UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika - 1. stopnja

Anej Rozman

Verjetnost z mero

Zapiski po predavanjih doc. dr. Matije Vidmarja v študijskem letu 2023/2024.

Ljubljana, 2023

Kazalo

1 Mera

1.1 Merljivost in mere

1.1.1 Merjlive mnozice

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$, torej $\mathcal{A} \in 2^{2^\Omega}$ Pravimo, da je $\mathcal{A}$ zaprta za:

1. c^Ω (zaprta za komplemente v Ω) $\iff \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$
2. $\cap$ (zaprta za preseke) $\iff A \cap A' \in \mathcal{A}$ kadarkoli $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
3. $\cup$ (zaprta za unije) $\iff A \cup A' \in \mathcal{A}$ kadarkoli $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
4. $\backslash$ (zaprta za razlike) $\iff A \backslash A' \in \mathcal{A}$ kadarkoli $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
5. $\sigma\cap$ (zaprta za stevne preseke) $\iff \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{A}$
6. $\sigma\cup$ (zaprta za stevne unije) $\iff \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{A}$

Definicija 1.2. (σ-algebra, pod-σ-algebra in algebra)

1. $\mathcal{A}$ je σ-algebra na $\Omega \iff (\Omega, \mathcal{A})$ je merljiv prostor $\iff \emptyset \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ je zaprta za c^Ω in $\sigma\cup$. e je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω potem: A je $\mathcal{A}$-merljiva $\iff A \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{B}$ je pod-σ-algebra $\mathcal{A} \iff \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je σ-algebra na Ω.
3. $\mathcal{A}$ je algebra na $\Omega \iff \emptyset \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ je zaprta za c^Ω in $\cup$.

Opomba 1.3. V primeru ko nimamo podane mnozice Ω lahko vzamemo $\Omega = \cup\mathcal{A}$ in velja $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$.

Zgled 1.4. 2^Ω je σ-algebra na Ω in $\{\emptyset, \Omega\}$ je σ-algebra na Ω. Klicemo ju diskretna in trivialna σ-algebra.

Zgled 1.5. Naj bo $A \subset \Omega$. Potem je $\sigma_\Omega A := \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$ σ-algebra na Ω.

Zgled 1.6. $\sigma_\Omega^{ccc} := \{A \in 2^\Omega : A$ je stevna ali $\Omega \backslash A$ je stevna$\}$ je σ-algebra na Ω. To je oznaka za stevno kostevno σ-algebro na Ω. Seveda je $\sigma_\Omega^{ccc} = 2^\Omega$ razen ce Ω ni stevna.

Zgled 1.7. Naj bo $\mathcal{P}$ particija Ω (torej $\mathcal{P} \subset 2^\Omega$ in $\mathcal{P}$ je druzina paroma disjunktnih mnozic, ki pokrije Ω). Potem je $\sigma\mathcal{P} := \{\cup R \mid R \subset P\ in\ (R\ ali\ P \backslash R\ je\ stevna)\}$ je sigma algebra na Ω.

Trditev 1.8. *Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ zaprta za c^Ω in naj bo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω ce in samo ce je $\mathcal{A}$ zaprta za $\sigma\cup$, in v tem primeru je $\mathcal{A}$ zaprta za $\cap$ in $\cup$ in $\backslash$.*

Dokaz. Sledi iz de Morganovih zakonov:

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega\backslash\left(\cup_{n\in\mathbb{N}}(\Omega\backslash A_n)\right)$$

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega\backslash\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}(\Omega\backslash A_n)\right)$$

Zaprtost σ-algebre A na Ω za:

1. $\cap$: $A \cap B = A \cap B \cap \Omega \cap \Omega \cdots \in \mathcal{A}$
2. $\cup$: $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots \in \mathcal{A}$
3. $\backslash$: $A\backslash B = A \cap (\Omega\backslash B) \in \mathcal{A}$

$\square$

1.1.2 Mere

Definicija 1.9. (Mera) Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$.
μ je mera na $(\Omega, \mathcal{F})$ natanko tedaj ko:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. μ je stevno aditivna: za $\forall$ zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ paroma disjunktnih mnozic je $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Za mero μ na (Ω, F) recemo da je:

1. koncna $\iff \mu(\Omega) < \infty$
2. verjetnostna mera $\iff \mu(\Omega) = 1$
3. σ-koncna $\iff \exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} : \Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\mu(A_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

Definicija 1.10. (Merljiv prostor) (Ω, F, μ) je prostor z mero $\iff \mu$ je mera na (Ω, F)

