UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

Kazalo

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Povzetek

V prvem delu diplome najprej definiramo splošen slučajni proces v zveznem času in osnovne lastnosti, ki jih študiramo. Nato definiramo sestavljeno Poissonovo porazdelitev in izpeljemo rodovne funkcije, obravnavamo njeno povezavo s splošnimi porazdelitvami in izpeljemo Panjerejevo rekurzivno shemo. Definiramo sestavljeni Poissonov proces in dokažemo neodvisnost in stacionarnost prirastkov, njegovo razčlenitev glede na čas in prostor ter ga obravnavamo, kot gradnik neskončno deljivih procesov ti. Lévijevih procesov. V drugem delu diplome obravnavamo aplikacijo sestavljenega Poissonovega procesa v Cramér–Lundbergovem modelu. Definiramo verjetnost propada in obravnavamo njeno obnašanje v odvisnoti od začetnega kapitala. Dokažemo Lundbergovo neenakost in asimptotično obnašanje verjetnosti propada, ko zahtevke modeliramo z lažkorepo in težkorepo porazdelitvijo. Obnašanje verjetnosti propada na koncu praktično prikažemo z večkratkim simuliranjem procesa tveganja.

Compound Poisson process and its application in finance

Abstract

In the first part of the diploma, we define a general stochastic process in continuous time and basic properties that we study. We then define the compound Poisson distribution and derive the generating functions, discuss its connection with general distributions, and derive the Panjer recursion method. We define the compound Poisson process and prove the independence and stationarity of increments, its decomposition with respect to time and space, and consider it as a building block of infinitely divisible processes, i.e. Lévy processes. In the second part of the diploma, we consider the application of the compound Poisson process in the Cramér–Lundberg model. We define the probability of ruin and consider its behavior depending on the initial capital. We prove the Lundberg inequality and the asymptotic behavior of the probability of ruin when claims are modeled with light-tailed and heavy-tailed distributions. We practically demonstrate the behavior of the probability of ruin at the end with repeated simulation of the risk process.

Math. Subj. Class. (2020): 60G07 60G20 60G51

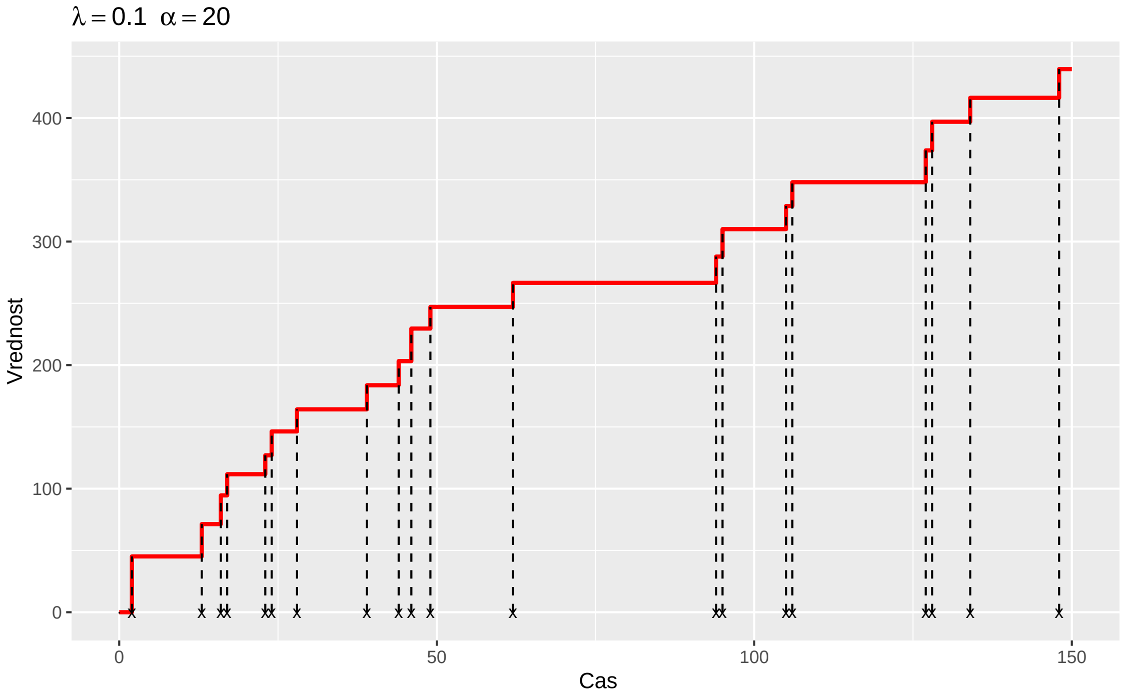
Ključne besede: slučajni proces, sestavljena Poissonova porazdelitev, Panjerjeva rekurzivna shema, sestavljeni Poissonov proces, razčlenitev glede na čas, razčlenitev glede na prostor, neskončna deljivost, Cramér–Lundbergov model, Verjetnost propada, lahkorepa porazdelitev, težkorepa porazdelitev

Keywords: stochastic process, compound Poisson distribution, Panjer recursion scheme, compound Poisson process, decompostition of time, decompostion of space, infinite divisibility, Cramér–Lundberg model, probability of ruin, light-tailed distribution, heavy-tailed distribution

Zahvala

V nastajanju :)

Uvodni tekst in motivacija za študiranje procesa, nakaži da boš obravnaval Cramer-Ludenbergov model



SLIKA 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa

Definicija 1.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (E, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T, je družina slučajnih elementov $X_t : \Omega \to E$, ki so $(\mathcal{F}, \Sigma)$-merljivi za vsak $t \in T$.

Opomba 1.2. V delu se bomo omejili na primer, ko T predstavlja čas, torej $T = [0, \infty)$ in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, kjer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ predstavlja Borelovo $\sigma-$algebro na $\mathbb{R}$.

Definicija 1.3. Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$. Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora Ω priredi slučajno funkcijo $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.4. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Definicija 1.5. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Definicija 1.6. Naj bosta $(X_t)_{t\geq 0}$ in $(Y_t)_{t\geq 0}$ slučajna procesa ne nujno definirana na istem verjetnostnem prostoru. Pravimo, da sta $(X_t)_{t\geq 0}$ in $(Y_t)_{t\geq 0}$ *neodvisna*, če sta za vsak končen nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ slučajna vektorja $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ in $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n})$ neodvisna.

Definicija 1.7. Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t\geq 0}$, definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, pravimo *Poissonov proces* z intenzivnostjo λ, če zadošča naslednjim pogojem:

(1) $N_0 = 0$ $\mathbb{P}$-skoraj gotovo.
(2) $(N_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
(3) Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t-s))$,

2. Sestavljena Poissonova porazdelitev

Razdelek je prirejen po [1], [2] in [3].

Sestavljena poissonova porazdelitev je osnovni gradnik za sestavljeni Poissonov proces, ki ga obravnavamo v naslednjem razdelku. Lastnosti, ki jih dokažemo so direktno prenosljve na sam proces. Obravnavmo porazdelitev in kako te pridemo, rodovne funkcije, zanimive rezultate v povezavi s splošnmi slučajnimi spremenljivkami in Panjerjevo rekurzivno shemo, ki jo prikažemo na praktičnem zgledu.

Definicija 2.1. Naj bo $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih (med seboj in N) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

sestavljeno Poissonovo porazdelitev.

Opomba 2.2. V splošnem lahko obravnavamo sestavljene porazdelitve kjer je N poljubna slučajna spremenljivka, ki zavzema vrednosti v $\mathbb{N}_0$. Konkreten primer nas zanima zaradi njegove povezave s sestavljenim Poissonovim procesom. V nadaljevanju bomo uporabljali oznako

$$S_0 = 0 \quad \text{in} \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \quad \text{za } k \in \mathbb{N},$$

za pogojno porazdelitev $S \mid \{N = k\}$.

2.1. Porazdelitev.

Z uporabo izreka o popolni verjetnosti s pogojevanjem na N pridemo do formule za porazdelitev S. Za $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} F_S(x) = \mathbb{P}\big(S \leq x\big) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(S \leq x \mid N = k\big)\mathbb{P}\big(N = k\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(S_k \leq x\big)\mathbb{P}\big(N = k\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_{X_1}^{*k}(x)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \end{aligned}$$

kjer je $F_{X_1}^{*k}(x)$ porazdelitev k-te konvolucije slučajne spremenljivke X_1.

Zgled 2.3. Poglejmo enega enostavnejših primerov, ko so $X_1, X_2, \dots$ porazdeljene kot

$$X_1 \sim \mathrm{Exp}(a), \qquad f_{X_1}(x) = ae^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

s parametrom $a > 0$. Vemo, da je k-ta konvolucija X_1 porazdeljena kot Gamma(k, a) in ima gostoto

$$f_{X_1+\cdots+X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Za $s > 0$ velja

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^s \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} dx \, \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} && \text{Tonelli (5.12)} \\ &= \int_0^s \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!k!} (a\lambda)^k x^{k-1} e^{-(ax+\lambda)}}_{f_S(x)} dx. \end{aligned}$$

Vidimo, da že v primeru, ko poznamo eksplicitno formulo za $F_{X_1}^{*k}$, težko pridemo do kakršne koli porazdelitve S v končni obliki. V praksi se zato poslužujemo numeričnega ocenjevanja. ♢

2.2. **Rodovne funkcije.**

Trditev 2.4. *Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \dots$ zaporedje neodvisnih (med seboj in N) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk s karakteristično funkcijo φ_{X_1}. Potem ima za $u \in \mathbb{R}$ karateristična funckija $S = \sum_{i=1}^N X_i$ obliko*

$$\varphi_S(u) = e^{\lambda\left(\varphi_{X_1}(u)-1\right)}.$$

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned} \varphi_S(u) &= \mathbb{E}\left[\exp\left[iuS\right]\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iuS \mid N = k\right]\right] \mathbb{P}\left(N = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iuS_k\right]\right] \mathbb{P}\left(N = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{iuX_1}\right]^k}_{\varphi_{X_1}(u)^k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (1) \\ &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\varphi_{X_1}(u)\lambda\right)^k}{k!} \\ &= e^{\lambda\left(\varphi_{X_1}(u)-1\right)}. \end{aligned}$$

□

Posledica 2.5. *Rodovna in momentno rodovna funkcija $S = \sum_{i=1}^N X_i$ imata obliko*

$$G_S(u) = e^{\lambda\left(G_{X_1}(u)-1\right)}, \qquad \text{in} \qquad M_S(u) = e^{\lambda\left(M_{X_1}(u)-1\right)}.$$

Dokaz. V splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke X enaka njeni rodovni funckij izvrednoteni v e^{iu}, torej $\varphi_X(u) = G_X(e^{iu})$ in momentno rodovni funkciji izvrednoteni v iu, torej $\varphi_X(u) = M_X(iu)$, če obstajata. □

V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo φ_S, saj je ta vedno definirana za vsak $u \in \mathbb{R}$. Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med φ_S in G_S.

Lema 2.6. *Karakteristično funckijo φ_S lahko izrazimo kot kompozitum rodovne funkcije G_N in karateristične funkcije φ_{X_1}.*

$$\varphi_S(u) = G_N\left(\varphi_{X_1}(u)\right).$$

Dokaz. Po enačbi (1) iz trditve 2.4 za $u \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}\varphi_S(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{X_1}(u)^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= G_N\left(\varphi_{X_1}(u)\right).\end{aligned}$$

□

Vemo, da za neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$, ki so porazdeljene kot $X_1 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1)$, ..., $X_n \sim \mathrm{Pois}(\lambda_n)$, velja, da je njihova vsota $S = \sum_{i=1}^n X_i$ porazdeljena kot $S \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, kjer je $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Izkaže se, da ima sestavljena poissonova porazdelitev podobno lastnost.

Definicija 2.7. Naj bo $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih realnih števil za katerega velja $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$. Naj bodo $F_1, F_2, \ldots$ porazdelitvene funckcije realnih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ Potem

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k$$

pravimo *mešanica porazdelitev* $F_1, F_2, \ldots$

Očitno je F porazdelitvena funckija. Če definiramo

$$I \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots \end{pmatrix},$$

vidimo, da je F porazdelitev slučajne spremenljivke $X = \mathbb{1}_{\{I=1\}}X_1 + \cdots + \mathbb{1}_{\{I=n\}}X_n$, kar enostavno pokažemo z uporabo zakona o popolni verjentnosti. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \le x\right) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X \le x \mid I = k\right) \mathbb{P}\left(I = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_k \le x\right) \lambda_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \lambda_k.\end{aligned}$$

Z enakim argumentom lahko pokažemo, da je $\varphi_X(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_{X_k}(u)$.

