

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

**Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

## KAZALO

1. Uvod	5
2. Sestavljena Poissonova porazdelitev	7
2.1. Rodovne, momentno-rodovne in karakteristične funkcije	7
2.2. Porazdelitvena funkcija	8
2.3. Panjerjeva rekurzivna shema	11
3. Sestavljeni Poissonov proces	15
3.1. Osnovne lastnosti	15
3.2. Markiranje	18
4. Cramér–Lundbergov model	23
4.1. Proces tveganja in verjetnost propada	23
4.2. Verjetnost preživetja kot integralska enačba	26
4.3. Lahkorepe porazdelitve	29
4.4. Težkorepe porazdelitve	36
5. Priloga	41
Slovar strokovnih izrazov	46
Literatura	46

## Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

### POVZETEK

V prvem delu diplome najprej definiramo sestavljeno Poissonovo porazdelitev in izpeljemo obliko njenih rodovnih funkcij, obravnavamo njeno povezavo s splošnimi porazdelitvami in izpeljemo Panjerejevo rekurzivno shemo. Nato definiramo sestavljeni Poissonov proces in pokažemo nekaj osnovnih lastnosti kot je neodvisnost in stacionarnost prirastkov. Izpeljemo nekaj rezultatov, ki jih dobimo, ko sestavljeni Poissonov proces markiramo. V drugem delu diplome obravnavamo aplikacijo sestavljenega Poissonovega procesa v Cramér–Lundbergovem modelu. Definiramo verjetnost propada in preživetja ter slednjo izrazimo z defektno prenovitveno enačbo. Dokažemo Lundbergovo neenakost in obravnavamo asimptotično obnašanje verjetnosti propada, ko zahtevke modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. Obnašanje verjetnosti propada na koncu praktično prikažemo z večkratnim simuliranjem procesa tveganja.

## Compound Poisson process and its application in finance

### ABSTRACT

In the first half of the diploma, we define the compound Poisson distribution and derive the form of its generating functions. We discuss its connection with general distributions and derive the Panjer recursion scheme. We then define the compound Poisson process and show some basic properties such as the independence and stationarity of increments. We derive some results that follow from a space-time decomposition of the compound Poisson process. In the second half of the diploma, we discuss the application of the compound Poisson process in the Cramér–Lundberg model. We define the probability of ruin and survival and express the latter as a defective renewal equation. We prove the Lundberg inequality and discuss the asymptotic behavior of the probability of ruin when claims are modeled with light-tailed and heavy-tailed distributions. We practically demonstrate the behavior of the probability of ruin by repeatedly simulating the risk process.

**Math. Subj. Class. (2020):** 60G07 60G20 60G51

**Ključne besede:** slučajni proces, sestavljena Poissonova porazdelitev, Panjerjeva rekurzivna shema, sestavljeni Poissonov proces, markiranje, Cramér–Lundbergov model, Verjetnost propada, lahkorepa porazdelitev, težkorepa porazdelitev

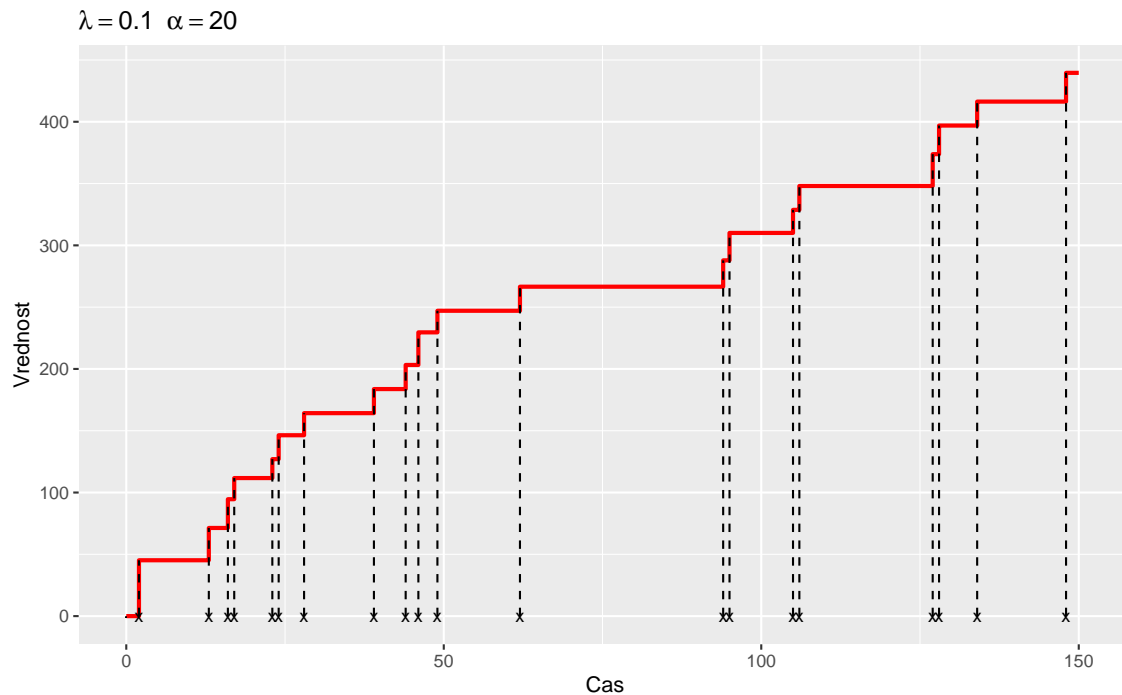
**Keywords:** stochastic process, compound Poisson distribution, Panjer recursion scheme, compound Poisson process, space-time decomposition, Cramér–Lundberg model, probability of ruin, light-tailed distribution, heavy-tailed distribution

## ZAHVALA

V nastajanju :)

## 1. UVOD

Na različnih področjih financ so se v zadnjem stoletju razvile raznovrstne verjetnostne tehnike, kako modelirati spreminjanje vrednosti finančnih instrumentov s časom. V delu se osredotočimo na zavarovalništvo, kjer želimo modelirati različne produkte zavarovanja, ki jih zavarovalnice ponujajo, da lahko ustrezno določimo višino premije, ki jo bodo zavarovanci plačevali. Zadostiti želimo določenim zastavljenim merilom tveganja in dobiti verjetnostna zagotovila, da lahko skozi čas pričakujemo dobiček. Standarden pristop k problemu je uporaba sestavljenih porazdelitev oziroma procesov, kjer skozi čas seštevamo naključno število neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki predstavljajo višino posameznih zahtevkov zavarovancev. Prvi tak model za opis poslovanja zavarovalnice je v začetku 20. stoletja razvil Filip Lundberg. Le-ta danes eden izmed najbolj raziskanih in uporabljenih modelov v teoriji tveganja. Model temelji na sestavljenem Poissonovem procesu, kjer predpostavimo, da ima število zahtevkov, ki jih zavarovalnica prejme v nekem časovnem intervalu, Poissonovo porazdelitev.



SLIKA 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa z intenzivnostjo  $\lambda = 0,1$  in eksponentno porazdeljenimi zahtevki;  $X_i \sim \text{Exp}(20)$ .

Sliko 1 v kontekstu zavarovalništva interpretiramo kot kumulativno obveznost zavarovalnice svojim zavarovancem v nekem časovnem intervalu.



Vsebina se v grobem deli na dva dela. Drugo in tretje poglavje sta namenjeni tehnični obravnavi ključnih lastnosti sestavljene Poissonove porazdelitve in procesa. V četrtem poglavju pa se posvetimo praktični obravnavi uporabe sestavljenega Poissonovega procesa v zavarovalništvu.

V drugem poglavju definiramo sestavljeno Poissonovo porazdelitev in izpeljemo obliko njenih rodovnih funkcij. Težava, ki si jo delijo sestavljene porazdelitve, je, da so redko analitično izračunljive. Zato izpeljemo Panjerjevo rekurzivno shemo,

ki je ena izmed najbolj popularnih metod za numerično aproksimacijo sestavljene Poissonove porazdelitve.

V tretjem poglavju definiramo sestavljeni Poissonov proces in izpeljemo nekaj osnovnih lastnosti, kot sta neodvisnost in stacionarnost prirastkov ter pričakovana vrednost. Poglavje zaključimo z izpeljavo rezultatov, ki jih dobimo, ko sestavljeni Poissonov proces markiramo.

V četrtem poglavju se posvetimo Cramér–Lundbergovemu modelu, ki je prvi model, ki je bil uporabljen za modeliranje tveganja v zavarovalništvu. Osredotočimo se na verjetnost propada in zanjo izpeljemo prenovitveno enačbo. Obravnavamo asimptotriko verjetnosti propada, ko zahtevke modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami.

V delu privzamemo, da je bralec seznanjen z osnovami verjetnosti, homogenega Poissonovega procesa in prenovitvenimi procesi. Na slike, vire in rezultate, ki jih izpeljemo v delu, se sklicujemo z modro barvo . Na koncu dela je priloga, kjer je zbrana velika večina definicij in izrekov, s katerimi naj bi bil bralec seznanjen pred branjem dela. Na njih se skličemo, ko jih prvič omenimo v delu in pri dokazih trditev, ter jih označimo z rdečo barvo .

## 2. SESTAVLJENA POISSONOVA PORAZDELITEV

Razdelek je prirejen po [1], [2] in [4].

Sestavljena Poissonova porazdelitev je osnovni gradnik za sestavljeni Poissonov proces, ki ga obravnavamo v naslednjem razdelku. Lastnosti, ki jih dokažemo, so direktno prenosljive na sam proces. Izpeljemo obliko rodovnih funkcij, porazdelitveno funkcijo, zanimive rezultate v povezavi s splošnimi slučajnimi spremenljivkami in Panjerjevo rekurzivno shemo, ki jo prikažemo na praktičnem zgledu.

**Definicija 2.1.** Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje neodvisnih (med seboj in  $N$ ) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

*sestavljeno Poissonovo porazdelitev.*

**Opomba 2.2.** V primeru, ko je  $X_i = 1$  za vsak  $i \in \mathbb{N}$ , je  $S \sim \text{Pois}(\lambda)$ .

**Opomba 2.3.** Na enak način definiramo splošne sestavljene porazdelitve, kjer je  $N$  poljubna slučajna spremenljivka, ki zavzema vrednosti v  $\mathbb{N}_0$ <sup>1</sup>. Konkreten primer nas zanima zaradi njegove povezave s sestavljenim Poissonovim procesom. V nadaljevanju bomo uporabljali oznako

$$S_0 = 0 \quad \text{in} \quad S_k = \sum_{i=1}^k X_i \quad \text{za } k \in \mathbb{N};$$

opazimo, da se brezpogojna porazdelitev slučajne spremenljivke  $S_k$  ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke  $S \mid \{N = k\}$ .

**2.1. Rodovne, momentno-rodovne in karakteristične funkcije.** Ključno orodje pri dokazovanju lastnosti slučajnih spremenljivk so rodovne funkcije 5.1, saj so zelo uporabne pri obravnavi vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk in (če obstajajo) popolnoma določajo njihovo porazdelitev.

**Trditev 2.4.** Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje neodvisnih (med seboj in od  $N$ ) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z momentno-rodovno funkcijo  $M_{X_1}$ . Potem ima momentno-rodovna funkcija vsote  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  obliko

$$M_S(u) = e^{\lambda(M_{X_1}(u)-1)}.$$

*Dokaz.* Velja

$$\begin{aligned} \varphi_S(u) &= \mathbb{E}[\exp[uS]] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\exp[uS] \mid N = k] \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\exp[uS_k]] \mathbb{P}(N = k) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> V delu se držimo dogovora, da je  $S$  na dogodku  $\{N = 0\}$  prazna vsota in zato enaka 0.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E} [e^{uX_1}]^k}_{M_{X_1}(u)^k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M_{X_1}(u)\lambda)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda(M_{X_1}(u)-1)}.
\end{aligned} \tag{1}$$

□

**Posledica 2.5.** Rodovna in karakteristična funkcija  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  imata obliko

$$G_S(u) = e^{\lambda(G_{X_1}(u)-1)} \quad \text{in} \quad \varphi_S(u) = e^{\lambda(\varphi_{X_1}(u)-1)}.$$

*Dokaz.* V splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke  $X$  enaka njeni momentno-rodovni funkciji, iz vrednoteni v  $iu$  za  $u \in \mathbb{R}$ , torej  $\varphi_X(u) = M_X(iu)$ . Rodovna funkcija pa je enaka momentno-rodovni funkciji, iz vrednoteni v  $\ln(u)$  za  $u > 0$ , torej  $G_X(u) = M_X(\ln(u))$ , če obstajata. □

V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo  $\varphi_S$ , saj je ta vedno definirana za vsak  $u \in \mathbb{R}$ . Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med  $\varphi_S$  in  $G_N$ .

**Trditev 2.6.** Karakteristično funkcijo  $\varphi_S$  lahko izrazimo kot kompozitum rodovne funkcije  $G_N$  in karakteristične funkcije  $\varphi_{X_1}$ .

$$\varphi_S(u) = G_N(\varphi_{X_1}(u)).$$

*Dokaz.* Po enačbi (1) iz trditve 2.4 za  $u \in \mathbb{R}$  velja

$$\begin{aligned}
\varphi_S(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{X_1}(u)^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= G_N(\varphi_{X_1}(u)).
\end{aligned}$$

□

**2.2. Porazdelitvena funkcija.** Z uporabo izreka o popolni verjetnosti s pogojevanjem na  $N$  pridemo do formule za porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke  $S$ . Za  $x \in \mathbb{R}$  velja

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= \mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S \leq x \mid N = k) \mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k \leq x) \mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} F_{X_1}^{*k}(x) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},
\end{aligned}$$

kjer je  $F_{X_1}^{*k}(x)$   $k$ -ta konvolucija 5.2 funkcije  $F_{X_1}$ .



**Zgled 2.7.** Poglejmo enega enostavnejših primerov, ko so  $X_1, X_2, \dots$  porazdeljene kot

$$X_1 \sim \text{Exp}(a), \quad \text{torej z gostoto} \quad f_{X_1}(x) = ae^{-ax} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x),$$

kjer je  $a > 0$ . Vemo, da je  $k$ -ta konvolucija porazdelitve slučajne spremenljivke  $X_1$  porazdelitev  $\text{Gamma}(k, a)$  in ima gostoto

$$f_{X_1 + \dots + X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x).$$

Za  $s > 0$  velja

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^s \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} dx \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} && \text{Tonelli 5.23} \\ &= \int_0^s \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!k!} (a\lambda)^k x^{k-1} e^{-(ax+\lambda)}}_{f_S(x)} dx. \end{aligned}$$

Vidimo, da lahko že celo v primeru, ko poznamo eksplicitno formulo za  $F_{X_1}^{*k}$ , težko pridemo do porazdelitve slučajne spremenljivke  $S$  v zaključeni obliki. V praksi se zato poslužujemo numeričnega ocenjevanja.  $\diamond$

Vemo, da za neodvisne slučajne spremenljivke  $X_1, \dots, X_n$ , ki so porazdeljene kot  $X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1), \dots, X_n \sim \text{Pois}(\lambda_n)$ , velja, da je njihova vsota  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  porazdeljena kot  $S \sim \text{Pois}(\lambda)$ , kjer je  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Izkaže se, da ima sestavljena Poissonova porazdelitev podobno lastnost.

**Definicija 2.8.** Naj bo  $(\lambda_k)_{k=1}^n$  zaporedje pozitivnih realnih števil, za katerega velja  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ . Naj bodo  $F_1, \dots, F_n$  porazdelitvene funkcije realnih slučajnih spremenljivk  $X_1, \dots, X_n$ . Potem porazdelitvi s porazdelitveno funkcijo

$$F = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k$$

pravimo *mešanica porazdelitev* teh slučajnih spremenljivk z utežmi  $(\lambda_k)_{k=1}^n$ .

