UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

Kazalo

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Povzetek

Compound Poisson process and its application in finance

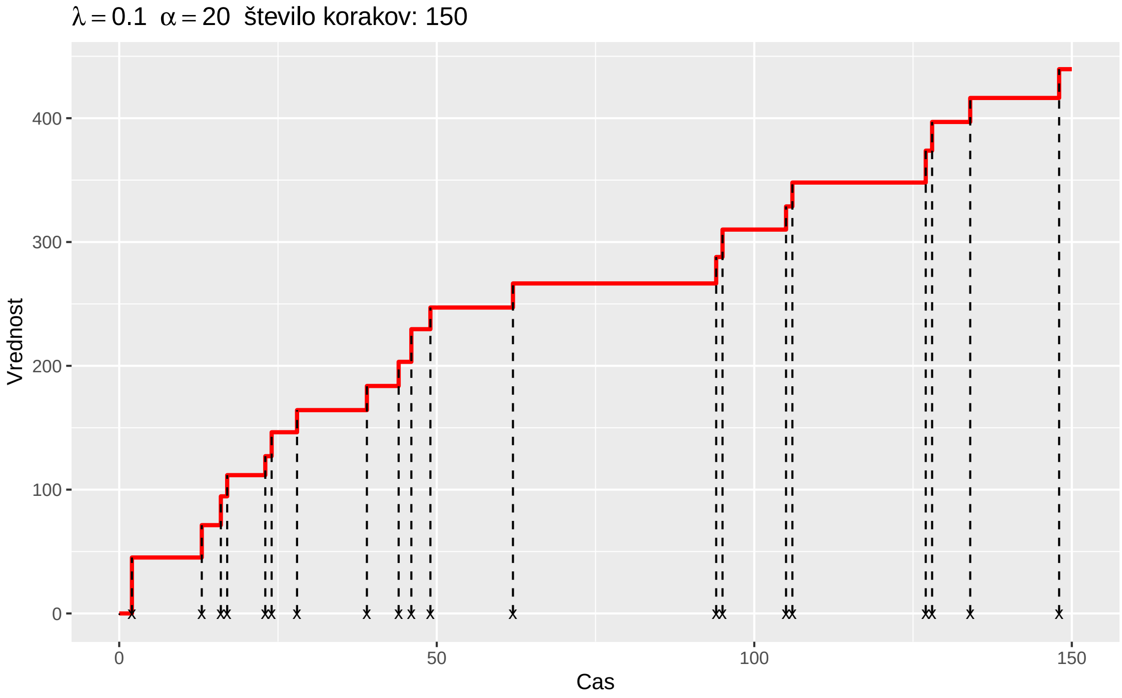
Abstract

Math. Subj. Class. (2020): 60G07 60G20 60G51

Ključne besede: slučajni procesi, sestavljeni Poissonov proces, Cramér–Lundbergov model

Keywords: stochastic processes, compound Poisson process, Cramér–Lundberg model

Uvodni tekst in motivacija za študiranje procesa, nakaži da boš obravnaval Cramer-Ludenbergov model



SLIKA 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa

Definicija 1.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (E, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T, je družina slučajnih elementov $X_t : \Omega \to E$, ki so $(\mathcal{F}, \Sigma)$-merljivi za vsak $t \in T$.

Opomba 1.2. V delu se bomo omejili na primer, ko T predstavlja čas, torej $T = [0, \infty)$ in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, kjer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ predstavlja Borelovo $\sigma-$algebro na $\mathbb{R}$.

Definicija 1.3. Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$. Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora Ω priredi slučajno funkcijo $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.4. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Trditev 1.5. *Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Potem ima $(X_t)_{t \geq 0}$ neodvisne prirastke natanko tedaj, ko je za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \infty$ prirastek $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od slučajnega vektorja $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$:

$(\Leftarrow)$: □

Definicija 1.6. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Definicija 1.7. Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t\geq 0}$, definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, pravimo *Poissonov proces* z intenzivnostjo λ, če zadošča naslednjim pogojem:

(1) $N_0 = 0$ $\mathbb{P}$-skoraj gotovo.
(2) $(N_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
(3) Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t-s))$,

Opomba 1.8. Vidimo, da v definiciji ne zahtevamo, da so skoki procesa le $+1$. To sledi iz...