Trditev 2.8. *Naj imajo neodvisne slučajne spremenljivke $S_1, \ldots, S_n$ sestavljeno Poissonovo porazdelitev, torej*

$$S_k = \sum_{i=1}^{N_k} X_i^{(k)} \quad za\ k = 1, \ldots, n,$$

kjer je $N_k \sim Pois(\lambda_k)$ za $\lambda_k > 0$ in za vsak $k = 1, \ldots, n$ je $(X_i^{(k)})_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem velja

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k \sim \sum_{i=1}^{N} Y_i,$$

kjer je $N \sim Pois(\lambda)$ s parametrom $\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ in $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z mešano porazdelitvijo

$$F_{Y_1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda} F_{X_1^{(k)}}.$$

Dokaz. Karakteristična funkcija S_k ima obliko

$$\varphi_{S_k}(u) = e^{\lambda_k \left(\varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1\right)}.$$

Ker so $S_1, \ldots, S_n$ neodvisne, velja

$$\begin{aligned}
\varphi_S(u) &= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{S_k}(u) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \exp\left[\lambda_k \left(\varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1\right)\right] \\
&= \exp\left[\lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda} \varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1\right)\right].
\end{aligned}$$

Po izreku o enoličnosti (5.8) sledi $S \sim \sum_{i=1}^{N} Y_i$. □

Na podoben način pokažemo, kako se sestavljena Poissonova porazdelitev izraža v primeru, ko so slučajne spremenljivke X_i diskretno porazdeljene.

Trditev 2.9. *Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \ldots X_n$ neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od N) enako porazdeljene kot*

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} \ldots \end{pmatrix},$$

kjer $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je poljubno zaporedje realnih števil in $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih realnih števil za katerega velja $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda$. Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

kjer so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke porazdeljene kot
$Pois(\lambda_1), Pois(\lambda_2), \ldots$

Dokaz. S $\varphi_{Z_n}(u)$ označimo karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $Z_n := a_1Y_1 + a_2Y_2 + \cdots + a_nY_n$ in s $\varphi_Z(u)$ karakteristično funkcijo $Z := \sum_{j=1}^{N} X_j$. Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned}
\varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{Y_j}(a_j u) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \exp\left[\lambda_j \left(e^{a_j iu} - 1\right)\right] \\
&= \exp\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(e^{a_j iu} - 1\right)\right].
\end{aligned}$$

Po lemi 2.6 velja

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(u) &= G_N\left(\varphi_{X_1}(u)\right) \\
&= \exp\left[\lambda\left(\varphi_{X_1}(u) - 1\right)\right] \\
&= \exp\left[\lambda\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda} e^{a_j iu} - 1\right)\right] \\
&= \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left(e^{a_j iu} - 1\right)\right].
\end{aligned}$$

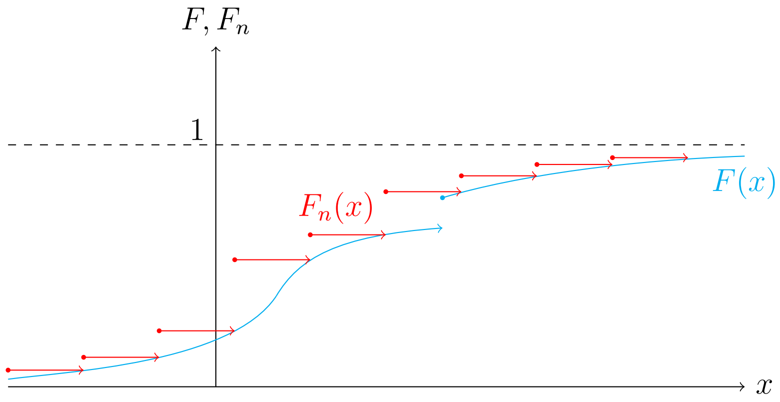
Vidimo, da za vsak $u \in \mathbb{R}$ $\varphi_{Z_n}(u)$ po točkah konvergira k $\varphi_Z(u)$, torej

$$\varphi_{Z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_Z$$

po Lévijevem izreku o kontinuiteti (5.9) velja $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$. □

Rezultat je zanimiv predvsem zato, ker nam za razliko od trditve 2.8 pove, da lahko slučajno vsoto izrazimo kot linearno kombinacijo oziroma vrsto Poissonovih slučajnih spremenljivk.

Opomba 2.10. Kaj pa v primeru, ko X_i niso diskretno porazdeljene? Ali lahko trditev 2.9 posplošimo? Izkaže se, da tudi v splošnem dobimo konvergenco v porazdelitvi (nisem prepričan če je to res). Naj bo $F(x)$ porazdelitvena funkcija realnoštevilske slučajne spremenljivke X_1. Ideja je, da definiramo funkcijo $F_n(x) := F(\frac{k+1}{n})$ na intervalu $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ za $k \in \mathbb{Z}$.



SLIKA 2. Aproksimacija F s F_n

Kot je razvidno iz slike 2, je $F_n(x)$ stopničasta funkcija, ki aproksimira porazdelitveno funkcijo $F(x)$. Vemo, da F_n ustreza diskretni porazdelitvi

$$\begin{pmatrix} \dots & \frac{k}{n} & \frac{k+1}{n} & \frac{k+2}{n} & \dots \\ \dots & F(\frac{k}{n}) - F(\frac{k-1}{n}) & F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) & F(\frac{k+2}{n}) - F(\frac{k+1}{n}) & \dots \end{pmatrix}.$$

Izkaže se, da $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ povsod kjer je F zvezna, ampak dokaz presega obseg tega dela. Interesirani bralec ga lahko najde v [4] (moram dobiti dejansko referenco).

2.3. **Panjerjeva rekurzivna shema.** Poglejmo si popularno metodo za računaje sestavljene Poissonove porazdelitve v praksi. Kot smo videli v zgledu 2.3, je računanje eksplicitne porazdelitve S v končni obliki v splošnem nemogoče. Izkaže pa se, da jo je v posebnih primerih vselej mogoče rekurzivno izraziti in ustrezno posplošiti na širši razred porazdelitev.

Trditev 2.11. *(Panjer) Naj bo N diskretna slučajna spremenljivka, za katero velja*

$$\mathbb{P}(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) \mathbb{P}\left(N = n-1\right) \quad \textit{za } n \in \mathbb{N} \textit{ in } a, b \in \mathbb{R}.$$

Naj bo $X_1, X_2, \dots$ zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki zavzemajo vrednosti v $\mathbb{N}_0$. Potem za $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ velja

$$\mathbb{P}\left(S = 0\right) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(N = 0\right), & \textit{če } \mathbb{P}(X_1 = 0) = 0, \\ \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right)^N\right], & \textit{sicer,} \end{cases}$$

in za $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\mathbb{P}\left(S = n\right) = \frac{1}{1 - a\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right)} \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}\left(X_1 = k\right) \mathbb{P}\left(S = n-k\right). \tag{2}$$

Dokaz. Prvo se osredotočimo na primer $n = 0$. Velja

$$\mathbb{P}\left(S = 0\right) = \mathbb{P}\left(N = 0\right) + \mathbb{P}\left(S = 0, N > 0\right).$$

Če velja $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$, je enakost očitna. Če velja $\mathbb{P}(X_1 = 0) > 0$, po zakonu za popolno pričakovano vrednsot računamo

$$\mathbb{P}\left(S = 0\right) = \mathbb{P}\left(N = 0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(S = 0, N > 0 \mid N = k\right) \mathbb{P}\left(N = k\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = 0)\, \mathbb{P}(N=k) \\
&= \mathbb{P}(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = 0)^k\, \mathbb{P}(N=k) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(X_1 = 0)^N\right].
\end{aligned}
$$

Za $n \in \mathbb{N}$ velja

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\, \mathbb{P}(N=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(N=k-1). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Če sedaj upoštevamo, da so X_i neodvisne in enako porazdeljene, opazimo, da velja

$$
1 = \mathbb{E}\left[\frac{S_k}{S_k} \,\middle|\, S_k\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[\frac{X_i}{S_k} \mid S_k\right] = k\mathbb{E}\left[\frac{X_1}{S_k} \mid S_k\right],
$$

torej je

$$
\mathbb{E}\left[\frac{X_1}{S_k} \,\middle|\, S_k\right] = \frac{1}{k}
$$

in posledično

$$
\mathbb{E}\left[a + \frac{bX_1}{n} \,\middle|\, S_k = n\right] = a + \frac{b}{k}. \qquad (4)
$$

Nadaljno velja

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[a + \frac{bX_1}{n} \,\middle|\, S_k = n\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(a + \frac{bi}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i \mid S_k = n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(a + \frac{bi}{n}\right) \frac{\mathbb{P}(X_1 = i, S_k - X_1 = n-i)}{\mathbb{P}(S_k = n)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(a + \frac{bi}{n}\right) \frac{\mathbb{P}(X_1 = i)\, \mathbb{P}(S_{k-1} = n-i)}{\mathbb{P}(S_k = n)} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Če sedaj vstavimo enakost (4) v (3) in upoštevamo (5), dobimo

$$
\mathbb{P}(S=n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(a + \frac{bi}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i)\, \mathbb{P}(S_{k-1} = n-i)\, \mathbb{P}(N=k-1).
$$

Po Tonellijevem izreku (5.12) lahko zamenjamo vrstni red integracije, da dobimo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=n) &= \sum_{i=0}^{n} \left(a + \frac{b}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{k-1} = n-i)\, \mathbb{P}(N=k-1) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(a + \frac{b}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i)\, \mathbb{P}(S = n-i).
\end{aligned}
$$

Izpostavimo prvi člen vsote in izraz preoblikujemo.

$$\mathbb{P}(S=n) = a\mathbb{P}(X_1=0)\,\mathbb{P}(S=n) + \sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{b}{n}\right)\mathbb{P}(X_1=i)\,\mathbb{P}(S=n-i),$$
$$\mathbb{P}(S=n) = \frac{1}{1-a\mathbb{P}(X_1=0)}\sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{b}{n}\right)\mathbb{P}(X_1=i)\,\mathbb{P}(S=n-i).$$

S tem je trditev dokazana. □

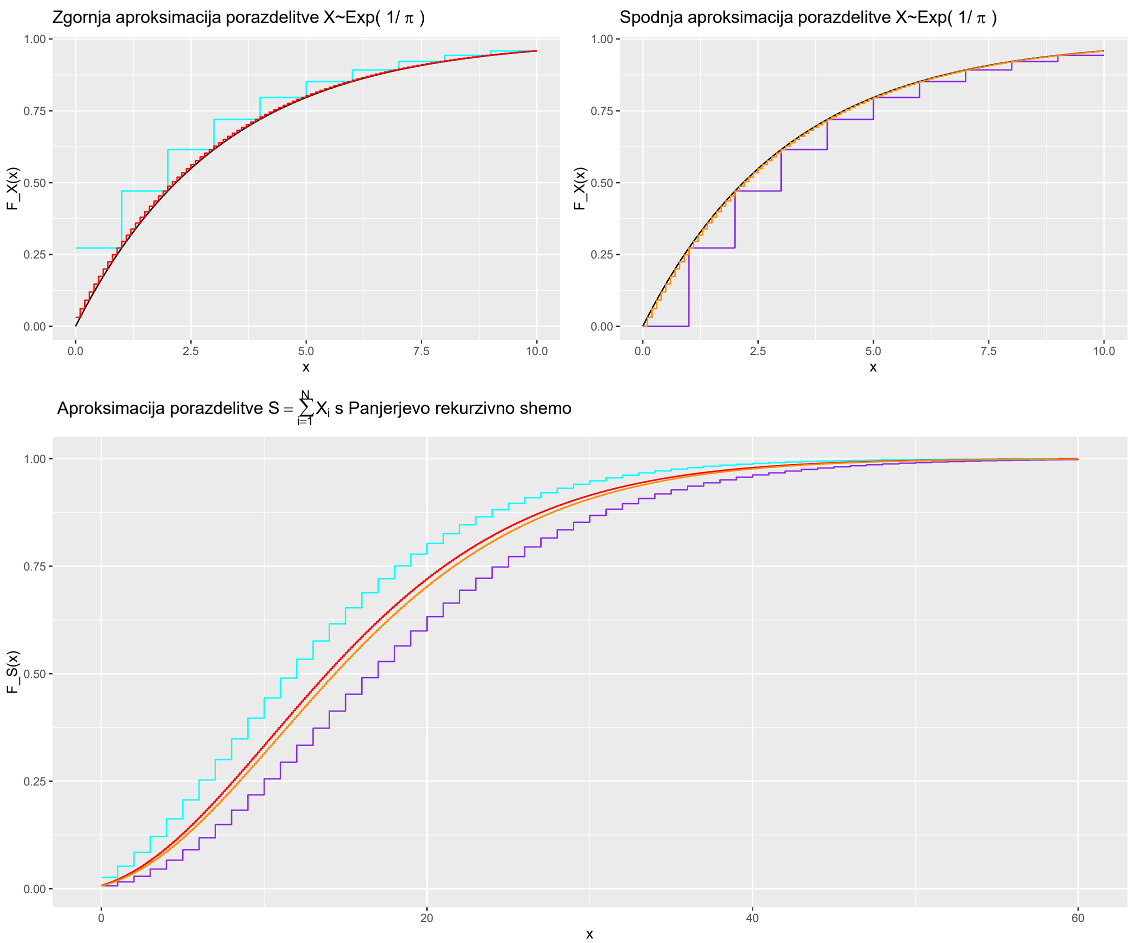
Opomba 2.12. Izkaže se, da le 3 porazdelitve ustrezajo pogojem iz trditve 2.11. Te so Pois(λ), Bin(p) in NegBin(r,p). Pravimo jim *porazdelitve Panjerjevega razreda.* V primeru $N \sim$ Pois(λ) za $n \in \mathbb{N}$, $a = 0$ in $b = \lambda$ velja $\mathbb{P}(N=n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \left(0+\frac{\lambda}{n}\right)\mathbb{P}(N=n-1)$. Tudi v ostalih primerih se izkaže, da je $a < 1$, tako da je enačba (2) res dobro definirana.