Očitno je  $F$  porazdelitvena funkcija. Če definiramo slučajno spremenljivko

$$I \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

in je le-ta neodvisna od vsake od slučajnih spremenljivk  $X_1, \dots, X_n$ , vidimo, da je  $F$  porazdelitev slučajne spremenljivke  $X_I = \mathbb{1}_{\{I=1\}}X_1 + \dots + \mathbb{1}_{\{I=n\}}X_n$ , kar enostavno pokažemo z uporabo zakona o popolni verjetnosti. Za poljuben  $n \in \mathbb{N}$  in  $x \in \mathbb{R}$  velja

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_I \leq x) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_I \leq x \mid I = k) \mathbb{P}(I = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \leq x) \lambda_k \\ &= \sum_{k=1}^n F_k(x) \lambda_k. \end{aligned}$$

Z enakim argumentom lahko pokažemo, da je  $\varphi_{X_I}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{X_k}(u)$ .

**Trditev 2.9.** Naj imajo neodvisne slučajne spremenljivke  $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$  sestavljeno Poissonovo porazdelitev, torej

$$S^{(k)} = \sum_{i=1}^{N_k} X_i^{(k)} \quad \text{za } k = 1, \dots, n,$$

kjer je  $N_k \sim \text{Pois}(\lambda_k)$  za  $\lambda_k > 0$  in za vsak  $k = 1, \dots, n$  je  $(X_i^{(k)})_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem velja

$$S = \sum_{k=1}^n S^{(k)} \sim \sum_{i=1}^N Y_i,$$

kjer je  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  s parametrom  $\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$  in  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z mešano porazdelitvijo

$$F_{Y_1} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} F_{X_1^{(k)}}.$$

*Dokaz.* Karakteristična funkcija slučajne spremenljivke  $S^{(k)}$  ima obliko

$$\varphi_{S^{(k)}}(u) = \exp \left[ \lambda_k \left( \varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1 \right) \right].$$

Ker so  $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$  neodvisne, velja

$$\begin{aligned} \varphi_S(u) &= \prod_{k=1}^n \varphi_{S^{(k)}}(u) \\ &= \prod_{k=1}^n \exp \left[ \lambda_k \left( \varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1 \right) \right] \\ &= \exp \left[ \lambda \underbrace{\left( \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} \varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1 \right)}_{\varphi_{Y_1}(u)} \right]. \end{aligned}$$

Po izreku o enoličnosti 5.19 sledi  $S \sim \sum_{i=1}^N Y_i$ . □

Na podoben način pokažemo, kako se sestavljena Poissonova porazdelitev izraža v primeru, ko so slučajne spremenljivke  $X_i$  diskretno porazdeljene.

**Trditev 2.10.** Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots, X_n$  neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od  $N$ ) enako porazdeljene po shemi

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} & \dots \end{pmatrix},$$

kjer je  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  poljubno zaporedje realnih števil in  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje pozitivnih realnih števil, za katerega velja  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda$ . Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^N X_j,$$

kjer so  $Y_1, Y_2, \dots$  neodvisne slučajne spremenljivke s porazdelitvami  $\text{Pois}(\lambda_1), \text{Pois}(\lambda_2), \dots$

*Dokaz.* S  $\varphi_{Z_n}$  označimo karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke  $Z_n := a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_n Y_n$  in s  $\varphi_Z$  karakteristično funkcijo  $Z := \sum_{j=1}^N X_j$ . Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(a_j u) \\ &= \prod_{j=1}^n \exp[\lambda_j (e^{a_j i u} - 1)] \\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j (e^{a_j i u} - 1)\right].\end{aligned}$$

Po posledici 2.5 velja

$$\begin{aligned}\varphi_Z(u) &= \exp[\lambda(\varphi_{X_1}(u) - 1)] \\ &= \exp\left[\lambda\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda} e^{a_j i u} - 1\right)\right] \\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (e^{a_j i u} - 1)\right].\end{aligned}$$

Vidimo, da zaporedje  $\varphi_{Z_n}(u)$  za vsak  $u \in \mathbb{R}$  po točkah konvergira k  $\varphi_Z(u)$ , torej

$$\varphi_{Z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_Z$$

po Lévijevem izreku o kontinuiteti 5.20 velja  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$ . □

Rezultat je zanimiv predvsem zato, ker nam v nasprotju s trditvijo 2.9 pove, da lahko slučajno vsoto izrazimo kot linearno kombinacijo oziroma vrsto Poissonovih slučajnih spremenljivk.

**2.3. Panjerjeva rekurzivna shema.** Poglejmo si popularno metodo za numerično aproksimacijo sestavljene Poissonove porazdelitve v praksi. Kot smo videli v zgledu 2.7, je izražava eksplicitne porazdelitve  $S$  v zaključeni obliki v splošnem nemogoča. Izkaže pa se, da jo je v posebnih primerih vselej mogoče rekurzivno izraziti in ustrezno posplošiti na širši razred porazdelitev.

**Trditev 2.11.** (Panjer) Naj bo  $N$  diskretna slučajna spremenljivka z vrednostmi v  $\mathbb{N}_0$ , za katero velja

$$\mathbb{P}(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) \mathbb{P}(N = n - 1) \quad \text{za } n \in \mathbb{N} \text{ in } a, b \in \mathbb{R}.$$

Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki zavzemajo vrednosti v  $\mathbb{N}_0$ . Potem za  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  od dogovora, da je  $0^0 := 1$ , velja

$$\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{P}(X_1 = 0)^N \right],$$

za  $n \in \mathbb{N}$  pa velja

$$\mathbb{P}(S = n) = \frac{1}{1 - a\mathbb{P}(X_1 = 0)} \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(S = n - k). \quad (2)$$

*Dokaz.* Po zakonu za popolno pričakovano vrednost velja

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = 0) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = 0 \mid N = j) \mathbb{P}(N = j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_j = 0) \mathbb{P}(N = j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = 0)^j \mathbb{P}(N = j) \\
&= \mathbb{E} \left[ \mathbb{P}(X_1 = 0)^N \right].
\end{aligned}$$

Za  $n \in \mathbb{N}$  pa velja

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = n) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_j = n) \mathbb{P}(N = j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_j = n) \left( a + \frac{b}{j} \right) \mathbb{P}(N = j - 1). \tag{3}
\end{aligned}$$

Ker so  $X_1, X_2, \dots$  neodvisne in enako porazdeljene, so izmenljive 5.10 in tako po trditvi 5.12 velja

$$1 = \mathbb{E} \left[ \frac{S_j}{S_j} \mid S_j \right] = \sum_{k=1}^j \mathbb{E} \left[ \frac{X_k}{S_j} \mid S_j \right] = j \mathbb{E} \left[ \frac{X_1}{S_j} \mid S_j \right],$$

torej je

$$\mathbb{E} \left[ \frac{X_1}{S_j} \mid S_j \right] = \frac{1}{j}$$

in posledično

$$\mathbb{E} \left[ a + \frac{bX_1}{n} \mid S_j = n \right] = a + \frac{b}{j}. \tag{4}$$

Nadalje velja

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[ a + \frac{bX_1}{n} \mid S_j = n \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left( a + \frac{bk}{n} \right) \mathbb{P}(X_1 = k \mid S_j = n) \\
&= \sum_{k=0}^n \left( a + \frac{bk}{n} \right) \frac{\mathbb{P}(X_1 = k, S_j - X_1 = n - k)}{\mathbb{P}(S_j = n)} \\
&= \sum_{k=0}^n \left( a + \frac{bk}{n} \right) \frac{\mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(S_{j-1} = n - k)}{\mathbb{P}(S_j = n)} \tag{5}
\end{aligned}$$

Če sedaj vstavimo enakost (4) v (3) in upoštevamo (5), dobimo

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(S_{j-1} = n - k) \mathbb{P}(N = j - 1).$$

Po Tonellijevem izreku 5.23 lahko zamenjamo vrstni red vsot, kar nam da

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = n) &= \sum_{k=0}^n \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{j-1} = n - k) \mathbb{P}(N = j - 1) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(S = n - k). \end{aligned}$$

Izpostavimo prvi člen vsote in izraz preoblikujemo.

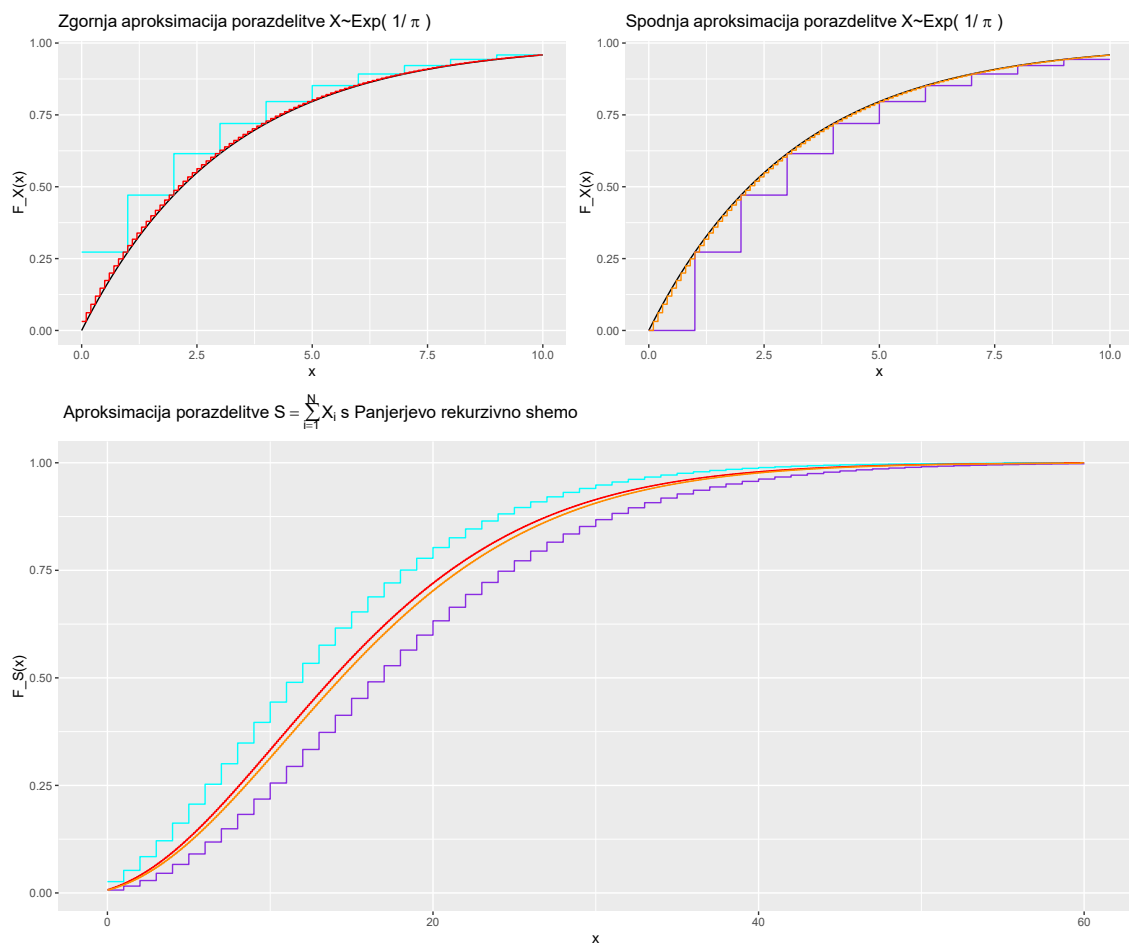
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = n) &= a\mathbb{P}(X_1 = 0) \mathbb{P}(S = n) + \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(S = n - k), \\ \mathbb{P}(S = n) &= \frac{1}{1 - a\mathbb{P}(X_1 = 0)} \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{bk}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(S = n - k). \end{aligned}$$

S tem je trditev dokazana. □

**Opomba 2.12.** Izkaže se, da le tri porazdelitve ustrezajo rekurzivni izražavi iz trditve 2.11. Te so  $\text{Pois}(\lambda)$ ,  $\text{Bin}(p)$  in  $\text{NegBin}(r, p)$  ob dogovoru, da ima zalogo vrednosti  $\mathbb{N}_0$  in  $r \geq 0$ . Pravimo jim *porazdelitve Panjerjevega razreda*. V primeru  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a = 0$  in  $b = \lambda$  velja  $\mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \left(0 + \frac{\lambda}{n}\right) \mathbb{P}(N = n - 1)$ . Tudi v ostalih primerih (argument je podan v [4] na strani 122) se izkaže, da je  $a < 1$ , tako da je enačba (2) res dobro definirana.

**Opomba 2.13.** Zahtevo, da  $X_i$  zavzemajo vrednosti v  $\mathbb{N}_0$ , se splača posplošiti, tako da zahtevamo le, da  $X_i$  zavzemajo vrednosti v  $h\mathbb{N}_0$  za neki  $h > 0$ . V tem primeru zapišemo  $S = h \sum_{i=1}^N \frac{X_i}{h}$  in tako rekurzivna zveza velja za  $\frac{S}{h}$ . Tako lahko aproksimiramo splošne slučajne spremenljivke, ki zavzemajo vrednosti v  $[0, \infty)$ , poljubno natančno.

**Zgled 2.14.** (Nadaljevanje zgleda 2.7) Recimo, da imamo konkretni porazdelitvi  $N \sim \text{Pois}(9,17)$  in  $X_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\pi})$ . S stopničastima funkcijama  $F_h^u$  in  $F_h^l$  aproksimiramo porazdelitveno funkcijo  $F_{X_1}$  za vrednosti  $h \in \{1, 0,1\}$ . (Aproksimacije so na sliki 2 in so obarvane;  $F_1^u$  modra,  $F_{0,1}^u$  rdeča,  $F_1^l$  vijolična in  $F_{0,1}^l$  oranžna). Za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $F_h^u(x) = F_{X_1}((n+1)h)$  za  $x \in [nh, (n+1)h)$  in  $F_h^l(x) = F_{X_1}(nh)$  za  $x \in [nh, (n+1)h)$ . S Panjerjevo rekurzivno shemo izračunamo približke porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke  $S$  na intervalu  $[0, 60]$ .



SLIKA 2. Aproksimacija porazdelitve  $S$  s Panjerjevo rekurzivno shemo.

Vidimo, da že za  $h = 0,1$  dobimo zelo natančno aproksimacijo porazdelitve. Danes Panjerjeva metoda predstavlja alternativo Monte Carlo metodam. Njena glavna prednost je, da z manjšanjem koraka  $h$  dosežemo poljubno natančno točno aproksimacijo neke porazdelitve. Monte Carlo metode so bolj splošne, saj temeljijo zgolj na ponavljanju simulacij in se lahko uporabljajo za modeliranje bolj zapletenih porazdelitev, ki ne zadoščajo pogojem trditve 2.11, ali njene posplošitve v opombi 2.12.

◇

### 3. SESTAVLJENI POISSONOV PROCES

Razdelek je prirejen po [1], [2], in [3].

Sedaj se posvetimo študiranju sestavljenega Poissonovega procesa. Bralec lahko najde osnovne definicije in lastnosti splošnih slučajnih procesov, ki nas zanimajo, med definicijama 5.3 in 5.8 v prilogi. Najprej dokažemo in izpeljemo nekaj osnovnih lastnosti procesa kot so neodvisnot in stacionarnost prirastov, pričakovana vrednost in varianca. Na koncu obravnavamo markiranje procesa glede čas in njegovo vrednost ter dokažemo nekaj zanimivih posledic.

