

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

**Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

## KAZALO

1. Uvod	5
2. Sestavljena Poissonova porazdelitev	6
2.1. Porazdelitev	6
2.2. Rodovne, momentno-rodovne in karakteristične funkcije	7
2.3. Panjerjeva rekurzivna shema	10
3. Sestavljeni Poissonov proces	13
3.1. Osnovne lastnosti	14
3.2. Markiranje sestavljenega Poissonovega procesa	17
3.3. Neskončna deljivost	20
4. Cramér–Lundbergov model	23
4.1. Proces tveganja in verjetnost propada	23
4.2. Lahkorepe porazdelitve	27
4.3. Težkorepe porazdelitve	36
5. Priloga	41
Slovar strokovnih izrazov	46
Literatura	46

# Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

## POVZETEK

V prvem delu diplome najprej definiramo sestavljeno Poissonovo porazdelitev in izpeljemo obliko njenih rodovnih funkcij, obravnavamo njeno povezavo s splošnimi porazdelitvami in izpeljemo Panjerjevo rekurzivno shemo. Nato definiramo sestavljeni Poissonov proces in pokažemo nekaj osnovnih lastnosti kot je neodvisnost in stacionarnost prirastkov. Izpeljemo nekaj rezultatov, ki jih dobimo, ko sestavljeni Poissonov proces markiramo in ga obravnavamo kot gradnik neskončno deljivih procesov ti. Lévijskih procesov. V drugem delu diplome obravnavamo aplikacijo sestavljenega Poissonovega procesa v Cramér–Lundbergovem modelu. Definiramo verjetnost propada in obravnavamo njeno obnašanje v odvisnosti od začetnega kapitala. Dokažemo Lundbergovo neenakost in asimptotično obnašanje verjetnosti propada, ko zahteve modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. Obnašanje verjetnosti propada na koncu praktično prikažemo z večkratnim simuliranjem procesa tveganja.

## Compound Poisson process and its application in finance

### ABSTRACT

In the first part of the thesis, we define the compound Poisson distribution and derive the form of its generating functions, discuss its connection with general distributions, and derive the Panjer recursion scheme. We then define the compound Poisson process and show some basic properties such as the independence and stationarity of increments. We derive some results of the marked compound Poisson process and consider it as a building block of infinitely divisible processes i.e. Lévy processes. In the second part of the thesis, we consider the application of the compound Poisson process in the Cramér–Lundberg model. We define the probability of ruin and consider its behavior depending on the initial capital. We prove the Lundberg inequality and the asymptotic behavior of the probability of ruin when the claims are modeled by light-tailed and heavy-tailed distributions. We practically demonstrate the behavior of the probability of ruin by repeatedly simulating the risk process.

**Math. Subj. Class. (2020):** 60G07 60G20 60G51

**Ključne besede:** slučajni proces, sestavljena Poissonova porazdelitev, Panjerjeva rekurzivna shema, sestavljeni Poissonov proces, razčlenitev glede na čas, razčlenitev glede na prostor, neskončna deljivost, Cramér–Lundbergov model, Verjetnost propada, lahkorepa porazdelitev, težkorepa porazdelitev

**Keywords:** stochastic process, compound Poisson distribution, Panjer recursion scheme, compound Poisson process, decomposition of time, decomposition of space, infinite divisibility, Cramér–Lundberg model, probability of ruin, light-tailed distribution, heavy-tailed distribution

## ZAHVALA

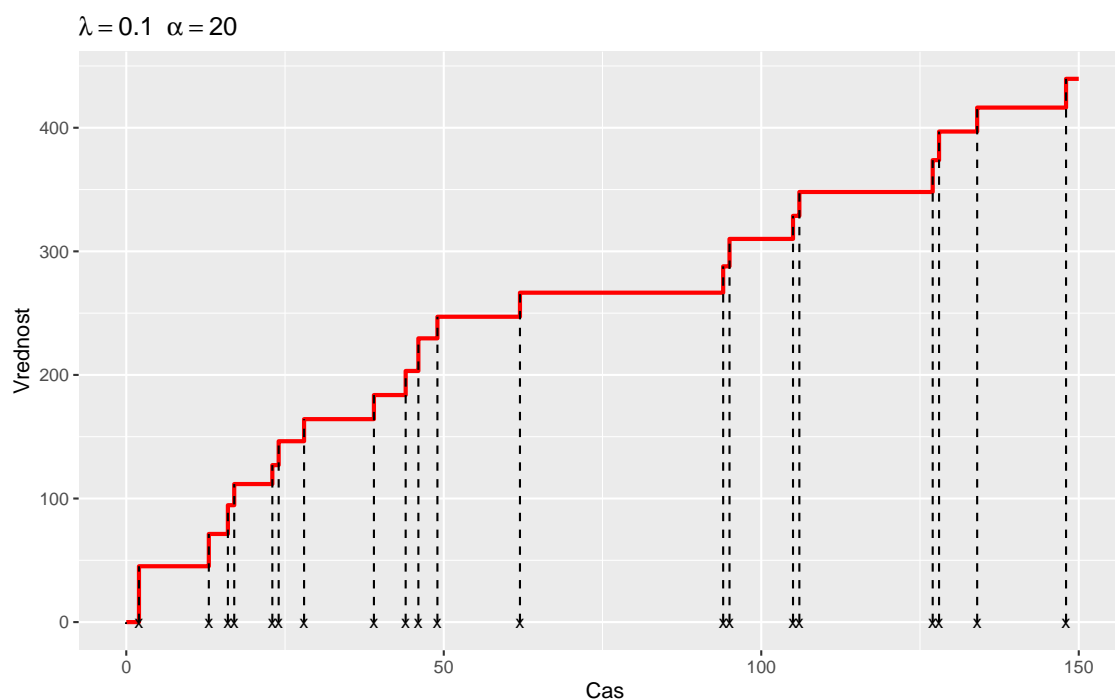
V nastajanju :)

## 1. UVOD

Na različnih področjih, kot so finance, telekomunikacija in predvsem zavarovalništvo, se je v zadnjem stoletju pojavila potreba po modeliranju raznih pojavov oziroma procesov. Eden najpreprostejših primerov je modeliranje števila dogodkov v nekem časovnem intervalu. Konkretno si zamislimo, da zavarovalnica želi modelirati število ljudi, ki bodo v enem dnevu vložili zahtevek za avtomobilsko zavarovanje. Tovrstne procese standardno modeliramo s homogenim Poissonovim procesom oziroma v splošnem s procesi štetja. V delu privzamemo, da je bralec s temi temami že seznanjen, saj služijo kot osnova za teorijo, ki jo izpeljemo. Nekatere ključne definicije in rezultate lahko bralec najde v prilogi.

V praksi zavarovalnico redko zanima število zahtevkov, veliko bolj pomembno je, kolikšno škodo bo morala poplačati v enem dnevu. Seveda ne moremo privzeti, da so vsi zahtevki enaki. Škoda, ki nastane v prometni nesreči, je v večini primerov precej večja od tiste, ki nastane, če oseba poškoduje vrata avtomobila. Potrebe po modeliranju takih procesov v zavarovalništvu so nas pripeljale do razvoja teorije sestavljenih procesov.

Ideja je, da vsak prihod v procesu štetja obtežimo z neko slučajno spremenljivko, ki predstavlja višino škode enega zahtevka. Te vrednosti skozi čas seštevamo in tako dobimo oceno za kumulativno škodo, ki jo zavarovalnica mora poplačati v nekem časovnem intervalu.



SLIKA 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa z intenzivnostjo  $\lambda = 0,1$  in eksponentno porazdeljenimi zahtevki  $X_i \sim \text{Exp}(20)$ .

Na sliki 1 je prikazan primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa, ki je poseben primer splošnega sestavljenega procesa in osrednja tema dela.

V prvem delu diplome se bomo osredotočili na sestavljeno Poissonovo porazdelitev in pokazali njene glavne lastnosti, ki bodo ključnega pomena pri obravnavi

sestavljenega Poissonovega procesa. Izpeljali bomo osnovne lastnosti procesa, ki jih bomo skozi delo uporabljali in nekaj zanimivih tem kot so markiranje in neskončna deljivost.

V drugem delu diplome pa se bomo posvetili Cramér–Lundbergovem modelu, ki temelji na teoriji sestavljenega Poissonovega procesa in je osnovni model v teoriji tveganja. Obravnavali bomo predvsem verjetnost propada zavarovalnice. Na koncu bomo dokazali dva zanimiva izreka o asimptotičnem obnašanju verjetnosti propada ko modeliramo različne vrste zahtevkov.

## 2. SESTAVLJENA POISSONOVA PORAZDELITEV

Razdelek je prirejen po [1], [2] in [4].

Sestavljena Poissonova porazdelitev je osnovni gradnik za sestavljeni Poissonov proces, ki ga obravnavamo v naslednjem razdelku. Lastnosti, ki jih dokažemo so direktno prenosljive na sam proces. Obravnavamo porazdelitev in kako te pridemo, rodovne funkcije, zanimive rezultate v povezavi s splošnimi slučajnimi spremenljivkami in Panjerjevo rekurzivno shemo, ki jo prikažemo na praktičnem zgledu.

**Definicija 2.1.** Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje neodvisnih (med seboj in  $N$ ) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

*sestavljeno Poissonovo porazdelitev.*

**Opomba 2.2.** V primeru, ko so  $X_i = 1$  za vsak  $i \in \mathbb{N}$ , je  $S \sim \text{Pois}(\lambda)$ .

**Opomba 2.3.** V splošnem lahko obravnavamo sestavljene porazdelitve kjer je  $N$  poljubna slučajna spremenljivka, ki zavzema vrednosti v  $\mathbb{N}_0$ . Konkreten primer nas zanima zaradi njegove povezave s sestavljenim Poissonovim procesom. V nadaljevanju bomo uporabljali oznako

$$S_0 = 0 \quad \text{in} \quad S_k = \sum_{i=1}^k X_i \quad \text{za } k \in \mathbb{N};$$

opazimo, da se brezpogojna porazdelitev slučajne spremenljivke  $S_k$  ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke  $S \mid \{N = k\}$ .

**2.1. Porazdelitev.** Z uporabo izreka o popolni verjetnosti s pogojevanjem na  $N$  pridemo do formule za porazdelitev slučajne spremenljivke  $S$ . Za  $x \in \mathbb{R}$  velja

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S \leq x \mid N = k) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k \leq x) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_{X_1}^{*k}(x) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \end{aligned}$$

kjer je  $F_{X_1}^{*k}(x)$   $k$ -ta konvolucija (5.2) funkcije  $F_{X_1}$ .

**Zgled 2.4.** Poglejmo enega enostavnejših primerov, ko so  $X_1, X_2, \dots$  porazdeljene kot

$$X_1 \sim \text{Exp}(a), \quad \text{torej z gostoto} \quad f_{X_1}(x) = ae^{-ax} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

kjer je  $a > 0$ . Vemo, da je  $k$ -ta konvolucija porazdelitve slučajne spremenljivke  $X_1$  porazdelitev  $\text{Gamma}(k, a)$  in ima gostoto

$$f_{X_1+\dots+X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Za  $s > 0$  velja

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^s \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} dx \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} && \text{Tonelli (5.20)} \\ &= \int_0^s \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!k!} (a\lambda)^k x^{k-1} e^{-(ax+\lambda)}}_{f_S(x)} dx. \end{aligned}$$

Vidimo, da lahko že celo v primeru, ko poznamo eksplicitno formulo za  $F_{X_1}^{*k}$ , težko pridemo do porazdelitve slučajne spremenljivke  $S$  v zaključeni obliki. V praksi se zato poslužujemo numeričnega ocenjevanja.  $\diamond$

**2.2. Rodovne, momentno-rodovne in karakteristične funkcije.** Ključno orodje pri dokazovanju lastnosti slučajnih spremenljivk so rodovne funkcije (5.1), saj nam pomagajo pri obravnavi vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk in (če obstajajo) popolnoma določajo njihovo porazdelitev.

**Trditev 2.5.** Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje neodvisnih (med seboj in  $N$ ) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z momentno-rodovno funkcijo  $M_{X_1}$ . Potem ima za  $u \in \mathbb{R}$  momentno-rodovna funkcija  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  obliko

$$M_S(u) = e^{\lambda(M_{X_1}(u)-1)}.$$

*Dokaz.* Velja

$$\begin{aligned} \varphi_S(u) &= \mathbb{E}[\exp[uS]] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\exp[uS] \mid N = k] \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\exp[uS_k]] \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[e^{uX_1}]^k}_{M_{X_1}(u)^k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} && (1) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M_{X_1}(u)\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{\lambda(M_{X_1}(u)-1)}. \end{aligned}$$

$\square$

**Posledica 2.6.** Rodovna in karakteristična funkcija  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  imata obliko

$$G_S(u) = e^{\lambda(G_{X_1}(u)-1)}, \quad \text{in} \quad \varphi_S(u) = e^{\lambda(\varphi_{X_1}(u)-1)}.$$

*Dokaz.* V splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke  $X$  enaka njeni momentno-rodovni funkciji iz vrednoteni v  $iu$  za  $u \in \mathbb{R}$ , torej  $\varphi_X(u) = M_X(iu)$ . Rodovna funkcija pa je enaka momentno-rodovni funkciji iz vrednoteni v  $\ln(u)$  za  $u > 0$ , torej  $G_X(u) = M_X(\ln(u))$ , če obstajata.  $\square$

V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo  $\varphi_S$ , saj je ta vedno definirana za vsak  $u \in \mathbb{R}$ . Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med  $\varphi_S$  in  $G_N$ .

**Lema 2.7.** Karakteristično funkcijo  $\varphi_S$  lahko izrazimo kot kompozitum rodovne funkcije  $G_N$  in karakteristične funkcije  $\varphi_{X_1}$ .

$$\varphi_S(u) = G_N(\varphi_{X_1}(u)).$$

*Dokaz.* Po enačbi (1) iz trditve 2.5 za  $u \in \mathbb{R}$  velja

$$\begin{aligned} \varphi_S(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{X_1}(u)^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= G_N(\varphi_{X_1}(u)). \end{aligned}$$

$\square$

Vemo, da za neodvisne slučajne spremenljivke  $X_1, \dots, X_n$ , ki so porazdeljene kot  $X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1), \dots, X_n \sim \text{Pois}(\lambda_n)$ , velja, da je njihova vsota  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  porazdeljena kot  $S \sim \text{Pois}(\lambda)$ , kjer je  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Izkáže se, da ima sestavljena Poissonova porazdelitev podobno lastnost.

**Definicija 2.8.** Naj bo  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  zaporedje pozitivnih realnih števil, za katerega velja  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ . Naj bodo  $F_1, F_2, \dots$  porazdelitvene funkcije realnih slučajnih spremenljivk  $X_1, X_2, \dots$ . Potem

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k$$

pravimo *mešanica porazdelitev*  $F_1, F_2, \dots$ .

Očitno je  $F$  porazdelitvena funkcija. Če definiramo

$$I \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots \end{pmatrix},$$

vidimo, da je  $F$  porazdelitev slučajne spremenljivke  $X = \mathbb{1}_{\{I=1\}}X_1 + \dots + \mathbb{1}_{\{I=n\}}X_n$ , kar enostavno pokažemo z uporabo zakona o popolni verjetnosti. Za poljuben  $n \in \mathbb{N}$  in  $x \in \mathbb{R}$  velja

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \leq x \mid I = k) \mathbb{P}(I = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \leq x) \lambda_k \end{aligned}$$



$$= \sum_{k=1}^n F_k(x) \lambda_k.$$

Z enakim argumentom lahko pokažemo, da je  $\varphi_X(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_{X_k}(u)$ .

