UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika - 1. stopnja

Anej Rozman

Verjetnost z mero

Zapiski po predavanjih doc. dr. Matije Vidmarja v študijskem letu 2023/2024.
(Priporocam da med branjem sledite tudi originalni skripti predavatelja)

Ljubljana, 2023

Kazalo

1 Mera

1.1 Merljivost in mere

1.1.1 Merjlive mnozice

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$, torej $\mathcal{A} \in 2^{2^{\Omega}}$ Pravimo, da je $\mathcal{A}$ zaprta za:

1. c^{Ω} (zaprta za komplemente v Ω) $\iff \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$
2. $\cap$ (zaprta za preseke) $\iff A \cap A' \in \mathcal{A}$ kadarkoli $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
3. $\cup$ (zaprta za unije) $\iff A \cup A' \in \mathcal{A}$ kadarkoli $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
4. $\backslash$ (zaprta za razlike) $\iff A \backslash A' \in \mathcal{A}$ kadarkoli $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
5. $\sigma\cap$ (zaprta za stevne preseke) $\iff \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{A}$
6. $\sigma\cup$ (zaprta za stevne unije) $\iff \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{A}$

Definicija 1.2. (σ-algebra, pod-σ-algebra in algebra)

1. $\mathcal{A}$ je σ-algebra na $\Omega \iff (\Omega, \mathcal{A})$ je merljiv prostor $\iff \emptyset \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ je zaprta za c^{Ω} in $\sigma\cup$. Ce je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω potem: A je $\mathcal{A}$-merljiva $\iff A \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{B}$ je pod-σ-algebra $\mathcal{A} \iff \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je σ-algebra na Ω.
3. $\mathcal{A}$ je algebra na $\Omega \iff \emptyset \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ je zaprta za c^{Ω} in $\cup$.

Opomba 1.3. V primeru ko nimamo podane mnozice Ω lahko vzamemo $\Omega = \cup\mathcal{A}$ in velja $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$.

Zgled 1.4. 2^{Ω} je σ-algebra na Ω in $\{\emptyset, \Omega\}$ je σ-algebra na Ω. Klicemo ju diskretna in trivialna σ-algebra.

Zgled 1.5. Naj bo $A \subset \Omega$. Potem je $\sigma_{\Omega} A := \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$ σ-algebra na Ω.

Zgled 1.6. $\sigma_{\Omega}^{ccc} := \{A \in 2^{\Omega} : A$ je stevna ali $\Omega \backslash A$ je stevna$\}$ je σ-algebra na Ω. To je oznaka za stevno kostevno σ-algebro na Ω. Seveda je $\sigma_{\Omega}^{ccc} = 2^{\Omega}$ razen ce Ω ni stevna.

Zgled 1.7. Naj bo $\mathcal{P}$ particija Ω (torej $\mathcal{P} \subset 2^{\Omega}$ in $\mathcal{P}$ je druzina paroma disjunktnih mnozic, ki pokrije Ω). Potem je $\sigma\mathcal{P} := \{\cup R \mid R \subset P \ in \ (R \ ali \ P\backslash R \ je \ stevna)\}$ je sigma algebra na Ω.

Trditev 1.8. *Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ zaprta za c^{Ω} in naj bo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω ce in samo ce je $\mathcal{A}$ zaprta za $\sigma\cup$, in v tem primeru je $\mathcal{A}$ zaprta za $\cap$ in $\cup$ in $\backslash$.*

Dokaz. Sledi iz de Morganovih zakonov:

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \backslash \left(\cup_{n\in\mathbb{N}}(\Omega\backslash A_n)\right)$$

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \backslash \left(\cap_{n\in\mathbb{N}}(\Omega\backslash A_n)\right)$$

Zaprtost σ-algebre A na Ω za:

1. $\cap$: $A \cap B = A \cap B \cap \Omega \cap \Omega \dots \in \mathcal{A}$
2. $\cup$: $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \dots \in \mathcal{A}$
3. $\backslash$: $A\backslash B = A \cap (\Omega\backslash B) \in \mathcal{A}$

$\square$

1.1.2 Mere

Definicija 1.9. (Mera) Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$.
μ je mera na $(\Omega, \mathcal{F})$ natanko tedaj ko:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. μ je stevno aditivna: za $\forall$ zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ paroma disjunktnih mnozic je $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Za mero μ na (Ω, F) recemo da je:

1. koncna $\iff \mu(\Omega) < \infty$
2. verjetnostna mera $\iff \mu(\Omega) = 1$
3. σ-koncna $\iff \exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} : \Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\mu(A_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

Definicija 1.10. (Prostor z mero) (Ω, F, μ) je prostor z mero $\iff \mu$ je mera na (Ω, F)

Definicija 1.11. Ce je (Ω, F, μ) merljiv prostor. Potem za $A \in \mathcal{F}$ recemo:

1. A je μ-zanemarljiva $\iff \mu(A) = 0$
2. A je μ-trivialna $\iff \mu(A) = 0$ ali $\mu(\Omega\backslash A) = 0$

Ce imamo neko lastnost $P(\omega)$ v $\omega \in A$, potem:

1. $P(\omega)$ drzi μ-skoraj povsod v $\omega \in A \iff A_{\neg P} := \{\omega \in A : \neg P(\omega)\}$ je μ-zanemarljiva.
2. $P(\omega)$ drzi μ-skoraj gotovo v $\omega \in A \iff A_{\neg P} := \{\omega \in A : \neg P(\omega)\}$ je μ-zanemarljiva in μ je verjetnost.
3. P drzi μ-s.p. na $A \iff P(\omega)$ drzi μ-s.p. v $\omega \in A$.
4. P drzi μ-s.g. na $A \iff P(\omega)$ drzi μ-s.g. v $\omega \in A$.

Zgled 1.12. Nicelna mera na $\mathcal{F}$ (torej preslikava $\mu(A) \to 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$) je vedno mera na katerikoli σ-algebri.

Zgled 1.13. Ce definiramo $c_\Omega : 2^\Omega \to [0, \infty]$ kot $c_\Omega(A) := |A|$ ce je A koncna podmnozica Ω in $c_\Omega(A) := \infty$ ce je A neskoncna podmnozica Ω, je c_Ω tako imenovana stevna mera na Ω. Ko je Ω koncna in neprazna, potem je $\frac{c_\Omega}{|\Omega|}$ verjentostna mera na Ω.

Zgled 1.14. Ce definiramo $\delta_x : 2^\Omega \to [0, \infty]$ za fiksen $x \in \Omega$, tako da za $A \in 2^\Omega, \delta_x(A) := 0$ ce $x \notin A$ in $\delta_x(A) := 1$ ce $x \in A$, potem je δ_x tako imenovana Diracova mera za x. Katerakoli podmnozica $\Omega \backslash \{x\}$ je δ_x-zanemarljiva.

Trditev 1.15. *(Lastnosti mere) Naj bo μ mera na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem velja naslednje:*

1. *μ je aditivna: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ kadarkoli $A \cap B = \emptyset$ in $\{A, B\} \in \mathcal{F}$.*
2. *μ je monotona: $A \subset B$ in $\{A, B\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.*
3. *μ je zvezna od spodaj: $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) =\uparrow$ -$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ narascajoce zaporedje v $\mathcal{F}$.*
4. *μ je stevno subaditivna: $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}$.*
5. *Predpostavimo da je μ koncna. $\mu(\Omega \backslash A) = \mu(\Omega) - \mu(A)$ za vse $A \in \mathcal{F}$. Se vec, μ je zvezna od zgoraj: $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) =\downarrow$ -$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ kadarkoli je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoce zaporedje v $\mathcal{F}$.*
6. *Za $A \in \mathcal{F}$ je $\mathcal{F}|_A := \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$; potem je $\mu_A := \mu_{\mathcal{F}|_A}$ mera na $\mathcal{F}|_A$. Imenuje se restrikcija/skrcitev mere μ na A.*

Dokaz.

1. $(A, B, \emptyset, \emptyset, \cdots)$ je zaporedje medseboj disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}$, torej po stevni aditivnosti velja $\mu(A \cup B \cup \emptyset \cup \cdots) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\emptyset) + \cdots = \mu(A) + \mu(B)$.
2. $B = A \cup (B \backslash A)$ in uporabimo koncno aditivnost (1.).
3. $(A_1, A_2 \backslash A_1, A_3 \backslash A_2, \cdots)$ je zaporedje paroma disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}$ z unijo $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Uporabimo stevno aditivnost in za tem se koncno aditivnost.
4. $(A_1, A_2 \backslash A_1, A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), \cdots)$ je zaporedje paroma disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}$ z unijo $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Uporabimo stevno aditivnost in za tem se monotonost (2.).
5. Prvi del sledi iz koncne aditivnosti (1.). Za mnozici vzamemo $A \in \Omega$ in $B = \Omega \backslash A$. Dobimo $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(\Omega \backslash A)$. Drugi del sledi iz zveznosti od spodaj (3.) tako da jo uporabimo na $(\Omega \backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\mu(\Omega) - \mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} \Omega \backslash A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega \backslash A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega) - \mu(A_n) = \mu(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ $\Rightarrow \mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

6. Preveriti moramo, da je $\mathcal{F}|_A$ σ-algebra na A. Kasneje bomo videli da je $\mathcal{F}|_A = 2^A \cap \mathcal{F}$ in bo dokaz sledil iz tega.