Opomba 2.13. Zahtevo, da X_i zavzemajo vrednosti v $\mathbb{N}_0$ lahko sprostimo. V resnici lahko zahtevamo le, da X_i zavzemajo vrednosti v $h\mathbb{N}_0$ za nek $h > 0$. V tem primeru zapišemo $S = h\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i}{h}$ in tako rekurzivna zveza velja za $\frac{S}{h}$. Tako lahko kot v ideji opombe 2.10 aproksimiramo splošne slučajne spremenljivke, ki zavzemajo vrednsoti v $[0,\infty)$, poljubno natančno.

Zgled 2.14. (Nadaljevanje zgleda 2.3) Recimo, da imamo konkretni porazdeltivi $N \sim$ Pois(9) in $X_i \sim$ Exp($\frac{1}{\pi}$). Podobno kot v opombi 2.10 s stopničastima funkcijama F_h^u in F_h^l aproksimiramo porazdelitveno funkcijo F_{X_1} za različne vrednosti $h \in \{1,\ 0,1\}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $F_h^u(x) = F_{X_1}((n+1)h)$ za $x \in \big[nh,(n+1)h\big)$ in $F_h^l(x) = F_{X_1}(nh)$ za $x \in \big[nh,(n+1)h\big)$. S Panjerjevo rekurzivno shemo izračunamo približke porazdelitve S na intervalu $[0,60]$. Rezulate prikažemo na sliki 3.

◇

Vidimo, da že za $h = 0,1$ dobimo zelo natančno aproksimacijo porazdelitve. Danes Panjerjeva metoda predstavlja alternativo Monte Carlo metodam. Njena glavna prednost je, da z manjšanjem koraka h dosežemo poljubno natančno točno aproksimacijo neke porazdelitve. Monte Carlo metode so bolj splošne, saj temeljijo zgolj na ponavljanju simulacij in se lahko uporabljajo za modeliranje bolj zapletenih porazdelitev, ki ne zadovoljujejo pogojev trditve 2.11.



SLIKA 3. Aproksimacija porazdelitve S s Panjerjevo rekurzivno shemo.

3. SESTAVLJENI POISSONOV PROCES

Razdelek je prirejen po [1], [2], in [3].

Pokažemo, da ima sestavljeni Poissonov proces neodvisne in stancionarne prirastke. Markiranje, pokazemo da spada v sirsi razred slucajnih procesov t.i. Levijevih procesov.

Definicija 3.1. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Naj bo $(X_i)_{i\geq 1}$ zaporedje neodvisnih (med sabo in $(N_t)_{t\geq 0}$) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Potem je *sestavljeni Poissonov proces* $(S_t)_{t\geq 0}$ definiran kot družina slučajnih spremenljivk

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0.$$

Opomba 3.2. Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces naravna posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$ za vsak i, je to ravno $HPP(\lambda)$. Bolj v splošnem, če je $X_i = \alpha$ deterministična funkcija, potem velja $S_t = \alpha N_t$.

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$ označevali s $HPP(\lambda)$ ali naborom slučajnih spremenljivk $(N_t)_{t\geq 0}$ (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s CPP ali naborom slučajnih spremenljivk $(S_t)_{t\geq 0}$ (angl. Compound Poisson Process), kjer bo vsota sledila $HPP(\lambda)$.

3.1. **Osnovne lastnosti.** Kot smo nakazali v uvodu dela, nas pri študiranju slučajnih procesov najprej zanimajo osnovne lastnosti s katerimi je lažje delati kot z neštevnim naborom slučajnih spremenljivk in s pomočjo katerih lahko pokažemo globje rezultate o procesu.

Trditev 3.3. *Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in naj velja $X_0 = 0$ s.g. Potem ima $(X_t)_{t\geq 0}$ neodvisne prirastke natanko tedaj, ko je za vsak nabor števil $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \infty$ prirastek $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od slučajnega vektorja $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.*

Dokaz. $(\Leftarrow)$: Recimo, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ in poljuben nabor števil $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \infty$ prirastek $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od slučajnega vektorja $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. Potem je $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen tudi od $h(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ za poljubno merljivo funkcijo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Očitno je $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \mapsto (X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ taka funkcija, torej je $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od $(X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$. Ker to velja za poljuben n in poljubne t_i, sledi, da ima (X_t) neodvisne prirastke.
$(\Rightarrow)$: Recimo, da ima $(X_t)_{t\geq 0}$ neodvisne prirastke. Ker velja $X_0 = 0$ s.g., vemo, da je za poljuben $n \in \mathbb{N}$ in poljuben nabor števil $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \infty$ prirastek $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od $(X_0, X_{t_1} - X_0, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ in posledično neodvisen od $h(X_0, X_{t_1} - X_0, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ za poljubno merljivo funkcijo $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, ki jo definiramo na sledeč način:

$$\begin{aligned} h(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= (h_0, h_1, \ldots, h_n), \\ h_0 &= x_0, \\ h_1 &= x_0 + x_1, \\ &\vdots \\ h_n &= x_0 + x_1 + \cdots + x_n. \end{aligned}$$

Tako velja $h(X_0, X_{t_1} - X_0, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) = (X_0, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ in s tem je trditev dokazana.

$\square$

Trditev 3.4. *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Za nabor realnih števil $0 \leq t_1 < \ldots < t_{n+1} < \infty$ lahko slučajne spremeljivke $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = X_{N_{t_{i-1}+1}} + \cdots + X_{N_{t_i}}$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti X_i od X_j za $i \neq j$ in N_t. Naj bo $h > 0$ in $s < t$. Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima $N_{t+h} - N_{s+h}$ členov. Ker za HPP velja $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$, je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j \sim \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

□

Opomba 3.5. Podobno kot v opombi 2.2 za $k \in \mathbb{N}_0$ pogojno porazdelitev $S_t \mid \{N_t = k\}$ označimo s

$$S_{t,0} = 0 \quad \text{in} \quad S_{t,k} = \sum_{i=1}^{k} X_i \quad \text{za } k \in \mathbb{N},$$

Trditev 3.6. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP in naj bosta $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$ pričakovana vrednost in $\sigma^2 = Var[X_i] < \infty$ varianca slučajnih spremenljivk X_i. Potem sta za $t \geq 0$ pričakovana vrednost in varianca S_t enaki*

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu\lambda t \qquad \textit{in} \qquad Var[S_t] = \lambda t\left(\sigma^2 + \mu^2\right).$$

Dokaz. Definiramo slučajno spremenljivko

$$Y_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \tag{6}$$

in vidimo, da je za $t \geq 0$ S_t pogojno na $N_t = k$ enako porazdeljena kot Y_k. Tako dobimo

$$\mathbb{E}[S_t \mid N_t = k] = \mathbb{E}[Y_k] = k\mu \qquad \text{in} \qquad \mathrm{Var}[S_t \mid N_t = k] = \mathrm{Var}[Y_k] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$. Torej

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu\lambda t.$$

Prek formule $\mathrm{Var}[S_t] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_t \mid N_t]] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$ računamo

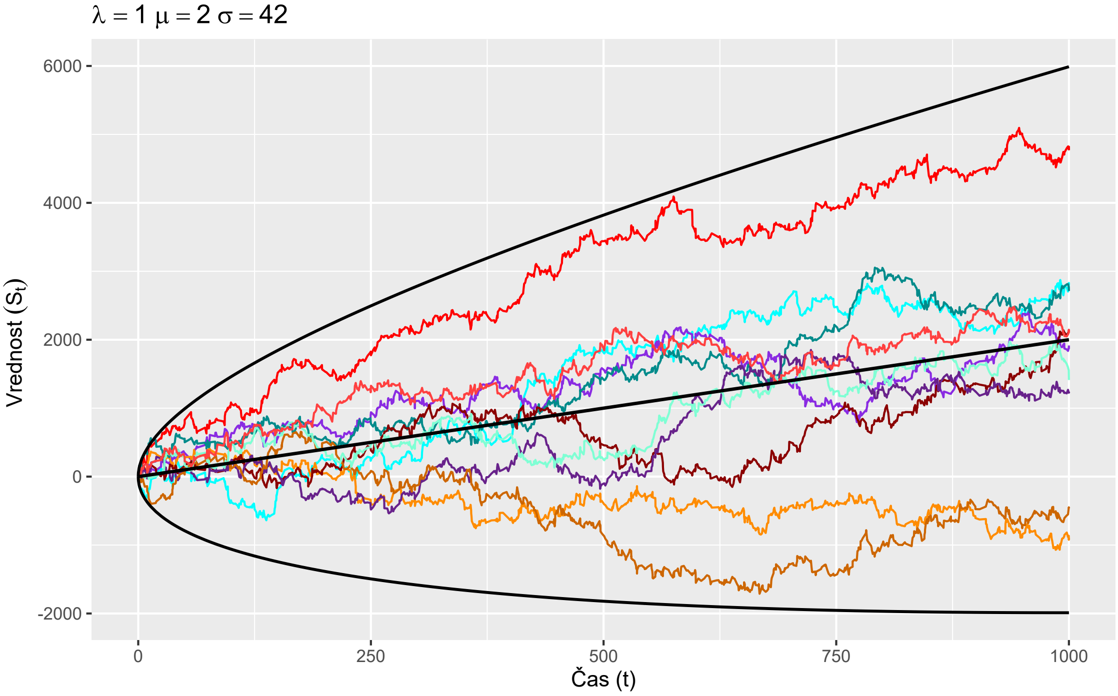
$$\mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_i]\, N_t] = \sigma^2\lambda t$$

in

$$\mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}[X_i]\, N_t] = \mu^2\lambda t.$$

Če enačbi sestejemo, dobimo $\mathrm{Var}[S_t] = \lambda t\,(\sigma^2 + \mu^2)$. □

Zgled 3.7. Poglejmo si primer ko je zaporedje $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ porazdeljeno kot $X_1 \sim N(2, 42)$ Tedaj za $t \geq 0$ velja $\mathbb{E}[S_t] = 2t$ in $\mathrm{Var}[S_t] = t(2^2 + 42^2) = 1768t$ ter $\sigma_{S_t} = \sqrt{1768t}$. Simuliramo 10 realizacij CPP do časa $T = 1000$, ki jih prikažemo na sliki 4 skupaj s funkcijama $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$ in $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$.



SLIKA 4. Trajektorije CPP s funckijama $t \mapsto \mathbb{E}\left[S_t\right]$ in $t \mapsto \mathbb{E}\left[S_t\right] \pm 3\sigma_{S_t}$

$\diamondsuit$

3.2. **Markiranje sestavljenega Poissonovega procesa.** Pokažimo obraten rezultat kot v trditvi 2.9, tako da s particijo časa in prostora slučajnh spremenljivk X_i razčlenimo CPP na več neodvisnih sestavljenih Poissonovih procesov.

Izrek 3.8. *(o markiranju CPP) Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP. Naj bo $A_1, \ldots,\ A_n$ disjunktna particija množice $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Potem so za fiksen $t \geq 0$ in $j = 1, \ldots, n$ slučajne spremenljivke*

$$S_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}\left(V_i, X_i\right) \tag{7}$$

med seboj neodvisne. Še več, za vsak $j = 1, \ldots, n$ ima

$$S_t^{(j)} \sim \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}\left(U_i, X_i\right)$$

sestavljeno Poissonovo porazdelitev, kjer je $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih (med sabo, N_t in $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk kot $U_1 \sim U\left([0, t]\right)$.

Dokaz. Za splošen HPP(λ) velja lasntost vrstilnih statistik (5.13), torej

$$\left(V_1, \ldots,\ V_k \mid N_t = k\right) \sim \left(U_{(1)}, \ldots,\ U_{(k)}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tako lahko za $j \in \{1, \ldots, n\}$ (7) pogojno na dogodek $\{N_t = k\}$ zapišemo kot

$$S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\} \sim \sum_{i=1}^{k} X_i \mathbb{1}_{A_j}\left(U_{(i)}, X_i\right).$$

Vrstni red sumandov je nepomemben, tako lahko z upoštevanjem neodvisnosti in enake porazdeljenosti $S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\}$ zapišemo kot

$$S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\} \sim \sum_{i=1}^{k} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i).$$

Sedaj si poglejmo skupno karakteristično funkcijo slučajnega vektorja $(S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(n)})$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_t^{(1)},\ldots,S_t^{(n)}}(u_1, \ldots, u_n) &= \mathbb{E}\left[\exp\left[iu_1S_1 + \cdots + iu_nS_n\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iu_1S_1 + \cdots + iu_nS_n\right] \mid N_t = k\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[\sum_{j=1}^{n} iu_j \sum_{i=1}^{k} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)\right]\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} iu_j X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)\right]\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left[\sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{n} iu_j X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)\right]\right].
\end{aligned}$$

Sedaj opazimo, da imamo v eksponentu sestavljeno Poissonovo vsoto, za katero poznamo obliko karakteristične funckcije. Če jo logaritmiramo dobimo

$$\begin{aligned}
&\log \varphi_{S_t^{(1)},\ldots,S_t^{(n)}}(u_1, \ldots, u_n) \\
&= \lambda t \left(\mathbb{E}\left[\exp\left[\sum_{j=1}^{n} is_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1)\right]\right] - 1\right) \\
&= \lambda t \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left(is_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1)\right)\right] - \left(1 - \mathbb{P}\left((U_1, X_1) \in A_j\right)\right)\right) - 1\right) \\
&= \lambda t \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left[\exp\left[is_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1)\right]\right] - 1\right) \qquad (8)
\end{aligned}$$

Vidimo, da je (8) ravno vsota logaritmov karakterističnih funkcij $\varphi_{S_t^{(j)}}$. Tako sledi, da so slučajne spremenljivke $S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(n)}$ neodvisne in po obliki karakteristične funckcije vidimo, da so res porazdeljene sestavljeno Poissonovo. □

Izrek o markiranju CPP ima vrsto uporabnih posledic. Direktno nam poda alternativen dokaz za neodvisnost in stacionarnost prirastkov CPP.

