

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

**Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Sestavljeni Poissonov proces	5
2.1. Osnovne lastnosti	5
2.2. Rodovne funkcije	6
2.3. Porazdelitev CPP	7
2.4. CPP kot martingal	10
3. Cramér-Lundbergov model	10
3.1. Proces tveganja in verjetnost propada	11
3.2. Lahkorepe porazdelitve	13
3.3. Težkorepe porazdelitve	17
4. Dostavek	18
Slovar strokovnih izrazov	19
Literatura	19

# Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

## POVZETEK

# Compound Poisson process and its application in finance

## ABSTRACT

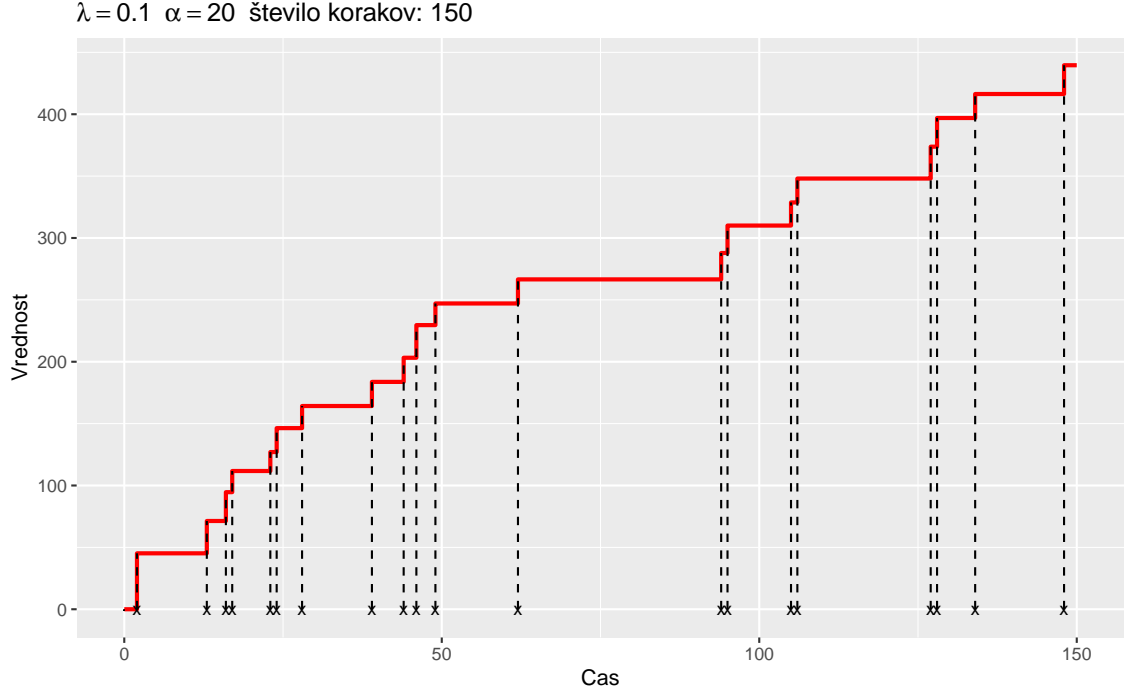
**Math. Subj. Class. (2020):** 60G07 60G20 60G51

**Ključne besede:** slučajni procesi, sestavljeni Poissonov proces, Cramér–Lundbergov model

**Keywords:** stochastic processes, compound Poisson process, Cramér–Lundberg model

## 1. UVOD

Uvodni tekst in motivacija za študiranje procesa, nakaži da boš obravnaval Cramer-Ludenbergov model



SLIKA 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa

**Definicija 1.1.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  verjetnostni prostor in naj bo  $T \neq \emptyset$  neprazna indeksna množica ter  $(E, \Sigma)$  merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s  $T$ , je družina slučajnih elementov  $X_t : \Omega \rightarrow E$ , ki so  $(\mathcal{F}, \Sigma)$ -merljivi za vsak  $t \in T$ .

**Opomba 1.2.** V delu se bomo omejili na primer, ko  $T$  predstavlja čas, torej  $T = [0, \infty)$  in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej  $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , kjer  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  predstavlja Borelovo  $\sigma$ -algebro na  $\mathbb{R}$ .

**Definicija 1.3.** Za fiksni  $\omega \in \Omega$  je preslikava  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto X_t(\omega)$  *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora  $\Omega$  priredi slučajno funkcijo  $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicija 1.4.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces. Potem za  $s < t$  definiramo *prirastek procesa*  $X_t - X_s$  na intervalu  $[s, t]$ . Proces  $(X_t)_{t \geq 0}$  ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$  prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

**Trditev 1.5.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Potem ima  $(X_t)_{t \geq 0}$  neodvisne prirastke natanko tedaj, ko je za vsak nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$  prirastek  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$  neodvisen od slučajnega vektorja  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ .

Dokaz. ( $\Rightarrow$ ) :

( $\Leftarrow$ ) :

□

**Definicija 1.6.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak  $s < t$  in vsak  $h > 0$  velja, da ima  $X_{t+h} - X_{s+h}$  enako porazdelitev kot  $X_t - X_s$ .

