

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

KAZALO

1. Uvod	5
2. Sestavljena Poissonova porazdelitev	6
3. Sestavljeni Poissonov proces	8
3.1. Osnovne lastnosti	8
3.2. Rodovne funkcije	9
3.3. Porazdelitev CPP	10
3.4. Neskončna deljivost	11
4. Cramér-Lundbergov model	13
4.1. Proces tveganja in verjetnost propada	13
4.2. Lahkorepe porazdelitve	17
4.3. Težkorepe porazdelitve	24
5. Priloga	25
Slovar strokovnih izrazov	27
Literatura	27

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

POVZETEK

Compound Poisson process and its application in finance

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2020): 60G07 60G20 60G51

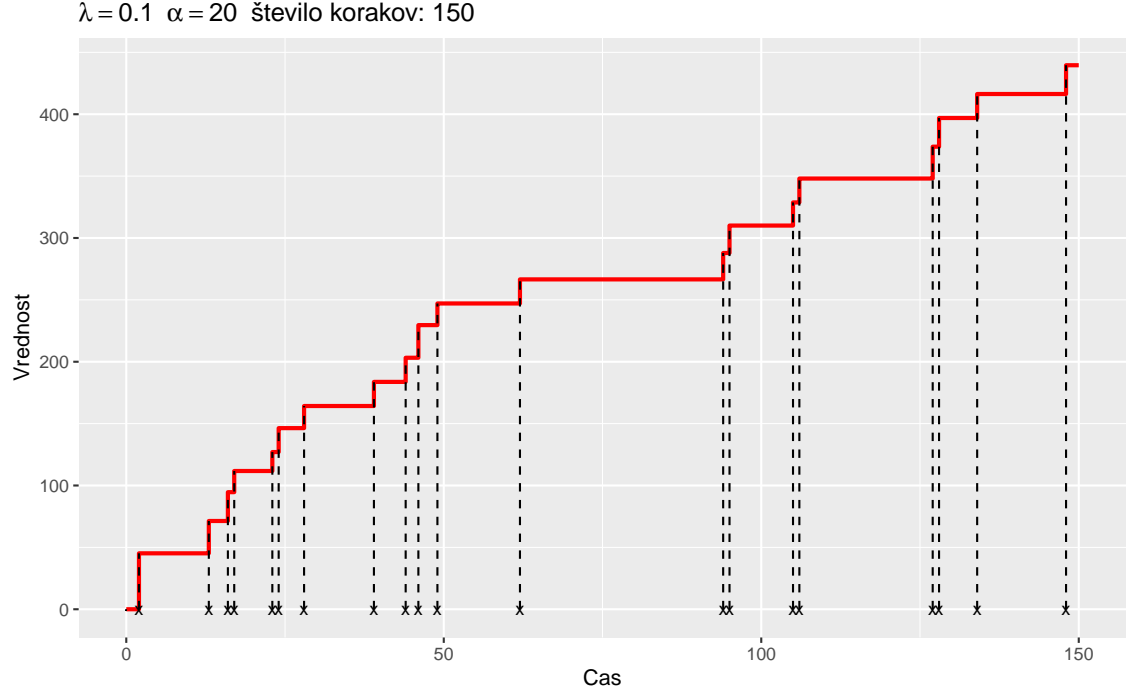
Ključne besede: slučajni procesi, sestavljeni Poissonov proces, Cramér–Lundbergov model

Keywords: stochastic processes, compound Poisson process, Cramér–Lundberg model

ZAHVALA

1. UVOD

Uvodni tekst in motivacija za študiranje procesa, nakaži da boš obravnaval Cramer-Ludenbergov model



SLIKA 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa

Definicija 1.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (E, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T , je družina slučajnih elementov $X_t : \Omega \rightarrow E$, ki so (\mathcal{F}, Σ) -merljivi za vsak $t \in T$.

Opomba 1.2. V delu se bomo omejili na primer, ko T predstavlja čas, torej $T = [0, \infty)$ in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, kjer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ predstavlja Borelovo σ -algebro na \mathbb{R} .

Definicija 1.3. Za fiksni $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$. Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora Ω priredi slučajno funkcijo $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicija 1.4. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Definicija 1.5. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Definicija 1.6. Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t \geq 0}$, definiranim na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v \mathbb{N}_0 , pravimo *Poissonov proces* z intenzivnostjo λ , če zadošča naslednjim pogojem:

- (1) $N_0 = 0$ \mathbb{P} -skoraj gotovo.
- (2) $(N_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
- (3) Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t - s))$,

Opomba 1.7. Vidimo, da v definiciji ne zahtevamo, da so skoki procesa le $+1$. To sledi iz...

2. SESTAVLJENA POISSONOVA PORAZDELITEV

Definicija 2.1. Naj bo $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in X_1, X_2, \dots zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Potem ima slučajna spremenljivka S sestavljeno *Poissonovo porazdelitev* če je njena porazdelitev enaka porazdelitvi slučajne spremenljivke

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

Trditev 2.2. Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Potem ima $(X_t)_{t \geq 0}$ neodvisne prirastke natanko tedaj, ko je za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$ prirastek $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ neodvisen od slučajnega vektorja $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

Dokaz. (\Rightarrow) :

(\Leftarrow) :

□

Trditev 2.3. Naj bo $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in X_1, X_2, \dots, X_n neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od N) enako porazdeljene kot

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} \dots \end{pmatrix},$$

za poljubne $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ in $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ za katere velja $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda$. Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^N X_j,$$

kjer so Y_1, Y_2, \dots neodvisne s.s. porazdeljene kot $\text{Pois}(\lambda_1), \text{Pois}(\lambda_2), \dots$

Dokaz. S $\varphi_{Z_n}(u)$ označimo karakteristično funkcijo s.s. $Z_n := a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_n Y_n$ in s $\varphi_Z(u)$ karakteristično funkcijo s.s. $Z := \sum_{j=1}^N X_j$. Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(a_j u) \\ &= \prod_{j=1}^n \exp [\lambda_j (e^{a_j i u} - 1)] \\ &= \exp \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j (e^{a_j i u} - 1) \right]. \end{aligned}$$

Po trditvi 3.6 velja

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(u) &= G_N(\varphi_X(u)) \\
&= \exp[\lambda(\varphi_X(u) - 1)] \\
&= \exp\left[\lambda\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda} e^{a_j i u} - 1\right)\right] \\
&= \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (e^{a_j i u} - 1)\right]
\end{aligned}$$

Vidimo, da velja

$$\varphi_{Z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_Z,$$

torej po Lévijevem izreku o kontinuiteti velja $Z_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \sim Z$. \square

Posledica 2.4. Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ poljubno zaporedje realnih števil in $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih realnih števil, za katere velja $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \lambda$ in

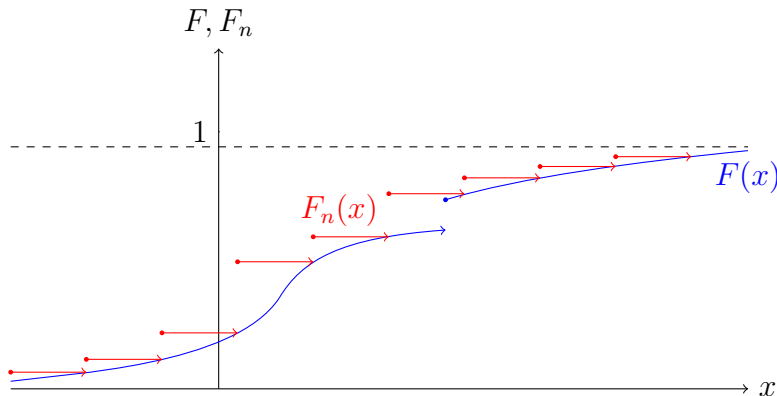
$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Potem velja

$$\sum_{j=1}^n a_j Y_j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sum_{j=1}^N X_j,$$

Dokaz. Ker velja $\varphi_{Z_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_Z(u)$ za vsak $u \in \mathbb{R}$, po Lévijevem izreku o zveznosti sledi, da $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$. \square

Kaj pa v primeru, ko so X_i zvezno porazdeljene? Tedaj se problema lotimo na sledeč način. Definiramo $F_n(x) := F(\frac{m}{n})$ kjer je $F(x)$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke Z_n in $m = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid \frac{k}{n} > F_n(x)\}$.