**Trditev 2.9.** *Naj imajo neodvisne slučajne spremenljivke  $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$  sestavljeno Poissonovo porazdelitev, torej*

$$S^{(k)} = \sum_{i=1}^{N_k} X_i^{(k)} \quad \text{za } k = 1, \dots, n,$$

*kjer je  $N_k \sim \text{Pois}(\lambda_k)$  za  $\lambda_k > 0$  in za vsak  $k = 1, \dots, n$  je  $(X_i^{(k)})_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem velja*

$$S = \sum_{k=1}^n S^{(k)} \sim \sum_{i=1}^N Y_i,$$

*kjer je  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  s parametrom  $\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$  in  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z mešano porazdelitvijo*

$$F_{Y_1} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} F_{X_1^{(k)}}.$$

*Dokaz.* Karakteristična funkcija  $S^{(k)}$  ima obliko

$$\varphi_{S^{(k)}}(u) = e^{\lambda_k (\varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1)}.$$

Ker so  $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$  neodvisne, velja

$$\begin{aligned} \varphi_S(u) &= \prod_{k=1}^n \varphi_{S^{(k)}}(u) \\ &= \prod_{k=1}^n \exp \left[ \lambda_k (\varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1) \right] \\ &= \exp \left[ \lambda \underbrace{\left( \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} \varphi_{X_1^{(k)}}(u) - 1 \right)}_{\varphi_{Y_1} u} \right]. \end{aligned}$$

Po izreku o enoličnosti (5.16) sledi  $S \sim \sum_{i=1}^N Y_i$ . □

Na podoben način pokažemo, kako se sestavljena Poissonova porazdelitev izraža v primeru, ko so slučajne spremenljivke  $X_i$  diskretno porazdeljene.

**Trditev 2.10.** *Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots, X_n$  neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od  $N$ ) enako porazdeljene po shemi*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} \dots \end{pmatrix},$$

kjer je  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  poljubno zaporedje realnih števil in  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje pozitivnih realnih števil za katerega velja  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda$ . Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^N X_j,$$

kjer so  $Y_1, Y_2, \dots$  neodvisne slučajne spremenljivke porazdeljene kot  $\text{Pois}(\lambda_1), \text{Pois}(\lambda_2), \dots$

*Dokaz.* S  $\varphi_{Z_n}(u)$  označimo karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke  $Z_n := a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_n Y_n$  in s  $\varphi_Z(u)$  karakteristično funkcijo  $Z := \sum_{j=1}^{\infty} X_j$ . Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(a_j u) \\ &= \prod_{j=1}^n \exp [\lambda_j (e^{a_j i u} - 1)] \\ &= \exp \left[ \sum_{j=1}^n \lambda_j (e^{a_j i u} - 1) \right]. \end{aligned}$$

Po lemi 2.7 velja

$$\begin{aligned} \varphi_Z(u) &= G_N(\varphi_{X_1}(u)) \\ &= \exp [\lambda (\varphi_{X_1}(u) - 1)] \\ &= \exp \left[ \lambda \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda} e^{a_j i u} - 1 \right) \right] \\ &= \exp \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (e^{a_j i u} - 1) \right]. \end{aligned}$$

Vidimo, da zaporedje  $\varphi_{Z_n}(u)$  za vsak  $u \in \mathbb{R}$  po točkah konvergira k  $\varphi_Z(u)$ , torej

$$\varphi_{Z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_Z$$

po Lévijevem izreku o kontinuiteti (5.17) velja  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$ . □

Rezultat je zanimiv predvsem zato, ker nam za razliko od trditve 2.9 pove, da lahko slučajno vsoto izrazimo kot linearno kombinacijo oziroma vrsto Poissonovih slučajnih spremenljivk.

**2.3. Panjerjeva rekurzivna shema.** Poglejmo si popularno metodo za numerično ocenjevanje sestavljene Poissonove porazdelitve v praksi. Kot smo videli v zgledu 2.4, je računanje eksplcitne porazdelitve  $S$  v končni obliki v splošnem nemogoče. Izkaže pa se, da jo je v posebnih primerih vselej mogoče rekurzivno izraziti in ustrezno posplošiti na širši razred porazdelitev.

**Trditev 2.11.** (Panjer) Naj bo  $N$  diskretna slučajna spremenljivka, za katero velja

$$\mathbb{P}(N = n) = \left( a + \frac{b}{n} \right) \mathbb{P}(N = n - 1) \quad \text{za } n \in \mathbb{N} \text{ in } a, b \in \mathbb{R}.$$

Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki zavzemajo vrednosti v  $\mathbb{N}_0$ . Potem za  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  velja

$$\mathbb{P}(S = 0) = \begin{cases} \mathbb{P}(N = 0), & \text{če } \mathbb{P}(X_1 = 0) = 0, \\ \mathbb{E} \left[ \mathbb{P}(X_1 = 0)^N \right], & \text{sicer,} \end{cases}$$

in za  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\mathbb{P}(S = n) = \frac{1}{1 - a\mathbb{P}(X_1 = 0)} \sum_{k=1}^n \left( a + \frac{bk}{n} \right) \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(S = n - k). \quad (2)$$

*Dokaz.* Prvo se osredotočimo na primer  $n = 0$ . Velja

$$\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(S = 0, N > 0).$$

Če velja  $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$ , je enakost očitna. Če velja  $\mathbb{P}(X_1 = 0) > 0$ , po zakonu za popolno pričakovano vrednost računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = 0) &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S = 0, N > 0 \mid N = k) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = 0)^k \mathbb{P}(N = k) \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{P}(X_1 = 0)^N \right]. \end{aligned}$$

Za  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \left( a + \frac{b}{k} \right) \mathbb{P}(N = k - 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Če sedaj upoštevamo, da so  $X_i$  neodvisne in enako porazdeljene, opazimo, da velja

$$1 = \mathbb{E} \left[ \frac{S_k}{S_k} \mid S_k \right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left[ \frac{X_i}{S_k} \mid S_k \right] = k \mathbb{E} \left[ \frac{X_1}{S_k} \mid S_k \right],$$

torej je

$$\mathbb{E} \left[ \frac{X_1}{S_k} \mid S_k \right] = \frac{1}{k}$$

in posledično

$$\mathbb{E} \left[ a + \frac{bX_1}{n} \mid S_k = n \right] = a + \frac{b}{k}. \quad (4)$$

Nadaljno velja

$$\mathbb{E} \left[ a + \frac{bX_1}{n} \mid S_k = n \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n \left(a + \frac{bi}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i \mid S_k = n) \\
&= \sum_{i=0}^n \left(a + \frac{bi}{n}\right) \frac{\mathbb{P}(X_1 = i, S_k - X_1 = n - i)}{\mathbb{P}(S_k = n)} \\
&= \sum_{i=0}^n \left(a + \frac{bi}{n}\right) \frac{\mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(S_{k-1} = n - i)}{\mathbb{P}(S_k = n)} \tag{5}
\end{aligned}$$

Če sedaj vstavimo enakost (4) v (3) in upoštevamo (5), dobimo

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left(a + \frac{bi}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(S_{k-1} = n - i) \mathbb{P}(N = k - 1).$$

Po Tonellijevem izreku (5.20) lahko zamenjamo vrstni red vsot, da dobimo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = n) &= \sum_{i=0}^n \left(a + \frac{b}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{k-1} = n - i) \mathbb{P}(N = k - 1) \\
&= \sum_{i=0}^n \left(a + \frac{b}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(S = n - i).
\end{aligned}$$

Izpostavimo prvi člen vsote in izraz preoblikujemo.

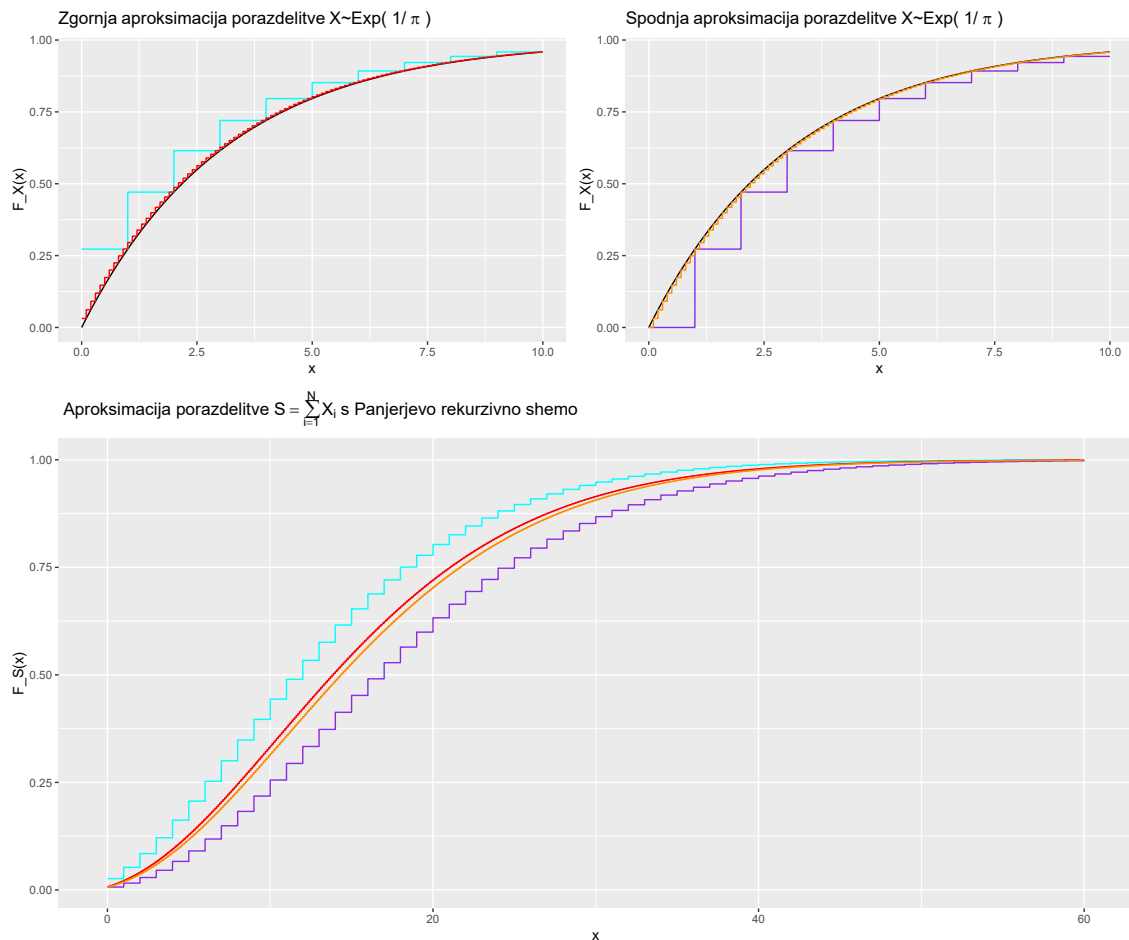
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = n) &= a \mathbb{P}(X_1 = 0) \mathbb{P}(S = n) + \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{b}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(S = n - i), \\
\mathbb{P}(S = n) &= \frac{1}{1 - a \mathbb{P}(X_1 = 0)} \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{b}{n}\right) \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(S = n - i).
\end{aligned}$$

S tem je trditev dokazana.  $\square$

**Opomba 2.12.** Izkaže se, da le tri porazdelitve ustrezajo pogojem iz trditve 2.11. Te so  $\text{Pois}(\lambda)$ ,  $\text{Bin}(p)$  in  $\text{NegBin}(r, p)$ . Pravimo jim *porazdelitve Panjerjevega razreda*. V primeru  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a = 0$  in  $b = \lambda$  velja  $\mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = (0 + \frac{\lambda}{n}) \mathbb{P}(N = n - 1)$ . Tudi v ostalih primerih (argument je podan v [4] na strani 122) se izkaže, da je  $a < 1$ , tako da je enačba (2) res dobro definirana.

**Opomba 2.13.** Zahtevo, da  $X_i$  zavzemajo vrednosti v  $\mathbb{N}_0$  se splača splošiti, tako da zahtevamo le, da  $X_i$  zavzemajo vrednosti v  $h\mathbb{N}_0$  za neki  $h > 0$ . V tem primeru zapišemo  $S = h \sum_{i=1}^N \frac{X_i}{h}$  in tako rekurzivna zveza velja za  $\frac{S}{h}$ . Tako lahko aproksimiramo splošne slučajne spremenljivke, ki zavzemajo vrednosti v  $[0, \infty)$ , poljubno natančno.

**Zgled 2.14.** (Nadaljevanje zgleda 2.4) Recimo, da imamo konkretni porazdelitvi  $N \sim \text{Pois}(9)$  in  $X_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\pi})$ . S stopničastima funkcijama  $F_h^u$  in  $F_h^l$  aproksimiramo porazdelitveno funkcijo  $F_{X_1}$  za vrednosti  $h \in \{1, 0,1\}$ . (Aproksimacije so na sliki 2 in so obarvane;  $F_1^u$  modra,  $F_{0,1}^u$  rdeča,  $F_1^l$  vijolična in  $F_{0,1}^l$  oranžna). Za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $F_h^u(x) = F_{X_1}((n+1)h)$  za  $x \in [nh, (n+1)h)$  in  $F_h^l(x) = F_{X_1}(nh)$  za  $x \in [nh, (n+1)h)$ . S Panjerjevo rekurzivno shemo izračunamo približke porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke  $S$  na intervalu  $[0, 60]$ .



SLIKA 2. Aproksimacija porazdelitve  $S$  s Panjerjevo rekurzivno shemo.

Vidimo, da že za  $h = 0,1$  dobimo zelo natančno aproksimacijo porazdelitve. Danes Panjerjeva metoda predstavlja alternativo Monte Carlo metodam. Njena glavna prednost je, da z manjšanjem koraka  $h$  dosežemo poljubno natančno točno aproksimacijo neke porazdelitve. Monte Carlo metode so bolj splošne, saj temeljijo zgolj na ponavljanju simulacij in se lahko uporabljajo za modeliranje bolj zapletenih porazdelitev, ki ne zadovoljujejo pogojev trditve 2.11 ali njene posplošitve v opombi 2.12.

◇

### 3. SESTAVLJENI POISSONOV PROCES

Razdelek je prirejen po [1], [2], in [3].

Sedaj se posvetimo študiranju sestavljenega Poissonovega procesa. Bralec lahko najde osnovne definicije splošnih slučajnih procesov, s katerimi delamo, med definicijama (5.3) in (5.8) v prilogi. Najprej dokažemo in izpeljemo nekaj osnovnih lastnosti procesa kot so neodvisnot in stacionarnost prirastov, pričakovana vrednost in varianca. Obravnavamo markiranje procesa glede čas in njegovo vrednost. Na koncu predstavimo nekaj splošne teorije procesov z neodvisnimi in stacionarnimi prirastki in kako je ta tesno povezana s sestavljenim Poissonovim procesom

Ker sestavljeni Poissonov proces temelji na homogenem Poissonovem procesu, najprej podamo definicijo s katero bomo delali.

**Definicija 3.1.** Naj bo  $\lambda > 0$ . Slučajnemu procesu  $(N_t)_{t \geq 0}$ , definiranim na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  z vrednostmi v  $\mathbb{N}_0$ , pravimo *homogeni Poissonov proces* z intenzivnostjo  $\lambda$ , če zadošča naslednjim pogojem:

- (1)  $N_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -skoraj gotovo.
- (2)  $(N_t)_{t \geq 0}$  ima neodvisne in stacionarne prirastke,
- (3) Za  $0 \leq s < t$  velja  $N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t - s))$ ,

**Opomba 3.2.** V delu bomo z  $V_n$  označevali čas  $n$ -tega prihoda v homogenem Poissonovem procesu in s  $T_n$   $n$ -ti medprihodni čas. Za medprihodne čase velja, da so neodvisni in enako porazdeljeni, kot  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Ta lastnost je tudi alternativna definicija procesa, kot poseben primer prenovitvenega procesa. Bralec lahko najde dokaz ekvivalence v [7] na strani ...