2. Sestavljeni Poissonov proces

Povzetek poglavja/krajsi uvod

Definicija 2.1. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Naj bo $(X_i)_{i\geq 1}$ zaporedje neodvisnih (med sabo in $(N_t)_{t\geq 0}$) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Potem je *sestavljeni Poissonov proces* $(S_t)_{t\geq 0}$ definiran kot

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Opomba 2.2. Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$ za vsak i, dobimo ravno HPP. Bolj v splošnem, če za X_i postavimo $X_i = \alpha$, potem velja $S_t = \alpha N_t$.

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$ označevali s $HPP(\lambda)$ ali naborom slučajnih spremenljivk $(N_t)_{t\geq 0}$ (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s CPP ali naborom slučajnih spremenljivk $(S_t)_{t\geq 0}$ (angl. Compound Poisson Process), kjer bo vsota sledila $HPP(\lambda)$.

2.1. Osnovne lastnosti.

Trditev 2.3. *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Za nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ lahko slučajne spremeljivke $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti X_i od X_j za $i \neq j$ in N_t. Naj bo $h > 0$ in $s < t$. Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima $N_{t+h} - N_{s+h}$ členov. Ker za HPP velja $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$, je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

□

Trditev 2.4. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP in naj bosta $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$ pričakovana vrednost in $\sigma^2 = Var[X_i] < \infty$ varianca slučajnih spremenljivk X_i za vsak i. Potem sta za $t \geq 0$ pričakovana vrednost in varianca S_t enaki*

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu\lambda t \qquad \text{in} \qquad Var[S_t] = \lambda t \left(\sigma^2 + \mu^2\right).$$

Dokaz. Definiramo slučajno spremenljivko

$$Y_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \tag{1}$$

in vidimo, da je za $t \geq 0$ S_t pogojno na $N_t = k$ enako porazdeljena kot Y_k. Tako dobimo

$$\mathbb{E}[S_t \mid N_t = k] = \mathbb{E}[Y_k] = k\mu \qquad \text{in} \qquad \mathrm{Var}[S_t \mid N_t = k] = \mathrm{Var}[Y_k] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$. Torej

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu\lambda t.$$

Prek formule $\mathrm{Var}[S_t] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_t \mid N_t]] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$ računamo

$$\mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_i]\, N_t] = \sigma^2\lambda t$$

in

$$\mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}[X_i]\, N_t] = \mu^2\lambda t,$$

saj $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$. Skupaj dobimo $\mathrm{Var}[S_t] = \lambda t\,(\sigma^2 + \mu^2)$. □

2.2. **Rodovne funkcije.**

Trditev 2.5. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i, ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot X. Potem ima za $t \geq 0$ karakteristična funkcija φ_{S_t} obliko*

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)},$$

kjer φ_X označuje karakteristično funkcijo X.

Dokaz.

$$\varphi_{S_t}(u) = \mathbb{E}[\exp[iuS_t]] = \mathbb{E}\left[\exp\left[iu\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right]\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iu\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t = k\right]\right] \mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iu\sum_{i=1}^{k} X_i\right]\right] \mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{iuX}\right]^k}_{\varphi_X(u)^k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (2) \\
&= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_X(u)\lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)}
\end{aligned}
$$

□

Hitro lahko vidimo, da sta karakteristična in rodovna funkcija CPP enaki

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)} \qquad \text{in} \qquad G_{S_t}(u) = e^{\lambda t(G_X(u)-1)},$$

saj v splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke Y enaka njeni momentno rodovni funkciji izvrednoteni v iu, torej $\varphi_Y(u) = G_Y(iu)$. Rodovna pa izverdnotena v $\ln(u)$, torej $G_Y(u) = M_Y(\ln(u))$, če obstajata. V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo CPP, saj je ta vedno definirana za vsak $u \in \mathbb{R}$. Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med karakteristično funkcijo CPP in rodovno funkcijo $HPP(\lambda)$.

