UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika - 1. stopnja

Anej Rozman

Verjetnost z mero

Zapiski po predavanjih doc. dr. Matije Vidmarja v študijskem letu 2023/2024.

Ljubljana, 2023

Kazalo

1 Mera

1.1 Merljivost in mere

1.1.1 Merjlive mnozice

Definicija 1. *Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$, torej $\mathcal{A} \in 2^{2^\Omega}$ Pravimo, da je $\mathcal{A}$ zaprta za:*

1. c^Ω *(zaprta za komplemente v Ω)* $\iff \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$
2. $\cap$ *(zaprta za preseke)* $\iff A \cap A' \in \mathcal{A}$ *kadarkoli* $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
3. $\cup$ *(zaprta za unije)* $iff A \cup A' \in \mathcal{A}$ *kadarkoli* $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
4. $\backslash$ *(zaprta za razlike)* $\iff A \backslash A' \in \mathcal{A}$ *kadarkoli* $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
5. $\sigma\cap$ *(zaprta za stevne preseke)* $\iff \forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ *kadarkoli je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zaporedje v* $\mathcal{A}$
6. $\sigma\cup$ *(zaprta za stevne unije)* $\iff \forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ *kadarkoli je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zaporedje v* $\mathcal{A}$

Definicija 2. *(σ-algebra, pod-σ-algebra in algebra)*

1. $\mathcal{A}$ *je σ-algebra na* $\Omega \iff (\Omega, A)$ *je merljiv prostor* $\iff \emptyset \in \mathcal{A}$ *in* $\mathcal{A}$ *je zaprta za* c^Ω *in* $\sigma\cup$.
2. *Ce je $\mathcal{A}\sigma$-algebra na Ω potem: A je $\mathcal{A}$-merljiva* $\iff A \in \mathcal{A}; \mathcal{B}$ *je pod-σ-algebra* $\mathcal{A} \iff \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *in $\mathcal{B}$ je σ-algebra na Ω.*
3. $\mathcal{A}$ *je algebra na* $\Omega \iff \emptyset \in \mathcal{A}$ *in $\mathcal{A}$ je zaprta za c^Ω in $\cup$.*

Zgled 1. 2^Ω *je σ-algebra na Ω in $\{\emptyset, \Omega\}$ je σ-algebra na Ω. Klicemo ju diskretna in trivialna σ-algebra.*

Zgled 2. *Naj bo $A \subset \Omega$ Potem je $\sigma_\Omega A := \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$ σ-algebra na Ω.*

Zgled 3. $\sigma_\Omega^{ccc} := \{A \in 2^\Omega : A \text{ je stevna ali } \Omega \backslash A \text{ je stevna}\}$ *je σ-algebra na Ω. To je oznaka za stevno kostevno σ-algebro na Ω. Seveda je $\sigma_\Omega^{ccc} = 2^\Omega$ razen ce Ω ni stevna.*

Zgled 4. *Naj bo $\mathcal{P}$ particija Ω (torej $\mathcal{P} \subset 2^\Omega$ in $\mathcal{P}$ je druzina paroma disjunktnih mnozic, ki pokrije Ω). Potem je $\sigma\mathcal{P} := \{\cup R \mid R \subset P \text{ in } (R \text{ ali } P\backslash R \text{ je stevna})\}$ je sigma algebra na Ω.*

Trditev 1. *Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ zaprta za c^Ω in naj bo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω ce in samo ce je $\mathcal{A}$ zaprta za $\sigma\cup$, in v tem primeru je $\mathcal{A}$ zaprta za $\cap$ in $\cup$ in $\backslash$.*

Dokaz. Sledi iz de Morganovih zakonov:

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \backslash \left(\cup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \backslash A_n)\right)$$

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \backslash \left(\cap_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \backslash A_n)\right)$$

Zaprtost σ-algebre A na Ω za:

1. $\cap$: $A \cap B = A \cap B \cap \Omega \cap \Omega \cdots$

2. $\cup$: $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots$

3. $\backslash$: $A \backslash B = A \cap (\Omega \backslash B) \in A$

$\square$

1.1.2 Mere

Definicija 3. *(Mera) Naj bo* $(\Omega, \mathcal{F})$ *merljiv prostor in* $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$.
μ *je mera na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *natanko tedaj ko:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. μ *je stevno aditivna:* $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ *paroma disjunktnih mnozic je* $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Za mero μ na (Ω, F) recemo da je:

1. koncna $\iff \mu(\Omega) < \infty$

2. verjetnostna mera $\iff \mu(\Omega) = 1$

3. σ-koncna $\iff \exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} : \Omega = \cup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ in $\mu(A_n) < \infty \; \forall n \in \mathbb{N}$

Definicija 4. *(Merljiv prostor)* (Ω, F, μ) *je prostor z mero* $\iff$ μ *je mera na* (Ω, F)

Definicija 5. *Ce je* (Ω, F, μ) *merljiv prostor. Potem za* $A \in \mathcal{F}$ *recemo:*

1. A *je* μ*-zanemarljiva* $\iff \mu(A) = 0$

2. A *je* μ*-trivialna* $\iff \mu(A) = 0$ *ali* $\mu(\Omega \backslash A) = 0$

Ce imamo neko lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem:

1. $P(\omega)$ drzi μ-skoraj povsod v $\omega \in A \iff A_{\neg P} := \{\omega \in A : \neg P(\omega)\}$ je μ-zanemarljiva.