Posledica 3.9. *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Naj bo za $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ $A_1, \ldots, A_n$ disjunktna particija množice $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ defniriana kot

$$A_1 = [0, t_1) \times \mathbb{R}, \quad A_j = [t_{j-1}, t_j) \times \mathbb{R}, \quad \textit{za } j = 2, \ldots, n \textit{ in} \quad A_{n+1} = [t_n, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Potem so slučajne spremenljivke $S_{t_1}^{(1)}, \dots,\ S_{t_{n+1}}^{(n)}$ neodvisne in enako porazdeljene kot

$$S_{t_j}^{(j)} \sim \sum_{i=1}^{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}} X_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

□

Posledica 3.10. *Če v izreku o markiranju CPP 3.8 sprostimo t, so procesi $(S_t^{(j)})_{t\geq 0}$ med seboj neodivisni in imajo neodvisne prirastke.*

Dokaz. Prvo pokažimo, neodivsnot prirastkov za $(S_t^{(j)})_{t\geq 0}, j = 1, \dots, n$. Naj bodo $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ in $A_1, \dots,\ A_n$ disjunktna particija množice □

3.3. **Neskončna deljivost.** Koncept neskončne deljivosti je temeljni pri študiranju slučajnih procesov.

Definicija 3.11. Naj bo X slučajna spremenljivka. Pravimo, da je X *neskončno deljiva*, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstajajo neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \dots, X_n$ tako, da velja

$$X \sim X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Ekvivalento lahko definiramo neskončno deljivost prek karakteristične funkcije. Pravimo, da je slučajna spremenljivka X neskončno deljiva, če je za vsak $n \in \mathbb{N}$ funkcija $(\varphi_X(u))^{\frac{1}{n}}$ karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke.

Zgled 3.12. Naj bo $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Potem je X neskončno deljiva. To neposredno sledi iz lastnsoti, da za $n \in \mathbb{N}$ velja $X \sim Y_1 + \cdots + Y_n$ kjer so $Y_i \sim \text{Pois}(\frac{\lambda}{n})$ neodvisne enako porazdeljene. Ekvivalentno lahko neskončno deljivost pokažemo s karakteristično funkcijo. Za $n \in \mathbb{N}$ in $u \in \mathbb{R}$ velja $\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(u) = \varphi_X(u)^n$. Če vzamemo $X_i \sim \text{Pois}(\frac{\lambda}{n})$, potem je

$$\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(u) = (\varphi_{X_i}(u))^n = \left(e^{\frac{\lambda}{n}(e^{iu}-1)}\right)^n = e^{\lambda(e^{iu}-1)} = \varphi_X(u).$$

♢

Sedaj pokažimo, da je sestavljena Poissonova porazdelitev neskončno deljiva, še več, pokažimo, da če je S neskončno deljiva slučajna spremenljivka in zavzema vrednosti v $\mathbb{N}_0$, potem ima sestavljeno Poissonovo porazdelitev.

Trditev 3.13. *Naj bo S slučajna spremenljivka, porazdeljena sestavljeno Poissonovo s parametrom $\lambda > 0$. Potem je S neskončno deljiva.*

Dokaz. Zapišimo $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, kjer so X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenjivke s skupno karakteristično funkcijo $\varphi_X(u)$ in $N \sim \text{Pois}(\lambda)$. Iz trditve 2.4 vemo, da je karakteristična funkcija S za $u \in \mathbb{R}$ enaka

$$\varphi_S(u) = \varphi_N(\varphi_X(u)) = e^{\lambda(\varphi_X(u)-1)}.$$

Potem za $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\varphi_S(u) = \left(e^{\frac{\lambda}{n}(\varphi_X(u)-1)}\right)^n$$

in vidimo, da je fukcija $u \mapsto e^{\frac{\lambda}{n}(\varphi_X(u)-1)}$ karakteristična funckija slučajne spremenljivke $S_i = \sum_{i=1}^{M} X_i$ kjer je $M \sim \text{Pois}(\frac{\lambda}{n})$. □

Trditev 3.14. *Naj bo S slučajna spremenljivka, ki zavzame vrednosti v $\mathbb{N}_0$ in je neskončno deljiva. Potem ima S sestavljeno Poissonovo porazdelitev.*

Dokaz. Označimo rodovno funkcijo S z

$$G_S(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S=k)}_{p_k} u^k.$$

Pokazali bomo, da je $G_S(u)$ enaka rodovni funkciji neke slučajne spremenljivke, ki ima sestavljeno Poissonovo porazdelitev. Ker za nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke velja $\mathbb{P}(S=k) = \frac{G_S^{(k)}(0)}{k!}$, bo to pomenilo, da je S sestavljeno Poissonova, saj v tem primeru rodovna funkcija določa porazdelitev S. Ker je S neskončno deljiva potem je za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$G_{S_n}(u) := (G_S(u))^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S_n=k)}_{p_{k_n}} u^k$$

rodovna funkcija neke slučajne spremenljivke S_n in za vsak $u \in \mathbb{R}$ velja enakost

$$G_{S_n}(u) = (G_{S_1}(u))^n \text{ oziroma } \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{k_n} u^k\right)^n.$$

Če razširimo desno stran enače in predpostavimo $p_0 = 0$, dobimo, da bmora biti $p_{0_n} = 0$ in posledično tudi $p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = 0$. Ker to velja za poljuben $n \in \mathbb{N}$ dobimo, da je $G_S(u) = 0$, kar pa je protislovje. Torej $p_0 > 0$ in zagotovo $G_S(u) > 0$ za $u \in [0,1]$. Velja $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{G_S(u)}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ za $t \in [0,1]$. Velja $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$$\ln\left(\left(\frac{G_S(u)}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(1 + \left(\left(\frac{G_S(u)}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right) \approx \left(\frac{G_S(u)}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \text{ ko } n \to \infty.$$

Za $u = 1$ dobimo

$$\ln\left(\left(\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \approx \left(\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} - 1 \text{ ko } n \to \infty.$$

□

Sedaj trditev 3.14 nadgradimo…

Trditev 3.15. *Naj ima slučajna spremenljivka S neskončno deljivo porazdelitev. Potem lahko S zapišemo izrazimo kot limito slučajni spremenljivk, ki imajo sestavljeno Poissonovo porazdelitev.*

Definicija 3.16. (Lévijev proces) Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ stohastični proces. Pravimo, da je $(X_t)_{t\geq 0}$ Lévijev proces, če velja

(1) $X_0 = 0$ skoraj gotovo,
(2) $(X_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne prirastke,
(3) $(X_t)_{t\geq 0}$ je stacionaren, torej ima enako porazdelitev za vsak $t \geq 0$.

4. Cramér-Lundbergov model

Razdelek je prirejen po [3], [4], [5] in [9].

V tem razdelku obravnavamo najbolj intenzivno raziskan model v teoriji propada, običajno imenovan Cramér-Lundbergov model. V svoji najosnovnejši obliki ga je v zgodnjih 1900. letih izpeljal švedski aktuar Filip Lundberg, da bi ocenil ranljivost zavarovalnice za propad. Čeprav je model v svoji ideji dokaj preprost, zajema bistvo povezave ravni rezerv zavarovalnice in njene izpostavljenosti tveganju, kar je razlog, zakaj je postal temeljni merilni model v teoriji propada. V preteklem stoletju je bilo razvitih veliko tehnik za analizo Cramér-Lundbergovega modela, ki so se večinoma osredotočale na kvantifikacijo verjetnosti propada zavarovalnice. V razdelku definiramo model in izpeljemo Lundbergovo neenakost ter asimptotično obnašanje verjetnosti propada v primeru, ko zavarovalniške zahtevke modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. V zgledih pokažemo, kako do rezulatov, ki nam jih zagotvalja teorija pridemo v praksi z Monte Carlo simulacijami procesa tveganja.

4.1. **Proces tveganja in verjetnost propada.**

Definicija 4.1. Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP, kjer so slučajne spremenljivke $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ki jih seštevamo s.g. nenegativne. *Proces tveganja* v Cramér-Lundbergovem modelu definiramo kot

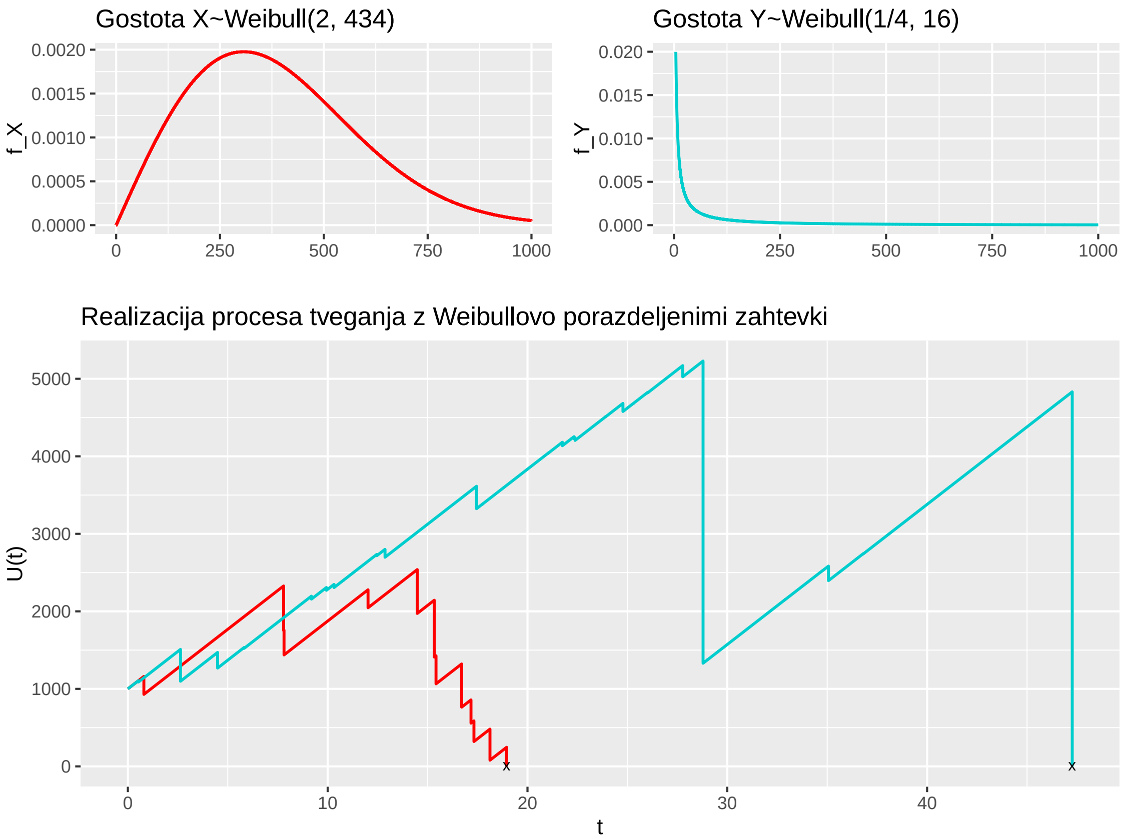
$$U_t = u + p(t) - S_t,$$

kjer je $u \geq 0$ začetni kapital zavarovalnice in $p(t)$ funkcija prihodkov iz premij.

Opomba 4.2. V resnici lahko veliko lastnosti procesa tveganja izpeljemo brez da predpostavimo, da prihodi zahtevkov v $(S_t)_{t\geq 0}$ sledijo homogenem Poissonovemu procesu, ampak splošnem prenovitvenemu procesu (5.16). Zato bomo pri dokazovanju nekaterih rezultatov medprihodne čase zahtevkov T_i obravnavali v splošnem, brez da bi predpostavili, da so eksponentno porazdeljeni.

Vrednost U_t predstavlja kapital zavarovalnice ob času $t \geq 0$. Standardno je za $p(t)$ vzeti deterministično funkcijo $p(t) = ct$, kjer je $c > 0$ stopnja prihodkov premij. Uporaba linearne funkcije za modeliranje premijskega dohodka v Cramér-Lundbergovem modelu ponuja realističen približek zato, ker zavarovalnice pogosto doživljajo stabilno povečevanje premijskega dohodka skozi čas. Poleg tega je izbira linearne funkcije preprosta, zato bomo v nadaljevanju privzeli $p(t) = ct$. Poglejmo si realizaciji procesa tveganja, ko so zahtevki X_i porazdeljeni Weibullovo (5.3) z različnimi parametri.

Zgled 4.3. Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu z začetnim kapitalom $u = 1000$ in $p(t) = 200t$ ter intenzivnostjo prihodov zahtevkov $\lambda = 1$. Naj bodo v prvem primeru (rdeča) zahtevki porazdeljeni kot $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$ in v drugem primeru (modra) kot $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$.