Definicija 1.11. Ce je (Ω, F, μ) merljiv prostor. Potem za $A \in \mathcal{F}$ recemo:

1. A je μ-zanemarljiva $\iff \mu(A) = 0$
2. A je μ-trivialna $\iff \mu(A) = 0$ ali $\mu(\Omega\backslash A) = 0$

Ce imamo neko lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem:

1. $P(\omega)$ drzi μ-skoraj povsod v $\omega \in A \iff A_{\neg P} := \{\omega \in A : \neg P(\omega)\}$ je μ-zanemarljiva.
2. $P(\omega)$ drzi μ-skoraj gotovo v $\omega \in A \iff A_{\neg P} := \{\omega \in A : \neg P(\omega)\}$ je μ-zanemarljiva in μ je verjetnost.
3. P drzi μ-s.p. na $A \iff P(\omega)$ drzi μ-s.p. v $\omega \in A$.
4. P drzi μ-s.g. na $A \iff P(\omega)$ drzi μ-s.g. v $\omega \in A$.

Zgled 1.12. Nicelna mera na $\mathcal{F}$ (torej preslikava $\mu(A) \to 0,\ \forall A \in \mathcal{F}$) je vedno mera na katerikoli σ-algebri.

Zgled 1.13. Ce definiramo $c_\Omega : 2^\Omega \to [0, \infty]$ kot $c_\Omega(A) := |A|$ ce je A koncna podmnozica Ω in $c_\Omega(A) := \infty$ ca je neskoncna podmnozica Ω, je c_Ω tako imenovana stevna mera na Ω. Ko je Ω koncna in neprazna, potem je $\frac{c_\Omega}{|\Omega|}$ verjentostna mera na Ω.

Zgled 1.14. Ce definiramo $\delta_x : 2^\Omega \to [0, \infty]$ za fiksen $x \in \Omega$, tako da za $A \in 2^\Omega, \delta_x(A) := 0$ ce $x \notin A$ in $\delta_x(A) := 1$ ce $x \in A$, potem je δ_x tako imenovana Diracova mera za x. Katerakoli podmnozica $\Omega \backslash \{x\}$ je δ_x-zanemarljiva.

Trditev 1.15. *(Lastnosti mere) Naj bo μ mera na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem velja naslednje:*

1. *μ je aditivna: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ kadarkoli $A \cap B = \emptyset$ in $\{A, B\} \in \mathcal{F}$.*
2. *μ je monotona: $A \subset B$ in $\{A, B\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.*
3. *μ je zvezna od spodaj: $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) =\uparrow \text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ narascajoce zaporedje v $\mathcal{F}$.*
4. *μ je stevno subaditivna: $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}$.*
5. *Predpostavimo da je μ koncna. $\mu(\Omega \backslash A) = \mu(\Omega) - \mu(A)$ za vse $A \in \mathcal{F}$. Se vec, μ je zvezna od zgoraj: $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) =\downarrow \text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoce zaporedje v $\mathcal{F}$.*
6. *Za $A \in \mathcal{F}$ je $\mathcal{F}|_A := \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$; potem je $\mu_A := \mu_{\mathcal{F}|_A}$ mera na $\mathcal{F}|_A$. Imenuje se restrikcija/skrcitev mere μ na A.*

Dokaz.

1. $(A, B, \emptyset, \emptyset, \cdots)$ je zaporedje medseboj disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}$, torej po stevni aditivnosti velja $\mu(A \cup B \cup \emptyset \cup \cdots) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\emptyset) + \cdots = \mu(A) + \mu(B)$.
2. $B = A \cup (B \backslash A)$ in uporabimo koncno aditivnost (1.).
3. $(A_1, A_2 \backslash A_1, A_3 \backslash A_2, \cdots)$ je zaporedje paroma disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}$ z unijo $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Uporabimo stevno aditivnost in za tem se koncno aditivnost.
4. $(A_1, A_2 \backslash A_1, A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), \cdots)$ je zaporedje paroma disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}$ z unijo $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Uporabimo stevno aditivnost in za tem se monotonost (2.).
5. Prvi del sledi iz koncne aditivnosti (1.). Za mnozici vzamemo $A \in \Omega$ in $B = \Omega \backslash A$. Dobimo $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(\Omega \backslash A)$. Drugi del sledi iz zveznosti od spodaj (3.) tako da jo uporabimo na $(\Omega \backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\mu(\Omega) - \mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} \Omega \backslash A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega \backslash A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega) - \mu(A_n) = \mu(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ $\Rightarrow \mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

6. Preveriti moramo, da je $\mathcal{F}|_A$ σ-algebra na A. Kasneje bomo videli da je $\mathcal{F}|_A = 2^A \cap \mathcal{F}$ in bo dokaz sledil iz tega.