2. $P(\omega)$ drzi μ-skoraj gotovo v $\omega \in A \iff A_{\neg P} := \{\omega \in A : \neg P(\omega)\}$ je μ-zanemarljiva in μ je verjetnost.

3. P drzi μ-s.p. na $A \iff P(\omega)$ drzi μ-s.p. v $\omega \in A$.

4. P drzi μ-s.g. na $A \iff P(\omega)$ drzi μ-s.g. v $\omega \in A$.

Zgled 5. *Nicelna mera na* $\mathcal{F}$ *torej preslikava* $\mu(A) \to 0 \; \forall A \in \mathcal{F}$ *je vedno mera na katerikoli* σ*-algebri.*

Zgled 6. *Ce definiramo* $c_\Omega : 2^\Omega \to [0, \infty]$ *kot* $c_\Omega(A) := |A|$ *ce je* A *koncna podmnozica* Ω *in* $c_\Omega(A) := \infty$ *ca je neskoncna podmnozica* Ω*, je* c_Ω *tako imenovana stevna mera na* Ω*. Ko je* Ω *koncna in neprazna, potem je* $\frac{c_\Omega}{|\Omega|}$ *verjentostna mera na* Ω*.*

Zgled 7. *Ce definiramo $\delta_x : 2^\Omega \to [0,\infty]$ za fiksen $x \in \Omega$, tako da za $A \in 2^\Omega, \delta_x(A) := 0$ ce $x \notin A$ in $\delta_x(A) := 1$ ce $x \in A$, potem je δ_x tako imenovana Diracova mera za x. Katerakoli podmnozica $\Omega \backslash \{x\}$ je δ_x-zanemarljiva.*

Trditev 2. *(Lastnosti mere) Naj bo μ mera na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem velja naslednje:*

1. *μ je aditivna: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ ce velja $A \cap B = \emptyset$ in $\{A, B\} \in \mathcal{F}$.*
2. *μ je monotona: $A \subset B$ in $\{A, B\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.*
3. *μ je zvezna od spodaj: $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \uparrow\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ narascajoce zaporedje v $\mathcal{F}$.*
4. *μ je stevno subaditivna: $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}$.*
5. *Predpostavimo da je μ koncna. $\mu(\Omega \backslash A) = \mu(\Omega) - \mu(A)$ za vse $A \in \mathcal{F}$. Se vec, μ je zvezna od zgoraj: $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \downarrow\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoce zaporedje v $\mathcal{F}$.*
6. *Za $A \in \mathcal{F}$ je $\mathcal{F}|_A := \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$; potem je $\mu_A := \mu_{\mathcal{F}|_A}$ mera na $\mathcal{F}|_A$. Imenuje se restrikcija/skrcitev mere μ na A.*

Dokaz.

1. $(A, B, \emptyset, \emptyset, \cdots)$ je zaporedje medseboj disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}$.
2. $B = A \cup (B \backslash A)$ in uporabimo koncno aditivnost (1.).
3. $(A_1, A_2 \backslash A_1, A_3 \backslash A_2, \cdots)$ je zaporedje paroma disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}$ z unijo $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Uporabimo stevno aditivnost in za tem se koncno aditivnost.
4. $(A_1, A_2 \backslash A_1, A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), \cdots)$ je zaporedje paroma disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}$ z unijo $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Uporabimo stevno aditivnost in za tem se monotonost (2.).
5. Prvi del sledi iz koncne aditivnosti (1.). Za mnozici vzamemo $A \in \Omega$ in $B = \Omega \backslash A$. Dobimo $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(\Omega \backslash A)$. Drugi del sledi iz zveznosti od spodaj (3.) tako da jo uporabimo na $(\Omega \backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Preveriti moramo, da je $\mathcal{F}|_A$ σ-algebra na A. Kasneje bomo videli da je $\mathcal{F}|_A = 2^A \cap \mathcal{F}$ in bo dokaz sledil iz tega.

□

Zgled 8. *(Borel-Cantellijeva lema) Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ merljiv prostor in $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}$, da velja $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$. Potem je $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.*

Zgled 9. *Ce je P vejretnost na $(\Omega, \mathcal{F})$, potem je $P^{-1}(\{0,1\})$ pod-σ-algebra na $\mathcal{F}$. Tako imenovana P-trivialna σ-algebra.*

1.1.3 Merjlive preslikave in generirane σ-algebre

Definicija 6. *(Generirana σ-algebra) Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$; potem*

$$\sigma_{\Omega}(\mathcal{A}) := \cap\{\mathcal{F} \in 2^{2^{\Omega}} : \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{A} \subset \mathcal{F}\}$$

imenujemo σ-algebra generirana na Ω z $\mathcal{A}$.

