

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika - 1. stopnja

Anej Rozman

## **Verjetnost z mero**

Zapiski po predavanjih doc. dr. Matije Vidmarja v študijskem letu 2023/2024.

Ljubljana, 2023

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Mera</b>	<b>2</b>
1.1	Merljivost in mere . . . . .	2
1.1.1	Merjlive množice . . . . .	2
1.1.2	Mere . . . . .	3
1.1.3	Merjlive preslikave in generirane $\sigma$ -algebre . . . . .	5
1.1.4	Borelove množice na razširjeni realni osi in Borelova merljivost numericnih funkcij . . . . .	8
1.1.5	Argumenti monotonega razreda . . . . .	9
1.1.6	Lebesgue-Stieltsove mere . . . . .	10
1.2	Integracija na merljivih prostorih . . . . .	11
1.2.1	Lebesgueov integral . . . . .	11
1.2.2	Zamenjava vrstnega reda integracija in povezane teme . . . . .	14

# 1 Mera

## 1.1 Merljivost in mere

### 1.1.1 Merjlive množice

**Definicija 1.1.** Naj bo  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ , torej  $\mathcal{A} \in 2^{2^\Omega}$ . Pravimo, da je  $\mathcal{A}$  zaprta za:

1.  $c^\Omega$  (zaprta za komplemente v  $\Omega$ )  $\iff \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
2.  $\cap$  (zaprta za preseke)  $\iff A \cap A' \in \mathcal{A}$  kadarkoli  $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
3.  $\cup$  (zaprta za unije)  $\iff A \cup A' \in \mathcal{A}$  kadarkoli  $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
4.  $\setminus$  (zaprta za razlike)  $\iff A \setminus A' \in \mathcal{A}$  kadarkoli  $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
5.  $\sigma\cap$  (zaprta za stevne preseke)  $\iff \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$  kadarkoli je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{A}$
6.  $\sigma\cup$  (zaprta za stevne unije)  $\iff \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$  kadarkoli je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{A}$

**Definicija 1.2.** ( $\sigma$ -algebra, pod- $\sigma$ -algebra in algebra)

1.  $\mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$   $\iff (\Omega, \mathcal{A})$  je merljiv prostor  $\iff \emptyset \in \mathcal{A}$  in  $\mathcal{A}$  je zaprta za  $c^\Omega$  in  $\sigma\cup$ . Če je  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  potem:  $A$  je  $\mathcal{A}$ -merljiva  $\iff A \in \mathcal{A}$ .
2.  $\mathcal{B}$  je pod- $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$   $\iff \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ .
3.  $\mathcal{A}$  je algebra na  $\Omega$   $\iff \emptyset \in \mathcal{A}$  in  $\mathcal{A}$  je zaprta za  $c^\Omega$  in  $\cup$ .

**Opomba 1.3.** V primeru ko nimamo podane množice  $\Omega$  lahko vzamemo  $\Omega = \cup \mathcal{A}$  in velja  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ .

**Zgled 1.4.**  $2^\Omega$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  in  $\{\emptyset, \Omega\}$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ . Klicemo ju diskretna in trivialna  $\sigma$ -algebra.

**Zgled 1.5.** Naj bo  $A \subset \Omega$ . Potem je  $\sigma_\Omega A := \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ .

**Zgled 1.6.**  $\sigma_\Omega^{ccc} := \{A \in 2^\Omega : A \text{ je stevna ali } \Omega \setminus A \text{ je stevna}\}$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ . To je oznaka za stevno kostevno  $\sigma$ -algebro na  $\Omega$ . Seveda je  $\sigma_\Omega^{ccc} = 2^\Omega$  razen če  $\Omega$  ni stevna.

**Zgled 1.7.** Naj bo  $\mathcal{P}$  particija  $\Omega$  (torej  $\mathcal{P} \subset 2^\Omega$  in  $\mathcal{P}$  je družina paroma disjunktnih množic, ki pokrije  $\Omega$ ). Potem je  $\sigma\mathcal{P} := \{\cup R \mid R \subset \mathcal{P} \text{ in } (R \text{ ali } \mathcal{P} \setminus R \text{ je stevna})\}$  je sigma algebra na  $\Omega$ .

**Trditev 1.8.** Naj bo  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$  zaprta za  $c^\Omega$  in naj bo  $\emptyset \in \mathcal{A}$ . Potem je  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  če in samo če je  $\mathcal{A}$  zaprta za  $\sigma\cup$ , in v tem primeru je  $\mathcal{A}$  zaprta za  $\cap$  in  $\setminus$ .

*Dokaz.* Sledi iz de Morganovih zakonov:

$$\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus (\cup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n))$$

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus (\cap_{n \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n))$$

Zaprto  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{A}$  na  $\Omega$  za:

1.  $\cap$ :  $A \cap B = A \cap B \cap \Omega \cap \Omega \cdots \in \mathcal{A}$
2.  $\cup$ :  $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots \in \mathcal{A}$
3.  $\setminus$ :  $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B) \in \mathcal{A}$

□

### 1.1.2 Mere

**Definicija 1.9.** (Mera) Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F})$  merljiv prostor in  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ .  $\mu$  je mera na  $(\Omega, \mathcal{F})$  natanko tedaj ko:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu$  je stevno aditivna: za  $\forall$  zaporedje  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  paroma disjunktne množice je  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Za mero  $\mu$  na  $(\Omega, \mathcal{F})$  recemo da je:

1. končna  $\iff \mu(\Omega) < \infty$
2. verjetnostna mera  $\iff \mu(\Omega) = 1$
3.  $\sigma$ -končna  $\iff \exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F} : \Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  in  $\mu(A_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$

**Definicija 1.10.** (Prostor z mero)  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  je prostor z mero  $\iff \mu$  je mera na  $(\Omega, \mathcal{F})$

**Definicija 1.11.** Če je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  merljiv prostor. Potem za  $A \in \mathcal{F}$  recemo:

1.  $A$  je  $\mu$ -zanemarljiva  $\iff \mu(A) = 0$
2.  $A$  je  $\mu$ -trivialna  $\iff \mu(A) = 0$  ali  $\mu(\Omega \setminus A) = 0$