**Definicija 3.3.** Naj bo  $(N_t)_{t \geq 0}$  homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda$ . Naj bo  $(X_i)_{i \geq 1}$  zaporedje neodvisnih (med sabo in  $(N_t)_{t \geq 0}$ ) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v  $\mathbb{R}$ . Potem je *sestavljeni Poissonov proces*  $(S_t)_{t \geq 0}$  definiran kot družina slučajnih spremenljivk

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0.$$

**Opomba 3.4.** Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces naravna posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za  $X_i$  vzamemo konstantno funkcijo  $X_i = 1$  za vsak  $i$ , dobimo ravno HPP( $\lambda$ ). Bolj v splošnem, če je  $X_i = \alpha$  deterministična funkcija, potem velja  $S_t = \alpha N_t$ .

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda > 0$  označevali s HPP( $\lambda$ ) ali naborom slučajnih spremenljivk  $(N_t)_{t \geq 0}$  (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s CPP ali naborom slučajnih spremenljivk  $(S_t)_{t \geq 0}$  (angl. Compound Poisson Process), kjer prihodi sledijo nekemu HPP( $\lambda$ ).

**3.1. Osnovne lastnosti.** Pri študiranju slučajnih procesov nas najprej zanimajo neke osnovne lastnosti, s katerimi je lažje delati kot z neštevним naborom slučajnih spremenljivk in s pomočjo katerih lahko pokažemo globlje rezultate o procesu.

**Trditev 3.5.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .  $(X_t)_{t \geq 0}$  ima neodvisne in stacionarne prirastke natanko tedaj, ko za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$  velja

$$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n} \sim X_{t_{n+1} - t_n}. \quad (6)$$

*Dokaz. ( $\Rightarrow$ ):* Recimo, da ima  $(X_t)_{t \geq 0}$  neodvisne in stacionarne prirastke. Za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$  nas zanima porazdelitev slučajne spremenljivke  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ . Po trditvi (5.9) vemo, da je ta enaka porazdelitvi slučajne spremenljivke  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \mid g(X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  za poljubno borelovo funkcijo  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , ki jo definiramo na sledeč način:

$$\begin{aligned}
g(x_0, x_1, \dots, x_n) &= (g_0, g_1, \dots, g_n), \\
g_0 &= x_0, \\
g_1 &= x_1 - x_0, \\
&\vdots \\
g_n &= x_n - x_{n-1}.
\end{aligned}$$

$g$  je očitno merljiva, saj jo definiramo le z odštevanjem. Vidimo, da je

$$g(X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = (X_0, X_{t_1} - X_0, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}).$$

Po neodvisnosti prirastkov  $(X_t)_{t \geq 0}$  sledi, da je porazdelitev slučajne spremenljivke  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$  neodvisna od slučajnega vektorja  $(X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ . Po stacionarnosti prirastkov  $(X_t)_{t \geq 0}$  nato sledi veljavnost (6).

( $\Leftarrow$ ) : Recimo, da za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$  velja (6). **Pri tem dokazu ne vem, kako bi to korektno argumentiral.**  $\square$

**Trditev 3.6.** *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

*Dokaz.* Po trditvi 3.5 je dovolj pokazati, da za poljubna realna števila  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$  velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid S_{t_1}, \dots, S_{t_n} \sim S_{t_{n+1} - t_n}.$$

Naj bodo  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  in  $k_1 \leq \dots \leq k_n$ . Na dogodku  $\{N_{t_n} = k_n\}$  velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} = \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i,$$

zato je

$$\begin{aligned}
&S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n} \\
&\sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n}.
\end{aligned}$$

Ker pa so  $X_1, \dots, X_{k_n}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  neodvisne, sledi, da sta neodvisna tudi vektorja

$$(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, X_1, \dots, X_{k_n}) \text{ in } (N_{t_{n+1}} - N_{t_n}, X_{k_n+1}, \dots),$$

z njima pa tudi vektor  $(N_{t_1}, \dots, N_{t_n}, X_1, \dots, X_{k_n})$  in slučajna spremenljivka  $\sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i$ . Torej je

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n} \sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i.$$

Vemo, da po stacionarnosti prirastkov HPP velja  $N_{t_{n+1}} - N_{t_n} \sim N_{t_{n+1} - t_n}$ . Ker pa je zaporedje  $X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots$  neodvisno od  $N_{t_{n+1}} - N_{t_n}$ , zaporedje  $X_1, X_2, \dots$  neodvisno od  $N_{t_{n+1} - t_n}$  ter ker sta zaporedji  $X_1, X_2, \dots$  in  $X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots$  enako porazdeljeni, je tudi

$$N_{t_{n+1}} - N_{t_n}; X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots \sim N_{t_{n+1} - t_n}; X_1, X_2, \dots$$

in zato tudi

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, X_1, \dots, X_{k_n}$$

$$\sim \sum_{i=k_n+1}^{k_n+N_{t_{n+1}}-N_{t_n}} X_i = \sum_{i=1}^{N_{t_{n+1}}-t_n} X_i = S_{t_{n+1}-t_n}.$$

Potem pa je tudi

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, \sum_{i=1}^{k_1} X_i, \dots, \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i \sim S_{t_{n+1}-t_n},$$

ker na dogodku  $\{N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n\}$  velja

$$\sum_{i=1}^{k_1} X_i = S_{t_1}, \dots, \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i = S_{t_n} - S_{t_{n-1}},$$

je končno

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n, S_{t_1}, \dots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

oziroma

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid N_{t_1}, \dots, N_{t_n}, S_{t_1}, \dots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}$$

in po trditvi (5.9) velja

$$S_{t_{n+1}} - S_{t_n} \mid S_{t_1}, \dots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}} \sim S_{t_{n+1}-t_n}.$$

□

**Opomba 3.7.** Podobno kot v opombi 2.3 bomo od zdaj naprej za  $t \geq 0$  in  $k \in \mathbb{N}_0$  pogojno porazdelitev  $S_t \mid \{N_t = k\}$  označevali s

$$S_{t,0} = 0 \quad \text{in} \quad S_{t,k} = \sum_{i=1}^k X_i \quad \text{za } k \in \mathbb{N}.$$

**Trditev 3.8.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP in naj bosta  $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$  pričakovana vrednost in  $\sigma^2 = \text{Var}[X_i] < \infty$  varianca slučajnih spremenljivk  $X_i$ . Potem sta za  $t \geq 0$  pričakovana vrednost in varianca  $S_t$  enaki

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu\lambda t \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2).$$

*Dokaz.* Za  $t \geq 0$  in  $k \in \mathbb{N}_0$  velja

$$\mathbb{E}[S_t \mid N_t = k] = \mathbb{E}[S_{t,k}] = k\mu \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t \mid N_t = k] = \text{Var}[S_{t,k}] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja  $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$ . Torej

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu\lambda t.$$

Prek formule  $\text{Var}[S_t] = \mathbb{E}[\text{Var}[S_t \mid N_t]] + \text{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$  računamo

$$\mathbb{E}[\text{Var}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\text{Var}[X_i \mid N_t]] = \sigma^2\lambda t$$

in

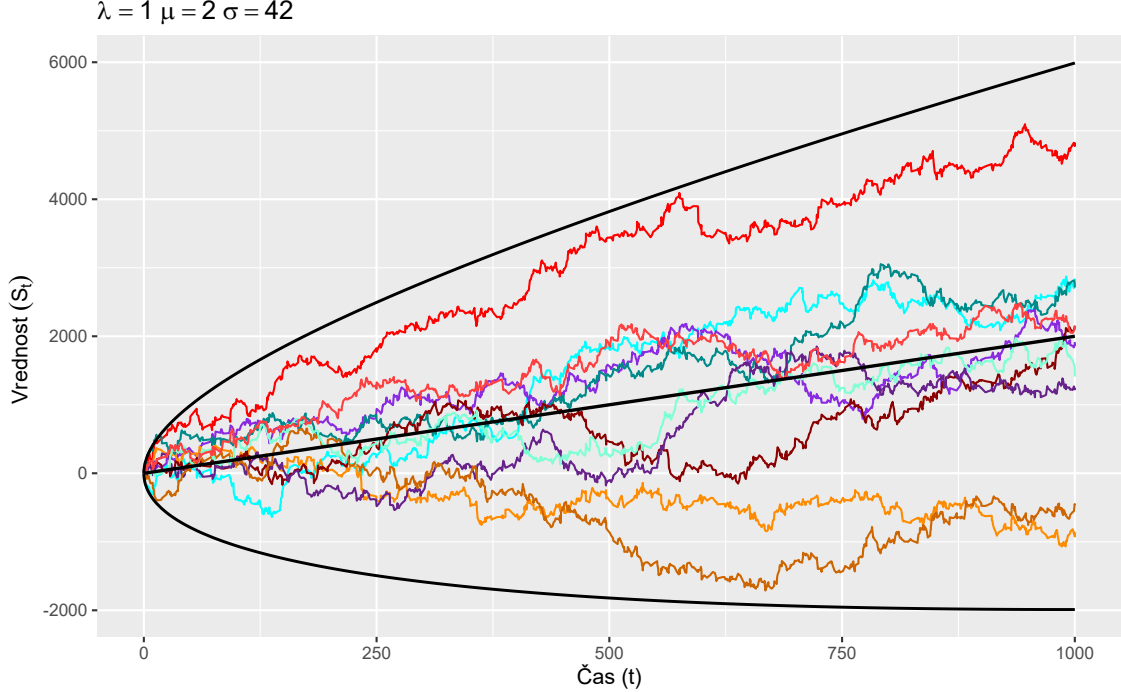
$$\text{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \text{Var}[\mathbb{E}[X_i \mid N_t]] = \mu^2\lambda t.$$

Če enačbi seštejemo, dobimo  $\text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2)$ .

□



**Zgled 3.9.** Poglejmo si primer ko je zaporedje  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  porazdeljeno kot  $X_1 \sim N(2, 42)$ . Tedaj za  $t \geq 0$  velja  $\mathbb{E}[S_t] = 2t$  in  $\text{Var}[S_t] = t(2^2 + 42^2) = 1768t$  ter  $\sigma_{S_t} = \sqrt{1768t}$ . Simuliramo 10 realizacij CPP do časa  $T = 1000$ , ki jih prikažemo na sliki 3 skupaj s funkcijami  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$  in  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$ .



SLIKA 3. Trajektorije CPP s funkcijami  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t]$  in  $t \mapsto \mathbb{E}[S_t] \pm 3\sigma_{S_t}$

◇

**3.2. Markiranje sestavljenega Poissonovega procesa.** V trditvi 2.9 smo pokazali, da ima vsota neodvisnih sestavljenih Poissonovih porazdelitev spet sestavljeno Poissonovo porazdelitev. Podobno lahko CPP razdelimo na več neodvisnih sestavljenih Poissonovih procesov, tako da ga markiramo glede na čas in vrednost posameznega prihoda.

**Izrek 3.10.** (o markiranju) Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP. Naj bo  $A_1, \dots, A_n$  disjunktna particija množice  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Potem so za fiksno  $t \geq 0$  slučajne spremenljivke

$$S_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(V_i, X_i), \quad j = 1, \dots, n \quad (7)$$

med seboj neodvisne. Še več, za vsak  $j = 1, \dots, n$  ima

$$S_t^{(j)} \sim \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i)$$

sestavljeno Poissonovo porazdelitev, kjer je  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih (med sabo,  $N_t$  in  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk kot  $U_1 \sim U([0, t])$ .

**Dokaz.** Za splošen HPP( $\lambda$ ) velja lastnost vrstnih statistik (5.21), torej

$$(V_1, \dots, V_k \mid N_t = k) \sim (U_{(1)}, \dots, U_{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tako lahko za  $j \in \{1, \dots, n\}$  vsoto (7), pogojno na dogodek  $\{N_t = k\}$ , zapišemo kot

$$S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\} \sim \sum_{i=1}^k X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i).$$

Vrstni red sumandov je nepomemben. Z upoštevanjem neodvisnosti in enake porazdeljenosti  $X_i$ , pogojno porazdelitev  $S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\}$  zapišemo kot

$$S_t^{(j)} \mid \{N_t = k\} \sim \sum_{i=1}^k X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i).$$

(Bolj natančen argument bralec lahko najde v [4] na strani 28.) Sedaj si pogledjmo skupno karakteristično funkcijo slučajnega vektorja  $(S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)})$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}}(u_1, \dots, u_n) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left[ iu_1 S_t^{(1)} + \dots + iu_n S_t^{(n)} \right] \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ iu_1 S_t^{(1)} + \dots + iu_n S_t^{(n)} \right] \mid N_t = k \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{j=1}^n iu_j \sum_{i=1}^k X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \right] \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n iu_j X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \right] \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^n iu_j X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \right] \right]. \end{aligned}$$

Opazimo, da imamo v eksponentu sestavljeno Poissonovo vsoto, za katero poznamo obliko karakteristične funkcije iz posledice 2.6. Za namene berljivosti označimo eksponent karakteristične funkcije kot

$$\begin{aligned} \varphi_{S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}}(u_1, \dots, u_n) &= e^{g(u_1, \dots, u_n)}, \\ g(u_1, \dots, u_n) &= \lambda t \underbrace{\left( \mathbb{E} \left[ \exp \left[ \sum_{j=1}^n iu_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1) \right] \right] - 1 \right)}_{(i)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ker so množice  $A_j$  disjunktne, lahko (i) izrazimo kot integral<sup>1</sup>, da dobimo

$$\begin{aligned} (i) &= \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}} e^{\sum_{j=1}^n iu_j x \mathbb{1}_{A_j}(u, x)} dF_{U_1}(u) dF_{X_1}(x) \\ &= \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}} \prod_{j=1}^n e^{iu_j x \mathbb{1}_{A_j}(u, x)} dF_{U_1}(u) dF_{X_1}(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}} e^{iu_j x \mathbb{1}_{A_j}(u, x)} dF_{U_1}(u) dF_{X_1}(x) \right) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> V delu integral s takšnim zapisom območja integracije označuje Lebesgueov integral po Lebesgueovi ali Lebesgue-Stieltjesovi meri porojeni z ustrezno porazdelitveno funkcijo.

$$- \int_{([0, \infty) \times \mathbb{R}) \setminus A_j} dF_{U_1}(u) dF_{X_1}(x).$$

Enačbo (8) tako poenostavimo

$$\begin{aligned} & \lambda t \left( \left( \sum_{j=1}^n (\mathbb{E} [\exp(iu_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1))]) - (1 - \mathbb{P}((U_1, X_1) \in A_j)) \right) - 1 \right) \\ &= \lambda t \sum_{j=1}^n (\mathbb{E} [\exp(iu_j X_1 \mathbb{1}_{A_j}(U_1, X_1))]) - 1 \end{aligned} \quad (9)$$

in vidimo, da je (9) ravno vsota eksponentov karakterističnih funkcij  $\varphi_{S_t^{(j)}}$ . Tako sledi, da so slučajne spremenljivke  $S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}$  neodvisne in po obliki karakteristične funkcije vidimo, da so res porazdeljene sestavljeno Poissonovo.  $\square$

Izrek o markiranju CPP ima vrsto uporabnih posledic. Direktno nam poda enostaven alternativen dokaz za neodvisnost prirastkov.