$\square$

Zgled 1.16. (Borel-Cantellijeva lema) Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ merljiv prostor in $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}$, da velja $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$. Potem je $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Dokaz. Zaporedje mnozic $\{\cup_{n=N}^{\infty} A_n\}_{N=1}^{\infty}$ je padajoce:

$$\cup_{n=N}^{\infty} A_n \supseteq \cup_{n=N+1}^{\infty} A_n \supseteq \cdots \supseteq \cup_{n=M}^{\infty} A_n \supseteq \cdots \supseteq \limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} A_n$$

Po zveznosti od zgoraj (5.) sledi:

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mu(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} A_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(\cup_{n=N}^{\infty} A_n) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

$\square$

Zgled 1.17. Ce je P vejretnost na $(\Omega, \mathcal{F})$, potem je $P^{-1}(\{0,1\})$ pod-σ-algebra na $\mathcal{F}$. Tako imenovana P-trivialna σ-algebra.

1.1.3 Merjlive preslikave in generirane σ-algebre

Definicija 1.18. (Generirana σ-algebra) Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$; potem

$$\sigma_{\Omega}(\mathcal{A}) := \cap\{\mathcal{F} \in 2^{2^{\Omega}} : \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{A} \subset \mathcal{F}\}$$

imenujemo σ-algebra generirana na Ω z $\mathcal{A}$. Je najmanjsa σ-algebra, ki vkljucuje druzino podmnozic $\mathcal{A}$.

Opomba 1.19. 2^{Ω} je gotovo σ-algebra na Ω, ki vsebuje $\mathcal{A}$, torej je $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})$ neprazna.

Za dve σ-algebri $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$ na Ω je mnozica $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 := \sigma_{\Omega}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$ skupek $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$. Bolj splosno za druzino $(\mathcal{B}_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ σ-algeber na Ω pravimo, da je $\vee_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_{\lambda} := \sigma_{\Omega}(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_{\lambda})$ njen skupek.

Opomba 1.20. Razlog zakaj so generirane σ-algebre pomembne v teoriji mere je, ker le redko lahko eksplicitno podamo vse elemente σ-algebre, ki bi jo zeleli, ampak pogosto lahko eksplicitno podamo njene generatorje.

Definicija 1.21. (Zacetna in koncna struktura) Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$. Za podano σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) := f^{-1}(\mathcal{F}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{F}'\},$$

zacetno strukturo za f glede na $\mathcal{F}'$. (oziroma σ-algebra generirana z f glede na $\mathcal{F}'$).

Za podano σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) := \{A' \in 2^{\Omega'} : f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\},$$

koncno strukturo za f na Ω' glede na $\mathcal{F}$.

Definicija 1.22. Za dano σ-algebro $\mathcal{F}'$ na Ω' in σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω pravimo da je f $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-merljiva preslikava $\iff f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ za vse $A' \in \mathcal{F}'$.

Opomba 1.23.

1. V notacijah $\sigma_\Omega(\mathcal{A})$ in $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ spuscamo Ω in $\mathcal{F}'$ kadar je to jasno iz konteksta. Torej pisemo preprosto $\sigma(\mathcal{A})$ in $\sigma(f)$.
2. V primeru ko je zaloga vrednosti f stevna in nimamo podane ne $\mathcal{F}'$ ali Ω' za Ω' vazamemo Z_f in za $\mathcal{F}'$ vazamemo $2^{\Omega'}$.
3. Izmed objektov, ki smo ju uvedli v definiciji 1.21 je zacetna struktura bolj sugestivna/pomembna.

Definicija 1.24. Za dano σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω in $\mathcal{F}'$ na Ω' definiramo

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' := \{g \in \Omega'^{\Omega} : g \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}.$$

Zgled 1.25. Konstantna funkcija je vedno merljiva, ne glede na σ-algebro. Za poljubno σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω je $id_\Omega \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.

Definicija 1.26. (Indikator) Za $A \subset \Omega$ definiramo $\mathbb{1}_{A_\Omega} : \Omega \to \{0, 1\}$:

$$\mathbb{1}_{A_\Omega}(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Funkciji pravimo indikator mnozice A v Ω. Pisali bomo $\mathbb{1}_A$ in predvidevali da se Ω da razbrati iz konteksta.

Zgled 1.27. Naj bo $A \subset \Omega$. Potem $\sigma^{2^{\{0,1\}}}(\mathbb{1}_A) = \sigma_\Omega(A) = \{\emptyset, \Omega, A, \Omega \backslash A\}$. Ce je nadaljno $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω potem je $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}/2^{\{0,1\}} \iff A \in \mathcal{F}$

Trditev 1.28. *Naj bodo $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ σ-algebre (vsaka na svoji mnozici). Naj bo $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$ in $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Potem je $g \circ f \in \mathcal{F}/\mathcal{H}$. Z besedami to pomeni: kompozitumi merljivih preslikav so merljive preslikave.*

Dokaz. $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$ za $\forall H \in \mathcal{H}$ $\square$

Trditev 1.29. *(Lastnosti preslikav) Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$.*

1. *Naj bo $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω'. $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$ je σ-algebra na Ω; je najmanjsa σ-algebra $\mathcal{F}$ na Ω da velja $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.*
2. *Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. $\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f)$ je σ-algebra na Ω'; je najvecja σ-algebra $\mathcal{F}'$ na Ω' da velja $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.*
3. *Naj bo $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω' in $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, potem $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) \supset \mathcal{F}'$.*
4. *Naj bo $\mathcal{A}' \subset 2^{\Omega'}$. $\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')$ je najmanjsa σ-algebra na Ω', ki ima $\mathcal{A}'$ za svojo podmnozico. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, potem je $f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ za vse $A' \in \mathcal{A}')$. Natancno zapisemo $\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}(f) = \sigma_\Omega(\{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\})$. V posebnem je $f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')) = \sigma_\Omega(f^{-1}(\mathcal{A}')$.*

Dokaz. 1. $f^{-1}(\mathcal{F}')$ je σ-algebra na Ω: $\forall\emptyset : f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{F}')$; za $A' \in \mathcal{F}'$ je $\Omega \backslash f^{-1}(A') = f^{-1}(\Omega \backslash A') \in f^{-1}\mathcal{F}'$; za zaporedje $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je $\cup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A'_i) = f^{-1}(\cup_{i\in\mathbb{N}} A'_i) \in f^{-1}(\mathcal{F}')$. Drugi del je jasen

2. Podoben dokaz kot 1.

3. Je direktna posledica definicije zacetne in koncne strukture.

4. Prvi del: je jasen iz defnicije generirane σ-alebre.
Drugi del: $(\Rightarrow)$: je jasen iz definicije generirane σ-algebre.
$(\Leftarrow)$: $A' \subset \sigma^{\Omega'}_{\mathcal{F}}(f)$ torej sledi $\sigma_{\Omega'}(A') \subset \sigma^{\Omega'}_{\mathcal{F}}(f)$ in zato sledi $f \in \mathcal{F} \backslash \sigma_{\Omega'}(A')$.
Tretji del: V drugem delu vzamemo $\mathcal{F} = \sigma_\Omega(f^{-1}(A'))$, kar nam da $f \in \sigma_\Omega(f^{-1}(A')) \backslash \sigma_{\Omega'}(A')$. Opazimo, da je $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(A'))$ in zato po tocki 1. velja $\sigma_\Omega(f^{-1}(A')) \subset f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(A'))$.

□

Opomba 1.30. Tocka 4 nam pove da je dovolj da dokazemo merljivo lastnost na mnozici generatorjev. Se en nacin zapisa $f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ za vse $A' \in \mathcal{A}')$. Natancno zapisemo $\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}(f) = \sigma_\Omega(\{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\})$ je $f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')) = \sigma_\Omega(f^{-1}(\mathcal{A}'))$, kar bomo interpretirali kot operacija dobivanja praslik in generiranih σ-algeber komutirati.

Definicija 1.31. Pisemo $\mathcal{A}|_A := \{A' \cap A : A' \in \mathcal{A}\}$ za sled $\mathcal{A}$ na A.

Opomba 1.32. Ce je $\mathcal{F}$ zaprta za $\cap$ in $A \in \mathcal{F}$, potem je $\mathcal{F}|_A = \mathcal{F} \cap 2^A$.

Posledica 1.33. *Naj bo $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$. Ce je $A \subset \Omega$, potem*

$$\sigma_\Omega(\mathcal{A})|_A = \sigma_A(\mathcal{A}|_A);$$

v primeru ce je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω, potem je $\mathcal{A}|_A$ σ-algebra na A.

Dokaz. Po prejsnji trditvi (1. tocka) je $\sigma_\Omega(\mathcal{A})|_A = \sigma^{\sigma_\Omega(\mathcal{A})}(id_A)$ σ-algebra na A ki vsebuje $\mathcal{A}|_A$, torej velja $\sigma_A(\mathcal{A}|_A) \subset \sigma_\Omega(\mathcal{A}|_A)$. Po 2. tocki je $\mathcal{C} := \{C \in 2^\Omega : C \cap A \in \sigma_A(\mathcal{A}|_A)\} = \sigma^\Omega_{\sigma_A(\mathcal{A}|_A)}(id_A)$ σ-algebra na Ω, ki vsebuje $\mathcal{A}$, torej $\sigma_\Omega(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$, torej $\sigma_\Omega(\mathcal{A})|_A \subset \sigma_A(\mathcal{A}|_A)$.

□

Opomba 1.34. Kako lahko v sposnem dolocimo $\sigma_\Omega(\mathcal{A})$? Zacnemo z $\mathcal{A}$ karkoli kar mora biti v $\sigma_\Omega(\mathcal{A})$ da zadosca pogojem σ-algebre, vse komplemente, stevne unije, $\emptyset$, Ω in stevne unije teh itd. Po tem postopku dokazemo, da je to kar imamo σ-algebra.