SLIKA 2. Aproximacija F s F_n

Kot je razvidno iz slike 2, je $F_n(x)$ stopničasta funkcija, ki aproksimira porazdelitveno funkcijo $F(x)$. Velja $F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F$ povsod kjer je F zvezna.

3. SESTAVLJENI POISSONOV PROCES

Povzetek poglavja/krajsi uvod

Definicija 3.1. Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ Poissonov proces z intenzivnostjo λ . Naj bo $(X_i)_{i \geq 1}$ zaporedje neodvisnih (med sabo in $(N_t)_{t \geq 0}$) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v \mathbb{R} . Potem je *sestavljeni Poissonov proces* $(S_t)_{t \geq 0}$ definiran kot

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Opomba 3.2. Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$ za vsak i , dobimo ravno *HPP*. Bolj v splošnem, če za X_i postavimo $X_i = \alpha$, potem velja $S_t = \alpha N_t$.

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$ označevali s *HPP*(λ) ali naborom slučajnih spremenljivk $(N_t)_{t \geq 0}$ (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s *CPP* ali naborom slučajnih spremenljivk $(S_t)_{t \geq 0}$ (angl. Compound Poisson Process), kjer bo vsota sledila *HPP*(λ).

3.1. Osnovne lastnosti.

Trditev 3.3. *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Za nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ lahko slučajne spremenljivke $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti X_i od X_j za $i \neq j$ in N_t . Naj bo $h > 0$ in $s < t$. Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima $N_{t+h} - N_{s+h}$ členov. Ker za *HPP* velja $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$, je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

□

Trditev 3.4. *Naj bo $(S_t)_{t \geq 0}$ CPP in naj bosta $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$ pričakovana vrednost in $\sigma^2 = \text{Var}[X_i] < \infty$ varianca slučajnih spremenljivk X_i za vsak i . Potem sta za $t \geq 0$ pričakovana vrednost in varianca S_t enaki*

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu \lambda t \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2).$$

Dokaz. Definiramo slučajno spremenljivko

$$Y_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \quad (1)$$

in vidimo, da je za $t \geq 0$ S_t pogojno na $N_t = k$ enako porazdeljena kot Y_k . Tako dobimo

$$\mathbb{E}[S_t | N_t = k] = \mathbb{E}[Y_k] = k\mu \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t | N_t = k] = \text{Var}[Y_k] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t | N_t]]$. Torej

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t | N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu \lambda t.$$

Prek formule $\text{Var}[S_t] = \mathbb{E}[\text{Var}[S_t | N_t]] + \text{Var}[\mathbb{E}[S_t | N_t]]$ računamo

$$\mathbb{E}[\text{Var}[S_t | N_t]] = \mathbb{E}[\text{Var}[X_i] N_t] = \sigma^2 \lambda t$$

in

$$\text{Var}[\mathbb{E}[S_t | N_t]] = \text{Var}[\mathbb{E}[X_i] N_t] = \mu^2 \lambda t,$$

saj $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$. Skupaj dobimo $\text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2)$. \square

3.2. Rodovne funkcije.

Trditev 3.5. *Naj bo $(S_t)_{t \geq 0}$ CPP. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i , ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot X . Potem ima za $t \geq 0$ karakteristična funkcija φ_{S_t} obliko*

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)},$$

kjer φ_X označuje karakteristično funkcijo X .

Dokaz.

$$\begin{aligned} \varphi_{S_t}(u) &= \mathbb{E}[\exp[iuS_t]] = \mathbb{E}\left[\exp\left[iu \sum_{i=1}^{N_t} X_i\right]\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iu \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t = k\right]\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[iu \sum_{i=1}^k X_i\right]\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[e^{iuX}]^k}_{\varphi_X(u)^k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_X(u)\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)} \end{aligned} \quad (2)$$

\square

Hitro lahko vidimo, da sta karakteristična in rodovna funkcija CPP enaki

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)} \quad \text{in} \quad G_{S_t}(u) = e^{\lambda t(G_X(u)-1)},$$

saj v splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke Y enaka njeni momentno rodovni funkciji izvednoteni v iu , torej $\varphi_Y(u) = G_Y(iu)$.

Rodovna pa izverdnjena v $\ln(u)$, torej $G_Y(u) = M_Y(\ln(u))$, če obstajata. V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo CPP , saj je ta vedno definirana za vsak $u \in \mathbb{R}$. Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med karakteristično funkcijo CPP in rodovno funkcijo $HPP(\lambda)$.

Trditev 3.6. *Naj bosta $(S_t)_{t \geq 0}$ CPP in $(N_t)_{t \geq 0}$ $HPP(\lambda)$ neodvisna. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i , ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot X . Potem za fiksno $t \geq 0$ velja*

$$\varphi_{S_t}(u) = G_{N_t}(\varphi_X(u)).$$

Dokaz. Po enačbi (2) iz trditve 3.5 velja, da je $\varphi_{S_t}(u)$ enaka

$$\begin{aligned} \varphi_{S_t}(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_X(u)^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= G_{N_t}(\varphi_X(u)). \end{aligned}$$

□

3.3. Porazdelitev CPP. Sedaj se posvetimo vprašanju, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka S_t za $t \geq 0$? Iz definicije $HPP(\lambda)$ vemo, da je N_t za $t \geq 0$ porazdeljena kot Poissonova slučajna spremenljivka s parametrom λt . Fiksiramo $t \geq 0$ in dobimo

$$\begin{aligned} F_{S_t}(x) &= \mathbb{P}(S_t \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_t \leq x \mid N_t = k) \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k X_i \leq x\right) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

kjer je $F_X^{*k}(x)$ porazdelitev k -te konvolucije slučajne spremenljivke X . Razen za posebne primere, je zgornji izraz za praktične namene ne-izračunljiv in nam ne pomaga veliko.