**Posledica 3.11.** *CPP ima neodvisne prirastke.*

*Dokaz.* Naj bo  $A_1, \dots, A_n$  disjunktna particija množice  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  za realna števila  $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_n < t < \infty$  definirana kot

$$A_1 = [0, t_1) \times \mathbb{R}, \quad A_j = [t_{j-1}, t_j) \times \mathbb{R}, \quad \text{za } j = 2, \dots, n \quad \text{in} \quad A_{n+1} = [t_n, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Potem so po izreku o markiranju slučajne spremenljivke  $S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}$  neodvisne in enako porazdeljene kot

$$S_t^{(j)} \sim \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_j}(U_i, X_i) \sim \sum_{i=N_{t_{j-1}}+1}^{N_{t_j}} X_i \sim S_{t_j} - S_{t_{j-1}} \quad \text{za } j = 1, \dots, n.$$

$\square$

**Posledica 3.12.** *Če v predpostavkah izreka o markiranju CPP sprostimo  $t \geq 0$ , so procesi  $(S_t^{(j)})_{t \geq 0}$  med seboj neodvisni in imajo neodvisne prirastke.*

*Dokaz.* Najprej fiksiramo  $j = 1, \dots, n$  in pokažemo, da ima  $(S_t^{(j)})_{t \geq 0}$  neodvisne prirastke, z enakim argumentom kot v prejšnji posledici. Za realna števila  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_\infty$  definiramo  $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k)$  in množice

$$A_k^* = A_j \cap (\Delta_k \times \mathbb{R}), \quad k = 1, \dots, m.$$

Po izreku o markiranju so slučajne spremenljivke

$$\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_k^*}(V_i, X_i) \sim \sum_{i=N_{t_{k-1}}+1}^{N_{t_k}} X_i \mathbb{1}_{A_j}(V_i, X_i) = S_{t_k}^{(j)} - S_{t_{k-1}}^{(j)}$$

med seboj neodvisne. Neodvisnost procesov  $(S_t^{(1)})_{t \geq 0}, \dots, (S_t^{(n)})_{t \geq 0}$  pokažemo po definiciji (5.8). Za  $j = 1, \dots, n$  in  $m_j \in \mathbb{N}$  naj bodo  $0 = t_0^{(j)} < t_1^{(j)} < \dots < t_{m_j}^{(j)} < \infty$  poljubni nabori realnih števil. Definiramo  $\Delta_k^{(j)} = [t_{k-1}^{(j)}, t_k^{(j)})$  in množice

$$A_k^{*(j)} = A_j \cap (\Delta_k^{(j)} \times \mathbb{R}), \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m_j,$$

ki so očitno disjunktna particija množice  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  za vsak  $j = 1, \dots, n$ . Naj bo  $t = \max_{j=1, \dots, n} t_{m_j}$ . Po izreku o markiranju so prirastki

$$\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathbb{1}_{A_k^{*(j)}}(U_i, X_i) \sim S_{t_k^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{k-1}^{(j)}}^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m_j$$

med seboj neodvisni. Podobno kot v trditvi 3.5 za  $j = 1, \dots, n$  lahko tvorimo borelovo funkcijo  $g_j : \mathbb{R}^{m_j+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_j+1}$ , da velja

$$g_j \left( S_{t_1^{(j)}}^{(j)} - S_{t_0^{(j)}}^{(j)}, \dots, S_{t_{m_j}^{(j)}}^{(j)} - S_{t_{m_j-1}^{(j)}}^{(j)} \right) = \left( S_{t_0^{(j)}}^{(j)}, \dots, S_{t_{m_j}^{(j)}}^{(j)} \right).$$

in ker so prirastki med seboj neodvisni smo tako po definiciji pokazali neodvisnost procesov  $(S_t^{(1)})_{t \geq 0}, \dots, (S_t^{(n)})_{t \geq 0}$ . □

**3.3. Neskončna deljivost.** Koncept neskončne deljivosti je temeljni pri študiranju slučajnih procesov, saj z neskončno deljivimi porazdelitvami karakteriziramo enega najsplošnejših razredov slučajnih procesov t.i. Lévyjevih procesov.

**Definicija 3.13.** Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka. Pravimo, da je  $X$  *neskončno deljiva*, če za vsak  $n \in \mathbb{N}$  obstajajo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke  $X_1, \dots, X_n$ , da velja

$$X \sim X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Ekvivalento lahko definiramo neskončno deljivost prek karakteristične funkcije. Pravimo, da je slučajna spremenljivka  $X$  neskončno deljiva, če je za vsak  $n \in \mathbb{N}$  funkcija  $(\varphi_X(u))^{\frac{1}{n}}$  karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke. Funkcijo  $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$  razumemo v kompleksnem smislu.

**Zgled 3.14.** Naj bo  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ . Potem je  $X$  neskončno deljiva. To neposredno sledi iz lastnosti, da za  $n \in \mathbb{N}$  velja  $X \sim Y_1 + \dots + Y_n$  kjer so  $Y_i \sim \text{Pois}(\frac{\lambda}{n})$  neodvisne enako porazdeljene. Alternativno neskončno deljivost pokažemo s karakteristično funkcijo. Za  $n \in \mathbb{N}$  in  $u \in \mathbb{R}$  velja  $\varphi_{Y_1+Y_2+\dots+Y_n}(u) = \varphi_{Y_1}(u)^n$ .

$$\varphi_{Y_1+Y_2+\dots+Y_n}(u) = (\varphi_{Y_1}(u))^n = \left( e^{\frac{\lambda}{n}(e^{iu}-1)} \right)^n = e^{\lambda(e^{iu}-1)} = \varphi_X(u).$$

◇

**Trditev 3.15.** Naj bo  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  slučajna spremenljivka, porazdeljena sestavljeno Poissonovo. Potem je  $S$  neskončno deljiva.

*Dokaz.* Za  $n \in \mathbb{N}$  definiramo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke  $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$  kot

$$S^{(j)} = \sum_{i=1}^M X_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

kjer je  $M \sim \text{Pois}(\frac{\lambda}{n})$ . Po trditvi 2.9 je  $S^{(1)} + \dots + S^{(n)} \sim S$ . Alternativno lahko neskončno deljivost pokažemo s karakteristično funkcijo. Vemo, da je karakteristična funkcija  $S$  za  $u \in \mathbb{R}$  enaka

$$\varphi_S(u) = \varphi_N(\varphi_{X_1}(u)) = e^{\lambda(\varphi_X(u)-1)}.$$

Potem za  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\varphi_S(u) = \left( e^{\frac{\lambda}{n}(\varphi_{X_1}(u)-1)} \right)^n$$

in vidimo, da je funkcija  $u \mapsto e^{\frac{\lambda}{n}(\varphi_{X_1}(u)-1)}$  karakteristična funkcija slučajne spremenljivke  $S^{(1)}$ .  $\square$

Enostavno smo pokazali, da sta Poissonova in sestavljena Poissonova porazdelitev neskončno deljivi. Naslednji rezultat je precej bolj zahteven in z njim nakažemo, zakaj je sestavljena Poissonova porazdelitev temeljna pri obravnavi neskončno deljivih porazdelitev.

**Trditev 3.16.** *Naj bo  $S$  slučajna spremenljivka, ki zavzame vrednosti v  $\mathbb{N}_0$  in je neskončno deljiva. Potem ima  $S$  sestavljeno Poissonovo porazdelitev.*

*Dokaz.* Označimo rodovno funkcijo  $S$  z

$$G_S(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S=k)}_{p_k} u^k.$$

Pokazali bomo, da je  $G_S(u)$  enaka rodovni funkciji neke slučajne spremenljivke, ki ima sestavljeno Poissonovo porazdelitev. Ker za nenegativne celoštevilске slučajne spremenljivke velja  $\mathbb{P}(S=k) = \frac{G_S^{(k)}(0)}{k!}$ , bo to pomenilo, da je  $S$  sestavljeno Poissonova, saj v tem primeru rodovna funkcija določa porazdelitev  $S$ . Ker je  $S$  neskončno deljiva potem je za vsak  $n \in \mathbb{N}$

$$G_{S_n}(u) := (G_S(u))^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S^{(n)}=k)}_{p_{k_n}} u^k$$

rodovna funkcija neke slučajne spremenljivke  $S^{(n)}$  in za vsak  $u \in \mathbb{R}$  velja enakost

$$G_{S^{(n)}}(u) = (G_{S^{(1)}}(u))^n \text{ oziroma } \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} p_{k_n} u^k \right)^n.$$

Če razširimo desno stran enačbe in predpostavimo  $p_0 = 0$ , dobimo, da mora biti  $p_{0_n} = 0$  in posledično tudi  $p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = 0$ . Ker to velja za poljuben  $n \in \mathbb{N}$  dobimo, da je  $G_S(u) = 0$ , kar pa je protislovje. Torej  $p_0 > 0$  in zagotovo  $G_S(u) > 0$  za  $u \in [0, 1]$ . Za  $u \in [0, 1]$  velja tudi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{G_S(u)}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} = 1$ . Velja  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .

$$\ln \left( \left( \frac{G_S(u)}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \ln \left( 1 + \left( \left( \frac{G_S(u)}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right) \approx \left( \frac{G_S(u)}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \text{ ko } n \rightarrow \infty.$$

Za  $u = 1$  dobimo

$$\ln \left( \left( \frac{1}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \approx \left( \frac{1}{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} - 1 \text{ ko } n \rightarrow \infty.$$

$\square$

Sedaj navedimo nekaj rezultatov, ki ilustrirajo pomembnost sestavljene Poissonove porazdelitve in sestavljenega Poissonovega procesa pri Dokazi presegajo obseg dela, in jih bralec lahko najde v knjigi [10]. Trditev 3.16 lahko posplošimo na poljubne slučajne spremenljivke, ki so neskončno deljive.

**Trditev 3.17.** *Naj ima slučajna spremenljivka  $S$  neskončno deljivo porazdelitev. Potem obstaja zaporedje slučajnih spremenljivk  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ki imajo sestavljeno Poissonovo porazdelitev in konvergirajo proti  $S$  v porazdelitvi (5.14).*

Vidimo, da je neskončna deljivost močno povezana s sestavljeno Poissonovo porazdelitvijo. Osrednja tema neskončne deljivosti pa je razred splošnih Lévijskih procesov.

**Definicija 3.18.** Slučajnemu procesu  $(X_t)_{t \geq 0}$  definiranim na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  pravimo *Lévijski proces*, če zadošča naslednjim pogojem:

- (1)  $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ .
- (2) Poti  $X$  so  $\mathbb{P}$ -skoraj gotovo zvezne z desne (z levimi limitami).
- (3)  $(X_t)_{t \geq 0}$  ima neodvisne in stacionarne prirastke.

Vidimo, da sestavljeni Poissonov proces zadošča vsem trem pogojem. Razred Lévijskih procesov je zelo širok. Izkaže se, da

#### 4. CRAMÉR–LUNDBERGOV MODEL

Razdelek je prirejen po [3], [4], [5] in [9].

V tem razdelku obravnavamo najbolj intenzivno raziskan model v teoriji propada, običajno imenovan Cramér–Lundbergov model. V svoji najosnovnejši obliki ga je v zgodnjih 1900. letih izpeljal švedski aktuar Filip Lundberg, da bi ocenil ranljivost zavarovalnice za propad. Čeprav je model v svoji ideji dokaj preprost, zajema bistvo povezave ravni rezerv zavarovalnice in njene izpostavljenosti tveganju, kar je razlog, zakaj je postal temeljni merilni model v teoriji propada. V preteklem stoletju je bilo razvitih veliko tehnik za analizo Cramér–Lundbergovega modela, ki so se večinoma osredotočale na kvantifikacijo verjetnosti propada zavarovalnice. V razdelku definiramo model in izpeljemo Lundbergovo neenakost ter asimptotično obnašanje verjetnosti propada v primeru, ko zavarovalniške zahteve modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami. V zgledih pokažemo, kako do rezultatov, ki nam jih zagotavlja teorija, pridemo v praksi z Monte Carlo simulacijami procesa tveganja.

##### 4.1. Proces tveganja in verjetnost propada.

**Definicija 4.1.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP, kjer so slučajne spremenljivke  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , ki jih seštevamo s.g. nenegativne. *Proces tveganja* v Cramér–Lundbergovem modelu definiramo kot družino slučajnih spremenljivk

$$U_t = u + p(t) - S_t, \quad t \geq 0,$$

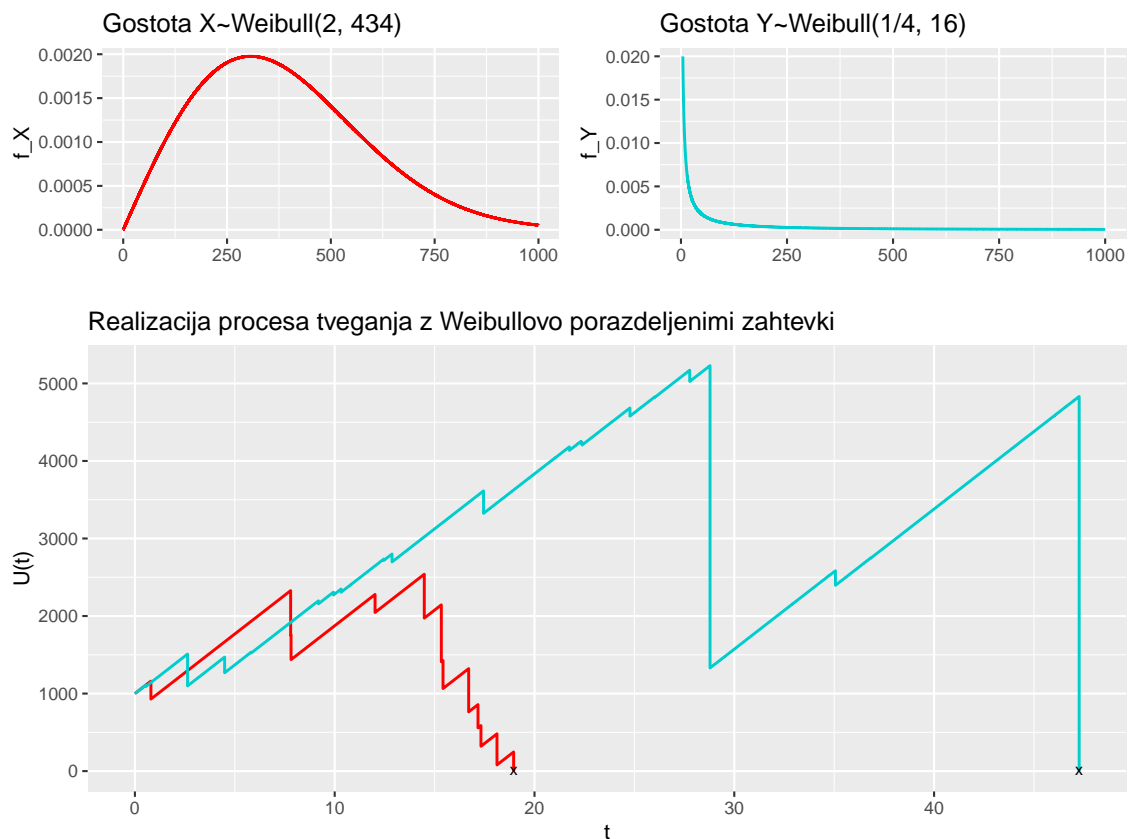
kjer je  $u \geq 0$  začetni kapital zavarovalnice<sup>2</sup> in  $p(t)$  funkcija prihodkov iz premij.

**Opomba 4.2.** V resnici lahko veliko lastnosti procesa tveganja izpeljemo brez predpostavke, da prihodi zahtevkov v  $(S_t)_{t \geq 0}$  sledijo homogenemu Poissonovemu procesu, ampak lahko privzamemo, da sledijo splošnemu prenovitvenemu procesu (5.24). Zato bomo pri dokazovanju nekaterih rezultatov medprihodne čase zahtevkov  $T_i$  obravnavali v splošnem, ne da bi predpostavili, da so eksponentno porazdeljeni.