$\square$

Zgled 1.16. (Borel-Cantellijeva lema) Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ merljiv prostor in $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}$, da velja $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$. Potem je $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Dokaz. $\square$

Zgled 1.17. Ce je P vejretnost na $(\Omega, \mathcal{F})$, potem je $P^{-1}(\{0,1\})$ pod-σ-algebra na $\mathcal{F}$. Tako imenovana P-trivialna σ-algebra.

1.1.3 Merjlive preslikave in generirane σ-algebre

Definicija 1.18. (Generirana σ-algebra) Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$; potem

$$\sigma_\Omega(\mathcal{A}) := \cap\{\mathcal{F} \in 2^{2^\Omega} : \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{A} \subset \mathcal{F}\}$$

imenujemo σ-algebra generirana na Ω z $\mathcal{A}$. Je najmanjsa σ-algebra, ki vkljucuje druzino podmnozic $\mathcal{A}$.

Opomba 1.19. 2^Ω je gotovo σ-algebra na Ω, ki vsebuje $\mathcal{A}$, torej je $\sigma_\Omega(\mathcal{A})$ neprazna.

Za dve σ-algebri $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$ na Ω je mnozica $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 := \sigma_\Omega(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$ skupek $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$. Bolj splosno za druzino $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ σ-algeber na Ω pravimo, da je $\vee_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda := \sigma_\Omega(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda)$ njen skupek.

Opomba 1.20. Razlog zakaj so generirane σ-algebre pomembne v teoriji mere je, ker le redko lahko eksplicitno podamo vse elemente σ-algebre, ki bi jo zeleli, ampak pogosto lahko eksplicitno podamo njene generatorje.

Definicija 1.21. (Zacetna in koncna struktura) Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$. Za podano σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) := f^{-1}(\mathcal{F}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{F}'\},$$

zacetno strukturo za f glede na $\mathcal{F}'$. (oziroma σ-algebra generirana z f glede na $\mathcal{F}'$).

Za podano σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) := \{A' \in 2^{\Omega'} : f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\},$$

koncno strukturo za f na Ω' glede na $\mathcal{F}$.

Definicija 1.22. Za dano σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' in σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω pravimo da je f $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-merljiva preslikava $\iff$ $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ za vse $A' \in \mathcal{F}'$.

Opomba 1.23.

1. V notacijah $\sigma_\Omega(\mathcal{A})$ in $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ spuscamo Ω in $\mathcal{F}'$ kadar je to jasno iz konteksta. Torej pisemo preprosto $\sigma(\mathcal{A})$ in $\sigma(f)$.
2. V primeru ko je zaloga vrednosti f stevna in nimamo podane ne $\mathcal{F}'$ ali Ω' za Ω' vazamemo Z_f in za $\mathcal{F}'$ vazamemo $2^{\Omega'}$.

3. Izmed objektov, ki smo ju uvedli v definiciji 7. je zacetna struktura bolj sugestivna.

Definicija 1.24. Za dano σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω in $\mathcal{F}'$ na Ω' definiramo

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' := \{g \in \Omega'^{\Omega} : g \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}.$$

Zgled 1.25. Konstantna funkcija je vedno merljiva, ne glede na σ-algebro. Za poljubno σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω je $id_\Omega \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.

Definicija 1.26. (Indikator) Za $A \subset \Omega$ definiramo $\mathbb{1}_{A_\Omega} : \Omega \to \{0,1\}$:

$$\mathbb{1}_{A_\Omega}(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Funkciji pravimo indikator mnozice A v Ω. Pisali bomo $\mathbb{1}_A$ in predvidevali da se Ω da razbrati iz konteksta.