**Definicija 1.7.** Naj bo  $\lambda > 0$ . Slučajnemu procesu  $(N_t)_{t \geq 0}$ , definiranim na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  in z vrednostmi v  $\mathbb{N}_0$ , pravimo *Poissonov proces* z intenzivnostjo  $\lambda$ , če zadošča naslednjim pogojem:

- (1)  $N_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -skoraj gotovo.
- (2)  $(N_t)_{t \geq 0}$  ima neodvisne in stacionarne prirastke,
- (3) Za  $0 \leq s < t$  velja  $N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t - s))$ ,

**Opomba 1.8.** Vidimo, da v definiciji ne zahtevamo, da so skoki procesa le  $+1$ . To sledi iz...

## 2. SESTAVLJENI POISSONOV PROCES

Povzetek poglavja/krajši uvod

**Definicija 2.1.** Naj bo  $(N_t)_{t \geq 0}$  Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda$ . Naj bo  $(X_i)_{i \geq 1}$  zaporedje neodvisnih (med sabo in  $(N_t)_{t \geq 0}$ ) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v  $\mathbb{R}$ . Potem je *sestavljeni Poissonov proces*  $(S_t)_{t \geq 0}$  definiran kot

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

**Opomba 2.2.** Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za  $X_i$  vzamemo konstantno funkcijo  $X_i = 1$  za vsak  $i$ , dobimo ravno *HPP*. Bolj v splošnem, če za  $X_i$  postavimo  $X_i = \alpha$ , potem velja  $S_t = \alpha N_t$ .

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda > 0$  označevali s *HPP*( $\lambda$ ) ali naborom slučajnih spremenljivk  $(N_t)_{t \geq 0}$  (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s *CPP* ali naborom slučajnih spremenljivk  $(S_t)_{t \geq 0}$  (angl. Compound Poisson Process), kjer bo vsota sledila *HPP*( $\lambda$ ).

### 2.1. Osnovne lastnosti.

**Trditev 2.3.** *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

*Dokaz.* Za nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$  lahko slučajne spremenljivke  $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$  zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti  $X_i$  od  $X_j$  za  $i \neq j$  in  $N_t$ . Naj bo  $h > 0$  in  $s < t$ . Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima  $N_{t+h} - N_{s+h}$  členov. Ker za  $HPP$  velja  $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$ , je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

□

**Trditev 2.4.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP in naj bosta  $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$  pričakovana vrednost in  $\sigma^2 = \text{Var}[X_i] < \infty$  varianca slučajnih spremenljivk  $X_i$  za vsak  $i$ . Potem sta za  $t \geq 0$  pričakovana vrednost in varianca  $S_t$  enaki

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu\lambda t \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2).$$

*Dokaz.* Definiramo slučajno spremenljivko

$$Y_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k \tag{1}$$

in vidimo, da je za  $t \geq 0$   $S_t$  pogojno na  $N_t = k$  enako porazdeljena kot  $Y_k$ . Tako dobimo

$$\mathbb{E}[S_t | N_t = k] = \mathbb{E}[Y_k] = k\mu \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t | N_t = k] = \text{Var}[Y_k] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja  $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t | N_t]]$ . Torej

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t | N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu\lambda t.$$

Prek formule  $\text{Var}[S_t] = \mathbb{E}[\text{Var}[S_t | N_t]] + \text{Var}[\mathbb{E}[S_t | N_t]]$  računamo

$$\mathbb{E}[\text{Var}[S_t | N_t]] = \mathbb{E}[\text{Var}[X_i] N_t] = \sigma^2 \lambda t$$

in

$$\text{Var}[\mathbb{E}[S_t | N_t]] = \text{Var}[\mathbb{E}[X_i] N_t] = \mu^2 \lambda t,$$

saj  $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$ . Skupaj dobimo  $\text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2)$ . □

## 2.2. Rodovne funkcije.

**Trditev 2.5.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP. Naj bodo slučajne spremenljivke  $X_i$ , ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot  $X$ . Potem ima za  $t \geq 0$  karakteristična funkcija  $\varphi_{S_t}$  obliko

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)},$$

kjer  $\varphi_X$  označuje karakteristično funkcijo  $X$ .

*Dokaz.*

$$\varphi_{S_t}(u) = \mathbb{E}[\exp[iuS_t]] = \mathbb{E}\left[\exp\left[iu \sum_{i=1}^{N_t} X_i\right]\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ iu \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t = k \right] \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ iu \sum_{i=1}^k X_i \right] \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E} [e^{iuX}]^k}_{\varphi_X(u)^k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_X(u) \lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)}
\end{aligned} \tag{2}$$

□

Hitro lahko vidimo, da sta karakteristična in rodovna funkcija  $CPP$  enaki

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)} \quad \text{in} \quad G_{S_t}(u) = e^{\lambda t(G_X(u)-1)},$$

saj v splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke  $Y$  enaka njeni momentno rodovni funkciji izverednoteni v  $iu$ , torej  $\varphi_Y(u) = G_Y(iu)$ . Rodovna pa izverednotena v  $\ln(u)$ , torej  $G_Y(u) = M_Y(\ln(u))$ , če obstajata. V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo  $CPP$ , saj je ta vedno definirana za vsak  $u \in \mathbb{R}$ . Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med karakteristično funkcijo  $CPP$  in rodovno funkcijo  $HPP(\lambda)$ .

