

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika - 1. stopnja

Anej Rozman

## **Verjetnost z mero**

Zapiski po predavanjih doc. dr. Matije Vidmarja v študijskem letu 2023/2024.

Ljubljana, 2023

# Kazalo

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Mera</b>  | <b>2</b> |
| 1.1      | Merljivost in mere . . . . .   | 2        |
| 1.1.1    | Merjlive množice . . . . .   | 2        |
| 1.1.2    | Mere . . . . .   | 3        |
| 1.1.3    | Merjlive preslikave in generirane $\sigma$ -algebre . . . . .                                    | 5        |
| 1.1.4    | Borelove množice na razširjeni realni osi in Borelova merljivost<br>numericnih funkcij . . . . . | 8        |
| 1.1.5    | Argumenti monotonega razreda . . . . .   | 9        |
| 1.1.6    | Lebesgue-Stieltjesove mere . . . . .   | 12       |
| 1.2      | Integracija na merljivih prostorih . . . . .   | 12       |
| 1.2.1    | Lebesgueov integral . . . . .  | 12       |
| 1.2.2    | Konvergenčni izreki s posledicami . . . . .  | 14       |
| 1.2.3    | Zamenjava vrstnega reda integracije in povezane teme . . . . .                                   | 17       |

# 1 Mera

## 1.1 Merljivost in mere

### 1.1.1 Merjlive množice

**Definicija 1.1.** Naj bo  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ , torej  $\mathcal{A} \in 2^{2^\Omega}$ . Pravimo, da je  $\mathcal{A}$  zaprta za:

1.  $c^\Omega$  (zaprta za komplemente v  $\Omega$ )  $\iff \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
2.  $\cap$  (zaprta za preseke)  $\iff A \cap A' \in \mathcal{A}$  kadarkoli  $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
3.  $\cup$  (zaprta za unije)  $\iff A \cup A' \in \mathcal{A}$  kadarkoli  $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
4.  $\setminus$  (zaprta za razlike)  $\iff A \setminus A' \in \mathcal{A}$  kadarkoli  $\{A, A'\} \subset \mathcal{A}$
5.  $\sigma\cap$  (zaprta za stevne preseke)  $\iff \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$  kadarkoli je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{A}$
6.  $\sigma\cup$  (zaprta za stevne unije)  $\iff \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$  kadarkoli je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{A}$

**Definicija 1.2.** ( $\sigma$ -algebra, pod- $\sigma$ -algebra in algebra)

1.  $\mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$   $\iff (\Omega, \mathcal{A})$  je merljiv prostor  $\iff \emptyset \in \mathcal{A}$  in  $\mathcal{A}$  je zaprta za  $c^\Omega$  in  $\sigma\cup$ . Če je  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  potem:  $A$  je  $\mathcal{A}$ -merljiva  $\iff A \in \mathcal{A}$ .
2.  $\mathcal{B}$  je pod- $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$   $\iff \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ .
3.  $\mathcal{A}$  je algebra na  $\Omega$   $\iff \emptyset \in \mathcal{A}$  in  $\mathcal{A}$  je zaprta za  $c^\Omega$  in  $\cup$ .

**Opomba 1.3.** V primeru ko nimamo podane množice  $\Omega$  lahko vzamemo  $\Omega = \cup \mathcal{A}$  in velja  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ .

**Zgled 1.4.**  $2^\Omega$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  in  $\{\emptyset, \Omega\}$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ . Klicemo ju diskretna in trivialna  $\sigma$ -algebra.

**Zgled 1.5.** Naj bo  $A \subset \Omega$ . Potem je  $\sigma_\Omega A := \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ .

**Zgled 1.6.**  $\sigma_\Omega^{ccc} := \{A \in 2^\Omega : A \text{ je stevna ali } \Omega \setminus A \text{ je stevna}\}$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ . To je oznaka za stevno kostevno  $\sigma$ -algebro na  $\Omega$ . Seveda je  $\sigma_\Omega^{ccc} = 2^\Omega$  razen če  $\Omega$  ni stevna.

**Zgled 1.7.** Naj bo  $\mathcal{P}$  particija  $\Omega$  (torej  $\mathcal{P} \subset 2^\Omega$  in  $\mathcal{P}$  je družina paroma disjunktnih množic, ki pokrije  $\Omega$ ). Potem je  $\sigma\mathcal{P} := \{\cup R \mid R \subset \mathcal{P} \text{ in } (R \text{ ali } \mathcal{P} \setminus R \text{ je stevna})\}$  je sigma algebra na  $\Omega$ .