Trditev 2.6. *Naj bosta $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP in $(N_t)_{t\geq 0}$ $HPP(\lambda)$ neodvisna. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i, ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot X. Potem za fiksen $t \geq 0$ velja*

$$\varphi_{S_t}(u) = G_{N_t}\left(\varphi_X(u)\right).$$

Dokaz. Po enačbi (2) iz trditve 2.5 velja, da je $\varphi_{S_t}(u)$ enaka

$$
\begin{aligned}
\varphi_{S_t}(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_X(u)^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= G_{N_t}\left(\varphi_X(u)\right).
\end{aligned}
$$

□

2.3. **Porazdelitev CPP.** Sedaj se posvetimo vprašanju, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka S_t za $t \geq 0$? Iz definicije $HPP(\lambda)$ vemo, da je N_t za $t \geq 0$ porazdeljena kot Poissonova slučajna spremenljivka s parametrom λt. Fiksiramo $t \geq 0$ in dobimo

$$
\begin{aligned}
F_{S_t}(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_t \leq x \mid N_t = k)\mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{k} X_i \leq x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

kjer je $F_X^{*k}(x)$ porazdelitev k-te konvolucije slučajne spremenljivke X. Razen za posebne primere, je zgornji izraz za praktične namene ne-izračunljiv in nam ne pomaga veliko.

Zgled 2.7. Če pogledamo primer, ko so $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke, porazdeljene kot X

$$X \sim \text{Gamma}(a) \qquad\qquad f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}$$

s parametrom $a > 0$, lahko pridemo do razmeroma eksplicitne porazdelitve CPP. Gostota k-te konvolucije $X_1 + \cdots + X_k$ ima formulo

$$f_{X_1+\cdots+X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(na)} x^{na-1} e^{-x}.$$

Za $t \geq 0$ in $x \geq 0$ torej velja

$$\begin{aligned} F_{S_t}(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ... \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Trditev 2.8. *Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in $X_1, X_2, \ldots X_n$ neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od N) enako porazdeljene kot*

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots & \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} \ldots & \end{pmatrix},$$

za poljubne $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ za katere velja $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda$. Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

kjer so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne s.s. porazdeljene kot $Pois(\lambda_1), Pois(\lambda_2), \ldots$

Dokaz. S $\varphi_{Z_n}(u)$ označimo karakteristično funkcijo s.s. $Z_n := a_1Y_1 + a_2Y_2 + \cdots + a_nY_n$ in s $\varphi_Z(u)$ karakteristično funkcijo s.s. $Z := \sum_{j=1}^N X_j$. Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{Y_j}(a_j u) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \exp\left[\lambda_j \left(e^{a_j iu} - 1\right)\right] \\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(e^{a_j iu} - 1\right)\right]. \end{aligned}$$

Po trditvi 2.6 velja

$$\begin{aligned}\varphi_Z(u) &= G_N\left(\varphi_X(u)\right)\\ &= \exp\left[\lambda\left(\varphi_X(u)-1\right)\right]\\ &= \exp\left[\lambda\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j}{\lambda}e^{a_j iu}-1\right)\right]\\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\left(e^{a_j iu}-1\right)\right]\end{aligned}$$

Vidimo, da velja

$$\varphi_{Z_n}\xrightarrow{n\to\infty}\varphi_Z,$$

torej po Lévijevem izreku o kontinuiteti velja $Z_\infty := \lim_{n\to\infty} Z_n \sim Z$. □

Posledica 2.9. *Naj bo* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *poljubno zaporedje realnih števil in* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zaporedje pozitivnih realnih števil, za katere velja* $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\lambda$ *in*

