Lévijevi procesi in njihova uporaba v financah

Anej Rozman

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Lévijev proces

Definicija

Slučajnemu procesu $X = \{X_t \mid t \geq 0\}$ *definiranem na verjetnostnemu prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *pravimo Lévijev proces, če zadošča naslednjim pogojem:*

1. $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.
2. *Trajektorije* X *so* $\mathbb{P}$*-skoraj gotovo zvezne z desne (z levimi limitami).*
3. *Za* $0 \leq s \leq t$ *je* $X_t - X_s$ *enako porazdeljena kot* X_{t-s}.
4. *Za* $0 \leq s \leq t$ *je* $X_t - X_s$ *neodvisna od* $\{X_u \mid 0 \leq u \leq s\}$.

Neskončno deljive porazdelitve

Definicija

Pravimo, da ima realno številska slučajna spremenljivka X neskončno deljivo porazdelitev, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $(X_i)_{i=1,\dots,n}$, da velja

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \dots X_n,$$

kjer $\stackrel{d}{=}$ pomeni enakost v porazdelitvi.

Nekaj zgledov

Zgled

Poissonova porazdelitev je neskončno deljiva.

Nekaj zgledov

Zgled

Poissonova porazdelitev je neskončno deljiva.

Naj bo $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Vemo da so vsote neodvisnih Poissonovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk spet Poissonovo porazdeljene. Torej lahko za poljuben $n \in \mathbb{N}$ zapišemo

$$X \stackrel{d}{=} \mathrm{Pois}(\frac{\lambda}{n}) + \cdots + \mathrm{Pois}(\frac{\lambda}{n}).$$

Nekaj zgledov

Zgled

Poissonova porazdelitev je neskončno deljiva.

Naj bo $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Vemo da so vsote neodvisnih Poissonovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk spet Poissonovo porazdeljene. Torej lahko za poljuben $n \in \mathbb{N}$ zapišemo

$$X \overset{d}{=} \text{Pois}(\frac{\lambda}{n}) + \cdots + \text{Pois}(\frac{\lambda}{n}).$$

Z enakim razmislekom lahko pokažemo, da je Normalna porazdelitev neskončno deljiva.

Nekaj zgledov

Zgled

$X \sim U([0,1])$ *ni neskončno deljiva.*

Nekaj zgledov

Zgled

$X \sim U([0,1])$ *ni neskončno deljiva.*

Recimo, da je X neskončno deljiva. Potem za dani $n \in \mathbb{N}$ obstajajo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$, da velja

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + \cdots + X_n.$$

Nekaj zgledov

Zgled

$X \sim U([0,1])$ ni neskončno deljiva.

Recimo, da je X neskončno deljiva. Potem za dani $n \in \mathbb{N}$ obstajajo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$, da velja

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + \cdots + X_n.$$

<— Naprej na tabli

Lema

Linearne kombinacije neodvisnih neskončno deljivih slučajnih spremenljivk so neskončno deljive slučajne spremenljivke.

Lema

Linearne kombinacije neodvisnih neskončno deljivih slučajnih spremenljivk so neskončno deljive slučajne spremenljivke.

Dokaz.

Naj bodo $X_1, X_2, ..., X_m$ neodvisne neskončno deljive s. s. Tedaj lahko za vsak $n \in \mathbb{N}$ zapišemo $X_i \stackrel{d}{=} X_{i_1} + \cdots + X_{i_n}$, torej za $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ lahko $a_1 X_1 + \cdots + a_m X_m$ zapišemo kot

$$\begin{aligned} a_1 X_1 + \cdots + a_m X_m &\stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} a_1(X_{1_1} + \cdots + X_{1_n}) + \cdots + a_m(X_{m_1} + \cdots + X_{m_n}) \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{m} a_i X_{i_1} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_i X_{i_n}. \end{aligned}$$

$\square$

Lévy-Hinčinova formula

Izrek

(Lévy-Hinčinova formula) *Neskončno deljive porazdelitve na* $\mathbb{R}^+$ *je možno opisati s pari* (σ, ν)*, kjer je* $\sigma \in \mathbb{R}^+$ *in* ν *mera, ki zadošča pogoju* $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} 1 \wedge x^2 \nu(dx) < \infty$*, in sicer paru* (σ, ν) *priredimo karakteristično funkcijo* $\varphi_{\sigma,\nu}(t) = e^{-\theta(t)}$*,*

$$\theta(t) = \left(\sigma i t + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-itx}) \nu(dx)\right).$$

Ta predpis predstavlja bijekcijo med omenjenimi pari (σ, ν) *in neskončno deljivimi porazdelitvami na* $\mathbb{R}^+$*.*

Poissonova porazdelitev

Določimo par (σ, ν) za Poissonovo porazdelitev.

Poissonova porazdelitev

Določimo par (σ, ν) za Poissonovo porazdelitev. Vemo de je karakteristična funkcija Poissonove porazdelitve enaka

$$\varphi(t) = \exp\left[\lambda(e^{it} - 1)\right].$$

Poissonova porazdelitev

Določimo par (σ, ν) za Poissonovo porazdelitev. Vemo de je karakteristična funkcija Poissonove porazdelitve enaka

$$\varphi(t) = \exp\left[\lambda(e^{it} - 1)\right].$$

Po Lévy-Hinčinovi formuli pa je oblike

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp\left[-\sigma it - \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-itx})\nu(dx)\right] = \\ &= \exp\left[-\sigma it + \int_{(0,\infty)} (e^{-itx} - 1)\nu(dx)\right].\end{aligned}$$

Poissonova porazdelitev

Določimo par (σ, ν) za Poissonovo porazdelitev. Vemo de je karakteristična funkcija Poissonove porazdelitve enaka

$$\varphi(t) = \exp\left[\lambda(e^{it} - 1)\right].$$

Po Lévy-Hinčinovi formuli pa je oblike

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp\left[-\sigma it - \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-itx})\nu(dx)\right] = \\ &= \exp\left[-\sigma it + \int_{(0,\infty)} (e^{-itx} - 1)\nu(dx)\right].\end{aligned}$$

Vidimo lahko, da je $\sigma = 0$ in $\nu = \lambda\delta_1$.