UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

Kazalo

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Povzetek

V prvem delu diplome najprej definiramo sestavljeno Poissonovo porazdelitev in izpeljemo obliko njenih rodovnih funkcij, obravnavamo njeno povezavo s splošnimi porazdelitvami in izpeljemo Panjerjevo rekurzivno shemo. Nato definiramo sestavljeni Poissonov proces in pokažemo nekaj osnovnih lastnosti kot je neodvisnost in stacionarnost prirastkov. Izpeljemo nekaj rezultatov, ki jih dobimo, ko sestavljeni Poissonov proces markiramo. V drugem delu diplome obravnavamo aplikacijo sestavljenega Poissonovega procesa v Cramér–Lundbergovem modelu. Definiramo verjetnost propada in preživetja ter slednjo izrazimo z defektno prenovitveno enačbo. Dokažemo Lundbergovo neenakost in obravnavamo asimptotično obnašanje verjetnosti propada, ko zahtevke modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. Obnašanje verjetnosti propada na koncu praktično prikažemo z večkratkim simuliranjem procesa tveganja.

Compound Poisson process and its application in finance

Abstract

In the first half of the diploma, we define the compound Poisson distribution and derive the form of its generating functions. We discuss its connection with general distributions and derive the Panjer recursion scheme. We then define the compound Poisson process and show some basic properties such as the independence and stationarity of increments. We derive some results that follow from a space-time decomposition of the compound Poisson process. In the second half of the diploma, we discuss the application of the compound Poisson process in the Cramér–Lundberg model. We define the probability of ruin and survival and express the latter as a defective renewal equation. We prove the Lundberg inequality and discuss the asymptotic behavior of the probability of ruin when claims are modeled with light-tailed and heavy-tailed distributions. We practically demonstrate the behavior of the probability of ruin by repeatedly simulating the risk process.

Math. Subj. Class. (2020): 60G07 60G20 60G51

Ključne besede: slučajni proces, sestavljena Poissonova porazdelitev, Panjerjeva rekurzivna shema, sestavljeni Poissonov proces, markiranje, Cramér–Lundbergov model, Verjetnost propada, lahkorepa porazdelitev, težkorepa porazdelitev

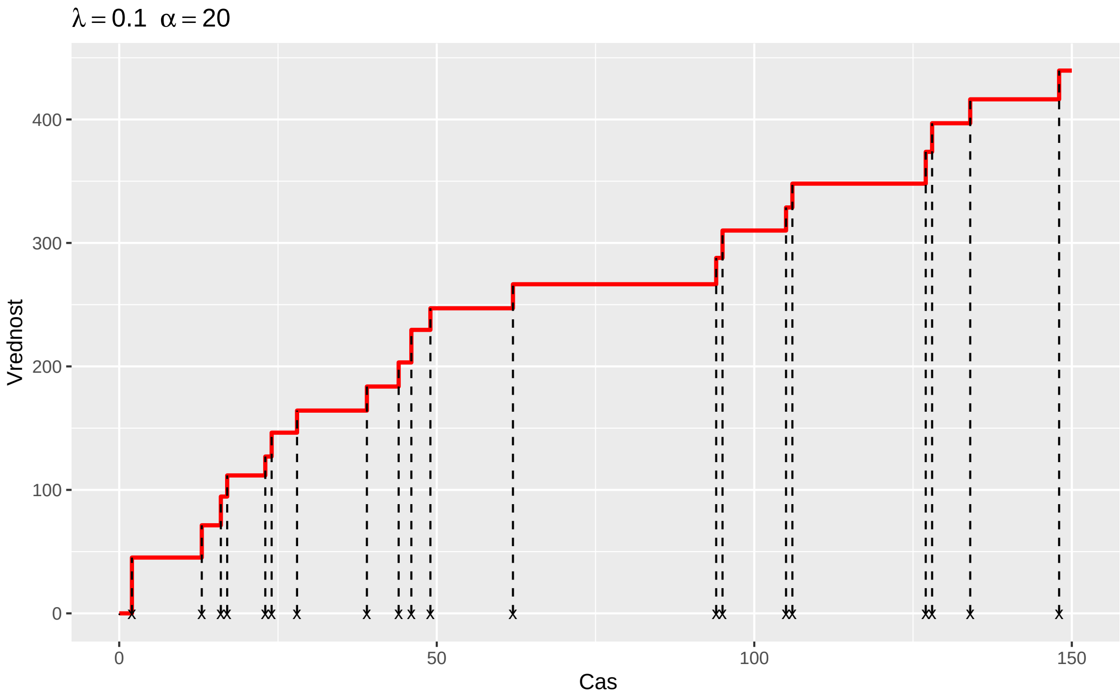
Keywords: stochastic process, compound Poisson distribution, Panjer recursion scheme, compound Poisson process, space-time decomposition, Cramér–Lundberg model, probability of ruin, light-tailed distribution, heavy-tailed distribution

Zahvala

V nastajanju :)

1. Uvod

Na različnih področjih financ so se v zadnjem stoletju razvile raznovrstne verjetnostne tehnike, kako modelirati spreminjanje vrednosti finančnih instrumentov s časom. V delu se osredotočimo na zavarovalništvo, kjer želimo modelirati različne produkte, ki jih zavarovalnice ponujajo, da lahko ustrezno določimo višino premije, ki jo bodo zavarovanci plačevali. Zadostiti želimo določenim zastavljenim merilom tveganja in dobiti verjetnostna zagotovila, da lahko skozi čas pričakujemo dobiček. Standarden pristop k problemu je uporaba sestavljenih porazdelitev oziroma procesov, kjer skozi čas seštevamo naključno število neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki predstavljajo višino posameznih zahtevkov zavarovancev. Prvi tak model za opis poslovanja zavarovalnice je v začetku 20. stoletja razvil Filip Lundberg. Le-ta je danes eden izmed najbolj raziskanih in uporabljenih modelov v teoriji tveganja. Model temelji na sestavljenem Poissonovem procesu, kjer predpostavimo, da ima število zahtevkov, ki jih zavarovalnica prejme v nekem časovnem intervalu, Poissonovo porazdelitev.



Slika 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa z intenzivnostjo $\lambda = 0{,}1$ in eksponentno porazdeljenimi zahtevki; $X_i \sim \mathrm{Exp}(20)$.

Sliko 1 v kontekstu zavarovalništva interpretiramo kot kumulativno obveznost zavarovalnice svojim zavarovancem v nekem časovnem intervalu.

Vsebina se v grobem deli na dva dela. Drugo in tretje poglavje sta namenjeni tehnični obravnavi ključnih lastnosti sestavljene Poissonove porazdelitve in procesa. V četrtem poglavju pa se posvetimo praktični obravnavi uporabe sestavljenega Poissonovega procesa v zavarovalništvu.

V drugem poglavju definiramo sestavljeno Poissonovo porazdelitev in izpeljemo obliko njenih rodovnih funkcij. Težava, ki si jo delijo sestavljene porazdelitve, je, da so redko analitično izračunljive. Zato izpeljemo Panjerjevo rekurzivno shemo, ki je ena izmed najbolj popularnih metod za numerično aproksimacijo sestavljene Poissonove porazdelitve.

V tretjem poglavju definiramo sestavljeni Poissonov proces in izpeljemo nekaj osnovnih lastnosti, kot sta neodvisnost in stacionarnost prirastkov ter pričakovana vrednost. Poglavje zaključimo z izpeljavo rezultatov, ki jih dobimo, ko sestavljeni Poissonov proces markiramo.

V četrtem poglavju se posvetimo Cramér–Lundbergovemu modelu, ki je prvi model, ki je bil uporabljen za modeliranje tveganja v zavarovalništvu. Osredotočimo se na verjetnost propada in zanjo izpeljemo prenovitveno enačbo. Obravnavamo asimptotiko verjetnosti propada, ko zahtevke modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami.

V delu privzamemo, da je bralec seznanjen z osnovami verjetnosti, homogenega Poissonovega procesa in prenovitvenimi procesi. Na slike, vire in rezultate, ki jih izpeljemo v delu, se sklicujemo z modro barvo . Na koncu dela je priloga, kjer je zbrana velika večina definicij in izrekov, s katerimi naj bi bil bralec seznanjen pred branjem dela. Na njih se skličemo, ko jih prvič omenimo v delu in pri dokazih trditev, ter jih označimo z rdečo barvo .

2. Sestavljena Poissonova porazdelitev

Razdelek je prirejen po [1], [2] in [4].

Sestavljena Poissonova porazdelitev je osnovni gradnik za sestavljeni Poissonov proces, ki ga obravnavamo v naslednjem razdelku. Lastnosti, ki jih dokažemo, so direktno prenosljive na sam proces. Izpeljemo obliko rodovnih funkcij, porazdelitveno funkcijo, zanimive rezultate v povezavi s splošnimi slučajnimi spremenljivkami in Panjerjevo rekurzivno shemo, ki jo prikažemo na praktičnem zgledu.

Definicija 2.1. Naj bo $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih (med seboj in od N) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

sestavljeno Poissonovo porazdelitev.

Opomba 2.2. V primeru, ko je $X_i = 1$ za vsak $i \in \mathbb{N}$, je $S \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$.

Opomba 2.3. Na enak način definiramo splošne sestavljene porazdelitve, kjer je N poljubna slučajna spremenljivka, ki zavzema vrednosti v $\mathbb{N}_0$[1]. Konkreten primer nas zanima zaradi njegove povezave s sestavljenim Poissonovim procesom. V nadaljevanju bomo uporabljali oznako

$$S_0 = 0 \quad \text{in} \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \quad \text{za } k \in \mathbb{N}\,;$$

opazimo, da se brezpogojna porazdelitev slučajne spremenljivke S_k ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke $S \mid \{N = k\}$.

2.1. Rodovne, momentno-rodovne in karakteristične funkcije.

Ključno orodje pri dokazovanju lastnosti slučajnih spremenljivk so rodovne funkcije 5.1, saj so zelo uporabne pri obravnavi vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk in (če obstajajo) popolnoma določajo njihovo porazdelitev.

Trditev 2.4. *Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih (med seboj in od N) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z momentno-rodovno funkcijo M_{X_1}. Potem ima momentno-rodovna funkcija vsote $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ obliko*

$$M_S(u) = e^{\lambda\left(M_{X_1}(u)-1\right)}.$$

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}
\varphi_S(u) &= \mathbb{E}\left[\exp\left[uS\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[uS\right] \;\middle|\; N = k\right] \mathbb{P}\left(N = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[uS_k\right]\right] \mathbb{P}\left(N = k\right)
\end{aligned}$$

[1] V delu se držimo dogovora, da je S na dogodku $\{N = 0\}$ prazna vsota in zato enaka 0.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{uX_1}\right]^k}_{M_{X_1}(u)^k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (1) \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(M_{X_1}(u)\lambda\right)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda\left(M_{X_1}(u)-1\right)}.
\end{aligned}
$$

□

Posledica 2.5. *Rodovna in karakteristična funkcija $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ imata obliko*

$$
G_S(u) = e^{\lambda\left(G_{X_1}(u)-1\right)} \qquad \text{in} \qquad \varphi_S(u) = e^{\lambda\left(\varphi_{X_1}(u)-1\right)}.
$$

Dokaz. V splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke X enaka njeni momentno-rodovni funkciji, izvrednoteni v iu za $u \in \mathbb{R}$, torej $\varphi_X(u) = M_X(iu)$. Rodovna funkcija pa je enaka momentno-rodovni funkciji, izvrednoteni v $\ln(u)$ za $u > 0$, torej $G_X(u) = M_X(\ln(u))$, če obstajata. □

V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo φ_S, saj je ta vedno definirana za vsak $u \in \mathbb{R}$. Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med φ_S in G_N, ki je poseben primer splošnejšega rezultata za sestavljene porazdelitve.

Trditev 2.6. *Karakteristično funkcijo φ_S lahko izrazimo kot kompozitum rodovne funkcije G_N in karateristične funkcije φ_{X_1}.*

$$
\varphi_S(u) = G_N\left(\varphi_{X_1}(u)\right).
$$

Dokaz. Po enačbi (1) iz trditve 2.4 za $u \in \mathbb{R}$ velja

$$
\begin{aligned}
\varphi_S(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{X_1}(u)^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= G_N\left(\varphi_{X_1}(u)\right).
\end{aligned}
$$

□

2.2. **Porazdelitvena funkcija.** Z uporabo izreka o popolni verjetnosti s pogojevanjem na N pridemo do formule za porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke S. Za $x \in \mathbb{R}$ velja

$$
\begin{aligned}
F_S(x) = \mathbb{P}\big(S \leq x\big) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(S \leq x \mid N = k\big)\mathbb{P}\big(N = k\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(S_k \leq x\big)\mathbb{P}\big(N = k\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} F_{X_1}^{*k}(x) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},
\end{aligned}
$$

kjer je $F_{X_1}^{*k}(x)$ k-ta konvolucija 5.5 funkcije F_{X_1}.

Zgled 2.7. Poglejmo enega enostavnejših primerov, ko so $X_1, X_2, \ldots$ porazdeljene kot
$$X_1 \sim \mathrm{Exp}(a), \quad \text{torej z gostoto} \quad f_{X_1}(x) = ae^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$
kjer je $a > 0$. Vemo, da je k-ta konvolucija porazdelitve slučajne spremenljivke X_1 porazdelitev $\mathrm{Gamma}(k, a)$ in ima gostoto
$$f_{X_1+\cdots+X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$
Za $s > 0$ velja
$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^s \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} dx \, \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} && \text{Tonelli 5.25} \\ &= \int_0^s \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!k!} (a\lambda)^k x^{k-1} e^{-(ax+\lambda)}}_{f_S(x)} dx. \end{aligned}$$
Vidimo, da lahko že celo v primeru, ko poznamo eksplicitno formulo za $F_{X_1}^{*k}$, težko pridemo do porazdelitve slučajne spremenljivke S v zaključeni obliki. V praksi se zato poslužujemo numeričnega ocenjevanja. $\diamondsuit$

Vemo, da za neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$, ki so porazdeljene kot $X_1 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1)$, $\ldots$, $X_n \sim \mathrm{Pois}(\lambda_n)$, velja, da je njihova vsota $S = \sum_{i=1}^n X_i$ porazdeljena kot $S \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, kjer je $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Izkaže se, da ima sestavljena Poissonova porazdelitev podobno lastnost.

Definicija 2.8. Naj bo $(\lambda_k)_{k=1}^n$ zaporedje pozitivnih realnih števil, za katerega velja $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Naj bodo $F_1, \ldots, F_n$ porazdelitvene funkcije slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$. Potem porazdelitvi s porazdelitveno funkcijo
$$F = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k$$
pravimo *mešanica porazdelitev* teh slučajnih spremenljivk z utežmi $(\lambda_k)_{k=1}^n$.

Pokažimo, da je F res porazdelitvena funkcija. Če definiramo slučajno spremenljivko
$$I \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
in je le-ta neodvisna od vsake od slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$, vidimo, da je F porazdelitev slučajne spremenljivke $X_I = \mathbb{1}_{\{I=1\}} X_1 + \cdots + \mathbb{1}_{\{I=n\}} X_n$, kar enostavno pokažemo z uporabo zakona o popolni verjentnosti. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathbb{R}$ velja
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_I \le x) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left(X_I \le x \;\middle|\; I = k\right) \mathbb{P}(I = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \le x)\, \lambda_k \\ &= \sum_{k=1}^n F_k(x)\lambda_k. \end{aligned}$$
Z enakim argumentom lahko pokažemo, da je $\varphi_{X_I}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{X_k}(u)$.