Sestavljeni Poissonov proces temelji na homogenem Poissonovem procesu, zato najprej podamo definicijo s katero bomo delali, saj ima homogeni Poissonov proces več karakterizacij.

**Definicija 3.1.** Naj bo  $\lambda > 0$ . Družini slučajnih spremenljivk  $(N_t)_{t \geq 0}$ , definiranimi na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  z vrednostmi v  $\mathbb{N}_0$ , pravimo *homogeni Poissonov proces* z intenzivnostjo  $\lambda$ , če zadošča naslednjim pogojem:

- (1)  $N_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -skoraj gotovo.
- (2)  $(N_t)_{t \geq 0}$  ima neodvisne in stacionarne prirastke,
- (3) Za  $0 \leq s < t$  velja  $N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t - s))$ ,

**Opomba 3.2.** V delu bomo z  $V_n$  označevali čas  $n$ -tega prihoda v homogenem Poissonovem procesu in s  $T_n$   $n$ -ti medprihodni čas. Za medprihodne čase velja, da so neodvisni in enako porazdeljeni, kot  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Ta lastnost je tudi alternativna definicija procesa, kot poseben primer prenovitvenega procesa 5.27. Bralec lahko najde dokaz ekvivalence v [10] na strani 15.

**Definicija 3.3.** Naj bo  $(N_t)_{t \geq 0}$  homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda$ . Naj bo  $(X_i)_{i \geq 1}$  zaporedje neodvisnih (med sabo in od procesa  $(N_t)_{t \geq 0}$ ) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem je *sestavljeno Poissonov proces*  $(S_t)_{t \geq 0}$  definiran kot družina slučajnih spremenljivk

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0.$$

**Opomba 3.4.** Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces naravna posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za  $X_i$  vzamemo konstantno funkcijo  $X_i = 1$  za vsak  $i$ , dobimo le tega. Bolj v splošnem, če je  $X_i = \alpha$  deterministična funkcija, potem velja  $S_t = \alpha N_t$ .

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda > 0$  označevali s HPP( $\lambda$ ) ali naborom slučajnih spremenljivk  $(N_t)_{t \geq 0}$  (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s CPP ali naborom slučajnih spremenljivk  $(S_t)_{t \geq 0}$  (angl. Compound Poisson Process), kjer prihodi sledijo implicitno podanemu HPP( $\lambda$ ).

**3.1. Osnovne lastnosti.** Pri študiranju slučajnih procesov nas najprej zanimajo neke osnovne lastnosti, s katerimi je lažje delati kot z neštevničnim naborom slučajnih spremenljivk in s pomočjo katerih lahko pokažemo globlje rezultate o procesu.

**Trditev 3.5.** *Slučajni proces  $(X_t)_{t \geq 0}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , za katerega je  $X_0 = 0$ , ima neodvisne in stacionarne prirastke natanko tedaj, ko za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$  velja*

$$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_{t_1}, \dots, X_{t_n} \sim X_{t_{n+1}-t_n}. \quad (6)$$

*Dokaz.* ( $\Rightarrow$ ) : Recimo, da ima  $(X_t)_{t \geq 0}$  neodvisne in stacionarne prirastke. Ker je  $X_0$  konstanta, lahko pišemo  $X_0 = x_0$ . Po predpostavki in definicijah 5.6 in 5.7 je

$$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_{t_1} - x_0, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \sim X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \sim X_{t_{n+1}-t_n}.$$

Po trditvi 5.9 je potem za poljubno Borelovo funkcijo  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tudi

$$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid g(X_{t_1} - x_0, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \sim X_{t_{n+1}-t_n}.$$

Če definiramo

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, \dots, y_n) &= (g_1, g_2, \dots, g_n), \\ g_1 &= y_1 + x_0, \\ g_2 &= y_2 + g_1, \\ &\vdots \\ g_n &= y_n + g_{n-1}. \end{aligned}$$

Funkcija  $g$  je očitno merljiva, saj jo definiramo le s seštevanjem. Ker velja  $g(X_{t_1} - x_0, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ , smo dokazali prvo smer implikacije.

( $\Leftarrow$ ) : Recimo, da za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$  velja (6). Zdaj definiramo

$$\begin{aligned} h(y_1, y_2, \dots, y_n) &= (h_1, h_2, \dots, h_n), \\ h_1 &= y_1 - x_0, \\ h_2 &= y_2 + y_1, \\ &\vdots \\ h_n &= y_n + y_{n-1}. \end{aligned}$$

Po trditvi 5.9 je potem  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$  neodvisna od  $(X_{t_1} - X_0, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$  in enako porazdeljena kot  $X_{t_{n+1}-t_n}$ . Z indukcijo dobimo, da so potem tudi prirastki med seboj neodvisni in stacionarni. □

**Trditev 3.6.** *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

*Dokaz.* Po trditvi 3.5 je dovolj pokazati, da za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$  velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid S_{t_1}, \dots, S_{t_n} \sim S_{t_{n+1}-t_n}.$$

Naj bodo  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  in  $k_1 \leq \dots \leq k_n$ . Na dogodku  $\{N_{t_n} = k_n\}$  velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} = \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i,$$

zato je

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n}$$



$$\sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n}.$$

Ker pa so  $X_1, \dots, X_{k_n}, X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, N_{t_{n+1}} - N_{t_n}$ , neodvisne, sledi, da sta neodvisna tudi vektorja

$$(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, X_1, \dots, X_{k_n}) \quad \text{in} \quad (N_{t_{n+1}} - N_{t_n}, X_{k_n+1}, \dots),$$

z njima pa tudi vektor  $(N_{t_1}, \dots, N_{t_n}, X_1, \dots, X_{k_n})$  in slučajna spremenljivka  $\sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i$ . Torej je

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n} \sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i.$$

Vemo, da po stacionarnosti prirastkov HPP velja  $N_{t_{n+1}} - N_{t_n} \sim N_{t_{n+1}-t_n}$ . Ker pa je zaporedje  $X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots$  neodvisno od  $N_{t_{n+1}} - N_{t_n}$ , zaporedje  $X_1, X_2, \dots$  neodvisno od  $N_{t_{n+1}-t_n}$  ter ker sta zaporedji  $X_1, X_2, \dots$  in  $X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots$  enako porazdeljeni, je tudi

$$N_{t_{n+1}} - N_{t_n}; X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots \sim N_{t_{n+1}-t_n}; X_1, X_2, \dots$$

in zato tudi

$$\begin{aligned} S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n} \\ \sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i \sim \sum_{i=1}^{N_{t_{n+1}}-t_n} X_i = S_{t_{n+1}-t_n}. \end{aligned}$$

Potem pa je po trditvi 5.9 tudi

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, \sum_{i=1}^{k_1} X_i, \dots, \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i \sim S_{t_{n+1}-t_n}.$$

Ker pa na dogodku  $\{N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n\}$  velja

$$\sum_{i=1}^{k_1} X_i = S_{t_1}, \dots, \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i = S_{t_n} - S_{t_{n-1}},$$

je končno

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, S_{t_1}, \dots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

oziroma

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1}, \dots, N_{t_n}, S_{t_1}, \dots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

in spet po trditvi 5.9 velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid S_{t_1}, \dots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}.$$

□

**Trditev 3.7.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP in naj bosta  $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$  pričakovana vrednost in  $\sigma^2 = \text{Var}[X_i] < \infty$  varianca slučajnih spremenljivk  $X_i$ . Potem sta za  $t \geq 0$  pričakovana vrednost in varianca  $S_t$  enaki

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu \lambda t \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2).$$

*Dokaz.* Za  $t \geq 0$  in  $k \in \mathbb{N}_0$  velja

$$\mathbb{E}[S_t | N_t = k] = k\mu \quad \text{in} \quad \mathbb{V}\text{ar}[S_t | N_t = k] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja  $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t | N_t]]$ . Torej je

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t | N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu\lambda t.$$

Prek formule  $\mathbb{V}\text{ar}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{V}\text{ar}[S_t | N_t]] + \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}[S_t | N_t]]$  računamo

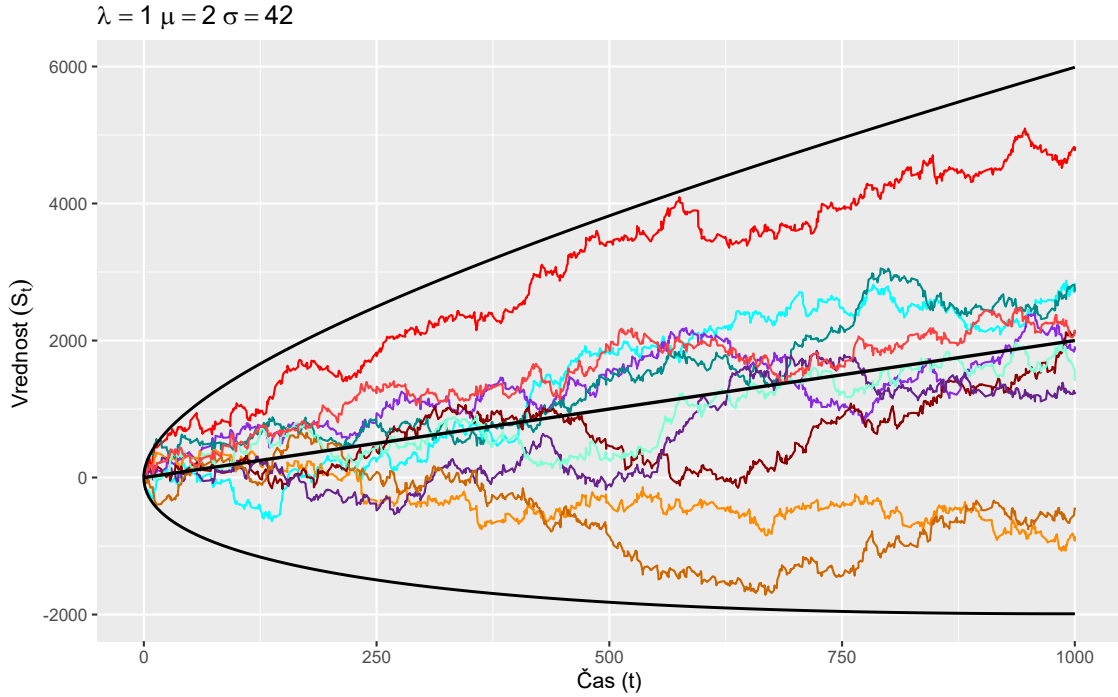
$$\mathbb{E}[\mathbb{V}\text{ar}[S_t | N_t]] = \mathbb{E}[\mathbb{V}\text{ar}[X_i | N_t]] = \sigma^2\lambda t$$

in

$$\mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}[S_t | N_t]] = \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}[X_i | N_t]] = \mu^2\lambda t.$$

Če enačbi seštejemo, dobimo  $\mathbb{V}\text{ar}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2)$ .  $\square$

**Zgled 3.8.** Poglejmo si primer ko je zaporedje  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  porazdeljeno kot  $X_1 \sim N(2, 42)$ . Tedaj za  $t \geq 0$  velja  $\mathbb{E}[S_t] = 2t$  in  $\mathbb{V}\text{ar}[S_t] = t(2^2 + 42^2) = 1768t$  ter  $\sigma_{S_t} = \sqrt{1768t}$ . Simuliramo 10 realizacij CPP do časa  $T = 1000$ , ki jih prikažemo na sliki 3 skupaj s funkcijami  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$  in  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$ .



SLIKA 3. Trajektorije CPP s funkcijami  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$  in  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$

$\diamond$

**3.2. Markiranje.** V trditvi 2.9 smo pokazali, da ima vsota neodvisnih sestavljenih Poissonovih porazdelitev spet sestavljeno Poissonovo porazdelitev. Podobno lahko CPP razdelimo na več neodvisnih sestavljenih Poissonovih procesov, tako da ga markiramo glede na čas in vrednost posameznega prihoda.

**Izrek 3.9.** (o markiranju) Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP. Naj bodo  $A_1, \dots, A_n$  disjunktne podmnožice množice  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Potem so za fiksen  $t \geq 0$  slučajne spremenljivke

$$S_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(V_i, X_i), \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

kjer  $V_i$  označuje čas  $i$ -tega prihoda, med seboj neodvisne. Še več, za vsak  $j = 1, \dots, n$  je

$$S_t^{(j)} \sim \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i),$$

kjer je  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih (med sabo, ter še od  $N_t$  in  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ) slučajnih spremenljivk, porazdeljenih enakomerno  $U([0, t])$ . Slučajna spremenljivka  $S_t^{(j)}$  ima torej sestavljeno Poissonovo porazdelitev.

*Dokaz.* Za splošni HPP( $\lambda$ ) velja lastnost vrstilnih statistik 5.24, torej

$$(V_1, \dots, V_k \mid N_t = k) \sim (U_{(1)}, \dots, U_{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tako lahko za  $j \in \{1, \dots, n\}$  pogojno porazdelitev vsote (7) na dogodek  $\{N_t = k\}$  zapišemo kot

$$S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\} \sim \sum_{i=1}^k X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_{(i)}, X_i).$$

Vrstni red sumandov je nepomemben. Z upoštevanjem neodvisnosti in enake porazdeljenosti slučajnih spremenljivk  $X_i$  lahko dano pogojno porazdelitev zapišemo kot

$$S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\} \sim \sum_{i=1}^k X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i).$$

(Bolj natančen argument bralec lahko najde v [4] na strani 28.) Sedaj pa si pogledjmo skupno karakteristično funkcijo slučajnega vektorja  $(S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)})$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}}(u_1, \dots, u_n) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left[ iu_1 S_t^{(1)} + \dots + iu_n S_t^{(n)} \right] \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ iu_1 S_t^{(1)} + \dots + iu_n S_t^{(n)} \right] \mid N_t = k \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{j=1}^n iu_j \sum_{i=1}^k X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \right] \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n iu_j X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \right] \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^n iu_j X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \right] \right]. \end{aligned}$$

Opazimo, da imamo v eksponentu sestavljeno Poissonovo vsoto, za katero poznamo obliko karakteristične funkcije iz posledice 2.5. Za namene berljivosti pišimo

$$\varphi_{S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}}(u_1, \dots, u_n) = e^{g(u_1, \dots, u_n)}, \quad (8)$$

kjer je

$$g(u_1, \dots, u_n) = \lambda t \left( \underbrace{\mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{j=1}^n i u_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1) \right] \right]}_{(i)} - 1 \right). \quad (9)$$

Ker so množice  $A_j$  disjunktne, velja identiteta

$$\exp \left[ \sum_{j=1}^n i u_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1) \right] - 1 = \sum_{j=1}^n (\exp [i u_j X_1 - 1] \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1)).$$

$$\begin{aligned} (i) &= \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}} e^{\sum_{j=1}^n i u_j x \mathbb{1}_{A_j}(u, x)} dF_{U_1, X_1}(u, x) \\ &= \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}} \prod_{j=1}^n e^{i u_j x \mathbb{1}_{A_j}(u, x)} dF_{U_1, X_1}(u, x) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}} e^{i u_j x \mathbb{1}_{A_j}(u, x)} dF_{U_1, X_1}(u, x) \right. \\ &\quad \left. - \int_{([0, \infty) \times \mathbb{R}) \setminus A_j} dF_{U_1, X_1}(u, x) \right). \end{aligned}$$

Enačbo (9) tako poenostavimo

$$\begin{aligned} &\lambda t \left( \left( \sum_{j=1}^n (\mathbb{E} [\exp (i u_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1))]) - (1 - \mathbb{P}((U_1, X_1) \in A_j)) \right) - 1 \right) \\ &= \lambda t \sum_{j=1}^n (\mathbb{E} [\exp [i u_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1)]] - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

in vidimo, da je (10) ravno vsota eksponentov karakterističnih funkcij  $\varphi_{S_t^{(j)}}$ . Tako sledi, da so slučajne spremenljivke  $S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}$  neodvisne in po obliki karakteristične funkcije vidimo, da so res porazdeljene sestavljeno Poissonovo.  $\square$

Izrek o markiranju CPP ima vrsto uporabnih posledic. Direktno nam poda enostaven alternativen dokaz za neodvisnost prirastkov.<sup>2</sup>, da dobimo

**Posledica 3.10.** *CPP ima neodvisne prirastke.*

*Dokaz.* Naj bo  $A_1, \dots, A_n$  disjunktne particije množice  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  za realna števila  $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_n < t < \infty$  definirane kot

$$A_1 = [0, t_1) \times \mathbb{R}, \quad A_j = [t_{j-1}, t_j) \times \mathbb{R}, \quad \text{za } j = 2, \dots, n \quad \text{in} \quad A_{n+1} = [t_n, \infty) \times \mathbb{R}.$$

<sup>2</sup> V delu integral s takšnim zapisom območja integracije označuje Lebesgueov integral po Lebesgueovi ali Lebesgue-Stieltjesovi meri porojeni z ustrezno porazdelitveno funkcijo.