**Trditev 2.6.** *Naj bosta  $(S_t)_{t \geq 0}$   $CPP$  in  $(N_t)_{t \geq 0}$   $HPP(\lambda)$  neodvisna. Naj bodo slučajne spremenljivke  $X_i$ , ki jih seštevamo v  $CPP$  enako porazdeljene kot  $X$ . Potem za fiksen  $t \geq 0$  velja*

$$\varphi_{S_t}(u) = G_{N_t}(\varphi_X(u)).$$

*Dokaz.* Po enačbi (2) iz trditve 2.5 velja, da je  $\varphi_{S_t}(u)$  enaka

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_t}(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_X(u)^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= G_{N_t}(\varphi_X(u)).
\end{aligned}$$

□

**2.3. Porazdelitev CPP.** Sedaj se posvetimo vprašanju, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $S_t$  za  $t \geq 0$ ? Iz definicije  $HPP(\lambda)$  vemo, da je  $N_t$  za  $t \geq 0$  porazdeljena kot Poissonova slučajna spremenljivka s parametrom  $\lambda t$ . Fiksiramo  $t \geq 0$  in dobimo

$$\begin{aligned}
F_{S_t}(x) &= \mathbb{P}(S_t \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_t \leq x \mid N_t = k) \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k X_i \leq x\right) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

kjer je  $F_X^{*k}(x)$  porazdelitev  $k$ -te konvolucije slučajne spremenljivke  $X$ . Razen za posebne primere, je zgornji izraz za praktične namene ne-izračunljiv in nam ne pomaga veliko.

**Zgled 2.7.** Če pogledamo primer, ko so  $X_1, X_2, \dots$  neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke, porazdeljene kot  $X$

$$X \sim \text{Gamma}(a) \quad f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}$$

s parametrom  $a > 0$ , lahko pridemo do razmeroma eksplicitne porazdelitve  $CPP$ . Gostota  $k$ -te konvolucije  $X_1 + \dots + X_k$  ima formulo

$$f_{X_1+\dots+X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(ka)} x^{ka-1} e^{-x}.$$

Za  $t \geq 0$  in  $x \geq 0$  torej velja

$$\begin{aligned} F_{S_t}(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \dots \end{aligned}$$

◇

**Trditev 2.8.** Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots, X_n$  neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od  $N$ ) enako porazdeljene kot

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} \dots \end{pmatrix},$$

za poljubne  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  in  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$  za katere velja  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda$ . Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^N X_j,$$

kjer so  $Y_1, Y_2, \dots$  neodvisne s.s. porazdeljene kot  $\text{Pois}(\lambda_1), \text{Pois}(\lambda_2), \dots$

*Dokaz.* S  $\varphi_{Z_n}(u)$  označimo karakteristično funkcijo s.s.  $Z_n := a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_n Y_n$  in s  $\varphi_Z(u)$  karakteristično funkcijo s.s.  $Z := \sum_{j=1}^N X_j$ . Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(a_j u) \\ &= \prod_{j=1}^n \exp [\lambda_j (e^{a_j i u} - 1)] \\ &= \exp \left[ \sum_{j=1}^n \lambda_j (e^{a_j i u} - 1) \right]. \end{aligned}$$



Po trditvi 2.6 velja

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(u) &= G_N(\varphi_X(u)) \\
&= \exp[\lambda(\varphi_X(u) - 1)] \\
&= \exp\left[\lambda\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda} e^{a_j i u} - 1\right)\right] \\
&= \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (e^{a_j i u} - 1)\right]
\end{aligned}$$

Vidimo, da velja

$$\varphi_{Z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_Z,$$

torej po Lévijevem izreku o kontinuiteti velja  $Z_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \sim Z$ .  $\square$

**Posledica 2.9.** Naj bo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  poljubno zaporedje realnih števil in  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje pozitivnih realnih števil, za katere velja  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \lambda$  in

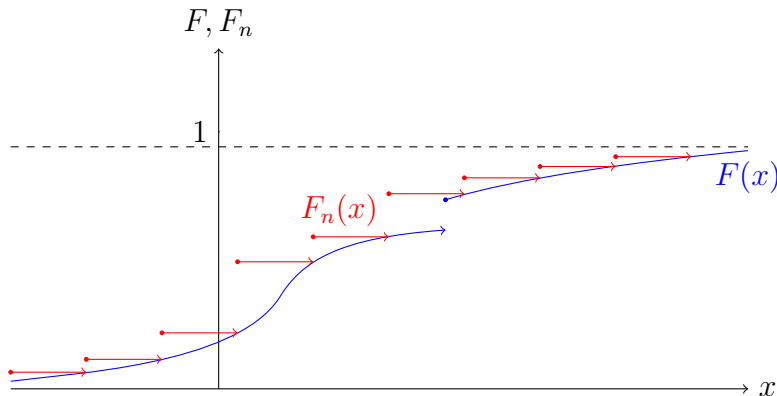
$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Potem velja

$$\sum_{j=1}^n a_j Y_j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sum_{j=1}^N X_j,$$

*Dokaz.* Ker velja  $\varphi_{Z_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_Z(u)$  za vsak  $u \in \mathbb{R}$ , po Lévijevem izreku o zveznosti sledi, da  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$ .  $\square$

Kaj pa v primeru, ko so  $X_i$  zvezno porazdeljene? Tedaj se problema lotimo na sledeč način. Definiramo  $F_n(x) := F(\frac{m}{n})$  kjer je  $F(x)$  porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke  $Z_n$  in  $m = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid \frac{k}{n} > F_n(x)\}$ .