Trditev 2.9. *Naj imajo neodvisne slučajne spremenljivke $S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}$ sestavljeno Poissonovo porazdelitev, torej*

$$S^{(k)} = \sum_{i=1}^{N_k} X_i^{(k)} \quad \textit{za } k = 1, \ldots, n,$$

kjer je $N_k \sim Pois(\lambda_k)$ za $\lambda_k > 0$ in za vsak $k = 1, \ldots, n$ je $(X_i^{(k)})_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem velja

$$S = \sum_{k=1}^{n} S^{(k)} \sim \sum_{i=1}^{N} Y_i,$$

kjer je $N \sim Pois(\lambda)$ s parametrom $\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ in $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z mešano porazdelitveno funkcijo

$$F_{Y_1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda} F_{X_1^{(k)}}.$$

Dokaz. Karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $S^{(k)}$ ima obliko

$$\varphi_{S^{(k)}}(u) = \exp\left[\lambda_k \left(\varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1\right)\right], \quad k = 1, \ldots, n.$$

Ker so $S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}$ neodvisne, velja

$$\begin{aligned}
\varphi_S(u) &= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{S^{(k)}}(u) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \exp\left[\lambda_k \left(\varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1\right)\right] \\
&= \exp\left[\lambda \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda} \varphi_{X_1^{(k)}}(u)}_{\varphi_{Y_1}(u)} - 1\right)\right].
\end{aligned}$$

Po izreku o enoličnosti 5.21 sledi $S \sim \sum_{i=1}^{N} Y_i$. □

Na podoben način pokažemo, kako se sestavljena Poissonova porazdelitev izraža v primeru, ko so slučajne spremenljivke X_i diskretno porazdeljene.

Trditev 2.10. *Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \ldots X_n$ neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od N) enako porazdeljene po shemi*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} & \ldots \end{pmatrix},$$

kjer je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poljubno zaporedje realnih števil in $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih realnih števil, za katerega velja $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda$. Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

kjer so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke s porazdelitvami $Pois(\lambda_1), Pois(\lambda_2), \ldots$

Dokaz. S φ_{Z_n} označimo karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $Z_n := a_1Y_1 + a_2Y_2 + \cdots + a_nY_n$ in s φ_Z karakteristično funkcijo $Z := \sum_{j=1}^N X_j$. Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(a_ju)\\ &= \prod_{j=1}^n \exp\left[\lambda_j\left(e^{a_jiu}-1\right)\right]\\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j\left(e^{a_jiu}-1\right)\right].\end{aligned}$$

Po posledici 2.5 velja

$$\begin{aligned}\varphi_Z(u) &= \exp\left[\lambda\left(\varphi_{X_1}(u)-1\right)\right]\\ &= \exp\left[\lambda\left(\sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_j}{\lambda}e^{a_jiu}-1\right)\right]\\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^\infty \lambda_j\left(e^{a_jiu}-1\right)\right].\end{aligned}$$

Vidimo, da zaporedje $\varphi_{Z_n}(u)$ za vsak $u \in \mathbb{R}$ po točkah konvergira k $\varphi_Z(u)$, torej

$$\varphi_{Z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_Z$$

po Lévijevem izreku o kontinuiteti 5.22 velja $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$. □

Rezultat je zanimiv predvsem zato, ker nam v nasprotju s trditvijo 2.9 pove, da lahko slučajno vsoto izrazimo kot linearno kombinacijo oziroma vrsto Poissonovih slučajnih spremenljivk.

2.3. **Panjerjeva rekurzivna shema.** Poglejmo si popularno metodo za numerično aproksimacijo sestavljene Poissonove porazdelitve v praksi. Kot smo videli v zgledu 2.7, je izražava eksplicitne porazdelitvene funkcije S v zaključeni obliki v splošnem nemogoča. Izkaže pa se, da jo je v posebnih primerih vselej mogoče rekurzivno izraziti in ustrezno posplošiti na širši razred porazdelitev.

Trditev 2.11. *(Panjer) Naj bo N diskretna slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, za katero velja*

$$\mathbb{P}(N=n) = \left(a+\frac{b}{n}\right)\mathbb{P}\left(N=n-1\right) \quad \text{za } n\in\mathbb{N} \text{ in } a,b\in\mathbb{R}.$$

Naj bo $X_1, X_2, \dots$ zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki zavzemajo vrednosti v $\mathbb{N}_0$. Potem za $S = \sum_{i=1}^N X_i$ ob dogovoru, da je $0^0 := 1$, velja

$$\mathbb{P}\left(S=0\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(X_1=0\right)^N\right],$$

za $n\in\mathbb{N}$ pa velja

$$\mathbb{P}(S=n) = \frac{1}{1-a\mathbb{P}(X_1=0)}\sum_{k=1}^n\left(a+\frac{bk}{n}\right)\mathbb{P}(X_1=k)\mathbb{P}(S=n-k). \tag{2}$$

Dokaz. Po zakonu za popolno pričakovano vrednost velja

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=0) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(S=0 \mid N=j)\mathbb{P}(N=j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_j=0)\mathbb{P}(N=j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1=0)^j\, \mathbb{P}(N=j) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(X_1=0)^N\right].
\end{aligned}$$

Za $n \in \mathbb{N}$ pa velja

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=n) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_j=n)\mathbb{P}(N=j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_j=n)\left(a+\frac{b}{j}\right)\mathbb{P}(N=j-1). \qquad (3)
\end{aligned}$$

Ker so $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene, so izmenljive 5.13 in tako po trditvi 5.15 velja

$$1 = \mathbb{E}\left[\frac{S_j}{S_j} \;\middle|\; S_j\right] = \sum_{k=1}^{j} \mathbb{E}\left[\frac{X_k}{S_j} \;\middle|\; S_j\right] = j\,\mathbb{E}\left[\frac{X_1}{S_j} \;\middle|\; S_j\right],$$

torej je

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1}{S_j} \;\middle|\; S_j\right] = \frac{1}{j}$$

in posledično

$$\mathbb{E}\left[a+\frac{bX_1}{n} \;\middle|\; S_j=n\right] = a+\frac{b}{j}. \qquad (4)$$

Nadalje velja

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[a+\frac{bX_1}{n} \;\middle|\; S_j=n\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)\mathbb{P}(X_1=k \mid S_j=n) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)\frac{\mathbb{P}(X_1=k,\, S_j-X_1=n-k)}{\mathbb{P}(S_j=n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)\frac{\mathbb{P}(X_1=k)\,\mathbb{P}(S_{j-1}=n-k)}{\mathbb{P}(S_j=n)} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Če sedaj vstavimo enakost (4) v (3) in upoštevamo (5), dobimo

$$\mathbb{P}(S=n)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)\mathbb{P}(X_1=k)\mathbb{P}(S_{j-1}=n-k)\mathbb{P}(N=j-1).$$

Po Tonellijevem izreku 5.25 lahko zamenjamo vrstni red vsot, kar nam da

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=n)&=\sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)\mathbb{P}(X_1=k)\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(S_{j-1}=n-k)\mathbb{P}(N=j-1)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)\mathbb{P}(X_1=k)\mathbb{P}(S=n-k).\end{aligned}$$

Izpostavimo prvi člen vsote in izraz preoblikujemo.

$$\mathbb{P}(S=n)=a\mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(S=n)+\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)\mathbb{P}(X_1=k)\,\mathbb{P}(S=n-k),$$

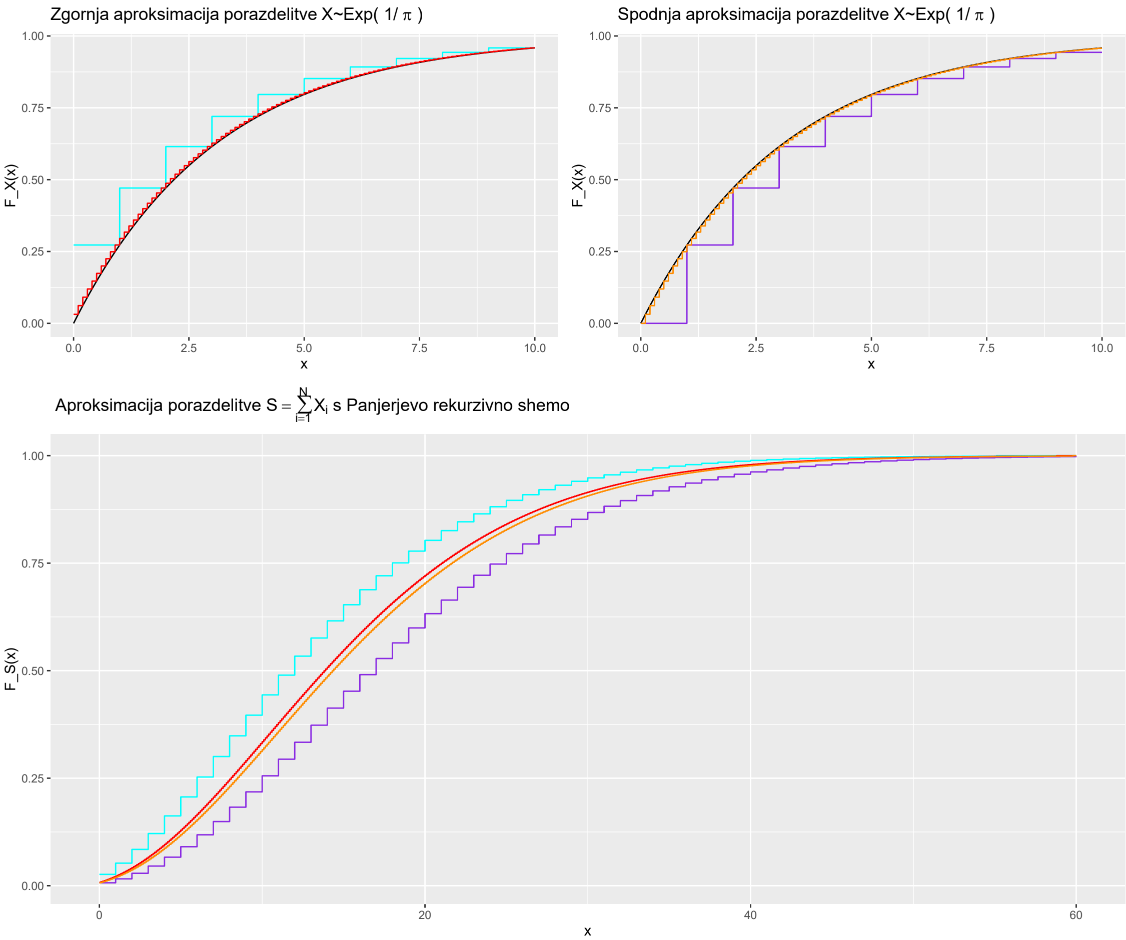
$$\mathbb{P}(S=n)=\frac{1}{1-a\mathbb{P}(X_1=0)}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)\mathbb{P}(X_1=k)\,\mathbb{P}(S=n-k).$$

S tem je trditev dokazana. □

Opomba 2.12. Izkaže se, da le tri porazdelitve ustrezajo rekurzivni izražavi iz trditve 2.11. Te so $\mathrm{Pois}(\lambda)$, $\mathrm{Bin}(p)$ in $\mathrm{NegBin}(r,p)$ ob dogovoru, da ima slednja zalogo vrednosti $\mathbb{N}_0$ in $r\geq 0$. Pravimo jim *porazdelitve Panjerjevega razreda*. V primeru $N\sim\mathrm{Pois}(\lambda)$ za $n\in\mathbb{N}_0$, $a=0$ in $b=\lambda$ velja $\mathbb{P}(N=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\left(0+\frac{\lambda}{n}\right)\mathbb{P}(N=n-1)$. Tudi v ostalih primerih (argument je podan v [4] na strani 122) se izkaže, da je $a<1$, tako da je enačba (2) res dobro definirana.

Opomba 2.13. Zahtevo, da X_i zavzemajo vrednosti v $\mathbb{N}_0$, se splača posplošiti, tako da zahtevamo le, da X_i zavzemajo vrednosti v $h\mathbb{N}_0$ za neki $h>0$. V tem primeru zapišemo $S=h\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i}{h}$ in tako rekurzivna zveza velja za $\frac{S}{h}$. Tako lahko aproksimiramo splošne slučajne spremenljivke, ki zavzemajo vrednosti v $[0,\infty)$, poljubno natančno.

Zgled 2.14. (Nadaljevanje zgleda 2.7) Recimo, da imamo konkretni porazdeltivi $N\sim\mathrm{Pois}(9{,}17)$ in $X_i\sim\mathrm{Exp}(\frac{1}{\pi})$. S stopničastima funkcijama F_h^u in F_h^l aproksimiramo porazdelitveno funkcijo F_{X_1} za vrednosti $h\in\{1,\ 0{,}1\}$. (Aproksimacije so na sliki 2 in so obarvane; F_1^u modra, $F_{0,1}^u$ rdeča, F_1^l vijolična in $F_{0,1}^l$ oranžna). Za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja $F_h^u(x)=F_{X_1}((n+1)h)$ za $x\in\big[nh,(n+1)h\big)$ in $F_h^l(x)=F_{X_1}(nh)$ za $x\in\big[nh,(n+1)h\big)$. S Panjerjevo rekurzivno shemo izračunamo približke porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke S na intervalu $[0,60]$.



SLIKA 2. Aproksimacija porazdelitve S s Panjerjevo rekurzivno shemo.

Vidimo, da že za $h = 0{,}1$ dobimo zelo natančno aproksimacijo porazdelitve. Danes Panjerjeva metoda predstavlja alternativo Monte Carlo metodam. Njena glavna prednost je, da z manjšanjem koraka h dosežemo poljubno natančno točno aproksimacijo neke porazdelitve. Monte Carlo metode so bolj splošne, saj temeljijo zgolj na ponavljanju simulacij in se lahko uporabljajo za modeliranje bolj zapletenih porazdelitev, ki ne zadoščajo pogojem trditve 2.11, ali njene posplošitve v opombi 2.12.

$\diamondsuit$

3. Sestavljeni Poissonov proces

Razdelek je prirejen po [1], [2], in [3].

Sedaj se posvetimo študiranju sestavljenega Poissonovega procesa. Bralec lahko najde osnovne definicije in lastnosti splošnih slučajnih procesov, ki nas zanimajo, med definicijama 5.6 in 5.11 v prilogi. Najprej dokažemo in izpeljemo nekaj osnovnih lastnosti procesa kot so neodvisnot in stacionarnost prirastov, pričakovana vrednost in varianca. Na koncu obravnavamo markiranje procesa glede čas in njegovo vrednost ter dokažemo nekaj zanimivih in uporabnih posledic.

Sestavljeni Poissonov proces temelji na homogenenem Poissonovem procesu, zato najprej podamo definicijo s katero bomo delali, saj ima homogeni Poissonov proces več ekvivalentnih karakterizacij.

Definicija 3.1. Naj bo $\lambda > 0$. Družini slučajnih spremenljivk $(N_t)_{t\geq 0}$, definiranimi na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, pravimo *homogeni Poissonov proces* z intenzivnostjo λ, če zadošča naslednjim pogojem:

(1) $N_0 = 0$ $\mathbb{P}$-skoraj gotovo.
(2) $(N_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
(3) Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t-s))$,

Opomba 3.2. V delu bomo z V_n označevali čas n-tega prihoda v homogenem Poissonovem procesu in s T_n n-ti medprihodni čas. Za medprihodne čase velja, da so neodivsni in enako porazdeljeni, kot $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$. Ta lastnost je tudi alternativna definicija procesa, kot poseben primer prenovitvenega procesa 5.29. Bralec lahko najde dokaz ekvivalence v [10] na strani 15.

Definicija 3.3. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Naj bo $(X_i)_{i\geq 1}$ zaporedje neodvisnih (med sabo in od procesa $(N_t)_{t\geq 0}$) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem je *sestavljeni Poissonov proces* $(S_t)_{t\geq 0}$ definiran kot družina slučajnih spremenljivk

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0.$$

Opomba 3.4. Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces naravna posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$ za vsak i, dobimo le tega. Bolj v splošnem, če je $X_i = \alpha$ deterministična funkcija, potem velja $S_t = \alpha N_t$.

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$ označevali s HPP(λ) ali naborom slučajnih spremenljivk $(N_t)_{t\geq 0}$ (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s CPP ali naborom slučajnih spremenljivk $(S_t)_{t\geq 0}$ (angl. Compound Poisson Process), kjer prihodi sledijo implicitno podanemu HPP(λ).

