Sestavljeni Poissonov proces in njegova upraba v financah

Anej Rozman

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Poissonov proces

Definicija

Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t\geq 0}$, definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, pravimo Poissonov proces z intenzivnostjo λ, če zadošča naslednjim pogojem:

1. $N_0 = 0$ $\mathbb{P}$*-skoraj gotovo.*
2. $(N_t)_{t\geq 0}$ *ima neodvisne in stacionarne prirastke,*
3. *Za* $0 \leq s < t$ *velja* $N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s))$,

Prirastki

Definicija

Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ *slučajni proces. Potem za* $s < t$ *definiramo prirastek procesa* $X_t - X_s$ *na intervalu* $[s,t]$*. Proces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *ima neodvisne prirastke, če so za vsak nabor realnih števil* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ *prirastki*

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Prirastki

Definicija

Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ *slučajni proces. Potem za* $s < t$ *definiramo prirastek procesa* $X_t - X_s$ *na intervalu* $[s, t]$. *Proces* $(X_t)_{t \geq 0}$ *ima neodvisne prirastke, če so za vsak nabor realnih števil* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ *prirastki*

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Definicija

Pravimo, da ima proces $(X_t)_{t \geq 0}$ *stacionarne prirastke, če za vsak* $s < t$ *in vsak* $h > 0$ *velja, da ima* $X_{t+h} - X_{s+h}$ *enako porazdelitev kot* $X_t - X_s$.

Sestavljeni Poissonov proces

Definicija

Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ *Poissonov proces z intenzivnostjo* λ*. Naj bo* $(X_i)_{i\geq 1}$ *zaporedje neodvisnih (med sabo in* $(N_t)_{t\geq 0}$*) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v* $\mathbb{R}$*. Potem je sestavljeni Poissonov proces* $(S_t)_{t\geq 0}$ *definiran kot*

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Neodvisnost in stacionarnost prirastkov

Trditev

CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.

Neodvisnost in stacionarnost prirastkov

Trditev

CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.

Dokaz.

Za nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ lahko slučajne spremeljivke $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti X_i od X_j za $i \neq j$ in N_t.

Neodvisnost in stacionarnost prirastkov

Dokaz.

Naj bo $h > 0$ in $s < t$. Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima $N_{t+h} - N_{s+h}$ členov. Ker za $HPP(\lambda)$ velja $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$, je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

$\square$

Pričakovana vrednost in varianca

Trditev

Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ *CPP in naj bosta* $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] < \infty$ *pričakovana vrednost in* $\sigma^2 = Var\left[X_i\right] < \infty$ *varianca slučajnih spremenljivk* X_i *za vsak* i*. Potem sta za* $t \geq 0$ *pričakovana vrednost in varianca* S_t *enaki*

$$\mathbb{E}\left[S_t\right] = \mu\lambda t \qquad \text{in} \qquad Var\left[S_t\right] = \lambda t\left(\sigma^2 + \mu^2\right).$$

Karakteristična funkcija

Trditev

Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i, ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot X. Potem ima za $t \geq 0$ karakteristična funkcija φ_{S_t} obliko

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)},$$

kjer φ_X označuje karakteristično funkcijo X.

Nekaj o porazdelitvi

Trditev

Naj bo $N \sim Pois(\lambda)$ *za* $\lambda > 0$ *in* $X_1, X_2, \dots X_n$ *neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od N) enako porazdeljene kot*

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots & \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} \dots & \end{pmatrix},$$

za neko zaporedje realnih števil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in zaporedje poztivnih realnih števil* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *za katere velja* $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda$*. Potem velja*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

kjer so $Y_1, \dots Y_n$ *neodvisne s.s. porazdeljene kot* $Pois(\lambda_1), Pois(\lambda_2) \dots$

Cramér–Lundbergov model: Teorija propada

Definicija

Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ *CPP. proces tveganja v Cramér–Lundbergovem modelu definiramo kot*

$$U_t = u + p(t) - S_t,$$

kjer je $u \geq 0$ *začetni kapital in* $p(t)$ *funkcija prihodkov.*