Ce imamo neko lastnost  $P(\omega)$  v  $\omega \in A$ , potem:

1.  $P(\omega)$  drži  $\mu$ -skoraj povsod v  $\omega \in A$   $\iff A_{\neg P} := \{\omega \in A : \neg P(\omega)\}$  je  $\mu$ -zanemarljiva.
2.  $P(\omega)$  drži  $\mu$ -skoraj gotovo v  $\omega \in A$   $\iff A_{\neg P} := \{\omega \in A : \neg P(\omega)\}$  je  $\mu$ -zanemarljiva in  $\mu$  je verjetnost.
3.  $P$  drži  $\mu$ -s.p. na  $A$   $\iff P(\omega)$  drži  $\mu$ -s.p. v  $\omega \in A$ .
4.  $P$  drži  $\mu$ -s.g. na  $A$   $\iff P(\omega)$  drži  $\mu$ -s.g. v  $\omega \in A$ .

**Zgled 1.12.** Nicelna mera na  $\mathcal{F}$  (torej preslikava  $\mu(A) \rightarrow 0, \forall A \in \mathcal{F}$ ) je vedno mera na katerikoli  $\sigma$ -algebri.

**Zgled 1.13.** Če definiramo  $c_\Omega : 2^\Omega \rightarrow [0, \infty]$  kot  $c_\Omega(A) := |A|$  če je  $A$  končna podmnožica  $\Omega$  in  $c_\Omega(A) := \infty$  če je neskončna podmnožica  $\Omega$ , je  $c_\Omega$  tako imenovana stevna mera na  $\Omega$ . Ko je  $\Omega$  končna in neprazna, potem je  $\frac{c_\Omega}{|\Omega|}$  verjetostna mera na  $\Omega$ .

**Zgled 1.14.** Če definiramo  $\delta_x : 2^\Omega \rightarrow [0, \infty]$  za fiksen  $x \in \Omega$ , tako da za  $A \in 2^\Omega, \delta_x(A) := 0$  če  $x \notin A$  in  $\delta_x(A) := 1$  če  $x \in A$ , potem je  $\delta_x$  tako imenovana Diracova mera za  $x$ . Katerakoli podmnožica  $\Omega \setminus \{x\}$  je  $\delta_x$ -zanemarljiva.

**Trditev 1.15.** (Lastnosti mere) Naj bo  $\mu$  mera na merljivem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Potem velja naslednje:

1.  $\mu$  je aditivna:  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  kadarkoli  $A \cap B = \emptyset$  in  $\{A, B\} \in \mathcal{F}$ .
2.  $\mu$  je monotona:  $A \subset B$  in  $\{A, B\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ .
3.  $\mu$  je zvezna od spodaj:  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \uparrow \text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  kadarkoli je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  narasčajoče zaporedje v  $\mathcal{F}$ .
4.  $\mu$  je stevno subaditivna:  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$  kadarkoli je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{F}$ .
5. Predpostavimo da je  $\mu$  končna.  $\mu(\Omega \setminus A) = \mu(\Omega) - \mu(A)$  za vse  $A \in \mathcal{F}$ . Se vec,  $\mu$  je zvezna od zgoraj:  $\mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \downarrow \text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  kadarkoli je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  padajoče zaporedje v  $\mathcal{F}$ .
6. Za  $A \in \mathcal{F}$  je  $\mathcal{F}|_A := \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$ ; potem je  $\mu_A := \mu|_{\mathcal{F}|_A}$  mera na  $\mathcal{F}|_A$ . Imenuje se restrikcija/skrcitev mere  $\mu$  na  $A$ .

*Dokaz.* 1.  $(A, B, \emptyset, \emptyset, \dots)$  je zaporedje medseboj disjunktne množice v  $\mathcal{F}$ , torej po stevni aditivnosti velja  $\mu(A \cup B \cup \emptyset \cup \dots) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A) + \mu(B)$ .

2.  $B = A \cup (B \setminus A)$  in uporabimo končno aditivnost (1.).

3.  $(A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus A_2, \dots)$  je zaporedje paroma disjunktne množice v  $\mathcal{F}$  z unijo  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Uporabimo stevno aditivnost in za tem se končno aditivnost.

4.  $(A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots)$  je zaporedje paroma disjunktne množice v  $\mathcal{F}$  z unijo  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Uporabimo stevno aditivnost in za tem se monotonost (2.).

5. Prvi del sledi iz končne aditivnosti (1.). Za množici vzamemo  $A \in \Omega$  in  $B = \Omega \setminus A$ . Dobimo  $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(\Omega \setminus A)$ . Drugi del sledi iz zveznosti od spodaj (3.) tako da jo uporabimo na  $(\Omega \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\mu(\Omega) - \mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega \setminus A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega \setminus A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(\Omega) - \mu(A_n)) = \mu(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \Rightarrow \mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .

6. Preveriti moramo, da je  $\mathcal{F}|_A$   $\sigma$ -algebra na  $A$ . Kasneje bomo videli da je  $\mathcal{F}|_A = 2^A \cap \mathcal{F}$  in bo dokaz sledil iz tega. □

**Zgled 1.16.** (Borel-Cantellijeva lema) Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  merljiv prostor in  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{F}$ , da velja  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$ . Potem je  $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$ .

*Dokaz.* □

**Zgled 1.17.** Če je  $P$  vejretnost na  $(\Omega, \mathcal{F})$ , potem je  $P^{-1}(\{0, 1\})$  pod- $\sigma$ -algebra na  $\mathcal{F}$ . Tako imenovana  $P$ -trivialna  $\sigma$ -algebra.

### 1.1.3 Merjlive preslikave in generirane $\sigma$ -algebre

**Definicija 1.18.** (Generirana  $\sigma$ -algebra) Naj bo  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ ; potem

$$\sigma_\Omega(\mathcal{A}) := \cap \{ \mathcal{F} \in 2^{2^\Omega} : \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \}$$

imenujemo  $\sigma$ -algebra generirana na  $\Omega$  z  $\mathcal{A}$ . Je najmanjša  $\sigma$ -algebra, ki vključuje družino podmnožic  $\mathcal{A}$ .