Potem so po izreku o markiranju slučajne spremenljivke  $S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}$  neodvisne in enako porazdeljene kot

$$S_t^{(j)} \sim \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \sim \sum_{i=N_{t_{j-1}}+1}^{N_{t_j}} X_i \sim S_{t_j} - S_{t_{j-1}} \quad \text{za } j = 1, \dots, n.$$

□

**Posledica 3.11.** Če v predpostavkah izreka o markiranju CPP sprostimo  $t \geq 0$ , so procesi  $(S_t^{(j)})_{t \geq 0}$  med seboj neodvisni in imajo neodvisne prirastke.

*Dokaz.* Najprej fiksiramo  $j = 1, \dots, n$  in pokažemo, da ima  $(S_t^{(j)})_{t \geq 0}$  neodvisne prirastke, z enakim argumentom kot v prejšnji posledici. Za realna števila  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_\infty$  definiramo  $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k)$  in množice

$$A_k^* = A_j \cap (\Delta_k \times \mathbb{R}), \quad k = 1, \dots, m.$$

Po izreku o markiranju so slučajne spremenljivke

$$\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_k^*}(V_i, X_i) \sim \sum_{i=N_{t_{k-1}}+1}^{N_{t_k}} X_i \mathbb{1}_{A_j}(V_i, X_i) = S_{t_k}^{(j)} - S_{t_{k-1}}^{(j)}$$

med seboj neodvisne. Neodvisnost procesov  $(S_t^{(1)})_{t \geq 0}, \dots, (S_t^{(n)})_{t \geq 0}$  pokažemo po definiciji 5.8. Za  $j = 1, \dots, n$  in  $m_j \in \mathbb{N}$  naj bodo  $0 = t_0^{(j)} < t_1^{(j)} < \dots < t_{m_j}^{(j)} < \infty$  poljubni nabori realnih števil. Definiramo  $\Delta_k^{(j)} = [t_{k-1}^{(j)}, t_k^{(j)})$  in množice

$$A_k^{*(j)} = A_j \cap (\Delta_k^{(j)} \times \mathbb{R}), \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m_j,$$

ki so očitno disjunktna particija množice  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  za vsak  $j = 1, \dots, n$ . Naj bo  $t = \max_{j=1, \dots, n} t_{m_j}$ . Po izreku o markiranju so prirastki porazdeljeni kot

$$\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_k^{*(j)}}(U_i, X_i) \sim S_{t_k^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{k-1}^{(j)}}^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m_j$$

in med seboj neodvisni. Podobno kot v trditvi 3.5 za  $j = 1, \dots, n$  lahko tvorimo borelovo funkcijo  $g_j : \mathbb{R}^{m_j+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_j+1}$ , da velja

$$g_j \left( S_{t_1^{(j)}}^{(j)} - S_{t_0^{(j)}}^{(j)}, \dots, S_{t_{m_j}^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{m_j-1}^{(j)}}^{(j)} \right) = \left( S_{t_0^{(j)}}^{(j)}, \dots, S_{t_{m_j}^{(j)}}^{(j)} \right).$$

in ker so prirastki med seboj neodvisni smo tako po definiciji pokazali neodvisnost procesov  $(S_t^{(1)})_{t \geq 0}, \dots, (S_t^{(n)})_{t \geq 0}$ . □

**Zgled 3.12.** Markiranje je v praksi posebej uporabno pri analizi produktov proporcionalnega pozavarovanja, kjer si zavarovalnica (cedent) in pozavarovalnica delita obveznosti in dobiček glede na velikost zahtevkov. Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP v katerem seštevamo nenegativne slučajne spremenljivke  $X_i$ , ki predstavljajo zahtevke, ki jih zavarovalnica prejema, in  $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_n < \infty$  pozitivna realna števila. Za fiksno  $t \geq 0$  so množice  $A_1, \dots, A_{n+1}$  in  $B$  disjunktna particija množice  $[0, \infty)^2$  oblike

$$A_j = [0, t) \times [d_{j-1}, d_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad A_{n+1} = [0, t) \times [d_n, \infty) \text{ in } B = [t, \infty) \times [0, \infty).$$

Po izreku o markiranju vemo, da so slučajne spremenljivke  $S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}$  med seboj neodvisne in imajo sestavljeno Poissonovo porazdelitev. Tako lahko analiziramo

posamezen sloj kot produkt sam zase in ustrezno določimo delež premij, ki ga pozavarovalnica dobi za kritje zahtevkov določenega sloja. Če v pogodbi ne določimo končnega časa  $t$  (seveda to ni realno) nam posledica 3.11 zagotavlja, da so procesi  $(S_t^{(1)})_{t \geq 0}, \dots, (S_t^{(n)})_{t \geq 0}$  vselej medsebojno neodvisni.  $\diamond$

#### 4. CRAMÉR–LUNDBERGOV MODEL

Razdelek je prirejen po [3], [4], [5] in [9].

V tem razdelku obravnavamo najbolj intenzivno raziskan model v teoriji propada, običajno imenovan Cramér–Lundbergov model. V svoji najosnovnejši obliki ga je v zgodnjih 1900. letih izpeljal švedski aktuar Filip Lundberg, da bi ocenil ranljivost zavarovalnice za propad. Čeprav je model v svoji ideji dokaj preprost, zajema bistvo povezave ravni rezerv zavarovalnice in njene izpostavljenosti tveganju, kar je razlog, zakaj je postal temeljni merilni model v teoriji propada. V preteklem stoletju je bilo razvitih veliko tehnik za analizo Cramér–Lundbergovega modela, ki so se večinoma osredotočale na kvantifikacijo verjetnosti propada zavarovalnice. V razdelku definiramo model in izpeljemo Lundbergovo neenakost ter asimptotično obnašanje verjetnosti propada v primeru, ko zavarovalniške zahteve modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. V zgledih pokažemo, kako do rezultatov, ki nam jih zagotavlja teorija, pridemo v praksi z Monte Carlo simulacijami procesa tveganja.

##### 4.1. Proces tveganja in verjetnost propada.

**Definicija 4.1.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP, kjer so slučajne spremenljivke  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , ki jih seštevamo s.g. nenegativne. *Proces tveganja* v Cramér–Lundbergovem modelu definiramo kot družino slučajnih spremenljivk

$$U_t = u + p(t) - S_t, \quad t \geq 0,$$

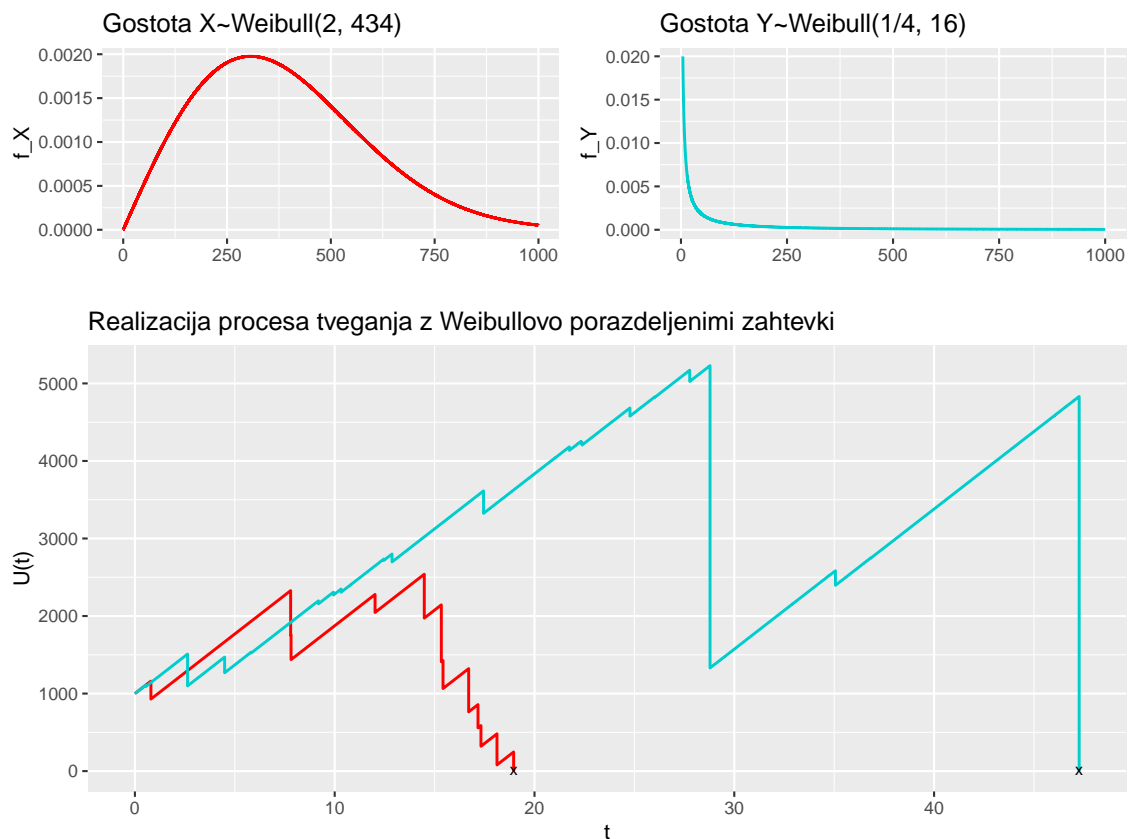
kjer je  $u \geq 0$  začetni kapital zavarovalnice<sup>3</sup> in  $p(t)$  funkcija prihodkov iz premij.

**Opomba 4.2.** V resnici lahko veliko lastnosti procesa tveganja izpeljemo brez predpostavke, da prihodi zahtevkov v  $(S_t)_{t \geq 0}$  sledijo homogenemu Poissonovemu procesu, ampak lahko privzamemo, da sledijo splošnemu prenovitvenemu procesu. Zato bomo pri dokazovanju nekaterih rezultatov medprihodne čase zahtevkov  $T_i$  obravnavali v splošnem, ne da bi predpostavili, da so eksponentno porazdeljeni.

Vrednost  $U_t$  predstavlja kapital zavarovalnice ob času  $t \geq 0$ . Standardno je vzeti deterministično funkcijo  $p(t) = ct$ , kjer je  $c > 0$  stopnja prihodkov premij. Uporaba linearne funkcije za modeliranje premijskega dohodka v Cramér–Lundbergovem modelu ponuja realističen približek zato, ker zavarovalnice pogosto doživljajo stabilno povečevanje premijskega dohodka skozi čas. Poleg tega je izbira linearne funkcije preprosta, zato bomo v nadaljevanju privzeli  $p(t) = ct$ . Poglejmo si realizaciji procesa tveganja, ko so zahtevki  $X_i$  porazdeljeni Weibullovo 5.13 z različnimi parametri.

**Zgled 4.3.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu z začetnim kapitalom  $u = 1000$  in  $p(t) = 200t$  ter intenzivnostjo prihodov zahtevkov  $\lambda = 1$ . Naj bodo v prvem primeru (rdeča) zahtevki porazdeljeni kot  $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$  in v drugem primeru (modra) kot  $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$ .

<sup>3</sup> Proces tveganja vedno gledamo v odvisnosti od začetnega kapitala  $u$ , zato za fiksni  $u \geq 0$  pripadajočo verjetnost označimo s  $\mathbb{P}_u$ .



SLIKA 4. Realizaciji procesa tveganja

Pri obeh realizacijah vidimo, da proces tveganja v nekem trenutku pade pod 0 (tam ga tudi ustavimo). Čeprav je pričakova vrednost  $\mathbb{E}[Y_i] = 384 \approx \mathbb{E}[X_i] = 217\sqrt{\pi} \approx 384,62$  opazimo bistveno razliko med realizacijama. V rdečem primeru proces pade pod 0 po več zaporednih manjših izgubah, v modrem primeru pa po eni zelo veliki izgubi. V nadaljevanju bomo primera ločili, ampak pred tem definirajmo osnovne pojme, ki jih bomo obravnavali v razdelku.

◇

**Definicija 4.4.** *Propad* definiramo kot dogodek, da proces tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  kadarkoli pade pod 0. Torej

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\}$$

in času ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\},$$

pravimo *čas propada*. Seveda med dogodkoma velja enakost

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} = \{T < \infty\}.$$

**Definicija 4.5.** *Verjetnost propada* definiramo kot funkcijo  $\psi(u) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  s predpisom

$$\psi(u) = \mathbb{P}_u(T < \infty).$$



**Definicija 4.6.** Po konstrukciji procesa tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  je verjetnost propada mogoča le ob prihodih zahtevkov. Z  $V_n$  označimo čas, ob katerem prispe  $n$ -ti zahtevek, in definiramo *ogrodje procesa tveganja* kot  $(U_{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Trditev 4.7.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu in  $(U_{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$  njegovo ogrodje ter  $T_n := V_n - V_{n-1}$  medprihodni čas  $n$ -tega zahtevka ( $V_0 = T_0 = 0$ ). Potem velja

$$\psi(u) = \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right),$$

kjer je  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  kumulativna izguba po  $n$  zahtevkih in  $Y_i = X_i - cT_i$  izguba  $i$ -tega prihoda.

*Dokaz.* S pomočjo ogrodja procesa tveganja lahko dogodek propada zapišemo kot

$$\begin{aligned} \{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} &= \left\{ \inf_{t \geq 0} U_t < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} U_{V_n} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \{u + p(V_n) - S_{V_n}\} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ u + cV_n - \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i}_{-Z_n} \right\} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \{-Z_n\} < -u \right\} \\ &= \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right\}, \end{aligned}$$

kar nam da želeno enakost. □

Tako verjetnost propada prevedemo na prehodno verjetnost diskretnega slučajnega sprehoda  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Cilj obravnavanja verjetnosti propada v Cramér–Lundbergovem modelu je, da se izognemo skoraj gotovemu propadu oziroma, da je verjetnost, da kumulativna izguba  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  preseže  $u$  tako majhna, da lahko v praksi dogodek propada izključimo.