3.1. Osnovne lastnosti.

Pri študiranju slučajnih procesov nas najprej zanimajo neke osnovne lastnosti, s katerimi je lažje delati kot z neštevnim naborom slučajnih spremenljivk in s pomočjo katerih lahko pokažemo globlje rezultate o procesu.

Trditev 3.5. *Slučajni proces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *za katerega je* $X_0 = 0$, *ima neodvisne in stacionarne prirastke natanko tedaj, ko za poljubna realna števila* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \infty$ *velja*

$$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_{t_1} \ldots, X_{t_n} \sim X_{t_{n+1}-t_n}. \tag{6}$$

Dokaz. $(\Rightarrow)$: Recimo, da ima $(X_t)_{t\geq 0}$ neodvisne in stacionarne prirastke. Ker je X_0 konstanta, lahko pišemo $X_0 = x_0$. Po predpostavki in definicijah 5.9 in 5.10 je

$$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_{t_1} - x_0 \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \sim X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \sim X_{t_{n+1}-t_n}.$$

Po trditvi 5.12 je potem za poljubno Borelovo funkcijo $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tudi

$$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid g(X_{t_1} - x_0 \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \sim X_{t_{n+1}-t_n}.$$

Definiramo

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (g_1, g_2, \ldots, g_n), \\ g_1 &= y_1 + x_0, \\ g_2 &= y_2 + y_1 + x_0, \\ &\vdots \\ g_n &= y_n + y_{n-1} + \cdots + x_0. \end{aligned}$$

Funkcija g je očitno merljiva, saj jo definiramo le s seštevanjem. Ker velja $g(X_{t_1} - x_0, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, smo dokazali prvo smer implikacije.
$(\Leftarrow)$: Recimo, da za poljubna realna števila $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \infty$ velja (6). Zdaj definiramo

$$\begin{aligned} h(y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (h_1, h_2, \ldots, h_n), \\ h_1 &= y_1 - x_0, \\ h_2 &= y_2 - y_1, \\ &\vdots \\ h_n &= y_n - y_{n-1}. \end{aligned}$$

Po trditvi 5.12 je potem $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisna od $(X_{t_1} - X_0, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ in enako porazdeljena kot $X_{t_{n+1}-t_n}$. Z indukcijo dobimo, da so potem tudi prirastki med seboj neodvisni in stacionarni.

□

Trditev 3.6. CPP *ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Po trditvi 3.5 je dovolj pokazati, da za poljubna realna števila $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid S_{t_1}, \ldots, S_{t_n} \sim S_{t_{n+1}-t_n}.$$

Naj bodo $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ in $k_1 \leq \cdots \leq k_n$. Na dogodku $\{N_{t_n} = k_n\}$ velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} = \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i,$$

zato je

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n, X_1, \ldots, X_{k_n}$$

$$\sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i \,\Big|\, N_{t_1}=k_1,\ldots,N_{t_n}=k_n, X_1,\ldots,X_{k_n}.$$

Ker pa so $X_1,\ldots,X_{k_n},X_{k_n+1},X_{k_n+2},\ldots,N_{t_2}-N_{t_1},\ldots,N_{t_n}-N_{t_{n-1}},N_{t_{n+1}}-N_{t_n}$, neodvisne, sledi, da sta neodvisna tudi vektorja

$$(N_{t_1},N_{t_2}-N_{t_1},\ldots,N_{t_n}-N_{t_{n-1}},X_1,\ldots,X_{k_n}) \quad \text{in} \quad (N_{t_{n+1}}-N_{t_n}X_{k_n+1},\ldots),$$

z njima pa tudi vektor $(N_{t_1},\ldots,N_{t_n},X_1,\ldots,X_{k_n})$ in slučajna spremenljivka $\sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i$. Torej je

$$S_{t_{n+1}}-S_{t_n} \mid N_{t_1}=k_1,\ldots,N_{t_n}=k_n,X_1,\ldots,X_{k_n} \sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i.$$

Vemo, da po stacionarnosti prirastkov HPP velja $N_{t_{n+1}}-N_{t_n} \sim N_{t_{n+1}-t_n}$. Ker pa je zaporedje $X_{k_n+1},X_{k_n+2},\ldots$ neodvisno od $N_{t_{n+1}}-N_{t_n}$, zaporedje $X_1,X_2,\ldots$ neodvisno od $N_{t_{n+1}-t_n}$ ter ker sta zaporedji $X_1,X_2,\ldots$ in $X_{k_n+1},X_{k_n+2},\ldots$ enako porazdeljeni, je tudi

$$N_{t_{n+1}}-N_{t_n};X_{k_n+1},X_{k_n+2},\cdots \sim N_{t_{n+1}-t_n};X_1,X_2,\ldots$$

in zato tudi

$$\begin{aligned} &S_{t_{n+1}}-S_{t_n} \mid N_{t_1}=k_1,\ldots,N_{t_n}=k_n,X_1,\ldots,X_{k_n} \\ &\sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i \sim \sum_{i=1}^{N_{t_{n+1}-t_n}} X_i = S_{t_{n+1}-t_n}. \end{aligned}$$

Potem pa je po trditvi 5.12 tudi

$$S_{t_{n+1}}-S_{t_n} \mid N_{t_1}=k_1,\ldots,N_{t_n}=k_n,\sum_{i=1}^{k_1}X_i,\ldots,\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n}X_i \sim S_{t_{n+1}-t_n}.$$

Ker pa na dogodku $\{N_{t_1}=k_1,\ldots,N_{t_n}=k_n\}$ velja

$$\sum_{i=1}^{k_1}X_i=S_{t_1},\ldots,\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n}X_i=S_{t_n}-S_{t_{n-1}},$$

je končno

$$S_{t_{n+1}}-S_{t_n} \mid N_{t_1}=k_1,\ldots,N_{t_n}=k_n,S_{t_1},\ldots,S_{t_n}-S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

oziroma

$$S_{t_{n+1}}-S_{t_n} \mid N_{t_1},\ldots,N_{t_n},S_{t_1},\ldots,S_{t_n}-S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

in spet po trditvi 5.12 velja

$$S_{t_{n+1}}-S_{t_n} \mid S_{t_1},\ldots,S_{t_n}-S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}.$$

□

Trditev 3.7. *Naj bo* $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP *in naj bosta* $\mu=\mathbb{E}[X_i]<\infty$ *pričakovana vrednost in* $\sigma^2=\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_i]<\infty$ *varianca slučajnih spremenljivk* X_i. *Potem sta za* $t\geq 0$ *pričakovana vrednost in varianca* S_t *enaki*

$$\mathbb{E}[S_t]=\mu\lambda t \qquad \textit{in} \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}[S_t]=\lambda t\left(\sigma^2+\mu^2\right).$$

Dokaz. Za $t \geq 0$ in $k \in \mathbb{N}_0$ velja

$$\mathbb{E}[S_t \mid N_t = k] = k\mu \qquad \text{in} \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}[S_t \mid N_t = k] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$. Torej je

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu\lambda t.$$

Prek formule $\mathbb{V}\mathrm{ar}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}[S_t \mid N_t]] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$ računamo

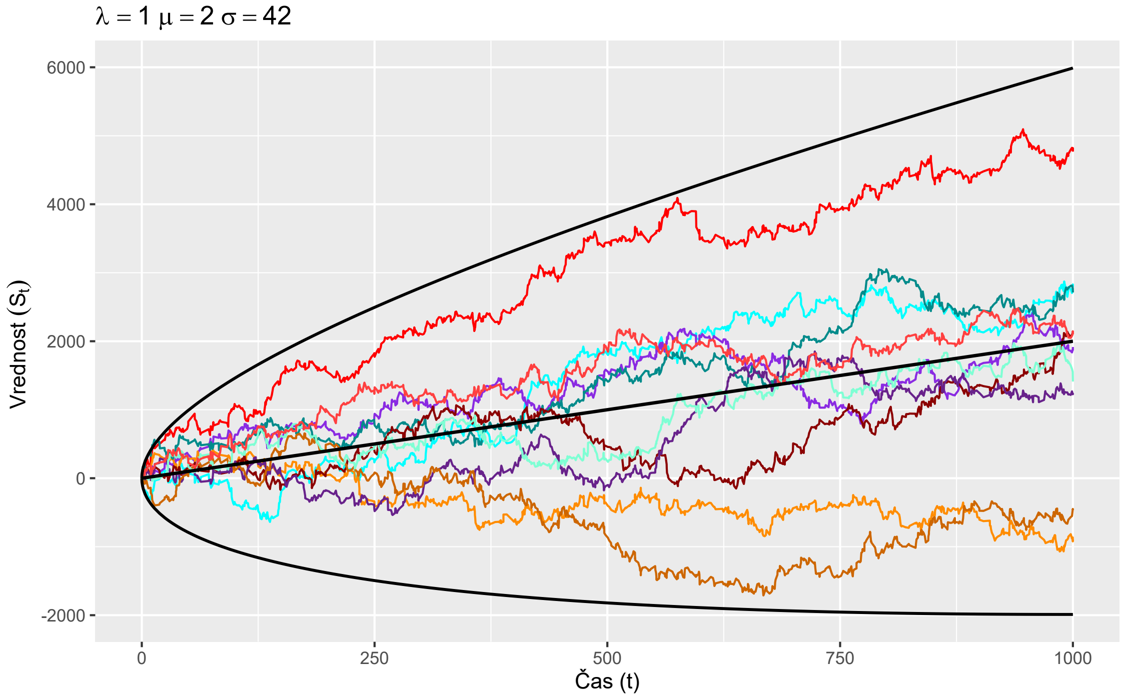
$$\mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_i]\, N_t] = \sigma^2\lambda t$$

in

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathbb{E}[X_i]\, N_t] = \mu^2\lambda t.$$

Če enačbi seštejemo, dobimo $\mathbb{V}\mathrm{ar}[S_t] = \lambda t\,(\sigma^2 + \mu^2)$. □

Zgled 3.8. Poglejmo si primer ko je zaporedje $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ porazdeljeno kot $X_1 \sim N(2, 42)$. Tedaj za $t \geq 0$ velja $\mathbb{E}[S_t] = 2t$ in $\mathbb{V}\mathrm{ar}[S_t] = t(2^2 + 42^2) = 1768t$ ter $\sigma_{S_t} = \sqrt{1768t}$. Simuliramo 10 realizacij CPP do časa $T = 1000$, ki jih prikažemo na sliki 3 skupaj s funkcijami $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$ in $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$.



SLIKA 3. Trajektorije CPP s funkcijami $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$ in $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$

◊

3.2. **Markiranje.** V trditvi 2.9 smo pokazali, da ima vsota neodvisnih sestavljenih Poissonovih porazdelitev spet sestavljeno Poissonovo porazdelitev. Podobno lahko CPP razdelimo na več neodvisnih sestavljenih Poissonovih procesov, tako da ga markiramo glede na čas in vrednost posameznega prihoda.

Izrek 3.9. *(o markiranju) Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP. Naj bodo $A_1, \ldots, A_n$ disjunktne podmnožice množice $[0,\infty) \times \mathbb{R}$. Potem so za fiksen $t \geq 0$ slučajne spremenljivke*

$$S_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(V_i, X_i), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

med seboj neodvisne (V_i označuje čas i-tega prihoda). Še več, za vsak $j = 1, \ldots, n$ je

$$S_t^{(j)} \sim \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i),$$

kjer je $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih (med sabo, ter še od N_t in $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$) slučajnih spremenljivk, porazdeljenih enakomerno $U([0,t])$. Slučajna spremenljivka $S_t^{(j)}$ ima torej sestavljeno Poissonovo porazdelitev.

Dokaz. Za splošni HPP(λ) velja lastnost vrstilnih statistik 5.26, torej

$$(V_1, \ldots,\ V_k \mid N_t = k) \sim \left(U_{(1)}, \ldots,\ U_{(k)}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tako lahko za $j \in \{1, \ldots, n\}$ pogojno porazdelitev vsote (7) na dogodek $\{N_t = k\}$ zapišemo kot

$$S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\} \sim \sum_{i=1}^{k} X_i \mathbb{1}_{A_j}\left(U_{(i)}, X_i\right).$$

Vrstni red sumandov je nepomemben. Z upoštevanjem neodvisnosti in enake porazdeljenosti slučajnih spremenljivk X_i lahko dano pogojno porazdelitev zapišemo kot

$$S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\} \sim \sum_{i=1}^{k} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i).$$

(Bolj natančen argument bralec lahko najde v [4] na strani 28.) Sedaj pa si poglejmo skupno karakteristično funkcijo slučajnega vektorja 5.3 $(S_t^{(1)}, \ldots,\ S_t^{(n)})$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_t^{(1)},\ldots,S_t^{(n)}}(u_1, \ldots,\ u_n) &= \mathbb{E}\left[\exp\left[iu_1 S_t^{(1)} + \cdots + iu_n S_t^{(n)}\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iu_1 S_t^{(1)} + \cdots + iu_n S_t^{(n)}\right] \,\middle|\, N_t = k\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[\sum_{j=1}^{n} iu_j \sum_{i=1}^{k} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)\right]\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} iu_j X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)\right]\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left[\sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{n} iu_j X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)\right]\right].
\end{aligned}$$

Opazimo, da imamo v eksponentu sestavljeno Poissonovo vsoto, za katero poznamo obliko karakteristične funkcije iz posledice 2.5. Za namene berljivosti pišimo

$$\varphi_{S_t^{(1)},\ldots,S_t^{(n)}}(u_1, \ldots,\ u_n) = e^{g(u_1,\ldots,\ u_n)},$$

kjer je

$$g(u_1,\dots,u_n)=\lambda t\Bigg(\mathbb{E}\left[\exp\left[\sum_{j=1}^{n} iu_jX_1\mathbb{1}_{A_j}(U_1,X_1)\right]\right]-1\Bigg). \tag{8}$$

Ker so množice A_j disjunktne, velja identiteta

$$\exp\left[\sum_{j=1}^{n} iu_jX_1\mathbb{1}_{A_j}(U_1,X_1)\right]-1=\sum_{j=1}^{n}\big(\exp\left[iu_jX_1-1\right]\mathbb{1}_{A_j}(U_1,X_1)\big).$$

Torej

$$\begin{aligned}
g(u_1,\dots,u_n)&=\lambda t\mathbb{E}\left[\exp\left[\sum_{j=1}^{n} iu_jX_1\mathbb{1}_{A_j}(U_1,X_1)\right]-1\right]\\
&=\lambda t\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left[iu_jX_1-1\right]\mathbb{1}_{A_j}(U_1,X_1)\right]\\
&=\lambda t\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left[iu_jX_1\mathbb{1}_{A_j}(U_1,X_1)-1\right]\right].
\end{aligned}$$

Vidimo, da je desna stran enačbe (8) ravno vsota eksponentov karakterističnih funkcij $\varphi_{S_t^{(j)}}$. Po trditvi 5.4 sledi, da so slučajne spremenljivke $S_t^{(1)},\dots,S_t^{(n)}$ neodvisne in po obliki karakteristične funckcije vidimo, da so res porazdeljene sestavljeno Poissonovo. □

Izrek o markiranju CPP ima vrsto uporabnih posledic. Direktno nam poda enostaven alternativen dokaz za neodvisnost in stacionarnost prirastkov.