Zgled 1.27. Naj bo $A \subset \Omega$. Potem $\sigma^{2^{\{0,1\}}}(\mathbb{1}_A) = \sigma_\Omega(A) = \{\emptyset, \Omega, A, \Omega\backslash A\}$. Ce je nadaljno $\mathcal{F}$ σ-algebra an Ω potem je $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}/2^{\{0,1\}} \iff A \in \mathcal{F}$

Trditev 1.28. *Naj bodo $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ σ-algebre (vsaka na svoji mnozici). Naj bo $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$ in $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Potem je $g \circ f \in \mathcal{F}/\mathcal{H}$. Z besedami to pomeni: kompozitumi merljivih preslikav so merljive preslikave.*

Dokaz. $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$ za $\forall H \in \mathcal{H}$ □

Trditev 1.29. *(Lastnosti preslikav) Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$.*

1. *Naj bo $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω'. $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ je σ-algebra na Ω; je najmanjsa σ-algebra $\mathcal{F}$ na Ω da velja $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.*

2. *Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. $\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f)$ je σ-algebra na Ω'; je najvecja σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω' da velja $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.*

3. *Naj bo $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω' in $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, potem $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) \supset \mathcal{F}'$.*

4. *Naj bo $\mathcal{A}' \subset 2^{\Omega'}$. $\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')$ je najmanjsa σ-algebra na Ω', ki ima $\mathcal{A}'$ za svojo podmnozico. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, potem je $f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ za vse $A' \in \mathcal{A}')$. Natancno zapisemo $\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}(f) = \sigma_\Omega(\{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\})$. V posebnem je $f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')) = \sigma_\Omega(f^{-1}(\mathcal{A}')$.*

Dokaz. 1. $f^{-1}(\mathcal{F}')$ je σ-algebra na Ω: $\forall \emptyset : f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{F}')$; za $A' \in \mathcal{F}'$ je $\Omega\backslash f^{-1}(A') = f^{-1}(\Omega\backslash A') \in f^{-1}\mathcal{F}'$; za zaporedje $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je $\cup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i') = f^{-1}(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i') \in f^{-1}(\mathcal{F}')$. Drugi del je jasen

2. Podoben dokaz kot 1.

3. krneki

4. prvi del je jasen. Drugi del: $(\Rightarrow)$: je jasna. $(\Leftarrow)$: $\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) \subset A'$... napisi s skripte.

$\square$

Opomba 1.30. Tocka 4 nam pove da je dovolj da dokazemo merljivo lastnost na mnozici generatorjev. Se en nacin zapisa $f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ za vse $A' \in \mathcal{A}')$. Natancno zapisemo $\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}(f) = \sigma_{\Omega}(\{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\})$ je $f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')) = \sigma_{\Omega}(f^{-1}(\mathcal{A}'))$, kar bomo interpretirali kot operacija dobivanja praslik in generiranih σ-algeber komutirati.

Definicija 1.31. Pisemo $\mathcal{A}|_A := \{A' \cap A : A' \in \mathcal{A}\}$ za sled $\mathcal{A}$ na A.

Opomba 1.32. Ce je $\mathcal{F}$ zaprta za $\cap$ in $A \in \mathcal{F}$, potem je $\mathcal{F}|_A = \mathcal{F} \cap 2^A$.

Posledica 1.33. *Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$. Ce je $A \subset \Omega$, potem*

$$\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A = \sigma_A(\mathcal{A}|_A);$$

v primeru ce je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω, potem je $\mathcal{A}|_A$ σ-algebra na A.

Dokaz. Po prejsnji trditvi (1. tocka) je $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A = \sigma^{\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})}(id_A)$ σ-algebra na A ki vsebuje $\mathcal{A}|_A$, torej velja $\sigma_A(\mathcal{A}|_A) \subset \sigma_{\Omega}(\mathcal{A}|_A)$. Po (2.tocki) je $\mathcal{C} := \{C \in 2^{\Omega} : C \cap A \in \sigma_A(\mathcal{A}|_A)\} = \sigma^{\Omega}_{\sigma_A(\mathcal{A}|_A)}(id_A)$ σ-algebra na Ω, ki vsebuje $\mathcal{A}$, torej $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$, torej $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A \subset \sigma_A(\mathcal{A}|_A)$.

$\square$

Zgled 1.34. Prepricaj se da je v zgledu 1.3 $\sigma_{\Omega}A = \sigma_{\Omega}(\{A\})$.

Zgled 1.35.

Zgled 1.36. ...

Opomba 1.37. Kako lahko v sposnem dolocimo $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})$? Zacnemo z $\mathcal{A}$ karkoli kar mora biti v $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})$ da zadosca pogojem σ-algebre, vse komplemente, stevne unije, $\emptyset$, Ω in stevne unije teh itd. Po tem postopku dokazemo, da je to kar imamo σ-algebra.

Zgled 1.38. Naj bosta $\{E, F\} \subset 2^{\Omega}$. Potem mora $\sigma_{\Omega}(\{E, F\})$ vsebovati $\{\emptyset, E, F, E\emptyset F, E\cap F, \cdots\}$ oziroma tako imenovano particijo $\mathcal{P} := \{E\cap\}$