**Trditev 4.8.** Naj bo  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje slučajnih spremenljivk, definirano kot  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke  $Y_i$  z  $\mathbb{E}[Y_i] < \infty$ . Če velja  $\mathbb{E}[Y_i] \geq 0$ , za vsak  $u > 0$  velja

$$\mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right) = 1.$$

*Dokaz.* Zaporedje slučajnih spremenljivk  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zadošča predpostavkam krepkega zakona velikih števil 5.18. Velja

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} \mathbb{E}[Y_n].$$

Torej bo  $Z_n$  v primeru, ko je  $\mathbb{E}[Y_n] > 0$ , skoraj gotovo asimptotično linearno naraščal proti  $\infty$  kot  $\mathbb{E}[Y_n]n$  in bo za poljuben  $u > 0$  veljalo

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

Dokaz za primer, ko je  $\mathbb{E}[Y_n] = 0$  je precej bolj tehničen in ne preveč informativen, zato ga bomo izpustili. Izkaže se, da vedno obstajata neki podzaporedji  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , za kateri gre  $Z_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{s.g.} \infty$  in  $Z_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty$ . Dokaz lahko bralec najde v [6] v poglavju 4.  $\square$

**Opomba 4.9.** Iz trditve 4.8 (ob predpostavkah  $\mathbb{E}[X_i] < \infty$  in  $\mathbb{E}[T_i] < \infty$ ) sledi, da moramo premijo (in s tem  $c$ ) izbrati tako, da bo  $\mathbb{E}[Y_i] < 0$ , saj bo tako  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty$  in je to edini primer, ko lahko upamo, da verjetnost propada ne bo enaka 1.

**Definicija 4.10.** Pravimo, da proces tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  v Cramér–Lundbergovem modelu zadošča *pogoju neto zaslужka* (ang. *net profit condition*), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]}, \quad \text{oziroma} \quad c = (1 + \rho) \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} \quad \text{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljevanju imenovali NPC.

Zahteva NPC za analizo poslovanja zavarovalnice je dokaj intuitivna, saj pove, da mora biti v nekem časovnem intervalu pričakovani dohodek iz premij večji od pričakovanega izplačila zahtevkov.

**4.2. Verjetnost preživetja kot integralska enačba.** Od sedaj naprej predpostavimo, da je  $(S_t)_{t \geq 0}$  v procesu tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  sestavljeni Poissonov proces. V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo asimptotično vedenje  $\psi(u)$ , ko gre  $u \rightarrow \infty$ . Verjetnost propada zelo redko lahko eksplicitno izračunamo, ampak veliko lahko povemo o redu konvergence s tem, da jo izrazimo kot integralsko enačbo.

**Definicija 4.11.** Za lepšo notacijo v nadaljevanju definiramo funkcijo *verjetnosti preživetja* kot  $\theta(u) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  s predpisom

$$\theta(u) = \mathbb{P}_u(T = \infty) = 1 - \psi(u).$$

**Lema 4.12.** (*Integralska enačba za verjetnost preživetja*) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC, ter naj velja  $\mathbb{E}[X_1] < \infty$  in, da imajo slučajne spremenljivke  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gostoto. Potem  $\theta$  zadošča naslednji enakosti

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1 + \rho)} \int_{(0, u]} \theta(u - x) d\bar{F}_{X_1}(x), \quad (11)$$

kjer je  $\bar{F}_{X_1}$  porazdelitev integriranega repa 5.26 slučajne spremenljivke  $X_1$ .

*Dokaz.* Po trditvi 4.7 velja

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  in  $Y_i = X_i - cT_i$ . Torej je

$$\theta(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq u\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(\{Z_n \leq u \text{ za } \forall n \in \mathbb{N}\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{Y_1 \leq u\} \cap \{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \text{ za } \forall n \geq 2\}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y_1 \leq u\}} \mathbb{P}\left(\{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \text{ za } \forall n \geq 2\} \mid Y_1\right)\right].
\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je  $Y_1 = X_1 - cT_1$  in je torej dogodek  $\{Y_1 \leq u\}$  enak dogodku  $\{X_1 \leq u + cT_1\}$ . Poleg tega velja, da je  $(Z_n - Y_1 \mid Y_1)_{n \geq 2} \sim (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , saj so  $Y_i$  neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Upoštevamo še, da je  $T_1$  medprihodni čas v HPP( $\lambda$ ) in dobimo

$$\begin{aligned}
\theta(u) &= \int_{(0, \infty)} \int_{(0, u+ct]} \mathbb{P}\left(\{Z_n \leq u - (x - ct) \mid n \in \mathbb{N}\}\right) dF_{X_1}(x) dF_{T_1}(t) \\
&= \int_{(0, \infty)} \int_{(0, u+ct]} \theta(u - x + ct) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda t} dt.
\end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko  $z = u + ct$  (torej  $t = \frac{z-u}{c}$  in  $dt = \frac{dz}{c}$ ) in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_{(u, \infty)} e^{-\frac{\lambda z}{c}} \underbrace{\int_{(0, z)} \theta(z - x) dF_{X_1}(x) dz}_{g(z)}.$$

Ker ima porazdelitev  $F_{X_1}$  gostoto in je  $\theta$  zvezna omejena funkcija, sledi, da je funkcija  $g$  zvezna in jo lahko (po osnovnem izreku analize) odvajamo, da dobimo

$$\theta'(u) = \frac{\lambda}{c} \theta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{(0, u)} \theta(u - x) dF_{X_1}(x).$$

Če sedaj obe strani integriramo po  $u$ , dobimo

$$\int_{(0, t]} \theta'(u) du = \frac{\lambda}{c} \int_{(0, t]} \theta(u) du - \overbrace{\frac{\lambda}{c} \int_{(0, t]} \int_{(0, u]} \theta(u - x) dF_{X_1}(x) du}^{(ii)}. \quad (12)$$

(i)

Na integralu (i) uporabimo per partes ( $\alpha = \theta(u - x)$  in  $d\beta = dF_{X_1}(x)$ ) ter upoštevamo, da ima  $F_{X_1}$  gostoto.

$$\begin{aligned}
(i) &= \left(\theta(u - x) F_{X_1}(x)\right) \Big|_0^u + \int_{(0, u)} \theta'(u - x) F_{X_1}(x) dx \\
&= \theta(0) F_{X_1}(u) - \int_{(0, u)} \theta'(u - x) F_{X_1}(x) dx.
\end{aligned}$$

Upoštevamo, da je  $F_{X_1}(0) = 0$ , saj je  $X_1 > 0$  skoraj gotovo. Vstavimo (i) v (ii) in dobimo

$$(ii) = -\frac{\lambda}{c} \int_{(0, t]} \theta(0) F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0, t]} \int_{(0, u]} \theta'(u - x) F_{X_1}(x) dx du.$$

Po Tonellijevem izreku 5.23 lahko zamenjamo vrstni red integracije.

$$\begin{aligned}
(ii) &= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0) F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) \int_{[x,t]} \theta'(u-x) du dx \\
&= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0) F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) (\theta(t-x) - \theta(0)) dx. \\
&= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) \theta(t-x) dx.
\end{aligned}$$

Vstavimo (ii) v enačbo (12) in dobimo

$$\begin{aligned}
\theta(t) - \theta(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) \theta(t-x) dx, \\
\theta(t) &= \theta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} (1 - F_{X_1}(x)) \theta(t-x) dx \\
&= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,u]} \theta(u-x) d\bar{F}_{X_1}(x).
\end{aligned}$$

Pri enakosti v zadnji vrstici smo upoštevali

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1+\rho} \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]}$$

in zamenjali oznako spremenljivke  $t \mapsto u$ . S tem je lema dokazana.  $\square$

**Opomba 4.13.** Konstanto  $\theta(0)$ , ki se pojavi v (11), lahko izračunamo. Ker  $c$  zadošča NPC, po argumentu v dokazu trditve 4.8 velja

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty.$$

Po zveznosti  $\mathbb{P}$  od spodaj sledi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq u \right) = \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq \infty \right) = 1.$$

Če torej v enačbi (11) pošljemo  $u \rightarrow \infty$ , dobimo

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \theta(u) = 1 = \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{(0,u]}(x) \theta(u-x) d\bar{F}_{X_1}(x).$$

Po izreku o monotoni konvergenči 5.21 sledi

$$\begin{aligned}
1 &= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,\infty)} 1 d\bar{F}_{X_1}(x) \\
&= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}.
\end{aligned}$$

Torej je  $\theta(0) = \frac{\rho}{1+\rho}$ . Enakost upoštevamo v enačbi (11) in uvedemo oznako  $\frac{1}{1+\rho} = q$ , da dobimo

$$\theta(u) = (1-q) + q \int_{(0,u]} \theta(u-x) d\bar{F}_{X_1}(x). \quad (13)$$

**Opomba 4.14.** Integralska enačba (13) skoraj ustreza definiciji prenovitvene enačbe 5.28, s to bistveno razliko, da  $q\bar{F}_{X_1}$  ni verjetnostna mera, saj velja  $\lim_{x \rightarrow \infty} q\bar{F}_{X_1}(x) = q < 1$ . Taki enačbi pravimo defektna prenovitvena enačba. V splošnem defektne prenovitvene enačbe lahko rešujemo s pomočjo Banachovega izreka o negibni točki 5.32. Da funkcija  $\theta$  reši enačbo (13) lahko povemo tako, da je negibna točka operatorja

$$Ag(u) = (1 - q) + q \int_{(0,u]} g(u - x) d\bar{F}_{X_1}(x), \quad (14)$$

saj je ta skrčitev na prostoru omejenih funkcij  $B([0, \infty))$  opremljenim s supremum metriko

$$d_\infty(f, g) = \sup_{u \in [0, \infty)} |f(u) - g(u)|, \quad f, g \in B([0, \infty)).$$

To enostavno pokažemo z oceno

$$\begin{aligned} \sup_{u \in [0, \infty)} |Af(u) - Ag(v)| &= \sup_{u \in [0, \infty)} \left| q \int_{(0,u]} f(u - x) - g(u - x) d\bar{F}_{X_1}(x) \right| \\ &\leq \sup_{u \in [0, \infty)} q \int_{(0,u]} |f(u - x) - g(u - x)| d\bar{F}_{X_1}(x) \\ &\leq \sup_{u \in [0, \infty)} q \int_{(0,u]} d_\infty(f, g) d\bar{F}_{X_1}(x) \\ &\leq q \int_{(0, \infty)} d_\infty(f, g) d\bar{F}_{X_1}(x) \\ &= q d_\infty(f, g). \end{aligned}$$

**4.3. Lahkorepe porazdelitve.** Pri analizi asimptotike verjetnosti propada se bomo najprej omejili na primer, ko ima porazdelitev slučajnih spremenljivk  $X_i$ , ki jih seštevamo v CPP lahek rep, saj je bila osnovna teorija, ki sta jo razvila H. Cramér in F. Lundberg, izpeljana pod to predpostavko.

**Definicija 4.15.** Pravimo, da ima slučajna spremenljivka  $X$  *lahkorepo porazdelitev*, če za nek  $\varepsilon > 0$  velja

$$\mathbb{E}[e^{uX}] = M_X(u) < \infty \quad \text{za } u \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Sicer pravimo, da ima  $X$  *težkorepo porazdelitev*.

**Opomba 4.16.** V razdelku večinoma delamo z nenegativnimi slučajnimi spremenljivkami. Za te momentno-rodovna funkcija vedno obstaja vsaj na intervalu  $(-\infty, 0]$ .

**Zgled 4.17.** (Nadaljevanje zgleda 4.3) V zgledu smo obravnavali proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, kjer so zahtevki (rdeča)  $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$  in (modra)  $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$ . Opazili smo, da je v prvem primeru propad posledica več manjših izgub, v drugem pa ene velike izgube. To je značilnost težkorepih porazdelitev. Za Weibullovo porazdelitev velja, da ima za parameter  $a \geq 1$  lahek, za  $a < 1$  pa težak rep.

*Dokaz.* Momentno-rodovna funkcija  $X \sim \text{Weibull}(a, b)$  je enaka

$$M_X(u) = \int_0^\infty e^{ux} \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} dx \quad \left(y = \frac{x}{b}, \quad dy = \frac{dx}{b}\right)$$

$$= a \int_0^\infty e^{uby} y^{a-1} e^{-y^a} dy.$$

Vidimo, da na spodnji meji 0 ni težav za noben  $a > 0$ , medtem ko v neskončnosti za  $a \in (0, 1)$  integral divergira, saj se eksponent poenostavi v  $y^a(uby^{1-a} - 1) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$ . Če v nadaljevanju predpostavimo  $a \geq 1$  in uvedemo  $z = y^a$  ( $dz = ay^{a-1}dy$ ) pa lahko pridemo do naslednje oblike za momentno rodovno funkcijo  $X$ .

$$\begin{aligned} M_X(u) &= \int_0^\infty e^{ubz^{\frac{1}{a}}} e^{-z} dz \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(ubz^{\frac{1}{a}})^k}{k!} e^{-z} dz && \text{Tonelli 5.23} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \int_0^\infty z^{\frac{k}{a}} e^{-z} dz \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k}{a} + 1\right). \end{aligned}$$

◇

**Opomba 4.18.** V praksi z lahkorepnimi porazdelitvami modeliramo zahteve, kjer verjetnosti ekstremnih dogodkov (torej zelo velikih zahtevkov) eksponentno pada proti 0. To neposredno sledi iz definicije 4.15 in neenakosti Markova 5.16, saj za vsak  $x > 0$  in  $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  velja

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(e^{uX} > e^{ux}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{uX}]}{e^{ux}}.$$

**Definicija 4.19.** Naj velja, da ima slučajna spremenljivka  $Y_1 = X_1 - cT_1$  iz trditve 4.7 lahek rep. Če obstaja enoličen  $\ell > 0$ , za katerega velja

$$M_{Y_1}(\ell) = 1,$$

temu številu pravimo *Lundbergov koeficient*.

**Trditev 4.20.** Brž ko Lundbergov koeficient  $\ell$  (pod predpostavkami definicije 4.19 in pogoja NPC) obstaja, je enolično določen.

*Dokaz.* Zaradi konveksnosti eksponentne funkcije je množica  $I = \{u \in \mathbb{R} \mid M_{Y_1}(u) < \infty\}$  konveksna, torej je  $I$  interval, poltrak ali kar cela realna os. Po predpostavki obstaja pozitiven  $\ell \in I$  za katerega velja  $M_{Y_1}(\ell) = 1$ . Ker ima  $Y_1$  lahek rep, obstaja  $\varepsilon > 0$ , da je  $M_{Y_1}(u) < \infty$  za  $u \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I$ . Ker velja  $M_{Y_1}(0) = 1$  in  $M'_{Y_1}(0) = \mathbb{E}[Y_1] < 0$  (zaradi pogoja NPC) ter  $M''_{Y_1}(u) = \mathbb{E}[Y_1^2 e^{Y_1 u}] > 0$  ( $Y_1 \neq 0$  skoraj gotovo) za  $u > 0$ , je  $M_{Y_1}$  zvezna konveksna funkcija na  $I$ , kjer v okolici ničle pada. Tako je  $\ell$  zaradi konveksnosti  $M_{Y_1}$  enolično določen. □

**Izrek 4.21.** (Lundbergova neenakost) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in zanj obstaja Lundbergov koeficient  $\ell$ . Potem za vsak  $u > 0$  velja

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u}.$$

*Dokaz.* Neenakost bomo dokazali z indukcijo. Za  $u > 0$  in  $n \in \mathbb{N}$  definiramo

$$\psi_n(u) = \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u \right),$$

kjer je  $Z_k = \sum_{i=1}^k Y_i$  kumulativna izguba po  $k$  zahtevkih enako definirana kot v trditvi 4.7. Vidimo, da je (po zveznosti  $\mathbb{P}$  od spodaj)  $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$ , torej moramo pokazati, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $\psi_n(u) \leq e^{-\ell u}$ .