SLIKA 2. Aproximacija  $F$  s  $F_n$

Kot je razvidno iz slike 2, je  $F_n(x)$  stopničasta funkcija, ki aproksimira porazdelitveno funkcijo  $F(x)$ . Velja  $F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F$  povsod kjer je  $F$  zvezna.

## 2.4. CPP kot martingal.

**Definicija 2.10.** Slučajni proces  $X_t$  prilagojen glede na filtracijo  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  martingal, če velja

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$$

za vsak  $0 \leq s \leq t$ .

Pokažimo, da v splošnem CPP ni martingal.

**Trditev 2.11.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP z intenzivnostjo  $\lambda > 0$  in naj bodo  $X_i$  neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  za vsak  $i$ . Potem je  $S_t$  martingal natanko tedaj, ko je  $\mu = 0$ .

*Dokaz.* Naj bo  $0 \leq s \leq t$ . Potem velja

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[S_t - S_s + S_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[S_t - S_s] + \mathbb{E}[S_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mu\lambda(t - s) + S_s \end{aligned}$$

Enakost  $\mu\lambda(t - s) + S_s = S_s$  velja  $\iff \mu\lambda(t - s) = 0 \iff \mu = 0$ . □

**Opomba 2.12.** Seveda, če velja  $\mu \geq 0$ , potem je  $S_t$  submartingal, če pa  $\mu \leq 0$ , je  $S_t$  supermartingal.

**Trditev 2.13.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP z intenzivnostjo  $\lambda > 0$  in naj bodo  $X_i$  neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  za vsak  $i$ . Potem je proces

$$S_t - \mu\lambda t$$

*martingal.*

*Dokaz.* Naj bosta  $0 \leq s < t$ . Prirastek  $S_t - S_s$  je neodvisen od  $\mathcal{F}_s$  in ima pričakovano vrednost  $\mu\lambda(t - s)$ . Torej

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t - \mu\lambda t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[S_t - S_s] + S_s - \mu\lambda t \\ &= \mu\lambda(t - s) + S_s - \mu\lambda t \\ &= S_s - \mu\lambda s. \end{aligned}$$

□

## 3. CRAMÉR-LUNDBERGOV MODEL

V tem razdelku obravnavamo najbolj intenzivno raziskan model v teoriji propada, običajno imenovan Cramér-Lundbergov model. V svoji najosnovnejši obliki ga je v zgodnjih 1900. letih izpeljal švedski aktuar Filip Lundberg, da bi ocenil ranljivost zavarovalnice za propad. Čeprav je model v svoji ideji dokaj preprost, lepo zajema bistvo dinamike ravni rezerv zavarovalne družbe in njene izpostavljenosti tveganju, kar pojasnjuje, zakaj je postal temeljni merilni model v teoriji propada. V preteklem stoletju je bilo razvitih veliko tehnik za analizo Cramér-Lundbergovega modela, ki so se večinoma osredotočile na kvantifikacijo verjetnosti propada. Cilj razdelka je podati pregled glavnih rezultatov in osnovnih tehnik, ter jih ponazoriti na primerih, ko zavarovalniške zahteve modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami.

### 3.1. Proces tveganja in verjetnost propada.

**Definicija 3.1.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP. Proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu definiramo kot