Zgled 1.35. Naj bosta $\{E, F\} \subset 2^\Omega$. Potem mora $\sigma_\Omega(\{E, F\})$ vsebovati $\{\emptyset, E, F, E\backslash F, E\cap F, \cdots\}$ (Particije na Ω inducirane z E, F). Torej $\sigma_\Omega(\{E, F\}) \supset \sigma_\Omega(\mathcal{P})$. Ampak $\sigma_\Omega(\mathcal{P})$ je σ-algebra na Ω, ki vsebuje $\{E, F\}$, torej $\sigma_\Omega(\{E, F\}) = \sigma_\Omega(\mathcal{P}) = \sigma\mathcal{P}$ iz zgleda 1.8.

Trditev 1.36. *Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$ in naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω ter $\mathcal{F}'$ σ-algebra na Ω'.*

1. *Ce je $A' \subset \Omega$ taksna, da $f : \Omega \to A'$, potem je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ natanko tedaj ko je $f \in \mathcal{F}/(\mathcal{F}'|_{A'})$.*

2. *Za $A \subset \Omega$, ce je $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, je $f|_A \in (\mathcal{F}|_A)/\mathcal{F}'$.*

3. *Ce za zaporedje $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{F}$, za katerega je $\Omega = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, velja $f|_{A_i} \in (\mathcal{F}|_{A_i})/\mathcal{F}'$ za vsak $i \in \mathbb{N}$, potem $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.*

Dokaz. 1. Za $H' \in \mathcal{F}'$ je $f^{-1}(H') = f^{-1}(H' \cap A')$.

2. Za $F' \in \mathcal{F}'$ je $(f|_A)^{-1}(F') = A \cap f^{-1}(F') \in \mathcal{F}|_A$.

3. Za $F' \in \mathcal{F}'$ je $f^{-1}(F') = \cup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(F') \cap A_i \underbrace{=}_{\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega} \cup_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{(f|_{A_i})^{-1}(F')}_{\in \mathcal{F}|_{A_i} = \mathcal{F}\cap 2^{A_i} \subset \mathcal{F}}$

□

Opomba 1.37. Tocki 1. in 2. pomenita da se merljivost obnasa lepo pod omejitvami. Tocka 3. pa nam pove da je lahko merljivost preverjena "lokalno".

1.1.4 Borelove mnozice na razsirjeni realni osi in Borelova merljivost numericnih funkcij

Definicija 1.38. Naj bo $[-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ razsirjena realna os, opremljena z naravno relacijo $\leq$. Vpeljemo druzino mnozic $\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} := \sigma_{[-\infty,\infty]}(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$, ki ji pravimo Borelova σ-algebra na $[-\infty, \infty]$. Za $A \subset [-\infty, \infty]$ vpeljemo druzino mnozic $\mathcal{B}_A = \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}|_A$, ki ji pravimo Borelova σ-algebra na A.

Opomba 1.39. Funkcije, ki so merljive glede na $\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ na kodomeni, so nekako natanko tiste, ki se "lepo"obnasajo s stalisca integracije. Pričakovanje tega, kar sledi, nam je všeč tudi zato, ker na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ lahko definiramo prijetno - netrivialno translacijsko invariantno - tako imenovano Lebesquovo mero. Prav tako lahko trdimo, da je reči, da je numerična preslikava f merljiva (z vidika merjenja zanimiva), treba vsaj izmeriti množice $\{f \leq a\} := f^{-1}[-\infty, a]$ za vsak $a \in \mathbb{R}$ (zlasti, ob malce predvidevanju vsebine drugega dela teh zapisov, za naključno spremenljivko X bi želeli biti sposobni povedati, kaj je verjetnost dogodkov $\{X \leq a\}$ za $a \in \mathbb{R}$).

Zgled 1.40. Vsi intervali in stevne podmnozice $[-\infty, \infty]$ pripadajo $\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Prav tako vse zaprte in odprte podmnozice $[-\infty, \infty]$ pripadajo $\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Ce je $A \subset [-\infty, \infty]$ stevna, potem je $\mathcal{B}_A = 2^A$.

Definicija 1.41. Ce f slika v $[-\infty, \infty]$ (je numericna), potem:

1. $\sigma(f) = \sigma^{\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}}(f)$.

2. Za σ-algebro $\mathcal{F}$ na D_f recemo da f je $\mathcal{F}$-merljiva $\iff f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.

3. Za $g : D_f \to [-\infty, \infty]$; $g \wedge f := \min\{g, f\}$, $g \vee f := \max\{g, f\}$, $f^+ := \max\{f, 0\}$ in $f^- := \max\{-f, 0\}$.

Zgled 1.42. $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \sigma_\mathbb{R}(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$. Posledicno po trditvah 1.29 in 1.36 za σ-algebro $\mathcal{F}$ na Ω in $f : \Omega \to \mathbb{R}$, f Borelovo merljiva $\iff f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_\mathbb{R} \iff \{f \leq a\} := f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ za $\forall a \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.43. (Aritmetika z ∞)

1. $0 \cdot (\pm\infty) := 0$
2. $\infty + (-\infty) := 0$

Preostanek aritmetike v $[-\infty, \infty]$ vpeljemo naravno, npr. $a \cdot \infty = sgn(a)\infty$ za $a \in [-\infty, \infty]\backslash\{0\}$, $a + \infty = \infty$ itd.

Trditev 1.44. *Za $A \subset [-\infty, \infty]$ in $f : A \to [-\infty, \infty]$ zvezna, potem $f \in \mathcal{B}_A \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Ce je $\mathcal{F}$ σ-algebra in $\{f, g\} \subset \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, potem je $\{f + g, fg\} \subset \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ in $\{\{f = g\}, \{f \subset g\}, \{f \leq g\}\} \subset \mathcal{F}$.*

Dokaz. Brez dokaza. □

Trditev 1.45. *Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Potem je*

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n\} \subset \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}.$$

Ce je $f_n \geq 0$ za $n \in \mathbb{N}$, je $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[0,\infty]}$.

Dokaz. $\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} = \sigma_{[-\infty,\infty]}(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$. Za $a \in \mathbb{R}$ $(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)^{-1}([-\infty, a]) = \{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq a\} = \{f_n \leq a\ \forall n \in \mathbb{N}\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq a = \cap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{f_n^{-1}([-\infty, a])}_{\in\mathcal{F} \because f_n \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}}$ Da je $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ utemeljimo tako, da zapisemo $\inf_{n\in\mathbb{N}} = -\sup_{n\in\mathbb{N}} -f_n$ in opazimo, da je $-id_{[-\infty,\infty]} \in \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ lim sup in lim inf sta kombinaciji sup in inf. Koncno v primeru, da je $f_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ je $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f_k = \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n f_k}_{\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}\text{po trditvi 1.44}}$ Kar nam da $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. □

Posledica 1.46. *Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra, potem je $\{\max(f, g), \min(f, g), f^+, f^-, |f|\} \subset \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ za $\{f, g\} \subset \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Poleg tega je $\{\{f_n$ konvergira, ko gre $n \to \infty\}$, $\{f_n$konvergira k vrednosti iz $\mathbb{R}$ ko gre $n \to \infty\}, \{\lim_{n\to\infty} f_n = f_0\}\} \subset \mathcal{F}$ za vsako zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ v $\mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.*

Dokaz. Brez dokaza. □

1.1.5 Argumenti monotonega razreda

IDEJA: Zelimo dokazati tridtev, ki se tice vseh funkcij iz $\mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Najprej pokazemo trditev za $\mathbb{1}_A, A \in \mathcal{F}$. $\to$ izrek o monotonem razredu $\to$ trditev velja v splosnem.

Definicija 1.47. Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω in $f : \Omega \to [0, \infty]$. f je $\mathcal{F}$-enostavna $\iff$ $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ in $\mathcal{Z}_f$ je omejena mnozica.

Trditev 1.48. *Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $f : \Omega \to [0, \infty]$. f je $\mathcal{F}$-enostavna $\iff$ $f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}$ za neke $c_i \in [0, \infty), A_i \in \mathcal{F}, i \in [n]$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Naprej, ce je $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, potem je $\min\left(2^{-n}\lfloor 2^n f\rfloor, n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje $\mathcal{F}$-enostavnih funkcij, ki narascajo proti ($\uparrow$) f. (Celo enakomerno na vsaki mnozici na kateri je f omejena).*

Dokaz. $(\Rightarrow): f = \sum_{\mathcal{Z}_f\setminus\{0\}} a \cdot \mathbb{1}_{\{f=a\}}, \{f = a\}$ pomeni $f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{F}$. $(\Leftarrow)$: Baje da je ocitno (V skripti ni dokaza). $\square$

Opomba 1.49.

1. $f \in \mathcal{F}\setminus\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \iff f = 1 - \lim \mathcal{F}$-enostavnih funkcij.
2. $f \in \mathcal{F}\setminus\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \iff f =$ limita linearnih kombinacij indikatorjev mnozic iz $\mathcal{F}$.

Posledica 1.50. *(izrek o monotonem razredu) Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra in $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}\setminus\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. Ce velja*

1. $\mathbb{1}_A \in \mathcal{M}$ *za* $\forall A \in \mathcal{F}$
2. $\mathcal{M}$ *je konveksen stozec; tj.* $af + g \in \mathcal{M}$ *za* $\forall a \in [0, \infty]\ \forall f \in \mathcal{M}\ \forall g \in \mathcal{M}$
3. $\mathcal{M}$ *zaprt za* $\uparrow$ *limite; tj.* $\lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}\ \forall$ *narascajoce zaporedje* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *v* $\mathcal{M}$

Potem je $\mathcal{M} = \mathcal{F}\setminus\mathcal{B}_{[0,\infty]}$.