**Opomba 1.19.**  $2^\Omega$  je gotovo  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , ki vsebuje  $\mathcal{A}$ , torej je  $\sigma_\Omega(\mathcal{A})$  neprazna.

Za dve  $\sigma$ -algebri  $\mathcal{B}_1$  in  $\mathcal{B}_2$  na  $\Omega$  je množica  $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 := \sigma_\Omega(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$  skupek  $\mathcal{B}_1$  in  $\mathcal{B}_2$ . Bolj splošno za družino  $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$   $\sigma$ -algeber na  $\Omega$  pravimo, da je  $\vee_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda := \sigma_\Omega(\cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda)$  njen skupek.

**Opomba 1.20.** Razlog zakaj so generirane  $\sigma$ -algebre pomembne v teoriji mere je, ker le redko lahko eksplicitno podamo vse elemente  $\sigma$ -algebre, ki bi jo zeleli, ampak pogosto lahko eksplicitno podamo njene generatorje.

**Definicija 1.21.** (Zacetna in končna struktura) Naj bo  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ . Za podano  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}'$  na  $\Omega'$  definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) := f^{-1}(\mathcal{F}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{F}'\},$$

zacetno strukturo za  $f$  glede na  $\mathcal{F}'$ . (oziroma  $\sigma$ -algebra generirana z  $f$  glede na  $\mathcal{F}'$ ).

Za podano  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) := \{A' \in 2^{\Omega'} : f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\},$$

končno strukturo za  $f$  na  $\Omega'$  glede na  $\mathcal{F}$ .

**Definicija 1.22.** Za dano  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}'$  na  $\Omega'$  in  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  pravimo da je  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$   $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ -merljiva preslikava  $\iff f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$  za vse  $A' \in \mathcal{F}'$ .

**Opomba 1.23.** 1. V notacijah  $\sigma_\Omega(\mathcal{A})$  in  $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$  spuscamo  $\Omega$  in  $\mathcal{F}'$  kadar je to jasno iz konteksta. Torej pisemo preprosto  $\sigma(\mathcal{A})$  in  $\sigma(f)$ .

2. V primeru ko je zaloga vrednosti  $f$  stevna in nimamo podane ne  $\mathcal{F}'$  ali  $\Omega'$  za  $\Omega'$  vazamemo  $Z_f$  in za  $\mathcal{F}'$  vazamemo  $2^{\Omega'}$ .

3. Izmed objektov, ki smo ju uvedli v definiciji 1.21 je zacetna struktura bolj sugestivna/pomembna.

**Definicija 1.24.** Za dano  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  in  $\mathcal{F}'$  na  $\Omega'$  definiramo

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' := \{g \in \Omega^\Omega : g \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}.$$

**Zgled 1.25.** Konstantna funkcija je vedno merljiva, ne glede na  $\sigma$ -algebro. Za poljubno  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  je  $id_\Omega \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ .

**Definicija 1.26.** (Indikator) Za  $A \subset \Omega$  definiramo  $\mathbb{1}_{A_\Omega} : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ :

$$\mathbb{1}_{A_\Omega}(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Funkciji pravimo indikator množice  $A$  v  $\Omega$ . Pisali bomo  $\mathbb{1}_A$  in predvidevali da se  $\Omega$  da razbrati iz konteksta.

**Zgled 1.27.** Naj bo  $A \subset \Omega$ . Potem  $\sigma^{2^{\{0,1\}}}(\mathbb{1}_A) = \sigma_\Omega(A) = \{\emptyset, \Omega, A, \Omega \setminus A\}$ . Če je nadaljno  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  potem je  $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}/2^{\{0,1\}} \iff A \in \mathcal{F}$

**Trditev 1.28.** Naj bodo  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$   $\sigma$ -algebre (vsaka na svoji množici). Naj bo  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$  in  $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ . Potem je  $g \circ f \in \mathcal{F}/\mathcal{H}$ . Z besedami to pomeni: kompozitumi merljivih preslikav so merljive preslikave.

*Dokaz.*  $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$  za  $\forall H \in \mathcal{H}$  □

**Trditev 1.29.** (Lastnosti preslikav) Naj bo  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ .

1. Naj bo  $\mathcal{F}'$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega'$ .  $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ ; je najmanjša  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  da velja  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ .
2. Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ .  $\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f)$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega'$ ; je največja  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}'$  na  $\Omega'$  da velja  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ .
3. Naj bo  $\mathcal{F}'$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega'$  in  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , potem  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) \supset \mathcal{F}'$ .
4. Naj bo  $\mathcal{A}' \subset 2^{\Omega'}$ .  $\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')$  je najmanjša  $\sigma$ -algebra na  $\Omega'$ , ki ima  $\mathcal{A}'$  za svojo podmnožico. Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , potem je  $f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F} \text{ za vse } A' \in \mathcal{A}')$ . Natancno zapisemo  $\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')} (f) = \sigma_\Omega(\{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\})$ . V posebnem je  $f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')) = \sigma_\Omega(f^{-1}(\mathcal{A}'))$ .

*Dokaz.* 1.  $f^{-1}(\mathcal{F}')$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ :  $\forall \emptyset : f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{F}')$ ; za  $A' \in \mathcal{F}'$  je  $\Omega \setminus f^{-1}(A') = f^{-1}(\Omega \setminus A') \in f^{-1}\mathcal{F}'$ ; za zaporedje  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  je  $\cup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(A'_i) = f^{-1}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A'_i) \in f^{-1}(\mathcal{F}')$ . Drugi del je jasen

2. Podoben dokaz kot 1.

3. Je direktna posledica definicije zacetne in koncne strukture.

4. Prvi del: je jasen iz definicije generirane  $\sigma$ -alebre.

Drugi del:  $(\Rightarrow)$  : je jasen iz definicije generirane  $\sigma$ -alebre.

$(\Leftarrow)$  :  $A' \subset \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f)$  torej sledi  $\sigma_{\Omega'}(A') \subset \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f)$  in zato sledi  $f \in \mathcal{F} \setminus \sigma_{\Omega'}(A')$ .