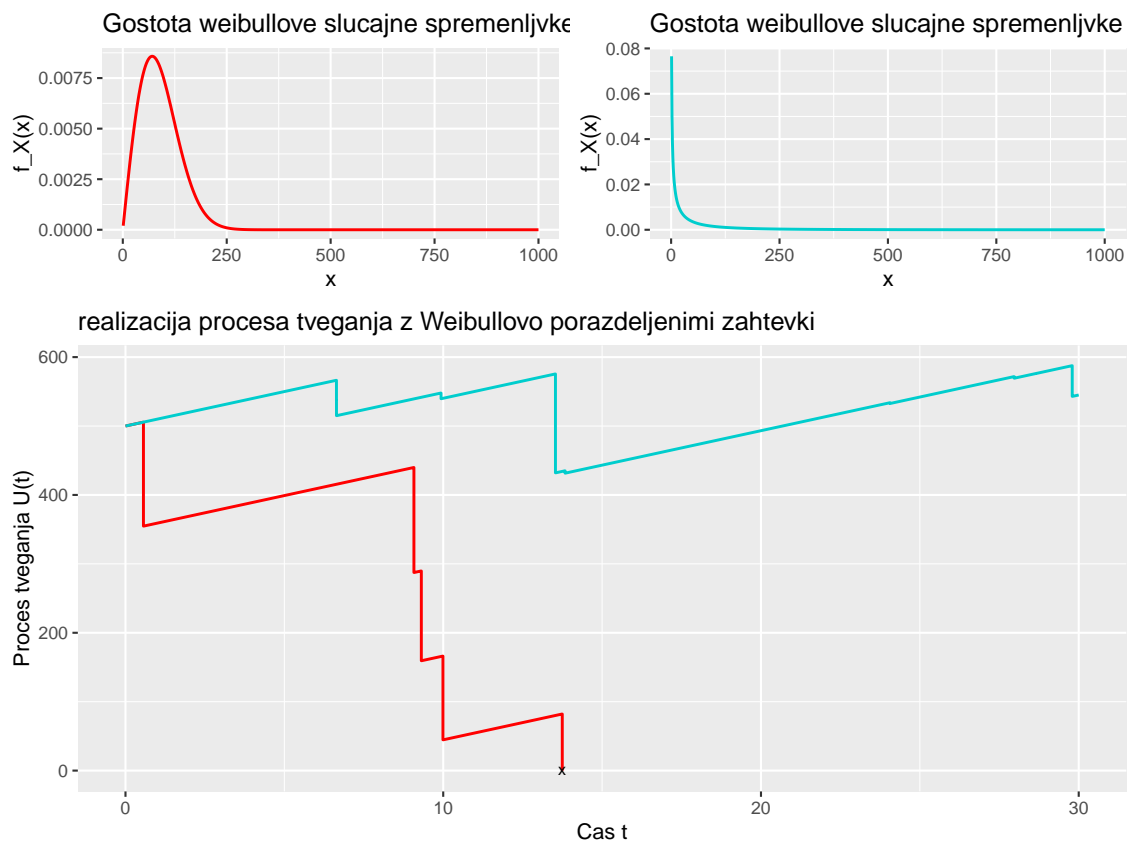
$$U_t = u + p(t) - S_t,$$

kjer je  $u \geq 0$  začetni kapital zavarovalnice in  $p(t)$  funkcija prihodkov iz premij.

**Opomba 3.2.** V resnici lahko veliko lastnosti procesa tveganja izpeljemo brez da predpostavimo, da prihodi zahtevkov v  $S_t$  sledijo Poissonovemu procesu, ampak splošnemu prenovitvenemu procesu in zato v nadaljevanju ne bomo uporabljali rezultatov CPP kjer to ne bo potrebno.

Vrednost  $U_t$  predstavlja kapital zavarovalnice ob času  $t \geq 0$ . Standardno je za  $p(t)$  vzeti deterministično funkcijo  $p(t) = ct$ , kjer je  $c$  stopnja prihodkov premij. Uporaba linearne funkcije za modeliranje premijskega dohodka v Cramér-Lundbergovem modelu ponuja realističen približek zato, ker zavarovalnice pogosto doživljajo stabilno povečevanje premijskega dohodka skozi čas. Poleg tega je izbira linearne funkcije preprosta, kar olajša analizo modela in izpeljavo ključnih rezultatov, zato bomo v nadaljevanju privzeli  $p(t) = ct$ .

**Zgled 3.3.** Poglejmo si realizaciji procesa tveganja, ko so zahtevki  $X_i$  porazdeljeni Weibullovo (4.7) z različnimi parametri.



SLIKA 3. Realizaciji procesa tveganja



**Definicija 3.4.** *Propad* definiramo kot dogodek, da proces tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  kadarkoli pade pod 0. Torej

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\}$$

in času

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\},$$

pravimo *čas propada*. Seveda velja enakost med dogodkoma

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} = \{T < \infty\}.$$

**Definicija 3.5.** *Verjetnost propada* je definirana kot funkcija  $\psi(u) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  podana s predpisom

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty \mid U_0 = u).$$

**Definicija 3.6.** Po konstrukciji procesa tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  je verjetnost propada mogoča le ob prihodih zahtevkov. S  $T_n$  označimo čas  $n$ -tega prihoda in definiramo *ogrodje procesa tveganja* kot  $(U_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Trditev 3.7.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu in  $(U_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$  njegovo ogrodje ter  $W_n := T_n - T_{n-1}$  medprihodni čas  $n$ -tega zahtevka ( $W_0 = T_0 = 0$ ). Potem velja

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  komulativna izguba po  $n$  prihodih in  $Y_i = X_i - cW_i$  izguba  $i$ -tega prihoda.

*Dokaz.* S pomočjo ogrodja procesa tveganja lahko dogodek propada zapišemo kot

$$\begin{aligned} \left\{\inf_{t \geq 0} U_t < 0\right\} &= \left\{\inf_{n \in \mathbb{N}} U_{T_n} < 0\right\} \\ &= \left\{\inf_{n \in \mathbb{N}} \{u + p(T_n) - S_{T_n}\} < 0\right\} \\ &= \left\{\inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{u + \underbrace{cT_n - \sum_{i=1}^n X_i}_{-Z_n}\right\} < 0\right\}. \end{aligned}$$

Potem lahko  $\psi(u)$  zapišemo kot

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \mathbb{P}\left(\inf_{n \in \mathbb{N}} \{-Z_n\} < -u\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u\right). \end{aligned}$$

□

Tako verjetnost propada prevedemo na prehodno verjetnost diskretnega slučajnega sprehoda  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo asimptotično vedenje  $\psi(u)$ , ko gre  $u \rightarrow \infty$ . Cilj obravnavanja verjetnosti propada v Cramér-Lundbergovem modelu je, da se izognemo propadu z verjetnostjo 1 oziroma, da je verjetnost, da  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  preseže  $u$  tako majhna, da lahko v praksi dogodek propada izključimo.