Slika 5. Realizaciji procesa tveganja

Pri obeh realizacijah vidimo, da proces tveganja v nekem trenutku pade pod 0 (tam ga tudi ustavimo). Čeprav je pričakova vrednost $\mathbb{E}\left[Y_i\right] = 384 \approx \mathbb{E}\left[X_i\right] = 217\sqrt{\pi} \approx 384,62$ opazimo bistveno razliko med realizacijama. V rdečem primeru proces pade pod 0 po več zaporednih manjših izgubah, v modrem primeru pa po eni zelo veliki izgubi. V nadaljevanju bomo primera ločili, ampak pred tem definirajmo osnovne pojme, ki jih bomo obravnavali v razdelku.

$\diamondsuit$

Definicija 4.4. *Propad* definiramo kot dogodek, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ kadarkoli pade pod 0. Torej

$$\left\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\right\}$$

in času ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\},$$

pravimo *čas propada*. Seveda velja enakost med dogodkoma

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} = \{T < \infty\}.$$

Definicija 4.5. *Verjetnost propada* je definirana kot funckija $\psi(u) : (0, \infty) \to [0, 1]$ podana s predpisom

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty \mid U_0 = u).$$

Definicija 4.6. Po konstrukciji procesa tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ je verjentost propada mogoča le ob prihodih zahtevkov. Z V_n označimo čas n-tega prihoda in definiramo *ogrodje procesa tveganja* kot $(U_{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Trditev 4.7. *Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu in $(U_{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$ njegovo ogrodje ter $T_n := V_n - V_{n-1}$ medpirhodni čas n-tega zahtevka ($V_0 = T_0 = 0$). Potem velja*

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ komulativna izguba po n prihodih in $Y_i = X_i - cT_i$ izguba i-tega prihoda.

Dokaz. S pomočjo ogrodja procesa tveganja lahko dogodek propada zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} &= \left\{\inf_{t\geq 0} U_t < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} U_{V_n} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{u + p(V_n) - S_{V_n}\} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \Big\{u + \underbrace{cV_n - \sum_{i=1}^n X_i}_{-Z_n}\Big\} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{-Z_n\} < -u\right\} \\
&= \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right\},
\end{aligned}$$

kar nam da željeno enakost. □

Tako verjetnost propada prevedemo na prehodno verjetnost diskretnega slučajnega sprehoda $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo asimptotično vedenje $\psi(u)$, ko gre $u \to \infty$. Cilj obravnavanja verjetnosti propada v Cramér-Lundbergovem modelu je, da se izognemo skoraj gotovemu propadu oziroma, da je verjetnost, da komulativna izguba $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ preseže u tako majhna, da lahko v praksi dogodek propada izključimo.

Trditev 4.8. *Naj bo $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk definirano kot $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke Y_i z $\mathbb{E}[Y_i] < \infty$. Če velja $\mathbb{E}[Y_i] \geq 0$, potem za vsak $u > 0$ velja*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

Dokaz. Zaporedje slučajnih spremenljivk $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zadošča predpostavkam krepkega zakona velikih števil (5.7), torej velja

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots Y_n}{n} = \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mathbb{E}[Y_n].$$

Torej bo Z_n v primeru ko je $\mathbb{E}[Y_n] > 0$ skoraj gotovo asimptotično linearno naraščal proti ∞ kot $\mathbb{E}[Y_n]\, n$ in bo za poljuben $u > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

Dokaz za primer, ko je $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ je precej bolj tehničen in ne preveč informativen, zato ga bomo izpustili. Izkaže se, da obstajata neki podzaporedji$(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, da $Z_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{s.g.} \infty$ in $Z_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{s.g.} -\infty$. Dokaz lahko najdemo v [6]. □

Opomba 4.9. Iz trditve 4.8 (ob predpostavkah $\mathbb{E}[X_i] < \infty$ in $\mathbb{E}[T_i] < \infty$) sledi, da moramo premijo (in s tem c) izbrati tako, da bo $\mathbb{E}[Y_i] < 0$, saj bo tako $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} -\infty$ in je to edini primer, ko lahko upamo, da verjetnost propada ne bo enaka 1.

Definicija 4.10. Pravimo, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ v Cramér-Lundbergovem modelu zadošča *pogoju neto zaslužka* (ang. *net profit condition*), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]}, \quad \text{oziroma} \quad c = (1+\rho)\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} \quad \text{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljenvanju imenovali NPC.

Zahteva NPC za analizo poslovanja zavarovalnice je kar intuitivna, saj pove, da mora biti v nekem časovnem intervalu pričakovan dohodek iz premij večji od pričakovanega izplačila zahtevkov.

Definicija 4.11. Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *lahkorepo porazdelitev*, če za nek $\varepsilon > 0$ velja

$$\mathbb{E}\left[e^{uX}\right] = M_X(u) < \infty \quad \text{za } u \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Sicer $M_X(u)$ obstaja le za $u \in (-\infty, 0]$ in pravimo, da ima X *težkorepo porazdelitev.*

Zgled 4.12 (Nadaljevnaje zgleda 4.3)**.** V zgledu 4.3 smo obravnavali proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, kjer so zahtevki (rdeča) $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$ in (modra) $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$. Opazili smo, da je v prvem primeru propad posledica več manjših izgub, v drugem pa ene velike izgube. To je značilnost težkorepih porazdelitev in za Weibullovo porazdelitev velja, da ima za parameter $a \geq 1$ lahek, za $a < 1$ pa težek rep.

Dokaz. Momentno rodovna funkcija $X \sim \text{Weibull}(a, b)$ je enaka

$$\begin{aligned} M_X(u) &= \int_0^\infty e^{ux}\frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} dx \qquad \left(y = \tfrac{x}{b},\ dy = \tfrac{dx}{b}\right) \\ &= a\int_0^\infty e^{uby}y^{a-1}e^{-y^a}dy. \end{aligned}$$

Vidimo, da v 0 ni težav za poljuben $a > 0$, ampak za $a \in (0,1)$ v neskončnosti funkcija divergira, saj se eksponent poenostavi v $y^a(uby^{1-a} - 1) \xrightarrow{y\to\infty} \infty$.Če v nadaljevanju predpostavimo $a \geq 1$ in uvedemo $z = y^a$ $\left(dz = ay^{a-1}dy\right)$ pa lahko pridemo do lepe oblike za momentno rodovno funkcijo X.

$$M_X(u) = \int_0^\infty e^{ubz^{\frac{1}{a}}}e^{-z}dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(ubz^{\frac{1}{a}})^k}{k!} e^{-z} dz && \text{Tonelli (5.12)} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \int_0^\infty z^{\frac{k}{a}} e^{-z} dz \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right).
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

4.2. **Lahkorepe porazdelitve.** Od sedaj naprej bomo predpostavili, da je $(S_t)_{t\geq 0}$ v procesu tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ CPP. Najprej se bomo omejili na primer, ko ima porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i, ki jih seštevamo v CPP lahek rep, saj je bila osnovna teorija, ki sta jo razvila Cramér in Lundberg, izpeljana pod to predpostavko.

4.2.1. *Lundbergova neenakost.*

Opomba 4.13. V praksi z lahkorepnimi porazdelitvami modeliramo zahtevke, kjer verjentosti ekstremnih dogodkov (torej zelo velikih zahtevkov) eksponentno pada proti 0. To neposredno sledi iz definicije 4.11 in neenakosti Markova (5.6), saj za vsak $x > 0$ in $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ velja

$$
\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}\left(e^{uX} > e^{ux}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{uX}\right]}{e^{ux}}.
$$

Definicija 4.14. Naj velja, da ima slučajna spremenljivka $Y_1 = X_1 - cT_1$ iz trditve 4.7 lahek rep. Če obstaja enoličen $\ell > 0$ za katerega velja

$$
M_{Y_1}(\ell) = 1,
$$

potem ℓ pravimo *Lundbergov koeficient.*

Trditev 4.15. *Če Lundbergov koeficient ℓ (pod predpostvakami definicije 4.14 in pogoja NPC) obstaja, potem je enolično določen.*

Dokaz. Ker ima Y_1 lahek rep, obstaja $\varepsilon > 0$, da je $M_{Y_1}(u) < \infty$ za $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Ker velja $M_{Y_1}(0) = 1$ in $M'_{Y_1}(0) = \mathbb{E}[Y_1] < 0$ (zaradi pogoja NPC) ter $M''_{Y_1}(u) = \mathbb{E}\left[Y_1^2 e^{Y_1 u}\right] > 0$ ($Y_1 \neq 0$ skoraj gotovo) za $u > 0$, je $M_{Y_1}(u)$ zvezna konveksna funkcija na intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kjer v okolici ničle pada. Po predpostavki obstaja $\ell > 0$, da je $M_{Y_1}(\ell) = 1$, ki pa je zaradi konveksnosti funkcije enolično določen. $\square$

Izrek 4.16. *(Lundbergova neenakost) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošca NPC in naj zanj obstaja Lundebrgov koeficient ℓ. Potem za vsak $u > 0$ velja*

$$
\psi(u) \leq e^{-\ell u}.
$$

Dokaz. Neenakost bomo dokazali z indukcijo. Za $u > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$
\psi_n(u) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Z_k > u\right)
$$

in vidimo, da je (po zveznosti $\mathbb{P}$ od spodaj) $\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u)$, torej moramo pokazati, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\psi_n(u) \leq e^{-\ell u}$.
(n = 1): Uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$\psi_1(u) = \mathbb{P}\left(e^{\ell Z_1} > e^{\ell u}\right) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = e^{-\ell u}.$$

(n → n+1): S F_{Y_1} označimo porazdeliltev Y_1. Potem velja

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n+1} Z_k > u\right)\\ &= \underbrace{\mathbb{P}\left(Y_1 > u\right)}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{P}\left(\max_{2\leq k\leq n+1} \{Y_1 + (Z_k - Y_1)\} > u, Y_1 \leq u\right)}_{(ii)}\end{aligned}$$

Najprej se posvetimo (ii). Po indukcijski predpostavki velja

$$\begin{aligned}(ii) &= \int_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} \{x + Z_k\} > u\right) dF_{Y_1}(x)\\ &= \int_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Z_k > u - x\right) dF_{Y_1}(x)\\ &= \int_{(-\infty,u]} \psi_n(u-x) dF_{Y_1}(x)\\ &\overset{\text{I.P.}}{\leq} \int_{(-\infty,u]} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).\end{aligned}$$

Za oceno (i) kot v primeru $n = 1$ uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$(i) = \psi_1(u) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = \int_{(u,\infty)} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).$$

Če torej seštejemo (i) in (ii) dobimo željeno oceno

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x)\\ &= e^{-\ell u} M_{Y_1}(\ell)\\ &= e^{-\ell u}.\end{aligned}$$

□

Opomba 4.17. Iz izreka 4.16 je razvidno, da z dovolj visokim začetnim kapitalom u verjetnost propada lahko v praksi zadovoljivo omejimo blizu 0. Seveda je meja odvisna tudi od Lundbergovega koeficienta ℓ in krepko temelji na predpostavki lahkorepnih porazdelitev, ki pa v praksi pogosto niso izpolnjene.

Zgled 4.18. Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja da so zahtevki neodvisno eksponentno porazdeljeni s parametrom $\mu > 0$, torej $X_i \overset{\text{n.e.p.}}{\sim} \text{Exp}(\mu)$ za vsak i. Vemo, da ima momentno rodovna funkcija X_i obliko

$$M_{X_i}(u) = \frac{\mu}{\mu - u} \text{ za } u < \mu.$$

Tako dobimo, da ima momentno rodovna funkcija $Y_1 = X_1 - cT_1$ obliko

$$M_{Y_1}(u) = M_{X_1}(u)M_{T_1}(-cu) = \frac{\mu}{\mu - u}\frac{\lambda}{\lambda + cu} \text{ za } u \in (-\tfrac{\lambda}{c}, \mu).$$

Sedaj lahko izračunamo Lundbergov koeficient ℓ

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(\ell) &= 1, \\ \frac{\mu}{\mu - \ell}\frac{\lambda}{\lambda + c\ell} &= 1, \\ \mu\lambda &= (\mu - \ell)(\lambda + c\ell), \\ \mu\lambda &= \mu\lambda - \ell\lambda + \mu c - c\ell^2, \\ 0 &= \mu c - c\ell - \lambda. \end{aligned}$$

Dobimo

$$\ell = \mu - \frac{\lambda}{c}. \tag{9}$$

Velja $\ell \in (0, \mu)$, saj v našem modelu velja pogoj NPC,

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} = \frac{\lambda}{\mu} < c \iff \mu > \frac{\lambda}{c}.$$

Če uporabimo alternativno formulacijo NPC pogoja, dobimo

$$c = (1+\rho)\frac{\lambda}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \ell = \mu - \frac{\lambda}{(1+\rho)\frac{\lambda}{\mu}} = \mu\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right). \tag{10}$$

Tako dobimo zgornjo mejo za verjetnost propada

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u} = e^{-\mu u\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)}$$

in vidimo, da povečanje stopnje prihodkov premij čez neko mejo ne bistveno vpliva na oceno, saj

$$\lim_{\rho\to\infty} e^{-\mu u\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)} = e^{-\mu u}.$$

V nadaljevanju bomo videli, da je Lundbergova neenakost v primeru eksponentno porazdeljenih zahtevkov skoraj točna vrednost verjetnosti propada, zgrešena le za konstanto. V splošnem pa je zelo težko določiti Lunbergov koeficient kot funkcijo parametrov porazdelitev X_1 in T_1 in zato uporabljamo numerične metode za njegovo aproksimacijo kot na primer Monte Carlo simulacije. $\diamondsuit$

4.2.2. *Asimptotika verjetnosti propada.* Sedaj se posvetimo vprašanju, kako se obnaša verjetnost propada v Cramér-Lundbergovem modelu, ko gre $u \to \infty$ in izpeljemo enega temeljnih rezultatov v teoriji tveganja.

