Sestavljeni Poissonov proces in njegova upraba v financah

Anej Rozman
Mentor: doc. dr. Martin Raič

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Sestavljena Poissonova porazdelitev

Definicija

Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ *za* $\lambda > 0$ *in* $X_1, X_2, \ldots$ *zaporedje neodvisnih (med seboj in od N) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka*

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

sestavljeno Poissonovo porazdelitev.

Karakteristična funkcija

Trditev

Karakteristična funkcija slučajne vsote $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ *ima obliko*

$$\varphi_S(u) = e^{\lambda\left(\varphi_{X_1}(u)-1\right)}.$$

Lahko jo izrazimo kot kompozitum rodovne funkcije G_N *in karakteristične funkcije* φ_{X_1}

$$\varphi_S(u) = G_N\left(\varphi_{X_1}(u)\right).$$

Sestavljena Poissonova porazdelitev

$$\begin{aligned} F_S(x) = \mathbb{P}\big(S \leq x\big) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(S \leq x \mid N = k\big)\mathbb{P}\big(N = k\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(S_k \leq x\big)\mathbb{P}\big(N = k\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_{X_1}^{*k}(x)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Sestavljena Poissonova porazdelitev

Zgled

Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ *porazdeljene kot*

$$X_1 \sim Exp(\mu), \quad \textit{torej z gostoto} \quad f_{X_1}(x) = \mu e^{-\mu x}; \quad x > 0, \mu > 0,$$

k*-ta konvolucija porazdelitve* X_1 *je porazdelitev* $Gamma(k, \mu)$.

$$f_{X_1+\cdots+X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \mu^k x^{k-1} e^{-\mu x}; \quad x > 0.$$

Za $s > 0$ *velja*

$$F_S(s) = \int_0^s \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!k!} (\mu\lambda)^k x^{k-1} e^{-(\mu x + \lambda)}}_{f_S(x)} \, dx.$$

Homogeni Poissonov proces (HPP)

Definicija

Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t\geq 0}$, definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, pravimo homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo λ, če zadošča naslednjim pogojem:

- $N_0 = 0$ *$\mathbb{P}$-skoraj gotovo.*
- $(N_t)_{t\geq 0}$ *ima neodvisne in stacionarne prirastke,*
- *Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s))$,*

Sestavljeni Poissonov proces (CPP)

Definicija

Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ *homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo* λ. *Naj bo* $(X_i)_{i\geq 1}$ *zaporedje neodvisnih (med sabo in od procesa* $(N_t)_{t\geq 0}$*) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem je sestavljeni Poissonov proces* $(S_t)_{t\geq 0}$ *definiran kot družina slučajnih spremenljivk*

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0.$$

Sestavljeni Poissonov proces

Trditev

CPP *ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Trditev

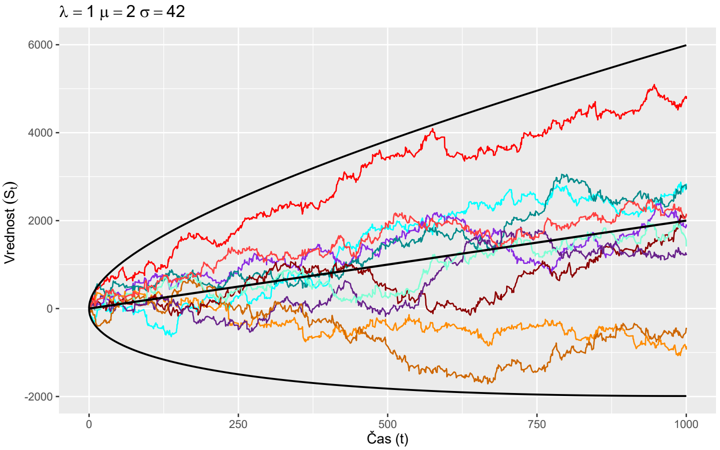
CPP *ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Trditev

Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP *in naj bosta* $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$ *pričakovana vrednost in* $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_i] < \infty$ *varianca slučajnih spremenljivk* X_i*. Potem sta za* $t \geq 0$ *pričakovana vrednost in varianca* S_t *enaki*

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu\lambda t \qquad \textit{in} \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}[S_t] = \lambda t\left(\sigma^2 + \mu^2\right).$$

Sestavljeni Poissonov proces



Slika: Trajektorije CPP s funkcijami $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$ in $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$

Cramér–Lundbergov model

Definicija

Naj bo $(S_t)_{t \geq 0}$ CPP, *kjer so slučajne spremenljivke* $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, *ki jih seštevamo skoraj gotovo nenegativne. Proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu definiramo kot družino slučajnih spremenljivk*

$$U_t = u + p(t) - S_t, \quad t \geq 0,$$

kjer je $u \geq 0$ *začetni kapital zavarovalnice in* p *funkcija prihodkov iz premij.*

Cramér–Lundbergov model

Definicija

Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP, *kjer so slučajne spremenljivke* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, *ki jih seštevamo skoraj gotovo nenegativne. Proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu definiramo kot družino slučajnih spremenljivk*

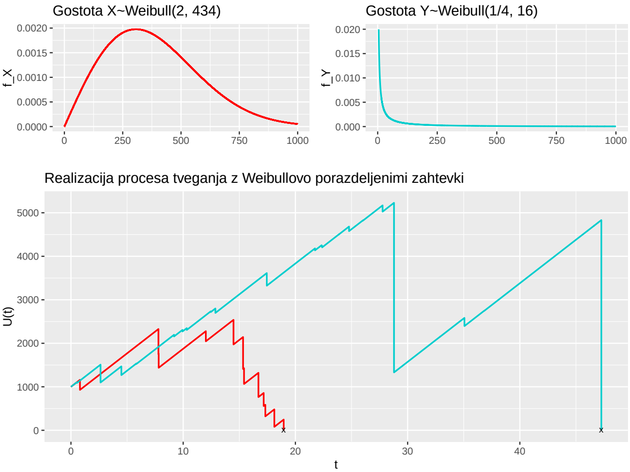
$$U_t = u + p(t) - S_t, \quad t \geq 0,$$

kjer je $u \geq 0$ *začetni kapital zavarovalnice in* p *funkcija prihodkov iz premij.*

Zgled

Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ *proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu z začetnim kapitalom* $u = 1000$ *in* $p(t) = 200t$ *ter intenzivnostjo prihodov zahtevkov* $\lambda = 1$. *Naj bodo v prvem primeru (rdeča) zahtevki porazdeljeni kot* $X_i \sim \mathit{Weibull}(2, 434)$ *in v drugem primeru (modra) kot* $Y_i \sim \mathit{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$.

Cramér–Lundbergov model



Slika: Realizaciji procesa tveganja U_t v Cramér–Lundbergovem modelu

Verjetnost propada

Definicija

Propad definiramo kot dogodek, da proces tveganja $(U_t)_{t \geq 0}$ *kadarkoli pade pod* 0*. To je torej dogodek*

$$\{U_t < 0 \text{ za neki } t \geq 0\}.$$

Času ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\}$$

pa pravimo čas propada.

Verjetnost propada

Definicija

Propad definiramo kot dogodek, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ *kadarkoli pade pod* 0*. To je torej dogodek*

$$\{U_t < 0 \text{ za neki } t \geq 0\}.$$

Času ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\}$$

pa pravimo čas propada.

