UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

Kazalo

Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

POVZETEK

Compound Poisson process and its application in finance

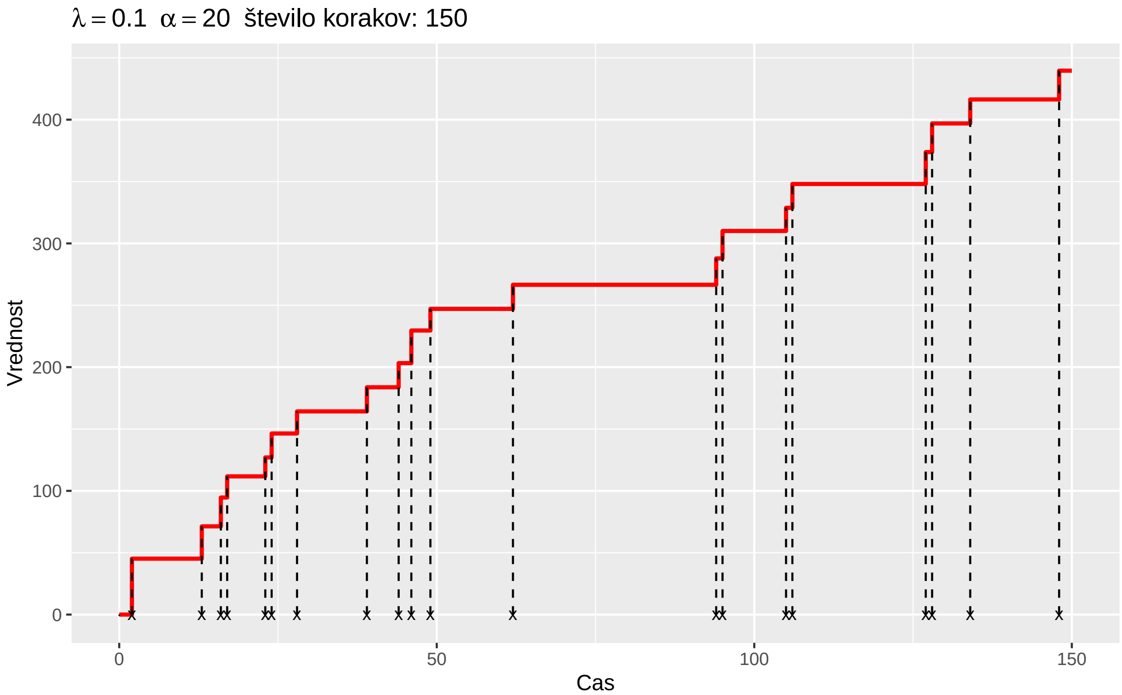
ABSTRACT

Prevod zgornjega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2020): 60G07 60G20 60G51
Ključne besede: slučajni procesi, sestavljen Poissonov proces
Keywords: stochastic processes, compound Poisson process

1. Uvod

Poissonov proces šteje število prihodov v danem časovnem intervalu, kjer narava prihodov sledi določenim omejitvam. Sestavljeni Poissonov proces je podoben Poissonovemu, razen da je vsak prihod utežen z neko slučajno spremenljivko. Kot standarden primer si lahko predstavljamo stranke, ki gredo v trgovino. Njihovi prihodi sledijo Poissonovemu procesu, znesek denarja, ki ga porabijo, pa sledi sestavljenemu Poissonovemu procesu. Predpostavimo, da stranke, ki prihajajo v trgovino, sledijo Poissonovemu procesu z intenzivnostjo $\lambda = 0.1$ in da je količina denarja, ki ga porabijo, porazdeljena eksponentno s parametrom $\alpha = 20$, torej naša trgovina ne omogoča vračil. Slika 1 prikazuje primer zaslužka dneva poslovanja. Na osi x je čas, na osi y pa kumulativna vsota vseh prihodov do nekega trenutka v času.