Definicija 4.19. Za lažjo notacijo v nadaljevanju definiramo funkcijo *verjentosti preživetja* kot $\theta(u) : (0, \infty) \to [0, 1]$ s predpisom

$$\theta(u) = \mathbb{P}\left(T = \infty \mid U_0 = u\right) = 1 - \psi(u).$$

Lema 4.20. *(Integralska enačba za verjetnost preživetja) Naj bo* $(U_t)_{t\geq 0}$ *proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj velja* $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ *ter, da imajo slučajne spremenljivke* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *gostoto. Potem* $\theta(u)$ *zadošca naslednji enakosti*

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1+\rho)\mathbb{E}[X_1]}\int_{(0,u]}\big(1 - F_{X_1}(x)\big)\theta(u-x)dx. \tag{11}$$

Dokaz. Po trditvi 4.7 velja

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ in $Y_i = X_i - cT_i$. Torej je

$$\begin{aligned}
\theta(u) &= \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \leq u\right) \\
&= \mathbb{P}\Big(\big\{Z_n \leq u \mid n \in \mathbb{N}\big\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\big\{Y_1 \leq u\big\} \cap \big\{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \mid n \geq 2\big\}\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{Y_1 \leq u\}}\mathbb{P}\Big(\big\{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \mid n \geq 2\big\} \;\Big|\; Y_1\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je $Y_1 = X_1 - cT_1$ in je torej dogodek $\{Y_1 \leq u\}$ enak dogodku $\{X_1 \leq u + cT_1\}$. Poleg tega velja, da je $(Z_n - Y_1)_{n\geq 2} \sim (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, saj so Y_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Upoštevamo še, da je T_1 medprihodni čas v $HPP(\lambda)$ da dobimo

$$\begin{aligned}
\theta(u) &= \int_{(0,\infty)}\int_{(0,u+ct]} \mathbb{P}\Big(\big\{Z_n \leq u - (x - ct) \mid n \in \mathbb{N}\big\}\Big)dF_{X_1}(x)dF_{T_1}(t) \\
&= \int_{(0,\infty)}\int_{(0,u+ct]} \theta(u - x + ct)dF_{X_1}(x)\lambda e^{-\lambda t}dt.
\end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko $z = u + ct$ $\big($torej $t = \frac{z-u}{c}$ in $dt = \frac{dz}{c}\big)$ in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda u}{c}}\int_{(u,\infty)} e^{-\frac{\lambda z}{c}} \underbrace{\int_{(0,z)} \theta(z-x)dF_{X_1}(x)}_{g(z)}\, dz.$$

Ker ima porazdelitev F_{X_1} gostoto in je θ zvezna omejena funkcija, je funkcija $g(z)$ zvezna in jo lahko (po osnovnem izreku analize) odvajamo da dobimo

$$\theta'(u) = \frac{\lambda}{c}\theta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,u)}\theta(u-x)dF_{X_1}(x).$$

Če sedaj obe strani integriramo po u dobimo

$$\int_{(0,t]} \theta'(u)du = \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(u)du - \overbrace{\frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \underbrace{\int_{(0,u]} \theta(u-x)dF_{X_1}(x)}_{(i)}\, du}^{(ii)}. \tag{12}$$

Na integralu (i) uporabimo per partes $\big(\alpha = \theta(u-x)$ in $d\beta = dF_{X_1}(x)\big)$ ter upoštevamo, da ima F_{X_1} gostoto.

$$\begin{aligned}
(i) &= \big(\theta(u-x)F_{X_1}(x)\big)\Big|_0^u + \int_{(0,u)} \theta'(u-x)F_{X_1}(x)dx \\
&= \theta(0)F_{X_1}(u) - \int_{(0,u)} \theta'(u-x)F_{X_1}(x)dx.
\end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $F_{X_1}(0) = 0$, saj je $X_1 > 0$ skoraj gotovo. Vstavimo (i) v (ii) in dobimo

$$(ii) = -\frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(0)F_{X_1}(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]}\int_{(0,u]} \theta'(u-x)F_{X_1}(x)dxdu.$$

Po Tonellijevem izreku (5.12) lahko zamenjamo vrstni red integracije.

$$\begin{aligned}
(ii) &= -\frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(0)F_{X_1}(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} F_{X_1}(x)\int_{[x,t]} \theta'(u-x)dudx \\
&= -\frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(0)F_{X_1}(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} F_{X_1}(x)\big(\theta(t-x) - \theta(0)\big)dx. \\
&= -\frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} F_{X_1}(x)\theta(t-x)dx.
\end{aligned}$$

Vstavimo (ii) v enačbo (12) in dobimo

$$\begin{aligned}
\theta(t) - \theta(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \theta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} F_{X_1}(x)\theta(t-x)dx, \\
\theta(t) &= \theta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]} \big(1 - F_{X_1}(x)\big)\theta(t-x)dx.
\end{aligned}$$

Če sedaj upoštevamo enakost

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}$$

in zamenjamo oznako spremenljivke $t \mapsto u$, dobimo željeno enakost (11).

$\square$

Opomba 4.21. Enačbo (11) lahko zapišemo tudi v obliki

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}\int_{(0,u]} \theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x), \tag{13}$$

kjer je $\overline{F}_{X_1}$ porazdelitev integriranega repa (5.15) slučajne spremenljivke X_1.

Opomba 4.22. Konstanto $\theta(0)$, ki se pojavi v (11) in (13) lahko izračunamo. Ker c zadošca NPC, po argumentu v dokazu trditve 4.8 velja

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} -\infty.$$

Po zveznosti $\mathbb{P}$ od spodaj sledi

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \leq u\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \leq \infty\right) = 1.$$

Če torej v enačbi (13) pošljemo $u \to \infty$, dobimo

$$\lim_{u\to\infty} \theta(u) = 1 = \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \lim_{u\to\infty} \int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{(0,u]}(x)\theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x).$$

Po izreku o monotoni konvergenci (5.10) sledi

$$\begin{aligned} 1 &= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}\int_{(0,\infty)} 1 d\overline{F}_{X_1}(x) \\ &= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}. \end{aligned}$$

Torej je $\theta(0) = \frac{\rho}{1+\rho}$. Enakost upoštevamo v enačbi (13) in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_{(0,u]} \theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x). \tag{14}$$

Izrek 4.23. *(Asimptotika verjetnosti propada, lahkorepe porazdelitve) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient ℓ. Naj imajo slučajne spremenljivke $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gostoto. Potem obstaja konstanta $C > 0$ da velja*

$$\lim_{u\to\infty} e^{\ell u}\psi(u) = C.$$

Dokaz. Najprej preoblikujemo enačbo (14), tako da upoštevamo $\theta = 1 - \psi$

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_{(0,u]} \big(1 - \psi(u-x)\big) d\overline{F}_{X_1}(x), \\ \psi(u) &= \frac{1}{1+\rho}\big(1 - \overline{F}_{X_1}(u)\big) + \frac{1}{1+\rho}\int_{(0,u]} \psi(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x). \end{aligned}$$

Za lažjo notacijo uvedemo oznako $q = \frac{1}{1+\rho}$ in dobimo

$$\psi(u) = q\big(1 - \overline{F}_{X_1}(u)\big) + \int_{(0,u]} \psi(u-x)d\big(q\overline{F}_{X_1}(x)\big). \tag{15}$$

Vidimo, da ima enačba (15) obliko prenovitvene enačbe (5.17) z bistveno razliko, da $q\overline{F}_{X_1}$ ni verjetnostna mera, saj velja $\lim_{x\to\infty} q\overline{F}_{X_1}(x) = q < 1$. Enačbi (15) pravimo defektna prenovitvena enačba. Za $x > 0$ definiramo funkcijo F_ℓ kot Esscherjevo transformacijo funkcije $q\overline{F}_{X_1}$.

$$F_\ell(x) = \int_{(0,x]} e^{\ell y} d\big(q\overline{F}_{X_1}(y)\big) = \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\int_{(0,x]} e^{\ell y}\big(1 - F_{X_1}(y)\big)dy,$$

Pokažimo, da je F_ℓ porazdelitvena funkcija. Očitno je naraščajoča in velja

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F_\ell(x) &= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\int_{(0,\infty)} e^{\ell y}\big(1-F_{X_1}(y)\big)dy \qquad \big(\alpha = 1-F_{X_1}(y),\ d\beta = e^{\ell y}dy\big)\\
&= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\left(\left(\frac{\big(1-F_{X_1}(y)\big)e^{\ell y}}{\ell}\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{\ell}\int_{(0,\infty)} e^{\ell y} f_{X_1}(y)dy\right)\\
&= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\frac{1}{\ell}\left(\mathbb{E}\left[e^{\ell X_1}\right]-1\right).
\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je $q = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{c\mathbb{E}[T_1]}$ in definicijo Lundbergovega koeficienta ter dejstvo, da je $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ medprihodni čas v $\mathrm{HPP}(\lambda)$, da dobimo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F_\ell(x) &= \frac{\mathbb{E}\left[e^{\ell X_1}\right]-1}{c\ell\ \mathbb{E}\left[T_1\right]}\\
&= \frac{\frac{\lambda+c\ell}{\lambda}-1}{c\ell\frac{1}{\lambda}} = 1.
\end{aligned}$$

Če torej enačbo (15) pomnožimo z $e^{\ell u}$, dobimo

$$\begin{aligned}
e^{\ell u}\psi(u) &= qe^{\ell u}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big) + \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}\psi(u-x)e^{\ell x}d\big(q\overline{F}_{X_1}(x)\big)\\
&= qe^{\ell u}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big) + \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}\psi(u-x)dF_\ell(x). \qquad (16)
\end{aligned}$$

Vidimo, da sedaj enačba (16) ustreza obliki $\big(qe^{\ell u}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big), F_\ell\big)$ prenovitvene enačbe in ker je funkcija $qe^{\ell u}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big)$ omejena na končnih intervalih in F_ℓ nearitmetična, lahko uporabimo Smithov ključni prenovitveni izrek (5.20), da dobimo rešitev

$$e^{\ell u}\psi(u) = qe^{\ell u}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big) + q\int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}\big(1-\overline{F}_{X_1}(u-x)\big)dM^\ell(x), \qquad (17)$$

kjer je M^ℓ prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodnimi časi, ki imajo porazdelitveno funkcijo F_ℓ. V splošnem težko določimo M^ℓ, ampak, če je $qe^{\ell u}(1-\overline{F}_X(u))$ direktno Riemannovo integrabilna, nam Smithov izrek da asimptotično vedenje rešitve (17), ko gre $u \to \infty$. Direktno Riemannovo integrabilnost preverimo tako, da zapišemo

$$qe^{\ell u}(1-\overline{F}_{X_1}(u)) = \int_{()}$$

Tako vidimo, da je $qe^{\ell u}(1-\overline{F}_{X_1}(u))$ razlika dveh nenarašcajocih Riemannovo integrabilnih funkcij in je zato po kriteriju (5.19) direktno Riemannovo integrabilna. Dobimo

$$C = \lim_{u\to\infty} e^{\ell u}\psi(u) = \frac{q}{\alpha}\int_{(0,\infty)} e^{\ell x}(1-\overline{F}_{X_1}(x))dx, \qquad (18)$$

kjer je $\alpha = \int_{(0,\infty)} xdF_\ell(x)$. S tem je izrek dokazan. $\square$

Opomba 4.24. Izrek 4.23 nam pove, da v primeru zahtevkov z lahkorepimi porazdelitvami verjentost propada asimptotično točno ekspoenento pada proti 0 s tem ko začetni kapital u raste čez vse meje.