Dokaz. Po 1. in 2. $\mathcal{M}$ vsebuje vse $\mathcal{F}$-enostavne funkcije. Vsaka funckija iz $\mathcal{F}\setminus\mathcal{B}_{[0,\infty]}$ je po trditvi 1.48 $\uparrow$-limita $\mathcal{F}$-enostvnih funkcij in zato pripada $\mathcal{M}$ po 3. $\square$

Opomba 1.51. Pomembnost tega rezultata postane jasna v nadaljevanju, saj nam pove da "razsirimo" trditev ki velja za indikatorje merljivih mnozic na vse nenegativne preslikave (z uporabo linearnosti in monotone konvergence) in nato na vse merljive numericne preslikave (po linearonosti in zapisu funkcije kot vsoto njenega negativnega in pozitivnega dela).

Trditev 1.52. *(Doob-Dynkinova faktorizacijska lema) Naj bo $X : \Omega \to A$ in $(A, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Potem je*

$$Y \in \sigma^{\mathcal{A}}(X)\setminus\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \iff \left(\exists h \in \mathcal{A}\setminus\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]},\ da\ je\ Y = \underbrace{h \circ X}_{h(X)}\right).$$

Dokaz. $(\Leftarrow): X \in X^{-1}(\mathcal{A})\setminus\mathcal{A}$ in $h \in \mathcal{A}\setminus\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \Rightarrow$ (kompozitumi merljivih preslikav so merljive) $\Rightarrow h \circ X \in X^{-1}(\mathcal{A})\setminus\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.

$(\Rightarrow)$: Naj bo $\mathcal{M} := \{Y \in \sigma^{\mathcal{A}}(X)\setminus\mathcal{B}_{[0,\infty]} \mid \exists h \in \mathcal{A}\setminus\mathcal{B}_{[0,\infty]}$ da je $Y = h(X)\}$ Potem je $\mathcal{M}$ konvesken stozec zaprt za $\uparrow$ limite in po definiciji $\sigma^{\mathcal{A}}(X)$ vsebuje vse indikatorje mnozic iz $\sigma^{\mathcal{A}}(X)$, torej je po izreku o monotonem razredu $\mathcal{M} = \sigma^{\mathcal{A}}(X)\setminus\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. Torej ce je $Y \in \sigma^{\mathcal{A}}(X)\setminus\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ lahko za h_+ in h_- iz $\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}_{[0,\infty]}$ zapisemo $Y = Y^+ - Y^-$ kjer sta $Y^+ = h_+(X)$ in $Y^- = h_-(X)$. Velja $h_+ - h_- \in \mathcal{A}\setminus\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. $\square$

Definicija 1.53. (Dynkinov sistem) Naj bo $\mathcal{D} \subset 2^{\Omega}$. $\mathcal{D}$ je Dynkinov (tudi λ-) sistem na $\Omega \iff \Omega \in \mathcal{D}$ in $(B\setminus A \in \mathcal{D}$ za $\mathcal{D} \ni A \subset B \in \mathcal{D})$ in za vsako zaporedje $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{D}$ za katerega velja $A_i \subset A_{i+1}$ za $\forall i \in \mathbb{N}$ velja $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$.

Definicija 1.54. $\mathcal{D}$ je π-sistem $\iff \mathcal{D}$ je se dodatno zaprta za $\cap$.

Zgled 1.55. $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ je π-sistem.

Trditev 1.56. *Naj bo $\mathcal{D} \subset 2^\Omega$. $\mathcal{D}$ je Dynkinov sistem na $\Omega \iff \Omega \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ je zaprt za c^Ω, $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$ za $\forall$ zaporedje $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{D}$ ki ima $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$ iz $\mathbb{N}$. Dodatno $\mathcal{D}$ je σ-algebra na $\Omega \iff \mathcal{D}$ je π-sistem in Dynkinov sistem na Ω.*

Dokaz. Brez dokaza. □

Definicija 1.57. Za $\mathcal{L} \subset 2^\Omega$ definiramo najmanjsi Dynkinov sistem na Ω ki vsebuje $\mathcal{L}$ kot podmnozico

$$\lambda_\Omega(\mathcal{L}) := \cap\{\mathcal{D} \in 2^{2^\Omega} \mid \mathcal{D} \text{ je Dynkinov sistem na } \Omega \text{ in } \mathcal{L} \subset \mathcal{D}\}.$$

Trditev 1.58. *Naj bo $\mathcal{L}$ π-sistem in $\mathcal{L} \subset 2^\Omega$. Potem je $\lambda_\Omega(\mathcal{L}) = \sigma_\Omega(\mathcal{L})$.*

Dokaz. Brez dokaza. □

Posledica 1.59. *(Dynkinova lema) Naj bo $\mathcal{L}$ π-sistem in $\mathcal{D}$ Dynkinov sistem na Ω in $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$. Potem je $\sigma_\Omega(\mathcal{L}) \subset \mathcal{D}$.*

Dokaz. Brez dokaza. □

Pomembnost zgoraj navedenega rezultata izhaja predvsem iz naslednje opazke. Naj bo $\mathcal{A}$ σ-algebra in $\mathcal{L} \subset 2^\Omega$ π-sistem. Predpostavimo, da je $\mathcal{A} = \sigma_\Omega(\mathcal{L})$ Pogosto v teoriji mere (in zlasti v teoriji verjetnosti) želimo pokazati, da neka lastnost, $P(A) \in \mathcal{A}$, velja za vse elemente $A \in \mathcal{A}$, in to želimo storiti, potem ko smo že prejeli ali že predhodno vzpostavili, da $P(A)$ velja za vse $A \in \mathcal{L}$. Običajno je enostavno (ker se mere lepo obnašajo pri disjunktnih/neopadajočih števnih unijah in ker se končne mere tudi lepo obnašajo pri "primerljivih razlikah"/komplementih) neposredno preveriti, da je zbirka $\mathcal{D} := \{A \in \sigma_\Omega(\mathcal{L}) \mid P(A)\}$ λ-sistem, vendar pa običajno ni tako enostavno (ker se mere ne obnašajo tako lepo pri poljubnih števnih unijah), preveriti neposredno, da je $\mathcal{D}$ σ-algebra. Lema $\pi\backslash\lambda$ vzpostavi izjemno uporabno bližnjico za to posredno preverjanje. Njena uporabnost je še dodatno okrepljena s tem, da običajno ni težko najti generirajočega π-sistema, na katerem lastnost P "očitno"velja. Naslednji rezultat je dosežen v skladu z zgoraj navedenim in ga bomo še večkrat uporabili v preostanku tega besedila.

Trditev 1.60. *(Meri, ki se strinjata na σ-lokalizirajocem generirajocem π-sistemu) Naj bosta μ in ν meri na merljivem prostoru (E, Σ), naj bo $\mathcal{L} \subset \Sigma$ π-sistem za katerega velja $\sigma_E(\mathcal{L}) = \Sigma$. Naj velja $\mu|_\mathcal{L} = \nu|_\mathcal{L}$ in naj obstaja zaporedje $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{L}$, ki ga sestavljajo $\uparrow$ paroma disjunktne mnozice, da velja $\mu(L_n) = \nu(L_n) < \infty$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $\cup_{n\in\mathbb{N}} L_n = E$. Potem $\mu = \nu$.*

Dokaz. Denimo, da smo trditev pokazali v primeru, ko sta μ in ν koncni meri z enako maso. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da sta $\mu|_{L_n}$ in $\nu|_{L_n}$ koncni meri z enako maso. (Namrec $\mu(L_n) = \nu(L_n) < \infty$ na merljivem prostoru $(L_n, \Sigma|_{L_n})$). $\mathcal{L}|_{L_n}$ je π-sistem ($[= \mathcal{L} \cap 2^{L_n}, \Rightarrow L_n \in \mathcal{L}]$ in $\sigma_{L_n}(\mathcal{L}|_{L_n}) = \sigma_E(\mathcal{L})|_{L_n} = \Sigma|_{L_n}$) in $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je zaporedje v $\mathcal{L}|_{L_n}$ za katerega je res $\mu|_{L_n}(L_n) = \nu|_{L_n}(L_n) < \infty$ ter $\cup_{n\in\mathbb{N}} L_n = Ln$. Dokoncaj dokaz. □

Z besedami: dve meri ki se strinjata na σ-lokalizirajocem generirajocem π-sistemu se strinjata povsod.

1.1.6 Lebesque-Stieltjesove mere

Izrek 1.61. *(Lebesque-Stieltjesove mere) Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nepadajoca in zvezna z desne. Potem obstaja natanko ena mera μ na $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ za katero velja*

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) \text{ za } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Dokaz. (Enolicnosti) $\{(a,b] \mid a \leq b \in \mathbb{R}\}$ je π sistem, ki generira $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ in je tudi lokalizirajoc za $\mu : \cup_{n\in\mathbb{N}}(n, n+1] = \mathbb{R}$. Apliciramo prejsnjo trditev o strinjanju mer na σ-lokalizirajocem generirajocem π-sistemu. (Ce sta meri μ in ν verjetnostni, lahko pogoj, ki se tice obstoja $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ izpustimo, ker lahko zamenjamo $\mathcal{L}$ z $\mathcal{L} \cup \{E\}$ in vzamemo $L_n = E \; \forall n \in \mathbb{N}$). □

Definicija 1.62. Meri μ iz izreka pravimo Lebesque-Stieltjesova mera prirejena F in jo oznacimo z dF. ($\mathcal{L} := d(id_\mathbb{R})$ je Lebesqeova mera na $\mathbb{R}$, ne obstaja razsiritev $\mathcal{L}$ na mero na $(\mathbb{R}, 2^\mathbb{R})$).

