

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

**Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Sestavljeni Poissonov proces	5
2.1. Osnovne lastnosti	5
2.2. Rodovne funkcije	6
2.3. Porazdelitev CPP	7
2.4. CPP kot martingal	10
3. Cramér-Lundbergov model	10
3.1. Predpostavke in omejitve modela	10
3.2. Verjetnost propada	11
3.3. Aproksimacije	11
3.4. Uporaba modela na podatkih...	11
Slovar strokovnih izrazov	11
Literatura	11

# Sestavljeni Poissonov proces in njegova uporaba v financah

## POVZETEK

# Compound Poisson process and its application in finance

## ABSTRACT

Prevod zgornjega povzetka v angleščino.

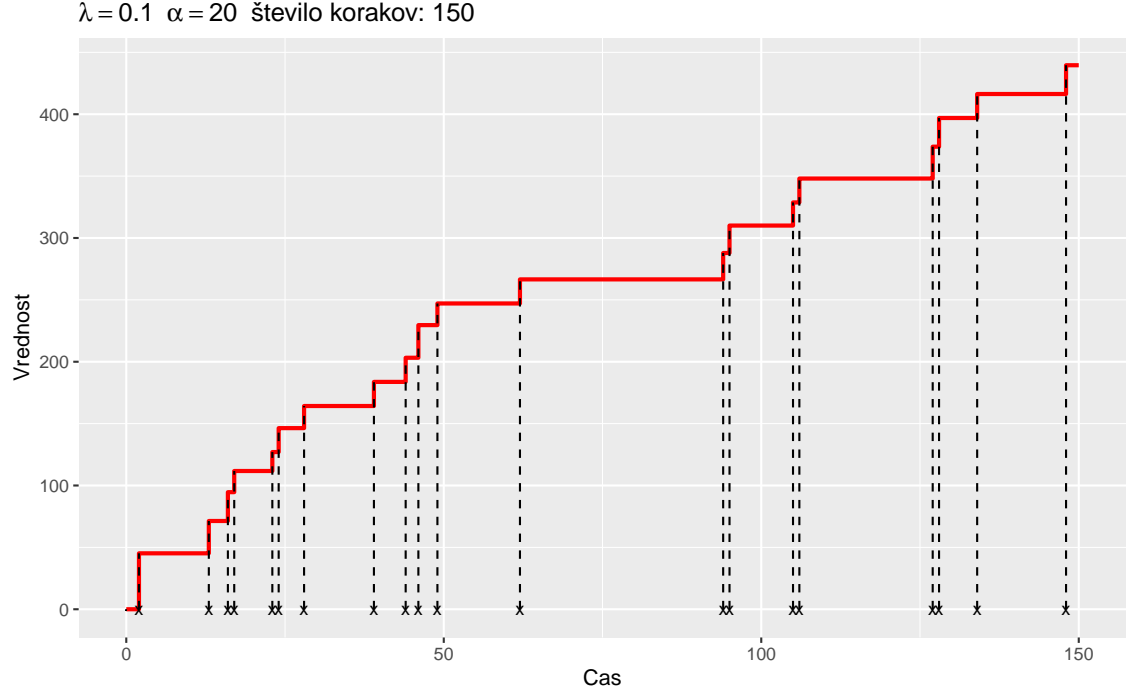
**Math. Subj. Class. (2020):** 60G07 60G20 60G51

**Ključne besede:** slučajni procesi, sestavljeni Poissonov proces, Cramér–Lundbergov model

**Keywords:** stochastic processes, compound Poisson process, Cramér–Lundberg model

## 1. UVOD

Uvodni tekst in motivacija za študiranje procesa, nakaži da boš obravnaval Cramer-Ludenbergov model



SLIKA 1. Primer trajektorije sestavljenega Poissonovega procesa

**Definicija 1.1.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  verjetnostni prostor in naj bo  $T \neq \emptyset$  neprazna indeksna množica ter  $(E, \Sigma)$  merljiv prostor. *Slučajni proces*, parametriziran s  $T$ , je družina slučajnih elementov  $X_t : \Omega \rightarrow E$ , ki so  $(\mathcal{F}, \Sigma)$ -merljivi za vsak  $t \in T$ .

**Opomba 1.2.** V delu se bomo omejili na primer, ko  $T$  predstavlja čas, torej  $T = [0, \infty)$  in da slučajne spremenljivke zavzemajo vrednosti v realnih številih, torej  $(E, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , kjer  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  predstavlja Borelovo  $\sigma$ -algebro na  $\mathbb{R}$ .

