrodje procesa tveganja skeleton process
lahkorepa porazdelitev light-tailed distribution
težkorepa porazdelitev heavy-tailed distribution
subeksponentna porazdelitev subexponential distribution
prenovitveni proces renewal process
defektna prenovitvena enačba defective renewal equation
prenovitvena mera renewal function

Literatura

[1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
[2] S.M. Ross, Stochatic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
[3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).
[4] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Second Edition, Springer, (2009).
[5] M. Mandjes, O. Boxma, The Cramér–Lundberg model and its variants, Springer, (2023).
[6] F. Spitzer, Principles of Random Walk. Second Edition, Springer, (1976).
[7] B. Fristedt, L. Gray, A Modern Approach to Probability Theory, Springer, (1996).
[8] S.I. Resnick, Adventures in Stochastic Processes, Birkhäuser, (1992).
[9] R.J. Adler, R.E. Feldman, A practical guide to heavy tails: statistical techniques and applications, Birkhäuser, (1998).