# Lévijevi procesi in njihova uporaba v financah

Anej Rozman

Mentor: doc. dr. Martin Raič

# Lévijev proces

**Definicija**

*Slučajnemu procesu* $X = \{X_t \mid t \geq 0\}$ *definiranem na verjetnostnemu prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *pravimo Lévijev proces, če zadošča naslednjim pogojem:*

1. $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1.$
2. *Trajektorije* $X$ *so* $\mathbb{P}$*-skoraj gotovo zvezne z desne (z levimi limitami).*
3. *Za* $0 \leq s \leq t$ *je* $X_t - X_s$ *enako porazdeljena kot* $X_{t-s}$.
4. *Za* $0 \leq s \leq t$ *je* $X_t - X_s$ *neodvisna od* $\{X_u \mid 0 \leq u \leq s\}$.

# Neskončno deljive porazdelitve

**Definicija**

*Pravimo, da ima realno številska slučajna spremenljivka X neskončno deljivo porazdelitev, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$, da velja*

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \ldots X_n,$$

*kjer $\stackrel{d}{=}$ pomeni enakost v porazdelitvi.*

# Nekaj zgledov

## Zgled

*Poissonova porazdelitev je neskončno deljiva.*

# Nekaj zgledov

**Zgled**

*Poissonova porazdelitev je neskončno deljiva.*

Naj bo $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Vemo da so vsote neodvisnih Poissonovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk spet Poissonovo porazdeljene. Torej lahko za poljuben $n \in \mathbb{N}$ zapišemo

$$X \stackrel{d}{=} \mathrm{Pois}(\frac{\lambda}{n}) + \cdots + \mathrm{Pois}(\frac{\lambda}{n}).$$

# Nekaj zgledov

## Zgled

*Poissonova porazdelitev je neskončno deljiva.*

Naj bo $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Vemo da so vsote neodvisnih Poissonovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk spet Poissonovo porazdeljene. Torej lahko za poljuben $n \in \mathbb{N}$ zapišemo

$$X \stackrel{d}{=} \text{Pois}(\frac{\lambda}{n}) + \cdots + \text{Pois}(\frac{\lambda}{n}).$$

Z enakim razmislekom lahko pokažemo, da je Normalna porazdelitev neskončno deljiva.

# Nekaj zgledov

**Zgled**

$X \sim U([0,1])$ *ni neskončno deljiva.*

# Nekaj zgledov

**Zgled**

$X \sim U([0,1])$ *ni neskončno deljiva.*

Recimo, da je $X$ neskončno deljiva. Potem za dani $n \in \mathbb{N}$ obstajajo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$, da velja

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + \cdots + X_n.$$

# Nekaj zgledov

**Zgled**

*$X \sim U([0,1])$ ni neskončno deljiva.*

Recimo, da je $X$ neskončno deljiva. Potem za dani $n \in \mathbb{N}$ obstajajo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$, da velja

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + \cdots + X_n.$$

<— Naprej na tabli

**Lema**

*Linearne kombinacije neodvisnih neskončno deljivih slučajnih spremenljivk so neskončno deljive slučajne spremenljivke.*

## Lema

*Linearne kombinacije neodvisnih neskončno deljivih slučajnih spremenljivk so neskončno deljive slučajne spremenljivke.*

## Dokaz.

Naj bodo $X_1, X_2, ..., X_m$ neodvisne neskončno deljive s. s. Tedaj lahko za vsak $n \in \mathbb{N}$ zapišemo $X_i \stackrel{d}{=} X_{i_1} + \cdots + X_{i_n}$, torej za $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ lahko $a_1 X_1 + \cdots + a_m X_m$ zapišemo kot

$$\begin{aligned} a_1 X_1 + \cdots + a_m X_m &\stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} a_1(X_{1_1} + \cdots + X_{1_n}) + \cdots + a_m(X_{m_1} + \cdots + X_{m_n}) \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{m} a_i X_{i_1} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_i X_{i_n}. \end{aligned}$$

$\square$

# Lévy-Hinčinova formula

**Izrek**

***(Lévy-Hinčinova formula)*** *Neskončno deljive porazdelitve na* $\mathbb{R}^+$ *je možno opisati s pari* $(\sigma, \nu)$*, kjer je* $\sigma \in \mathbb{R}^+$ *in* $\nu$ *mera, ki zadošča pogoju* $\int_{\mathbb{R}^+} 1 \wedge x^2 \nu(dx) \leq \infty$*, in sicer paru* $(\sigma, \nu)$ *priredimo karakteristično funkcijo* $\varphi_{\sigma,\nu}(t) = e^{-\theta(t)}$*,*

$$\theta(t) = \left( \sigma it + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-itx}) \nu(dx) \right).$$

*Ta predpis predstavlja bijekcijo med omenjenimi pari* $(\sigma, \nu)$ *in neskončno deljivimi porazdelitvami na* $\mathbb{R}^+$*.*

# Poissonova porazdelitev

Določimo par $(\sigma, \nu)$ za Poissonovo porazdelitev.

# Poissonova porazdelitev

Določimo par $(\sigma, \nu)$ za Poissonovo porazdelitev. Vemo de je karakteristična funkcija Poissonove porazdelitve enaka

$$\varphi(t) = \exp\left[\lambda(e^{it} - 1)\right].$$

# Poissonova porazdelitev

Določimo par $(\sigma, \nu)$ za Poissonovo porazdelitev. Vemo de je karakteristična funkcija Poissonove porazdelitve enaka

$$\varphi(t) = \exp\left[\lambda(e^{it} - 1)\right].$$

Po Lévy-Hinčinovi formuli pa je oblike

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp\left[-\sigma it - \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-itx})\nu(dx)\right] = \\ &= \exp\left[-\sigma it + \int_{(0,\infty)} (e^{-itx} - 1)\nu(dx)\right].\end{aligned}$$

# Poissonova porazdelitev

Določimo par $(\sigma, \nu)$ za Poissonovo porazdelitev. Vemo de je karakteristična funkcija Poissonove porazdelitve enaka

$$\varphi(t) = \exp\left[\lambda(e^{it} - 1)\right].$$

Po Lévy-Hinčinovi formuli pa je oblike

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp\left[-\sigma it - \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-itx})\nu(dx)\right] = \\ &= \exp\left[-\sigma it + \int_{(0,\infty)} (e^{-itx} - 1)\nu(dx)\right].\end{aligned}$$

Vidimo lahko, da je $\sigma = 0$ in $\nu = \lambda\delta_1$.