( $n = 1$ ) : Uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$\psi_1(u) = \mathbb{P} (e^{\ell Z_1} > e^{\ell u}) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = e^{-\ell u}.$$

( $n \rightarrow n + 1$ ) : S  $F_{Y_1}$  označimo porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke  $Y_1$ . Potem velja

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n+1} Z_k > u \right) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(Y_1 > u)}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{P} \left( \max_{2 \leq k \leq n+1} \{Y_1 + (Z_k - Y_1)\} > u, Y_1 \leq u \right)}_{(ii)} \end{aligned}$$

Najprej se posvetimo (ii). Po indukcijski predpostavki velja

$$\begin{aligned} (ii) &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} \{x + Z_k\} > u \right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u - x \right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \psi_n(u - x) dF_{Y_1}(x) \\ &\stackrel{\text{i.p.}}{\leq} \int_{(-\infty, u]} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x). \end{aligned}$$

Za oceno (i) kot v primeru  $n = 1$  uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$(i) = \psi_1(u) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = \int_{(u, \infty)} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).$$

Če torej seštejemo (i) in (ii) dobimo željeno oceno

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x) \\ &= e^{-\ell u} M_{Y_1}(\ell) \\ &= e^{-\ell u}. \end{aligned}$$

□

**Opomba 4.22.** Iz izreka 4.21 je razvidno, da lahko v praksi z dovolj visokim začetnim kapitalom  $u$  verjetnost propada zadovoljivo omejimo blizu 0. Seveda je meja odvisna tudi od Lundbergovega koeficienta  $\ell$ .

**Zgled 4.23.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja, da so zahtevki neodvisno eksponentno porazdeljeni s parametrom  $\mu > 0$ . Vemo, da ima momentno rodovna funkcija  $X_1$  obliko

$$M_{X_1}(u) = \frac{\mu}{\mu - u} \quad \text{za } u < \mu.$$

Tako dobimo, da ima momentno rodovna funkcija  $Y_1 = X_1 - cT_1$  obliko

$$M_{Y_1}(u) = M_{X_1}(u)M_{T_1}(-cu) = \frac{\mu}{\mu - u} \frac{\lambda}{\lambda + cu} \quad \text{za } u \in (-\frac{\lambda}{c}, \mu).$$

Sedaj lahko izračunamo Lundbergov koeficient  $\ell$

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(\ell) &= 1, \\ \frac{\mu}{\mu - \ell} \frac{\lambda}{\lambda + c\ell} &= 1, \\ \mu\lambda &= (\mu - \ell)(\lambda + c\ell), \\ \mu\lambda &= \mu\lambda - \ell\lambda + \mu c - c\ell^2, \\ 0 &= \mu c - c\ell - \lambda. \end{aligned}$$

Dobimo

$$\ell = \mu - \frac{\lambda}{c}. \quad (15)$$

Velja  $\ell \in (0, \mu)$ , saj v našem modelu velja pogoj NPC,

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} = \frac{\lambda}{\mu} < c \iff \mu > \frac{\lambda}{c}.$$

Če uporabimo alternativno formulacijo NPC pogoja, dobimo

$$c = (1 + \rho) \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \ell = \mu - \frac{\lambda}{(1 + \rho) \frac{\lambda}{\mu}} = \mu \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right). \quad (16)$$

Tako dobimo zgornjo mejo za verjetnost propada

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u} = e^{-\mu u \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right)}$$

in vidimo, da povečanje stopnje prihodkov premij čez neko mejo ne bistveno vpliva na oceno, saj

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{-\mu u \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right)} = e^{-\mu u}.$$

V nadaljevanju bomo videli, da je Lundbergova neenakost v primeru eksponentno porazdeljenih zahtevkov skoraj točna vrednost verjetnosti propada, zgrešena le za konstanto. V splošnem pa je zelo težko določiti Lundbergov koeficient kot funkcijo parametrov porazdelitev  $X_1$  in  $T_1$  in zato uporabljamo numerične metode za njegovo aproksimacijo kot na primer Monte Carlo simulacije.  $\diamond$

Sedaj izplejemo enega temeljnih rezultatov v teoriji tveganja, ki ga je leta 1930 dokazal Harald Cramér. Za lahkorepe porazdelitve bomo določili točen red konvergence verjetnosti propada.



**Izrek 4.24.** (*Asimptotika verjetnosti propada, lahkorepe porazdelitve*) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient  $\ell$ . Naj imajo slučajne spremenljivke  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gostoto. Potem obstaja konstanta  $C > 0$ , za katero velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{\ell u} \psi(u) = C.$$

*Dokaz.* Najprej preoblikujemo enačbo (13), tako da upoštevamo  $\theta = 1 - \psi$

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= (1 - q) + q \int_{(0, u]} (1 - \psi(u - x)) d\bar{F}_{X_1}(x), \\ \psi(u) &= q(1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + \int_{(0, u]} \psi(u - x) d(q\bar{F}_{X_1}(x)). \end{aligned} \quad (17)$$

Vidimo, da je enačba (17) še vedno defektna prenovitvena enačba. Iskanja rešitve bi se lahko lotili na način, ki ga opišemo v opombi 4.14, ampak v primeru lahkorepkih porazdelitev se izkaže, da s trikom lahko enačbo (17) prevedemo na pravo prenovitveno enačbo. Za  $x > 0$  definiramo funkcijo  $F_\ell$  kot Esscherjevo transformacijo funkcije  $q\bar{F}_{X_1}$ .

$$F_\ell(x) = \int_{(0, x]} e^{\ell y} d(q\bar{F}_{X_1}(y)) = \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0, x]} e^{\ell y} (1 - F_{X_1}(y)) dy, \quad (18)$$

Pokažimo, da je  $F_\ell$  porazdelitvena funkcija. Očitno je naraščajoča in velja

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_\ell(x) &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0, \infty)} e^{\ell y} (1 - F_{X_1}(y)) dy \quad (\alpha = 1 - F_{X_1}(y), \quad d\beta = e^{\ell y} dy) \\ &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \left( \left( \frac{(1 - F_{X_1}(y)) e^{\ell y}}{\ell} \right) \Big|_0^\infty + \frac{1}{\ell} \int_{(0, \infty)} e^{\ell y} f_{X_1}(y) dy \right) \\ &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \frac{1}{\ell} \left( \mathbb{E}[e^{\ell X_1}] - 1 \right). \end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je  $q = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{c\mathbb{E}[T_1]}$ , definicijo Lundbergovega koeficienta ter dejstvo, da je  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$  medprihodni čas v HPP( $\lambda$ ), da dobimo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_\ell(x) &= \frac{\mathbb{E}[e^{\ell X_1}] - 1}{c\ell \mathbb{E}[T_1]} \\ &= \frac{\frac{\lambda + c\ell}{\lambda} - 1}{c\ell \frac{1}{\lambda}} = 1. \end{aligned}$$

Če torej enačbo (17) pomnožimo z  $e^{\ell u}$ , dobimo

$$\begin{aligned} e^{\ell u} \psi(u) &= qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + \int_{(0, u]} e^{\ell(u-x)} \psi(u-x) e^{\ell x} d(q\bar{F}_{X_1}(x)) \\ &= qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + \int_{(0, u]} e^{\ell(u-x)} \psi(u-x) dF_\ell(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Vidimo, da sedaj enačba (19) ustreza obliki prenovitvene enačbe za par  $(qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)), F_\ell)$  in ker je funkcija  $u \mapsto qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  omejena na končnih

intervalih in  $F_\ell$  nearitmetična, lahko uporabimo Smithov ključni prenovitveni izrek 5.31, da dobimo rešitev

$$e^{\ell u} \psi(u) = q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + q \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)} (1 - \bar{F}_{X_1}(u-x)) dM^\ell(x), \quad (20)$$

kjer je  $M^\ell$  prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodnimi časi, ki imajo porazdelitveno funkcijo  $F_\ell$ . V splošnem  $M^\ell$  težko določimo. Če pa je  $u \mapsto q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  direktno Riemannovo integrabilna 5.29, nam Smithov izrek da asimptotično vedenje rešitve (20), ko gre  $u \rightarrow \infty$ . Direktno Riemannovo integrabilnost preverimo tako, da upoštevamo

$$\int_{(0,\infty)} x e^{\ell x} (1 - \bar{F}_{X_1}(x)) dx < \infty,$$

in funkcijo  $u \mapsto q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  zapišemo kot

$$q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) = q \int_{(u,\infty)} e^{\ell x} d\bar{F}_{X_1}(x) - q \ell \int_{(u,\infty)} (1 - \bar{F}_{X_1}(x)) e^{\ell x} dx.$$

Tu ne vem kako lepo argumentirati rezultatov. Lahko napisšem samo pravilo za odvajanje produkta? Tako vidimo, da je  $u \mapsto q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  razlika dveh nenaraščajočih Riemannovo integrabilnih funkcij in je zato po kriteriju 5.30 direktno Riemannovo integrabilna. Dobimo

$$C = \lim_{u \rightarrow \infty} e^{\ell u} \psi(u) = \frac{q}{\alpha} \int_{(0,\infty)} e^{\ell x} (1 - \bar{F}_{X_1}(x)) dx, \quad (21)$$

kjer je  $\alpha = \int_{(0,\infty)} x dF_\ell(x)$ . S tem je izrek dokazan.  $\square$

**Zgled 4.25.** (Nadaljevanje zgleda 4.23) Vemo, da rešitve prenovitvene enačbe (20) iz izreka 4.24 v splošnem ne moremo eksplicitno izračunati. V zgledu 4.23 pa smo privzeli, da zahtevke modeliramo z eksponentno porazdelitvijo, torej  $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ . V tem primeru se izkaže, da lahko eksplicitno izračunamo verjetnost propada. Če si pogledamo enačbo (20), vidimo, da moramo izračunati le porazdelitev integriranega repa  $\bar{F}_{X_1}(u)$  in prenovitveno mero Esscherjeve transformacije  $F_\ell$ . Za eksponentno porazdelitev velja

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_1}(u) &= \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,u)} (1 - F_{X_1}(t)) dt \\ &= \mu \int_{(0,u)} e^{-\mu t} dt \\ &= F_{X_1}(u), \end{aligned}$$

saj je pozabljiva. Prenovitveno mero Esscherjeve transformacije pa dobimo tako, da najprej izračunamo porazdelitveno funkcijo  $F_\ell$  podano v enačbi (18).

$$\begin{aligned} F_\ell(u) &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,u]} e^{\ell x} (1 - F_{X_1}(x)) dx \\ &= \frac{\mu}{1 + \rho} \int_{(0,u]} e^{-x(\mu-\ell)} dx. \end{aligned}$$

Upoštevamo rezultat (16), torej  $\ell = \mu \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right)$  in vidimo, da je  $F_\ell$  porazdelitvena funkcija eksponentne slučajne spremenljivke s parametrom  $\frac{\mu}{1+\rho}$  oziroma  $\mu q$ . Torej je prenovitvena mera  $M^\ell(t)$  preprosto pričakovano število prihodov do časa  $t$  v HPP( $\mu q$ ), torej  $M^\ell(t) = \mu q t$ . Če vstavimo rezultata v enačbo (20), dobimo

$$\begin{aligned}
e^{\ell u} \psi(u) &= q e^{\ell u} e^{-\mu u} + q \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)} e^{-\mu(u-x)} dM^\ell(x) \\
&= q e^{-u(\mu-\ell)} + \mu q^2 \int_{(0,u]} e^{-(\mu-\ell)(u-x)} dx \\
&= q e^{-u(\mu-\ell)} + \mu q^2 \frac{1}{\mu-\ell} \left( 1 - e^{-u(\mu-\ell)} \right) \\
&= q e^{-u(\mu-\ell)} + \frac{\mu}{(1+\rho)^2} \frac{1+\rho}{\mu} \left( 1 - e^{-u(\mu-\ell)} \right) \\
&= q e^{-u(\mu-\ell)} + q \left( 1 - e^{-u(\mu-\ell)} \right) \\
&= q = \frac{1}{1+\rho}.
\end{aligned}$$

Končno dobimo, da je verjetnost propada enaka

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\ell u}. \quad (22)$$

◇

Vidimo, da se  $\psi(u)$  z oceno, ki jo dobimo z Lundbergovo neenakostjo v zgledu 4.23, res razlikuje le za konstanto  $\frac{1}{1+\rho}$ . To je seveda zelo poseben primer, ko lahko vse količine izračunamo eksplicitno. Pokažimo, kako bi do približkov funkcije  $\psi(u)$  v praksi lahko prišli z Monte Carlo simulacijami.

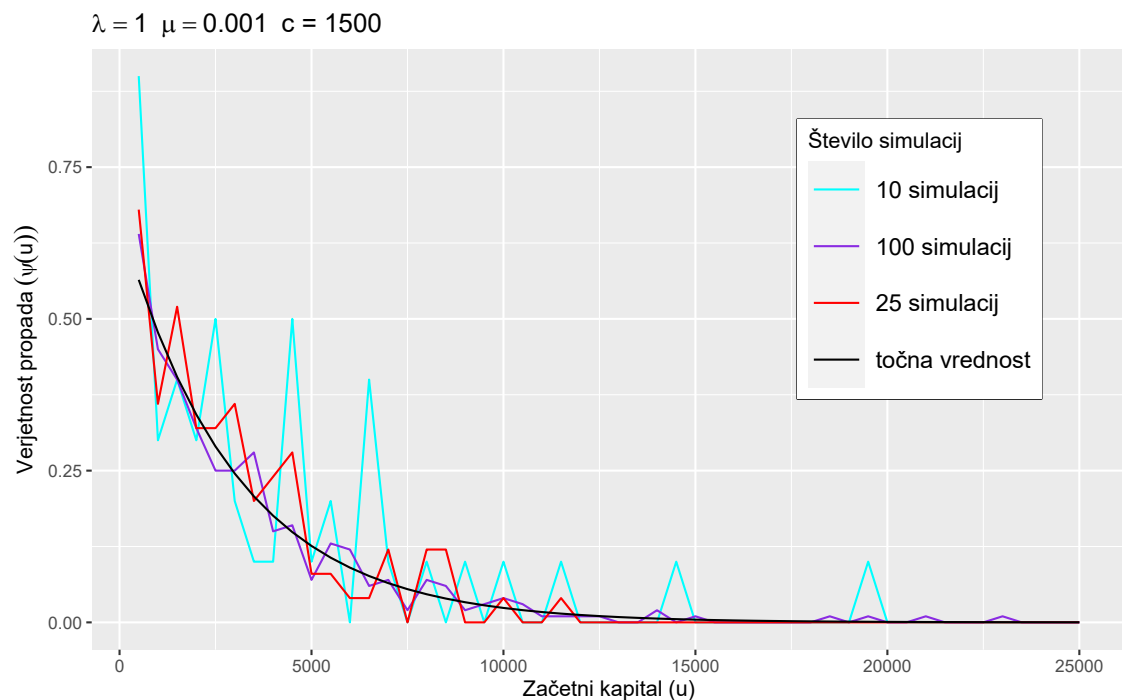
**Zgled 4.26.** Kot v zgledu 4.23 predpostavimo, da so zahtevki porazdeljeni eksponentno, torej  $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ . Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov  $\lambda = 1$ , stopnja prihodkov premij  $c = 1500$  in pričakovana vrednost zahtevkov 1000 €, torej  $\mu = \frac{1}{1000}$ . Potem lahko verjetnost propada eksplicitno izračunamo po formuli (22). Prvo izračunamo  $\rho$  po formuli (16), in  $\ell$  po (15), torej

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{c\mu}{\lambda} - 1 \\
&= \frac{1500 \cdot \frac{1}{1000}}{1} - 1 = \frac{1}{2}, \\
\ell &= \mu - \frac{\lambda}{c} \\
&= \frac{1}{1000} - \frac{1}{1500} = \frac{1}{3000}.
\end{aligned}$$

Vstavimo vrednosti v (22) in dobimo

$$\psi(u) = \frac{2}{3} e^{-\frac{u}{3000}}.$$

Sedaj definiramo zaporedje  $(u_n)_{n=1}^{50}$  s predpisom  $u_n = 500n$  in za vsak  $n$  simuliramo 10, 50 in 100 realizacij procesa tveganja, bodisi do časa  $T = 1000$  bodisi dokler ne propade in za vsak  $n$  izračunamo približek za verjetnost propada kot delež propadlih realizacij z vsemi. Aproksimacijo  $\psi(u)$  prikažemo na sliki 5.