Posledica 3.10. CPP *ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Naj bodo $0=t_0\le t_1<\dots<t_n=t<\infty$ poljubna realna števila. Naj bodo $A_1,\dots,\ A_n$ neodvisne podmnožice množice $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ definirane kot

$$A_1=[0,t_1]\times\mathbb{R},\quad A_j=(t_{j-1},t_j]\times\mathbb{R},\quad \text{za } j=2,\dots,n.$$

Potem so po izreku o markiranju slučajne spremenljivke $S_t^{(1)},\dots,\ S_t^{(n)}$ neodvisne in po osnovni ekvivalenci $\{i\le N_{t_j}\}\iff\{V_i\le t_j\}$ velja

$$S_t^{(j)}=\sum_{i=N_{t_{j-1}}+1}^{N_{t_j}} X_i=S_{t_j}-S_{t_{j-1}}\quad \text{za } j=1,\dots,n.$$

Ker je $U_i\sim U([0,t])$, je $\mathbb{1}(t_{j-1}<U_i\le t_j)\sim\mathbb{1}(U_i\le t_j-t_{j-1})$. Zaradi neodvisnosti U_i in X_i pa je tudi

$$\begin{aligned}
S_{t_j}-S_{t_{j-1}}=S_t^{(j)}&\sim\sum_{i=1}^{N_t}X_i\mathbb{1}_{A_j}(U_i,X_i)\\
&\sim\sum_{i=1}^{N_t}X_i\mathbb{1}(t_{j-1}<U_i\le t_j)\\
&\sim\sum_{i=1}^{N_t}X_i\mathbb{1}(U_i\le t_j-t_{j-1}).
\end{aligned}$$

Torej je $S_{t_j} - S_{t_{j-1}} \sim S_{t_j - t_{j-1}}$. $\square$

Posledica 3.11. *Če v predpostavkah izreka o markiranju* CPP *sprostimo* $t \geq 0$*, so procesi* $(S_t^{(j)})_{t\geq 0}$ *med seboj neodvisni 5.11 in imajo neodvisne prirastke.*

Dokaz. Po definiciji neodvisnosti slučajnih procesov 5.11 in definiciji neodvisnoti prirastkov 5.9 je dovolj pokazati, da so za poljuna realna števila

$$0 = t_0^{(j)} < t_1^{(j)} < \cdots < t_{m_j}^{(j)} < \infty; \quad j = 1, \ldots, n$$

vsi prirastki

$$S_{t_k^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{k-1}^{(j)}}^{(j)}; \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m_j$$

med seboj neodvisni. Velja

$$S_{t_k^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{k-1}^{(j)}}^{(j)} = \sum_{i=N_{t_{k-1}^{(j)}}+1}^{N_{t_k^{(j)}}} X_i \mathbb{1}_{A_{jk}}(V_i, X_i).$$

Iz osnovne ekvivalence $\{i \leq N_{t_j}\} \iff \{V_i \leq t_j\}$ dobimo, da je tudi

$$S_{t_k^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{k-1}^{(j)}}^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_{jk}}(V_i, X_i),$$

kjer je $t = \max\{t_{m_1}^{(1)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}\}$ in $A_{jk} = A_j \cap ((t_{k-1}^{(j)}, t_k^{(j)}] \times \mathbb{R})$. Neodvisnost prirastkov sledi iz disjunktnosti množic A_{jk} in izreka o markiranju. $\square$

Zgled 3.12. Markiranje je v praksi posebej uporabno pri analizi produktov proporcionalnega pozavarovanja, kjer si zavarovalnica in pozavarovalnica delita obveznosti in dobiček glede na velikost zahtevkov. Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP, v katerem seštevamo nenegativne slučajne spremenljivke X_i, ki predstavljajo zahtevke, ki jih zavarovalnica prejema, in $0 = d_0 < d_1 < \cdots < d_n < \infty$ pozitivna realna števila. Za fiksen $t \geq 0$ definiramo $A_1, \ldots, A_n$, ki so disjunktne podmnožice množice $[0, \infty)^2$ oblike

$$A_j = [0, t] \times [d_{j-1}, d_j), \; j = 1, \ldots, n.$$

Množice $A_1, \ldots, A_n$ predstvaljajo različne sloje zahtevkov, ki jih zavarovalnica prejema. Za vsak sloj lahko predpišemo kolikšen delež škode bo pozavarovalnica krila. Po izreku o markiranju vemo, da so slučajne spremenljivke $S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(n)}$ med seboj neodvisne in imajo sestavljeno Poissonovo porazdelitev. Tako lahko analiziramo posamezen sloj kot produkt sam zase in ustrezno določimo delež premij, ki ga pozavarovalnica dobi za kritje zahtevkov določenega sloja. Če v pogodbi ne določimo končnega časa t, nam posledica 3.11 zagotavlja, da so procesi $(S_t^{(1)})_{t\geq 0}, \ldots, (S_t^{(n)})_{t\geq 0}$ vselej medsebojno neodvisni. $\diamondsuit$

4. Cramér–Lundbergov model

Razdelek je prirejen po [3], [4], [5] in [9].

V tem razdelku obravnavamo najbolj intenzivno raziskan model v teoriji propada, običajno imenovan Cramér–Lundbergov model. V svoji najosnovnejši obliki ga je na začetku 20. stoletja izpeljal švedski aktuar Filip Lundberg, da bi ocenil ranljivost zavarovalnice za propad. Čeprav je model v svoji ideji dokaj preprost, zajema bistvo povezave ravni rezerv zavarovalnice in njene izpostavljenosti tveganju, kar je razlog, zakaj je postal temeljni merilni model v teoriji propada. V preteklem stoletju je bilo razvitih veliko tehnik za analizo Cramér–Lundbergovega modela, ki so se večinoma osredotočale na kvantifikacijo verjetnosti propada zavarovalnice. V razdelku definiramo model in izpeljemo Lundbergovo neenakost ter asimptotično obnašanje verjetnosti propada v primeru, ko zavarovalniške zahtevke modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. V zgledih pokažemo, kako do rezultatov, ki nam jih zagotavlja teorija, pridemo v praksi z Monte Carlo simulacijami procesa tveganja.

4.1. **Proces tveganja in verjetnost propada.**

Definicija 4.1. Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP, kjer so slučajne spremenljivke $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ki jih seštevamo s.g. nenegativne. *Proces tveganja* v Cramér–Lundbergovem modelu definiramo kot družino slučajnih spremenljivk

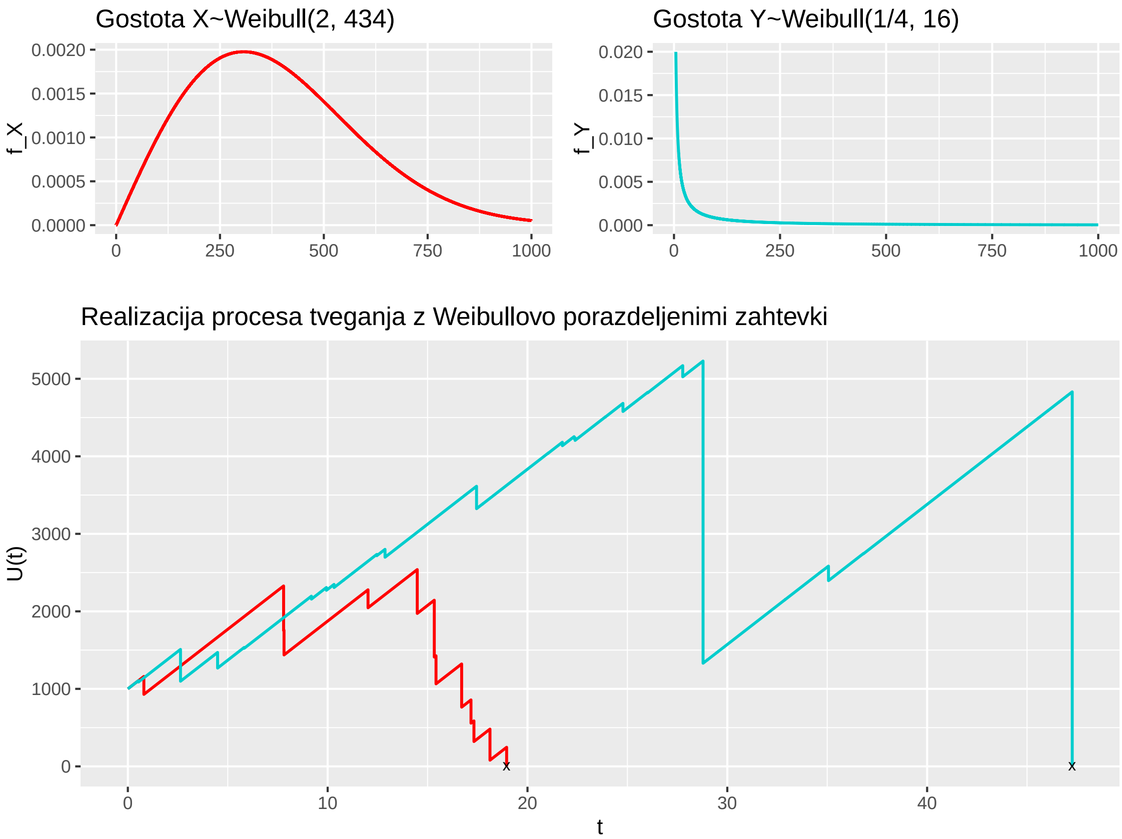
$$U_t = u + p(t) - S_t, \quad t \geq 0,$$

kjer je $u \geq 0$ začetni kapital zavarovalnice in $p(t)$ funkcija prihodkov iz premij.

Opomba 4.2. V resnici lahko veliko lastnosti procesa tveganja izpeljemo brez predpostavke, da prihodi zahtevkov v $(S_t)_{t\geq 0}$ sledijo homogenemu Poissonovemu procesu, ampak lahko privzamemo, da sledijo splošnemu prenovitvenemu procesu. Zato bomo pri dokazovanju nekaterih rezultatov medprihodne čase zahtevkov T_i obravnavali v splošnem, ne da bi predpostavili, da so eksponentno porazdeljeni.

Vrednost U_t predstavlja kapital zavarovalnice ob času $t \geq 0$. Standardno je vzeti deterministično funkcijo $p(t) = ct$, kjer je $c > 0$ stopnja prihodkov premij. Uporaba linearne funkcije za modeliranje premijskega dohodka v Cramér–Lundbergovem modelu ponuja realističen približek zato, ker zavarovalnice pogosto doživljajo stabilno povečevanje premijskega dohodka skozi čas. Poleg tega je izbira linearne funkcije preprosta, zato bomo v nadaljevanju privzeli $p(t) = ct$. Poglejmo si realizaciji procesa tveganja, ko so zahtevki X_i porazdeljeni Weibullovo 5.16 z različnimi parametri.

Zgled 4.3. Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu z začetnim kapitalom $u = 1000$ in $p(t) = 200t$ ter intenzivnostjo prihodov zahtevkov $\lambda = 1$. Naj bodo v prvem primeru (rdeča) zahtevki porazdeljeni kot $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$ in v drugem primeru (modra) kot $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$.



SLIKA 4. Realizaciji procesa tveganja

Pri obeh realizacijah vidimo, da proces tveganja v nekem trenutku pade pod 0 (tam ga tudi ustavimo). Čeprav je pričakova vrednost $\mathbb{E}[Y_i] = 384 \approx \mathbb{E}[X_i] = 217\sqrt{\pi} \approx$ 384,62 opazimo bistveno razliko med realizacijama. V rdečem primeru proces pade pod 0 po več zaporednih manjših izgubah, v modrem primeru pa po eni zelo veliki izgubi. V nadaljevanju bomo primera ločili, ampak pred tem definirajmo osnovne pojme, ki jih bomo obravnavali v razdelku.

$\diamondsuit$

Definicija 4.4. *Propad* definiramo kot dogodek, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ kadarkoli pade pod 0. To je torej dogodek

$$\{U_t < 0 \text{ za neki } t \geq 0\}.$$

Času ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\}$$

pa pravimo *čas propada*. Seveda velja enakost

$$\{U_t < 0 \text{ za neki } t \geq 0\} = \{T < \infty\}.$$

Definicija 4.5. *Verjetnost propada* definiramo kot funkcijo $\psi : (0, \infty) \to [0, 1]$ s predpisom

$$\psi(u) = \mathbb{P}_u(T < \infty); \quad u \geq 0.$$

Ker proces tveganja vedno gledamo v odvisnosti od začetnega kapitala, za fiksen $u \geq 0$ pripadajočo verjetnost označimo s $\mathbb{P}_u$.

Definicija 4.6. Po konstrukciji procesa tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ je propad mogoč le ob prihodih zahtevkov. Z V_n označimo čas, ob katerem prispe n-ti zahtevek, in definiramo *ogrodje procesa tveganja* kot $(U_{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Trditev 4.7. *Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu in $(U_{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$ njegovo ogrodje ter $T_n := V_n - V_{n-1}$ medprihodni čas n-tega zahtevka ($V_0 = T_0 = 0$). Potem velja*

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ kumulativna izguba po n zahtevkih in $Y_i = X_i - cT_i$ izguba i-tega prihoda.

Dokaz. S pomočjo ogrodja procesa tveganja lahko dogodek propada zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\{U_t < 0 \text{ za neki } t \geq 0\} &= \left\{\inf_{t\geq 0} U_t < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} U_{V_n} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{u + p(V_n) - S_{V_n}\} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ u + \underbrace{cV_n - \sum_{i=1}^{n} X_i}_{-Z_n} \Big\} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{-Z_n\} < -u\right\} \\
&= \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right\},
\end{aligned}$$

kar nam da želeno enakost. □

Tako verjetnost propada prevedemo na prehodno verjetnost diskretnega slučajnega sprehoda $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cilj obravnavanja verjetnosti propada v Cramér–Lundbergovem modelu je, da se izognemo propadu oziroma da je verjetnost, da kumulativna izguba $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ preseže u, tako majhna, da lahko v praksi dogodek propada izključimo.

Trditev 4.8. *Naj bo $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk, definirano kot $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke Y_i z $\mathbb{E}[Y_i] < \infty$. Če velja $\mathbb{E}[Y_i] \geq 0$, za vsak $u \geq 0$ velja*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

Dokaz. Zaporedje slučajnih spremenljivk $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zadošča predpostavkam krepkega zakona velikih števil 5.20. Velja

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mathbb{E}[Y_n].$$

Torej bo Z_n v primeru, ko je $\mathbb{E}[Y_n] > 0$, skoraj gotovo asimptotično linearno naraščal proti ∞ kot $n\mathbb{E}[Y_n]$, zato bo veljalo celo

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \infty\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1,$$

za poljuben $u \geq 0$. Dokaz za primer, ko je $\mathbb{E}[Y_n] = 0$, pa je precej bolj tehničen in ne preveč informativen, zato ga bomo izpustili. Izkaže se, da vedno obstajata neki podzaporedji $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, za kateri gre $Z_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{s.g.} \infty$ in $Z_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{s.g.} -\infty$. Dokaz lahko bralec najde v [6] v poglavju 4. $\square$

Opomba 4.9. Iz trditve 4.8 (ob predpostavkah $\mathbb{E}[X_i] < \infty$ in $\mathbb{E}[T_i] < \infty$) sledi, da moramo premijo (in s tem c) izbrati tako, da bo $\mathbb{E}[Y_i] < 0$, saj bo tako $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} -\infty$ in je to edini primer, ko lahko upamo, da verjetnost propada ne bo enaka 1.

Definicija 4.10. Pravimo, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ v Cramér–Lundbergovem modelu zadošča *pogoju neto zaslužka* (ang. *net profit condition*), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]}, \quad \text{oziroma} \quad c = (1+\rho)\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} \quad \text{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljevanju imenovali NPC.

Zahteva NPC za analizo poslovanja zavarovalnice je dokaj intuitivna, saj pove, da mora biti v nekem časovnem intervalu pričakovani dohodek iz premij večji od pričakovanega izplačila zahtevkov.

4.2. **Verjetnost preživetja kot integralska enačba.** Od sedaj naprej predpostavimo, da je $(S_t)_{t\geq 0}$ v procesu tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ sestavljeni Poissonov proces. V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo asimptotično vedenje $\psi(u)$, ko gre $u \to \infty$. Verjetnost propada zelo redko lahko eksplicitno izračunamo, ampak veliko lahko povemo o redu konvergence s tem, da jo izrazimo kot integralsko enačbo[2].

Definicija 4.11. Za lepšo notacijo v nadaljevanju definiramo funkcijo *verjetnosti preživetja* kot $\theta : (0,\infty) \to [0,1]$ s predpisom

$$\theta(u) = \mathbb{P}_u(T = \infty) = 1 - \psi(u); \quad u \geq 0.$$

Lema 4.12. *(Integralska enačba za verjetnost preživetja) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC, ter naj velja $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ in, da imajo slučajne spremenljivke $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gostoto. Potem θ zadošca naslednji enakosti*

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1+\rho)} \int_{(0,u]} \theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x), \tag{9}$$

kjer je $\overline{F}_{X_1}$ porazdelitev integriranega repa 5.28 slučajne spremenljivke X_1.