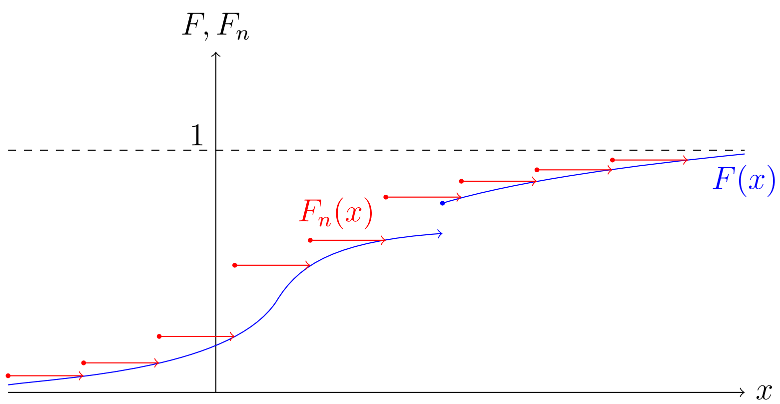
$$X\sim\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \dots\end{pmatrix}.$$

Potem velja

$$\sum_{j=1}^{n}a_jY_j\xrightarrow[n\to\infty]{d}\sum_{j=1}^{N}X_j,$$

Dokaz. Ker velja $\varphi_{Z_n}(u)\xrightarrow{n\to\infty}\varphi_Z(u)$ za vsak $u\in\mathbb{R}$, po Lévijevem izreku o zveznosti sledi, da $Z_n\xrightarrow[n\to\infty]{d}Z$. □

Kaj pa v primeru, ko so X_i zvezno porazdeljene? Tedaj se problema lotimo na sledeč način. Definiramo $F_n(x) := F(\frac{m}{n})$ kjer je $F(x)$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke Z_n in $m=\min\{k\in\mathbb{Z}\mid \frac{k}{n}>F_n(x)\}$.



Slika 2. Aproksimacija F s F_n

Kot je razvidno iz slike 2, je $F_n(x)$ stopničasta funkcija, ki aproksimira porazdelitveno funkcijo $F(x)$. Velja $F_n\xrightarrow{n\to\infty}F$ povsod kjer je F zvezna.

2.4. **CPP kot martingal.**

Definicija 2.10. Slučajni proces X_t prilagojen glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ martingal, če velja

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$$

za vsak $0 \leq s \leq t$.

Pokažimo, da v splošnem CPP ni martingal.

Trditev 2.11. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bodo X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ za vsak i. Potem je S_t martingal natanko tedaj, ko je $\mu = 0$.*

Dokaz. Naj bo $0 \leq s \leq t$. Potem velja

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s + S_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_t - S_s\right] + \mathbb{E}\left[S_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mu\lambda(t-s) + S_s
\end{aligned}$$

Enakost $\mu\lambda(t-s) + S_s = S_s$ velja $\iff \mu\lambda(t-s) = 0 \iff \mu = 0$. □

Opomba 2.12. Seveda, če velja $\mu \geq 0$, potem je S_t submartingal, če pa $\mu \leq 0$, je S_t supermartingal.

Trditev 2.13. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bodo X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ za vsak i, Potem je proces*

$$S_t - \mu\lambda t$$

martingal.

Dokaz. Naj bosta $0 \leq s < t$. Prirastek $S_t - S_s$ je neodvisen od $\mathcal{F}_s$ in ima pričakovano vrednost $\mu\lambda(t-s)$. Torej

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t - \mu\lambda t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s\right] + S_s - \mu\lambda t \\
&= \mu\lambda(t-s) + S_s - \mu\lambda t \\
&= S_s - \mu\lambda s.
\end{aligned}$$

□

3. Cramér-Lundbergov model

V tem razdelku obravnavamo najbolj intenzivno raziskan model v teoriji propada, običajno imenovan Cramér-Lundbergov model. V svoji najosnovnejši obliki ga je v zgodnjih 1900. letih izpeljal švedski aktuar Filip Lundberg, da bi ocenil ranljivost zavarovalnice za propad. Čeprav naj bi bil model obravnavan kot stiliziran opis resničnosti, lepo zajema bistvo dinamike ravni presežka zavarovalne družbe, kar pojasnjuje, zakaj je postal neizpodbiten merilni model v teoriji propada. V preteklem stoletju je bilo razvitih veliko tehnik za analizo Cramér-Lundbergovega modela, ki so se večinoma osredotočile na kvantifikacijo verjetnosti propada. Cilj razdelka je podati pregled glavnih rezultatov in osnovnih tehnik, ter jih ponazoriti na primerih, ko zavarovalniške zahtevke modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami.