**Definicija 1.3.** Za fiksni  $\omega \in \Omega$  je preslikava  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto X_t(\omega)$  *trajektorija* oziroma *realizacija* slučajnega procesa  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Tako lahko slučajni proces gledamo kot predpis, ki vsakemu elementu vzorčnega prostora  $\Omega$  priredi slučajno funkcijo  $(X_t(\omega))_{t \geq 0} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicija 1.4.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces. Potem za  $s < t$  definiramo *prirastek procesa*  $X_t - X_s$  na intervalu  $[s, t]$ . Proces  $(X_t)_{t \geq 0}$  ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$  prirastki

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

med seboj neodvisni.

**Trditev 1.5.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Potem ima  $(X_t)_{t \geq 0}$  neodvisne prirastke natanko tedaj, ko je za vsak nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$  prirastek  $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$  neodvisen od slučajnega vektorja  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ .

Dokaz. ( $\Rightarrow$ ) :

( $\Leftarrow$ ) :

□

**Definicija 1.6.** Naj bo  $(X_t)_{t \geq 0}$  slučajni proces. Potem pravimo, da ima proces *stacionarne prirastke*, če za vsak  $s < t$  in vsak  $h > 0$  velja, da ima  $X_{t+h} - X_{s+h}$  enako porazdelitev kot  $X_t - X_s$ .

**Definicija 1.7.** Naj bo  $\lambda > 0$ . Slučajnemu procesu  $(N_t)_{t \geq 0}$ , definiranim na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  in z vrednostmi v  $\mathbb{N}_0$ , pravimo *Poissonov proces* z intenzivnostjo  $\lambda$ , če zadošča naslednjim pogojem:

- (1)  $N_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -skoraj gotovo.
- (2)  $(N_t)_{t \geq 0}$  ima neodvisne in stacionarne prirastke,
- (3) Za  $0 \leq s < t$  velja  $N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t - s))$ ,

**Opomba 1.8.** Vidimo, da v definiciji ne zahtevamo, da so skoki procesa le  $+1$ . To sledi iz...

## 2. SESTAVLJENI POISSONOV PROCES

Povzetek poglavja /krajši uvod

**Definicija 2.1.** Naj bo  $(N_t)_{t \geq 0}$  Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda$ . Naj bo  $(X_i)_{i \geq 1}$  zaporedje neodvisnih (med sabo in  $(N_t)_{t \geq 0}$ ) in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v  $\mathbb{R}$ . Potem je *sestavljeni Poissonov proces*  $(S_t)_{t \geq 0}$  definiran kot

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

**Opomba 2.2.** Vidimo, da je sestavljeni Poissonov proces posplošitev homogenega Poissonovega procesa, saj če za  $X_i$  vzamemo konstantno funkcijo  $X_i = 1$  za vsak  $i$ , dobimo ravno *HPP*. Bolj v splošnem, če za  $X_i$  postavimo  $X_i = \alpha$ , potem velja  $S_t = \alpha N_t$ .

V nadaljevanju bomo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda > 0$  označevali s *HPP*( $\lambda$ ) ali naborom slučajnih spremenljivk  $(N_t)_{t \geq 0}$  (angl. Homogeneous Poisson Process), sestavljeni Poissonov proces pa s *CPP* ali naborom slučajnih spremenljivk  $(S_t)_{t \geq 0}$  (angl. Compound Poisson Process), kjer bo vsota sledila *HPP*( $\lambda$ ).

### 2.1. Osnovne lastnosti.

**Trditev 2.3.** *CPP ima neodvisne in stacionarne prirastke.*

*Dokaz.* Za nabor realnih števil  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$  lahko slučajne spremenljivke  $S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$  zapišemo kot

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j.$$

Neodvisnost prirastkov sledi po neodvisnosti  $X_i$  od  $X_j$  za  $i \neq j$  in  $N_t$ . Naj bo  $h > 0$  in  $s < t$ . Potem velja

$$S_{t+h} - S_{s+h} = \sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j$$

Vsota ima  $N_{t+h} - N_{s+h}$  členov. Ker za  $HPP$  velja  $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$ , je

$$\sum_{j=N_{s+h}+1}^{N_{t+h}} X_j = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} X_j = S_t - S_s.$$