**Trditev 3.8.** *Naj bo  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje slučajnih spremenljivk definirano kot  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke  $Y_i$  z  $\mathbb{E}[Y_i] = \mu < \infty$ . Potem za vsak  $u > 0$  velja*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1 \quad \text{za } u > 0,$$

če velja  $\mathbb{E}[Y_i] \geq 0$ .

*Dokaz.* Zaporedje slučajnih spremenljivk  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zadostuje krepkemu zakonu velikih števil 4.6, torej velja

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} \mathbb{E}[Y_n].$$

Torej bo  $Z_n$  v primeru ko je  $\mu > 0$  skoraj gotovo asimptotično linearno naraščal proti  $\infty$  kot  $\mu n$  in bo za poljuben  $u > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

Dokaz za primer, ko je  $\mu = 0$  je precej bolj tehničen in ne preveč informativen, zato ga bomo izpustili. Lahko ga najdemo v [Spitzer, 138].  $\square$

**Opomba 3.9.** Iz trditve 3.8 (ob predpostavkah  $\mathbb{E}[X_i] < \infty$  in  $\mathbb{E}[W_i] < \infty$ ) sledi, da moramo premijo  $c$  izbrati tako, da bo  $\mathbb{E}[Y_i] < 0$ , saj je to edini način, ko lahko upamo, da verjetnost propada ne bo enaka 1.

**Definicija 3.10.** Pravimo, da proces tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  v Cramér-Lundbergovem modelu zadostuje *pogoju neto zaslužka* (ang. *net profit condition*), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]} \quad \text{oziroma} \quad c = (1 + \rho) \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]} \quad \text{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljevanju imenovali NPC.

Zahteva NPC za analizo poslovanja zavarovalnice je kar intuitivna, saj pove, da mora v neki čavni enoti biti pričakovan dohodek iz premij večji od pričakovanega izplačila zahtevkov.

### 3.2. Lahkorepe porazdelitve.

3.2.1. *Lundbergova neenakost.* Najprej se bomo omejili na primer, ko ima porazdelitev slučajnih spremenljivk  $X_i$ , ki jih seštevamo v *CPP* lahek rep, saj je bila osnovna teorija, ki sta jo razvila Cramér in Lundberg, izpeljana pod to predpostavko.

**Definicija 3.11.** Pravimo, da ima slučajna spremenljivka  $X$  *lahkorepno porazdelitev*, če velja

$$\mathbb{E}[e^{uX}] = M_X(u) < \infty \quad \text{za } u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

za nek  $\varepsilon > 0$ .

**Opomba 3.12.** V praksi z lahkorepnimi porazdelitvami modeliramo zahtevke, kjer verjetnosti ekstremnih dogodkov (torej zelo velikih zahtevkov) eksponentno pada proti 0. To direktno sledi iz definicije 3.11 in neenakosti Markova, saj za vsak  $x > 0$  in  $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  velja

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(e^{uX} > e^{ux}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{uX}]}{e^{ux}}.$$

**Definicija 3.13.** Naj velja, da ima slučajna spremenljivka  $Y_1$  lahek rep. Če obstaja pozitivna enolična rešitev enačbe

$$M_{1Y_1}(\ell) = 1,$$

številu  $\ell$  pravimo *Lundbergov koeficient*.

**Trditev 3.14.** mogoče dokazi da je  $\ell$  res enolična rešitev.

**Izrek 3.15.** (Lundbergova neenakost) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj zanj obstaja Lundebrov koeficient  $\ell$ . Potem za vsak  $u > 0$  velja

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u}.$$

*Dokaz.* Neenakost bomo dokazali z indukcijo. Za  $u > 0$  in  $n \in \mathbb{N}$  definiramo

$$\psi_n(u) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u\right)$$

in vidimo, da je (po zveznosti  $\mathbb{P}$  od spodaj)  $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$ , torej moramo pokazati, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $\psi_n(u) \leq e^{-\ell u}$ .

( $n = 1$ ): Kot v opombi 3.12 uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$\psi_1(u) = \mathbb{P}(e^{\ell Z_1} > e^{\ell u}) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = e^{-\ell u}.$$

( $n \rightarrow n+1$ ): Označimo s  $F_{Y_1}$  porazdelitev  $Y_1$ . Potem velja

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n+1} Z_k > u\right) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(Y_1 > u)}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{P}\left(\max_{2 \leq k \leq n+1} \{Y_1 + (Z_k - Y_1)\} > u, Y_1 \leq u\right)}_{(ii)} \end{aligned}$$

Najprej se posvetimo (ii). Po induksijski predpostavki velja

$$\begin{aligned} (ii) &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} \{x + Z_k\} > u\right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u - x\right) dF_{Y_1}(x) \\ &\stackrel{\text{I.P.}}{=} \int_{(-\infty, u]} \psi_n(u - x) dF_{Y_1}(x) \\ &\leq \int_{(-\infty, u]} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x). \end{aligned}$$

Za oceno (i) kot v primeru  $n = 1$  uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$(i) = \psi_1(u) = \int_{(u, \infty)} dF_{Y_1}(x) \leq \int_{(u, \infty)} e^{\ell(x-u)} dF_{Y_1}(x).$$