Tretji del: V drugem delu vzamemo  $\mathcal{F} = \sigma_{\Omega}(f^{-1}(A'))$ , kar nam da  $f \in \sigma_{\Omega}(f^{-1}(A')) \setminus \sigma_{\Omega'}(A')$ . Opazimo, da je  $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(A'))$  in zato po točki

1. velja  $\sigma_{\Omega}(f^{-1}(A')) \subset f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(A'))$ .

□

**Opomba 1.30.** Tocka 4 nam pove da je dovolj da dokazemo merljivo lastnost na množici generatorjev. Se en način zapisa  $f \in \mathcal{F} / \sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F} \text{ za vse } A' \in \mathcal{A}')$ . Natanko zapisemo  $\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}_{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')} (f) = \sigma_{\Omega}(\{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\})$  je  $f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')) = \sigma_{\Omega}(f^{-1}(\mathcal{A}'))$ , kar bomo interpretirali kot operacija dobivanja praslík in generiranih  $\sigma$ -algeber komutirati.

**Definicija 1.31.** Pisemo  $\mathcal{A}|_A := \{A' \cap A : A' \in \mathcal{A}\}$  za sled  $\mathcal{A}$  na  $A$ .

**Opomba 1.32.** Če je  $\mathcal{F}$  zaprta za  $\cap$  in  $A \in \mathcal{F}$ , potem je  $\mathcal{F}|_A = \mathcal{F} \cap 2^A$ .

**Posledica 1.33.** Naj bo  $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ . Če je  $A \subset \Omega$ , potem

$$\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A = \sigma_A(\mathcal{A}|_A);$$

v primeru ce je  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , potem je  $\mathcal{A}|_A$   $\sigma$ -algebra na  $A$ .

*Dokaz.* Po prejsnji trditvi (1. točka) je  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A = \sigma^{\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})}(id_A)$   $\sigma$ -algebra na  $A$  ki vsebuje  $\mathcal{A}|_A$ , torej velja  $\sigma_A(\mathcal{A}|_A) \subset \sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A$ . Po 2. točki je  $\mathcal{C} := \{C \in 2^{\Omega} : C \cap A \in \sigma_A(\mathcal{A}|_A)\} = \sigma_{\sigma_A(\mathcal{A}|_A)}^{\Omega}(id_A)$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , ki vsebuje  $\mathcal{A}$ , torej  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$ , torej  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A \subset \sigma_A(\mathcal{A}|_A)$ .

□

**Opomba 1.34.** Kako lahko v splošnem določimo  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})$ ? Začnemo z  $\mathcal{A}$  karkoli kar mora biti v  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})$  da zadosca pogojem  $\sigma$ -algebre, vse komplemente, stevne unije,  $\emptyset$ ,  $\Omega$  in stevne unije teh itd. Po tem postopku dokazemo, da je to kar imamo  $\sigma$ -algebra.

**Zgled 1.35.** Naj bosta  $\{E, F\} \subset 2^{\Omega}$ . Potem mora  $\sigma_{\Omega}(\{E, F\})$  vsebovati  $\{\emptyset, E, F, E \setminus F, E \cap F, \dots\}$  (Particije na  $\Omega$  inducirane z  $E, F$ ). Torej  $\sigma_{\Omega}(\{E, F\}) \supset \sigma_{\Omega}(\mathcal{P})$ . Ampak  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{P})$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , ki vsebuje  $\{E, F\}$ , torej  $\sigma_{\Omega}(\{E, F\}) = \sigma_{\Omega}(\mathcal{P}) = \sigma \mathcal{P}$  iz zgleda 1.8.

**Trditev 1.36.** Naj bo  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  in naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  ter  $\mathcal{F}'$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega'$ .

1. Če je  $A' \subset \Omega$  takšna, da  $f : \Omega \rightarrow A'$ , potem je  $f \in \mathcal{F} / \mathcal{F}'$  natanko tedaj ko je  $f \in \mathcal{F} / (\mathcal{F}'|_{A'})$ .
2. Za  $A \subset \Omega$ , ce je  $f \in \mathcal{F} / \mathcal{F}'$ , je  $f|_A \in (\mathcal{F}|_A) / \mathcal{F}'$ .
3. Če za zaporedje  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  v  $\mathcal{F}$ , az katerega je  $\Omega = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ , velja  $f|_{A_i} \in (\mathcal{F}|_{A_i}) / \mathcal{F}'$  za vsak  $i \in \mathbb{N}$ , potem  $f \in \mathcal{F} / \mathcal{F}'$ .

*Dokaz.* 1. Za  $H' \in \mathcal{F}'$  je  $f^{-1}(H') = f^{-1}(H' \cap A')$ .



2. Za  $F' \in \mathcal{F}'$  je  $(f|_A)^{-1}(F') = A \cap f^{-1}(F') \in \mathcal{F}|_A$ .
3. Za  $F' \in \mathcal{F}'$  je  $f^{-1}(F') = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(F') \cap A_i \underset{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{(f|_{A_i})^{-1}(F')}_{\in \mathcal{F}|_{A_i} = \mathcal{F} \cap 2^{A_i} \subset \mathcal{F}}$

□

**Opomba 1.37.** Tocki 1. in 2. pomenita da se merljivost obnaša lepo pod omejitvami. Tocka 3. pa nam pove da je lahko merljivost preverjena "lokalno".

#### 1.1.4 Borelove množice na razširjeni realni osi in Borelova merljivost numericnih funkcij

**Definicija 1.38.** Naj bo  $[-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  razširjena realna os, opremljena z naravno relacijo  $\leq$ . Vpeljemo družino množic  $\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} := \sigma_{[-\infty, \infty]}(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$ , ki ji pravimo Borelova  $\sigma$ -algebra na  $[-\infty, \infty]$ . Za  $A \subset [-\infty, \infty]$  vpeljemo družino množic  $\mathcal{B}_A = \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}|_A$ , ki ji pravimo Borelova  $\sigma$ -algebra na  $A$ .