Vrednost  $U_t$  predstavlja kapital zavarovalnice ob času  $t \geq 0$ . Standardno je vzeti deterministično funkcijo  $p(t) = ct$ , kjer je  $c > 0$  stopnja prihodkov premij. Uporaba linearne funkcije za modeliranje premijskega dohodka v Cramér–Lundbergovem modelu ponuja realističen približek zato, ker zavarovalnice pogosto doživljajo stabilno povečevanje premijskega dohodka skozi čas. Poleg tega je izbira linearne funkcije preprosta, zato bomo v nadaljevanju privzeli  $p(t) = ct$ . Poglejmo si realizaciji procesa tveganja, ko so zahtevki  $X_i$  porazdeljeni Weibullovo (5.10) z različnimi parametri.

**Zgled 4.3.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu z začetnim kapitalom  $u = 1000$  in  $p(t) = 200t$  ter intenzivnostjo prihodov zahtevkov  $\lambda = 1$ . Naj bodo v prvem primeru (rdeča) zahtevki porazdeljeni kot  $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$  in v drugem primeru (modra) kot  $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$ .

<sup>2</sup> Proces tveganja vedno gledamo v odvisnosti od začetnega kapitala  $u$ , zato za fiksni  $u \geq 0$  pripadajočo verjetnost označimo s  $\mathbb{P}_u$ .



SLIKA 4. Realizaciji procesa tveganja

Pri obeh realizacijah vidimo, da proces tveganja v nekem trenutku pade pod 0 (tam ga tudi ustavimo). Čeprav je pričakova vrednost  $\mathbb{E}[Y_i] = 384 \approx \mathbb{E}[X_i] = 217\sqrt{\pi} \approx 384,62$  opazimo bistveno razliko med realizacijama. V rdečem primeru proces pade pod 0 po več zaporednih manjših izgubah, v modrem primeru pa po eni zelo veliki izgubi. V nadaljevanju bomo primera ločili, ampak pred tem definirajmo osnovne pojme, ki jih bomo obravnavali v razdelku.

◇

**Definicija 4.4.** *Propad* definiramo kot dogodek, da proces tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  kadarkoli pade pod 0. Torej

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\}$$

in času ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\},$$

pravimo *čas propada*. Seveda med dogodkoma velja enakost

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} = \{T < \infty\}.$$

**Definicija 4.5.** *Verjetnost propada* definiramo kot funkcijo  $\psi(u) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  s predpisom

$$\psi(u) = \mathbb{P}_u(T < \infty).$$



**Definicija 4.6.** Po konstrukciji procesa tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  je verjetnost propada mogoča le ob prihodih zahtevkov. Z  $V_n$  označimo čas, ob katerem prispe  $n$ -ti zahtevek, in definiramo *ogrodje procesa tveganja* kot  $(U_{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Trditev 4.7.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu in  $(U_{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$  njegovo ogrodje ter  $T_n := V_n - V_{n-1}$  medprihodni čas  $n$ -tega zahtevka ( $V_0 = T_0 = 0$ ). Potem velja

$$\psi(u) = \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right),$$

kjer je  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  kumulativna izguba po  $n$  zahtevkih in  $Y_i = X_i - cT_i$  izguba  $i$ -tega prihoda.

*Dokaz.* S pomočjo ogrodja procesa tveganja lahko dogodek propada zapišemo kot

$$\begin{aligned} \{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} &= \left\{ \inf_{t \geq 0} U_t < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} U_{V_n} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \{u + p(V_n) - S_{V_n}\} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ u + cV_n - \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i}_{-Z_n} \right\} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \{-Z_n\} < -u \right\} \\ &= \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right\}, \end{aligned}$$

kar nam da željeno enakost. □

Tako verjetnost propada prevedemo na prehodno verjetnost diskretnega slučajnega sprehoda  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo asimptotično vedenje  $\psi(u)$ , ko gre  $u \rightarrow \infty$ . Cilj obravnavanja verjetnosti propada v Cramér–Lundbergovem modelu je, da se izognemo skoraj gotovemu propadu oziroma, da je verjetnost, da kumulativna izguba  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  preseže  $u$  tako majhna, da lahko v praksi dogodek propada izključimo.

**Trditev 4.8.** Naj bo  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje slučajnih spremenljivk, definirano kot  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke  $Y_i$  z  $\mathbb{E}[Y_i] < \infty$ . Če velja  $\mathbb{E}[Y_i] \geq 0$ , za vsak  $u > 0$  velja

$$\mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right) = 1.$$

*Dokaz.* Zaporedje slučajnih spremenljivk  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zadošča predpostavkam krepkega zakona velikih števil (5.15), torej velja

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} \mathbb{E}[Y_n].$$

Torej bo  $Z_n$  v primeru, ko je  $\mathbb{E}[Y_n] > 0$ , skoraj gotovo asimptotično linearno naraščal proti  $\infty$  kot  $\mathbb{E}[Y_n]n$  in bo za poljuben  $u > 0$  veljalo

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

Dokaz za primer, ko je  $\mathbb{E}[Y_n] = 0$  je precej bolj tehničen in ne preveč informativen, zato ga bomo izpustili. Izkaže se, da obstajata neki podzaporedji  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , za kateri gre  $Z_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{s.g.} \infty$  in  $Z_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty$ . Dokaz lahko bralec najde v [6] v poglavju 4.  $\square$

**Opomba 4.9.** Iz trditve 4.8 (ob predpostavkah  $\mathbb{E}[X_i] < \infty$  in  $\mathbb{E}[T_i] < \infty$ ) sledi, da moramo premijo (in s tem  $c$ ) izbrati tako, da bo  $\mathbb{E}[Y_i] < 0$ , saj bo tako  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty$  in je to edini primer, ko lahko upamo, da verjetnost propada ne bo enaka 1.

**Definicija 4.10.** Pravimo, da proces tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  v Cramér–Lundbergovem modelu zadošča *pogoju neto zaslužka* (ang. *net profit condition*), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]}, \quad \text{oziroma} \quad c = (1 + \rho) \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} \quad \text{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljevanju imenovali NPC.

Zahteva NPC za analizo poslovanja zavarovalnice je dokaj intuitivna, saj pove, da mora biti v nekem časovnem intervalu pričakovani dohodek iz premij večji od pričakovanega izplačila zahtevkov.

**Definicija 4.11.** Pravimo, da ima slučajna spremenljivka  $X$  *lahkorepo porazdelitev*, če za nek  $\varepsilon > 0$  velja

$$\mathbb{E}[e^{uX}] = M_X(u) < \infty \quad \text{za } u \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Sicer pravimo, da ima  $X$  *težkorepo porazdelitev*.

**Opomba 4.12.** V razdelku večinoma delamo z nenegativnimi slučajnimi spremenljivkami. Za te momentno-rodovna funkcija vedno obstaja vsaj na intervalu  $(-\infty, 0]$ .

**Zgled 4.13.** (Nadaljevanje zgleda 4.3) V zgledu 4.3 smo obravnavali proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, kjer so zahtevki (rdeča)  $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$  in (modra)  $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$ . Opazili smo, da je v prvem primeru propad posledica več manjših izgub, v drugem pa ene velike izgube. To je značilnost težkorepih porazdelitev. Za Weibullovo porazdelitev velja, da ima za parameter  $a \geq 1$  lahek, za  $a < 1$  pa težak rep.

*Dokaz.* Momentno-rodovna funkcija  $X \sim \text{Weibull}(a, b)$  je enaka

$$\begin{aligned} M_X(u) &= \int_0^\infty e^{ux} \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} dx \quad \left(y = \frac{x}{b}, \quad dy = \frac{dx}{b}\right) \\ &= a \int_0^\infty e^{uby} y^{a-1} e^{-y^a} dy. \end{aligned}$$

Vidimo, da na spodnji meji 0 ni težav za noben  $a > 0$ , medtem ko v neskončnosti za  $a \in (0, 1)$  integral divergira, saj se eksponent poenostavi v  $y^a(uby^{1-a} - 1) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$ . Če v nadaljevanju predpostavimo  $a \geq 1$  in uvedemo  $z = y^a$  ( $dz = ay^{a-1}dy$ ) pa lahko pridemo do naslednje oblike za momentno rodovno funkcijo  $X$ .

$$\begin{aligned}
M_X(u) &= \int_0^\infty e^{ubz^{\frac{1}{a}}} e^{-z} dz \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(ubz^{\frac{1}{a}})^k}{k!} e^{-z} dz && \text{Tonelli (5.20)} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \int_0^\infty z^{\frac{k}{a}} e^{-z} dz \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k}{a} + 1\right).
\end{aligned}$$

◇

**4.2. Lahkorepe porazdelitve.** Od sedaj naprej bomo predpostavili, da je  $(S_t)_{t \geq 0}$  v procesu tveganja  $(U_t)_{t \geq 0}$  CPP. Najprej se bomo omejili na primer, ko ima porazdelitev slučajnih spremenljivk  $X_i$ , ki jih seštevamo v CPP lahek rep, saj je bila osnovna teorija, ki sta jo razvila Cramér in Lundberg, izpeljana pod to predpostavko.

4.2.1. *Lundbergova neenakost.*

**Opomba 4.14.** V praksi z lahkorepnimi porazdelitvami modeliramo zahteve, kjer verjetnosti ekstremnih dogodkov (torej zelo velikih zahtevkov) eksponentno pada proti 0. To neposredno sledi iz definicije 4.11 in neenakosti Markova (5.13), saj za vsak  $x > 0$  in  $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  velja

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(e^{uX} > e^{ux}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{uX}]}{e^{ux}}.$$

**Definicija 4.15.** Naj velja, da ima slučajna spremenljivka  $Y_1 = X_1 - cT_1$  iz trditve 4.7 lahek rep. Če obstaja enoličen  $\ell > 0$ , za katerega velja

$$M_{Y_1}(\ell) = 1,$$

temu številu pravimo *Lundbergov koeficient*.

**Trditev 4.16.** Brž ko Lundbergov koeficient  $\ell$  (pod predpostavkami definicije 4.15 in pogoja NPC) obstaja, je enolično določen.

*Dokaz.* Zaradi konveksnosti eksponentne funkcije je množica  $I = \{u \in \mathbb{R} \mid M_{Y_1}(u) < \infty\}$  konveksna, torej je  $I$  interval, poltrak ali kar cela realna os. Po predpostavki obstaja pozitiven  $\ell \in I$  za katerega velja  $M_{Y_1}(\ell) = 1$ . Ker ima  $Y_1$  lahek rep, obstaja  $\varepsilon > 0$ , da je  $M_{Y_1}(u) < \infty$  za  $u \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I$ . Ker velja  $M_{Y_1}(0) = 1$  in  $M'_{Y_1}(0) = \mathbb{E}[Y_1] < 0$  (zaradi pogoja NPC) ter  $M''_{Y_1}(u) = \mathbb{E}[Y_1^2 e^{Y_1 u}] > 0$  ( $Y_1 \neq 0$  skoraj gotovo) za  $u > 0$ , je  $M_{Y_1}$  zvezna konveksna funkcija na  $I$ , kjer v okolici ničle pada. Tako je  $\ell$  zaradi konveksnosti  $M_{Y_1}$  enolično določen. □

**Izrek 4.17.** (Lundbergova neenakost) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in zanj obstaja Lundbergov koeficient  $\ell$ . Potem za vsak  $u > 0$  velja

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u}.$$

*Dokaz.* Neenakost bomo dokazali z indukcijo. Za  $u > 0$  in  $n \in \mathbb{N}$  definiramo

$$\psi_n(u) = \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u \right),$$

kjer je  $Z_k = \sum_{i=1}^k Y_i$  kumulativna izguba po  $k$  zahtevkih enako definirana kot v trditvi 4.7. Vidimo, da je (po zveznosti  $\mathbb{P}$  od spodaj)  $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$ , torej moramo pokazati, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $\psi_n(u) \leq e^{-\ell u}$ .

( $n = 1$ ) : Uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$\psi_1(u) = \mathbb{P} (e^{\ell Z_1} > e^{\ell u}) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = e^{-\ell u}.$$

( $n \rightarrow n + 1$ ) : S  $F_{Y_1}$  označimo porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke  $Y_1$ . Potem velja

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n+1} Z_k > u \right) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(Y_1 > u)}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{P} \left( \max_{2 \leq k \leq n+1} \{Y_1 + (Z_k - Y_1)\} > u, Y_1 \leq u \right)}_{(ii)} \end{aligned}$$

Najprej se posvetimo (ii). Po indukcijski predpostavki velja

$$\begin{aligned} (ii) &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} \{x + Z_k\} > u \right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u - x \right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \psi_n(u - x) dF_{Y_1}(x) \\ &\stackrel{\text{I.P.}}{\leq} \int_{(-\infty, u]} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x). \end{aligned}$$

Za oceno (i) kot v primeru  $n = 1$  uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$(i) = \psi_1(u) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = \int_{(u, \infty)} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).$$

Če torej seštejemo (i) in (ii) dobimo željeno oceno

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x) \\ &= e^{-\ell u} M_{Y_1}(\ell) \\ &= e^{-\ell u}. \end{aligned}$$

□

**Opomba 4.18.** Iz izreka 4.17 je razvidno, da lahko v praksi z dovolj visokim začetnim kapitalom  $u$  verjetnost propada zadovoljivo omejimo blizu 0. Seveda je meja

odvisna tudi od Lundbergovega koeficienta  $\ell$  in krepko temelji na predpostavki lah-korepih porazdelitev, ki pa v praksi pogosto niso izpolnjene.

**Zgled 4.19.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja, da so zahtevki neodvisno eksponentno porazdeljeni s parametrom  $\mu > 0$ . Vemo, da ima momentno rodovna funkcija  $X_1$  obliko

$$M_{X_1}(u) = \frac{\mu}{\mu - u} \quad \text{za } u < \mu.$$

Tako dobimo, da ima momentno rodovna funkcija  $Y_1 = X_1 - cT_1$  obliko

$$M_{Y_1}(u) = M_{X_1}(u)M_{T_1}(-cu) = \frac{\mu}{\mu - u} \frac{\lambda}{\lambda + cu} \quad \text{za } u \in (-\frac{\lambda}{c}, \mu).$$

Sedaj lahko izračunamo Lundbergov koeficient  $\ell$

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(\ell) &= 1, \\ \frac{\mu}{\mu - \ell} \frac{\lambda}{\lambda + c\ell} &= 1, \\ \mu\lambda &= (\mu - \ell)(\lambda + c\ell), \\ \mu\lambda &= \mu\lambda - \ell\lambda + \mu c - c\ell^2, \\ 0 &= \mu c - c\ell - \lambda. \end{aligned}$$

Dobimo

$$\ell = \mu - \frac{\lambda}{c}. \quad (10)$$

Velja  $\ell \in (0, \mu)$ , saj v našem modelu velja pogoj NPC,

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} = \frac{\lambda}{\mu} < c \iff \mu > \frac{\lambda}{c}.$$

Če uporabimo alternativno formulacijo NPC pogoja, dobimo

$$c = (1 + \rho) \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \ell = \mu - \frac{\lambda}{(1 + \rho) \frac{\lambda}{\mu}} = \mu \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right). \quad (11)$$

Tako dobimo zgornjo mejo za verjetnost propada

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u} = e^{-\mu u \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right)}$$

in vidimo, da povečanje stopnje prihodkov premij čez neko mejo ne bistveno vpliva na oceno, saj

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{-\mu u \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right)} = e^{-\mu u}.$$

V nadaljevanju bomo videli, da je Lundbergova neenakost v primeru eksponentno porazdeljenih zahtevkov skoraj točna vrednost verjetnosti propada, zgrešena le za konstanto. V splošnem pa je zelo težko določiti Lundbergov koeficient kot funkcijo parametrov porazdelitev  $X_1$  in  $T_1$  in zato uporabljamo numerične metode za njegovo aproksimacijo kot na primer Monte Carlo simulacije.  $\diamond$

4.2.2. *Asimptotika verjetnosti propada.* Sedaj se posvetimo vprašanju, kako se obnaša verjetnost propada v Cramér–Lundbergovem modelu, ko gre  $u \rightarrow \infty$ , in izpeljemo enega temeljnih rezultatov v teoriji tveganja.