Trditev 1.63. *Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nepadajoca in zvezna z desne. Mera dF je: σ-koncna; koncna $\iff$ F je omejena; verjetnostna $\iff$ $\lim_\infty F - \lim_{-\infty} F = 1$ Za $x \in \mathbb{R}$ je $dF(\{x\}) = F(x) - \underbrace{F(x-)}_{\text{leva limita } F \text{ v } x}$.*

Dokaz. σ-koncnost:
$\cup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1] = \mathbb{R}$; $dF((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty \; \forall n \in \mathbb{Z}$; $dF((-n, n]) = F(n) - F(-n) \;\Rightarrow$ ko gre $n \to \infty \Rightarrow dF(\mathbb{R}) = \lim_\infty F = \lim_{-\infty} F$. Od tod dobimo karakterizacijo koncnosti dF in kdaj je dF verjetnostna mera. Za $x \in \mathbb{R}$ je $(x - \frac{1}{n}, x] \downarrow \{x\}$, ko gre $n \to \infty$ cez $\mathbb{N}$ in zato je po zveznosti dF od zgoraj na mnozicah s koncno mero $dF(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} dF((x - \frac{1}{n}, x]) = \lim_{n\to\infty} F(x) - F(x - \frac{1}{n})$. □

Zgled 1.64. $\mathcal{L}$ je σ-koncna in $\mathcal{L}(A) = 0$ za vsako stevno $A \subset \mathbb{R}$.

Zgled 1.65. (Cantorjeva mnozica) Naj bo V preslikava na intervalih oblike $[0,1]$. $V(A)$ odstrani srednjo tretjino vsakega intervala iz A. Torej $V([0,1]) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Potem je $C := \cap_{n\in\mathbb{N}} V^n([0,1])$ nestevna kompaktna mnozica z $\mathcal{L}(C) = 0$.

1.2 Integracija na merljivih prostorih

Uvod v abstraktno integracijo. Naj bo $\mathcal{P}$ particija Ω in $\mu' : \mathcal{P} \to [0, \infty)$ in $f' : \mathcal{P} \to [0, \infty)$ (μ je mera na $\sigma_\Omega(\mathcal{P}) = \{\cup Q : Q \in 2^\mathcal{P}\}$; $\mu(\cup Q) := \sum_{p\in Q} \mu'(p)$ za $Q \subset \mathcal{P}$), ($f : \Omega \to [0, \infty)$; $f(\omega) = f'(p)$ za $\omega \in p \in \mathcal{P}$) Potem je $\sum_{p\in\mathcal{P}} f'(p) \cdot \mu'(p) = \sum_{r\in\mathcal{Z}_f} r \cdot \mu(\underbrace{\{f = r\}}_{f^{-1}(\{r\})})$. $\sum_{p\in\mathcal{P}} f'(p)\mu'(p) = \int_a^b f(z)dz$ Riemann - Darbouxov integral odsekoma konstantne funckije $f : [a, b] \to [0, \infty)$.

1.2.1 Lebesqueov integral

Definicija 1.66. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$

- Ce je f $\mathcal{F}$-enostvna, potem je

$$\int f d\mu := \sum_{a\in\mathcal{Z}_f} a \cdot \mu(\underbrace{\{f = a\}}_{f^{-1}(\{a\})})$$

- Ce f ni $\mathcal{F}$-enostvna, je pa $f \geq 0$, potem je

$$\int f d\mu := \sup\{\int q d\mu : \text{q je } \mathcal{F}\text{-enostvna in } q \leq f\}$$

- Ce f ni ≥ 0, potem je

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

$\int f d\mu$ pravimo integral f proti μ (tudi pricakovana vrednost, ce je μ verjetnostna mera). Druge notacije za $\int f d\mu$ so $\mu[f] := \mu^x[f(x)] := \int f(x)\mu(dx)$.

Za $A \in \mathcal{F}$ pisemo $\mu[f; A] := \mu^x[f(x); x \in A] := \int_A f(x)\mu(dx) := \int f \mathbb{1}_A d\mu$.

Definicija 1.67. Integral f proti μ je dobro definiran $\iff \int f^+ d\mu \wedge \int f^- d\mu < \infty$. f je μ-integrabilen $\iff \int f^+ d\mu \vee \int f^- d\mu < \infty$.

Definicija 1.68. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero.

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \{f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : f \text{ je } \mu \text{ integrabilna}\}.$$

Za $g : \Omega \to \mathbb{C}$ za katero je $\{Re(g), Im(g)\} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ je $\int g d\mu := \int Re(g) d\mu + i \int Im(g) d\mu$.

Izrek 1.69. *Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero. Integral ima sledece lastnosti.*

1. *Aditivnost: $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ za $\{f, g\} \subset \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ take, da je $\int f^{-1} d\mu \vee \int g^{-1} d\mu < \infty$.*

2. *Integral indikatorja: $\int \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$ za $\forall A \in \mathcal{F}$. (V posebnem je $\int 0 d\mu = 0$ in torej $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ za vse $f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$)*

3. *Integrali, ki so nic, ki so koncni: Za $f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[0,\infty]}$ je $\int f d\mu = 0 \iff \mu(f > 0) = 0$ (f je skoraj povsod glede na μ), Ce $\int f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(f = \infty) = 0$ ($f < \infty$ skoraj povsod glede na μ.)*

4. *Trikotniska neenakost: $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$ za $\forall f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.*

5. *Integral ne vidi mnozic z mero 0: Ce je $\int f d\mu = \int g d\mu$ za $\{f, g\} \subset \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ za katere je $f = g$ skoraj povsod glede na μ ($\mu(f \neq g) = 0$)*

6. *Monotonost: $\int g d\mu \leq \int f d\mu$, brz ko je $\{g, f\} \subset \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, $g \leq f$ in $\int g d\mu < \infty$.*

7. *Homogenost: $\int c f d\mu = c \int f d\mu$ za vsak $f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ za katero velja $\int (cf)^- d\mu \wedge \int (cf)^+ d\mu < \infty$ za vsak $c \in (-\infty, \infty)$.*

Vsi integrali ki zadostutujejo 1.-4. so dobro definirani. Enako velja za 7. le v primeru, ko je $c = 0$ in $\mu[f^+] = \mu[f^-] = \infty$. Za 5. je $\int f d\mu$ dobro definiran $\iff$ $\int g d\mu$ je dobro definiran.

Trditev 1.70. *Naj bosta $a \leq b \in \mathbb{R}$ in $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je $f \mathbb{1}_{[a,b]}$ $\mathcal{L}$-integrabilna in*

$$\int_{[a,b]} f d\mathcal{L} = \int_a^b f(x) dx,$$

kjer je na desni Riemann-Darbouxov integral.

Zgled 1.71. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ je $\mathcal{L}$-integrabilna (ker je stevna $\equiv 0$), ni pa R-D integrabilna.

1.2.2 Konvergencni izreki s posledicami

Izrek 1.72. *Naj bo* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *prostor z mero in* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zaporedje v* $\mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.

1. *Naj obstaja* $g \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[0,\infty]}$, $\int g d\mu < \infty$, *za katero je* $g \geq f_n^-$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$.

   (a) *Povezanost od spodaj (Fatoujeva lema):*

   $$\mu\left[(\liminf_{n\to\infty} f_n)^-\right] < \infty \text{ in } \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

   (b) *Monotona konvergenca (Lévi): Ce je* $f_n \leq f_{n+1}$ *za* $\forall n \in \mathbb{N}$, *potem je:*

   $$\mu\left[(\lim_{n\to\infty} f_n)^-\right] < \infty \text{ in } \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \uparrow - \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

2. *Dominirana konvergenca (Lebesque): Ce obstaja* $g \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[0,\infty]}$, *ki je* μ*-ntegrabilna in za katero je* $|f_n| \leq g$ *za* $\forall n \in \mathbb{N}$ *in ce obstaja* $\lim_{n\to\infty} f_n$*(povsod), potem je:*

$$\mu\left[|\lim_{m\to\infty} f_m|\right] < \infty \text{ in } \lim_{n\to\infty} \int |f_n - \lim_{m\to\infty} f_m| d\mu = 0 \text{ in torej } \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. (ib) $\Rightarrow$ (ia) in (ii): (ia):

$$(inf_{n\geq m} f_n)_{m\in\mathbb{N}} \, jezaporedjev \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]},$$

ki je narascajoce. $f_n^- \leq g \Rightarrow (inf_{n\geq m} f_n)^- \leq g$. Po (ib) sledi da

$$\int \lim_{m\to\infty} f_m d\mu = \int \lim_{m\to\infty} inf_{n\in\mathbb{N}\geq m} f_n d\mu = lim_{m\to\infty} \int inf_{n\in\mathbb{N}\geq m} fnd\mu \leq liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

(ii): Uporabim (ia). Za $\left(-|\underbrace{fn - lim_{m\to\infty} f_m}_{\leq 2g}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in dobimo

$$0 = \int liminf_{n\to\infty} \left(-|\underbrace{fn - lim_{m\to\infty} f_m}_{\leq 2g}|\right) d\mu \leq ...$$

$\square$

Posledica 1.73. *Naj bo* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *prostor z mero in* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zaporedje v* $\mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. *Potem je*

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int f_n d\mu.$$

Dokaz.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f_m \; (narascajoce \; v \; n)$$

Zaradi prejsnjega izreka sledi

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{m=1}^{n} f_m d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \int f_m d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int f_n d\mu.$$

$\square$

Posledica 1.74. *Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje mer na $(\Omega, \mathcal{F})$. Potem je $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$ in za $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ je*

$$\int fd\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right) \; dobro \; definirana \iff \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int f^+ d\mu_n\right) \wedge \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int f^- d\mu_n\right) < \infty.$$

V tem primeru je

$$\int fd(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int fd\mu_n.$$

Dokaz. Za $A \in \mathcal{F}$ je $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A) = \int \mu_n(A) c_{\mathbb{N}}(dn)$. Potem je za zaporedje $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right)(\cup_{m\in\mathbb{N}} A_m) &= \int \mu_n\left(\cup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) c_{\mathbb{N}}(dn) \\
&= \int \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_n(A_m) c_{\mathbb{N}}(dn) = \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \int \mu_n(A_m) c_{\mathbb{N}}(dn) = \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu_n(A_m))\right) = \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \left[\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right)(A_m)\right]
\end{aligned}$$

Poleg tega je $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right)(\emptyset) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(\emptyset) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$. Torej je $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. $\square$

Naprej, razred funkcij $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ za katere velja prejsnja posledica je

$$\int fd\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right) = \int \int fd\mu_n c_{\mathbb{N}}(dm)$$

konveksen stozec zaprt za $\uparrow$ limite, ki svebuje $\mathbb{1}_A$ za $A \in \mathcal{F}$. Po izreku o monotonem razredu prejsnja posledica velja za vse $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-0,\infty]}$.