Dokaz. Po trditvi 4.7 velja

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

[2] V delu se držimo konvencije, da Riemannov integral funkcije f označimo kot $\int_a^b f(x)dx$. Lebesgueov integral po Lebesgue-Stieltjesovi meri, porojeni s porazdelitveno funkcijo F, pa $\int_{(a,b]} f(x)dF(x)$.

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ in $Y_i = X_i - cT_i$. Torej je

$$\begin{aligned}
\theta(u) &= \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \le u\right) \\
&= \mathbb{P}\Big(\big\{Z_n \le u \text{ za } \forall n \in \mathbb{N}\big\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\big\{Y_1 \le u\big\} \cap \big\{Z_n - Y_1 \le u - Y_1 \text{ za } \forall n \ge 2\big\}\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{Y_1 \le u\}}\mathbb{P}\Big(\big\{Z_n - Y_1 \le u - Y_1 \text{ za } \forall n \ge 2\big\} \;\Big|\; Y_1\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je $Y_1 = X_1 - cT_1$ in je torej dogodek $\{Y_1 \le u\}$ enak dogodku $\{X_1 \le u + cT_1\}$. Poleg tega velja, da je $(Z_n - Y_1 \mid Y_1)_{n\ge 2} \sim (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, saj so Y_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Upoštevamo še, da je T_1 medprihodni čas v HPP(λ) in dobimo

$$\begin{aligned}
\theta(u) &= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,u+ct]} \mathbb{P}\Big(\big\{Z_n \le u - (x - ct) \mid n \in \mathbb{N}\big\}\Big) dF_{X_1}(x) dF_{T_1}(t) \\
&= \int_0^\infty \int_{(0,u+ct]} \theta(u - x + ct) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda t} dt.
\end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko $z = u + ct$ $\big($torej $t = \frac{z-u}{c}$ in $dt = \frac{dz}{c}\big)$ in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda z}{c}} \underbrace{\int_{(0,z]} \theta(z - x) dF_{X_1}(x)}_{g(z)} dz.$$

Ker ima porazdelitev F_{X_1} gostoto in je θ zvezna omejena funkcija, sledi, da je funkcija g zvezna in jo lahko (po osnovnem izreku analize) odvajamo. Tako dobimo

$$\theta'(u) = \frac{\lambda}{c}\theta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,u]} \theta(u - x) dF_{X_1}(x).$$

Če sedaj obe strani integriramo po u, dobimo

$$\int_0^t \theta'(u) du = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \theta(u) du - \overbrace{\frac{\lambda}{c}\int_0^t \underbrace{\int_{(0,u]} \theta(u - x) dF_{X_1}(x)}_{(i)} du}^{(ii)}. \tag{10}$$

Na integralu (i) uporabimo per partes $\big(\alpha = \theta(u - x)$ in $d\beta = dF_{X_1}(x)\big)$ ter upoštevamo, da ima F_{X_1} gostoto.

$$\begin{aligned}
(i) &= \big(\theta(u - x) F_{X_1}(x)\big)\Big|_0^u + \int_0^u \theta'(u - x) F_{X_1}(x) dx \\
&= \theta(0) F_{X_1}(u) - \int_0^u \theta'(u - x) F_{X_1}(x) dx.
\end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $F_{X_1}(0) = 0$, saj je $X_1 > 0$ skoraj gotovo. Vstavimo (i) v (ii) in dobimo

$$(ii) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^t \theta(0)F_{X_1}(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \theta'(u-x)F_{X_1}(x)dxdu.$$

Po Tonellijevem izreku 5.25 lahko zamenjamo vrstni red integracije.

$$\begin{aligned}
(ii) &= -\frac{\lambda}{c}\int_0^t \theta(0)F_{X_1}(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\int_x^t \theta'(u-x)dudx \\
&= -\frac{\lambda}{c}\int_0^t \theta(0)F_{X_1}(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\big(\theta(t-x)-\theta(0)\big)dx. \\
&= -\frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\theta(t-x)dx.
\end{aligned}$$

Vstavimo (ii) v enačbo (10) in dobimo

$$\begin{aligned}
\theta(t)-\theta(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \theta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\theta(t-x)dx, \\
\theta(t) &= \theta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \big(1-F_{X_1}(x)\big)\theta(t-x)dx \\
&= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}\int_{(0,u]} \theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x).
\end{aligned}$$

Pri enakosti v zadnji vrstici smo upoštevali

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}$$

in zamenjali oznako spremenljivke $t \mapsto u$. S tem je lema dokazana.

□

Opomba 4.13. Konstanto $\theta(0)$, ki se pojavi v (9), lahko izračunamo. Ker c zadošča NPC, po argumentu v dokazu trditve 4.8 velja

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} -\infty.$$

Po zveznosti $\mathbb{P}$ od spodaj sledi

$$\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \leq u\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \leq \infty\right) = 1.$$

Če torej v enačbi (9) pošljemo $u \to \infty$, dobimo

$$\lim_{u\to\infty}\theta(u) = 1 = \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}\lim_{u\to\infty}\int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{(0,u]}(x)\theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x).$$

Po izreku o monotoni konvergenci 5.23 sledi

$$\begin{aligned}
1 &= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}\int_{(0,\infty)} 1 d\overline{F}_{X_1}(x) \\
&= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}.
\end{aligned}$$

Torej je $\theta(0) = \frac{\rho}{1+\rho}$. Enakost upoštevamo v enačbi (9) in uvedemo oznako $\frac{1}{1+\rho} = q$, da dobimo

$$\theta(u) = (1-q) + q\int_{(0,u]} \theta(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x). \tag{11}$$

Opomba 4.14. Integralska enačba (11) skoraj ustreza definiciji prenovitvene enačbe 5.30, s to bistveno razliko, da $q\overline{F}_{X_1}$ ni verjetnostna mera, saj velja $\lim_{x\to\infty} q\overline{F}_{X_1}(x) = q < 1$. Taki enačbi pravimo defektna prenovitvena enačba. V splošnem defektne prenovitvene enačbe lahko rešujemo s pomočjo Banachovega izreka o negibni točki 5.35. Da funkcija θ reši enačbo (11), lahko povemo tako, da je negibna točka operatorja

$$Ag(u) = (1-q) + q\int_{(0,u]} g(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x), \tag{12}$$

saj je ta skrčitev na prostoru omejenih funkcij $B([0,\infty))$, opremljene s supremum metriko

$$d_\infty(f,g) = \sup_{u\in[0,\infty)} \left|f(u)-g(u)\right|, \quad f,g\in B([0,\infty)).$$

To enostavno pokažemo z oceno

$$\begin{aligned}
\sup_{u\in[0,\infty)} \left|Af(u)-Ag(v)\right| &= \sup_{u\in[0,\infty)} \left|q\int_{(0,u]} f(u-x)-g(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x)\right| \\
&\leq \sup_{u\in[0,\infty)} q\int_{(0,u]} \left|f(u-x)-g(u-x)\right|d\overline{F}_{X_1}(x) \\
&\leq \sup_{u\in[0,\infty)} q\int_{(0,u]} d_\infty(f,g)d\overline{F}_{X_1}(x) \\
&\leq q\int_{(0,\infty)} d_\infty(f,g)d\overline{F}_{X_1}(x) \\
&= qd_\infty(f,g).
\end{aligned}$$

Rešitev $\theta = A\theta$ se tako izraža kot limita $\theta = \lim_{n\to\infty} A^n g_0$ za poljubno funkcijo $g_0 \in B([0,\infty))$. Naj bodo $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke s porazdelitveno funkcijo $\overline{F}_{X_1}$, ki jo razširimo na celo realno os, tako da velja $\overline{F}_{X_1}(x) = 0$ za $x < 0$. Potem A izrazimo kot

$$Ag(u) = (1-q)\mathbb{1}(u\geq 0) + q\mathbb{E}\left[g(u-\overline{X}_1)\right]$$

in z indukcijo pokažemo, da za $g_0 = (1-q)\mathbb{1}(u\geq 0)$ za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja

$$A^n g_0(u) = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k \mathbb{P}\left(\overline{W}_k \leq u\right),$$

pri čemer je $\overline{W}_k = \overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_k$ in $\overline{W}_0 = 0$. Enakost očitno velja za $n = 1$. Preostane še indukcijski korak $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
A^{n+1}g_0(u) &= 1-q+q\int_{[0,u]} A^n g_0(u-x)d\overline{F}_{X_1}(x) \\
&\overset{\text{I.P.}}{=} 1-q+q(1-q)\int_{[0,u]}\sum_{k=0}^{n} q^k \int_{[0,u-x]} dF_{\overline{W}_k}(y)d\overline{F}_{X_1}(x) \\
&= (1-q)\left[1+\sum_{k=0}^{n} q^{k+1}\int_{[0,u]}\int_{[0,u-x]} dF_{\overline{W}_k}(y)d\overline{F}_{X_1}(x)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-q)\left[1+\sum_{k=0}^{n} q^{k+1}\mathbb{P}\left(\overline{W}_k \le u - X_{k+1}, X_{k+1}\le u\right)\right]\\
&= (1-q)\left[1+\sum_{k=0}^{n} q^{k+1}\mathbb{P}\left(\overline{W}_{k+1} \le u\right)\right]\\
&= (1-q)\left[1+\sum_{k=1}^{n} q^{k}\mathbb{P}\left(\overline{W}_{k} \le u\right)\right]\\
&= (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^{k}\mathbb{P}\left(\overline{W}_{k} \le u\right).
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
\theta(u) = \lim_{n\to\infty} A^n g_0 = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}\left(\overline{W}_k \le u\right). \tag{13}
$$

4.3. **Lahkorepe porazdelitve.** Pri analizi asimptotike verjetnosti propada se bomo najprej omejili na primer, ko ima porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i, ki jih seštevamo v CPP lahek rep, saj je bila osnovna teorija, ki sta jo razvila H. Cramér in F. Lundberg, izpeljana pod to predpostavko.

Definicija 4.15. Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *lahkorepo porazdelitev*, če za nek $\varepsilon > 0$ velja

$$
\mathbb{E}\left[e^{uX}\right] = M_X(u) < \infty \quad \text{za } u \in (-\varepsilon, \varepsilon).
$$

Sicer pravimo, da ima X *težkorepo porazdelitev.*

Opomba 4.16. V razdelku večinoma delamo z nenegativnimi slučajnimi spremenljivkami. Za te momentno-rodovna funckija vedno obstaja vsaj na intervalu $(-\infty, 0]$.

Zgled 4.17. (Nadaljevanje zgleda 4.3) V zgledu smo obravnavali proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, kjer so zahtevki (rdeča) $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$ in (modra) $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$. Opazili smo, da je v prvem primeru propad posledica več manjših izgub, v drugem pa ene velike izgube. To je značilnost težkorepih porazdelitev. Za Weibullovo porazdelitev velja, da ima za parameter $a \ge 1$ lahek, za $a < 1$ pa težak rep.

Dokaz. Momentno-rodovna funkcija $X \sim \text{Weibull}(a, b)$ je enaka

$$
\begin{aligned}
M_X(u) &= \int_0^\infty e^{ux}\frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} dx \qquad \left(y = \tfrac{x}{b},\ dy = \tfrac{dx}{b}\right)\\
&= a\int_0^\infty e^{uby} y^{a-1} e^{-y^a} dy.
\end{aligned}
$$

Vidimo, da na spodnji meji 0 ni težav za noben $a > 0$, medtem ko v neskončnosti za $a \in (0,1)$ integral divergira, saj se eksponent poenostavi v $y^a(uby^{1-a} - 1) \xrightarrow{y\to\infty} \infty$. Če v nadaljevanju predpostavimo $a \ge 1$ in uvedemo $z = y^a$ $\left(dz = ay^{a-1}dy\right)$ pa lahko pridemo do naslednje oblike za momentno rodovno funkcijo X.

$$
M_X(u) = \int_0^\infty e^{ubz^{\frac{1}{a}}} e^{-z} dz
$$

$$= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(ubz^{\frac{1}{a}})^k}{k!} e^{-z} dz \qquad \text{Tonelli } 5.25$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \int_0^\infty z^{\frac{k}{a}} e^{-z} dz$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right).$$

$\diamondsuit$

Opomba 4.18. V praksi z lahkorepnimi porazdelitvami modeliramo zahtevke, kjer verjetnost ekstremnih dogodkov (torej zelo velikih zahtevkov) eksponentno pada proti 0. To neposredno sledi iz definicije 4.15 in neenakosti Markova 5.19, saj za vsak $x > 0$ in $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ velja

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}\left(e^{uX} > e^{ux}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{uX}\right]}{e^{ux}}.$$

Definicija 4.19. Naj velja, da ima slučajna spremenljivka $Y_1 = X_1 - cT_1$ iz trditve 4.7 lahek rep. Če obstaja enoličen $\ell > 0$, za katerega velja

$$M_{Y_1}(\ell) = 1,$$

temu številu pravimo *Lundbergov koeficient.*

Trditev 4.20. *Brž ko Lundbergov koeficient ℓ (pod predpostavkami definicije 4.19 in pogoja NPC) obstaja, je enolično določen.*

Dokaz. Zaradi konveksnosti eksponentne funkcije je množica $I = \{u \in \mathbb{R} \mid M_{Y_1}(u) < \infty\}$ konveksna, torej je I interval, poltrak ali kar cela realna os. Po predpostavki obstaja pozitiven $\ell \in I$ za katerega vejla $M_{Y_1}(\ell) = 1$. Ker ima Y_1 lahek rep, obstaja $\varepsilon > 0$, da je $M_{Y_1}(u) < \infty$ za $u \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I$. Ker velja $M_{Y_1}(0) = 1$ in $M'_{Y_1}(0) = \mathbb{E}[Y_1] < 0$ (zaradi pogoja NPC) ter $M''_{Y_1}(u) = \mathbb{E}\left[Y_1^2 e^{Y_1 u}\right] > 0$ ($Y_1 \neq 0$ skoraj gotovo) za $u > 0$, je M_{Y_1} zvezna konveksna funkcija na I, kjer v okolici ničle pada. Tako je ℓ zaradi konveksnosti M_{Y_1} enolično določen. $\square$

Izrek 4.21. *(Lundbergova neenakost) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča pogoju NPC in zanj obstaja Lundbergov koeficient ℓ. Potem za vsak $u > 0$ velja*

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u}.$$

Dokaz. Neenakost bomo dokazali z indukcijo. Za $u > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\psi_n(u) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Z_k > u\right),$$

kjer je $Z_k = \sum_{i=1}^k Y_i$ kumulativna izguba po k zahtevkih enako definirana kot v trditvi 4.7. Vidimo, da je (po zveznosti $\mathbb{P}$ od spodaj) $\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u)$, torej moramo pokazati, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\psi_n(u) \leq e^{-\ell u}$.
$(n = 1)$: Uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$\psi_1(u) = \mathbb{P}\left(e^{\ell Z_1} > e^{\ell u}\right) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = e^{-\ell u}.$$

$(n \to n+1)$: S F_{Y_1} označimo porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke Y_1. Potem velja

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n+1} Z_k > u\right)\\ &= \underbrace{\mathbb{P}\left(Y_1 > u\right)}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{P}\left(\max_{2\leq k\leq n+1}\{Y_1 + (Z_k - Y_1)\} > u, Y_1 \leq u\right)}_{(ii)}\end{aligned}$$

Najprej se posvetimo (ii). Po indukcijski predpostavki velja

$$\begin{aligned}(ii) &= \int_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n}\{x + Z_k\} > u\right) dF_{Y_1}(x)\\ &= \int_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Z_k > u - x\right) dF_{Y_1}(x)\\ &= \int_{(-\infty,u]} \psi_n(u-x) dF_{Y_1}(x)\\ &\overset{\text{I.P.}}{\leq} \int_{(-\infty,u]} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).\end{aligned}$$

Za oceno (i) kot v primeru $n = 1$ uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$(i) = \psi_1(u) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = \int_{(u,\infty)} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).$$

Če torej seštejemo (i) in (ii) dobimo želeno oceno

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x)\\ &= e^{-\ell u} M_{Y_1}(\ell)\\ &= e^{-\ell u}.\end{aligned}$$

□

Opomba 4.22. Iz izreka 4.21 je razvidno, da lahko v praksi z dovolj visokim začetnim kapitalom u verjetnost propada zadovoljivo omejimo blizu 0. Seveda je meja odvisna tudi od Lundbergovega koeficienta ℓ.