**Definicija 4.20.** Za lažjo notacijo v nadaljevanju definiramo funkcijo *verjetnosti preživetja* kot  $\theta(u) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  s predpisom

$$\theta(u) = \mathbb{P}_u(T = \infty) = 1 - \psi(u).$$

**Lema 4.21.** (*Integralska enačba za verjetnost preživetja*) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC, ter naj velja  $\mathbb{E}[X_1] < \infty$  in, da imajo slučajne spremenljivke  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gostoto. Potem  $\theta$  zadošča naslednji enakosti

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1 + \rho)\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0, u]} (1 - F_{X_1}(x)) \theta(u - x) dx. \quad (12)$$

*Dokaz.* Po trditvi 4.7 velja

$$\psi(u) = \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right),$$

kjer je  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  in  $Y_i = X_i - cT_i$ . Torej je

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq u \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \{Z_n \leq u \text{ za } \forall n \in \mathbb{N}\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \{Y_1 \leq u\} \cap \{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \text{ za } \forall n \geq 2\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{Y_1 \leq u\}} \mathbb{P} \left( \{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \text{ za } \forall n \geq 2\} \mid Y_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je  $Y_1 = X_1 - cT_1$  in je torej dogodek  $\{Y_1 \leq u\}$  enak dogodku  $\{X_1 \leq u + cT_1\}$ . Poleg tega velja, da je  $(Z_n - Y_1 \mid Y_1)_{n \geq 2} \sim (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , saj so  $Y_i$  neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Upoštevamo še, da je  $T_1$  medprihodni čas v HPP( $\lambda$ ) in dobimo

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \int_{(0, \infty)} \int_{(0, u+ct]} \mathbb{P} \left( \{Z_n \leq u - (x - ct) \mid n \in \mathbb{N}\} \right) dF_{X_1}(x) dF_{T_1}(t) \\ &= \int_{(0, \infty)} \int_{(0, u+ct]} \theta(u - x + ct) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda t} dt. \end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko  $z = u + ct$  (torej  $t = \frac{z-u}{c}$  in  $dt = \frac{dz}{c}$ ) in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_{(u, \infty)} e^{-\frac{\lambda z}{c}} \underbrace{\int_{(0, z)} \theta(z - x) dF_{X_1}(x) dz}_{g(z)}.$$

Ker ima porazdelitev  $F_{X_1}$  gostoto in je  $\theta$  zvezna omejena funkcija, sledi, da je funkcija  $g$  zvezna in jo lahko (po osnovnem izreku analize) odvajamo, da dobimo

$$\theta'(u) = \frac{\lambda}{c}\theta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,u)} \theta(u-x) dF_{X_1}(x).$$

Če sedaj obe strani integriramo po  $u$ , dobimo

$$\int_{(0,t]} \theta'(u) du = \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(u) du - \overbrace{\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \int_{(0,u]} \theta(u-x) dF_{X_1}(x) du}^{(ii)} \quad (13)$$

Na integralu  $(i)$  uporabimo per partes ( $\alpha = \theta(u-x)$  in  $d\beta = dF_{X_1}(x)$ ) ter upoštevamo, da ima  $F_{X_1}$  gostoto.

$$\begin{aligned} (i) &= \left( \theta(u-x) F_{X_1}(x) \right) \Big|_0^u + \int_{(0,u)} \theta'(u-x) F_{X_1}(x) dx \\ &= \theta(0) F_{X_1}(u) - \int_{(0,u)} \theta'(u-x) F_{X_1}(x) dx. \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je  $F_{X_1}(0) = 0$ , saj je  $X_1 > 0$  skoraj gotovo. Vstavimo  $(i)$  v  $(ii)$  in dobimo

$$(ii) = -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0) F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \int_{(0,u]} \theta'(u-x) F_{X_1}(x) dx du.$$

Po Tonellijevem izreku (5.20) lahko zamenjamo vrstni red integracije.

$$\begin{aligned} (ii) &= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0) F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) \int_{[x,t]} \theta'(u-x) du dx \\ &= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0) F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) (\theta(t-x) - \theta(0)) dx. \\ &= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) \theta(t-x) dx. \end{aligned}$$

Vstavimo  $(ii)$  v enačbo (13) in dobimo

$$\begin{aligned} \theta(t) - \theta(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_{X_1}(x) \theta(t-x) dx, \\ \theta(t) &= \theta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} (1 - F_{X_1}(x)) \theta(t-x) dx. \end{aligned}$$

Če sedaj upoštevamo enakost

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1 + \rho} \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]}$$

in zamenjamo oznako spremenljivke  $t \mapsto u$ , dobimo zeleno enakost (12). □

**Opomba 4.22.** Enačbo (12) lahko zapišemo v obliki

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{1 + \rho} \int_{(0,u]} \theta(u-x) d\bar{F}_{X_1}(x), \quad (14)$$

kjer je  $\bar{F}_{X_1}$  porazdelitev integriranega repa (5.23) slučajne spremenljivke  $X_1$ .

**Opomba 4.23.** Konstanto  $\theta(0)$ , ki se pojavi v (12) in (14), lahko izračunamo. Ker  $c$  zadošča NPC, po argumentu v dokazu trditve 4.8 velja

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty.$$

Po zveznosti  $\mathbb{P}$  od spodaj sledi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq u \right) = \mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq \infty \right) = 1.$$

Če torej v enačbi (14) pošljemo  $u \rightarrow \infty$ , dobimo

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \theta(u) = 1 = \theta(0) + \frac{1}{1 + \rho} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} \mathbb{1}_{(0, u]}(x) \theta(u - x) d\bar{F}_{X_1}(x).$$

Po izreku o monotoni konvergenci (5.18) sledi

$$\begin{aligned} 1 &= \theta(0) + \frac{1}{1 + \rho} \int_{(0, \infty)} 1 d\bar{F}_{X_1}(x) \\ &= \theta(0) + \frac{1}{1 + \rho}. \end{aligned}$$

Torej je  $\theta(0) = \frac{\rho}{1 + \rho}$ . Enakost upoštevamo v enačbi (14) in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} + \frac{1}{1 + \rho} \int_{(0, u]} \theta(u - x) d\bar{F}_{X_1}(x). \quad (15)$$

**Izrek 4.24.** (*Asimptotika verjetnosti propada, lahkorepe porazdelitve*) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient  $\ell$ . Naj imajo slučajne spremenljivke  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gostoto. Potem obstaja konstanta  $C > 0$ , za katero velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{\ell u} \psi(u) = C.$$

*Dokaz.* Najprej preoblikujemo enačbo (15), tako da upoštevamo  $\theta = 1 - \psi$

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= \frac{\rho}{1 + \rho} + \frac{1}{1 + \rho} \int_{(0, u]} (1 - \psi(u - x)) d\bar{F}_{X_1}(x), \\ \psi(u) &= \frac{1}{1 + \rho} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + \frac{1}{1 + \rho} \int_{(0, u]} \psi(u - x) d\bar{F}_{X_1}(x). \end{aligned}$$

Za lažjo notacijo uvedemo oznako  $q = \frac{1}{1 + \rho}$  in dobimo

$$\psi(u) = q(1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + \int_{(0, u]} \psi(u - x) d(q\bar{F}_{X_1}(x)). \quad (16)$$

Vidimo, da ima enačba (16) obliko prenovitvene enačbe (5.25) z bistveno razliko, da  $q\bar{F}_{X_1}$  ni verjetnostna mera, saj velja  $\lim_{x \rightarrow \infty} q\bar{F}_{X_1}(x) = q < 1$ . Enačbi (16) pravimo



defektna prenovitvena enačba. Za  $x > 0$  definiramo funkcijo  $F_\ell$  kot Esscherjevo transformacijo funkcije  $q\bar{F}_{X_1}$ .

$$F_\ell(x) = \int_{(0,x]} e^{\ell y} d(q\bar{F}_{X_1}(y)) = \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,x]} e^{\ell y} (1 - F_{X_1}(y)) dy,$$

Pokažimo, da je  $F_\ell$  porazdelitvena funkcija. Očitno je naraščajoča in velja

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_\ell(x) &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,\infty)} e^{\ell y} (1 - F_{X_1}(y)) dy \quad (\alpha = 1 - F_{X_1}(y), \quad d\beta = e^{\ell y} dy) \\ &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \left( \left( \frac{(1 - F_{X_1}(y)) e^{\ell y}}{\ell} \right) \Big|_0^\infty + \frac{1}{\ell} \int_{(0,\infty)} e^{\ell y} f_{X_1}(y) dy \right) \\ &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \frac{1}{\ell} \left( \mathbb{E}[e^{\ell X_1}] - 1 \right). \end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je  $q = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{c\mathbb{E}[T_1]}$ , definicijo Lundbergovega koeficienta ter dejstvo, da je  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$  medprihodni čas v HPP( $\lambda$ ), da dobimo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_\ell(x) &= \frac{\mathbb{E}[e^{\ell X_1}] - 1}{c\ell \mathbb{E}[T_1]} \\ &= \frac{\frac{\lambda + c\ell}{\lambda} - 1}{c\ell \frac{1}{\lambda}} = 1. \end{aligned}$$

Če torej enačbo (16) pomnožimo z  $e^{\ell u}$ , dobimo

$$\begin{aligned} e^{\ell u} \psi(u) &= qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)} \psi(u-x) e^{\ell x} d(q\bar{F}_{X_1}(x)) \\ &= qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)} \psi(u-x) dF_\ell(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Vidimo, da sedaj enačba (17) ustreza obliki prenovitvene enačbe za par  $(qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)), F_\ell)$  in ker je funkcija  $u \mapsto qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  omejena na končnih intervalih in  $F_\ell$  nearitmetična, lahko uporabimo Smithov ključni prenovitveni izrek (5.28), da dobimo rešitev

$$e^{\ell u} \psi(u) = qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) + q \int_{(0,u]} e^{\ell(u-x)} (1 - \bar{F}_{X_1}(u-x)) dM^\ell(x), \quad (18)$$

kjer je  $M^\ell$  prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodnimi časi, ki imajo porazdelitveno funkcijo  $F_\ell$ . V splošnem  $M^\ell$  težko določimo. Če pa je  $u \mapsto qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  direktno Riemannovo integrabilna (5.26), nam Smithov izrek da asimptotično vedenje rešitve (18), ko gre  $u \rightarrow \infty$ . Direktno Riemannovo integrabilnost preverimo tako, da upoštevamo

$$\int_{(0,\infty)} x e^{\ell x} (1 - \bar{F}_{X_1}(x)) dx < \infty,$$

in funkcijo  $u \mapsto qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  zapišemo kot

$$qe^{\ell u} (1 - \bar{F}_{X_1}(u)) = q \int_{(u,\infty)} e^{\ell x} d\bar{F}_{X_1}(x) - q\ell \int_{(u,\infty)} (1 - \bar{F}_{X_1}(x)) e^{\ell x} dx$$

Tako vidimo, da je  $u \mapsto qe^{\ell u}(1 - \bar{F}_{X_1}(u))$  razlika dveh nenaraščajočih Riemannovo integrabilnih funkcij in je zato po kriteriju (5.27) direktno Riemannovo integrabilna. Dobimo

$$C = \lim_{u \rightarrow \infty} e^{\ell u} \psi(u) = \frac{q}{\alpha} \int_{(0, \infty)} e^{\ell x} (1 - \bar{F}_{X_1}(x)) dx, \quad (19)$$

kjer je  $\alpha = \int_{(0, \infty)} x dF_\ell(x)$ . S tem je izrek dokazan.  $\square$

**Opomba 4.25.** Izrek 4.24 nam pove, da v primeru zahtevkov z lahkorepimi porazdelitvami verjetnost propada asimptotično točno eksponentno pada proti 0, s tem ko začetni kapital  $u$  raste čez vse meje.

**Zgled 4.26.** (Nadaljevanje zgleda 4.19) Vemo, da rešitve prenovitvene enačbe (18) iz izreka 4.24 v splošnem ne moremo eksplicitno izračunati. V zgledu 4.19 pa smo privzeli, da zahtevke modeliramo z eksponentno porazdelitvijo, torej  $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ . V tem primeru se izkaže, da lahko eksplicitno izračunamo verjetnost propada. Če si pogledamo enačbo (18), vidimo, da moramo izračunati le porazdelitev integriranega repa  $\bar{F}_{X_1}(u)$  in prenovitveno mero Esscherjeve transformacije  $F_\ell$ . Za eksponentno porazdelitev velja

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_1}(u) &= \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0, u)} (1 - F_{X_1}(t)) dt \\ &= \mu \int_{(0, u)} e^{-\mu t} dt \\ &= F_{X_1}(u), \end{aligned}$$

saj je pozabljava. Prenovitveno mero Esscherjeve transformacije pa dobimo tako, da najprej izračunamo porazdelitveno funkcijo  $F_\ell$  podano v enačbi (14).

$$\begin{aligned} F_\ell(u) &= \frac{q}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0, u]} e^{\ell x} (1 - F_{X_1}(x)) dx \\ &= \frac{\mu}{1 + \rho} \int_{(0, u]} e^{-x(\mu - \ell)} dx. \end{aligned}$$

Upoštevamo rezultat (11), torej  $\ell = \mu \left( \frac{\rho}{1 - \rho} \right)$  in vidimo, da je  $F_\ell$  porazdelitvena funkcija eksponentne slučajne spremenljivke s parametrom  $\frac{\mu}{1 + \rho}$  oziroma  $\mu q$ . Torej je prenovitvena mera  $M^\ell(t)$  preprosto pričakovano število prihodov do časa  $t$  v HPP( $\mu q$ ), torej  $M^\ell(t) = \mu q t$ . Če vstavimo rezultata v enačbo (18), dobimo

$$\begin{aligned} e^{\ell u} \psi(u) &= qe^{\ell u} e^{-\mu u} + q \int_{(0, u]} e^{\ell(u-x)} e^{-\mu(u-x)} dM^\ell(x) \\ &= qe^{-u(\mu - \ell)} + \mu q^2 \int_{(0, u]} e^{-(\mu - \ell)(u-x)} dx \\ &= qe^{-u(\mu - \ell)} + \mu q^2 \frac{1}{\mu - \ell} \left( 1 - e^{-u(\mu - \ell)} \right) \\ &= qe^{-u(\mu - \ell)} + \frac{\mu}{(1 + \rho)^2} \frac{1 + \rho}{\mu} \left( 1 - e^{-u(\mu - \ell)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= qe^{-u(\mu-\ell)} + q\left(1 - e^{-u(\mu-\ell)}\right) \\
&= q = \frac{1}{1+\rho}.
\end{aligned}$$

Končno dobimo, da je verjetnost propada enaka

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\ell u}. \quad (20)$$

◇

Vidimo, da se  $\psi(u)$  z oceno, ki jo dobimo z Lundbergovo neenakostjo v zgledu 4.19, res razlikuje le za konstanto  $\frac{1}{1+\rho}$ . To je seveda zelo poseben primer, ko lahko vse količine izračunamo eksplicitno. Pokažimo, kako bi do približkov funkcije  $\psi(u)$  v praksi lahko prišli z Monte Carlo simulacijami.