Definicija

Verjetnost propada definiramo kot funkcijo $\psi : (0, \infty) \to [0, 1]$ *s predpisom*

$$\psi(u) = \mathbb{P}_u(T < \infty); \quad u \geq 0.$$

Prevedba na diskretni slučajni sprehod

Definicija

Po konstrukciji procesa tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ *je propad mogoč le ob prihodih zahtevkov. Z* V_n *označimo čas, ob katerem prispe n-ti zahtevek, in definiramo ogrodje procesa tveganja kot* $(U_{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Prevedba na diskretni slučajni sprehod

Definicija

Po konstrukciji procesa tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ je propad mogoč le ob prihodih zahtevkov. Z V_n označimo čas, ob katerem prispe n-ti zahtevek, in definiramo ogrodje procesa tveganja kot $(U_{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Trditev

Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu in $(U_{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$ njegovo ogrodje ter $T_n := V_n - V_{n-1}$ medprihodni čas n-tega zahtevka ($V_0 = T_0 = 0$). Potem velja

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ kumulativna izguba po n zahtevkih in $Y_i = X_i - cT_i$ izguba i-tega prihoda.

Pogoj neto zaslužka (NPC)

$$\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[X_1] - c\mathbb{E}[T_1]$$

Definicija

Pravimo, da proces tveganja $(U_t)_{t \geq 0}$ v Cramér–Lundbergovem modelu zadošča pogoju neto zaslužka (ang. net profit condition), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]}, \quad \textit{oziroma} \quad c = (1+\rho)\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} \quad \textit{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljevanju imenovali NPC.

Verjetnost preživetja

Definicija

Za lepšo notacijo v nadaljevanju definiramo še funkcijo verjetnosti preživetja kot $\theta : (0, \infty) \to [0, 1]$ *s predpisom*

$$\theta(u) = \mathbb{P}_u\left(T = \infty\right) = 1 - \psi(u); \quad u \geq 0.$$

Verjetnost preživetja

Definicija

Za lepšo notacijo v nadaljevanju definiramo še funkcijo verjetnosti preživetja kot $\theta : (0, \infty) \to [0, 1]$ *s predpisom*

$$\theta(u) = \mathbb{P}_u (T = \infty) = 1 - \psi(u); \quad u \geq 0.$$

Lema (Integralska enačba za verjetnost preživetja)

Naj bo $(U_t)_{t \geq 0}$ *proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC, ter naj velja* $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ *in da imajo slučajne spremenljivke* $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *gostoto. Potem* θ *zadošča enakosti*

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1+\rho)} \int_{(0,u]} \theta(u - x) d\overline{F}_{X_1}(x),$$

kjer je $\overline{F}_{X_1}$ *porazdelitev integriranega repa slučajne spremenljivke* X_1*.*

Defektna prenovitvena enačba

$$\theta(u) = (1-q) + q \int_{(0,u]} \theta(u-x) d\overline{F}_{X_1}(x).$$

Defektna prenovitvena enačba

$$\theta(u) = (1-q) + q \int_{(0,u]} \theta(u-x) d\overline{F}_{X_1}(x).$$

$$Ag(u) = (1-q) + q \int_{(0,u]} g(u-x) d\overline{F}_{X_1}(x),$$

Defektna prenovitvena enačba

$$\theta(u) = (1-q) + q\int_{(0,u]} \theta(u-x)\,d\overline{F}_{X_1}(x).$$

$$Ag(u) = (1-q) + q\int_{(0,u]} g(u-x)\,d\overline{F}_{X_1}(x),$$

A je skrčitev na prostoru omejenih funkcij $B([0,\infty))$, opremljene s supremum metriko

$$d_\infty(f,g) = \sup_{u\in[0,\infty)} \left|f(u)-g(u)\right|, \quad f,g \in B([0,\infty)).$$

Defektna prenovitvena enačba

$$\theta(u) = (1-q) + q\int_{(0,u]} \theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x).$$

$$Ag(u) = (1-q) + q\int_{(0,u]} g(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x),$$

A je skrčitev na prostoru omejenih funkcij $B([0,\infty))$, opremljene s supremum metriko

$$d_\infty(f,g) = \sup_{u\in[0,\infty)} \left|f(u)-g(u)\right|, \quad f,g \in B([0,\infty)).$$

Izkaže se, da z ustrezno izbiro funkcije $g_0 \in B([0,\infty))$ lahko pokažemo, da je

$$\theta(u) = \lim_{n\to\infty} A^n g_0 = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}\left(\overline{W}_k \le u\right).$$

Lahkorepe porazdelitve

Definicija

Naj velja, da ima slučajna spremenljivka $Y_1 = X_1 - cT_1$ iz trditve 4 lahek rep. Če obstaja enoličen $\ell > 0$, za katerega velja

$$M_{Y_1}(\ell) = 1,$$

temu številu pravimo Lundbergov koeficient.