Zgled 4.23. Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja, da so zahtevki neodvisno eksponentno porazdeljeni s parametrom $\mu > 0$. Vemo, da ima momentno rodovna funkcija X_1 obliko

$$M_{X_1}(u) = \frac{\mu}{\mu - u} \quad \text{za } u < \mu.$$

Tako dobimo, da ima momentno rodovna funkcija $Y_1 = X_1 - cT_1$ obliko

$$M_{Y_1}(u) = M_{X_1}(u) M_{T_1}(-cu) = \frac{\mu}{\mu - u}\frac{\lambda}{\lambda + cu} \quad \text{za } u \in (-\tfrac{\lambda}{c}, \mu).$$

Sedaj lahko izračunamo Lundbergov koeficient ℓ

$$
\begin{aligned}
M_{Y_1}(\ell) &= 1,\\
\frac{\mu}{\mu-\ell}\frac{\lambda}{\lambda+c\ell} &= 1,\\
\mu\lambda &= (\mu-\ell)(\lambda+c\ell),\\
\mu\lambda &= \mu\lambda-\ell\lambda+\mu c-c\ell^2,\\
0 &= \mu c-c\ell-\lambda.
\end{aligned}
$$

Dobimo

$$\ell=\mu-\frac{\lambda}{c}. \tag{14}$$

Velja $\ell\in(0,\mu)$, saj v našem modelu velja pogoj NPC,

$$\frac{\mathbb{E}\left[X_1\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}=\frac{\lambda}{\mu}<c \iff \mu>\frac{\lambda}{c}.$$

Če uporabimo alternativno formulacijo pogoja NPC, dobimo

$$c=(1+\rho)\frac{\lambda}{\mu} \quad\Rightarrow\quad \ell=\mu-\frac{\lambda}{(1+\rho)\frac{\lambda}{\mu}}=\mu\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right). \tag{15}$$

Tako dobimo zgornjo mejo za verjetnost propada

$$\psi(u)\le e^{-\ell u}=e^{-\mu u\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)}$$

in vidimo, da povečanje stopnje prihodkov premij čez neko mejo ne bistveno vpliva na oceno, saj je

$$\lim_{\rho\to\infty} e^{-\mu u\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)}=e^{-\mu u}.$$

V nadaljevanju bomo videli, da je Lundbergova neenakost v primeru eksponentno porazdeljenih zahtevkov skoraj točna vrednost verjetnosti propada, zgrešena le za konstanto. V splošnem pa je zelo težko določiti Lundbergov koeficient kot funkcijo parametrov porazdelitev X_1 in T_1 in zato uporabljamo numerične metode za njegovo aproksimacijo kot na primer Monte Carlo simulacije. $\diamondsuit$

Sedaj izpeljemo enega temeljnih rezultatov v teoriji tveganja, ki ga je leta 1930 dokazal Harald Cramér. Za lahkorepe porazdleitve bomo določili točen red konvergence verjetnosti propada.

Izrek 4.24. *(Asimptotika verjetnosti propada, lahkorepe porazdelitve) Naj bo $(U_t)_{t\ge0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient ℓ. Naj imajo slučajne spremenljivke $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gostoto. Potem obstaja konstanta $C>0$, za katero velja*

$$\lim_{u\to\infty} e^{\ell u}\psi(u)=C.$$

Dokaz. Najprej preoblikujemo enačbo (11), tako da upoštevamo $\theta=1-\psi$

$$
\begin{aligned}
1-\psi(u) &= (1-q)+q\int_{(0,u]}\big(1-\psi(u-x)\big)d\overline{F}_{X_1}(x),\\
\psi(u) &= q\big(1-\overline{F}_{X_1}(u)\big)+\int_{(0,u]}\psi(u-x)d\left(q\overline{F}_{X_1}(x)\right).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Vidimo, da je enačba (16) še vedno defektna prenovitvena enačba. Lahko bi jo analizriali kot v opombi 4.14, ampak izražava rešitve, ki jo dobimo iz Banachovega izreka o negibni točki, za študij asimptotike ni najboljša, čeprav je dokaj eksplicitna. V primeru lahkorepih porazdelitev se izkaže, da s trikom lahko enačbo (16) prevedemo na pravo prenovitveno enačbo. Za $x > 0$ definiramo funkcijo F_ℓ kot Esscherjevo transformacijo funkcije $q\overline{F}_{X_1}$.

$$F_\ell(x) = \int_{(0,x]} e^{\ell y} d\big(q\overline{F}_{X_1}(y)\big) = \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} \int_0^x e^{\ell y}\big(1 - F_{X_1}(y)\big)dy, \tag{17}$$

Pokažimo, da je F_ℓ porazdelitvena funkcija. Očitno je naraščajoča in velja

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F_\ell(x) &= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} \int_0^\infty e^{\ell y}\big(1 - F_{X_1}(y)\big)dy \qquad \big(\alpha = 1 - F_{X_1}(y),\ d\beta = e^{\ell y}dy\big) \\
&= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\left(\left(\frac{\big(1 - F_{X_1}(y)\big)e^{\ell y}}{\ell}\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{\ell}\int_0^\infty e^{\ell y} f_{X_1}(y)dy\right) \\
&= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\frac{1}{\ell}\Big(\mathbb{E}\left[e^{\ell X_1}\right] - 1\Big).
\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je $q = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{c\mathbb{E}[T_1]}$, definicijo Lundbergovega koeficienta ter dejstvo, da je $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ medprihodni čas v $\mathrm{HPP}(\lambda)$, da dobimo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F_\ell(x) &= \frac{\mathbb{E}\left[e^{\ell X_1}\right] - 1}{c\,\ell\ \mathbb{E}\left[T_1\right]} \\
&= \frac{\frac{\lambda + c\,\ell}{\lambda} - 1}{c\,\ell\frac{1}{\lambda}} = 1.
\end{aligned}$$

Če torej enačbo (16) pomnožimo z $e^{\ell u}$, dobimo

$$\begin{aligned}
e^{\ell u}\psi(u) &= qe^{\ell u}\big(1 - \overline{F}_{X_1}(u)\big) + \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}\psi(u-x)e^{\ell x} d\big(q\overline{F}_{X_1}(x)\big) \\
&= qe^{\ell u}\big(1 - \overline{F}_{X_1}(u)\big) + \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}\psi(u-x)dF_\ell(x).
\end{aligned} \tag{18}$$

Vidimo, da sedaj enačba (18) ustreza obliki prenovitvene enačbe za par $\big(qe^{\ell u}\big(1 - \overline{F}_{X_1}(u)\big), F_\ell\big)$ in ker je funkcija $u \mapsto qe^{\ell u}\big(1 - \overline{F}_{X_1}(u)\big)$ omejena na končnih intervalih in F_ℓ nearitmetična, lahko uporabimo Smithov ključni prenovitveni izrek 5.34, da dobimo rešitev

$$e^{\ell u}\psi(u) = qe^{\ell u}\big(1 - \overline{F}_{X_1}(u)\big) + q\int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}\big(1 - \overline{F}_{X_1}(u-x)\big)dM^\ell(x), \tag{19}$$

kjer je M^ℓ prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodnimi časi, ki imajo porazdelitveno funkcijo F_ℓ. V splošnem M^ℓ težko določimo. Če pa je funkcija $u \mapsto qe^{\ell u}(1 - \overline{F}_{X_1}(u))$ direktno Riemannovo integrabilna 5.31, nam Smithov izrek da asimptotično vedenje rešitve (19), ko gre $u \to \infty$.

Označimo

$$f(u) := qe^{\ell u}(1 - \overline{F}_{X_1}(u)).$$

Direktno Riemannovo integrabilnost f bomo pokazali z uporabo trditve 5.33. Pokazati moramo, da je f posplošeno Riemannovo integrabilna in da ima omejeno totalno variacijo 5.32. Da obstaja posplošeni Riemannov integral $\int_0^\infty f(u)du$, pokažemo preko Lebesgueovega integrala. Po Tonellijevem izreku 5.25 velja

$$\begin{aligned}
\int_{(0,\infty)} f(x)dx &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} \int_{(0,\infty)} e^{\ell u} \int_{(u,\infty)} dF_{X_1}(x)\, du \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} \int_{(0,\infty)} \int_0^x e^{\ell u} du\, dF_{X_1}(x) \\
&= \frac{1}{\ell\, \mathbb{E}\left[X_1\right]} \int_{(0,\infty)} \left(e^{\ell x} - 1\right) dF_{X_1}(x) \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[e^{\ell X_1} - 1\right]}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} < \infty.
\end{aligned}$$

Ker je f zvezna ($\overline{F}_{X_1}$ je zvezna) mora obstajati tudi posplošeni Riemannov integral $\int_0^\infty f(u)du$. Da pokažemo, da ima f omejeno totalno variacijo, jo izrazimo kot razliko dveh nenaraščajočih funkcij. Ponovno uporabimo Tonellijev izrek, da pokažemo naslednjo enakost

$$\begin{aligned}
\int_u^\infty f(x)dx &= \int_{[u,\infty)} e^{\ell x} \int_{(x,\infty)} d\overline{F}_{X_1}(y)\, dx \\
&= \int_{[u,\infty)} \int_{(u,y)} e^{\ell x} dx\, d\overline{F}_{X_1}(y) \\
&= \frac{1}{\ell} \int_{[u,\infty)} \left(e^{\ell y} - e^{\ell u}\right) d\overline{F}_{X_1}(y) \\
&= \frac{1}{\ell}\left[\frac{1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} \int_u^\infty e^{\ell y}\left(1 - F_{X_1}(y)\right) dy - f(u)\right].
\end{aligned}$$

Enakost velja, ker obstaja $\int_0^\infty f(x)dx$. Z malo preurejanja dobimo

$$f(u) = \underbrace{\frac{1}{\ell\, \mathbb{E}\left[X_1\right]} \int_u^\infty e^{\ell y}\left(1 - F_{X_1}(y)\right) dy}_{g(u)} - \underbrace{\ell \int_u^\infty f(x)dx}_{h(u)}.$$

Tako izrazimo f kot razliko funkcij g in h, ki sta očitno nenaraščajoči in ker velja $\lim_{u\to\infty} g(u) = \lim_{u\to\infty} h(u) = 0$, imata omejeno totalno variacijo. Funkcija f torej zadošča predpostavkam trditve 5.33 in je direktno Riemannovo integrabilna. Tako po Smithovem ključnem prenovitvenem izreku velja

$$C = \lim_{u\to\infty} e^{\ell u}\psi(u) = \frac{q}{\alpha} \int_0^\infty e^{\ell x}(1 - \overline{F}_{X_1}(x))dx, \tag{20}$$

kjer je $\alpha = \int_{(0,\infty)} x dF_\ell(x)$. S tem je izrek dokazan. □

Zgled 4.25. (Nadaljevanje zgleda 4.23) Vemo, da rešitve prenovitvene enačbe (19) iz izreka 4.24 v splošnem ne moremo eksplicitno izračunati. V zgledu 4.23 pa smo privzeli, da zahtevke modeliramo z eksponentno porazdelitvijo, torej $X_i \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. V tem primeru se izkaže, da lahko eksplicitno izračunamo verjetnost propada. Če si pogledamo enačbo (19), vidimo, da moramo izračunati le porazdelitev integriranega repa $\overline{F}_{X_1}(u)$ in prenovitveno mero Esscherjeve transformacije F_ℓ. Za eksponentno porazdelitev velja

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1}(u) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\int_0^u \big(1-F_{X_1}(t)\big)dt\\ &= \mu\int_0^u e^{-\mu t}dt\\ &= F_{X_1}(u),\end{aligned}$$

saj je pozabljiva. Prenovitveno mero Esscherjeve transformacije pa dobimo tako, da najprej izračunamo porazdelitveno funkcijo F_ℓ podano v enačbi (17).

$$\begin{aligned}F_\ell(u) &= \frac{q}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\int_0^u e^{\ell x}\big(1-F_{X_1}(x)\big)dx\\ &= \frac{\mu}{1+\rho}\int_0^u e^{-x(\mu-\ell)}dx.\end{aligned}$$

Upoštevamo rezultat (15), torej $\ell = \mu\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)$ in vidimo, da je F_ℓ porazdelitvena funkcija eksponentne slučajne spremenljivke s parametrom $\frac{\mu}{1+\rho}$ oziroma μq. Torej je prenovitvena mera $M^\ell(t)$ preprosto pričakovano število prihodov do časa t v $\mathrm{HPP}(\mu q)$, torej $M^\ell(t) = \mu q t$. Če vstavimo rezultata v enačbo (19), dobimo

$$\begin{aligned}e^{\ell u}\psi(u) &= qe^{\ell u}e^{-\mu u} + q\int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)}e^{-\mu(u-x)}dM^\ell(x)\\ &= qe^{-u(\mu-\ell)} + \mu q^2\int_0^u e^{-(\mu-\ell)(u-x)}dx\\ &= qe^{-u(\mu-\ell)} + \mu q^2\frac{1}{\mu-\ell}\left(1-e^{-u(\mu-\ell)}\right)\\ &= qe^{-u(\mu-\ell)} + \frac{\mu}{(1+\rho)^2}\frac{1+\rho}{\mu}\left(1-e^{-u(\mu-\ell)}\right)\\ &= qe^{-u(\mu-\ell)} + q\left(1-e^{-u(\mu-\ell)}\right)\\ &= q = \frac{1}{1+\rho}.\end{aligned}$$

Končno dobimo, da je verjetnost propada enaka

$$\psi(u) = \tfrac{1}{1+\rho}e^{-\ell u}. \tag{21}$$

$\diamondsuit$

Vidimo, da se $\psi(u)$ z oceno, ki jo dobimo z Lundbergovo neenakostjo v zgledu 4.23, res razlikuje le za konstanto $\frac{1}{1+\rho}$. To je seveda zelo poseben primer, ko lahko vse količine izračunamo eksplicitno. Pokažimo, kako bi do približkov funkcije $\psi(u)$ v praksi lahko prišli z Monte Carlo simulacijami.