Zgled 3.7. Če pogledamo primer, ko so X_1, X_2, \dots neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke, porazdeljene kot X

$$X \sim \text{Exp}(a) \quad f_X(x) = a e^{-ax} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x),$$

s parametrom $a > 0$, lahko pridemo do eksplicitne porazdelitve CPP . Gostota k -te konvolucije $X_1 + \dots + X_k$ je porazdeljena kot $\text{Gamma}(k, a)$ in ima formulo

$$f_{X_1 + \dots + X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} a^k x^{k-1} e^{-ax} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x).$$

Za $t \geq 0$ in $x \geq 0$ torej velja

$$F_{S_t}(s) = \mathbb{P}(S_t \leq s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^s \frac{1}{\Gamma(k)} a^k s^{k-1} e^{-as} ds \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad \text{Tonelli (5.6)}$$

$$= \int_0^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k)} a^k s^{k-1} e^{-as} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} ds$$

◇

3.4. Neskončna deljivost.

Definicija 3.8. Naj bo X slučajna spremenljivka. Pravimo, da je X *neskončno deljiva*, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstajajo neodvisne slučajne spremenljivke X_1, X_2, \dots, X_n tako, da velja

$$X \sim X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Ekvivalento lahko definiramo neskončno deljivost prek karakteristične funkcije. Pravimo, da je slučajna spremenljivka X neskončno deljiva, če je za vsak $n \in \mathbb{N}$ funkcija $(\varphi_X(u))^{\frac{1}{n}}$ karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke.

Zgled 3.9. Naj bo $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Potem je X neskončno deljiva. To neposredno sledi iz dejstva, da je karakteristična funkcija vsote n.e.p. s.s. enaka produktu karakterističnih funkcij, torej za $n \in \mathbb{N}$ in $u \in \mathbb{R}$ velja $\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(u) = \varphi_X(u)^n$. Če vzamemo $X_i \sim \text{Pois}(\frac{\lambda}{n})$, potem je

$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(u) = (\varphi_{X_i}(u))^n = \left(e^{\frac{\lambda}{n}(e^{iu}-1)} \right)^n = e^{\lambda(e^{iu}-1)} = \varphi_X(u).$$

◇

Sedaj pokažimo, da je sestavljena Poissonova porazdelitev neskončno deljiva, še več, pokažimo, da če je S neskončno deljiva slučajna spremenljivka in zavzema vrednosti v \mathbb{N}_0 , potem ima sestavljeno Poissonovo porazdelitev.

Trditev 3.10. Naj bo S slučajna spremenljivka, porazdeljena sestavljeno Poissonovo s parametrom $\lambda > 0$. Potem je S neskončno deljiva.

Dokaz. Zapišimo $S = \sum_{i=1}^N X_i$, kjer so X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke s skupno karakteristično funkcijo $\varphi_X(u)$ in $N \sim \text{Pois}(\lambda)$. Iz trditve 3.5 vemo, da je karakteristična funkcija S za $u \in \mathbb{R}$ enaka

$$\varphi_S(u) = \varphi_N(\varphi_X(u)) = e^{\lambda(\varphi_X(u)-1)}.$$

Potem za $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\varphi_S(u) = \left(e^{\frac{\lambda}{n}(\varphi_X(u)-1)} \right)^n$$

in vidimo, da je funkcija $u \mapsto e^{\frac{\lambda}{n}(\varphi_X(u)-1)}$ karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $S_i = \sum_{i=1}^M X_i$ kjer je $M \sim \text{Pois}(\frac{\lambda}{n})$. □

Trditev 3.11. Naj bo S slučajna spremenljivka, ki zavzame vrednosti v \mathbb{N}_0 in je neskončno deljiva. Potem ima S sestavljeno Poissonovo porazdelitev.

Dokaz. Označimo rodovno funkcijo S z

$$G_S(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S=k)}_{p_k} u^k.$$

Pokazali bomo, da je $G_S(u)$ enaka rodovni funkciji neke slučajne spremenljivke, ki ima sestavljeno Poissonovo porazdelitev. Ker za nenegativne celoštevilске slučajne

spremenljivke velja $\mathbb{P}(S = k) = \frac{G_S^{(k)}(0)}{k!}$, bo to pomenilo, da je S sestavljeno Poissonova, saj v tem primeru rodovna funkcija določa porazdelitev S . Ker je S neskončno deljiva potem je za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$G_{S_n}(u) := (G_S(u))^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S_n = k)}_{p_{k_n}} u^k$$

rodovna funkcija neke slučajne spremenljivke S_n in za vsak $u \in \mathbb{R}$ velja enakost

$$G_{S_n}(u) = (G_{S_1}(u))^n \text{ oziroma } \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{k_n} u^k \right)^n.$$

Če razširimo desno stran enače in predpostavimo $p_0 = 0$, dobimo, da bmora biti $p_{0_n} = 0$ in posledično tudi $p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = 0$. Ker to velja za poljuben $n \in \mathbb{N}$ dobimo, da je $G_S(u) = 0$, kar pa je protislovje. Torej $p_0 > 0$ in zagotovo $G_S(u) > 0$ za $u \in [0, 1]$. Velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{G_S(u)}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} = 1$ za $t \in [0, 1]$. Velja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$$\ln \left(\left(\frac{G_S(u)}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \ln \left(1 + \left(\left(\frac{G_S(u)}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right) \approx \left(\frac{G_S(u)}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \text{ ko } n \rightarrow \infty.$$

Za $u = 1$ dobimo

$$\ln \left(\left(\frac{1}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \approx \left(\frac{1}{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} - 1 \text{ ko } n \rightarrow \infty.$$

□

Sedaj trditev 3.11 nadgradimo...

Trditev 3.12. *Naj ima slučajna spremenljivka S neskončno deljivo porazdelitev. Potem lahko S zapišemo izrazimo kot limito slučajni spremenljivk, ki imajo sestavljeno Poissonovo porazdelitev.*

4. CRAMÉR-LUNDBERGOV MODEL

Razdelek je prirejen po [3], [4] in [5].

V tem razdelku obravnavamo najbolj intenzivno raziskan model v teoriji propada, običajno imenovan Cramér-Lundbergov model. V svoji najosnovnejši obliki ga je v zgodnjih 1900. letih izpeljal švedski aktuar Filip Lundberg, da bi ocenil ranljivost zavarovalnice za propad. Čeprav je model v svoji ideji dokaj preprost, zajema bistvo povezave ravni rezerv zavarovalnice in njene izpostavljenosti tveganju, kar je razlog, zakaj je postal temeljni merilni model v teoriji propada. V preteklem stoletju je bilo razvitih veliko tehnik za analizo Cramér-Lundbergovega modela, ki so se večinoma osredotočale na kvantifikacijo verjetnosti propada. V razdelku podamo pregled glavnih rezultatov in osnovnih tehnik, ter jih ponazorimo na primerih, ko zavarovalniške zahteve modeliramo z lahkorepimi in težkorepimi porazdelitvami.