Če torej seštejemo (i) in (ii) dobimo željeno oceno

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{\ell(x-u)} dF_{Y_1}(x) \\ &= e^{-\ell u} M_{Y_1}(\ell) \\ &= e^{-\ell u}. \end{aligned}$$

□

**Opomba 3.16.** Iz izreka 3.15 je razvidno, da z dovolj visokim začetnim kapitalom  $u$  verjetnost propada lahko v praksi zadovoljivo omejimo blizu 0. Seveda je meja odvisna tudi od Lundbergovega koeficienta  $\ell$  in krepko temelji na predpostavki lah-korepnih porazdelitev, ki pa v praksi pogosto niso izpolnjene.

**Zgled 3.17.** Naj veljajo predpostavke izreka 3.15, torej imamo proces tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC. Naj nadalje velja da so  $X_i$  eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke s parametrom  $\mu$  ( $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$  za vsak  $i$ ). Vemo, da ima momentno rodovna funkcija  $X_i$  obliko

$$M_{X_i}(u) = \frac{\mu}{\mu - u} \text{ za } u < \mu. \quad (3)$$

Tako dobimo, da ima momentno rodovna funkcija  $Y_1 = X_1 - cW_1$  obliko

$$M_{Y_1}(u) = M_{X_1}(u)M_{W_1}(-cu) = \frac{\mu}{\mu - u} \frac{\lambda}{\lambda + cu} \text{ za } u \in (-\frac{\lambda}{c}, \mu).$$

Sedaj lahko izračunamo Lundbergov koeficient  $\ell$

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(\ell) &= 1, \\ \frac{\mu}{\mu - \ell} \frac{\lambda}{\lambda + c\ell} &= 1, \\ \mu\lambda &= (\mu - \ell)(\lambda + c\ell), \\ \mu\lambda &= \mu\lambda - \ell\lambda + \mu c - c\ell^2, \\ 0 &= \mu c - c\ell - \lambda. \end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\ell = \mu - \frac{\lambda}{c} \in (0, \mu),$$

saj v našem modelu velja NPC pogoj

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[W_1]} = \frac{\lambda}{\mu} < c \iff \mu > \frac{\lambda}{c}.$$

Če uporabimo alternativno formulacijo NPC pogoja, dobimo

$$c = (1 + \rho) \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \ell = \mu - \frac{\lambda}{(1 + \rho) \frac{\lambda}{\mu}} = \mu \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right).$$

Tako dobimo zgornjo mejo za verjetnost propada

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u} = e^{-\mu u \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)}$$

in vidimo, da povečanje premije čez neko mejo ne bistveno vpliva na oceno, saj

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{-\mu u \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)} = e^{-\mu u}.$$

V nadaljevanju bomo videli, da je Lundbergova neenakost v primeru eksponentno porazdeljenih zahtevkov skoraj točna vrednost verjetnosti propada, zgrešena le za konstanto. V splošnem pa je zelo težko določiti Lundbergov koeficient kot funkcijo parametrov porazdelitev  $X_1$  in  $W_1$  in zato uporabljamo numerične metode za njegovo aproksimacijo kot naprimer Monte Carlo simulacije.  $\diamond$

**3.2.2. Cramérjeva meja za propad.** Sedaj se bomo posvetili enemu najpomembnejših rezultatov v teoriji propada.

**Definicija 3.18.** Za lažjo notacijo v nadaljevanju definiramo funkcijo *verjetnosti preživetja* kot  $\theta(u) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  s predpisom

$$\theta(u) = \mathbb{P}(T = \infty \mid U_0 = u) = 1 - \psi(u).$$

**Lema 3.19.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadoštuje NPC in naj velja  $\mathbb{E}[X] < \infty$  ter, da je  $F_X$  absolutno zvezna glede na neko mero  $\nu$ . Potem  $\theta(u)$  zadošča naslednji enakosti

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1 + \rho)\mathbb{E}[X]} \int_{(0, u]} \left( (1 - F_X(x))\theta(u - x) \right) dx. \quad (4)$$

*Dokaz.* Iz trditve 3.7 vemo, da velja

$$\psi(u) = \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right),$$

kjer je  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  in  $Y_i = X_i - cW_i$ . Torej je

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq u \right) \\ &= \mathbb{P}(\{Z_n \leq u \mid \forall n \in \mathbb{N}\}) \\ &= \mathbb{P}(\{Y_1 \leq u\} \cap \{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \mid \forall n \geq 2\}) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y_1 \leq u\}} \mathbb{P}(\{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \mid \forall n \geq 2\} \mid Y_1)] \\ &= \int_{(0, \infty)} \int_{(0, u+cw]} \mathbb{P}(\{Z_n - Y_1 \leq u - (x - cw) \mid \forall n \geq 2\}) dF_{X_1}(x) dF_{W_1}(w) \\ &= \int_{(0, \infty)} \int_{(0, u+cw]} \mathbb{P}(\{Z_n \leq u - (x - cw) \mid \forall n \in \mathbb{N}\}) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda w} dw. \end{aligned}$$

$$\theta(u) = \int_{(0, \infty)} \int_{(0, u+cw]} \theta(u - x + cw) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda w} dw (z = u + cw)$$