SLIKA 5. Aproximacija verjetnosti propada  $\psi(u)$  z Monte Carlo simulacijami.

Kot vidimo, se približki z naraščajocim številom simulacij približujejo funkciji  $\psi(u)$ , ampak, za res dobro aproksimacijo, bi morali to število krepko povečati, saj na primer za vrednost  $u = 16000$  pride  $\psi(16000) \approx 0,0032186334$ , kar je približno 0.3% in v praksi ni zanemarljivo, ampak v naši simulaciji nobena realizacija procesa tveganja ni padla pod 0.

◇

**4.4. Težkorepe porazdelitve.** Rezultati, ki smo jih izpeljali v prejšnjem razdelku, temeljijo na predpostavki zahtevkov z lahkorepimi porazdelitvami, kar interpretiramo, kot da je verjetnost zahtevkov, ki zelo odstopajo od povprečja, zelo majhna. V praksi pa se pogosto zgodi, da ta predpostavka ni izpolnjena in pojavi se vprašanje, ali lahko še vedno kaj povemo o asimptotiki verjetnosti propada. Izkaže se, da v primeru, ko je porazdelitev integriranega repa zahtevkov subekspONENTNA, ta točno določa asimptotično vedenje verjetnosti propada.

SubekspONENTNE porazdelitve so poseben razred težkorepih porazdelitev, ki ga lahko definiramo na več načinov. Za naše namene bo najbolj uporabna naslednja definicija iz [9].

**Definicija 4.27.** Verjetnostna porazdelitev  $F$  na  $[0, \infty)$  je *subekspONENTNA*, če za vsak  $n \geq 2$  in neodvisne slučajne spremenljivke  $X_1, \dots, X_n$  s to porazdelitvijo velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = n$$

in  $F(x) < 1$  za vsak  $x > 0$ .

**Opomba 4.28.** Ekvivalentna in bolj intuitivna definicija subekspONENTNE porazdelitve je, da velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} > x)} = 1 \quad \text{za vsak } n \geq 2,$$

kar pomeni, da je repna porazdelitev vsote  $n$ -tih slučajnih spremenljivk asimptotično primerljiva s porazdelitvijo največje. Dokaz ekvivalence lahko bralec najde v [9] na strani 437.

**Lema 4.29.** Naj bo  $F_{X_1}$  subekspONENTNA porazdelitvena funkcija nenegativne slučajne spremenljivke  $X_1$ . Potem za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja pozitivna konstanta  $K(\varepsilon) < \infty$ , da za vsak  $n \geq 2$  in  $x \geq 0$  velja

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} \leq K(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n.$$

*Dokaz.* Fiksiramo  $n \geq 2$  in  $x \geq 0$ . Ulomek preoblikujemo

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} &= \frac{(1 - F_{X_1}^{*n}(x)) + F_{X_1}(x) - F_{X_1}(x)}{1 - F_{X_1}(x)} \\ &= 1 + \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*n}(x)}{1 - F_{X_1}(x)}. \end{aligned}$$

Naj bo  $a_n = \sup_{x \geq 0} \left\{ 1 + \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*n}(x)}{1 - F_{X_1}(x)} \right\}$ . Za konstanto  $M \in (0, \infty)$  lahko ocenimo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq 1 + \sup_{0 \leq x \leq M} \int_{(0, x]} \frac{1 - F_{X_1}^{*n}(x - y)}{1 - F_{X_1}(x)} dF_{X_1}(y) \\ &\quad + \sup_{x \geq M} \int_{(0, x]} \frac{1 - F_{X_1}^{*n}(x - y)}{1 - F_{X_1}(x - y)} \frac{1 - F_{X_1}(x - y)}{1 - F_{X_1}(x)} dF_{X_1}(y) \\ &\leq 1 + T + a_n \sup_{x \geq M} \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*2}(x)}{1 - F_{X_1}(x)}, \end{aligned}$$

kjer je  $T = (1 - F_{X_1})^{-1}(M) < \infty$ . Ker je  $F_{X_1}$  subekspONENTNA lahko za vsak  $\varepsilon > 0$  izberemo tak  $M$ , da velja

$$a_{n+1} \leq 1 + T + a_n(1 + \varepsilon)$$

in tako dobimo želeno oceno

$$a_n \leq \underbrace{(1 + T) \frac{1}{\varepsilon}}_{K(\varepsilon)} (1 + \varepsilon)^n.$$

□

**Izrek 4.30.** (*Asimptotika verjetnosti propada, težkorepe porazdelitve*) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj bodo zahtevki  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  neodvisni in enako porazdeljeni z gostoto  $f_X$ , pričakovano vrednostjo  $\mathbb{E}[X] < \infty$  in naj bo  $\bar{F}_{X_1}$  subekspONENTNA. Potem za verjetnost propada  $\psi(u)$  velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)} = \frac{1}{\rho}. \quad (23)$$

*Dokaz.* Dokaza se lotimo z iskanjem negibne točke operatorja (14), ki smo ga definirali v opombi 4.14. Rešitev  $\theta = A\theta$  se izraža kot limita  $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n g_0$  za poljubno funkcijo  $g_0 \in B([0, \infty))$ . Naj bodo  $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots$  neodivne enako porazdeljene slučajne spremenljivke s porazdelitveno funkcijo  $\overline{F}_{X_1}$ . Potem  $A$  izrazimo kot

$$Ag(u) = (1 - q) + q\mathbb{E}[g(u - \overline{X}_1)]$$

in z indukcijo pokažemo, da za  $g_0 = (1 - q)\mathbb{1}(u \geq 0)$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$A^n g_0(u) = (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k \mathbb{P}(\overline{W}_k \leq u),$$

pri čemer je  $\overline{W}_k = \overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_k$  in  $\overline{W}_0 = 0$ . Enakost očitno velja za  $n = 1$ . Indukcijski korak pa pokažemo...

indukcije mi ni uspelo izpeljati. Prav tako mi ni jasno zakaj moramo razširiti razred funkcij na realno os, saj so slučajne spremenljivke nenegativne.

Sledi

$$\theta(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n g_0 = (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}(\overline{W}_k \leq u). \quad (24)$$

Upoštevamo enakost

$$\begin{aligned} \psi(u) &= 1 - \theta(u) \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k - (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\overline{W}_k \leq u) \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k (1 - \mathbb{P}(\overline{W}_k \leq u)) \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}(\overline{W}_k > u). \end{aligned}$$

Limito  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)}$  lahko tako zapišemo kot

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - q) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{\mathbb{P}(\overline{W}_n > u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)}.$$

Če vzamemo  $\varepsilon < \frac{1}{q} - 1$ , lahko po lemi 4.29 zaporedje funkcij

$$f_k(n) = \frac{\mathbb{P}(\overline{W}_n > u_k)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u_k)}, \quad n \geq 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

omejimo z integrabilno funkcijo  $K(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n$  za vsak  $n \geq 2$  (glede na mero, ki šteje). Limito  $u \rightarrow \infty$  po realnih številih nadomestimo z limito po zaporedjih pozitivnih števil  $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ . Tako lahko po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci 5.22 zamenjamo vrstni red limite in vsote. Ker je  $\overline{F}_{X_1}$  subekspontna, za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\overline{W}_n > u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)} = n.$$

Končno je

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)} &= (1 - q) \sum_{n=1}^{\infty} q^n n \\ &= \frac{q}{(1 - q)} = \frac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

□

**Opomba 4.31.** Če tako kot v definiciji sestavljene geometrijske porazdelitve 5.14 vzamemo  $G \sim \text{Geom}(1 - q)$ , ki je neodvisna od  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$ , ima  $C = \bar{W}_G$  sestavljeno geometrijsko porazdelitev in za  $u \geq 0$  velja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \leq u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(G = k) \mathbb{P}(\bar{W}_k \leq u) \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}(\bar{W}_k \leq u) = \theta(u).\end{aligned}$$

Torej je  $C \sim \theta$  in posledično  $\psi(u) = \mathbb{P}(C > u) = (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}(\bar{W}_k > u)$ .

Izreka 4.24 in 4.30 pokažeta ključno razliko med lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. Limita (23) nam pove, da je konvergenca verjetnosti propada  $\psi$  enakega reda kot  $(1 - \bar{F}_{X_1})$ , ki pa ni zanemarljiva tudi za velike vrednosti  $u$ . To pomeni, da so zavarovalniški produkti, za katere verjamemo, da so zahtevki subexponentno porazdeljeni, nevarni, saj imajo največji zahtevki velik vpliv na celoten proces tveganja in se propad lahko zgodi zaradi enega samega velikega zahtevka kot v zgledu 4.3.

**Zgled 4.32.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja, da so zahtevki neodvisni Weibullovo porazdeljeni s parametroma  $a = \frac{1}{4}$  in  $b = 16$ , torej  $X_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$ . Dokaz, da je  $\bar{F}_{X_1}$  subeksponentna porazdelitvena funkcija, lahko bralec najde v [9] na strani 444. Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov  $\lambda = 1$  in stopnja prihodkov premij  $c = 500$ . Podobno kot v zgledu 4.26 z Monte Carlo simulacijami pokažimo, da verjetnost propada res pada proti 0 z enakim redom konvergence kot rep  $\bar{F}_{X_1}$ , ko gre  $u \rightarrow \infty$ . Porazdelitev integriranega repa  $\bar{F}_{X_1}$  ima obliko

$$\bar{F}_{X_1}(u) = \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0, u]} e^{-(\frac{x}{16})^{1/4}} dx.$$

Iz zgleda 4.3 vemo, da je  $\mathbb{E}[X_1] = 384$ . Z uvedbo nove spremenljivke  $z = x^{1/4}$  ( $dz = \frac{1}{4x^{3/4}} dx$ ) z nekaj računanja dobimo

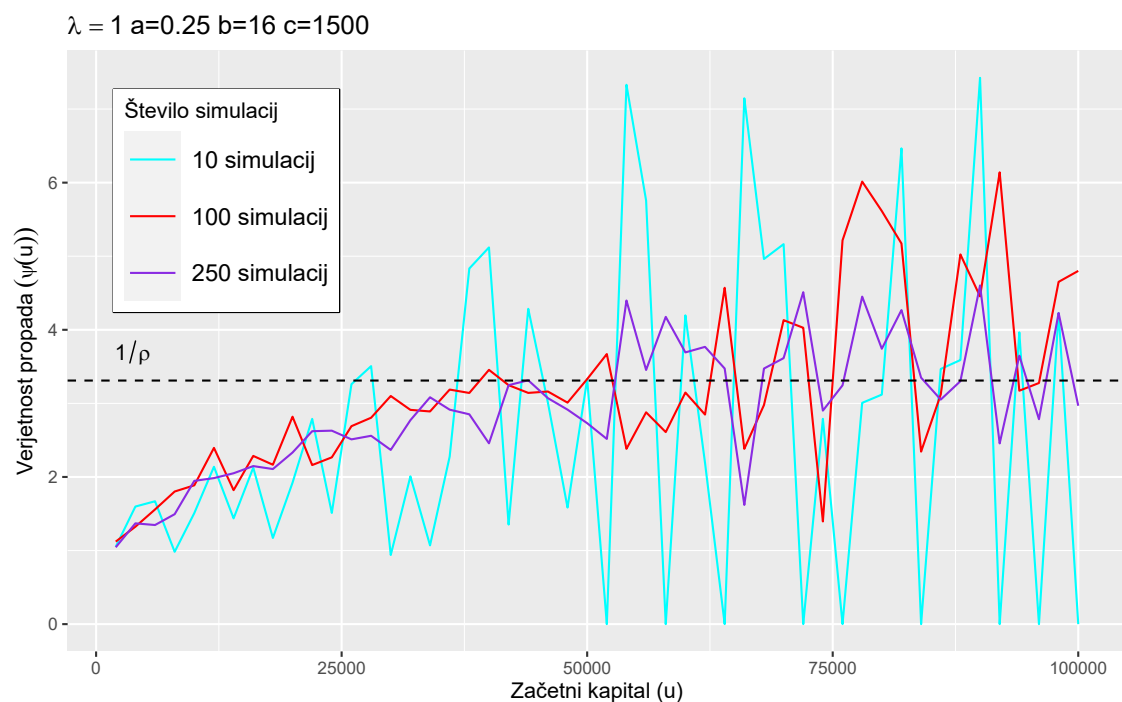
$$\bar{F}_{X_1}(u) = 1 - \frac{(u^{3/4} + 6\sqrt{u} + 24\sqrt[4]{u} + 48) e^{-\sqrt[4]{u}/2}}{48}.$$

Izračunamo še

$$\rho = \frac{c\mathbb{E}[T_1]}{\mathbb{E}[X_1]} - 1 = \frac{500}{384} - 1 \approx 0.3020833.$$

Po izreku 4.30 razmerje  $\frac{\psi(u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)}$  konvergira proti  $\frac{1}{\rho} \approx 3.3103451$ . Zaporedje  $(u_n)_{n=1}^{50}$ , definirano kot  $u_n = 2000n$  za vsak  $n$ , podobno kot v zgledu 4.26 simuliramo 10, 100

in 250 realizacij procesa tveganja in za vsak  $n$  izračunamo približek za razmerje  $\frac{\psi(u_n)}{1-F_{X_1}(u_n)}$ . Rezultate prikažemo na sliki 6.



SLIKA 6. Aproximacija verjetnosti propada  $\psi(u)$  z Monte Carlo simulacijami (modra) in točna vrednost funkcije (rdeča).

Vidimo, da razmerje vizualno res konvergira proti  $\frac{1}{\rho}$ , ampak seveda bi za boljšo natančnost morali povečati začetni kapital  $u$  in število simulacij.  $\diamond$



## 5. PRILOGA

Priloga je namenjena predvsem za dodatne definicije in trditve s katerimi naj bi bil bralec seznanjen in so bile izpuščene v glavnem za namene preglednosti besedila. V primeru, da bralec potrebuje osvežiti določene pojme, ki se pojavljajo v besedilu, jih večino lahko najde v tem razdelku.

**Definicija 5.1.** Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka. Potem so za  $u \in \mathbb{R}$  njena *rodovna funkcija*, *momentno rodovna funkcija* in *karakteristična funkcija* definirane kot

$$G_X(u) = \mathbb{E}[u^X], \quad M_X(u) = \mathbb{E}[e^{uX}], \quad \varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}],$$

če upanja obstajajo.