4.1. Proces tveganja in verjetnost propada.

Definicija 4.1. Naj bo $(S_t)_{t \geq 0}$ CPP, kjer so slučajne spremenljivke $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, ki jih seštevamo s.g. nenegativne. *Proces tveganja* v Cramér-Lundbergovem modelu definiramo kot

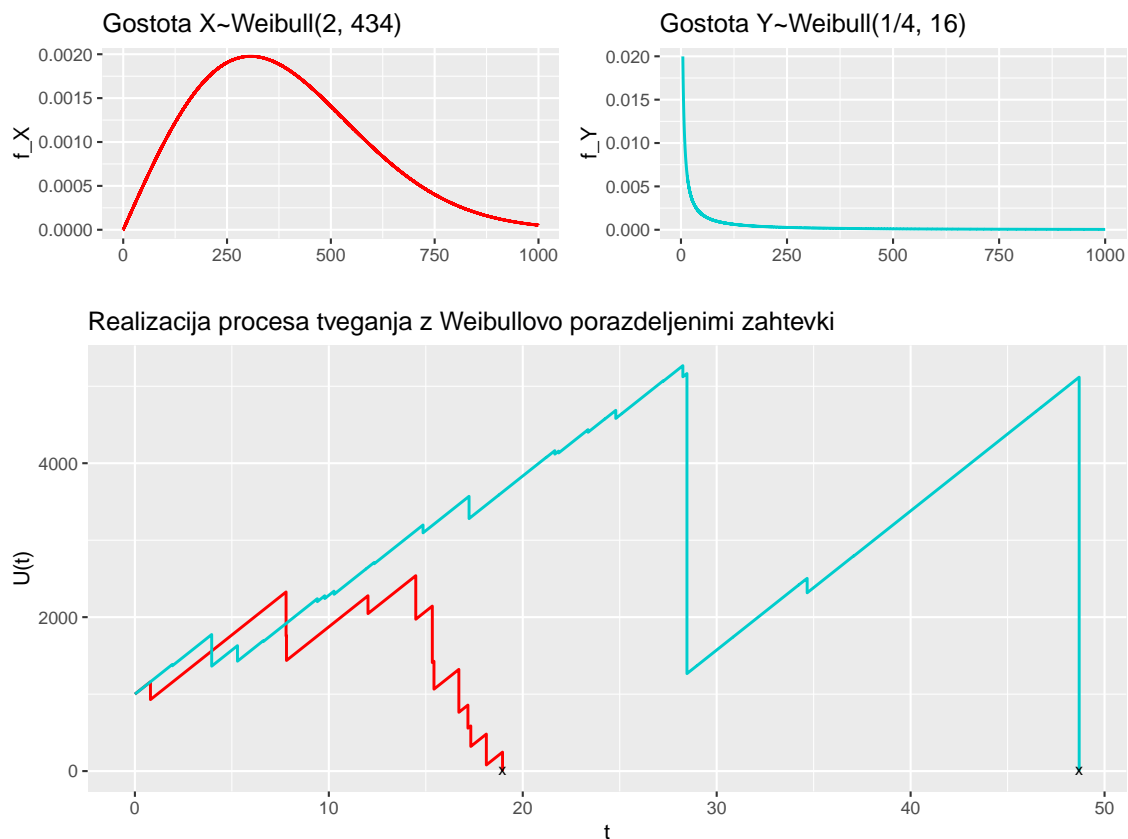
$$U_t = u + p(t) - S_t,$$

kjer je $u \geq 0$ začetni kapital zavarovalnice in $p(t)$ funkcija prihodkov iz premij.

Opomba 4.2. V resnici lahko veliko lastnosti procesa tveganja izpeljemo brez da predpostavimo, da prihodi zahtevkov v $(S_t)_{t \geq 0}$ sledijo homogenem Poissonovemu procesu, ampak splošnem prenovitvenemu procesu (5.12) in zato na začetku ne bomo uporabljali rezultatov, ki smo jih do sedaj v delu izpeljali.

Vrednost U_t predstavlja kapital zavarovalnice ob času $t \geq 0$. Standardno je za $p(t)$ vzeti deterministično funkcijo $p(t) = ct$, kjer je $c > 0$ stopnja prihodkov premij. Uporaba linearne funkcije za modeliranje premijskega dohodka v Cramér-Lundbergovem modelu ponuja realističen približek zato, ker zavarovalnice pogosto doživljajo stabilno povečevanje premijskega dohodka skozi čas. Poleg tega je izbira linearne funkcije preprosta, zato bomo v nadaljevanju privzeli $p(t) = ct$. Poglejmo si realizaciji procesa tveganja, ko so zahtevki X_i porazdeljeni Weibullovo (5.8) z različnimi parametri.

Zgled 4.3. Naj bo $(U_t)_{t \geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu z začetnim kapitalom $u = 1000$ in $p(t) = 200t$ ter intenzivnostjo prihodov zahtevkov $\lambda = 1$. Naj bodo v prvem primeru (rdeča) zahtevki porazdeljeni kot $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$ in v drugem primeru (modra) kot $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$.



SLIKA 3. Realizaciji procesa tveganja

Pri obeh realizacijah vidimo, da proces tveganja v nekem trenutku pade pod 0 (tam ga tudi ustavimo). Čeprav je pričakova vrednost $\mathbb{E}[Y_i] = 384 \approx \mathbb{E}[X_i] = 217\sqrt{\pi} \approx 384,62$ opazimo bistveno razliko med realizacijama. V rdečem primeru proces pade pod 0 po več zaporednih manjših izgubah, v modrem primeru pa po eni zelo veliki izgubi. V nadaljevanju bomo primera ločili, ampak pred tem definirajmo osnovne pojme, ki jih bomo obravnavali v razdelku.

◇

Definicija 4.4. *Propad* definiramo kot dogodek, da proces tveganja $(U_t)_{t \geq 0}$ kadarkoli pade pod 0. Torej

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\}$$

in času ustavljanja

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\},$$

pravimo *čas propada*. Seveda velja enakost med dogodkoma

$$\{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} = \{T < \infty\}.$$

Definicija 4.5. *Verjetnost propada* je definirana kot funkcija $\psi(u) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ podana s predpisom

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty \mid U_0 = u).$$

Definicija 4.6. Po konstrukciji procesa tveganja $(U_t)_{t \geq 0}$ je verjetnost propada mogoča le ob prihodih zahtevkov. Z V_n označimo čas n -tega prihoda in definiramo ogrodje procesa tveganja kot $(U_{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Trditev 4.7. Naj bo $(U_t)_{t \geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu in $(U_{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$ njegovo ogrodje ter $T_n := V_n - V_{n-1}$ medprihodni čas n -tega zahtevka ($V_0 = T_0 = 0$). Potem velja

$$\psi(u) = \mathbb{P} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ komulativna izguba po n prihodih in $Y_i = X_i - cT_i$ izguba i -tega prihoda.

Dokaz. S pomočjo ogrodja procesa tveganja lahko dogodek propada zapišemo kot

$$\begin{aligned} \{U_t < 0 \text{ za } t \geq 0\} &= \left\{ \inf_{t \geq 0} U_t < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} U_{V_n} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \{u + p(V_n) - S_{V_n}\} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ u + cV_n - \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i}_{-Z_n} \right\} < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} \{-Z_n\} < -u \right\} \\ &= \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right\}, \end{aligned}$$

kar nam da željeno enakost. □

Tako verjetnost propada prevedemo na prehodno verjetnost diskretnega slučajnega sprehoda $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo asimptotično vedenje $\psi(u)$, ko gre $u \rightarrow \infty$. Cilj obravnavanja verjetnosti propada v Cramér-Lundbergovem modelu je, da se izognemo skoraj gotovemu propadu oziroma, da je verjetnost, da $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ preseže u tako majhna, da lahko v praksi dogodek propada izključimo.

Trditev 4.8. Naj bo $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk definirano kot $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke Y_i z $\mathbb{E}[Y_i] < \infty$. Potem za vsak $u > 0$ velja

$$\mathbb{P} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right) = 1 \quad \text{za } u > 0,$$

če velja $\mathbb{E}[Y_i] \geq 0$.