$$= \frac{\lambda}{c} e^{u \frac{\lambda}{c}} \int_{(u, \infty)} e^{\frac{-\lambda z}{c}} \int_{(0, z)} \theta(z - x) dF_{X_1}(x) dz$$

$$g(z) = \int_{(0, z)} \theta(z - x) dF_{X_1}(x) \Rightarrow g'(z) = \theta(z) - \int_{(0, z)} \theta'(z - x) dF_{X_1}(x)$$

$$\theta(u) = \frac{\lambda}{c} e^{u \frac{\lambda}{c}} \int_{(u, \infty)} e^{\frac{-\lambda z}{c}} g(z) dz$$

$$\theta'(u) = \frac{\lambda}{c} \theta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{(0, u)} \theta(u - x) dF_{X_1}(x).$$

□

**Opomba 3.20.** Enačbo (4) lahko zapišemo tudi v obliki

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1 + \rho)} \int_{(0, u]} \theta(u - x) dF_X^I(x)$$

kjer je  $F_X^I(x)$  podana z enačbo

$$F_X^I(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{(0, x]} (1 - F_X(y)) dy. \text{ za } x > 0.$$

Hitro lahko preverimo, da je  $F_X^I(x)$  porazdelitvena funkcija, saj je  $F_X^I(0) = 0$ ,  $F_X^I(x)$  je naraščajoča in  $F_X^I(x) \uparrow 1$  za  $x \rightarrow \infty$ , ker velja  $\mathbb{E}[X] = \int_{(0, \infty)} (1 - F_X(x)) dx$ .

**Izrek 3.21.** (*Cramérjeva meja za propad*) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient  $\ell$ . Naj bo  $F_X$  porazdelitev slučajnih spremenljivk  $X_i$ , ki je absolutno zvezna glede na neko mero  $\nu$ . Potem obstaja konstanta  $C > 0$  da velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{\ell u} \psi(u) = C.$$

3.2.3. *Simulacija modeliranja z eksponentno porazdelitvijo.*

3.3. **Težkorepe porazdelitve.**

### 3.3.1. Simulacija modeliranja s Pareto porazdelitvijo.

## 4. DOSTAVEK

Dostavek je namenjen predvsem za dodatne definicije in trditve, ki so bile izpuščene v glavnem za namene preglednosti besdila. V primeru, če bralec potrebuje osvežiti določene pojme jih večino lahko najde v tem razdelku.

**Definicija 4.1.** Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka. Potem so njena *rodovna funkcija*, *momentno rodovna funkcija* in *karakteristična funkcija* definirane kot

$$G_X(u) = \mathbb{E}[u^X], \quad M_X(u) = \mathbb{E}[e^{uX}], \quad \varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}],$$

če upanja obstajajo.

**Izrek 4.2.** (*Lévijev izrek o kontinuiteti*) Naj bo  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje slučajnih spremenljivk (ne nujno na istem verjetnostnem prostoru) in  $X$  še ena slučajna spremenljivka. Potem velja

$$\varphi_{X_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_X(u) \quad \text{za vsak } u \in \mathbb{R}$$

natanko tedaj, ko velja

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X.$$

*Dokaz.* Dokaz izreka je precej tehničen in ga bomo izpustili. Podroben dokaz lahko bralec najde v [Fristedt, B.E., Gray L.F. (1996) A modern approach to probability theory].  $\square$

**Izrek 4.3.** (*O enoličnosti*) One to one correspondence between characteristic functions and distributions.

**Definicija 4.4.** Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka in  $F_X$  njena porazdelitev. Potem za  $u \in \mathbb{R}$  Laplace-Stiltjesovo transformacijo porazdelitve  $F_X$  definiramo kot

$$\hat{F}_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ux} dF_X(x).$$

**Izrek 4.5.** (*Tonellijev izrek (Prirejen)*) Naj bosta  $X$  in  $Y$  slučajni spremenljivki definirani vsaka na svojem verjetnostnem prostoru in naj imata vsaka svojo gostoto  $f_X$  in  $f_Y$  glede na Lebesgueovo mero. Potem velja

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) \mathcal{L}^2(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx,$$

**Izrek 4.6.** (*Krepki zakon velikih števi*) Naj bo  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk s pričakovano vrednostjo  $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$ . Potem velja

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} \mu.$$

**Definicija 4.7.** Slučajna spremenljivka  $X$  ima *Weibullovo porazdelitev* s parametri  $a, b > 0$ , če ima njena porazdelitev obliko

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0$$

in gostota obliko

$$f_X(x) = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0.$$

**Definicija 4.8.** Naj bo  $F$  porazdelitvena funkcija. Potem je

$$F^-(x) = \int$$

*porazdelitev integrarnega repa  $F$ .*

**Izrek 4.9.** *izrek o sliki mere*

**Trditev 4.10.** *pricakovana vrednost kot  $\int_{(0,\infty)} P(X > x)dx$  za pozitivne slučajne spremenljivke*

*Dokaz.* dokaz trditve

□

## SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

**trajektorija** sample path

## LITERATURA

- [1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
- [2] S.M. Ross, Stochastic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
- [3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).
- [4] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Springer, Second Edition, (2009).