Definicija 1.75. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiv prostor. Za $\in \mathcal{F}\backslash\mathcal{F}'$ vpeljemo

$$f * \mu : \mathcal{F}' \to [0, \infty], \; (f * \mu)(A') := \mu(f^{-1}(A')) \text{ za } A' \in \mathcal{F}'.$$

$f * \mu$ oznacimo tudi z $\mu \circ f^{-1}$ ali μ_f in ji recemo potisk μ po f glede na $\mathcal{F}'$, ali zakon f pod μ glede na $\mathcal{F}'$ (v primeru, da je verjetnostna).

Definicija 1.76. Z $f * \mu$ oznacimo sliko mere μ pod f glede na $\mathcal{F}$.

Posledica 1.77. *Naj bo* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *prostor z mero in* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *merljiv prostor. Za* $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{F}'$ *je* $f * \mu$ *mera na* $(\Omega', \mathcal{F}')$*, ki je koncna ali verjetnostna - kakor je* μ*. Poleg tega je za* $g \in \mathcal{F}'\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$

$$\int gd(f*\mu) \text{ dobro definiran} \iff \int g \circ f d\mu \text{ dobro definiran.}$$

in tedaj je

$$\int gd(f*\mu) = \int g \circ f d\mu.$$

Dokaz. $(f*\mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Za zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktnih mnozic v $\mathcal{F}'$ je $(f*\mu)(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \mu(f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)) = \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(f^{-1}(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(f*\mu)(A_n)$. Torej velja da je $f*\mu$ mera na $(\Omega', \mathcal{F}')$. Naprej, $(f*\mu)(\Omega') = \mu(f^{-1}(\Omega')) = \mu(\Omega)$, torej je res $f*\mu$ koncna oz. verjetnostna $\iff$ je μ koncna oz. verjetnostna. $\square$

Postavimo sedaj

$$\mathcal{M} := \{g \in \mathcal{F}'\backslash\mathcal{B}_{[0,\infty]} \mid \int gd(f*\mu) = \int g \circ f d\mu\}.$$

$\mathbb{1}_A \in \mathcal{M}\ \forall A \in \mathcal{F}'$, kajti $\int \mathbb{1}_A d(f*\mu) = (f*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)) = \int \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}d\mu$.
$\mathcal{M}$ je konveksen stozec.

Dokaz. Za $\forall a \in [0,\infty)\ \forall q_1, q_2 \in \mathcal{M}$ je $aq_1 + q_2 \in \mathcal{F}'\backslash\mathcal{B}_{[0,\infty]}$, in $\int(aq_1 = q_2)d(f*\mu) = a\int q_1 d(f*\mu) + \int q_2 d(f*\mu) = a\int q_1 \circ f d\mu + \int q_2 \circ f d\mu = \int(aq_1+q_2)\circ f d\mu$. Torej je $aq_1 + q_2 \in \mathcal{M}$. $\square$

$\mathcal{M}$ je zaprta za $\uparrow$ limite.

Dokaz. Za vsako $\uparrow$ zaporedje $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{M}$ je $\lim_{n\to\infty} q_n \in \mathcal{F}'\backslash\mathcal{B}_{[0,\infty]}$ in $\int \lim_{n\to\infty} q_n d(f*\mu) = \lim_{n\to\infty}\int q_n d(f*\mu) = \lim_{n\to\infty}\int q_n \circ f d\mu = \int \lim_{n\to\infty}(q_n \circ f)d\mu = \int(\lim_{n\to\infty} q_n)\circ f d\mu$. Torej je $\lim_{n\to\infty} q_n \in \mathcal{F}'\backslash\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. $\square$

Za splosen $g \in \mathcal{F}'\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ je $\{g^+, g^-\} \subset \mathcal{F}'\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, zato $\int g^+ d(f*\mu) = \int g^+ \circ$ ... to je del dokaza.

Posledica 1.78. *Naj bo* (X, Σ, μ) *prostor z mero in* O *neka odprta podmnozica* $\mathbb{R}$ *in* $f : X \times O \to \mathbb{R}$*. Denimo, da je*

- $F(.,t)$ *μ-integrabilna za* $\forall t \in O$
- $F(x,.)$ *odvedljvia za* $\forall x \in X$

Predpostavimo, da $\exists\ g \in \Sigma\backslash\mathcal{B}_{[0,\infty]}, \int gd\mu < \infty$*, taka da je*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)\ \forall x \in X\ \forall t \in O.$$

Potem velja

1. $(X \ni x \to \frac{\partial F}{\partial t}(x,t))$ *je μ-integrabilna*
2. $(O \ni t \to \int F(x,t)\mu(dx))$ *je odvedljiva in*
3. $\frac{d}{dt}\int F(x,t)\mu(dx) = \int \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\mu(dx).\ \forall t \in O$

Dokaz. Dokaz v skripti (stran 19). $\square$

1.2.3 Zamenjava vrstnega reda integracije in povezane teme

Definicija 1.79. Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F})$ in $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiva prostora.

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' := \sigma_{\Omega \times \Omega'}(\{A \times A' \mid (A, A') in \mathcal{F} \times \mathcal{F}'\})$$

je produktna σ-algebra $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}'$ ($\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} := \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) je Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^n$.

Trditev 1.80. *Za $A \subset \mathbb{R}^2$ in $f : A \to [-\infty, \infty]$, ki je zvezna je $f \in \mathcal{B}_A \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.*

Dokaz. Brez dokaza. □

Trditev 1.81. *Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F})$ in $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiva prostora. Potem velja:*

1. *$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ je najmanjsa σ-algebra $\mathcal{G}$ na $\Omega \times \Omega$ za katero je*
   $pr_\Omega := (\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \to w) \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{F}$ in
   $pr_{\Omega'} := (\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \to \omega') \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{F}'$.
2. *Za $f \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \Rightarrow f(\omega, .) \in \mathcal{F}' \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}\ \forall \omega \in \Omega$ in $f(., \omega') \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}\ \forall \omega' \in \Omega'$.*
3. *Za vsako σ-algebro $\mathcal{G}$ na G in $f : G \to \Omega$ ter $f' : G \to \Omega'$ je $(f, f') \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{F}$ in $f' \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{F}'$.*

Dokaz. Brez dokaza. □

Izrek 1.82. *Naj bosta $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ in $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$ prostora z mero ter μ in μ' σ-koncni. Potem velja:*

1. *Obstaja natanko ena mera ν na $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$, ki jo oznacimo $\mu \times \mu'$, da je $\nu(A \times A') = \mu(A)\mu'(A')\ \forall (A, A') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}'$.*
2. *Naj bo $f \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. in naj velja:*
   (a) *$f \geq 0$ (Tonelli) ali*
   (b) *$\int |f| d(\mu \times \mu') < \infty$ (Fubini) ali*
   (c) *$\iint f^-(\omega, \omega')\mu(d\omega)\mu'(d\omega') \wedge \iint f^-(\omega, \omega')\mu'(d\omega')\mu(d\omega) < \infty$.*

   Potem je

   $$(\Omega \ni \omega' \to \int f(\omega, \omega')\mu(d\omega)) \in \mathcal{F}' \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \textit{ in } (\Omega' \ni \omega \to \int f(\omega, \omega')\mu'(d\omega')) \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$$

   ter

   $$\int f^-(\omega, \omega')\mu(d\omega) < \infty \textit{ skoraj povsod glede na } \mu' \textit{ in } \omega' \textit{ in}$$

   $$\int f^-(\omega, \omega')\mu'(d\omega') < \infty \textit{ skoraj povsod glede na } \mu \textit{ in } \omega$$

   ter

   $$\int f d(\mu \times \mu') = \iint f(\omega, \omega')\mu(d\omega)\mu'(d\omega') = \iint f(\omega, \omega')\mu'(d\omega')\mu(d\omega).$$

Dokaz. Brez dokaza. $\square$

Definicija 1.83. Meri $\mu \times \mu'$ recemo produktna mera. ($\mathcal{L}^n := \mathcal{L} \times \cdots \times \mathcal{L}$ pravimo n-razsezna Lebesquova mera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$).