**Opomba 1.39.** Funkcije, ki so merljive glede na  $\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  na kodomeni, so nekako natanko tiste, ki se "lepo" obnašajo s stalisca integracije. Pričakovanje tega, kar sledi, nam je všeč tudi zato, ker na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  lahko definiramo prijetno - netrivialno translacijsko invariantno - tako imenovano Lebesquovo mero. Prav tako lahko trdimo, da je reči, da je numerična preslikava  $f$  merljiva (z vidika merjenja zanimiva), treba vsaj izmeriti množice  $\{f \leq a\} := f^{-1}[-\infty, a]$  za vsak  $a \in \mathbb{R}$  (zlasti, ob malce predvidevanju vsebine drugega dela teh zapisov, za naključno spremenljivko  $X$  bi želeli biti sposobni povedati, kaj je verjetnost dogodkov  $\{X \leq a\}$  za  $a \in \mathbb{R}$ ).

**Zgled 1.40.** Vsi intervali in stevne podmnožice  $[-\infty, \infty]$  pripadajo  $\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Prav tako vse zaprte in odprte podmnožice  $[-\infty, \infty]$  pripadajo  $\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Če je  $A \subset [-\infty, \infty]$  stevna, potem je  $\mathcal{B}_A = 2^A$ .

**Definicija 1.41.** Če  $f$  slika v  $[-\infty, \infty]$  (je numericna), potem:

1.  $\sigma(f) = \sigma^{\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}}(f)$ .
2. Za  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $D_f$  recemo da  $f$  je  $\mathcal{F}$ -merljiva  $\iff f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .
3. Za  $g : D_f \rightarrow [-\infty, \infty]$ ;  $g \wedge f := \min\{g, f\}$ ,  $g \vee f := \max\{g, f\}$ ,  $f^+ := \max\{f, 0\}$  in  $f^- := \max\{-f, 0\}$ .

**Zgled 1.42.**  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{R}}(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$ . Posledicno po trditvah 1.29 in 1.39 za  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  in  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  Borelovo merljiva  $\iff f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \iff \{f \leq a\} := f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$  za  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

**Definicija 1.43.** (Aritmetika z  $\infty$ )

1.  $0 \cdot (\pm\infty) := 0$
2.  $\infty + (-\infty) := 0$

Preostanek aritmetike v  $[-\infty, \infty]$  vpeljemo naravno, npr.  $a \cdot \infty = \text{sgn}(a)\infty$  za  $a \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\}$ ,  $a + \infty = \infty$  itd.

**Trditev 1.44.** Za  $A \subset [-\infty, \infty]$  in  $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  zvezna ter  $f \in \mathcal{B}_A \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Če je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra in  $\{f, g\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ , potem je  $\{f + g, fg\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  in  $\{\{f = g\}, \{f \subset g\}, \{f \leq g\}\} \subset \mathcal{F}$ .

*Dokaz.* Brez dokaza. □

**Trditev 1.45.** Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra in  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Potem je

$$\{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}.$$

Ce je  $f_n \geq 0$  za  $n \in \mathbb{N}$ , je  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ .

*Dokaz.*  $\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} = \sigma_{[-\infty, \infty]}(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$ . Za  $a \in \mathbb{R}$   $(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)^{-1}([-\infty, a]) = \{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a\} = \{f_n \leq a \ \forall n \in \mathbb{N}\} = \cap_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a = \cap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{f_n^{-1}([-\infty, a])}_{\in \mathcal{F} : f_n \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}}$  Da je

$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  utemeljimo tako, da zapisemo  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}} -f_n$  in opazimo, da je  $-id_{[-\infty, \infty]} \in \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  limsup in liminf sta kombinaciji sup in inf. Končno v primeru, da je  $f_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$  je  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n f_k}_{\in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}}$  po trditvi 1.44. Kar nam da  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ . □

**Posledica 1.46.** Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra, potem je  $\{\max(f, g), \min(f, g), f^+, f^-, |f|\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  za  $\{f, g\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Poleg tega je  $\{\{f_n \text{ konvergira, ko gre } n \rightarrow \infty\}, \{f_n \text{ konvergira k vrednosti iz } \mathbb{R} \text{ ko gre } n \rightarrow \infty\}, \{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_0\}\} \subset \mathcal{F}$  za vsako zaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  v  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .

*Dokaz.* Brez dokaza. □

### 1.1.5 Argumenti monotonega razreda

IDEJA: Zelimo dokazati trditve, ki se tice vseh funkcij iz  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Najprej pokazemo trditev za  $\mathbb{1}_A, A \in \mathcal{F}$ .  $\rightarrow$  izrek o monotonom razredu  $\rightarrow$  trditev velja v splošnem.

**Definicija 1.47.** Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  in  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ .  $f$  je  $\mathcal{F}$ -enostavna  $\iff f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  in  $\mathcal{Z}_f$  je končna množica.

**Trditev 1.48.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F})$  merljiv prostor in  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ .  $f$  je  $\mathcal{F}$ -enostavna  $\iff f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}$  za neke  $c_i \in [0, \infty), A_i \in \mathcal{F}, i \in [n]$  za nek  $n \in \mathbb{N}$ . Naprej, ce je  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ , potem je  $\min(2^{-n} \lceil 2^n f \rceil, n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje  $\mathcal{F}$ -enostavnih funkcij, ki narasčajo proti ( $\uparrow$ )  $f$ . (Celo enakomerno na vsaki množici na kateri je  $f$  omejena).

*Dokaz.*  $(\Rightarrow) : f = \sum_{\mathcal{Z} \setminus \{0\}} a \cdot \mathbb{1}_{\{f=a\}}, \{f=a\}$  pomeni  $f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{F}$ .  $(\Leftarrow) :$  Baje da je očitno Drugi del je jasen. □

**Opomba 1.49.** 1.  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \iff f = 1 - \mathcal{F}$ -enostavnih funkcij.

2.  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \iff f =$  limita linearnih kombinacij indikatorjev množic iz  $\mathcal{F}$ .