Zgled 4.25. (Nadaljevnaje zgleda 4.18) Vemo, da rešitve prenovitvene enačbe (17) iz izreka 4.23 v splošnem ne moremo izračuanti. V zgledu 4.18 smo pa privzeli, da zahtevke modeliramo z eksponentno porazdelitvijo, torej $X_i \sim \operatorname{Exp}(\mu)$. V tem primeru se izkaže, da lahko eksplicitno izračunamo verjentost propada. Če si pogledamo enačbo (17), vidimo, da moramo izračunati le porazdelitev integriranega repa $\overline{F}_{X_1}(u)$ in prenovitveno mero Esscherjeve transformacije F_ℓ. Za eksponentno porazdelitev velja

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1}(u) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\int_{(0,u)}\big(1-F_{X_1}(t)\big)dt\\ &= \mu\int_{(0,u)} e^{-\mu t}dt\\ &= F_{X_1}(u),\end{aligned}$$

saj je pozabljiva. Prenovitveno mero Esscherjeve transformacije pa dobimo tako, da prvo izračunamo porazdelitveno funckijo F_ℓ podano v enačbi (13).

$$\begin{aligned}F_\ell(u) &= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\int_{(0,u]} e^{\ell x}\big(1-F_{X_1}(x)\big)dx\\ &= \frac{\mu}{1+\rho}\int_{(0,u]} e^{-x(\mu-\ell)}dx.\end{aligned}$$

Upoštevamo rezultat (10), torej $\ell = \mu\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)$ in vidimo, da je F_ℓ porazdelitvena funkcija eksponentne slučajne spremenljvike s paramterom $\frac{\mu}{1+\rho}$ oziroma μq. Torej je prenovitvena mera $M^\ell(t)$ preprosto pričakovano število prihodov do časa t v $\operatorname{HPP}(\mu q)$, torej $M^\ell(t) = \mu q t$. Če vstavimo rezultata v enačbo (17) dobimo

$$\begin{aligned}e^{\ell u}\psi(u) &= q e^{\ell u}e^{-\mu u} + q\int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}e^{-\mu(u-x)}dM^\ell(x)\\ &= qe^{-u(\mu-\ell)} + \mu q^2\int_{(0,u]} e^{-(\mu-\ell)(u-x)}dx\\ &= qe^{-u(\mu-\ell)} + \mu q^2\frac{1}{\mu-\ell}\left(1-e^{-u(\mu-\ell)}\right)\\ &= qe^{-u(\mu-\ell)} + \frac{\mu}{(1+\rho)^2}\frac{1+\rho}{\mu}\left(1-e^{-u(\mu-\ell)}\right)\\ &= qe^{-u(\mu-\ell)} + q\left(1-e^{-u(\mu-\ell)}\right)\\ &= q = \frac{1}{1+\rho}.\end{aligned}$$

Končno dobimo, da je verjetnost propada enaka

$$\psi(u) = \tfrac{1}{1+\rho}e^{-\ell u}. \tag{19}$$

$\diamondsuit$

Vidimo, da se $\psi(u)$ z oceno, ki jo dobimo z Lundbergovo neenakostjo v zgledu 4.18 res razlikuje le za konstanto $\frac{1}{1+\rho}$. To je seveda zelo poseben primer, ko lahko vse količine izračunamo eksplicitno. Pokažimo kako bi do približkov funkcije $\psi(u)$ v praksi lahko prišli z Monte Carlo simulacijami.

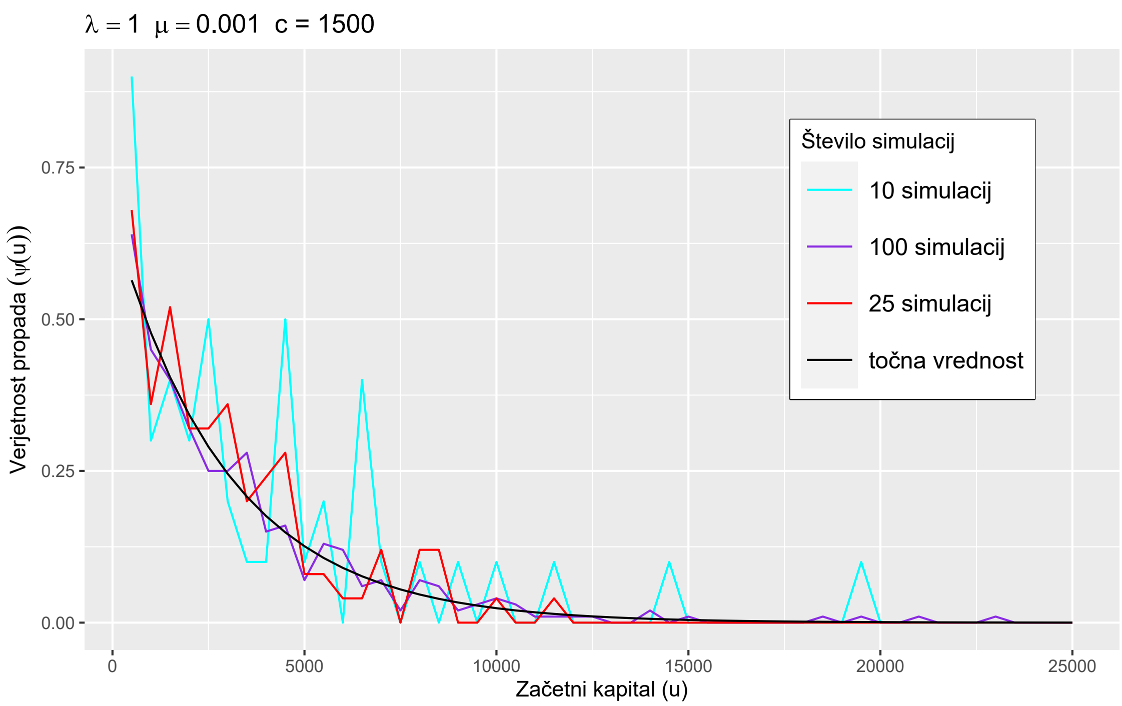
Zgled 4.26. Kot v zgledu 4.18 predpostavimo, da so zahtevki porazdeljeni eksponentno, torej $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$. Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov $\lambda = 1$, stopnja prihodkov premij $c = 1500$ in pričakovana vrednost zahtevkov 1000 €, torej $\mu = \frac{1}{1000}$. Potem lahko verjetnost propada eksplicitno izračunamo po formuli (19). Prvo izračuamo ρ po formuli (10), in ℓ po (9), torej

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{c\mu}{\lambda} - 1 \\ &= \frac{1500 \cdot \frac{1}{1000}}{1} - 1 = \frac{1}{2}, \\ \ell &= \mu - \frac{\lambda}{c} \\ &= \frac{1}{1000} - \frac{1}{1500} = \frac{1}{3000}.\end{aligned}$$

Vsatvimo vrednosti v (19) in dobimo

$$\psi(u) = \tfrac{2}{3} e^{-\frac{u}{3000}}.$$

Sedaj definiramo zaporedje $(u_n)_{n=1}^{50}$ s predpisom $u_n = 500n$ in za vsak n simuliramo $10, 50$ in 100 realizacij procesa tveganja, bodisi do časa $T = 1000$ bodisi dokler ne propade in za vsak n izračunamo približek za verjetnost propada kot delež propadlih realizacij z vsemi. Aproksimacijo $\psi(u)$ prikažemo na sliki 6.



Slika 6. Aproksimacija verjetnosti propada $\psi(u)$ z Monte Carlo simulacijami.

Kot vidimo, se približki z naraščajocim številom simulacij priližujejo funckciji $\psi(u)$, ampak, za res dobro aproksimacijo, bi morali to število krepko povečati, saj na primer za vrednost $u = 16000$ je $\psi(16000) \approx 0.0032186334$, kar je približno 0.3% in v praksi ni zanemarljivo, ampak v naši simulaciji nobena realizacija procesa tveganja ni padla pod 0.

$\diamondsuit$

4.3. **Težkorepe porazdelitve.** Rezultati, ki smo jih izpeljali v prejšnjem podpoglavju temeljijo na predpostavki zahtevkov z lahkorepimi porazdelitvami, kar interpretiramo, kot da je verjetnost zahtevkov, ki zelo odstopajo od povprečja zelo majhna. V praksi pa se pogosto zgodi, da ta predpostavka ni izpolnjena in pojavi se vprašanje, ali lahko še vedno kaj povemo o asimptotiki verjetnosti propada. Izkaže se, da v primeru, ko je porazdelitev integriranega repa zahtevkov subeksponentna, ta točno določa asimptotično vedenje verjetnosti propada. Subeksponentne porazdelitve so poseben razred težkorepih porazdelitev.

Definicija 4.27. Naj bo $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk s porazdelitveno funkcijo F za katero velja $F < 1$ za vsak $x > 0$. Pravimo, da je porazdelitev F *subeksponentna*, če velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n > x\right)}{\mathbb{P}\left(X_1 > x\right)} = n \quad \text{za vsak} \quad n \geq 2.$$

Opomba 4.28. Ekvivalentna in bolj intuitivna definicija subeksponentne porazdelitve je, da velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n > x\right)}{\mathbb{P}\left(\max\{X_1, \ldots, X_n\} > x\right)} = 1 \quad \text{za vsak} \quad n \geq 2,$$

kar pomeni, da je repna porazdelitev vsote n-tih slučajnih spremenljivk asimptotično primerljiva s porazdelitvijo največje. Dokaz ekvivalence lahko bralec najde v [9] na strani 437.

Izrek 4.29. *(Asimptotika verjetnosti propada, težkorepe porazdelitve) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj bodo zahtevki $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ neodvisni in enko porazdeljeni z gostoto f_X, pričakovano vrednostjo $\mathbb{E}[X] < \infty$ in naj bo $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna. Potem za verjetnost propada $\psi(u)$ velja*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)} = \frac{1}{\rho}. \tag{20}$$

Dokaz. Najprej pokažimo, da lahko verjetnost preživetja iz leme 4.20 predstavimo kot sestavljeno geometrijsko porazdelitev (5.4). Če definiramo $G \sim \mathrm{Geom}(\frac{\rho}{1+\rho})$ in zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $(\overline{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ s porazdelitveno funkcijo $\overline{F}_{X_1}$, se izkaže, da $C = \sum_{i=1}^{G} \overline{X}_i$ zadošča enačbi

$$\theta(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,u]} \theta(u-x) d\overline{F}_{X_1}(x). \tag{14}$$

Porazdelitvena funkcija F_C ima obliko

$$\mathbb{P}\left(C \leq u\right) = \mathbb{P}\left(G = 0\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(G = n\right) \mathbb{P}\left(\overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n \leq u\right)$$

$$= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\rho)^n}\mathbb{P}\left(\overline{X}_1+\cdots+\overline{X}_n \le u\right). \tag{21}$$

Za preglednost ponovno uvedemo oznako $q = \frac{1}{1+\rho}$ in $p = \frac{\rho}{1+\rho}$ in enačbo (21) preoblikujemo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C \le u) &= p + qp\overline{F}_{X_1}(u) + p\sum_{n=2}^{\infty} q^n \mathbb{P}\left(\overline{X}_1+\cdots+\overline{X}_n \le u\right)\\
&= p + qp\overline{F}_{X_1}(u) + qp\sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1}\int_{(0,u]} \mathbb{P}\left(x+\overline{X}_2+\cdots+\overline{X}_n \le u\right) d\overline{F}_{X_1}(x)\\
&= p + q\int_{(0,u]} p\left[1+\sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1}\mathbb{P}\left(\overline{X}_2+\cdots+\overline{X}_n \le u-x\right)\right] d\overline{F}_{X_1}(x)\\
&= p + q\int_{(0,u]} \mathbb{P}(C \le u-x)\, d\overline{F}_{X_1}(x).
\end{aligned}$$

Vidimo, da C zadošča enačbi (14) torej je res $\theta \sim C$. Limito $\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)}$ lahko tako zapišemo kot

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)} = \lim_{u\to\infty} p\sum_{n=1}^{\infty} q^n\frac{\mathbb{P}\left(\overline{X}_1+\cdots+\overline{X}_n > u\right)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)}.$$

Limito in vsoto lahko zamenjamo, saj če definiramo zaporedje funkcij ... Ker je $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna, za $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\mathbb{P}\left(\overline{X}_1+\cdots+\overline{X}_n > u\right)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)} = n.$$

Končno

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)} = p\sum_{n=1}^{\infty} q^n n = \frac{1}{\rho}.$$

□

Opomba 4.30. Pokažemo lahko tudi, da je C edina porazdelitev, ki zadošča (14) v razredu funkcij

$$\begin{aligned}\mathscr{F} = \{F \mid F:\mathbb{R}\to[0,\infty) &\text{ omejena, nepadajoča, zvezna z desne}\\ &\text{in za } x<0: F(x)=0\}.\end{aligned}$$

Trditev sledi direktno iz lastnosti Laplace-Stiltjesove transformacije, saj lahko vsak $F \in \mathscr{F}$ zapišemo kot aF_X za primerno konstanto $a \ge 0$ in porazdelitveno funkcijo neke nenegativne skučajne spremenljivke X. Bolj formalen dokaz lahko bralec najde v [4] na strani 173.