Zgled 1.84. Naj bo $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$ zvezna za katero velja $f(0) = 0$ ter naj bo na $(0, \infty)$ zvezno odvedljiva s $f' \geq 0$ na $(0, \infty)$. Naj bo ν σ-koncna mera na $\mathcal{B}_{[0,\infty]}$. Potem je

$$\begin{aligned}
\int f d\nu = \int \int_0^x f'(t) dt \nu(dx) &= \int \int_{(0,x)} f'(t)\mathcal{L}(dt)\nu(dx) = \\
&= \int \int f'(t)\mathbb{1}_{(0,x)}(t)\mathcal{L}(dt)\nu(dx) \\
(Tonelli) &= \int \int f'(t)\mathbb{1}_{(0,x)}(t)\nu(dx)\mathcal{L}(dt) \\
&= \int_{(0,\infty)} f'(t) \int \mathbb{1}_{(t,\infty)}(x)\nu(dx)\mathcal{L}(dt) \\
&= \int_{(0,\infty)} f'(t)\nu(t,\infty)\mathcal{L}(dt). \\
&= \int_0^\infty f'(t)\nu(t,\infty)dt
\end{aligned}$$

kot izlimititran Riemannov integral ce je $\nu((t, \infty)) < \infty \ \forall t \in (0, \infty)$.

Trditev 1.85. *Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljiv prosotor. Naj bo $X \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{F}'$. Naj bo $(A, \mathcal{A})$ merljiv prosotor in $D_A := \{(a, a) \mid a \in A\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ ter $\{f, g\} \subset \mathcal{F}' \backslash \mathcal{A}$. Potem je $f(X) = g(X)$ skoraj povosd $\iff$ $f = g$ skoraj povsod glede na $X * \mu$.*

Dokaz. $\{f \neq g\} = \Omega' \backslash \{f = g\} = \Omega' \backslash [(f, g)^{-1}(D_A)]$. $\{f, g\} \subset \mathcal{F}' \backslash \mathcal{A}$ Po trditvi 2.17 sledi $(f, g) \in \mathcal{F}' \backslash (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ $\{f \neq g\} \in \mathcal{F}'$ $(X * \mu)(\{f \neq g\}) = \mu(X{-}1(\{f \neq g\})) = \mu(\{f(X) \neq g(X)\})$ $\square$

1.2.4 Nedolocena integracija in absolutna zveznost

Definicija 1.86. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$, ki ima $\int f d\mu$ dobro definiran. Potem funkciji

$$f \cdot \mu := (\mathcal{F} \ni A \mapsto \int_A f d\mu)$$

pravimo nedoloceni integral f proti μ.

Definicija 1.87. Za dve meri μ in ν na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je:

1. $\mu << \nu \iff \mu$ je absolutno zvezna glede na $\nu \iff \forall A \in \mathcal{F}$ za katerega je $\nu(A) = 0$ je tudi $\mu(A) = 0$.

2. $\mu \sim \nu \iff \mu$ je ekvivalentna $\nu \iff \nu << \mu$ in $\mu << \nu$.

Trditev 1.88. *Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Potem je $f \cdot \mu$ mera na $\mathcal{F}$, ki je $<< \mu$ in*

$$\int g d(f \cdot \mu) = \int g f d\mu.$$

Pri cemer je leva stran dobro definirana $\iff$ je to res za desno stran in to za $\forall g \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. V tem primeru (sociativnost nedolocene integracije) je $g \cdot (f \cdot \mu) = (gf) \cdot \mu$. Ce je $f > 0$ skoraj povsod glede na μ potem je $f \cdot \mu \sim \mu$.

Dokaz. Dokaz v skripti (stran 23). $\square$

Zgled 1.89. Naj bo $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ narascajoca in zvezno odvedljiva. Potem za realne $a \leq b$ velja $(G' \cdot \mathcal{L})((a, b]) = \int_{(a,b]} G' d\mathcal{L} = \int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a)$. Po definiciji je torej $G' \cdot \mathcal{L} = dG$. in $\int g dG = \int g d(G' \cdot \mathcal{L}) = \int g G' d\mathcal{L}$ za $\forall g \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ za katere je $\int g G' d\mathcal{L}$ dobro definiran.

Trditev 1.90. *Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $\{f, g\} \subset \mathcal{A} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$.*

1. *Naj bo $\int_{\{f>g\}} f^+ d\mu \vee \int_{\{f>g\}} g^- d\mu < \infty$ in $\int_{\{f>g\}} f d\mu \leq \int_{\{f>g\}} g d\mu < \infty$. Potem je $f \leq g$ s.p.-μ.*

2. *Naj bo μ-koncna, $\int f d\mu$ in $\int g d\mu$ dobro definirana in naj bo $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ $\forall A \in \mathcal{A}$. Potem je $f \leq g$ s.p.-μ.*

Dokaz. Brez dokaza. $\square$

Posledica 1.91. *Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $\{f, g\} \subset \mathcal{A} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Denimo, da je $(\star)$ $\int f d\mu = \int g d\mu$ za $\forall A \in \mathcal{A}$, pri cemer sta $\int$ dobro definirana. Ce je*

- *f ali g μ-integrabilna (in torej obe μ-integrabilni) ali*
- *μ je σ-koncna,*

je $f = g$ s.p.-μ.
Nadalje v primeru $\{f, g\} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ je namesto $(\star)$ dovolj zahtevati $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ $\forall A \in \Pi \cup \{X\}$. za nek π-sistem Π, ki generira $\mathcal{A}$.

Dokaz. $\square$

Izrek 1.92. *(Radon-Nikodyn) Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in μ ter ν σ-koncni meri na njem in $\mu << \nu$. Potem obstaja $f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]} \ni \mu = f \cdot \nu$. Nadalje je $f > 0$ s.p-μ. Taka funkcija je dolocena s.p.-ν natancno.*

Dokaz. Dokaz enolicnosti:
Ce imamo $\{f_1, f_2\} \subset \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[0,\infty)}$, $f_1 \cdot \nu = \mu = f_2 \cdot \nu$, potem iz prejsnje posledice sledi $f_1 = f_2$ s.p-ν
Dokaz $f > 0$ s.p-μ:
$\mu(\{f = 0\}) = (f \cdot \nu)(\{f = 0\}) = \int_{\{f=0\}} f d\nu = \int \underbrace{\mathbb{1}_{\{f=0\}}}_{=0} d\nu = 0$ Torej je $f > 0$ s.p-μ. $\square$

Definicija 1.93. Vsaki funkciji f iz izreka pravimo Radon-Nikodynov odvod μ glede na ν in jo oznacimo z $\frac{d\mu}{d\nu}$.

Posledica 1.94. *Naj bodo μ, ν, λ σ-koncne mere na σ-algebri $\mathcal{F}$ in $\mu << \nu << \lambda$. Potem je $\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\lambda}$ s.p-λ. Posebej: $\mu \sim \nu \Rightarrow \frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu} = 1$ s.p-μ in s.p-ν.*

Dokaz.
$$\left(\frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\lambda}\right) \cdot \lambda = \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \left(\underbrace{\frac{d\nu}{d\lambda} \cdot \lambda}_{=\nu}\right) = \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \nu = \mu$$

Torej je $\frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda}$ s.p-λ. Ce je $\mu \sim \nu$ lahko v enakosti vzamemo $\lambda = \mu$, potem je $\frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\mu}{d\mu} = 1$ s.p-μ in s.p-ν. $\square$

1.2.5 L-prostori in integralske neenakosti

Definicija 1.95. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $p \in [1, \infty)$. Za $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ definiramo
$$||f||_{p_\mu} := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$
in vpeljemo $\mathcal{L}^p(\mu) := \{f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \mid ||f||_{p_\mu} < \infty\}$. Dodatno definiramo za $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$
$$||f||_{\infty_\mu} := \inf\{M \in [0, \infty] \mid |f| < M \ s.p. - \mu\}$$
In postavimo $\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \mid ||f||_{\infty_\mu} < \infty\}$.
Za $p \in [1, \infty]$ in za zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ v $\mathcal{L}^p(\mu)$ pravimo, da
$$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f_0 \text{ v } \mathcal{L}^p(\mu) \iff ||f_n - f_0||_{p_\mu} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
V tem primeru pravimo, da je f_0 limita $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{L}^p(\mu)$ in pisemo $f_0 = \lim_{n\to\infty} f_n$ v $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Trditev 1.96. *Ce je μ-koncna mera in $\{p, q\} \subset [1, \infty], p \leq q$, potem je $\mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$*

Dokaz. Najprej za $q = \infty$; BSS $p < \infty$.

$$f \in \mathcal{L}^q(\mu) \Rightarrow |f| \leq ||f||_\infty < \infty s.p.{-}\mu \text{ in torej} ||f||_p^p = \int |f|^p d\mu \leq \int ||f||_\infty^p d\mu = ||f||_\infty^p \int 1 d\mu = ||f||_\infty^p \cdot$$

Naj bo sedaj $q < \infty$. Potem je za $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$,

$$||f||_p^p = \int |f|^p = \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^p d\mu + \int_{\{|f|<1\}} |f|^p d\mu \leq \ \leq \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^q d\mu + 1\mu(|f| < 1) \leq \int |f|^q d\mu = ||f||_q^q <$$

$\square$

Izrek 1.97. *Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in $\{f, g\} \subset \mathcal{F}\backslash\mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Veljajo slednje neenakosti:*

1. *Neenakost markova: $\int_{\{f\geq a\}} f d\mu \geq a\mu(f \geq a)$ za $\forall a \in [-\infty, \infty]$.*

2. *Minkowski:* $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ *za* $\forall p \in [1,\infty]$.
3. *Hölder:* $||fg||_2 \leq ||f||_p ||g||_q$ *za* $\forall p, q \in [1,\infty]$ *za katere velja* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Poseben pirmer je* $p=q=2$ *(Cauchy-Schwarzova neenakost)*
4. *Jensen: Naj bo* μ *verjetnostna,* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *in naj* $\phi : I \to \mathbb{R}$ *konveksna (I je odprt interval na* $\mathbb{R}$*) za katero velja* $\mathcal{Z}_f \subset I$. *Potem je* $\emptyset \in \mathcal{B}_I \backslash \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\int (\phi \circ f)^- d\mu < \infty$, $\int f d\mu \in I$ *in*

$$\int \phi \circ f d\mu \geq \phi \left(\int f d\mu \right).$$

Naprej , za vse $p \in [1,\infty]$ je $|| \cdot ||_p$ seminorma na realnem linearnem prostoru $\mathcal{L}^p(\mu)$. $||\cdot||_p$-limita zaporedja v $\mathcal{L}^p(\mu)$, ce obstaja, je enolicna s.p-μ, obstaja pa $\iff$ je to zaporedje Cauchijevo v $|| \cdot ||_p$. Koncno je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni semiprodukt na $\mathcal{L}^q(\mu)$, ki je poln prostor.