Zgled 4.26. Kot v zgledu 4.23 predpostavimo, da so zahtevki porazdeljeni eksponentno, torej $X_i \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov $\lambda = 1$, stopnja prihodkov premij $c = 1500$ in pričakovana vrednost zahtevkov 1000 €, torej

$\mu = \frac{1}{1000}$. Potem lahko verjetnost propada eksplicitno izračunamo po formuli (21). Prvo izračuamo ρ po formuli (15), in ℓ po (14), torej

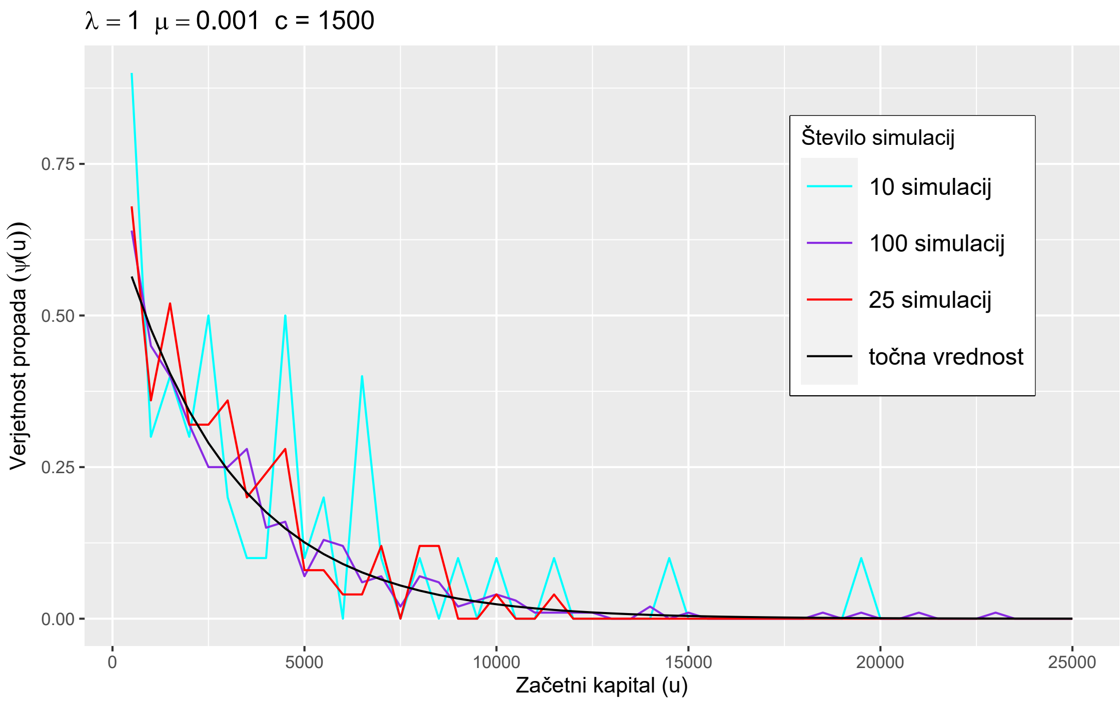
$$\begin{aligned}\rho &= \frac{c\mu}{\lambda} - 1 \\ &= \frac{1500 \cdot \frac{1}{1000}}{1} - 1 = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ell &= \mu - \frac{\lambda}{c} \\ &= \frac{1}{1000} - \frac{1}{1500} = \frac{1}{3000}.\end{aligned}$$

Vsatvimo vrednosti v (21) in dobimo

$$\psi(u) = \tfrac{2}{3}e^{-\frac{u}{3000}}.$$

Sedaj definiramo zaporedje $(u_n)_{n=1}^{50}$ s predpisom $u_n = 500n$ in za vsak n simuliramo $10, 50$ in 100 realizacij procesa tveganja, bodisi do časa $T = 1000$ bodisi dokler ne propade in za vsak n izračunamo približek za verjetnost propada kot delež propadlih realizacij z vsemi. Aproksimacijo $\psi(u)$ prikažemo na sliki 5.



SLIKA 5. Aproksimacija verjetnosti propada $\psi(u)$ z Monte Carlo simulacijami.

Kot vidimo, se približki z naraščajocim številom simulacij približujejo funkciji $\psi(u)$, ampak, za res dobro aproksimacijo, bi morali to število krepko povečati, saj na primer za vrednost $u = 16000$ pride $\psi(16000) \approx 0{,}0032186334$, kar je približno 0.3% in v praksi ni zanemarljivo, ampak v naši simulaciji nobena realizacija procesa tveganja ni padla pod 0.

$\diamondsuit$

4.4. **Težkorepe porazdelitve.** Rezultati, ki smo jih izpeljali v prejšnjem razdelku, temeljijo na predpostavki zahtevkov z lahkorepimi porazdelitvami, kar interpretiramo, kot da je verjetnost zahtevkov, ki zelo odstopajo od povprečja, zelo majhna. V praksi pa se pogosto zgodi, da ta predpostavka ni izpolnjena in pojavi se vprašanje, ali lahko še vedno kaj povemo o asimptotiki verjetnosti propada. Izkaže se, da v primeru, ko je porazdelitev integriranega repa zahtevkov subeksponentna, ta točno določa asimptotično vedenje verjetnosti propada.

Subeksponentne porazdelitve so poseben razred težkorepih porazdelitev, ki ga lahko definiramo na več načinov. Za naše namene bo najbolj uporabna naslednja definicija iz [9].

Definicija 4.27. Verjetnostna porazdelitev F na $[0,\infty)$ je *subeksponentna*, če za vsak $n \geq 2$ in neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ s to porazdelitvijo velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n > x\right)}{\mathbb{P}\left(X_1 > x\right)} = n$$

in $F(x) < 1$ za vsak $x > 0$.

Opomba 4.28. Ekvivalentna in bolj intuitivna definicija subeksponentne porazdelitve je, da velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n > x\right)}{\mathbb{P}\left(\max\{X_1, \ldots, X_n\} > x\right)} = 1 \quad \text{za vsak} \quad n \geq 2,$$

kar pomeni, da je repna porazdelitev vsote n-tih slučajnih spremenljivk asimptotično primerljiva s porazdelitvijo največje. Dokaz ekvivalence lahko bralec najde v [9] na strani 437.

Lema 4.29. *Naj bo F_{X_1} subeksponentna porazdelitvena funkcija nenegativne slučajne spremenljivke X_1. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja pozitivna konstanta $K(\varepsilon) < \infty$, da za vsak $n \geq 2$ in $x \geq 0$ velja*

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} \leq K(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n.$$

Dokaz. Fiksiramo $n \geq 2$ in $x \geq 0$. Ulomek preoblikujemo

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} &= \frac{(1 - F_{X_1}^{*n}(x)) + F_{X_1}(x) - F_{X_1}(x)}{1 - F_{X_1}(x)} \\ &= 1 + \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*n}(x)}{1 - F_{X_1}(x)}.\end{aligned}$$

Naj bo $a_n = \sup_{x\geq 0}\left\{1 + \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*n}(x)}{1 - F_{X_1}(x)}\right\}$. Za konstanto $M \in (0,\infty)$ lahko ocenimo

$$\begin{aligned}a_{n+1} \leq 1 + &\sup_{0\leq x\leq M} \int_{(0,x]} \frac{1 - F_{X_1}^{*n}(x-y)}{1 - F_{X_1}(x)}\, dF_{X_1}(y) \\ &+ \sup_{x\geq M} \int_{(0,x]} \frac{1 - F_{X_1}^{*n}(x-y)}{1 - F_{X_1}(x-y)} \frac{1 - F_{X_1}(x-y)}{1 - F_{X_1}}(x)\, dF_{X_1}(y) \\ \leq{}& 1 + T + a_n \sup_{x\geq M} \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*2}(x)}{1 - F_{X_1}(x)},\end{aligned}$$

kjer je $T = (1 - F_{X_1})^{-1}(M) < \infty$. Ker je F_{X_1} subeksponentna, lahko za vsak $\varepsilon > 0$ izberemo tak M, da velja

$$a_{n+1} \leq 1 + T + a_n(1 + \varepsilon)$$

in tako dobimo želeno oceno

$$a_n \leq \underbrace{(1 + T)\frac{1}{\varepsilon}}_{K(\varepsilon)}(1 + \varepsilon)^n.$$

□

Izrek 4.30. *(Asimptotika verjetnosti propada, težkorepe porazdelitve) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj bodo zahtevki $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ neodvisni in enako porazdeljeni z gostoto, pričakovano vrednostjo $\mathbb{E}[X] < \infty$ in naj bo $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna. Potem za verjetnost propada $\psi(u)$ velja*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)} = \frac{1}{\rho}. \tag{22}$$

Dokaz. V opombi 4.14 smo izrazili verjetnost preživetja kot negibno točko operatorja A. Preoblikujemo rešitev (13) da dobimo verjetnost propada.

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= 1 - \theta(u) \\
&= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k - (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\overline{W}_k \leq u\right) \\
&= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{W}_k \leq u\right)\right) \\
&= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}\left(\overline{W}_k > u\right).
\end{aligned}$$

Limito $\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)}$ lahko tako zapišemo kot

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)} = \lim_{u\to\infty} (1-q)\sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{\mathbb{P}\left(\overline{W}_k > u\right)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)}.$$

Ker je $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna, če vzamemo $\varepsilon < \frac{1}{q} - 1$, lahko po lemi 4.29 zaporedje funkcij

$$f_k(n) = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{W}_k > u_k\right)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u_k)}, \quad n \geq 2,\ k \in \mathbb{N},$$

omejimo z integrabilno funkcijo $K(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n$ za vsak $n \geq 2$ (glede na mero, ki šteje). Limito $u \to \infty$ po realnih številih nadomestimo z limito po zaporedjih pozitivnih števil $u_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. Tako lahko po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci 5.24 zamenjamo vrstni red limite in vsote. Ker je $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna, za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}\left(\overline{W}_k > u\right)}{1 - \overline{F}_{X_1}(u)} = n.$$

Končno je

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)} = (1-q)\sum_{n=1}^{\infty} q^n n$$
$$= \frac{q}{(1-q)} = \frac{1}{\rho}.$$

□

Izreka 4.24 in 4.30 pokažeta ključno razliko med lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. Limita (22) nam pove, da je konvergenca verjetnosti propada ψ enakega reda kot $(1-\overline{F}_{X_1})$, ki pa ni zanemarljiva tudi za velike vrednosti u. To pomeni, da so zavarovalniški produkti, za katere verjamemo, da so zahtevki subeksponentno porazdeljneni, nevarni, saj imajo največji zahtevki velik vpliv na celoten proces tveganja in se propad lahko zgodi zaradi enega samega velikega zahtevka kot v zgledu 4.3.

Opomba 4.31. Če tako kot v definiciji sestavljene geometrijske porazdelitve 5.17 vzamemo $G \sim \mathrm{Geom}(1-q)$, ki je neodvisna od $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots$, ima $C = \overline{W}_G$ sestavljeno geometrijsko porazdelitev in za $u \geq 0$ velja

$$\mathbb{P}(C \leq u) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(G=k)\,\mathbb{P}\left(\overline{W}_k \leq u\right)$$
$$= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k\mathbb{P}\left(\overline{W}_k \leq u\right) = \theta(u).$$

Verjetnost preživetja θ je torej porazdelitvena funkcija sestavljene geometrijske porazdelitve in posledično velja $\psi(u) = \mathbb{P}(C > u) = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k\mathbb{P}\left(\overline{W}_k > u\right)$.

Zgled 4.32. Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja, da so zahtevki neodvisni Weibullovo porazdeljeni s parametroma $a = \frac{1}{4}$ in $b = 16$, torej $X_i \sim \mathrm{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$. Dokaz, da je $\overline{F}_{X_1}$ subeksponentna porazdelitvena funkcija, lahko bralec najde v [9] na strani 444. Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov $\lambda = 1$ in stopnja prihodkov premij $c = 500$. Podobno kot v zgledu 4.26 z Monte Carlo simulacijami pokažimo, da verjetnost propada res pada proti 0 z enakim redom konvergence kot rep $\overline{F}_{X_1}$, ko gre $u \to \infty$. Porazdelitev integriranega repa $\overline{F}_{X_1}$ ima obliko

$$\overline{F}_{X_1}(u) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}\int_{(0,u]} e^{-\left(\frac{x}{16}\right)^{1/4}}dx.$$

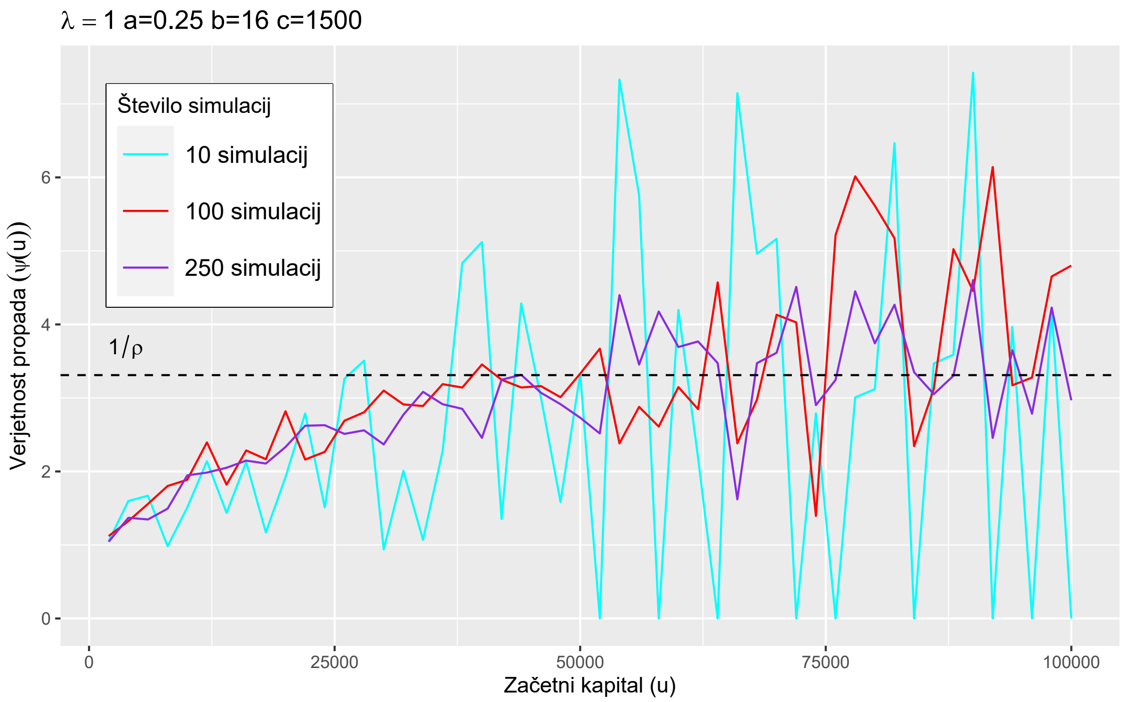
Iz zgleda 4.3 vemo, da je $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 384$. Z uvedbo nove spremenljivke $z = x^{1/4}$($dz = \frac{1}{4x^{3/4}}dx$) z nekaj računanja dobimo

$$\overline{F}_{X_1}(u) = 1 - \frac{\left(u^{3/4} + 6\sqrt{u} + 24\sqrt[4]{u} + 48\right)e^{-\sqrt[4]{u}/2}}{48}.$$

Izračunamo še

$$\rho = \frac{c\mathbb{E}\left[T_1\right]}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} - 1 = \frac{500}{384} - 1 \approx 0.3020833.$$

Po izreku 4.30 razmerje $\frac{\psi(u)}{1-\overline{F}_{X_1}(u)}$ konvergira proti $\frac{1}{\rho} \approx 3.3103451$. Zaporedje $(u_n)_{n=1}^{50}$, definirano kot $u_n = 2000n$ za vsak n, podobno kot v zgledu 4.26 simuliramo 10, 100 in 250 realizacij procesa tveganja in za vsak n izračunamo približek za razmerje $\frac{\psi(u_n)}{1-\overline{F}_{X_1}(u_n)}$. Rezultate prikažemo na sliki 6.



SLIKA 6. Aproksimacija verjetnosti propada $\psi(u)$ z Monte Carlo simulacijami (modra) in točna vrednost funkcije (rdeča).

Vidimo, da razmerje vizualno res konvergira proti $\frac{1}{\rho}$, ampak seveda bi za boljšo natančnost morali povečati začetni kapital u in število simulacij. $\diamondsuit$

5. Priloga

Priloga je namenjena predvsem za dodatne definicije in trditve, s katerimi naj bi bil bralec seznanjen in so bile izpušcene v glavnem za namene preglednosti besedila. V primeru, da bralec potrebuje osvežiti določene pojme, ki se pojavljajo v besedilu, jih večino lahko najde v tem razdelku.

Definicija 5.1. Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$. Potem za $u \in \mathbb{C}$ z $|u| < 1$ definiramo *rodovno funkcijo* slučajne spremenljivke X kot

$$G_X(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} u^k \mathbb{P}(X = k).$$

Naj bo Y poljubna slučajna spremenljivka. Za $u \in \mathbb{C}$ definiramo *momentno-rodovno funkcijo* slučajne spremenljivke Y kot

$$M_Y(u) = \mathbb{E}\left[e^{uY}\right].$$

Za $u \in \mathbb{R}$ definiramo še *karakteristično funkcijo* slučajne spremenljivke Y kot

$$\varphi_Y(u) = M_Y(iu) = \mathbb{E}\left[e^{iuY}\right].$$

Opomba 5.2. Karakteristično funkcijo bi lahko sicer definirali tudi za kompleksne argumente, vendar pa že vrednosti karakteristične funkcije za vse realne argumente enolično določajo porazdelitev slučajne spremenljivke.