Slika 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa

Vidimo, da je to zelo zanimiva ideja slučajnega procesa, ki ima veliko potencialnih uporab za modeliranje različnih dogodkov. Na primer zahtevke v zavarovalnici, število poizvedb, ki jih prejema strežnik, špremembo v ceni nekega finančnega instrumenta in mnoge druge. V delu bomo izpeljali osnovne lastnosti procesa ter se osredotočili na njegovo uporabo v financah. Za začetek definirajmo osnovne pojme ter Sestavljen Poissonov proces.

Definicija 1.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in naj bo $T \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica ter (E, Σ) merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s T, je družina slučajnih spremenljivk $X_t : \Omega \to E$, ki so $(\mathcal{F}, \Sigma)$-merljive za vsak $t \in T$.

Opomba 1.2. Držali se bomo konvencije, da T predstavlja čas, torej $T = [0, \infty)$ in da s.s. zavzemajo vrednosti v realnih števili, torej $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, kjer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ predstavlja Borelovo $\sigma-$algebro na $\mathbb{R}$. Od tu dalje, če ni drugače navedeno, bomo privzeli, da so s.s. definirane na nekem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in zavzemajo vrednosti v $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Definicija 1.3. Za fiksen $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto X_t(\omega)$ *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa $(X_t)_{t\geq 0}$.

Opomba 1.4. Na slučajni proces lahko gledamo tudi kot na predpis, ki nam iz vorčnega prostora Ω priredi slučajno funkcijo $(X_t(\omega))_{t\geq 0} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.5. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. Potem za $s < t$ definiramo *prirastek procesa* $X_t - X_s$ na intervalu $[s, t]$. Proces $(X_t)_{t\geq 0}$ ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

Definicija 1.6. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak $s < t$ in vsak $h > 0$ velja, da ima $X_{t+h} - X_{s+h}$ enako porazdelitev kot $X_t - X_s$.

Definicija 1.7. Naj bo $\lambda > 0$. Slučajnemu procesu $(N_t)_{t\geq 0}$ definiranem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$ pravimo *Poissonov proces* z intenzivnostjo λ, če zadošča naslednjim pogojem:

(1) $N_0 = 0$ $\mathbb{P}$-skoraj gotovo.
(2) $(N_t)_{t\geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
(3) Za $0 \leq s < t$ velja $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t - s))$,

Opomba 1.8. Vidimo, da v definiciji ne zahtevamo, da so skoki procesa le $+1$. To sledi iz...

Definicija 1.9. Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Naj bo $(X_i)_{i\geq 1}$ zaporedje neodvisnih (med sabo in N_t) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Potem je *sestavljen Poissonov proces* $(S_t)_{t\geq 0}$ definiran kot

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Opomba 1.10. Vidimo, da je Poissonov proces le poseben primer sestavljenega Poissonovega procesa, ko za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$ za vsak i. Bolj v splošnem, če za X_i postavimo $X_i = \alpha$, potem velja $S_t = \alpha N_t$.

V nadaljevanju bomo Poissonovemu procesu rekli HPP (angl. Homogeneous Poisson Process) in ga označevali z $(N_t)_{t\geq 0}$, sestavljenemu Poissonovemu procesu pa CPP (angl. Compound Poisson Process) in ga označevali s $(S_t)_{t\geq 0}$. Če ni drugače navedeno, bo λ označevala njuno intenzivnost.

2. Lastnosti sestavljenega Poissonovega procesa

V tem poglavju si bomo ogledali osnovne lastnosti sestavljenega Poissonovega procesa. Pogledali si bomo...

Trditev 2.1. *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

Dokaz. Za nabor realnih števil $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ lahko slučajne spremenljivke $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti X_i od X_j za $i \neq j$ in N_t. Naj bo $h > 0$ in $s < t$. Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima $N_{t+h} - N_{s+h}$ členov. Ker za HPP velja $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$, je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

$\square$

Izračunajmo pričakovano vrednost in varianco CPP. Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ HPP z intenzivnostjo λ in naj bo $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ pričakovana vrednost slučajnih spremenljivk X_i za vsak i. Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$. Torej

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[S_t | N_t = k] \, \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{E}[X_i] \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= \mu \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \mu \lambda t.
\end{aligned}$$

