Lévijevi procesi in njihova uporaba v financah

Anej Rozman

Mentor: doc. dr. Martin Raič

Vsebina

- Neskončno deljive porazdelitve

Vsebina

- Neskončno deljive porazdelitve
- Lévijev proces

Vsebina

- Neskončno deljive porazdelitve
- Lévijev proces
- (Uporaba v financah, Mertonov difuzijski model s skoki ?)

Neskončno deljive porazdelitve

Definicija

Pravimo, da ima realno številska slučajna spremenljivka X neskončno deljivo porazdelitev, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$, da velja

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \ldots X_n,$$

kjer $\stackrel{d}{=}$ pomeni enakost v porazdelitvi.

Nekaj zgledov

Zgled

Normalna porazdelitev je neskončno deljiva.

Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Vemo da so linearne kombinacije neodvisnih normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk spet normalno porazdeljene. Torej lahko za poljuben $n \in \mathbb{N}$ zapišemo

$$X \stackrel{d}{=} N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}) + \cdots + N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}).$$

Nekaj zgledov

Zgled

Poissonova porazdelitev je neskončno deljiva.

Naj bo $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Vemo da so linearne kombinacije neodvisnih Poissonovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk spet Poissonovo porazdeljene. Torej lahko za poljuben $n \in \mathbb{N}$ zapišemo

$$X \stackrel{d}{=} \mathrm{Pois}(\frac{\lambda}{n}) + \cdots + \mathrm{Pois}(\frac{\lambda}{n}).$$

Lema

Linearne kombinacije neodvisnih neskončno deljivih slučajnih spremenljivk so neskončno deljive slučajne spremenljivke.

Dokaz.

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ lahko zapišemo $X_i \overset{d}{=} X_{i_1} + \cdots + X_{i_n}$, torej za $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ lahko $a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$ zapišemo kot

$$\begin{aligned} a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n &\overset{d}{=} \\ &\overset{d}{=} a_1(X_{1_1} + \cdots + X_{1_n}) + \cdots + a_n(X_{n_1} + \cdots + X_{n_n}) \\ &\overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i X_{i_1} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_i X_{i_n}. \end{aligned}$$

$\square$

Lévy-Hinčinova formula

Izrek

(Lévy-Hinčinova formula) *Na $\mathbb{R}^+$ imamo bijekcijo med pari oblike (σ, ν) in množico momentno rodovnih funkcij neskončno deljivih porazdelitev, kjer je $\sigma \in \mathbb{R}^+$ in ν mera, ki zadošča pogoju $\int_{\mathbb{R}^+} 1 \wedge x^2 \nu(dx) \leq \infty$. Momentno rodovna funkcija, ki ustreza paru (σ, ν) je oblike $M_{\sigma,\nu}(t) = e^{-\theta(t)}$,*

$$\theta(t) = \left(\sigma t + \int_{\mathbb{R}^+} 1 - e^{-tx} \nu(dx) \right)$$

Lévijev proces

Definicija

Slučajnemu procesu $X = \{X_t \mid t \geq 0\}$ *definiranem na verjetnostnemu prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *pravimo Lévijev proces, če zadošča naslednjim pogojem:*

1. $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.
2. *Trajektorije* X *so* $\mathbb{P}$*-skoraj gotovo zvezne z desne (z levimi limitami).*
3. *Za* $0 \leq s \leq t$ *je* $X_t - X_s$ *enako porazdeljena kot* X_{t-s}.
4. *Za* $0 \leq s \leq t$ *je* $X_t - X_s$ *neodvisna od* $\{X_u \mid 0 \leq u \leq s\}$.