3.1. **Proces tveganja in verjetnost propada.**

Definicija 3.1. Naj bo $(S_t)_{t \geq 0}$ CPP.*Proces tveganja* v Cramér-Lundbergovem modelu definiramo kot

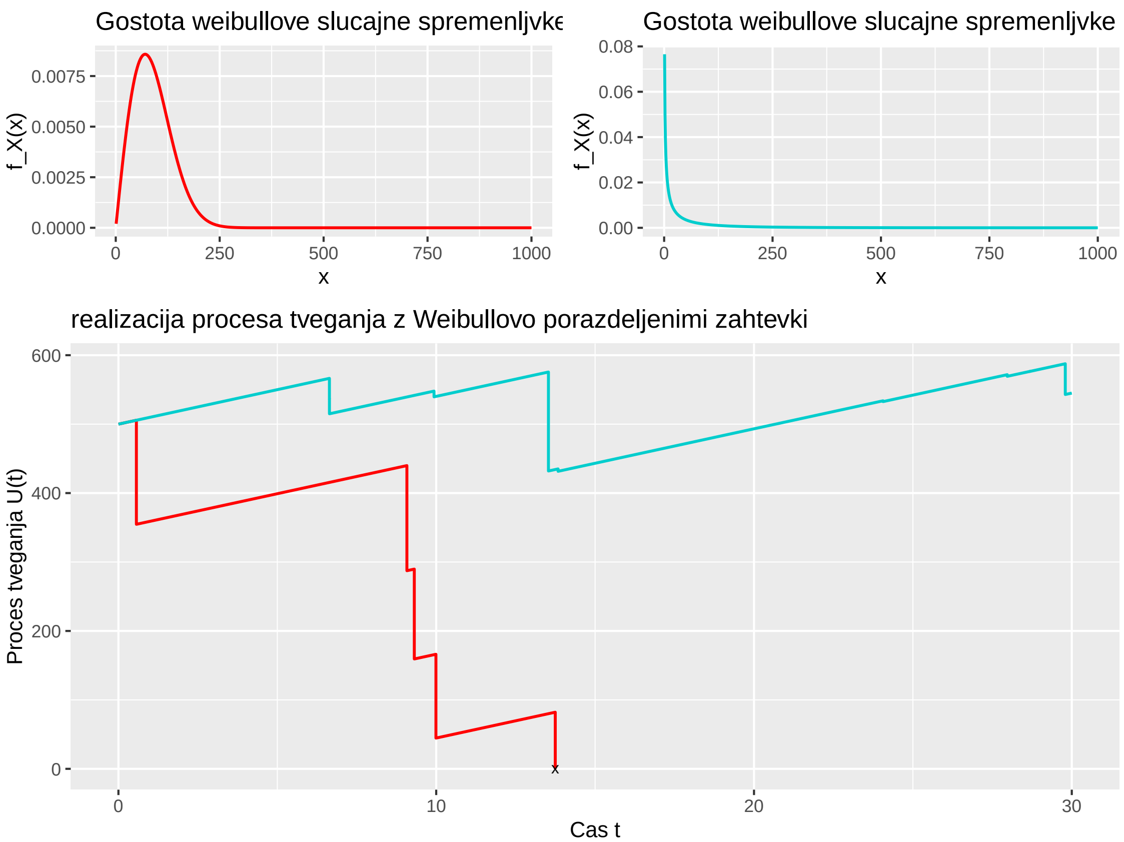
$$U_t = u + p(t) - S_t,$$

kjer je $u \geq 0$ začetni kapital zavarovalnice in $p(t)$ funkcija prihodkov iz premij.

Opomba 3.2. V resnici lahko veliko lastnosti procesa tveganja izpeljemo brez da predpostavimo, da prihodi zahtevkov v S_t sledijo Poissonovemu procesu, ampak splošnemu prenovitvenemu procesu in zato v nadaljevanju ne bomo uporabljali rezultatov CPP kjer to ne bo potrebno.