Zgled 4.31. Naj bo $(U_t)_{t\ge 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja da so zahtevki neodvisni Weibullovo porazdeljeni s parametroma $a = \frac{1}{4}$ in $b = 16$, torej $X_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$. Za dokaz, da je $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna, lahko bralec pogleda [......]. Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov $\lambda = 1$ in stopnja prihodkov premij $c = 500$. Podobno kot v zgledu 4.26 z Monte Carlo simulacijami pokažimo, da verjetnost propada res pada proti 0 z enakim redom konverjence kot rep $\overline{F}_{X_1}$, ko gre $u \to \infty$. Porazdelitev integriranega repa $\overline{F}_{X_1}$ ima obliko

$$\overline{F}_{X_1}(u) = \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,u]} e^{-\left(\frac{x}{16}\right)^{\frac{1}{4}}} dx.$$

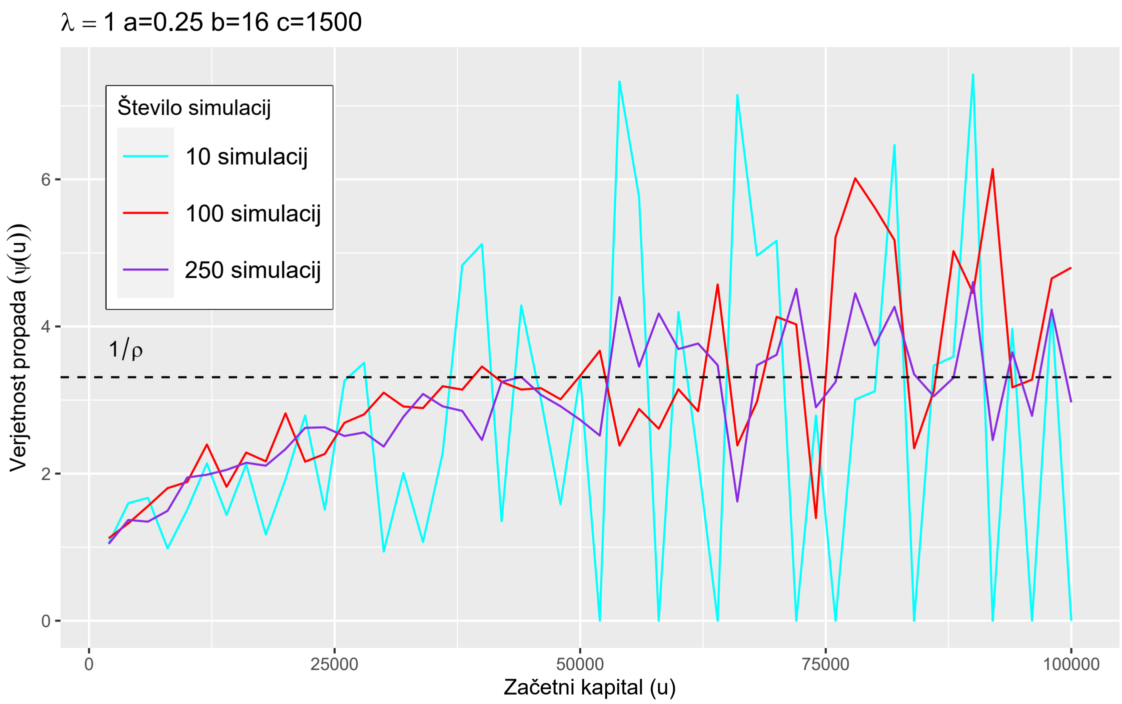
Iz zgleda 4.3 vemo, da je $\mathbb{E}[X_1] = 384$. Z uvedbo nove spremenljivke $z = x^{\frac{1}{4}} (dz = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} dx)$ z nekaj računanja dobimo

$$\overline{F}_{X_1}(u) = 1 - \frac{\left(u^{\frac{3}{4}} + 6\sqrt{u} + 24\sqrt[4]{u} + 48\right) e^{-\frac{\sqrt[4]{u}}{2}}}{48}$$

Izračunamo še

$$\rho = \frac{c\mathbb{E}[T_1]}{\mathbb{E}[X_1]} - 1 = \frac{500}{384} - 1 \approx 0.3020833.$$

Po izreku 4.29 razmerje $\frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)}$ konvergira proti $\frac{1}{\rho} \approx 3.3103451$. Zaporedje $(u_n)_{n=1}^{50}$ definirano kot $u_n = 2000n$ za vsak n podobno kot v zgledu 4.26 simuliramo $10, 100$ in 250 realizacij procesa tveganja in za vsak n izračunamo približek za razmerje $\frac{\psi(u_n)}{1-\overline{F}_{X_1}(u_n)}$. Rezultate prikažemo na sliki 7.



SLIKA 7. Aproksimacija verjetnosti propada $\psi(u)$ z Monte Carlo simulacijami (modra) in točna vrednost funkcije (rdeča).

Vidimo, da razmerje vizualno res konvergira proti $\frac{1}{\rho}$, ampak seveda bi za boljšo natančnost morali povečati začetni kapital u in število simulacij. $\diamondsuit$

5. Priloga

Dostavek je namenjen predvsem za dodatne definicije in trditve, ki so bile izpuščene v glavnem za namene preglednosti besedila. V primeru, da bralec potrebuje osvežiti določene pojme, jih večino lahko najde v tem razdelku.

Definicija 5.1. Naj bo X slučajna spremenljivka. Potem so za $u \in \mathbb{R}$ njena *rodovna funkcija*, *momentno rodovna funkcija* in *karakteristična funkcija* definirane kot

$$G_X(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right], \quad M_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX}\right], \quad \varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX}\right],$$

če upanja obstajajo.

Definicija 5.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Naraščajocemu zaporedju σ-algeber $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ pravimo *filtracija*, če za vsak $0 \leq s \leq t$ velja $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. Za slučajni proces $(X_t)_{t\geq 0}$ pravimo, da je *prilagojen* filtraciji $\mathcal{F}$, če je X_t $\mathcal{F}_t$-merljiva za vsak $t \geq 0$.

Definicija 5.3. Slučajna spremenljivka X ima *Weibullovo porazdelitev* s parametri $a, b > 0$, če ima njena porazdelitev obliko

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0$$

in gostota obliko

$$f_X(x) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0.$$

Definicija 5.4. Naj bo $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk in $G \sim \mathrm{Geom}(p)$ geometrijsko porazdeljena slučajna spremenljivka parametrom $p \in (0,1)$ in funkcijo verjetnosti $P(G = k) = p(1-p)^k$ za $k \in \mathbb{N}_0$. Naj bo G neodvisna od X_i za vsak $i \in \mathbb{N}$. Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$C = \sum_{i=1}^{G} X_i$$

sestavljeno geometrijsko porazdelitev.

Trditev 5.5. *Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ki ima prvi moment. Potem velja*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{(0,\infty)} \big(1 - F_X(x)\big) dx.$$

Dokaz. X lahko zapišemo kot

$$X = \int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{\{x<X\}} dx = \int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{\{X<x\}} dx.$$

Če sedaj uporabimo fubinijev izrek dobimo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\left[\int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{\{X<x\}} dx\right] \\
&= \int_{(0,\infty)} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X<x\}}\right] dx \\
&= \int_{(0,\infty)} \big(1 - \mathbb{P}(X > x)\big) dx
\end{aligned}$$

$\square$

Trditev 5.6. *(Neenakost Markova) Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka. Potem za $x > 0$ velja*

$$\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{x}.$$

Dokaz. Naj bo $x > 0$. Velja

$$x\mathbb{1}_{\{X>x\}} \leq X \iff x\mathbb{P}(X > x) \leq \mathbb{E}[X].$$

$\square$

Izrek 5.7. *(Krepki zakon velikih števil) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s pričakovano vrendostjo $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$. Potem velja*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mu.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. $\square$

Izrek 5.8. *(Izrek o enoličnosti) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, ne nujno definirani na istem verjetnostnem prostoru. Če za vsak $u \in \mathbb{R}$ velja $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$, potem imata X in Y enako porazdelitev.*

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. $\square$

Izrek 5.9. *(Lévijev izrek o kontinuiteti) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk (ne nujno na istem verjetnostnem prostoru) in X še ena slučajna spremenljivka. Potem za vsak $u \in \mathbb{R}$ velja*

$$\varphi_{X_n}(u) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_X(u)$$

natanko tedaj, ko velja

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. $\square$

Izrek 5.10. *(Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci) Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in naj bo $X := \lim_{n\to\infty} X_n$ njihova limita. Naj za vsak $\omega \in \Omega$ velja $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \ldots$ Potem velja*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. $\square$

Izrek 5.11. *(Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci) Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in naj bo $X := \lim_{n\to\infty} X_n$ njihova limita. Naj bo Y slučajna spremenljivka definirana na istem verjetnostnem prostoru z $\mathbb{E}[Y] < \infty$ in naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $\omega \in \Omega$ velja $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$. Potem je X integrabilna in velja*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. □

Izrek 5.12. *(Tonellijev izrek) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki definirani vsaka na svojem verjentnostnem prostoru in naj imata vsaka svojo gostoto f_X in f_Y glede na Lebesgueovo mero. Potem velja*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\mathcal{L}^2(dx,dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy \right) dx.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. □

Trditev 5.13. *Definicija homogenega Poissonovega procesa 1.7 je ekvivalentna karakterizaciji z lastnostjo vrstilnih statistik. Naj bo $\lambda > 0$ in $(N_t)_{t\geq 0}$ enostavni proces štetja za katerega je $N_0 = 0$ s.g. Naj za vsak $t \geq 0$ velja $N_t \sim Pois(\lambda t)$ in, pogojno na dogodek $\{N_t = k\}$ je vektor časov prihodov porazdeljen kot*

$$(V_1, \ldots, V_k) \mid \{N_t = k\} \sim (U_{(1)}, \ldots, U_{(k)}),$$

kjer je $(U_{(1)}, \ldots, U_{(k)})$ vektor vrstilnih statistik vektorja $(U_1, \ldots, U_k)$ neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $U_i \sim U([0,t])$.

Dokaz. Dokaz trditve lahko bralec najde v [7]. □

Definicija 5.14. Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka in F_X njena porazdelitvena funkcija. Potem za $u \in \mathbb{R}$ *Laplace-Stiltjesovo transformacijo* porazdelitve F_X definiramo kot

$$\hat{F}_X(u) = \int_{[0,\infty)} e^{-ux} dF_X(x).$$

Definicija 5.15. Naj bo F porazdelitvena funckija neke nenegativne slučajne spremenljivke s prvim momentom. Potem je

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^x (1 - F(t))\, dt$$

porazdelitev integrarnega repa F.

Definicija 5.16. *Prenovitveni proces* na verjentostnem protoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je slučajni proces karatkteriziran z zaporedjem neodvisnih enako porazdeljenih medprihodnih časov $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki zavzamejo vrednosti v $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ in je podan z zvezo

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}},$$

kjer je $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ čas n-tega prihoda. Pripadajočo *prenovitveno mero* prenovitvenega procesa definiramo kot $M(t) = \mathbb{E}[N_t]$ za $t > 0$.

Definicija 5.17. *Prenovitvena enačba* je enačba oblike

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} f(t-s)dF(s), \quad t \geq 0,$$

kjer sta neznana funkcija f in znana funckija g definirani na $\mathbb{R}^+$ in F je porazdelitvna funkcija neke pozitivne slučajne spremenljivke X. Prenovitveno enačbo predstavimo s parom (g, F).

Definicija 5.18. Za nenegativno merljivo funkcijo $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pravimo, da je *direktno Riemannovo integrabilna* (d.R.i.), če za vsak $\delta > 0$ velja

$$\sum_{k\geq 0}\left(\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t)\right) < \infty \quad \text{in}$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\delta\sum_{k\geq 0}\left(\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t)\right) = \lim_{\delta\downarrow 0}\delta\sum_{k\geq 0}\left(\inf_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t)\right).$$

Če f zadošča navedenima zahtevama, potem je limita v drugi zahtevi točno vrednost direktnega Riemannovega integrala

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty f(t)\, dt.$$

Funkcija f poljubnega predznaka je d.R.i., če sta le-taki $f^+ = \max\{f, 0\}$ in $f^- = \max\{-f, 0\}$, pri čemer je

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty f(t)\, dt = \text{d.R.i.} \int_0^\infty f^+(t)\, dt - \text{d.R.i.} \int_0^\infty f^-(t)\, dt.$$

Trditev 5.19. *(Kriterij za direktno Riemannovo integrabilnost) Naj bo $f \geq 0$ nenaraščajoča funkcija. Potem je f direktno Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je posplošeno Riemannovo integrabilna. Tedaj je njen direktni Riemannov integral enak posplošenemu.*

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [8] na strani 235. □

Izrek 5.20. *(Smithov ključni prenovitveni izrek) Če je funkcija g iz prenovitvene enačbe (g, F) (definicja 5.17) omejena na končnih intervalih in X ima prvi moment ter ni aritmetična ($\nexists a \in \mathbb{R} : \ \mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}a) = 1$), potem je*

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} g(t-s)dM(s), \quad t \geq 0,$$

enolična rešitev te enačbe. $M(s)$ je prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodno porazdelitvijo F. Če je dodatno funkcija g direktno Riemannovo integrabilna velja

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_{(0,\infty)} g(t)dt.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [8] na strani 237. □

Slovar strokovnih izrazov

trajektorija sample path
slučajni proces stochastic process
sestavljeni Poissonov proces compound Poisson process
neskončna deljivost infinite divisibility
proces tveganja risk process
verjetnost propada probability of ruin
ogrodje procesa tveganja skeleton process
lahkorepa porazdelitev light-tailed distribution
težkorepa porazdelitev heavy-tailed distribution
subeksponentna porazdelitev subexponential distribution
prenovitveni proces renewal process
defektna prenovitvena enačba defective renewal equation
prenovitvena mera renewal function

Literatura

[1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
[2] S.M. Ross, Stochatic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
[3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).
[4] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Second Edition, Springer, (2009).
[5] M. Mandjes, O. Boxma, The Cramér–Lundberg model and its variants, Springer, (2023).
[6] F. Spitzer, Principles of Random Walk. Second Edition, Springer, (1976).
[7] B. Fristedt, L. Gray, A Modern Approach to Probability Theory, Springer, (1996).
[8] S.I. Resnick, Adventures in Stochastic Processes, Birkhäuser, (1992).
[9] R.J. Adler, R.E. Feldman, A practical guide to heavy tails: statistical techniques and applications, Birkhäuser, (1998).