**Definicija 5.2.** Naj bosta  $F$  in  $G$  porazdelitveni funkciji dveh neodvisnih nenegativnih slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$ . *Konvolucijo* funkcij  $F$  in  $G$  definiramo kot Lebesgue-Stieltjesov integral

$$(F * G)(t) = \int_{[0,t]} F(t-x) dG(x) = \int_{[0,t]} G(t-x) dF(x).$$

Konvolucija  $(F * G)$  se ujema s porazdelitveno funkcijo vsote  $X + Y$ , kar lahko enostavno pokažemo z uporabo transformacijske formule. Za neodvisne in enako porazdeljene nenegativne slučajne spremenljivke  $X_1, X_2, \dots, X_n$  s porazdelitveno funkcijo  $F_{X_1}$  rekurzivno definiramo *k-to konvolucijo* kot

$$F_{X_1}^{*k}(t) = (F_{X_1} * \dots * F_{X_1})(t) = \int_{[0,t]} F_{X_1}^{*(k-1)}(t-x) dF_{X_1}(x),$$

ki se prav tako ujema s porazdelitveno funkcijo vsote  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

**Definicija 5.3.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  verjetnostni prostor in naj bo  $T \neq \emptyset$  neprazna indeksna množica ter  $(E, \Sigma)$  merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s  $T$ , je družina slučajnih elementov  $X_t : \Omega \rightarrow E$ , ki so  $(\mathcal{F}, \Sigma)$ -merljivi za vsak  $t \in T$ .

**Opomba 5.4.** V delu se bomo omejili na primer, ko  $T$  predstavlja čas, torej  $T = [0, \infty)$  in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej  $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , kjer  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  predstavlja Borelovo  $\sigma$ -algebro na  $\mathbb{R}$ .

**Definicija 5.5.** Za fiksni  $\omega \in \Omega$  je preslikava  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto X_t(\omega)$  *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora  $\Omega$  priredi slučajno funkcijo  $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicija 5.6.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces. Potem za  $s < t$  definiramo *prirastek procesa*  $X_t - X_s$  na intervalu  $[s, t]$ . Proces  $(X_t)_{t \geq 0}$  ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$  prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

**Definicija 5.7.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak  $s < t$  in vsak  $h > 0$  velja, da ima  $X_{t+h} - X_{s+h}$  enako porazdelitev kot  $X_t - X_s$ .

**Definicija 5.8.** Naj bosta  $(X_t)_{t \geq 0}$  in  $(Y_t)_{t \geq 0}$  slučajna procesa ne nujno definirana na istem verjetnostnem prostoru. Pravimo, da sta  $(X_t)_{t \geq 0}$  in  $(Y_t)_{t \geq 0}$  *neodvisna*, če sta za vsak par  $k, j \in \mathbb{N}$  in končen nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n_k} < \infty$  in  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n_j} < \infty$  slučajna vektorja  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{n_k}})$  in  $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_{n_j}})$  neodvisna. Po drugi strani, če velja  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{n_k}}) \sim (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_{n_j}})$  sta procesa *enako porazdeljena*.

**Trditev 5.9.** Naj bodo  $X, Y$  in  $Z$  slučajne spremenljivke ter  $g$  in  $h$  poljubni borelovi funkciji. Če velja  $X \mid Z \sim Y$ , velja tudi  $X \mid Z \sim X \mid g(Z) \sim Y$ . Splošneje, če je  $X \mid Z \sim Y \mid h(g(Z))$ , je tudi  $X \mid Z \sim X \mid g(Z) \sim Y \mid h(g(Z))$ .

*Dokaz.*  $X \mid Z \sim Y$  pomeni, da ima  $X$  pogojno na  $\sigma(Z)$  vedno isto porazdelitev, potem pa mora biti to tudi brezpogojna porazdelitev, prav tako pa tudi pogojna porazdelitev glede na manjšo  $\sigma$ -algebro  $\sigma(g(Z))$ . Nadalje je  $X$  neodvisna od  $\sigma(Z)$ , potem pa mora biti neodvisna tudi od manjše  $\sigma$ -algebre  $\sigma(g(Z))$ . Pri splošnejši različici uporabimo enak argument za  $\sigma$ -algebro  $\sigma(h(g(Z)))$ .  $\square$

**Definicija 5.10.** Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  števno zaporedje slučajnih spremenljivk. Pravimo, da so slučajne spremenljivke  $X_1, X_2, \dots$  *izmenljive*, če za vsako končno permutacijo  $\pi$  velja, da je skupna porazdelitev slučajnih spremenljivk  $X_1, X_2, \dots$  enaka skupni porazdelitvi slučajnih spremenljivk  $X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots$ .

**Trditev 5.11.** Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  števno zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem so slučajne spremenljivke  $X_1, X_2, \dots$  izmenljive.

*Dokaz.* Izmenljivost neposredno sledi iz definicije neodvisnosti slučajnih spremenljivk, saj se skupna porazdelitev faktorizira na produkt posameznih porazdelitev.  $\square$

**Trditev 5.12.** Naj bodo  $X_1, \dots, X_n$  izmenljive slučajne spremenljivke in  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  poljubna borelova simetrična funkcija. Potem so vsi slučajni vektorji

$$(X_i, g(X_1, \dots, X_n)), \quad i = 1, \dots, n$$

enako porazdeljeni. Sledi, da so tudi vse pogojne porazdelitve slučajnih spremenljivk

$$X_i \mid g(X_1, \dots, X_n), \quad i = 1, \dots, n$$

enake

*Dokaz.* **dopiši dokaz**  $\square$

**Definicija 5.13.** Slučajna spremenljivka  $X$  ima *Weibullovo porazdelitev* s parametroma  $a, b > 0$ , če ima njena porazdelitvena funkcija obliko

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0$$

oziroma gostota obliko

$$f_X(x) = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0.$$

**Definicija 5.14.** Naj bo  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk in  $G \sim \text{Geom}(p)$  geometrijsko porazdeljena slučajna spremenljivka parametrom  $p \in (0, 1)$  in funkcijo verjetnosti  $P(G = k) = p(1 - p)^k$  za  $k \in \mathbb{N}_0$ . Naj bo  $G$  neodvisna od  $X_i$  za vsak  $i \in \mathbb{N}$ . Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$C = \sum_{i=1}^G X_i$$

sestavljeno geometrijsko porazdelitev.

**Trditev 5.15.** Naj bo  $X$  nenegativna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , ki ima prvi moment. Potem velja

$$\mathbb{E}[X] = \int_{(0, \infty)} (1 - F_X(x)) dx.$$

*Dokaz.* Vsako število  $X \geq 0$  lahko zapišemo kot

$$X = \int_{(0, \infty)} \mathbb{1}_{\{x < X\}} dx = \int_{(0, \infty)} \mathbb{1}_{\{X < x\}} dx.$$

Če sedaj uporabimo Fubinijev izrek, dobimo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E} \left[ \int_{(0, \infty)} \mathbb{1}_{\{X < x\}} dx \right] \\ &= \int_{(0, \infty)} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{X < x\}}] dx \\ &= \int_{(0, \infty)} (1 - \mathbb{P}(X \geq x)) dx \end{aligned}$$

□

**Trditev 5.16.** (Neenakost Markova) Naj bo  $X$  nenegativna slučajna spremenljivka. Potem za  $x > 0$  velja

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{x}.$$

*Dokaz.* Naj bo  $x > 0$ . Velja

$$x \mathbb{1}_{\{X \geq x\}} \leq X \iff x \mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{E}[X].$$

□

**Definicija 5.17.** Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje slučajnih spremenljivk s porazdelitvenimi funkcijami  $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots$  in naj bo  $X$  slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo  $F_X$ . Pravimo da zaporedje  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira v porazdelitvi k slučajni spremenljivki  $X$ , če za vsak  $x \in \mathbb{R}$  v katerem je  $F_X$  zvezna, velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

**Izrek 5.18.** (Krepki zakon velikih števil) Naj bo  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  s pričakovano vrednostjo  $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$ . Potem velja

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} \mu.$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani 192. □

**Izrek 5.19.** (Izrek o enoličnosti) Naj bosta  $X$  in  $Y$  slučajni spremenljivki, ne nujno definirani na istem verjetnostnem prostoru. Če za vsak  $u \in \mathbb{R}$  velja  $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$ , imata  $X$  in  $Y$  enako porazdelitev.

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani stran.  $\square$

**Izrek 5.20.** (*Lévi-jev izrek o kontinuiteti*) Naj bo  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje slučajnih spremenljivk (ne nujno na istem verjetnostnem prostoru) in  $X$  še ena slučajna spremenljivka. Potem za vsak  $u \in \mathbb{R}$  velja

$$\varphi_{X_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_X(u)$$

natanko tedaj, ko velja

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X.$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani 260.  $\square$

**Izrek 5.21.** (*Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci*) Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  in naj bo  $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  njihova limita. Naj za vsak  $\omega \in \Omega$  velja  $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \dots$ . Potem velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani 105.  $\square$

**Izrek 5.22.** (*Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci*) Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  in naj bo  $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  njihova limita. Naj bo  $Y$  slučajna spremenljivka definirana na istem verjetnostnem prostoru z  $\mathbb{E}[Y] < \infty$  in naj za vsak  $n \in \mathbb{N}$  in vsak  $\omega \in \Omega$  velja  $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$ . Potem je  $X$  integrabilna in velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani 107.  $\square$

**Izrek 5.23.** (*Tonellijev izrek*) Naj bosta  $X$  in  $Y$  slučajni spremenljivki definirani vsaka na svojem verjetnostnem prostoru in naj imata vsaka svojo gostoto  $f_X$  in  $f_Y$  glede na Lebesgueovo mero. Potem velja

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) \mathcal{L}^2(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani stran.  $\square$

**Trditev 5.24.** (*Lastnost vrstilnih statistik*) Naj bo  $(N_t)_{t \geq 0}$  homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda > 0$ . Za  $k \in \mathbb{N}$  je pogojno na dogodek  $\{N_t = k\}$  vektor časov prihodov porazdeljen kot

$$(V_1, \dots, V_k) \mid \{N_t = k\} \sim (U_{(1)}, \dots, U_{(k)}),$$

kjer je  $(U_{(1)}, \dots, U_{(k)})$  vektor vrstilnih statistik vektorja  $(U_1, \dots, U_k)$  neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk  $U_i \sim U([0, t])$ .

*Dokaz.* Dokaz trditve lahko bralec najde v [4] na strani 24.  $\square$

**Definicija 5.25.** Naj bo  $X$  nenegativna slučajna spremenljivka in  $F_X$  njena porazdelitvena funkcija. Potem za  $u \in \mathbb{R}$  Laplace-Stieltjesovo transformacijo porazdelitve  $F_X$  definiramo kot

$$\hat{F}_X(u) = \int_{[0, \infty)} e^{-ux} dF_X(x).$$

**Definicija 5.26.** Naj bo  $F$  porazdelitvena funkcija neke nenegativne slučajne spremenljivke s prvim momentom. *Porazdelitev integriranega repa* te slučajne spremenljivke je porazdelitev s porazdelitveno funkcijo

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^x (1 - F(t)) dt.$$

**Definicija 5.27.** *Prenovitveni proces* na verjetnostnem protoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  je slučajni proces, določen z zaporedjem neodvisnih enako porazdeljenih medprihodnih časov  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ki zavzamejo vrednosti v  $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ , in sicer je podan z zvezo

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}},$$

kjer je  $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$  čas  $n$ -tega prihoda. Pripadajočo *prenovitveno mero* prenovitvenega procesa definiramo kot  $M(t) = \mathbb{E}[N_t]$  za  $t > 0$ .

**Definicija 5.28.** *Prenovitvena enačba* je enačba oblike

$$f(t) = g(t) + \int_{[0, t]} f(t-s) dF(s), \quad t \geq 0,$$

kjer sta neznana funkcija  $f$  in znana funkcija  $g$  definirani na  $\mathbb{R}^+$ ,  $F$  pa je porazdelitvena funkcija neke pozitivne slučajne spremenljivke  $X$ .

**Definicija 5.29.** Za nenegativno merljivo funkcijo  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  pravimo, da je *direktno Riemannovo integrabilna* (d.R.i.), če za vsak  $\delta > 0$  velja

$$\sum_{k \geq 0} \left( \sup_{t \in [k\delta, (k+1)\delta)} f(t) \right) < \infty \quad \text{in} \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \delta \sum_{k \geq 0} \left( \sup_{t \in [k\delta, (k+1)\delta)} f(t) \right) = \lim_{\delta \downarrow 0} \delta \sum_{k \geq 0} \left( \inf_{t \in [k\delta, (k+1)\delta)} f(t) \right) \quad (25)$$

Če  $f$  zadošča navedenima zahtevama, definiramo njen *direktni Riemannov integral*

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty f(t) dt$$

kot limito (25). Funkcija  $f$  poljubnega predznaka je d.R.i., če sta le-taki  $f^+ = \max\{f, 0\}$  in  $f^- = \max\{-f, 0\}$ , pri čemer je

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty f(t) dt = \text{d.R.i.} \int_0^\infty f^+(t) dt - \text{d.R.i.} \int_0^\infty f^-(t) dt.$$

**Trditev 5.30.** (*Kriterij za direktno Riemannovo integrabilnost*) Naj bo  $f \geq 0$  nena-raščajoča funkcija. Potem je  $f$  direktno Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je posplošeno Riemannovo integrabilna. Tedaj je njen direktni Riemannov integral enak posplošenemu.

*Dokaz.* Dokaz trditve lahko bralec najde v [8] na strani 235. □

**Izrek 5.31.** (*Smithov ključni prenovitveni izrek*) Če je funkcija  $g$  iz prenovitvene enačbe  $(g, F)$  (definicija 5.28) omejena na končnih intervalih ter  $X$  ima prvi moment in ni aritmetična ( $\nexists a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}a) = 1$ ), je

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} g(t-s)dM(s), \quad t \geq 0,$$

enolična rešitev te enačbe. Funkcija  $M$  je prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodno porazdelitvijo  $F$ . Če je dodatno funkcija  $g$  direktno Riemannovo integrabilna velja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{(0,\infty)} g(t)dt.$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [8] na strani 237. □

**Izrek 5.32.** (*Banachov izrek o negibni točki*) Naj bo  $(M, d)$  poln metrični prostor in naj bo

$$f : (M, d) \rightarrow (M, d)$$

skrčitev, torej obstaja tak  $0 \leq k < 1$ , da za vsak  $x, y \in M$  velja  $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ . Potem obstaja natanko en  $x \in M$ , da velja  $f(x) = x$ .

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [11] na strani 284. □

#### SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

**trajektorija** sample path  
**sestavljeni procesi** compound processes  
**sestavljeni Poissonov proces** compound Poisson process  
**markiranje procesa** space-time decomposition of process  
**neskončna deljivost** infinite divisibility  
**proces tveganja** risk process  
**verjetnost propada** probability of ruin  
**ogrodje procesa tveganja** skeleton process  
**lahkorepa porazdelitev** light-tailed distribution  
**težkorepa porazdelitev** heavy-tailed distribution  
**subeksponentna porazdelitev** subexponential distribution  
**prenovitveni proces** renewal process  
**defektna prenovitvena enačba** defective renewal equation  
**prenovitvena mera** renewal function

#### LITERATURA

- [1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
- [2] S.M. Ross, Stochastic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
- [3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).
- [4] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Second Edition, Springer, (2009).
- [5] M. Mandjes, O. Boxma, The Cramér–Lundberg model and its variants, Springer, (2023).
- [6] F. Spitzer, Principles of Random Walk. Second Edition, Springer, (1976).
- [7] B. Fristedt, L. Gray, A Modern Approach to Probability Theory, Springer, (1996).

- [8] S.I. Resnick, *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser, (1992).
- [9] R.J. Adler, R.E. Feldman, *A practical guide to heavy tails: statistical techniques and applications*, Birkhäuser, (1998).
- [10] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, (1999).
- [11] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza 1, DMFA–založništvo*, (2016).