Dokaz. Zaporedje slučajnih spremenljivk $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zadošča predpostavkam krepkega zakona velikih števil (5.7), torej velja

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} \mathbb{E}[Y_n].$$

Torej bo Z_n v primeru ko je $\mathbb{E}[Y_n] > 0$ skoraj gotovo asimptotično linearno naraščal proti ∞ kot $\mathbb{E}[Y_n]n$ in bo za poljuben $u > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u\right) = 1.$$

Dokaz za primer, ko je $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ je precej bolj tehničen in ne preveč informativen, zato ga bomo izpustili. Izkaže se, da obstajata neki podzaporedji $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$, da $Z_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{s.g.} \infty$ in $Z_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty$. Dokaz lahko najdemo v [6]. \square

Opomba 4.9. Iz trditve 4.8 (ob predpostavkah $\mathbb{E}[X_i] < \infty$ in $\mathbb{E}[T_i] < \infty$) sledi, da moramo premijo (in s tem c) izbrati tako, da bo $\mathbb{E}[Y_i] < 0$, saj bo tako $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty$ in je to edini primer, ko lahko upamo, da verjetnost propada ne bo enaka 1.

Definicija 4.10. Pravimo, da proces tveganja $(U_t)_{t \geq 0}$ v Cramér-Lundbergovem modelu zadošča *pogoju neto zaslužka* (ang. *net profit condition*), če velja

$$c > \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]}, \quad \text{oziroma} \quad c = (1 + \rho) \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} \quad \text{za } \rho > 0.$$

Pogoj bomo v nadaljevanju imenovali NPC.

Zahteva NPC za analizo poslovanja zavarovalnice je kar intuitivna, saj pove, da mora biti v nekem časovnem intervalu pričakovan dohodek iz premij večji od pričakovanega izplačila zahtevkov.

Definicija 4.11. Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *lahkorepo porazdelitev*, če za nek $\varepsilon > 0$ velja

$$\mathbb{E}[e^{uX}] = M_X(u) < \infty \quad \text{za } u \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Sicer $M_X(u)$ obstaja le za $u \in (-\infty, 0]$ in pravimo, da ima X *težkorepo porazdelitev*.

Zgled 4.12 (Nadaljevnaje zgleda 4.3). V zgledu 4.3 smo obravnavali proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, kjer so zahtevki (rdeča) $X_i \sim \text{Weibull}(2, 434)$ in (modra) $Y_i \sim \text{Weibull}(\frac{1}{4}, 16)$. Opazili smo, da je v prvem primeru propad posledica več manjših izgub, v drugem pa ene velike izgube. To je značilnost težkorepih porazdelitev in za Weibullovo porazdelitev velja, da ima za parameter $a \geq 1$ lahek, za $a < 1$ pa težek rep.

Dokaz. Momentno rodovna funkcija $X \sim \text{Weibull}(a, b)$ je enaka

$$\begin{aligned} M_X(u) &= \int_0^\infty e^{ux} \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} dx \quad \left(y = \frac{x}{b}, \quad dy = \frac{dx}{b}\right) \\ &= a \int_0^\infty e^{uby} y^{a-1} e^{-y^a} dy. \end{aligned}$$

Vidimo, da v 0 ni težav za poljuben $a > 0$, ampak za $a \in (0, 1)$ v neskončnosti funkcija divergira, saj se eksponent poenostavi v $y^a(uby^{1-a} - 1) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$. Če v nadaljevanju predpostavimo $a \geq 1$ in uvedemo $z = y^a$ ($dz = ay^{a-1}dy$) pa lahko pridemo do lepe končne oblike za momentno rodovno funkcijo X .

$$M_X(u) = \int_0^\infty e^{ubz^{\frac{1}{a}}} e^{-z} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(ubz^{\frac{1}{a}})^k}{k!} e^{-z} dz && \text{Tonelli (5.6)} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \int_0^\infty z^{\frac{k}{a}} e^{-z} dz \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(ub)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k}{a} + 1\right).
\end{aligned}$$

◇

4.2. Lahkorepe porazdelitve. Od sedaj naprej bomo predpostavili, da je S_t v procesu tveganja $(U_t)_{t \geq 0}$ *CPP*. Najprej se bomo omejili na primer, ko ima porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i , ki jih seštevamo v *CPP* lahek rep, saj je bila osnovna teorija, ki sta jo razvila Cramér in Lundberg, izpeljana pod to predpostavko.

4.2.1. *Lundbergova neenakost.*

Opomba 4.13. V praksi z lahkorepnimi porazdelitvami modeliramo zahtevke, kjer verjetnosti ekstremnih dogodkov (torej zelo velikih zahtevkov) eksponentno pada proti 0. To neposredno sledi iz definicije 4.11 in neenakosti Markova (5.13), saj za vsak $x > 0$ in $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ velja

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(e^{uX} > e^{ux}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{uX}]}{e^{ux}}.$$

Definicija 4.14. Naj velja, da ima slučajna spremenljivka $Y_1 = X_1 - cT_1$ iz trditve 4.7 lahek rep. Če obstaja enoličen $\ell > 0$ za katerega velja

$$M_{Y_1}(\ell) = 1,$$

potem ℓ pravimo *Lundbergov koeficient*.

Trditev 4.15. Če Lundbergov koeficient ℓ (pod predpostavkami definicije 4.14 in pogoja NPC) obstaja, potem je enolično določen.

Dokaz. Ker ima Y_1 lahek rep, obstaja $\varepsilon > 0$, da je $M_{Y_1}(u) < \infty$ za $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Ker velja $M_{Y_1}(0) = 1$ in $M'_{Y_1}(0) = \mathbb{E}[Y_1] < 0$ (NPC) ter $M''_{Y_1}(u) = \mathbb{E}[Y_1^2 e^{Y_1 u}] > 0$ ($Y_1 \neq 0$ skoraj gotovo) za $u > 0$, je $M_{Y_1}(u)$ zvezna konveksna funkcija na intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kjer v okolici ničle pada, ter po predpostavki obstaja $\ell > 0$, da je $M_{Y_1}(\ell) = 1$. □

Izrek 4.16. (Lundbergova neenakost) Naj bo $(U_t)_{t \geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadošča NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient ℓ . Potem za vsak $u > 0$ velja

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u}.$$

Dokaz. Neenakost bomo dokazali z indukcijo. Za $u > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\psi_n(u) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u\right)$$

in vidimo, da je (po zveznosti \mathbb{P} od spodaj) $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$, torej moramo pokazati, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\psi_n(u) \leq e^{-\ell u}$.

($n = 1$): Uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$\psi_1(u) = \mathbb{P}(e^{\ell Z_1} > e^{\ell u}) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = e^{-\ell u}.$$

($n \rightarrow n+1$): S F_{Y_1} označimo porazdelitev Y_1 . Potem velja

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n+1} Z_k > u\right) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(Y_1 > u)}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{P}\left(\max_{2 \leq k \leq n+1} \{Y_1 + (Z_k - Y_1)\} > u, Y_1 \leq u\right)}_{(ii)} \end{aligned}$$

Najprej se posvetimo (ii). Po indukcijski predpostavki velja

$$\begin{aligned} (ii) &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} \{x + Z_k\} > u\right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u - x\right) dF_{Y_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \psi_n(u - x) dF_{Y_1}(x) \\ &\stackrel{\text{I.P.}}{\leq} \int_{(-\infty, u]} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x). \end{aligned}$$

Za oceno (i) kot v primeru $n = 1$ uporabimo neenakost Markova in dobimo

$$(i) = \psi_1(u) \leq \frac{M_{Z_1}(\ell)}{e^{\ell u}} = \int_{(u, \infty)} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x).$$

Če torej seštejemo (i) in (ii) dobimo željeno oceno

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\ell(u-x)} dF_{Y_1}(x) \\ &= e^{-\ell u} M_{Y_1}(\ell) \\ &= e^{-\ell u}. \end{aligned}$$

□

Opomba 4.17. Iz izreka 4.16 je razvidno, da z dovolj visokim začetnim kapitalom u verjetnost propada lahko v praksi zadovoljivo omejimo blizu 0. Seveda je meja odvisna tudi od Lundbergovega koeficienta ℓ in krepko temelji na predpostavki lah-korepnih porazdelitev, ki pa v praksi pogosto niso izpolnjene.