Opomba 1. *2^{Ω} je gotovo σ-algebra na Ω, ki vsebuje $\mathcal{A}$, torej je $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})$ neprazna.*

Za dve σ-algebri $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$ na Ω je mnozica $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 := \sigma_{\Omega}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$ zdruzitev $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$. Bolj splosno za druzino $(\mathcal{B}_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ σ-algeber na Ω pravimo $\vee_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_{\lambda} := \sigma_{\Omega}(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_{\lambda})$ druzina druzin.

Opomba 2. *Razlog zakaj so generirane σ-algebre pomembne v teoriji mere je, ker le redko lahko eksplicitno podamo vse elemente σ-algebre, ki bi jo zeleli, ampak pogosto lahko eksplicitno podamo njene generatorje.*

Definicija 7. *(Zacetna in koncna struktura) Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$. Za podano σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' deifniramo*

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) := f^{-1}(\mathcal{F}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{F}'\},$$

zacetno strukturo za f glede na $\mathcal{F}'$. (oziroma σ-algebra generirana z f glede na $\mathcal{F}'$).

Za podano σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) := \{A \in 2^{\Omega'} : f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\},$$

koncno strukturo za f na Ω' glede na $\mathcal{F}$.

Definicija 8. *Za dano σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' in σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω pravimo da je f $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-merljiva preslikava $\iff f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ za vse $A' \in \mathcal{F}'$.*

Opomba 3.

1. *V notacijah $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})$ in $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ spuscamo Ω in $\mathcal{F}'$ kadar je to jasno iz konteksta. Torej pisemo preprosto $\sigma(\mathcal{A})$ in $\sigma(f)$.*
2. *V primeru ko je zaloga vrednosti f stevna in nimamo podane ne $\mathcal{F}'$ ali Ω' za Ω' vazamemo Z_f in za $\mathcal{F}'$ vazamemo $2^{\Omega'}$.*
3. *Izmed objektov, ki smo ju uvedli v definiciji 7 je zacetna struktura veliko bolj pomembna*

Definicija 9. *Za dano σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω in $\mathcal{F}'$ na Ω' definiramo*

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' := \{g \in \Omega'^{\Omega} : g \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}$$

.

Zgled 10. *Konstantna funkcija je vedno merljiva, ne glede na σ-algebro. Za poljubno σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω je $id_{\Omega} \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.*

Definicija 10. *(Indikator) Za $A \in \Omega$ definiramo $\mathbb{1}_{A_\Omega} : \Omega \to \{0,1\}$:*

$$\mathbb{1}_{A_\Omega}(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & sicer \end{cases}$$

Funkciji pravimo indikator mnozice A z underlying prostorom Ω. Pisali bomo $\mathbb{1}_A$ in predvidevali da se Ω da razbrati iz konteksta.

Zgled 11. *Naj bo $A \subset \Omega$. Potem $\sigma^{2^{\{0,1\}}}(\mathbb{1}_A) = \sigma_\Omega A$. Ce je nadaljno $\mathcal{F}$ σ-algebra an Ω potem je $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}/2^{\{0,1\}} \iff A \in \mathcal{F}$*

Trditev 3. *Naj bodo $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ σ-algebre (vsaka na svoji mnozici). Naj bo $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$ in $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Potem je $g \circ f \in \mathcal{F}/\mathcal{H}$. Z besedami to pomeni: kompozitumi merljivih preslikav so merljive preslikave.*

Dokaz. $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$ za $H \in \mathcal{H}$ □

Trditev 4. *(Lastnosti preslikav) Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$.*

1. *Naj bo $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω'. $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ je σ-algebra na Ω; je najmanjsa σ-algebra $\mathcal{G}$ na Ω da velja $f \in \mathcal{G}/\mathcal{F}'$.*

2. *Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. $\sigma^{\Omega'}_{\mathcal{F}}(f)$ je σ-algebra na Ω'; je najvecja σ-algebra $\mathcal{G}'$ na Ω' da velja $f \in \mathcal{G}'/\mathcal{F}'$.*

3. *Naj bo $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω' in $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, potem $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \sigma^{\Omega'}_{\mathcal{F}}(f) \supset \mathcal{F}'$.*

4. *Naj bo $\mathcal{A}' \subset 2^{\Omega'}$. $\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')$ je najmanjsa σ-algebra na Ω', ki ima $\mathcal{A}'$ za svojo podmnozico. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, potem je $f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ za vse $A' \in \mathcal{A}')$. Natancno zapisemo $\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}(f) = \sigma_\Omega(\{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\})$*

Dokaz. 1. nothing

□

Opomba 4. *Tocka 4 nam pove da je dovolj da dokazemo merljivo lastnost na mnozici generatorjev. Se en nacin zapisa $f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ za vse $A' \in \mathcal{A}')$. Natancno zapisemo $\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}(f) = \sigma_\Omega(\{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\})$ je $f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')) = \sigma_\Omega(f^{-1}(\mathcal{A}'))$, kar bomo interpretirali lpt operacija dobivanja praslik in generiranih σ-algeber komutirati.*

Definicija 11. *Pisemo $\mathcal{A}|_A := \{A' \cap A : A' \in \mathcal{A}\}$ za sled $\mathcal{A}$ na A.*