Vrednost U_t predstavlja kapital zavarovalnice ob času $t \geq 0$. Standardno je za $p(t)$ vzeti deterministično funkcijo $p(t) = ct$, kjer je c stopnja prihodkov premij. Uporaba linearne funkcije za modeliranje premijskega dohodka v Cramér-Lundbergovem modelu ponuja realističen približek, saj kljub morebitni netočnosti v resničnih podatkih dobro odraža splošni trend rasti. To je zato, ker zavarovalnice pogosto doživljajo stabilno povečevanje premijskega dohodka skozi čas. Poleg tega je izbira linearne funkcije preprosta, kar olajša analizo modela in izpeljavo ključnih rezultatov, zato bomo v nadaljevanju privzeli $p(t) = ct$.

Zgled 3.3. Poglejmo si primer, ko...



Slika 3. Realizaciji procesa tveganja

$\diamondsuit$

Definicija 3.4. *Propad* definiramo kot dogodek, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ kadarkoli pade pod 0. Torej

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\}$$

in času

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\},$$

pravimo *čas propada.* Seveda velja enakost med dogodkoma

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} = \{T < \infty\}.$$

Definicija 3.5. *Verjetnost propada* je definirana kot funckija $\psi(u) : (0, \infty) \to [0, 1]$ podana s predpisom

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty \mid U_0 = u).$$

Definicija 3.6. Po konstrukciji procesa tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ je verjentost propada mogoča le ob prihodih zahtevkov. S T_n označimo čas n-tega prihoda in definiramo *ogrodje procesa tveganja* kot $(U_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Trditev 3.7. *Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu in $(U_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ njegovo ogrodje ter $W_n := T_n - T_{n-1}$ medpirhodni čas n-tega zahtevka $(W_0 = T_0 = 0)$. Potem velja*

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ komulativna izguba po n prihodih in $Y_i = X_i - cW_i$ izguba i-tega prihoda.

Dokaz. S pomočjo ogrodja procesa tveganja lahko dogodek propada zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\left\{\inf_{t\geq 0} U_t < 0\right\} &= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} U_{T_n} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{u + p(T_n) - S_{T_n}\} < 0\right\} \\
&= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{u + \underbrace{cT_n - \sum_{i=1}^n X_i}_{-Z_n}\right\} < 0\right\}.
\end{aligned}$$

Potem lahko $\psi(u)$ zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \mathbb{P}\left(\inf_{n\in\mathbb{N}}\{-Z_n\} < -u\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right).
\end{aligned}$$

□

Tako verjetnost propada prevedemo na prehodno verjetnost diskretnega slučajnega sprehoda $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo asimptotično vedenje $\psi(u)$, ko gre $u \to \infty$. Cilj obravnavanja verjetnosti propada v Cramér-Lundbergovem modelu je, da se izognemo propadu z verjetnostjo 1 oziroma, da je verjetnost, da $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ preseže u tako majhna, da lahko v praksi dogodek propada izključimo.

Trditev 3.8. *Naj bo $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk definirano kot $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke Y_i z $\mathbb{E}[Y_i] = \mu < \infty$. Potem za vsak $u > 0$ velja*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1 \quad \text{za } u > 0,$$

če velja $\mathbb{E}[Y_i] \geq 0$.

Dokaz. Zaporedje slučajnih spremenljivk $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zadostuje krepkemu zakonu velikih števil 4.6, torej velja

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots Y_n}{n} = \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mathbb{E}[Y_n].$$

Torej bo Z_n v primeru ko je $\mu > 0$ skoraj gotovo asimptotično linearno naraščal proti ∞ kot μn in bo za poljuben $u > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

Dokaz za primer, ko je $\mu = 0$ je precej bolj tehničen in ne preveč informativen, zato ga bomo izpustili. Lahko ga najdemo v [Spitzer, 138]. □

Opomba 3.9. Iz trditve 3.8 (ob predpostavkah $\mathbb{E}[X_i] < \infty$ in $\mathbb{E}[W_i] < \infty$) sledi, da moramo premijo c izbrati tako, da bo $\mathbb{E}[Y_i] < 0$, saj je to edini način, ko lahko upamo, da verjetnost propada ne bo enaka 1.