**Posledica 1.50.** (izrek o monotonem razredu) Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra in  $\mathcal{M} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0,\infty]}$ .  
Ce velja

1.  $1_A \in \mathcal{M} \ \forall A \in \mathcal{F}$
2.  $\mathcal{M}$  je konveksen stožec; tj.  $af + g \in \mathcal{M} \ \forall a \in [0, \infty] \ \forall f \in \mathcal{M} \ \forall g \in \mathcal{M}$
3.  $\mathcal{M}$  zaprt za  $\uparrow$  limite; tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{M} \ \forall$  zaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  v  $\mathcal{M}$

Potem je  $\mathcal{M} = \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .

*Dokaz.* Po 1. in 2.  $\mathcal{M}$  vsebuje vse  $\mathcal{F}$ -enostavne funkcije. Vsaka funkcija iz  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  je po trditvi 1.41  $\uparrow$ -limita  $\mathcal{F}$ -enostavnih funkcij in zato pripada  $\mathcal{M}$  po 3.  $\square$

**Trditev 1.51.** (Doob-Dynkinova faktorizacijska lema) Naj bo  $X : \Omega \rightarrow A$  in  $(A, \mathcal{A})$

merljiv prostor. Potem je  $Y \in X^{-1}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \iff \left( \exists h \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}, \text{ da je } Y = \underbrace{h \circ X}_{h(X)} \right).$

*Dokaz.*  $(\Leftarrow) : X \in X^{-1}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$  in  $h \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \Rightarrow$  (po trditvi 1.21)  $h \circ X \in X^{-1}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .

$(\Rightarrow) : \text{Dopisi}$   $\square$

**Posledica 1.52.**  $\mathcal{M} = X^{-1}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$

Za splošen  $Y \in X^{-1}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  je  $\{Y^+, Y^-\} \subset X^{-1}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ , zato po pravkar dokazanem obstoju  $h_+, h_-$  iz  $X^{-1}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$  sledi, da je ...

**Definicija 1.53.** Naj bo  $D \subset 2^\Omega$ .  $D$  je Dynkinov (tudi  $\lambda$ -) sistem na  $\Omega \iff \Omega \in D$  in  $(B \setminus A \in D \text{ za } D \ni A \subset B \in D)$  in  $(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in D \ \forall \uparrow \text{ zaporedje } (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ v } D)$ .  $D$  je  $\pi$ -sistem  $\iff D$  je zaprta za *cap*.

**Zgled 1.54.**  $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$  je  $\pi$ -sistem.

**Trditev 1.55.** Naj bo  $D \subset 2^\Omega$ .  $D$  je Dynkinov sistem na  $\Omega \iff \Omega \in D$ ,  $D$  je zaprt za  $c^\Omega$ ,  $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in D \ \forall \text{ zaporedje } (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  v  $D$  ki ima  $A_i \cap A_j = \emptyset$  za  $i \neq j$  iz  $\mathbb{N}$ .

... dopolni

### 1.1.6 Lebesgue-Stieltsove mere

**Izrek 1.56.** (Lebesgue-Stieltsove mere)

*Dokaz.* pisi  $\square$

**Definicija 1.57.** Meri  $\mu$  iz izreka pravimo Lebesgue-Stieltsova mera prirejena  $F$  in jo označimo z  $dF$ . ( $\mathcal{L} := d(\text{id}_{\mathbb{R}})$  je Lebesquova mera na  $\mathbb{R}$ , ne obstaja razsiritev  $\mathcal{F}$  na mero na  $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ ).

**Trditev 1.58.** Naj bo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nepadajoca in zvezna z desne. Mera  $dF$  je:  $\sigma$ -končna; končna  $\iff F$  je omejena verjetnostna  $\iff \lim_{\infty} F - \lim_{-\infty} F = 1$  Za  $x \in \mathbb{R}$  je  $dF(\{x\}) = F(x) - \underbrace{F(x-)}_{\text{leva limita } F \text{ v } x}$ .

*Dokaz.*  $\sigma$ -koristnost:  $\cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1] = \mathbb{R}$   $dF((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) \leq \infty \forall n \in \mathbb{Z}$ . ... pogledaj v skripto Od tod dobimo karakterizacijo koncnosti  $dF$  in kdaj je  $dF$  verjetnostna mera.

Za  $x \in \mathbb{R}$  je  $(x - \frac{1}{n}, x] \downarrow \{x\}$ , ko gre  $n \rightarrow \infty$  cez  $\mathbb{N}$  in zato je po zveznosti  $dF$  od zgoraj na množicah s končno mero  $dF(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} dF((x - \frac{1}{n}, x]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x) - F(x - \frac{1}{n})$ .  $\square$

**Zgled 1.59.** skripto

**Zgled 1.60.** skripto (Contorjeva množica)

## 1.2 Integracija na merljivih prostorih

**Zgled 1.61.** (nevem ce je zgled) Naj bo  $\mathcal{P}$  particija  $\Omega$  in  $\mu' : \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty)$  in  $f' : \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty)$  ( $\mu$  je mera na  $\sigma_\Omega(\mathcal{P}) = \{\cup Q : Q \in 2^{\mathcal{P}}\}$ ;  $\mu(\cup Q) := \sum_{p \in Q} \mu'(p)$  za  $Q \subset \mathcal{P}$ ), ( $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ ;  $f(\omega) = f'(p)$  za  $\omega \in p \in \mathcal{P}$ ) Potem je  $\sum_{p \in \mathcal{P}} f'(p) \cdot \mu'(p) = \sum_{r \in \mathbb{Z}_f} r \cdot \underbrace{\mu(\{f = r\})}_{f^{-1}(\{r\})}$ .

tukej sta se dve interpretaciji tega

$\sum_{p \in \mathcal{P}} f'(p) \mu'(p) = \int_a^b f(z) dz$  Riemann - Darbouxov integral odsekoma konstantne funkcije  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ .

### 1.2.1 Lebesgueov integral

**Definicija 1.62.** Naj bo  $(\Sigma, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero in  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$

- Ce je  $f$   $\mathcal{F}$ -enostvna, potem je

$$\int f d\mu := \sum_{a \in \mathbb{Z}_f} a \cdot \underbrace{\mu(\{f = a\})}_{f^{-1}(\{a\})}$$

- Ce  $f$  ni  $\mathcal{F}$ -enostvna in  $f \geq 0$  definirana, potem je

$$\int f d\mu := \sup \left\{ \int q d\mu : q \text{ je } \mathcal{F}\text{-enostvna in } q \leq f \right\}$$

- Ce  $f$  ni  $\geq 0$ , potem je

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

$\int f d\mu$  pravimo integral  $f$  proti  $\mu$  (tudi pričakovana vrednost, ce je  $\mu$  verjetnostna mera). Druge notacije za  $\int f d\mu$  so  $\mu[f] := \mu^x[f(x)] := \int f(x) \mu(dx)$ .

Za  $A \in \mathcal{F}$  pisemo  $\mu[f; A] := \mu^x[f(x); x \in A] := \int_A f(x) \mu(dx) := \int f \mathbb{1}_A d\mu$ .

**Definicija 1.63.** Integral  $f$  proti  $\mu$  je dobro definiran  $\iff \int f^+ d\mu \vee \int f^- d\mu < \infty$ .  
 $f$  je  $\mu$ -integrabilen  $\iff \int f^+ d\mu \vee \int f^- d\mu < \infty$ .

**Definicija 1.64.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero.

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \{f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : f \text{ je } \mu \text{ integrabilna}\}.$$

Za  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  za katero je  $\{\Re g, \Im g\} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$  je  $\int g d\mu := \int \Re g d\mu + i \int \Im g d\mu$ .

**Izrek 1.65.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero. Integral ima sledece lastnosti.

1. *Aditivnost:*  $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$  za  $\{f, g\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  take, da je  $\int f^{-1} d\mu \vee \int g^{-1} d\mu < \infty$ .
2. *Integral indikatorja:*  $\int \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$  za  $\forall A \in \mathcal{F}$ . (V posebnem je  $\int 0 d\mu = 0$  in torej  $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$  za vse  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ )
3. *Integrali, ki so nič, ki so končni:* Za  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  je  $\int f d\mu = 0 \iff \mu(f > 0) = 0$  ( $f$  je skoraj povsot glede na  $\mu$ ), Če  $\int f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(f = \infty) = 0$  ( $f < \infty$  skoraj povsot glede na  $\mu$ .)
4. *Trikotniska neenakost:*  $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$  za  $\forall f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  za katere je  $\int |f| d\mu < \infty$ .
5. *Integral ne vidi množic z mero 0:* Če je  $\int f d\mu = \int g d\mu$  za  $\{f, g\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  za katere je  $f = g$  skoraj povsot glede na  $\mu$  ( $\mu(f \neq g) = 0$ )
6. *Monotonost:*
7. *Homogenost:*

... se od lucije za prepisat

*Dokaz.* (ib)  $\Rightarrow$  (ia) in (ii): (ia):

$$(inf_{n \geq m} f_n)_{m \in \mathbb{N}} \text{ je zaporedje v } \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]},$$

ki je narascajoce.  $f_n^- \leq g \Rightarrow (inf_{n \geq m} f_n)^- \leq g$ . Po (ib) sledi da

$$\int \lim_{m \rightarrow \infty} f_m d\mu = \int \lim_{m \rightarrow \infty} inf_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} f_n d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int inf_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

(ii): Uporabim (ia). Za  $\left( - \underbrace{|f_n - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m|}_{\leq 2g} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  in dobimo

$$0 = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( - \underbrace{|f_n - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m|}_{\leq 2g} \right) d\mu \leq \dots$$

□

**Posledica 1.66.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero in  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ . Potem je

$$\int \sum_{n \in \mathbb{N}_0} f_n d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \int f_n d\mu.$$

*Dokaz.*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f_m(\text{narascajocevn})$$

Zaradi prejsnjega izreka sledi

$$\int \sum_{n \in \mathbb{N}_0} f_n d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \sum_{m=1}^N f_m d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \int f_m d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \int f_n d\mu.$$

□

**Posledica 1.67.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F})$  merljiv prostor in  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje mer na  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Potem je  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$  mera na  $(\Omega, \mathcal{F})$  in za  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  je

$$\int f d\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) \text{ dobrodefinirana} \iff \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \int f^+ d\mu_n\right) \vee \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \int f^- d\mu_n\right) < \infty.$$

V tem primeru je

$$\int f d\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f d\mu_n.$$

*Dokaz.* Za  $A \in \mathcal{F}$  je  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A) = \int \mu_n(A) c_{\mathbb{N}}(dn)$ . Potem je za zaporedje  $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$  paroma disjunktnih množic v  $\mathcal{F}$ :

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) \left(\cup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) = \int \mu_n \left(\cup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) c_{\mathbb{N}}(dn) = \int \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu_n(A_m) c_{\mathbb{N}}(dn) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \int \mu_n(A_m) c_{\mathbb{N}}(dn) =$$

□

Naprej, razred funkcij  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  za katere velja prejsnja posledica je

$$\int f d\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) = \int \int f d\mu_n c_{\mathbb{N}}(dm)$$

konveksen stožec zaprt za  $\uparrow$  limite, ki vsebuje  $\mathbb{1}_A$  za  $A \in \mathcal{F}$ . Po izreku o monotonem razredu prejsnja posledica velja za vse  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-0, \infty]}$ .

**Definicija 1.68.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero in  $(\Omega', \mathcal{F}')$  merljiv prostor. Za  $\in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$  vpeljemo

$$f * \mu : \mathcal{F}' \rightarrow [0, \infty], (f * \mu)(A') := \mu(f^{-1}(A')) \text{ za } A' \in \mathcal{F}'.$$

$f * \mu$  označimo tudi z  $\mu \circ f^{-1}$  ali  $\mu_f$  in ji recemo potisk  $\mu$  po  $f$  glede na  $\mathcal{F}'$ , ali zakon  $f$  pod  $\mu$  glede na  $\mathcal{F}'$  (v primeru, da je verjetnostna).