Zgled 4.18. Naj bo $(U_t)_{t \geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC. Naj nadalje velja da so zahtevki $X_i \stackrel{\text{n.e.p.}}{\sim} \text{Exp}(\mu)$ za vsak i . Vemo, da ima momentno rodovna funkcija X_i obliko

$$M_{X_i}(u) = \frac{\mu}{\mu - u} \text{ za } u < \mu.$$

Tako dobimo, da ima momentno rodovna funkcija $Y_1 = X_1 - cT_1$ obliko

$$M_{Y_1}(u) = M_{X_1}(u)M_{T_1}(-cu) = \frac{\mu}{\mu - u} \frac{\lambda}{\lambda + cu} \text{ za } u \in (-\frac{\lambda}{c}, \mu).$$

Sedaj lahko izračunamo Lundbergov koeficient ℓ

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(\ell) &= 1, \\ \frac{\mu}{\mu - \ell} \frac{\lambda}{\lambda + c\ell} &= 1, \\ \mu\lambda &= (\mu - \ell)(\lambda + c\ell), \\ \mu\lambda &= \mu\lambda - \ell\lambda + \mu c - c\ell^2, \\ 0 &= \mu c - c\ell - \lambda. \end{aligned}$$

Dobimo

$$\ell = \mu - \frac{\lambda}{c} \in (0, \mu),$$

saj v našem modelu velja NPC pogoj

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} = \frac{\lambda}{\mu} < c \iff \mu > \frac{\lambda}{c}.$$

Če uporabimo alternativno formulacijo NPC pogoja, dobimo

$$c = (1 + \rho) \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \ell = \mu - \frac{\lambda}{(1 + \rho) \frac{\lambda}{\mu}} = \mu \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right).$$

Tako dobimo zgornjo mejo za verjetnost propada

$$\psi(u) \leq e^{-\ell u} = e^{-\mu u \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)}$$

in vidimo, da povečanje stopnje prihodkov premij čez neko mejo ne bistveno vpliva na oceno, saj

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{-\mu u \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)} = e^{-\mu u}.$$

V nadaljevanju bomo videli, da je Lundbergova neenakost v primeru eksponentno porazdeljenih zahtevkov skoraj točna vrednost verjetnosti propada, zgrešena le za konstanto. V splošnem pa je zelo težko določiti Lundbergov koeficient kot funkcijo parametrov porazdelitev X_1 in T_1 in zato uporabljamo numerične metode za njegovo aproksimacijo kot na primer Monte Carlo simulaciji. \diamond

4.2.2. Cramérjeva meja za propad. Sedaj se posvetimo vprašanju, kako se obnaša verjetnost propada v Cramér-Lundbergovem modelu, ko gre $u \rightarrow \infty$ in izpeljemo enega temeljnih rezultatov v teoriji tveganja.

Definicija 4.19. Za lažjo notacijo v nadaljevanju definiramo funkcijo *verjetnosti preživetja* kot $\theta(u) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ s predpisom

$$\theta(u) = \mathbb{P}(T = \infty \mid U_0 = u) = 1 - \psi(u).$$

Lema 4.20. (Integralska enačba za verjetnost preživetja) Naj bo $(U_t)_{t \geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj velja $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ ter, da imajo slučajne spremenljivke $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gostoto. Potem $\theta(u)$ zadošča naslednji enakosti

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{(1 + \rho)\mathbb{E}[X_1]} \int_{(0, u]} (1 - F_{X_1}(x)) \theta(u - x) dx. \quad (3)$$

Dokaz. Po trditvi 4.7 velja

$$\psi(u) = \mathbb{P} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > u \right),$$

kjer je $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ in $Y_i = X_i - cT_i$. Torej je

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \mathbb{P} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq u \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\{Z_n \leq u \mid n \in \mathbb{N}\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\{Y_1 \leq u\} \cap \{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \mid n \geq 2\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{Y_1 \leq u\}} \mathbb{P} \left(\{Z_n - Y_1 \leq u - Y_1 \mid n \geq 2\} \mid Y_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je $Y_1 = X_1 - cT_1$ in je torej dogodek $\{Y_1 \leq u\}$ enak dogodku $\{X_1 \leq u + cT_1\}$. Poleg tega velja, da je $(Z_n - Y_1)_{n \geq 2} \sim (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, saj so Y_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Upoštevamo še, da je T_1 medprihodni čas v $HPP(\lambda)$ da dobimo

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \int_{(0, \infty)} \int_{(0, u+ct]} \mathbb{P} \left(\{Z_n \leq u - (x - ct) \mid n \in \mathbb{N}\} \right) dF_{X_1}(x) dF_{T_1}(t) \\ &= \int_{(0, \infty)} \int_{(0, u+ct]} \theta(u - x + ct) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda t} dt. \end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko $z = u + ct$ (torej $t = \frac{z-u}{c}$ in $dt = \frac{dz}{c}$) in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_{(u, \infty)} e^{-\frac{\lambda z}{c}} \underbrace{\int_{(0, z)} \theta(z - x) dF_{X_1}(x)}_{g(z)} dz.$$

Ker ima porazdelitev F_{X_1} gostoto in je θ zvezna omejena funkcija, je funkcija $g(z)$ zvezna in celo odvedljiva po osnovnem izreku analize. $\theta(u)$ lahko tako odvajamo in dobimo

$$\theta'(u) = \frac{\lambda}{c} \theta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{(0, u)} \theta(u - x) dF_{X_1}(x).$$

Če sedaj obe strani integriramo po u dobimo

$$\int_{(0,t]} \theta'(u) du = \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(u) du - \underbrace{\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \int_{(0,u]} \theta(u-x) dF_{X_1}(x) du}_{(i)}. \quad (4)$$

Na integralu (i) uporabimo per partes ($\alpha = \theta(u-x)$ in $d\beta = dF_{X_1}(x)$) ter upoštevamo, da ima F_{X_1} gostoto.

$$\begin{aligned} (i) &= (\theta(u-x)F_{X_1}(u)) \Big|_0^u + \int_{(0,u)} \theta'(u-x)F_{X_1}(x) dx \\ &= \theta(0)F_{X_1}(u) - \int_{(0,u)} \theta'(u-x)F_{X_1}(x) dx. \end{aligned}$$

Kjer upoštevamo da je $F_{X_1}(0) = 0$, saj je $X_1 > 0$ skoraj gotovo. Vstavimo (i) v (ii) in dobimo

$$(ii) = -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0)F_X(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \int_{(0,u]} \theta'(u-x)F_X(x) dx du.$$

Po Tonellijevem izreku (5.6) lahko zamenjamo vrstni red integracije.

$$\begin{aligned} (ii) &= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0)F_X(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_X(x) \int_{[x,t]} \theta'(u-x) du dx \\ &= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(0)F_X(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_X(x) (\theta(t-x) - \theta(0)) dx. \\ &= -\frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_X(x) \theta(t-x) dx. \end{aligned}$$

Vstavimo (ii) v enačbo (4) in dobimo

$$\begin{aligned} \theta(t) - \theta(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} \theta(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} F_X(x) \theta(t-x) dx, \\ \theta(t) &= \theta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_{(0,t]} (1 - F_X(x)) \theta(t-x) dx. \end{aligned}$$

Če sedaj upoštevamo enakost

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1 + \rho} \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$$

in $t \mapsto u$ dobimo željeno enakost (3). □

Opomba 4.21. Enačbo (3) lahko zapišemo tudi v obliki

$$\theta(u) = \theta(0) + \frac{1}{1 + \rho} \int_{(0,u]} \theta(u-x) d\bar{F}(x), \quad (5)$$

kjer je \bar{F} porazdelitev integriranega repa (5.9) slučajne spremenljivke X .