Definicija 3.10. Pravimo, da proces tveganja $(U_t)_{t\geq 0}$ v Cramér-Lundbergovem modelu zadostuje *pogoju neto zaslužka* (ang. *net profit condition*), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]} \quad \text{oziroma} \quad c = (1+\rho)\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]} \quad \text{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljenvanju imenovali NPC.

Zahteva NPC za analizo poslovanja zavarovalnice je kar intuitivna, saj pove, da mora v neki čavni enoti biti pričakoan dohodek iz premij večji od pričakovanega izplačila zahtevkov.

3.2. **Lahkorepe porazdelitve.**

3.2.1. *Lundbergova neenakost.* Najprej se bomo omejili na primer, ko ima porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i, ki jih seštevamo v CPP lahek rep, saj je bila osnovna teorija, ki sta jo razvila Cramér in Lundberg, izpeljana pod to predpostavko.

Definicija 3.11. Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *lahkorepno porazdelitev*, če velja

$$\mathbb{E}\left[e^{uX}\right] = M_X(u) < \infty \quad \text{za } u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

za nek $\varepsilon > 0$.

Opomba 3.12. V praksi z lahkorepnimi porazdelitvami modeliramo zahtevke, kjer verjentosti ekstremnih dogodkov (torej zelo velikih zahtevkov) eksponentno pada proti 0. To direktno sledi iz definicije 3.11 in neenakosti Markova, saj za vsak $x > 0$ in $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ velja

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}\left(e^{uX} > e^{ux}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{uX}\right]}{e^{ux}}.$$

Definicija 3.13. Naj velja, da ima slučajna spremenljivka Y_1 lahek rep. Če obstaja pozitivna enolična rešitev enačbe

$$M_{1Y_1}(\ell) = 1,$$

pravimo ℓ *Lundbergov koeficient.*

Trditev 3.14. *mogoče dokazi da je ℓ res enolična rešitev.*

Izrek 3.15. *(Lundbergova neenakost) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj zanj obstaja Lundebrgov koeficient ℓ. Potem za vsak $u > 0$ velja*

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u}.$$

Dokaz. Neenakost bomo dokazali z indukcijo. Za $u > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\psi_n(u) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Z_k > u\right)$$

in vidimo, da je (po zveznosti $\mathbb{P}$ od spodaj) $\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u)$, torej moramo pokazati, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\psi_n(u) \leq e^{-\ell u}$.
(n = 1): Kot v opombi 3.12 uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$\psi_1(u) = \mathbb{P}\left(e^{\ell Z_1} > e^{\ell u}\right) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = e^{-\ell u}.$$

(n $\to$ n+1): Označimo s F_{Y_1} porazdeliltev Y_1. Potem velja

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n+1} Z_k > u\right)\\ &= \underbrace{\mathbb{P}(Y_1 > u)}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{P}\left(\max_{2\leq k\leq n+1}\left\{Y_1 + (Z_k - Y_1)\right\} > u, Y_1 \leq u\right)}_{(ii)}\end{aligned}$$

Najprej se posvetimo (ii). Po indukcijski predpostavki velja

$$\begin{aligned}(ii) &= \int_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left\{x + Z_k\right\} > u\right) dF_{Y_1}(x)\\ &= \int_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Z_k > u - x\right) dF_{Y_1}(x)\\ &\overset{\text{I.P.}}{=} \int_{(-\infty,u]} \psi_n(u-x) dF_{Y_1}(x)\\ &\leq \int_{(-\infty,u]} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).\end{aligned}$$

Za oceno (i) kot v primeru $n = 1$ uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$(i) = \psi_1(u) = \int_{(u,\infty)} dF_{Y_1}(x) \leq \int_{(u,\infty)} e^{\ell(x-u)} dF_{Y_1}(x).$$

Če torej seštejemo (i) in (ii) dobimo naslednjo oceno

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{\ell(x-u)} dF_{Y_1}(x) \\ &= e^{-\ell u} M_{Y_1}(\ell) \\ &= e^{-\ell u}.\end{aligned}$$

□

Opomba 3.16. Iz izreka 3.15 je razvidno, da z dovolj visokim začetnim kapitalom u verjetnost propada lahko v praksi zadovoljivo omejimo blizu 0. Seveda je meja odvisna tudi od Lundbergovega koeficienta ℓ in krepko temelji na predpostavki lahkorepnih porazdelitev, ki pa v praksi pogosto niso izpolnjene.