□

**Trditev 2.4.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP in naj bosta  $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$  pričakovana vrednost in  $\sigma^2 = \text{Var}[X_i] < \infty$  varianca slučajnih spremenljivk  $X_i$  za vsak  $i$ . Potem sta za  $t \geq 0$  pričakovana vrednost in varianca  $S_t$  enaki

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu\lambda t \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2).$$

*Dokaz.* Definiramo slučajno spremenljivko

$$Y_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k \tag{1}$$

in vidimo, da je za  $t \geq 0$   $S_t$  pogojno na  $N_t = k$  enako porazdeljena kot  $Y_k$ . Tako dobimo

$$\mathbb{E}[S_t \mid N_t = k] = \mathbb{E}[Y_k] = k\mu \quad \text{in} \quad \text{Var}[S_t \mid N_t = k] = \text{Var}[Y_k] = k\sigma^2.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost velja  $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$ . Torej

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\mu N_t] = \mu\lambda t.$$

Prek formule  $\text{Var}[S_t] = \mathbb{E}[\text{Var}[S_t \mid N_t]] + \text{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]]$  računamo

$$\mathbb{E}[\text{Var}[S_t \mid N_t]] = \mathbb{E}[\text{Var}[X_i \mid N_t] N_t] = \sigma^2 \lambda t$$

in

$$\text{Var}[\mathbb{E}[S_t \mid N_t]] = \text{Var}[\mathbb{E}[X_i \mid N_t] N_t] = \mu^2 \lambda t,$$

saj  $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$ . Skupaj dobimo  $\text{Var}[S_t] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2)$ . □

## 2.2. Rodovne funkcije.

**Trditev 2.5.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP. Naj bodo slučajne spremenljivke  $X_i$ , ki jih seštevamo v CPP enako porazdeljene kot  $X$ . Potem ima za  $t \geq 0$  karakteristična funkcija  $\varphi_{S_t}$  obliko

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)},$$

kjer  $\varphi_X$  označuje karakteristično funkcijo  $X$ .

*Dokaz.*

$$\varphi_{S_t}(u) = \mathbb{E}[\exp[iuS_t]] = \mathbb{E}\left[\exp\left[iu \sum_{i=1}^{N_t} X_i\right]\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ iu \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t = k \right] \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left[ iu \sum_{i=1}^k X_i \right] \right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E} [e^{iuX}]^k}_{\varphi_X(u)^k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_X(u) \lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)}
\end{aligned} \tag{2}$$

□

Hitro lahko vidimo, da sta karakteristična in rodovna funkcija  $CPP$  enaki

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_X(u)-1)} \quad \text{in} \quad G_{S_t}(u) = e^{\lambda t(G_X(u)-1)},$$

saj v splošnem velja, da je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke  $Y$  enaka njeni momentno rodovni funkciji izverednoteni v  $iu$ , torej  $\varphi_Y(u) = G_Y(iu)$ . Rodovna pa izverednotena v  $\ln(u)$ , torej  $G_Y(u) = M_Y(\ln(u))$ , če obstajata. V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem karakteristično funkcijo  $CPP$ , saj je ta vedno definirana za vsak  $u \in \mathbb{R}$ . Prav nam bo prišla tudi naslednja povezava med karakteristično funkcijo  $CPP$  in rodovno funkcijo  $HPP(\lambda)$ .

**Trditev 2.6.** *Naj bosta  $(S_t)_{t \geq 0}$   $CPP$  in  $(N_t)_{t \geq 0}$   $HPP(\lambda)$  neodvisna. Naj bodo slučajne spremenljivke  $X_i$ , ki jih seštevamo v  $CPP$  enako porazdeljene kot  $X$ . Potem za fiksen  $t \geq 0$  velja*

$$\varphi_{S_t}(u) = G_{N_t}(\varphi_X(u)).$$

*Dokaz.* Po enačbi (2) iz trditve 2.5 velja, da je  $\varphi_{S_t}(u)$  enaka

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_t}(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_X(u)^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= G_{N_t}(\varphi_X(u)).
\end{aligned}$$

□

**2.3. Porazdelitev CPP.** Sedaj se posvetimo vprašanju, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka  $S_t$  za  $t \geq 0$ ? Iz definicije  $HPP(\lambda)$  vemo, da je  $N_t$  za  $t \geq 0$  porazdeljena kot Poissonova slučajna spremenljivka s parametrom  $\lambda t$ . Fiksiramo  $t \geq 0$  in dobimo

$$\begin{aligned}
F_{S_t}(x) &= \mathbb{P}(S_t \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_t \leq x \mid N_t = k) \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k X_i \leq x\right) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

kjer je  $F_X^{*k}(x)$  porazdelitev  $k$ -te konvolucije slučajne spremenljivke  $X$ . Razen za posebne primere, je zgornji izraz za praktične namene ne-izračunljiv in nam ne pomaga veliko.