Opomba 4.22. Konstanto $\theta(0)$, ki se pojavi v (3) in (5) lahko izračunamo. Ker c zadošča NPC, analogno trditvi 4.8 velja

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} -\infty.$$

Po zveznosti \mathbb{P} od spodaj sledi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq u \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \leq \infty \right) = 1.$$

Če torej v enačbi (5) pošljemo $u \rightarrow \infty$, dobimo

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \theta(u) = 1 = \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{(0,u]}(x) \theta(u-x) d\bar{F}(x).$$

Po izreku o monotoni konvergenici (5.3) sledi

$$\begin{aligned} 1 &= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,\infty)} 1 d\bar{F}(x) \\ &= \theta(0) + \frac{1}{1+\rho}. \end{aligned}$$

Torej je $\theta(0) = \frac{\rho}{1+\rho}$. Enakost upoštevamo v enačbi (5) in dobimo

$$\theta(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,u]} \theta(u-x) d\bar{F}(x). \quad (6)$$

Izrek 4.23. (*Cramérjeva meja za propad*) Naj bo $(U_t)_{t \geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadoštuje NPC in naj zanj obstaja Lundbergov koeficient ℓ . Naj imajo slučajne spremenljivke $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gostoto. Potem obstaja konstanta $C > 0$ da velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{\ell u} \psi(u) = C.$$

Dokaz. Najprej preoblikujemo enačbo (6), tako da upoštevamo $\theta = 1 - \psi$

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,u]} (1 - \psi(u-x)) d\bar{F}(x), \\ \psi(u) &= \frac{1}{1+\rho} (1 - \bar{F}_X(u)) + \frac{1}{1+\rho} \int_{(0,u]} \psi(u-x) d\bar{F}(x). \end{aligned}$$

Za lažjo notacijo uvedemo oznako $q = \frac{1}{1+\rho}$ in dobimo

$$\psi(u) = q(1 - \bar{F}_X(u)) + \int_{(0,u]} \psi(u-x) d(q\bar{F}(x)). \quad (7)$$

Vidimo, da ima enačba (7) obliko prenovitvene enačbe (5.14) z bistveno razliko, da $q\bar{F}_X$ ni verjetnostna mera, saj velja $\lim_{x \rightarrow \infty} q\bar{F}_X(x) = q < 1$. Enačbi (7) pravimo defektna prenovitvena enačba. Za $x > 0$ definiramo Esscherjevo transformacijo porazdelitve F_X kot

$$F_\ell(x) = \int_{(0,x]} e^{\ell y} d(q\bar{F}_X(y)) = \frac{q}{\mathbb{E}[X]} \int_{(0,x]} e^{\ell y} (1 - F_X(y)) dy,$$

ki je prav tako porazdelitvena funkcija, saj je očitno naraščajoča in velja

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} F_\ell(x) &= \frac{q}{\mathbb{E}[X]} \int_{(0, \infty)} e^{\ell y} (1 - F_X(y)) dy \quad (\alpha = 1 - F_X(x), \quad d\beta = e^{\ell y} dy) \\
&= \frac{q}{\mathbb{E}[X]} \left(\left(\frac{(1 - F_X(y)) e^{\ell y}}{\ell} \right) \Big|_0^\infty + \frac{1}{\ell} \int_{(0, \infty)} e^{\ell y} f_X(y) dy \right) \\
&= \frac{q}{\mathbb{E}[X]} \frac{1}{\ell} \left(\mathbb{E}[e^{\ell X}] - 1 \right).
\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je $q = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\mathbb{E}[X]}{c\mathbb{E}[W]}$ in definicijo Lundbergovega koeficienta ter dejstvo da je $W \sim \text{Exp}(\lambda)$, da dobimo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} F_\ell(x) &= \frac{\mathbb{E}[e^{\ell X}] - 1}{c\ell \mathbb{E}[W]} \\
&= \lambda \frac{\frac{\lambda + c\ell}{\lambda} - 1}{c\ell} = 1.
\end{aligned}$$

Če enacbo (7) pomnožimo z $e^{\ell u}$ dobimo

$$\begin{aligned}
e^{\ell u} \psi(u) &= q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_X(u)) + \int_{(0, u]} e^{\ell(u-x)} \psi(u-x) e^{\ell x} d(q\bar{F}_X(x)) \\
&= q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_X(u)) + \int_{(0, u]} e^{\ell(u-x)} \psi(u-x) d\bar{F}_\ell(x). \tag{8}
\end{aligned}$$

Vidimo, da sedaj enačba (8) ustreza definiciji prenovitvene enačbe in ker je funkcija $e^{\ell u} \psi(u)$ omejena na končnih intervalih lahko uporabimo Smithov ključni prenovitveni izrek (5.16), da dobimo rešitev

$$e^{\ell u} \psi(u) = q \int_{(0, u]} e^{\ell(u-x)} \bar{F}_X(u-x) dM^{(\ell)}(x), \tag{9}$$

kjer je $M^{(\ell)}$ prenovitvena mera prenovitvenega procesa z medprihodnimi časi, ki imajo porazdelitveno funkcijo F_ℓ . V splošnem težko določimo $M^{(\ell)}$, ampak, če je $q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_X(u))$ direktno Riemannovo integrabilna, nam Smithov izrek da asimptotično vedenje rešitve (9), ko gre $u \rightarrow \infty$. Direktno Riemannovo integrabilnost preverimo tako, da zapišemo

$$q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_X(u))$$

Tako vidimo, da je $q e^{\ell u} (1 - \bar{F}_X(u))$ razlika dveh nenaraščajocih Riemannovo integrabilnih funkcij in je zato po trditvi ?? direktno Riemannovo integrabilna. Tako dobimo

$$C = \lim_{u \rightarrow \infty} e^{\ell u} \psi(u) = \lambda q \int_{(0, \infty)} e^{\ell x} (1 - \bar{F}_X(x)) dx. \tag{10}$$

S tem je izrek dokazan. \square

Opomba 4.24. Izrek 4.23 nam pove, da v primeru lahkorepih porazdelitev verjetnost propada asimptotično točno eksponento pada proti 0.