Za izračun variance potrebujemo dodatno predpostavko, da imajo slučajne spremenljivke X_i drugi moment. V tem primeru označimo $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$. Velja $\mathrm{Var}[S_t] = \mathbb{E}[S_t^2] - \mathbb{E}[S_t]^2$, torej potrebujemo izračunati se drugi moment. Ponovno uporabimo formulo za popolno pričakovano vrednost.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t^2\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_t^2 \mid N_t = k\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2\right] \mathbb{P}(N_t = k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right] \mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(kE\left[X_i^2\right] + k(k-1)\mathbb{E}\left[X_i\right]\mathbb{E}\left[X_j\right]\right) \mathbb{P}\left(N_t = k\right)
\end{aligned}
$$

Prek formule $\mathrm{Var}\left[X_i\right] = \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - \mathbb{E}\left[X_i\right]^2$ dobimo

$$
\mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \sigma^2 + \mu^2.
$$

Izraz $kE\left[X_i^2\right] + k(k-1)\mathbb{E}\left[X_i\right]\mathbb{E}\left[X_j\right]$ se tako poenostavi v $k\sigma^2 + k^2\mu^2$, torej

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t^2\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k\sigma^2 + k^2\mu^2\right) \mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\
&= \sigma^2 \mathbb{E}\left[N_t\right] + \mu^2 \mathbb{E}\left[N_t^2\right] \\
&= \sigma^2 \lambda t + \mu^2(\lambda t + \lambda^2 t^2),
\end{aligned}
$$

kjer upoštevamo, da $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$. Tako dobimo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[S_t\right] &= \sigma^2 \lambda t + \mu^2(\lambda t + \lambda^2 t^2) - (\mu \lambda t)^2 \\
&= \sigma^2 \lambda t + \mu^2 \lambda t + \mu^2 \lambda^2 t^2 - \mu^2 \lambda^2 t^2 \\
&= \lambda t \left(\sigma^2 + \mu^2\right).
\end{aligned}
$$

Pojavi se vprašanje, kako pa je S_t porazdeljena? Na to bomo odgovorili s pomočjo karakteristične funkcije. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ n.e.p. s.s. z enako porazdelitvijo kot X. Izračunajmo momentno rodovno funckijo CPP. Označimo z $M_X(u)$ momentno rodovno funkcijo s.s X in z M_{S_t} momentno rodovno funkcijo CPP.

$$
\begin{aligned}
M_{S_t}(u) &= \mathbb{E}\left[\exp\left[uS_t\right]\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left[u \sum_{i=1}^{N_t} X_i\right]\right] \\
&= \mathbb{P}\left(N_t = 0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[u \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t = k\right]\right] \mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(N_t = 0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left[u \sum_{i=1}^{k} X_i\right]\right] \mathbb{P}\left(N_t = k\right) \\
&= e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{uX}\right]^n}_{M_X(u)^n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(M_X(u)\lambda t\right)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda t (M_X(u) - 1)}
\end{aligned}
$$

Iz opombe 1.10, sledi, da če za X_i vzamemo konstantno funkcijo $X_i = 1$, dobimo HPP. Tako vidimo, da je momentno rodovna funkcija HPP enaka $M_{S_t}(u) = e^{\lambda t (e^u - 1)}$. Poleg tega takoj dobimo, da sta karakteristična in rodovna funkcija CPP enaki

$$
\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t (\varphi_X(u) - 1)} \qquad \text{in} \qquad G_{S_t}(u) = e^{\lambda t (G_X(u) - 1)}.
$$

V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo CPP, saj je ta vedno definirana za vsak $u \in \mathbb{R}$.
Sedaj se posvetimo vprašanju, kako je porazdeljena S_t? Iz definicije HPP vemo, da je N_t za $t \geq 0$ porazdeljena kot Poissonova slučajna spremenljivka z intenzivnostjo λt. Fiksiramo $t \geq 0$ in računamo

$$
\begin{aligned}
F_{S_t}(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_t \leq x \mid N_t = k)\mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{k} X_i \leq x)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

kjer je $F_X^{*k}(x)$ porazdelitev k-te konvolucije slučajne spremenljivke X. Razen za posebne primere, je zgornji izraz za praktične namene ne-izračunljiv. Pokažimo, da je CPP v resnici porazdeljena, kot limita linearne kombinacije neodvisnih Poissonovih slučajnih spremenljivk. Naj bodo $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ neodvisne s.s. porazdeljene $\text{Pois}(\lambda_1)$, $\text{Pois}(\lambda_2), \ldots \text{Pois}(\lambda_n)$. Označimo s $\varphi_Y(u)$ karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $Y = a_1Y_1 + a_2Y_2 + \cdots + a_nY_n$. Potem po neodvisnosti velja