**Zgled 4.27.** Kot v zgledu 4.19 predpostavimo, da so zahtevki porazdeljeni eksponentno, torej  $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ . Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov  $\lambda = 1$ , stopnja prihodkov premij  $c = 1500$  in pričakovana vrednost zahtevkov 1000 €, torej  $\mu = \frac{1}{1000}$ . Potem lahko verjetnost propada eksplicitno izračunamo po formuli (20). Prvo izračunamo  $\rho$  po formuli (11), in  $\ell$  po (10), torej

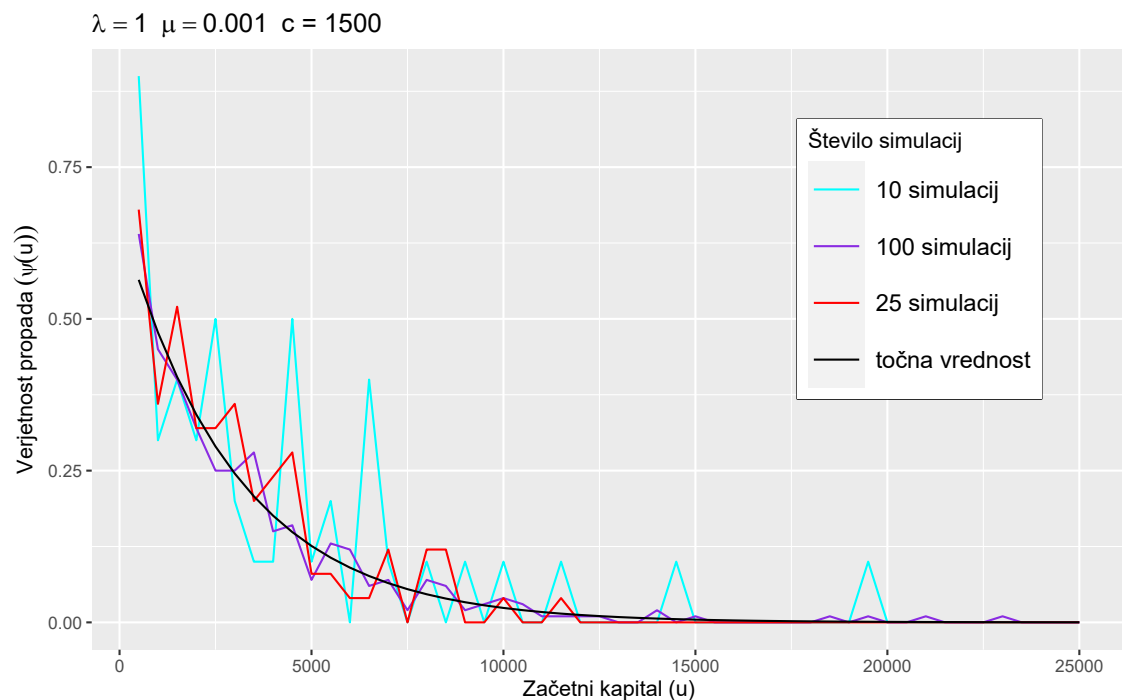
$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{c\mu}{\lambda} - 1 \\
&= \frac{1500 \cdot \frac{1}{1000}}{1} - 1 = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell &= \mu - \frac{\lambda}{c} \\
&= \frac{1}{1000} - \frac{1}{1500} = \frac{1}{3000}.
\end{aligned}$$

Vsatvimo vrednosti v (20) in dobimo

$$\psi(u) = \frac{2}{3} e^{-\frac{u}{3000}}.$$

Sedaj definiramo zaporedje  $(u_n)_{n=1}^{50}$  s predpisom  $u_n = 500n$  in za vsak  $n$  simuliramo 10, 50 in 100 realizacij procesa tveganja, bodisi do časa  $T = 1000$  bodisi dokler ne propade in za vsak  $n$  izračunamo približek za verjetnost propada kot delež propadlih realizacij z vsemi. Aproksimacijo  $\psi(u)$  prikažemo na sliki 5.



SLIKA 5. Aproximacija verjetnosti propada  $\psi(u)$  z Monte Carlo simulacijami.

Kot vidimo, se približki z naraščajocim številom simulacij približujejo funkciji  $\psi(u)$ , ampak, za res dobro aproksimacijo, bi morali to število krepko povečati, saj na primer za vrednost  $u = 16000$  pride  $\psi(16000) \approx 0,0032186334$ , kar je približno 0.3% in v praksi ni zanemarljivo, ampak v naši simulaciji nobena realizacija procesa tveganja ni padla pod 0.

◇

**4.3. Težkorepe porazdelitve.** Rezultati, ki smo jih izpeljali v prejšnjem razdelku, temeljijo na predpostavki zahtevkov z lahkorepimi porazdelitvami, kar interpretiramo, kot da je verjetnost zahtevkov, ki zelo odstopajo od povprečja, zelo majhna. V praksi pa se pogosto zgodi, da ta predpostavka ni izpolnjena in pojavi se vprašanje, ali lahko še vedno kaj povemo o asimptotiki verjetnosti propada. Izkaže se, da v primeru, ko je porazdelitev integriranega repa zahtevkov subekspONENTNA, ta točno določa asimptotično vedenje verjetnosti propada.

SubekspONENTNE porazdelitve so poseben razred težkorepih porazdelitev, ki ga lahko definiramo na več načinov. Za naše namene bo najbolj uporabna naslednja definicija iz [9].

**Definicija 4.28.** Verjetnostna porazdelitev na  $[0, \infty)$  je *subekspONENTNA*, če za vsak  $n \geq 2$  in neodvisne slučajne spremenljivke  $X_1, \dots, X_n$  s to porazdelitvijo velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = n.$$

**Opomba 4.29.** Ekvivalentna in bolj intuitivna definicija subekspONENTNE porazdelitve je, da velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} > x)} = 1 \quad \text{za vsak } n \geq 2,$$

kar pomeni, da je repna porazdelitev vsote  $n$ -tih slučajnih spremenljivk asimptotično primerljiva s porazdelitvijo največje. Dokaz ekvivalence lahko bralec najde v [9] na strani 437.

**Lema 4.30.** Naj bo  $F_{X_1}$  subekspONENTNA porazdelitvena funkcija nenegativne slučajne spremenljivke  $X_1$ . Potem za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja pozitivna konstanta  $K(\varepsilon) < \infty$ , da za vsak  $n \geq 2$  velja

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} \leq K(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n, \quad x \geq 0.$$

*Dokaz.* Fiksiramo  $n \geq 2$  in  $x \geq 0$ . Ulomek preoblikujemo

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} &= \frac{(1 - F_{X_1}^{*n}(x)) + F_{X_1}(x) - F_{X_1}(x)}{1 - F_{X_1}(x)} \\ &= 1 + \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*n}(x)}{1 - F_{X_1}(x)}. \end{aligned}$$

Naj bo  $a_n = \sup_{x \geq 0} \left\{ 1 + \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*n}(x)}{1 - F_{X_1}(x)} \right\}$ . Za konstanto  $M \in (0, \infty)$  lahko ocenimo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq 1 + \sup_{0 \leq x \leq M} \int_{(0, x]} \frac{1 - F_{X_1}^{*n}(x - y)}{1 - F_{X_1}(x)} dF_{X_1}(y) \\ &\quad + \sup_{x \geq M} \int_{(0, x]} \frac{1 - F_{X_1}^{*n}(x - y)}{1 - F_{X_1}(x - y)} \frac{1 - F_{X_1}(x - y)}{1 - F_{X_1}(x)} dF_{X_1}(y) \\ &\leq 1 + T + a_n \sup_{x \geq M} \frac{F_{X_1}(x) - F_{X_1}^{*2}(x)}{1 - F_{X_1}(x)}, \end{aligned}$$

kjer je  $T = (1 - F_{X_1})^{-1}(M) < \infty$ . Ker je  $F_{X_1}$  subekspONENTNA lahko za vsak  $\varepsilon > 0$  izberemo tak  $M$ , da velja

$$a_{n+1} \leq 1 + T + a_n(1 + \varepsilon)$$

in tako dobimo želeno oceno

$$a_n \leq \underbrace{(1 + T) \frac{1}{\varepsilon}}_{K(\varepsilon)} (1 + \varepsilon)^n.$$

□

**Izrek 4.31.** (*Asimptotika verjetnosti propada, težkorepe porazdelitve*) Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj bodo zahtevki  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  neodvisni in enako porazdeljeni z gostoto  $f_X$ , pričakovano vrednostjo  $\mathbb{E}[X] < \infty$  in naj bo  $\bar{F}_{X_1}$  subekspONENTNA. Potem za verjetnost propada  $\psi(u)$  velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)} = \frac{1}{\rho}. \quad (21)$$

*Dokaz.* Najprej pokažimo, da lahko verjetnost preživetja iz leme 4.21 predstavimo kot porazdelitveno funkcijo sestavljene geometrijske porazdelitve (5.11). Če definiramo  $G \sim \text{Geom}(\frac{\rho}{1+\rho})$  in zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk  $(\bar{X}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  s porazdelitveno funkcijo  $\bar{F}_{X_1}$ , bomo pokazali, da porazdelitvena funkcija  $F_C$  slučajne spremenljivke  $C = \sum_{i=1}^G \bar{X}_i$  zadošča enačbi

$$F_C(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,u]} F_C(u-x) d\bar{F}_{X_1}(x), \quad (22)$$

ki je natanko enačba (15) iz leme 4.21. Porazdelitvena funkcija  $F_C$  ima obliko

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C \leq u) &= \mathbb{P}(G = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(G = n) \mathbb{P}(\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n \leq u) \\ &= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^n} \mathbb{P}(\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n \leq u). \end{aligned} \quad (23)$$

Za preglednost ponovno uvedemo oznako  $q = \frac{1}{1+\rho}$  in  $p = \frac{\rho}{1+\rho}$  in enačbo (23) preoblikujemo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C \leq u) &= p + qp\bar{F}_{X_1}(u) + p \sum_{n=2}^{\infty} q^n \mathbb{P}(\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n \leq u) \\ &= p + qp\bar{F}_{X_1}(u) + qp \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1} \int_{(0,u]} \mathbb{P}(x + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n \leq u) d\bar{F}_{X_1}(x) \\ &= p + q \int_{(0,u]} p \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1} \mathbb{P}(\bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n \leq u-x) \right] d\bar{F}_{X_1}(x) \\ &= p + q \int_{(0,u]} \mathbb{P}(C \leq u-x) d\bar{F}_{X_1}(x). \end{aligned}$$

Vidimo, da  $F_C$  zadošča enačbi (15), torej je res  $F_C = \theta$ . Limito  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)}$  lahko tako zapišemo kot

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} p \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{\mathbb{P}(\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n > u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)}.$$

Če vzamemo  $\varepsilon < \frac{1}{q} - 1$ , lahko po lemi 4.30 zaporedje funkcij

$$f_k(n) = \frac{\mathbb{P}(\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n > u_k)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u_k)}, \quad n \geq 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

omejimo z integrabilno funkcijo  $K(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n$  za vsak  $n \geq 2$  (glede na mero, ki šteje). Limito  $u \rightarrow \infty$  po realnih številih nadomestimo z limito po zaporedjih pozitivnih števil  $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ . Tako lahko po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci (5.19) zamenjamo vrstni red limite in vsote. Ker je  $\bar{F}_{X_1}$  subeksponentna, za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n > u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)} = n.$$

Končno je

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)} = p \sum_{n=1}^{\infty} q^n n = \frac{1}{\rho}.$$

□

**Opomba 4.32.** Pokažemo lahko tudi, da je  $F_C$  edina porazdelitvena funkcija, ki zadošča (15) v razredu funkcij

$$\mathcal{F} = \{F \mid F : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \text{ omejena, nepadajoča, zvezna z desne} \\ \text{in za } x < 0 : F(x) = 0\}.$$

Trditev sledi direktno iz lastnosti Laplace-Stieltjesove transformacije, saj lahko vsak  $F \in \mathcal{F}$  zapišemo kot  $aF_X$  za primerno konstanto  $a \geq 0$  in porazdelitveno funkcijo neke nenegativne slučajne spremenljivke  $X$ . Bolj formalen dokaz lahko bralec najde v [4] na strani 173.

**Zgled 4.33.** Naj bo  $(U_t)_{t \geq 0}$  proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC. Naj nadalje velja, da so zahtevki neodvisni Weibullovo porazdeljeni s parametroma  $a = \frac{1}{4}$  in  $b = 16$ , torej  $X_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$ . Dokaz, da je  $\bar{F}_{X_1}$  subeksponentna porazdelitvena funkcija, lahko bralec najde v [9] na strani 444. Recimo, da je intenzivnost prihodov zahtevkov  $\lambda = 1$  in stopnja prihodkov premij  $c = 500$ . Podobno kot v zgledu 4.27 z Monte Carlo simulacijami pokažimo, da verjetnost propada res pada proti 0 z enakim redom konvergence kot rep  $\bar{F}_{X_1}$ , ko gre  $u \rightarrow \infty$ . Porazdelitev integriranega repa  $\bar{F}_{X_1}$  ima obliko

$$\bar{F}_{X_1}(u) = \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0,u]} e^{-(\frac{x}{16})^{1/4}} dx.$$

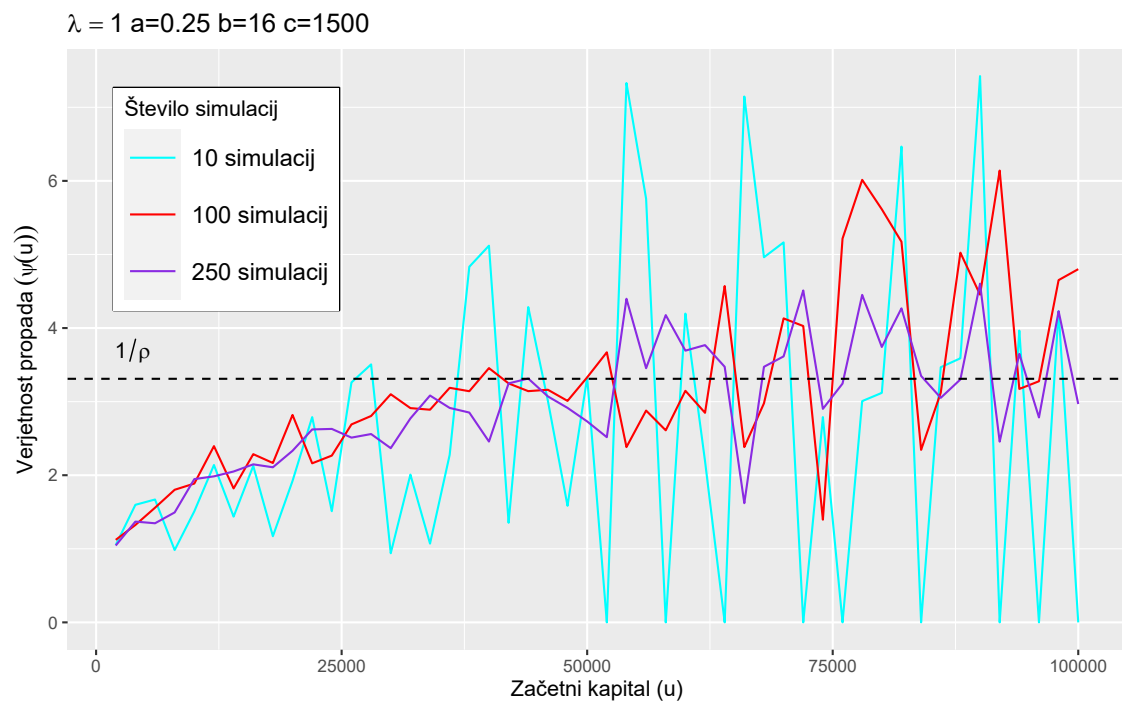
Iz zgleda 4.3 vemo, da je  $\mathbb{E}[X_1] = 384$ . Z uvedbo nove spremenljivke  $z = x^{1/4}$  ( $dz = \frac{1}{4x^{3/4}} dx$ ) z nekaj računanja dobimo

$$\bar{F}_{X_1}(u) = 1 - \frac{(u^{3/4} + 6\sqrt{u} + 24\sqrt[4]{u} + 48) e^{-\sqrt[4]{u}/2}}{48}$$

Izračunamo še

$$\rho = \frac{c\mathbb{E}[T_1]}{\mathbb{E}[X_1]} - 1 = \frac{500}{384} - 1 \approx 0.3020833.$$

Po izreku 4.31 razmerje  $\frac{\psi(u)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u)}$  konvergira proti  $\frac{1}{\rho} \approx 3.3103451$ . Zaporedje  $(u_n)_{n=1}^{50}$ , definirano kot  $u_n = 2000n$  za vsak  $n$ , podobno kot v zgledu 4.27 simuliramo 10, 100 in 250 realizacij procesa tveganja in za vsak  $n$  izračunamo približek za razmerje  $\frac{\psi(u_n)}{1 - \bar{F}_{X_1}(u_n)}$ . Rezultate prikažemo na sliki 6.