Definicija 5.3. Naj bo $\boldsymbol{X}$ n-razsežni slučajni vektor. Potem ima za $u \in \mathbb{R}^n$ *karakteristična funkcija* slučajnega vektorja $\boldsymbol{X}$ obliko

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(u) = \mathbb{E}\left[e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{X}}\right].$$

Trditev 5.4. *Naj bo $\boldsymbol{X}$ n-razsežni slučajni vektor. Komponente $\boldsymbol{X}$ so neodvisne slučajne spremenljivke, natanko tedaj ko ima karakteristična funkcija slučajnega vektorja $\boldsymbol{X}$ obliko*

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(u) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(u_i), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz. Dokaz trditve lahko bralec najde v [7] na strani 236. □

Definicija 5.5. Naj bosta F in G porazdelitveni funkciji dveh neodvisnih nenegativnih slučajnih spremenljivk X in Y. *Konvolucijo* funkcij F in G definiramo kot Lebesgue–Stieltjesov integral

$$(F * G)(t) = \int_{[0,t]} F(t-x)\, dG(x) = \int_{[0,t]} G(t-x)\, dF(x).$$

Konovlucija $(F * G)$ se ujema s porazdelitveno funkcijo vsote $X + Y$, kar lahko enostavno pokažemo z uporabo transformacijske formule. Za neodvisne in enako porazdeljene nenegativne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s porazdelitveno funkcijo F_{X_1} rekurzivno definiramo *k-to konvolucijo* kot

$$F_{X_1}^{*k}(t) = (F_{X_1} * \cdots * F_{X_1})(t) = \int_{[0,t]} F_{X_1}^{*(k-1)}(t-x)\, dF_{X_1}(x),$$

ki se prav tako ujema s porazdelitveno funkcijo vsote $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Definicija 5.6. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (E, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T, je družina slučajnih elementov $X_t : \Omega \to E$, ki so $(\mathcal{F}, \Sigma)$-merljivi za vsak $t \in T$.

Opomba 5.7. V delu se omejimo na primer, ko T predstavlja čas, torej $T = [0, \infty)$ in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, kjer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ predstavlja Borelovo σ-algebro na $\mathbb{R}$.

Definicija 5.8. Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$. Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora Ω priredi slučajno funkcijo $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Definicija 5.9. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Definicija 5.10. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Definicija 5.11. Naj bodo $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$, $i = 1, \ldots, n$, slučajni procesi definirani na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pravimo, da so $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$ *neodvisni*, če so za poljubne končne nabore realnih števil $0 \leq t_1^{(i)} < t_2^{(i)} < \ldots < t_{n_i}^{(i)} < \infty$, slučajni vektorji $(X_{t_1^{(i)}}^{(i)}, X_{t_2^{(i)}}^{(i)}, \ldots, X_{t_{n_i}^{(i)}}^{(i)})$ med seboj neodivsni.

Trditev 5.12. *Naj bodo X, Y in Z slučajne spremenljivke ter g in h poljubni Borelovi funkciji. Če velja $X \mid Z \sim Y$, velja tudi $X \mid Z \sim X \mid g(Z) \sim Y$.*

Dokaz. Da je $X \mid Z \sim Y$, pomeni, da ima X pogojno na $\sigma(Z)$ vedno isto porazdelitev, potem pa mora biti to tudi brezpogojna porazdelitev, prav tako pa tudi pogojna porazdelitev glede na manjšo σ-algebro $\sigma(g(Z))$. $\square$

Definicija 5.13. Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ števno zaporedje slučajnih spremenljivk. Pravimo, da so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ *izmenljive*, če za vsako končno permutacijo π velja, da je skupna porazdelitev slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ enaka skupni porazdelitvi slučajnih spremenljivk $X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \ldots$.

Trditev 5.14. *Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ števno zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ izmenljive.*

Dokaz. Izmenljivost neposredno sledi iz definicije neodvisnosti slučajnih spremenljivk, saj se skupna porazdelitev faktorizira na produkt posameznih porazdelitev. $\square$

Trditev 5.15. *Naj bodo $X_1, \ldots, X_n$ izmenljive slučajne spremenljivke in $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ poljubna Borelova simetrična funkcija. Potem so vsi slučajni vektorji*

$$(X_i, g(X_1, \ldots, X_n)), \quad i = 1, \ldots, n$$

enako porazdeljeni. Sledi, da so tudi vse pogojne porazdelitve slučajnih spremenljivk

$$X_i \mid g(X_1, \ldots, X_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

enake.

Dokaz. Označimo $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ in $\boldsymbol{Y} = (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)})$, za permutacijo

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permutacijska matrika, za katero velja $P\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$. Po simetričnosti g velja $g(\boldsymbol{X}) = g(P\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{Y})$. Prav tako lahko za vsak $i = 1, \ldots, n$ zapišemo $X_i = e_i^T \boldsymbol{X} = e_i^T P^T \boldsymbol{Y} = X_{\pi(i)}$. Tako za poljubni množici $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ in $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^k}$ velja

$$\mathbb{P}(X_i \in A,\, g(\boldsymbol{X}) \in B) = \mathbb{P}(X_{\pi(i)} \in A,\, g(\boldsymbol{X}) \in B).$$

Drugi del trditve sledi iz dejstva, da je pogojna porazdelitev $X_i \mid g(\boldsymbol{X})$ popolnoma določena s porazdelitvijo slučajnega vektorja $(X_i, g(\boldsymbol{X}))$. □

Definicija 5.16. Slučajna spremenljivka X ima *Weibullovo porazdelitev* s parametroma $a, b > 0$, če ima njena porazdelitvena funkcija obliko

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0$$

oziroma gostota obliko

$$f_X(x) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0.$$

Definicija 5.17. Naj bo $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk in $G \sim \mathrm{Geom}(p)$ geometrijsko porazdeljena slučajna spremenljivka parametrom $p \in (0,1)$ in funkcijo verjetnosti $P(G = k) = p(1-p)^k$ za $k \in \mathbb{N}_0$. Naj bo G neodvisna od X_i za vsak $i \in \mathbb{N}$. Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$C = \sum_{i=1}^{G} X_i$$

sestavljeno geometrijsko porazdelitev.

Trditev 5.18. *Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ki ima prvi moment. Potem velja*

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \big(1 - F_X(x)\big)\, dx.$$

Dokaz. Vsako število $X \geq 0$ lahko zapišemo kot

$$X = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x<X\}} dx = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X<x\}} dx.$$

Če sedaj uporabimo Fubinijev izrek, dobimo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X<x\}} dx\right] \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X<x\}}\right] dx \\
&= \int_0^\infty \big(1 - \mathbb{P}(X > x)\big) dx
\end{aligned}$$

□

Trditev 5.19. *(Neenakost Markova) Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka. Potem za $x > 0$ velja*

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{x}.$$

Dokaz. Naj bo $x > 0$. Velja

$$x\mathbb{1}_{\{X \geq x\}} \leq X \iff x\mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{E}[X].$$

□

Izrek 5.20. *(Krepki zakon velikih števil) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s pričakovano vrednostjo $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$. Potem velja*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mu.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani 192. □

Izrek 5.21. *(Izrek o enoličnosti) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, ne nujno definirani na istem verjetnostnem prostoru. Če za vsak $u \in \mathbb{R}$ velja $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$, imata X in Y enako porazdelitev.*

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [13] na strani 346. □

Izrek 5.22. *(Lévijev izrek o kontinuiteti) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk (ne nujno na istem verjetnostnem prostoru) in X še ena slučajna spremenljivka. Potem za vsak $u \in \mathbb{R}$ velja*

$$\varphi_{X_n}(u) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_X(u)$$

natanko tedaj, ko velja

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani 260. □

Izrek 5.23. *(Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci) Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in naj bo $X := \lim_{n\to\infty} X_n$ njihova limita. Naj za vsak $\omega \in \Omega$ velja $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \ldots$ Potem velja*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani 105. □

Izrek 5.24. *(Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci) Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in naj bo $X := \lim_{n\to\infty} X_n$ njihova limita. Naj bo Y slučajna spremenljivka definirana na istem verjetnostnem prostoru z $\mathbb{E}[Y] < \infty$ in naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $\omega \in \Omega$ velja $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$. Potem je X integrabilna in velja*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [7] na strani 107. □

Izrek 5.25. *(Tonellijev izrek) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki definirani vsaka na svojem verjentnostnem prostoru in naj imata vsaka svojo gostoto f_X in f_Y glede na Lebesgueovo mero. Potem velja*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\mathcal{L}^2(dx,dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy \right) dx.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [12] na strani 201. □

Trditev 5.26. *(Lastnost vrstilnih statistik) Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Za $k \in \mathbb{N}$ je pogojno na dogodek $\{N_t = k\}$ vektor časov prihodov porazdeljen kot*

$$(V_1, \ldots, V_k) \mid \{N_t = k\} \sim (U_{(1)}, \ldots, U_{(k)}),$$

kjer je $(U_{(1)}, \ldots, U_{(k)})$ vektor vrstilnih statistik vektorja $(U_1, \ldots, U_k)$ neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $U_i \sim U([0,t])$.

Dokaz. Dokaz trditve lahko bralec najde v [4] na strani 24. □

Definicija 5.27. Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka in F_X njena porazdelitvena funkcija. Potem za $u \in \mathbb{R}$ *Laplace-Stieltjesovo transformacijo* porazdelitve F_X definiramo kot

$$\hat{F}_X(u) = \int_{[0,\infty)} e^{-ux} dF_X(x).$$

Definicija 5.28. Naj bo F porazdelitvena funkcija neke nenegativne slučajne spremenljivke s prvim momentom. *Porazdelitev integriranega repa* te slučajne spremenljivke je porazdelitev s porazdelitveno funkcijo

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^x (1 - F(t))\, dt.$$

Definicija 5.29. *Prenovitveni proces* na verjetnostnem protoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je slučajni proces, določen z zaporedjem neodvisnih enako porazdeljenih medprihodnih časov $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki zavzamejo vrednosti v $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, in sicer je podan z zvezo

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}},$$

kjer je $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ čas n-tega prihoda. Pripadajočo *prenovitveno mero* prenovitvenega procesa definiramo kot $M(t) = \mathbb{E}[N_t]$ za $t > 0$.

Definicija 5.30. *Prenovitvena enačba* je enačba oblike

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} f(t-s)dF(s), \quad t \geq 0,$$

kjer sta neznana funkcija f in znana funkcija g definirani na $\mathbb{R}^+$, F pa je porazdelitvna funkcija neke pozitivne slučajne spremenljivke X.

Definicija 5.31. Za nenegativno merljivo funkcijo $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pravimo, da je *direktno Riemannovo integrabilna* (d.R.i.), če za vsak $\delta > 0$ velja

$$\sum_{k\geq 0}\left(\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t)\right) < \infty \quad \text{in}$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\delta\sum_{k\geq 0}\left(\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t)\right) = \lim_{\delta\downarrow 0}\delta\sum_{k\geq 0}\left(\inf_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t)\right) \tag{23}$$

Če f zadošča navedenima zahtevama, definiramo njen *direktni Riemannov integral*

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty f(t)\, dt$$

kot limito (23). Funkcija f poljubnega predznaka je d.R.i., če sta le-taki $f^+ = \max\{f, 0\}$ in $f^- = \max\{-f, 0\}$, pri čemer je

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty f(t)\, dt = \text{d.R.i.} \int_0^\infty f^+(t)\, dt - \text{d.R.i.} \int_0^\infty f^-(t)\, dt.$$

Definicija 5.32. *Totalna variacija* funkcije f na intervalu I je definirana kot

$$V(f;\, I) := \sup_{\substack{x_0,x_1,\ldots,x_n\in I\\ x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n}} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

lahko je končna ali neskončna. Za $a \leq b$ definiramo še $V(f;\, a, b) := V(f;\, [a, b])$ in $V(f;\, a, \infty) := V(f;\, [0, \infty))$.

Trditev 5.33. *Vsaka funkcija $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ za katero obstaja posplošeni Riemannov integral $\int_0^\infty f(t)dt$ in ima omejeno totalno variacijo na $[0, \infty)$, je direktno Riemannovo integrabilna.*

Dokaz. Za $\delta > 0$ ocenimo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^\infty\left(\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t)\right) &\leq \sum_{k=0}^\infty\left[\frac{1}{\delta}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} f(t)dt = V(f;\, k\delta, (k+1)\delta)\right]\\ &\leq \frac{1}{\delta}\int_0^\infty f(t)dt + V(f;\, 0, \infty) < \infty\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}&\delta\sum_{k=0}^\infty \sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t) - \delta\sum_{k=0}^\infty \inf_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t)\\ &= \delta\sum_{k=0}^\infty\left(\sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t) - \inf_{t\in[k\delta,(k+1)\delta)} f(t)\right)\\ &\leq \delta\sum_{k=0}^\infty V(f;\, k\delta, (k+1)\delta)\\ &= \delta V(f;\, 0, \infty);\end{aligned}$$

Slednje gre proti nič, ko gre δ proti nič. □

Izrek 5.34. *(Smithov ključni prenovitveni izrek) Če je funkcija g iz prenovitvene enačbe (g, F) (definicija 5.30) omejena na končnih intervalih ter X ima prvi moment in ni aritmetična ($\nexists a \in \mathbb{R}: \ \mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}a) = 1$), je*

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} g(t-s)dM(s), \quad t \geq 0,$$

enolična rešitev te enačbe. Funkcija M je prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodno porazdelitvijo F. Če je dodatno funkcija g direktno Riemannovo integrabilna, pa velja še

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{[0,\infty)} g(t)dt.$$

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [8] na strani 237. □

Izrek 5.35. *(Banachov izrek o negibni točki) Naj bo (M, d) poln metrični prostor in naj bo*

$$f : (M, d) \to (M, d)$$

skrčitev, torej obstaja tak $0 \leq k < 1$, da za vsak $x, y \in M$ velja $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Potem obstaja natanko en $x^* \in M$, za katerega velja $f(x^*) = x^*$. Še več, $x^* = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(f \circ \cdots \circ f)}_{n}(x)$ za vsak $x \in M$.

Dokaz. Dokaz izreka lahko bralec najde v [11] na strani 284. □

Slovar strokovnih izrazov

trajektorija sample path
sestavljeni procesi compound processes
sestavljeni Poissonov proces compound Poisson process
markiranje procesa space-time decomposition of process
neskončna deljivost infinite divisibility
proces tveganja risk process
verjetnost propada probability of ruin
ogrodje procesa tveganja skeleton process
lahkorepa porazdelitev light-tailed distribution
težkorepa porazdelitev heavy-tailed distribution
subeksponentna porazdelitev subexponential distribution
prenovitveni proces renewal process
defektna prenovitvena enačba defective renewal equation
prenovitvena mera renewal function

Literatura

[1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
[2] S.M. Ross, Stochatic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
[3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).
[4] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Second Edition, Springer, (2009).
[5] M. Mandjes, O. Boxma, The Cramér–Lundberg model and its variants, Springer, (2023).
[6] F. Spitzer, Principles of Random Walk, Second Edition, Springer, (1976).
[7] B. Fristedt, L. Gray, A Modern Approach to Probability Theory, Springer, (1996).
[8] S.I. Resnick, Adventures in Stochastic Processes, Birkhäuser, (1992).
[9] R.J. Adler, R.E. Feldman, A practical guide to heavy tails: statistical techniques and applications, Birkhäuser, (1998).
[10] K. Sato, Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, (1999).
[11] J. Globevnik, M. Brojan, Analiza 1, DMFA–založništvo, (2016).
[12] T. Tao, An introduction to measure theroy, American Mathematical Society, (2011).
[13] P. Billingsley, Probability and Measure, Third edition, Wiley, (1995).