Lahkorepe porazdelitve

Definicija

Naj velja, da ima slučajna spremenljivka $Y_1 = X_1 - cT_1$ iz trditve 4 lahek rep. Če obstaja enoličen $\ell > 0$, za katerega velja

$$M_{Y_1}(\ell) = 1,$$

temu številu pravimo Lundbergov koeficient.

Izrek (Lundbergova neenakost)

Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča pogoju NPC in zanj obstaja Lundbergov koeficient ℓ. Potem za vsak $u > 0$ velja

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u}.$$

Lahkorepe porazdelitve

Izrek (Asimptotika verjetnosti propada, lahkorepe porazdelitve)

Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ *proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient* ℓ*. Naj imajo slučajne spremenljivke* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *gostoto. Potem obstaja konstanta* $C > 0$*, za katero velja*

$$\lim_{u\to\infty} e^{\ell u}\psi(u) = C.$$

Lahkorepe porazdelitve

Izrek (Asimptotika verjetnosti propada, lahkorepe porazdelitve)

Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient ℓ. Naj imajo slučajne spremenljivke $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gostoto. Potem obstaja konstanta $C > 0$, za katero velja

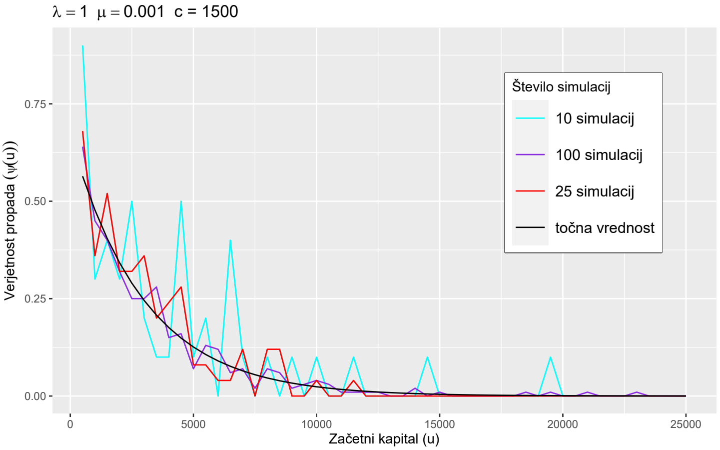
$$\lim_{u\to\infty} e^{\ell u}\psi(u) = C.$$

Zgled

V primeru ko zahtevke $X_1, X_2, \ldots$ modeliramo z eksponentno porazdelitvijo, torej $X_i \sim Exp(\mu)$, lahko eksplicitno izračunamo verjetnost propada

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho}\, e^{-\ell u}.$$

Lahkorepe porazdelitve



Slika: Aproksimacija verjetnosti propada $\psi(u)$ z Monte Carlo simulacijami.

Subeksponentne porazdelitve

Definicija

Verjetnostna porazdelitev F na $[0, \infty)$ je subeksponentna, če za vsak $n \geq 2$ in neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ s to porazdelitvijo velja

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n > x\right)}{\mathbb{P}\left(X_1 > x\right)} = n$$

in $F(x) < 1$ za vsak $x > 0$.

Izrek (Asimptotika verjetnosti propada, subeksponentne porazdelitve)

Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj bodo zahtevki $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ neodvisni in enako porazdeljeni z gostoto, pričakovano vrednostjo $\mathbb{E}[X] < \infty$ in naj bo $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna. Potem za verjetnost propada $\psi(u)$ velja

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)} = \frac{1}{\rho}.$$