**Definicija 1.69.** Z  $f * \mu$  označimo sliko mere  $\mu$  pod  $f$  glede na  $\mathcal{F}$ .

**Posledica 1.70.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero in  $(\Omega', \mathcal{F}')$  merljiv prostor. Za  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$  je  $f * \mu$  mera na  $(\Omega', \mathcal{F}')$ , ki je končna ali verjetnostna - kakor je  $\mu$ . Poleg tega je za  $g \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$

$$\int g d(f * \mu) \text{ dobro definiran} \iff \int g \circ f d\mu \text{ dobrodefiniran}.$$

in tedaj je

$$\int g d(f * \mu) = \int g \circ f d\mu.$$

*Dokaz.*  $(f * \mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ . Za zaporedje  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paroma disjunktnih množic v  $\mathcal{F}'$  je  $(f * \mu)(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(f^{-1}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)) = \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(f^{-1}(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f * \mu)(A_n)$ . Torej velja da je  $f * \mu$  mera na  $(\Omega', \mathcal{F}')$ . Naprej,  $(f * \mu)(\Omega') = \mu(f^{-1}(\Omega')) = \mu(\Omega)$ , torej je res  $f * \mu$  končna oz. verjetnostna  $\iff$  je  $\mu$  končna oz. verjetnostna.  $\square$

Postavimo sedaj

$$\mathcal{M} := \{g \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]} \mid \int g d(f * \mu) = \int g \circ f d\mu\}.$$

$\mathbb{1}_A \in \mathcal{M} \forall A \in \mathcal{F}'$ , kajti  $\int \mathbb{1}_A d(f * \mu) = (f * \mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)) = \int \mathbb{1}_{f^{-1}(A)} d\mu$ .  $\mathcal{M}$  je konveksen stožec. dokaz...

$\mathcal{M}$  je zaprta za  $\uparrow$  limite. dokaz...

Za splošen  $g \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  je  $\{g^+, g^-\} \subset \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ , zato  $\int g^+ d(f * \mu) = \int g^+ \circ f d\mu$  ... to je del dokaza.

**Posledica 1.71.** Naj bo  $(X, \Sigma, \mu)$  prostor z mero in  $O$  neka odprta podmnožica  $\mathbb{R}$  in  $f : X \times O \rightarrow \mathbb{R}$ . Denimo, da je

- $F(., t)$   $\mu$ -integrabilna za  $\forall t \in O$
- $F(x, .)$  odvedljiva za  $\forall x \in X$

Predpostavimo, da  $\exists g \in \Sigma \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ ,  $\int g d\mu < \infty$ , taka da je

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \forall x \in X \forall t \in O.$$

Potem velja

- $(X \ni x \rightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(x, t))$  je  $\mu$ -integrabilna
- $(O \ni t \rightarrow \int F(x, t) \mu(dx))$  je odvedljiva in
- $\frac{d}{dt} \int F(x, t) \mu(dx) = \int \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \mu(dx) \forall t \in O$

*Dokaz.* Od tanje prepisi.  $\square$

### 1.2.2 Zamenjava vrstnega reda integracija in povezane teme

**Definicija 1.72.** Naj bosta  $(\Omega', \mathcal{F})$  in  $(\Omega', \mathcal{F}')$  merljiva prostora.

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' := \sigma_{\Omega \times \Omega'}(\{A \times A' \mid (A, A') \text{ in } \mathcal{F} \times \mathcal{F}'\})$$

je produktna  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{F}'$  ( $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} := \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ) je Borelova  $\sigma$ -algebra na  $\mathbb{R}^n$ .

**Trditev 1.73.** Za  $A \subset \mathbb{R}^2$  in  $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$ , ki je zvezna je  $f \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .

*Dokaz.* Brez dokaza.  $\square$

**Trditev 1.74.** Naj bosta  $(\Omega, \mathcal{F})$  in  $(\Omega', \mathcal{F}')$  merljiva prostora. Potem velja:

1.  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$  je najmanjša  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{G}$  na  $\Omega \times \Omega'$  za katero je  $pr_\Omega := (\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \rightarrow \omega) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$  in  $pr_{\Omega'} := (\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \rightarrow \omega') \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}'$ .
2. Za  $f \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \Rightarrow f(\omega, \cdot) \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \forall \omega \in \Omega$  in  $f(\cdot, \omega') \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \forall \omega' \in \Omega'$ .
3. Za vsako  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{G}$  na  $G$  in  $f : G \rightarrow \Omega$  ter  $f' : G \rightarrow \Omega'$  je  $(f, f') \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$  in  $f' \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}'$ .

Dokaz. Brez dokaza. □

**Izrek 1.75.** Naj bosta  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  in  $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$  prostora z mero ter  $\mu$  in  $\mu'$   $\sigma$ -končni. Potem velja:

1. Obstaja natanko ena mera  $\ni$  na  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ , ki jo označimo  $\mu \times \mu'$ , da je  $\ni (A \times A') = \mu(A)\mu'(A') \forall (A, A') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}'$ .
2. Naj bo  $f \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . in naj velja:

$$(a) f \geq 0$$

$$(b) \int |f| d(\mu \times \mu') < \infty$$

$$(c) \int \int f^-(\omega, \omega') \mu(d\omega) \mu'(d\omega') \text{ and } \int \int f^-(\omega, \omega') \mu'(d\omega') \mu(d\omega) < \infty.$$

Potem je  $(\Omega \ni \omega' \rightarrow \int f(\omega, \omega') \mu(d\omega)) \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  in  $(\Omega' \ni \omega \rightarrow \int f(\omega, \omega') \mu'(d\omega')) \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . in  $\int f d(\mu \times \mu') = \int \int f(\omega, \omega') \mu(d\omega) \mu'(d\omega') = \int \int f(\omega, \omega') \mu'(d\omega') \mu(d\omega)$ .

Dokaz. Brez dokaza. □

**Definicija 1.76.** Meri  $\mu \times \mu'$  recemo produktna mera. ( $\mathcal{L}^n := \mathcal{L} \times \dots \times \mathcal{L}$  pravimo  $n$ -razsezna Lebesquova mera).