Opomba 1.98. Semi-norma in semi-produkt zato, ker:

$$\left(\int f d\mu = 0 \& f \geq 0 \right) \Rightarrow (f = 0 s.p - \mu \text{ [ne nujno povsod]})$$

Ce preidemo na ekvivalencne razrede za enakost s.p-μ ($f \sim g \iff \mu(f \neq q) = 0\ oz. f = g\ s.p - \mu$) dobimo prostore $\mathcal{L}^p(\mu), p \in [1,\infty]$, ki so Banachovi, $\mathcal{L}^2(\mu)$ pa Hilbertov.

2 Verjetnost (kot normalizirana mera)

2.1 Onsnovni pojmi

Definicija 2.1. (Pojmi vejretnostnega prostora)

1. Verjentnostni prostor je prostor z mero $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kjer je P verjetnostna mera.
2. A je P-skoraj gotovo (P-s.g.) $\iff$ $A \in \mathcal{F}$ in $P(A) = 1$.
3. $P[X] = \int X dP$ je pricakovana vrednost X pod P, kadar ima ta izraz pomen ($X \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$).
4. Za merljiv prostor (E, Σ) pravimo elementom $\mathcal{F} \backslash \Sigma$ slucajni elementi z vrednostmi v (E, Σ); posebej pravimo elementom $\mathcal{F} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ slucajne spremenljivke.
5. Za slucajni element X (z vrednostmi v (E, Σ)) pravimo $X * P = P_X = P \circ X^{-1}$ zakon X (pod P glede na Σ).
6. Dva slucajna elementa z vrednostmi v istem merljivem prostoru (lahko definirana na razlicnih verjentnostnih prostorih) sta enako porazdeljena $\iff$ imata isti zakon.
7. Za slucajno spremenljivko X:

- uvedemo $F_X : \mathbb{R} \to [0,1] F_X(\omega) := P(X \leq \omega)$ za $\omega \in \mathbb{R}$ porazdelitveno funkcijo.
- pravimo da je X diskretna (oz. absolutno zvezna) $\iff$ $\exists$ stevna podmnozica $C \subset \mathbb{R}$ da je $P(X \in C) = 1$ (oz. $P_X << \mathcal{L}, F_X$ je zvezna).
- Bivarianten slucajen vektor (X, Y) je element $\mathcal{F} \backslash \mathcal{B}^2_{\mathbb{R}^2}$ (splosen slucajen vektor definiran analogno) absolutno zvezen $\iff$ $P_{(X,Y)} << \mathcal{L}'$.

Zgled 2.2. $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mathcal{L}_{[0,1]})$ je vejrjetnostni prostor in $id_{[0,1]}$ je absolutno zvezna slucajna spremenljivka na njem.

Dokaz. $\mathcal{L}_{[0,1]}(id_{[0,1]} \in A) = \mathcal{L}_{[0,1]}(A \cap [0,1]) - \mathcal{L}(A \cap [0,1]) = (\mathbb{1}_{[0,1]}\mathcal{L})(A)$ za $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
$\Rightarrow id_{[0,1]} * \mathcal{L}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{[0,1]}\mathcal{L} << \mathcal{L}$. □

Trditev 2.3. *Naj bo X slucajen element z vrednostmi v (E, Σ) na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in $f \in \Sigma \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$. Potem je*

$$P\left[f(X)\right] = P_X\left[f\right]$$

Pri cemer je upanje na levi dobro definirano $\iff$ je to res za upanje na desni.

Ce je X slucanja spremenljivka, potem je F_X zvezna z desne in narascajoca $\lim_{-\infty} F_X = 0$, $\lim_{+\infty} F_X = 1$ in $P_X = dF_X$. Ce je X diskretna slucajna spremenljivka, potem $\exists$ najmanjsa (glede na inkluzijo) podmnozica $C \subset \mathbb{R}$ za katero je $P(X \in C) = 1$. Oznacimo jo z $supp(X)$ in ji pravimo podpora X. Naprej, za $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$P[f(X)] = \sum_{x \in supp(X)} f(x) P(X = x).$$

Brz ko je vsaj ena od vrst

$$\sum_{x \in supp(X)} f(x)^+ P(X = x) \quad in \quad \sum_{x \in supp(X)} f(x)^- P(X = x)$$

koncna (in tedaj, in samo tedaj, je $P[f(X)]$ dobro definiran). Ce je X absolutno zvezna slucajna spremenljivka, potem je X zvezna in $\exists$ s.p.-$\mathcal{L}$ funkcija $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \backslash \mathcal{B}_{[0,\infty]}$ da je $P_X = f\mathcal{L}$, namrec $f = \frac{dP_X}{d\mathcal{L}}$ s.p.-$\mathcal{L}$, ki mu recemo Radon-Nikodym gostota X in oznacimo z f_X, naprej za $g \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \backslash \mathcal{B}_{[-\infty,\infty]}$ je

$$P[g(X)] = \int g f_X d\mathcal{L} = (f_X \cdot \mathcal{L})[g],$$

pri cemer je upanje dobro definirano $\iff$ je $\int g^+ f_X d\mathcal{L}$ in $\int g^- f_X d\mathcal{L} < \infty$. Koncno za slucajno spremenljivko X je X absolutno zvezna $\iff$ $(\exists f \in \mathcal{B}_R \backslash \mathcal{B}_{[0,\infty]}$, da je $P(X \leq u) = \int_{(-\infty,u]} f d\mathcal{L} \; \forall u \in \mathbb{R})$ $\iff$ $(\exists f \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \backslash \mathcal{B}_{[0,\infty]}$, da je $P(X \in A) = \int_A f d\mathcal{L} \forall A \in \Pi \cup \{\mathbb{R}\})$, kjer je Π π-sistem, ki zadosta $\sigma_{\mathbb{R}}(\Pi) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Dokaz. 1. Za slucajno spremenljivko X je $P_X = dF_X$.
P_X in dF_X sta vejretnostni meri in $P_X((-\infty, u]) = P(X \in (-\infty, u]) = P(X \leq u) = F_X(u) = dF_X((-\infty, u]) \forall u \in \mathbb{R}$ in $\sigma_{\mathbb{R}}(\{(-\infty, u] \mid u \in \mathbb{R}\}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.Torej po trditvi 1.50 sledi $P_X = dF_X$.

2. X absolutno zvezna $\Rightarrow X$ zvezna.
   F_X je zvezna z desne (nasploh)
   $F_X(u) = P(X \leq u) = P(X \in (-\infty, u]) = P_X((-\infty, u]) =$ (absolutna zveznost) $= \int_{(-\infty,u] f_x d\mathcal{L}} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F_X(x^-) = \lim_{y\uparrow x} F_X(y) = \lim_{y\uparrow x} \int_{(-\infty,y]} f_X d\mathcal{L} =$ (monotona konvergenca) $= \int_{(-\infty,x)} f_X d\mathcal{L} = \int_{(-\infty,x]} f_X d\mathcal{L} = F_X(x) \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ F_X zvezna z leve$\Rightarrow$ F_X zvezna.

3. Zadnji dve ekvivalenci drzita, ker

   - $\int_{(-\infty,u]} f d\mathcal{L} = P(X \leq u)$ v limiti za $u \uparrow \infty$ da $\int f d\mathcal{L} = 1$ in
   - $P_X = f \cdot \mathcal{L}$ na $\Pi \cup \{\mathbb{R}\} \Rightarrow$ (trditev 1.50) $P_X = f \cdot \mathcal{L} \Rightarrow P_X << \mathcal{L}$ in $f_X = f s.p - \mathcal{L}$.
   - Ce je X absolutno zvezna, potem je $P(X \in A) = P_X(A) = (f_X\mathcal{L})(A) = \int_A f d\mathcal{L} \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

$\square$

Definicija 2.4. Zadrzimo notacijo in terminologijo za gostote in za diskretno slucajno spremenljivko X zadrzimo notacijo $\text{supp}(X)$ za podporo X in pravimo

$$p_X := \text{supp}(X) \ni a \mapsto P(X = a)$$

verjetnostna mera funkcije X.

Zgled 2.5. Naj bo $p \in (0, 1]$ in vpeljimo $\text{geom}_{\mathbb{N}}(p) := (\mathbb{N} \ni k \mapsto p(1-p)^{k-1})$ (Geometrijski zakon na $\mathbb{N}$ s parametrom uspeha p). X je diskretna slucajna spremenljivka in $P[X] = \text{geom}_{\mathbb{N}}(p)[id_{\mathbb{N}}] = \sum_{k\in\mathbb{N}} kP(X = k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} kp(1-p)^{k-1} = p^{-1}$.