Zgled 4.25 (Nadaljevnaje zgleda 4.18). Vemo, da rešitve prenovitvene enačbe (9) iz izreka 4.23 v splošnem ne moremo izračunati. V zgledu 4.18 smo pa privzeli,

da zahtevke modeliramo z eksponentno porazdelitvijo, torej $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$. V tem primeru se izkaže, da lahko explicitno izračunamo verjetnost propada.

racuni

Končno dobimo, da je verjetnost propada enaka

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-u\mu\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)}. \quad (11)$$

◇

Ampak to je zelo poseben primer, ko lahko vse količine izračunamo eksplicitno. Pokažimo kako v primeru, ko ne moremo priti do eksplicitne formule, do približkov funkcije $\psi(u)$ lahko pridemo z Monte Carlo simulacijami.

Zgled 4.26. Recimo, da smo zaposleni v zavarovalnici in imamo interes ponuditi produkt, ki pa že obstaja na trgu in ima določeno neko premijo, amapak po naši analizi smo prepričani, da so škodni zahtevki porazdeljeni drugače od konvencionalne eksponentne porazdelitve, Prišli smo do sklepa, da zahtevki prihajajo z intenzivnostjo $\lambda = 1$ in so porazdeljeni Weibullovo s parametroma $a = 4$ in $b = 500$. Radi bi določili najmanjši zacetni kapital u , ki nam ga morajo nadrejeni odobriti za začetek prodaje našega produkta in premijo c , ki je nižja od obstoječe, da bo verjetnost propada manjša od 0.01 (V tem primeru propad pomeni, da bo zavarovalnica morala zvišati premijo in dvigniti rezerve). Če želimo zadostiti NPC pogoju mora veljati

$$c > \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[T_1]} = \frac{500}{\Gamma(1 + \frac{1}{4})} = 453$$

Numerično izračunamo Lunbergov koeficient, ki je rešitev naslednje enačbe
in dobimo $\ell \approx .$ Sedaj lahko z uporabo Monte Carlo simulacij ocenimo verjetnost propada.

◇

4.3. Težkorepe porazdelitve. Sedaj si pogledjmo primer,

Izrek 4.27. Naj bo $(U_t)_{t \geq 0}$ proces tveganja v Cramér-Lundbergovem modelu, ki zadostuje NPC in naj velja $\mathbb{E}[X] < \infty$ ter, da je F_X absolutno zvezna glede na Lebesgueovo mero \mathcal{L} . Naj velja še, da je porazdelitev F_X^I težkorepna. Potem velja

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - F_X^I(u)} = \frac{1}{\rho}. \quad (12)$$

Dokaz. TRIVIALNO

□

5. PRILOGA

Dostavek je namenjen predvsem za dodatne definicije in trditve, ki so bile izpuščene v glavnem za namene preglednosti besdila. V primeru, da bralec potrebuje osvežiti določene pojme, jih večino lahko najde v tem razdelku.

Definicija 5.1. Naj bo X slučajna spremenljivka. Potem so njena *rodovna funkcija*, *momentno rodovna funkcija* in *karakteristična funkcija* definirane kot

$$G_X(u) = \mathbb{E}[u^X], \quad M_X(u) = \mathbb{E}[e^{uX}], \quad \varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}],$$

če upanja obstajajo.

Izrek 5.2. (*Lévijev izrek o kontinuiteti*) Naj bo $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk (ne nujno na istem verjetnostnem prostoru) in X še ena slučajna spremenljivka. Potem velja

$$\varphi_{X_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_X(u) \quad \text{za vsak } u \in \mathbb{R}$$

natanko tedaj, ko velja

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X.$$

Izrek 5.3. *monotona konvergenca*

Dokaz. Dokaz izreka je precej tehničen in ga bomo izpustili. Podroben dokaz lahko bralec najde v [Fristedt, B.E., Gray L.F. (1996) A modern approach to probability theory]. \square

Izrek 5.4. (*O enoličnosti*) *One to one correspondence between characteristic functions and distributions.*

Definicija 5.5. Naj bo X slučajna spremenljivka in F_X njena porazdelitev. Potem za $u \in \mathbb{R}$ Laplace-Stiltjesovo transformacijo porazdelitve F_X definiramo kot

$$\hat{F}_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ux} dF_X(x).$$

Izrek 5.6. (*Tonelli (Prirejen)*) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki definirani vsaka na svojem verjetnostnem prostoru in naj imata vsaka svojo gostoto f_X in f_Y glede na Lebesgueovo mero. Potem velja

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) \mathcal{L}^2(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx,$$

Izrek 5.7. (*Krepki zakon velikih števi*) Naj bo $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk s pričakovano vrednostjo $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$. Potem velja

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.g.} \mu.$$

Definicija 5.8. Slučajna spremenljivka X ima *Weibullovo porazdelitev* s parametri $a, b > 0$, če ima njena porazdelitev obliko

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0$$

in gostota obliko

$$f_X(x) = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad \text{za } x \geq 0.$$

Definicija 5.9. Naj bo F porazdelitvena funkcija neke nenegativne slučajne spremenljivke s prvim momentom. Potem je

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^x (1 - F(t)) dt$$

porazdelitev integrarnega repa F .

Izrek 5.10. izrek o sliki mere

Trditev 5.11. *pricakovana vrednost kot $\int_{(0,\infty)} P(X > x) dx$ za pozitivne slučajne spremenljivke*

Dokaz. dokaz trditve □

Definicija 5.12. *Prenovitveni proces* na verjetostnem protoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je slučajni proces karaktteriziran z zaporedjem medprihodnih časov $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ki zavzamejo vrednosti v $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ in je podan z zvezo

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

kjer je $T_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ čas n -tega prihoda.

Trditev 5.13. (*Neenakost Markova*) Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka. Potem za $x > 0$ velja

$$\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{x}.$$

Dokaz. Naj bo $x > 0$. Velja

$$x \mathbb{1}_{\{X > x\}} \leq X \iff x \mathbb{P}(X > x) \leq \mathbb{E}[X].$$

□

Definicija 5.14. Iščemo tako merljivo funkcijo g , kjer je $g(x) = 0$ za $x < 0$, za katero je $g(t - \cdot) \in L^1(dF)$, $\forall t \geq 0$, in za katero velja:

$$g(t) = h(t) + \int_{[0,t]} g(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (13)$$

Definicija 5.15. Za nenegativno merljivo funkcijo $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ rečemo, da je direktno Riemannovo integrabilna (krajše d.R.i.), če zadošča naslednjima pogojema:

- (1) Za vsak $\Delta > 0$ velja $\sum_{k \geq 0} (\sup_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(t)) < \infty$.
- (2) $\lim_{\Delta \downarrow 0} \Delta \sum_{k \geq 0} (\sup_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(t)) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \Delta \sum_{k \geq 0} (\inf_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(t))$.

Če h zadošča navedenima zahtevama, potem je limita v drugi zahtevi točno vrednost direktnega Riemannovega integrala

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty h(u) du.$$

Funkcija h poljubnega predznaka je d.R.i., če sta le-taki $h^+ = h \vee 0$ in $h^- = (-h) \vee 0$, pri čemer je

$$\text{d.R.i.} \int_0^\infty h(u) du = \text{d.R.i.} \int_0^\infty h^+(u) du - \text{d.R.i.} \int_0^\infty h^-(u) du.$$

Izrek 5.16. (*Smith*) *neki*

SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

trajektorija sample path

LITERATURA

- [1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
- [2] S.M. Ross, Stochastic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
- [3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).
- [4] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Second Edition, Springer, (2009).
- [5] M. Mandjes, O. Boxma, The Cramér–Lundberg model and its variants, Springer, (2023).
- [6] F. Spitzer, Principles of Random Walk. Second Edition, Springer, (1976).