3.2.2. *Cramérjeva meja za propad.* Z lundbergovo neenakostjo smo sedaj dobili orodje, s katerim lahko na enostaven način navzgor ocenimo verjentost propada. Sedaj se bomo posvetili…

Lema 3.17. *Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj velja $\mathbb{E}[X] < \infty$ ter, da je F_X absolutno zvezna glede na neko mero ν. Potem $\delta(u)$ zadošca nasljednji enakosti*

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{1}{(1+\rho)\mathbb{E}[X]} \int_{(0,u]} \Big((1 - F_X(x))\delta(u - x) \Big) dx.$$

Izrek 3.18. *(Cramérjeva meja za propad) Naj bo $(U_t)_{t\geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient ℓ. Naj bo F_X porazdelitev slučajnih spremenjlvk X_i, ki je absolutno zvezna glede na neko mero ν.Potem obstaja konstanta $C > 0$ da velja*

$$\lim_{u\to\infty} e^{\ell u} \psi(u) = C.$$

3.2.3. *Simulacija modeliranja z eksponentno porazdelitvijo.*

3.3. **Težkorepe porazdelitve.**

3.3.1. *Simulacija modeliranja s Pareto porazdelitvijo.*

4. Dostavek

Dostavek je namenjen predvsem za dodatne definicije in trditve, ki so bile izpušcene v glavnem za namene preglednosti besdila. V primeru, če bralec potrebuje osvežiti določene pojme jih večino lahko najde v tem razdelku.

Definicija 4.1. Naj bo X slučajna spremenljivka. Potem so njena *rodovna funkcija*, *momentno rodovna funkcija* in *karakteristična funkcija* definirane kot

$$G_X(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right], \quad M_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX}\right], \quad \varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX}\right],$$

če upanja obstajajo.

Izrek 4.2. *(Lévijev izrek o kontinuiteti) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk (ne nujno na istem verjetnostnem prostoru) in X še ena slučajna spremenljivka. Potem velja*

$$\varphi_{X_n}(u) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_X(u) \quad \textit{za vsak } u \in \mathbb{R}$$

natanko tedaj, ko velja

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X.$$

Dokaz. Dokaz izreka je precej tehničen in ga bomo izpustili. Podroben dokaz lahko bralec najde v [Fristedt, B.E., Gray L.F. (1996) A modern approach to probability theory]. □

Izrek 4.3. *(O enoličnosti) One to one correspondence betwwen characteristic functions and distributions.*

Definicija 4.4. Naj bo X slučajna spremenljivka in F_X njena porazdelitev. Potem za $u \in \mathbb{R}$ *Laplace-Stiltjesovo transformacijo* porazdelitve F_X definiramo kot

$$\hat{F}_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ux} dF_X(x).$$

Izrek 4.5. *(Tonellijev izrek (Prirejen)) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki definirani vsaka na svojem verjentnostnem prostoru in naj imata vsaka svojo gostoto f_X in f_Y glede na Lebesgueovo mero. Potem velja*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\mathcal{L}^2(dx,dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy\right) dx,$$

Izrek 4.6. *(Krepki zakon velikih števi) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk s pričakovano vrendostjo $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$. Potem velja*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mu.$$

Definicija 4.7. Slučajna spremenljivka X ima *Weibullovo porazdelitev* s parametri $a, b > 0$, če ima njena porazdelitev obliko

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0$$

in gostota obliko

$$f_X(x) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0.$$

Slovar strokovnih izrazov

trajektorija sample path

Literatura

[1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
[2] S.M. Ross, Stochatic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
[3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).
[4] T.Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Springer, Second Edition, (2009).