SLIKA 6. Aproximacija verjetnosti propada  $\psi(u)$  z Monte Carlo simulacijami (modra) in točna vrednost funkcije (rdeča).

Vidimo, da razmerje vizualno res konvergira proti  $\frac{1}{\rho}$ , ampak seveda bi za boljšo natančnost morali povečati začetni kapital  $u$  in število simulacij.  $\diamond$



## 5. PRILOGA

Dostavek je namenjen predvsem za dodatne definicije in trditve, ki so bile izpuščene v glavnem za namene preglednosti besedila. V primeru, da bralec potrebuje osvežiti določene pojme, jih večino lahko najde v tem razdelku.

**Definicija 5.1.** Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka. Potem so za  $u \in \mathbb{R}$  njena *rodovna funkcija*, *momentno rodovna funkcija* in *karakteristična funkcija* definirane kot

$$G_X(u) = \mathbb{E}[u^X], \quad M_X(u) = \mathbb{E}[e^{uX}], \quad \varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}],$$

če upanja obstajajo.

**Definicija 5.2.** Naj bosta  $F$  in  $G$  porazdelitveni funkciji dveh neodvisnih nenegativnih slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$ . *Konvolucijo* funkcij  $F$  in  $G$  definiramo kot Lebesgue-Stieltjesov integral

$$(F * G)(t) = \int_{[0,t]} F(t-x) dG(x) = \int_{[0,t]} G(t-x) dF(x).$$

Konvolucija  $(F * G)$  se ujema s porazdelitveno funkcijo vsote  $X + Y$ , kar lahko enostavno pokažemo z uporabo transformacijske formule. Za neodvisne in enako porazdeljene nenegativne slučajne spremenljivke  $X_1, X_2, \dots, X_n$  s porazdelitveno funkcijo  $F_{X_1}$  rekurzivno definiramo *k-to konvolucijo* kot

$$F_{X_1}^{*k}(t) = (F_{X_1} * \dots * F_{X_1})(t) = \int_{[0,t]} F_{X_1}^{*(k-1)}(t-x) dF_{X_1}(x),$$

ki se prav tako ujema s porazdelitveno funkcijo vsote  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

**Definicija 5.3.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  verjetnostni prostor in naj bo  $T \neq \emptyset$  neprazna indeksna množica ter  $(E, \Sigma)$  merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s  $T$ , je družina slučajnih elementov  $X_t : \Omega \rightarrow E$ , ki so  $(\mathcal{F}, \Sigma)$ -merljivi za vsak  $t \in T$ .

**Opomba 5.4.** V delu se bomo omejili na primer, ko  $T$  predstavlja čas, torej  $T = [0, \infty)$  in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej  $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , kjer  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  predstavlja Borelovo  $\sigma$ -algebro na  $\mathbb{R}$ .

**Definicija 5.5.** Za fiksni  $\omega \in \Omega$  je preslikava  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto X_t(\omega)$  *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora  $\Omega$  priredi slučajno funkcijo  $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicija 5.6.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces. Potem za  $s < t$  definiramo *prirastek procesa*  $X_t - X_s$  na intervalu  $[s, t]$ . Proces  $(X_t)_{t \geq 0}$  ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$  prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

**Definicija 5.7.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak  $s < t$  in vsak  $h > 0$  velja, da ima  $X_{t+h} - X_{s+h}$  enako porazdelitev kot  $X_t - X_s$ .

**Definicija 5.8.** Naj bosta  $(X_t)_{t \geq 0}$  in  $(Y_t)_{t \geq 0}$  slučajna procesa ne nujno definirana na istem verjetnostnem prostoru. Pravimo, da sta  $(X_t)_{t \geq 0}$  in  $(Y_t)_{t \geq 0}$  *neodvisna*, če sta za vsak par  $k, j \in \mathbb{N}$  in končen nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n_k} < \infty$  in  $0 \leq$

$t_1 < t_2 < \dots < t_{n_j} < \infty$  slučajna vektorja  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{n_k}})$  in  $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_{n_j}})$  neodvisna.

**Trditev 5.9.** Naj bodo  $X, Y$  in  $Z$  slučajne spremenljivke ter  $g$  in  $h$  poljubni borelovi funkciji. Če velja  $X | Z \sim Y$ , velja tudi  $X | Z \sim X | g(Z) \sim Y$ . Splošneje, če je  $X | Z \sim Y | h(g(Z))$ , je tudi  $X | Z \sim X | g(Z) \sim Y | h(g(Z))$ .

*Dokaz.*  $X | Z \sim Y$  pomeni, da ima  $X$  pogojno na  $\sigma(Z)$  vedno isto porazdelitev, potem pa mora biti to tudi brezpogojna porazdelitev, prav tako pa tudi pogojna porazdelitev glede na manjšo  $\sigma$ -algebro  $\sigma(g(Z))$ . Nadalje je  $X$  neodvisna od  $\sigma(Z)$ , potem pa mora biti neodvisna tudi od manjše  $\sigma$ -algebre  $\sigma(g(Z))$ . Pri splošnejši različici uporabimo enak argument za  $\sigma$ -algebro  $\sigma(h(g(Z)))$ . □

**Definicija 5.10.** Slučajna spremenljivka  $X$  ima *Weibullovo porazdelitev* s parametroma  $a, b > 0$ , če ima njena porazdelitvena funkcija obliko

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0$$

oziroma gostota obliko

$$f_X(x) = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0.$$

**Definicija 5.11.** Naj bo  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk in  $G \sim \text{Geom}(p)$  geometrijsko porazdeljena slučajna spremenljivka parametrom  $p \in (0, 1)$  in funkcijo verjetnosti  $P(G = k) = p(1 - p)^k$  za  $k \in \mathbb{N}_0$ . Naj bo  $G$  neodvisna od  $X_i$  za vsak  $i \in \mathbb{N}$ . Potem pravimo, da ima slučajna spremenljivka

$$C = \sum_{i=1}^G X_i$$

*sestavljeno geometrijsko porazdelitev.*

**Trditev 5.12.** Naj bo  $X$  nenegativna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , ki ima prvi moment. Potem velja

$$\mathbb{E}[X] = \int_{(0, \infty)} (1 - F_X(x)) dx.$$

*Dokaz.* Vsako število  $X \geq 0$  lahko zapišemo kot

$$X = \int_{(0, \infty)} \mathbb{1}_{\{x < X\}} dx = \int_{(0, \infty)} \mathbb{1}_{\{X < x\}} dx.$$

Če sedaj uporabimo Fubinijev izrek, dobimo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E} \left[ \int_{(0, \infty)} \mathbb{1}_{\{X < x\}} dx \right] \\ &= \int_{(0, \infty)} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{X < x\}}] dx \\ &= \int_{(0, \infty)} (1 - \mathbb{P}(X > x)) dx \end{aligned}$$

□

**Trditev 5.13.** (*Neenakost Markova*) Naj bo  $X$  nenegativna slučajna spremenljivka. Potem za  $x > 0$  velja

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{x}.$$

*Dokaz.* Naj bo  $x > 0$ . Velja

$$x \mathbb{1}_{\{X \geq x\}} \leq X \iff x \mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{E}[X].$$

□

**Definicija 5.14.** Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje slučajnih spremenljivk s porazdelitvenimi funkcijami  $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots$  in naj bo  $X$  slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo  $F_X$ . Pravimo da zaporedje  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira v porazdelitvi k slučajni spremenljivki  $X$ , če za vsak  $x \in \mathbb{R}$  v katerem je  $F_X$  zvezna, velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

**Izrek 5.15.** (*Krepki zakon velikih števil*) Naj bo  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  s pričakovano vrednostjo  $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$ . Potem velja

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} \mu.$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7].

□

**Izrek 5.16.** (*Izrek o enoličnosti*) Naj bosta  $X$  in  $Y$  slučajni spremenljivki, ne nujno definirani na istem verjetnostnem prostoru. Če za vsak  $u \in \mathbb{R}$  velja  $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$ , imata  $X$  in  $Y$  enako porazdelitev.

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7].

□

**Izrek 5.17.** (*Lévijev izrek o kontinuiteti*) Naj bo  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje slučajnih spremenljivk (ne nujno na istem verjetnostnem prostoru) in  $X$  še ena slučajna spremenljivka. Potem za vsak  $u \in \mathbb{R}$  velja

$$\varphi_{X_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_X(u)$$

natanko tedaj, ko velja

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X.$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7].

□

**Izrek 5.18.** (*Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci*) Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  in naj bo  $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  njihova limita. Naj za vsak  $\omega \in \Omega$  velja  $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \dots$ . Potem velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7].

□

**Izrek 5.19.** (*Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci*) Naj bo  $X_1, X_2, \dots$  zaporedje slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  in naj bo  $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  njihova limita. Naj bo  $Y$  slučajna spremenljivka definirana na istem verjetnostnem prostoru z  $\mathbb{E}[Y] < \infty$  in naj za vsak  $n \in \mathbb{N}$  in vsak  $\omega \in \Omega$  velja  $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$ . Potem je  $X$  integrabilna in velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. □

**Izrek 5.20.** (*Tonellijev izrek*) Naj bosta  $X$  in  $Y$  slučajni spremenljivki definirani vsaka na svojem verjetnostnem prostoru in naj imata vsaka svojo gostoto  $f_X$  in  $f_Y$  glede na Lebesgueovo mero. Potem velja

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) \mathcal{L}^2(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [7]. □

**Trditev 5.21.** (*Lastnost vrstilnih statistik*) Naj bo  $(N_t)_{t \geq 0}$  homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda > 0$ . Za  $k \in \mathbb{N}$  je pogojno na dogodek  $\{N_t = k\}$  vektor časov prihodov porazdeljen kot

$$(V_1, \dots, V_k) \mid \{N_t = k\} \sim (U_{(1)}, \dots, U_{(k)}),$$

kjer je  $(U_{(1)}, \dots, U_{(k)})$  vektor vrstilnih statistik vektorja  $(U_1, \dots, U_k)$  neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk  $U_i \sim U([0, t])$ .

*Dokaz.* Dokaz trditve lahko bralec najde v [4] na strani 24. □

**Definicija 5.22.** Naj bo  $X$  nenegativna slučajna spremenljivka in  $F_X$  njena porazdelitvena funkcija. Potem za  $u \in \mathbb{R}$  Laplace-Stieltjesovo transformacijo porazdelitve  $F_X$  definiramo kot

$$\hat{F}_X(u) = \int_{[0, \infty)} e^{-ux} dF_X(x).$$

**Definicija 5.23.** Naj bo  $F$  porazdelitvena funkcija neke nenegativne slučajne spremenljivke s prvim momentom. Porazdelitev integriranega repa te slučajne spremenljivke je porazdelitev s porazdelitveno funkcijo

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^x (1 - F(t)) dt.$$

**Definicija 5.24.** Prenovitveni proces na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  je slučajni proces, določen z zaporedjem neodvisnih enako porazdeljenih medprihodnih časov  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ki zavzamejo vrednosti v  $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ , in sicer je podan z zvezo

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}},$$

kjer je  $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$  čas  $n$ -tega prihoda. Pripadajočo prenovitveno mero prenovitvenega procesa definiramo kot  $M(t) = \mathbb{E}[N_t]$  za  $t > 0$ .

**Definicija 5.25.** *Prenovitvena enačba* je enačba oblike

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} f(t-s)dF(s), \quad t \geq 0,$$

kjer sta neznana funkcija  $f$  in znana funkcija  $g$  definirani na  $\mathbb{R}^+$ ,  $F$  pa je porazdelitvena funkcija neke pozitivne slučajne spremenljivke  $X$ . Prenovitveno enačbo predstavimo s parom  $(g, F)$ .

**Definicija 5.26.** Za nenegativno merljivo funkcijo  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  pravimo, da je *direktno Riemannovo integrabilna* (d.R.i.), če za vsak  $\delta > 0$  velja

$$\sum_{k \geq 0} \left( \sup_{t \in [k\delta, (k+1)\delta)} f(t) \right) < \infty \quad \text{in} \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \delta \sum_{k \geq 0} \left( \sup_{t \in [k\delta, (k+1)\delta)} f(t) \right) = \lim_{\delta \downarrow 0} \delta \sum_{k \geq 0} \left( \inf_{t \in [k\delta, (k+1)\delta)} f(t) \right) \quad (24)$$

Če  $f$  zadošča navedenima zahtevama, definiramo njen *direktni Riemannov integral*

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty f(t) dt$$

kot limito (24). Funkcija  $f$  poljubnega predznaka je d.R.i., če sta le-taki  $f^+ = \max\{f, 0\}$  in  $f^- = \max\{-f, 0\}$ , pri čemer je

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty f(t) dt = \text{d.R.i.} \int_0^\infty f^+(t) dt - \text{d.R.i.} \int_0^\infty f^-(t) dt.$$

**Trditev 5.27.** (*Kriterij za direktno Riemannovo integrabilnost*) Naj bo  $f \geq 0$  nenaraščajoča funkcija. Potem je  $f$  direktno Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je posplošeno Riemannovo integrabilna. Tedaj je njen direktni Riemannov integral enak posplošenemu.

*Dokaz.* Dokaz trditve lahko bralec najde v [8] na strani 235. □

**Izrek 5.28.** (*Smithov ključni prenovitveni izrek*) Če je funkcija  $g$  iz prenovitvene enačbe  $(g, F)$  (definicija 5.25) omejena na končnih intervalih ter  $X$  ima prvi moment in ni aritmetična ( $\nexists a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}a) = 1$ ), je

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} g(t-s)dM(s), \quad t \geq 0,$$

enolična rešitev te enačbe. Funkcija  $M$  je prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodno porazdelitvijo  $F$ . Če je dodatno funkcija  $g$  direktno Riemannovo integrabilna velja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{(0, \infty)} g(t) dt.$$

*Dokaz.* Dokaz izreka lahko bralec najde v [8] na strani 237. □

## SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

**trajektorija** sample path  
**sestavljani procesi** compound processes  
**sestavljani Poissonov proces** compound Poisson process  
**markiranje procesa** space-time decomposition of process  
**neskončna deljivost** infinite divisibility  
**proces tveganja** risk process  
**verjetnost propada** probability of ruin  
**ogrodje procesa tveganja** skeleton process  
**lahkorepa porazdelitev** light-tailed distribution  
**težkorepa porazdelitev** heavy-tailed distribution  
**subeksponentna porazdelitev** subexponential distribution  
**prenovitveni proces** renewal process  
**defektna prenovitvena enačba** defective renewal equation  
**prenovitvena mera** renewal function

## LITERATURA

- [1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
- [2] S.M. Ross, Stochastic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
- [3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).
- [4] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Second Edition, Springer, (2009).
- [5] M. Mandjes, O. Boxma, The Cramér–Lundberg model and its variants, Springer, (2023).
- [6] F. Spitzer, Principles of Random Walk. Second Edition, Springer, (1976).
- [7] B. Fristedt, L. Gray, A Modern Approach to Probability Theory, Springer, (1996).
- [8] S.I. Resnick, Adventures in Stochastic Processes, Birkhäuser, (1992).
- [9] R.J. Adler, R.E. Feldman, A practical guide to heavy tails: statistical techniques and applications, Birkhäuser, (1998).
- [10] K. Sato, Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, (1999).