**Zgled 2.7.** Če pogledamo primer, ko so  $X_1, X_2, \dots$  neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke, porazdeljene kot  $X$

$$X \sim \text{Gamma}(a) \quad f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}$$

s parametrom  $a > 0$ , lahko pridemo do razmeroma eksplicitne porazdelitve  $CPP$ . Gostota  $k$ -te konvolucije  $X_1 + \dots + X_k$  ima formulo

$$f_{X_1 + \dots + X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(na)} x^{na-1} e^{-x}.$$

Za  $t \geq 0$  in  $x \geq 0$  torej velja

$$\begin{aligned} F_{S_t}(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \dots \end{aligned}$$

◇

**Trditev 2.8.** Naj bo  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  za  $\lambda > 0$  in  $X_1, X_2, \dots, X_n$  neodvisne s.s. (neodvisne med sabo in od  $N$ ) enako porazdeljene kot

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{\lambda_3}{\lambda} \dots \end{pmatrix},$$

za poljubne  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  in  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$  za katere velja  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda$ . Potem velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Y_j \sim \sum_{j=1}^N X_j,$$

kjer so  $Y_1, Y_2, \dots$  neodvisne s.s. porazdeljene kot  $\text{Pois}(\lambda_1), \text{Pois}(\lambda_2), \dots$

*Dokaz.* S  $\varphi_{Z_n}(u)$  označimo karakteristično funkcijo s.s.  $Z_n := a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_n Y_n$  in s  $\varphi_Z(u)$  karakteristično funkcijo s.s.  $Z := \sum_{j=1}^N X_j$ . Po neodvisnosti velja

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(u) &= \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(a_j u) \\ &= \prod_{j=1}^n \exp [\lambda_j (e^{a_j i u} - 1)] \\ &= \exp \left[ \sum_{j=1}^n \lambda_j (e^{a_j i u} - 1) \right]. \end{aligned}$$



Po trditvi 2.6 velja

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(u) &= G_N(\varphi_X(u)) \\
&= \exp[\lambda(\varphi_X(u) - 1)] \\
&= \exp\left[\lambda\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda} e^{a_j i u} - 1\right)\right] \\
&= \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (e^{a_j i u} - 1)\right]
\end{aligned}$$

Vidimo, da velja

$$\varphi_{Z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_Z,$$

torej po Lévijevem izreku o kontinuiteti velja  $Z_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \sim Z$ .  $\square$

**Posledica 2.9.** Naj bo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  poljubno zaporedje realnih števil in  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje pozitivnih realnih števil, za katere velja  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \lambda$  in

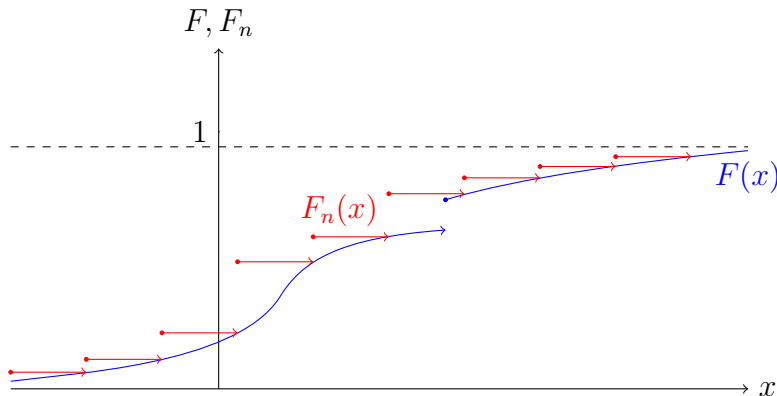
$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Potem velja

$$\sum_{j=1}^n a_j Y_j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sum_{j=1}^N X_j,$$

*Dokaz.* Ker velja  $\varphi_{Z_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_Z(u)$  za vsak  $u \in \mathbb{R}$ , po Lévijevem izreku o zveznosti sledi, da  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$ .  $\square$

Kaj pa v primeru, ko so  $X_i$  zvezno porazdeljene? Tedaj se problema lotimo na sledeč način. Definiramo  $F_n(x) := F(\frac{m}{n})$  kjer je  $F(x)$  porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke  $Z_n$  in  $m = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid \frac{k}{n} > F_n(x)\}$ .



