UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anej Rozman

Lévijevi procesi z uporabo v financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Ljubljana, 2024

Kazalo

Lévijevi procesi z uporabo v financah

Povzetek

Lévy processes and their use in finance

Abstract

Prevod zgornjega povzetka v angleščino.

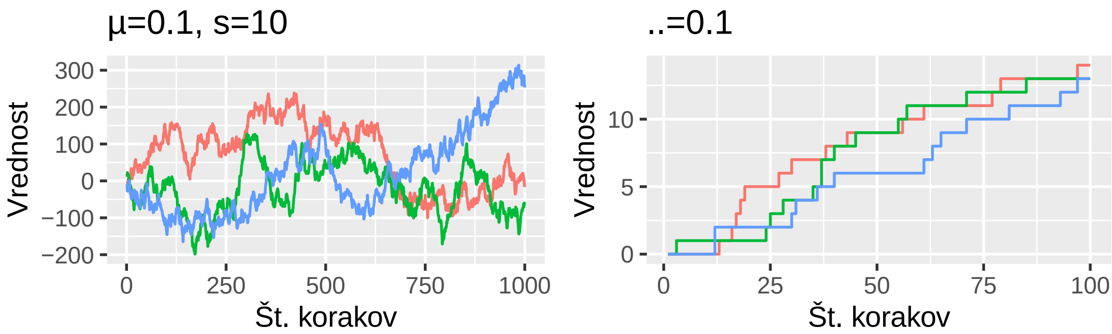
Math. Subj. Class. (2010): 91G10 60G00 60G01

Ključne besede: Slucajni procesi, Lévijevi procesi

Keywords: Stochastic processes, Lévy processes

1. Uvod

Lévijev proces je slučajni proces imenovan po francoskem matematiku Paulu Lévyju, ki je bil eden od pionirjev na področju verjetnosti v 20. stoletju. Igral je ključno vlogo pri razumevanju procesov z neodvisnimi, stacionarnimi inkrementi (prvotno ime za Lévijeve procese), (dokončaj)



Slika 1. Primera trajektorij Brownovega gibanja in Poissonovega procesa

Zgornji sliki prikazujeta simulacije trajektorij Brownovega gibanja oz. Wienerjevega procesa (levo) in Poissonovega procesa (desno). Oba sta izredno pomembna v svetu financ, Poissonov proces v zavarovalništvu in Brownovo gibanje pri vrednotenju finančnih instrumetnov npr. opcij. Na prvi pogled ni videti, kot da imata kaj dosti skupnega razen dejstva, da sta slučajna procesa. Brownovo gibanje ima zvezne nemonotone trajektorije, medtem ko so trajektorije Poissonovega procesa diskretne in naraščajoče. Kot pa bomo videli, oba zadoščata definiciji Lévijevega procesa. (Ponovno napiši z lepšimi besedami)

2. Neskončno deljive porazdelitve in Lévy-Hinčinova formula

V tem poglavji si bomo ogledali difinicijo neskončno deljivih porazdelitev in njihovo tesno povezavo z Lévijevimi procesi. Navedli in dokazali bomo izredno pomemben izrek znan kot Lévy-Hinčinova karakterizacija ter pokazali, da velja za Lévijeve procese. (olepšaj in dopolni)

Definicija 2.1. Pravimo, da ima realno številska slučajna spremenljivka X *neskončno deljivo porazdelitev*, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$, da velja

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \ldots X_n,$$

kjer $\stackrel{d}{=}$ pomeni enakost v porazdelitvi.

Opomba 2.2. V zgornji definiciji opazimo, da ima X neskončno deljivo porazdelitev, če in samo če velja, da za vsak $n \in \mathbb{N}$, lahko n-ti koren karakteristične funkcije $\varphi(X)$ izberemo tako, da je karakteristična funkcija neke slučanjne spremenljivke.

Lema 2.3. *Linearne kombinacije neodvisnih neskončno deljivih slučajnih spremenljivk so neskončno deljive slučajne spremenljivke.*

Dokaz. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ lahko zapišemo $X_i \stackrel{d}{=} X_{i_1} + \cdots + X_{i_n}$, torej za $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ lahko $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ zapišemo kot

$$\begin{aligned} a_1X_1 + \cdots + a_nX_n &\stackrel{d}{=} a_1(X_{1_1} + \cdots + X_{1_n}) + \cdots + a_n(X_{n_1} + \cdots + X_{n_n}) \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} a_iX_{i_1} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_iX_{i_n}. \end{aligned}$$

□

Definicija 2.4. Slučajnemu procesu $X = \{X_t \mid t \geq 0\}$ definiranem na verjetnostnemu prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pravimo *Lévijev proces*, če zadošča naslednjim pogojem:

(1) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.
(2) Poti X so $\mathbb{P}$-skoraj gotovo zvezne z desne (z levimi limitami).
(3) Za $0 \leq s \leq t$ je $X_t - X_s$ enako porazdeljena kot X_{t-s}.
(4) Za $0 \leq s \leq t$ je $X_t - X_s$ neodvisna od $\{X_u \mid 0 \leq u \leq s\}$.

Definicija 2.5. *Lévijeva mera* je mera Π na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ki zadošča

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty.$$

Izrek 2.6. ***(Lévy-Hinčinova formula)*** *Verjetnostna mera μ na realni osi je neskončno deljiva s karakterističnim eksponentom Φ,*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x}\mu(dx) = e^{-\Phi(\theta)}, \ \text{za } \theta \in \mathbb{R},$$

če in samo če obstaja taka trojica (a, σ, Π), kjer sta $a, \sigma \in \mathbb{R}$ in Π mera na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ki zadošča $\int_{\mathbb{R}} 1 \wedge x^2\Pi(dx) \leq \infty$, da za vsak $\theta \in \mathbb{R}$ velja

$$\Phi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbb{1}_{(|x|<1)})\Pi(dx).$$

Še več, trojica (a, σ, Π) je enolično določena.

Opomba 2.7.
(1) V izreku se omejimo na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, da enolično določimo mero Π. Ekvivalentno bi lahko postavili pogoj $\Pi(\{0\}) = c$ za $c \in \mathbb{R}$ in namesto $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ pisali $\mathbb{R}$.
(2) Izbira indikatorja $\mathbb{1}_{(|x|<1)}$ v integralu je prav tako pojlubna, saj lahko hitro preverimo, da sprememba na $\mathbb{1}_{(|x|<c)}$ za $c > 0$ spremeni le konstatno a.

Dokaz. □

Lema 2.8. *Naj bo X neskončno deljiva slučajna spremenljivka in φ_X njena karakteristična funkcija. Potem za vsak $z \in \mathbb{C}$. velja*

$$1 - Re(\varphi_X(2z)) \leq 4(1 - Re(\varphi_X(z)))^2 \qquad \text{in} \qquad 1 - |\varphi_X(2z)|^2 \leq 4(1 - |\varphi_X(z)|^2)^2.$$

Dokaz. $\int(1 - \cos(2zx))dx = 2\int(1 - \cos(zx))$ □

Lema 2.9. *Naj bo X neskončno deljiva slučajna spremenljivka in φ_X njena karakteristična funkcija. Potem za vsak $x \in \mathbb{R}$. velja $\varphi_X(x) \neq 0$.*

Dokaz. □

Izrek 2.10. *Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neskončno deljivih slučajnih spremenljivk, ki ??? konvergirajo k X. Potem je X neskončno deljiva slučajna spremenljivka.*

Slovar strokovnih izrazov

Literatura