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(u) &= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{Y_j}(a_j u) \\
&= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j\left(e^{a_j iu}-1\right)} \\
&= e^{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\left(e^{a_j iu}-1\right)}.
\end{aligned}
$$

Če sedaj zapišemo $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(e^{a_j iu} - 1\right)$ kot $\int_{\mathbb{R}}(\lambda_j \left(e^{iu} - 1\right))\nu(du)$, za neko ustrezno mero ν, dobimo

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(u) &= e^{\int_{\mathbb{R}}(\lambda_j\left(e^{iu}-1\right))\nu(du)} \\
&= e^{\int_{\mathbb{R}}(\lambda_j\left(e^{iu}-1\right))\nu(du)}
\end{aligned}
$$

Zgled 2.2. Če pogledamo konkreten primer, ko so $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne s.s. porazdeljene eksponentno s parametrom α, lahko eksplicitno izračunamo porazdelitev S_t. Za $t \geq 0$ in $x \geq 0$ velja

$$
F_{S_t}(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x)
$$

$\diamondsuit$

Definicija 2.3. Slučajni proces X_t prilagojen glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ martingal, če velja

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$$

za vsak $0 \leq s \leq t$.

Pokažimo, da v splošnem CPP ni martingal.

Trditev 2.4. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bodo X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ za vsak i. Potem je S_t martingal natanko tedaj, ko je $\mu = 0$.*

Dokaz. Naj bo $0 \leq s \leq t$. Potem velja

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s + S_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_t - S_s\right] + \mathbb{E}\left[S_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mu\lambda(t-s) + S_s
\end{aligned}$$

Enakost $\mu\lambda(t-s) + S_s = S_s$ velja $\iff \mu\lambda(t-s) = 0 \iff \mu = 0.$ □

Trditev 2.5. *Naj bo $(S_t)_{t\geq 0}$ CPP z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bodo X_i neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ za vsak i, Potem je proces*

$$S_t - \mu\lambda t$$

martingal.

Dokaz. Naj bosta $0 \leq s < t$. Prirastek $S_t - S_s$ je neodvisen od $\mathcal{F}_s$ in ima pričakovano vrednost $\mu\lambda(t-s)$. Torej

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t - \mu\lambda t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[S_t - S_s\right] + S_s - \mu\lambda t \\
&= \mu\lambda(t-s) + S_s - \mu\lambda t \\
&= S_s - \mu\lambda s.
\end{aligned}$$

□

Če v nadaljevanju predpostavimo, da imajo X_i končen drugi moment, lahko govorimo o kvadratični variaciji CPP.

Definicija 2.6. Naj bo $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces. *Kvadratična variacija* procesa $(X_t)_{t\geq 0}$ je definirana kot

$$\langle X \rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)^2,$$

kjer je $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ zaporedje časovnih točk.

2.2. **Čas prvega prehoda.** Postavimo si vprašanje, kdaj bo CPP prvič dosegel nek $a \in \mathbb{R}$. Seveda je v primeru, ko so X_i zvezno porazdeljene, ta vrednost enaka 0. Lahko pa govorimo o tem, kadaj bo to vrednost presegel. Naj bo $T_a = \inf\{t \geq 0; S_t \geq a\}$ čas prvega prehoda CPP. V tem poglavju bomo izračunali porazdelitev T_a. Če pogledamo dogodek $\{T_a \leq t\}$, vidimo, da je enak dogodku $\cup_{n=1}^{\infty}\{S_{\frac{t}{n}} \geq a\}$. Ker vemo

Slovar strokovnih izrazov

Literatura

[1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
[2] S.M. Ross, Stochatic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).