SLIKA 2. Aproximacija  $F$  s  $F_n$

Kot je razvidno iz slike 2, je  $F_n(x)$  stopničasta funkcija, ki aproksimira porazdelitveno funkcijo  $F(x)$ . Velja  $F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F$  povsod kjer je  $F$  zvezna.

## 2.4. CPP kot martingal.

**Definicija 2.10.** Slučajni proces  $X_t$  prilagojen glede na filtracijo  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  martingal, če velja

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$$

za vsak  $0 \leq s \leq t$ .

Pokažimo, da v splošnem CPP ni martingal.

**Trditev 2.11.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP z intenzivnostjo  $\lambda > 0$  in naj bodo  $X_i$  neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  za vsak  $i$ . Potem je  $S_t$  martingal natanko tedaj, ko je  $\mu = 0$ .

*Dokaz.* Naj bo  $0 \leq s \leq t$ . Potem velja

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[S_t - S_s + S_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[S_t - S_s] + \mathbb{E}[S_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mu\lambda(t - s) + S_s \end{aligned}$$

Enakost  $\mu\lambda(t - s) + S_s = S_s$  velja  $\iff \mu\lambda(t - s) = 0 \iff \mu = 0$ . □

**Opomba 2.12.** Seveda, če velja  $\mu \geq 0$ , potem je  $S_t$  submartingal, če pa  $\mu \leq 0$ , je  $S_t$  supermartingal.

**Trditev 2.13.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP z intenzivnostjo  $\lambda > 0$  in naj bodo  $X_i$  neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  za vsak  $i$ . Potem je proces

$$S_t - \mu\lambda t$$

*martingal.*

*Dokaz.* Naj bosta  $0 \leq s < t$ . Prirastek  $S_t - S_s$  je neodvisen od  $\mathcal{F}_s$  in ima pričakovano vrednost  $\mu\lambda(t - s)$ . Torej

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t - \mu\lambda t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[S_t - S_s] + S_s - \mu\lambda t \\ &= \mu\lambda(t - s) + S_s - \mu\lambda t \\ &= S_s - \mu\lambda s. \end{aligned}$$

□

## 3. CRAMÉR-LUNDBERGOV MODEL

zgodovinski uvod in uporaba

### 3.1. Predpostavke in omejitve modela.

**Definicija 3.1.** Naj bo  $(S_t)_{t \geq 0}$  CPP in naj bodo  $X_i$  n.e.p. s.s. z enako porazdelitvijo kot  $X$  in  $\mathbb{E}[X] = \mu$  ter  $\text{Var}[X] = \sigma^2$ . Potem *proces tveganja* v Cramér-Lundbergovem modelu definiramo kot

$$U_t = u + ct - S_t,$$

kjer je  $u \geq 0$  začetni kapital zavarovalnice in  $c > 0$  stopnja prihodkov iz premij.

**3.2. Verjetnost propada.** Propad bomo definirali kot dogodek, ko bo vrednost procesa tveganja postala negativna.

**Definicija 3.2.** Za  $0 < T \leq \infty$  je *Verjetnost propada* v Cramér-Lundbergovem modelu definirana kot

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(U_t < 0 \text{ za nek } T \geq t > 0),$$

če gledamo proces na končnem intervalu in kot

$$\psi(u) = \mathbb{P}(U_t < 0 \text{ za nek } t > 0),$$

če gledamo proces na neskončnem intervalu. Označimo še

$$\tau(T) = \inf\{t \mid T \geq t \geq 0, U_t < 0\},$$

kot *čas propada*, kjer se držimo konvencije, da je  $\inf \emptyset = \infty$  in pišemo  $\tau = \tau(\infty)$  za čas propada na neskončnem intervalu.

Seveda takoj lahko opazimo, da je  $\mathbb{E}[U_t] = u + ct - \mathbb{E}[S_t] = u + ct - \mu\lambda t$ . Kar nam da prvo intuicijo o stopnji prihodkov premij  $c$ .

### 3.3. Aproksimacije.

### 3.4. Uporaba modela na podatkih...

#### SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

#### LITERATURA

- [1] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, (2004).
- [2] S.M. Ross, Stochastic Processes: Second Edition, Wiley, (1996).
- [3] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance, Springer, (1997).