**Trditev 1.8.** Naj bo  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$  zaprta za  $c^\Omega$  in naj bo  $\emptyset \in \mathcal{A}$ . Potem je  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  če in samo če je  $\mathcal{A}$  zaprta za  $\sigma\cup$ , in v tem primeru je  $\mathcal{A}$  zaprta za  $\cap$  in  $\setminus$ .

*Dokaz.* Sledi iz de Morganovih zakonov:

$$\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus (\cup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n))$$

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus (\cap_{n \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n))$$

Zaprto  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{A}$  na  $\Omega$  za:

1.  $\cap$ :  $A \cap B = A \cap B \cap \Omega \cap \Omega \cdots \in \mathcal{A}$
2.  $\cup$ :  $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots \in \mathcal{A}$
3.  $\setminus$ :  $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B) \in \mathcal{A}$

□

### 1.1.2 Mere

**Definicija 1.9.** (Mera) Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F})$  merljiv prostor in  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ .  $\mu$  je mera na  $(\Omega, \mathcal{F})$  natanko tedaj ko:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu$  je stevno aditivna: za  $\forall$  zaporedje  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  paroma disjunktne množice je  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Za mero  $\mu$  na  $(\Omega, \mathcal{F})$  recemo da je:

1. končna  $\iff \mu(\Omega) < \infty$
2. verjetnostna mera  $\iff \mu(\Omega) = 1$
3.  $\sigma$ -končna  $\iff \exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F} : \Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  in  $\mu(A_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$

**Definicija 1.10.** (Prostor z mero)  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  je prostor z mero  $\iff \mu$  je mera na  $(\Omega, \mathcal{F})$

**Definicija 1.11.** Če je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  merljiv prostor. Potem za  $A \in \mathcal{F}$  recemo:

1.  $A$  je  $\mu$ -zanemarljiva  $\iff \mu(A) = 0$
2.  $A$  je  $\mu$ -trivialna  $\iff \mu(A) = 0$  ali  $\mu(\Omega \setminus A) = 0$

Ce imamo neko lastnost  $P(\omega)$  v  $\omega \in A$ , potem:

1.  $P(\omega)$  drži  $\mu$ -skoraj povsod v  $\omega \in A$   $\iff A_{\neg P} := \{\omega \in A : \neg P(\omega)\}$  je  $\mu$ -zanemarljiva.
2.  $P(\omega)$  drži  $\mu$ -skoraj gotovo v  $\omega \in A$   $\iff A_{\neg P} := \{\omega \in A : \neg P(\omega)\}$  je  $\mu$ -zanemarljiva in  $\mu$  je verjetnost.
3.  $P$  drži  $\mu$ -s.p. na  $A$   $\iff P(\omega)$  drži  $\mu$ -s.p. v  $\omega \in A$ .
4.  $P$  drži  $\mu$ -s.g. na  $A$   $\iff P(\omega)$  drži  $\mu$ -s.g. v  $\omega \in A$ .

**Zgled 1.12.** Nicelna mera na  $\mathcal{F}$  (torej preslikava  $\mu(A) \rightarrow 0, \forall A \in \mathcal{F}$ ) je vedno mera na katerikoli  $\sigma$ -algebri.

**Zgled 1.13.** Če definiramo  $c_\Omega : 2^\Omega \rightarrow [0, \infty]$  kot  $c_\Omega(A) := |A|$  ce je  $A$  končna podmnozica  $\Omega$  in  $c_\Omega(A) := \infty$  ce je  $A$  neskončna podmnozica  $\Omega$ , je  $c_\Omega$  tako imenovana stevna mera na  $\Omega$ . Ko je  $\Omega$  končna in neprazna, potem je  $\frac{c_\Omega}{|\Omega|}$  verjetostna mera na  $\Omega$ .

**Zgled 1.14.** Če definiramo  $\delta_x : 2^\Omega \rightarrow [0, \infty]$  za fiksen  $x \in \Omega$ , tako da za  $A \in 2^\Omega, \delta_x(A) := 0$  ce  $x \notin A$  in  $\delta_x(A) := 1$  ce  $x \in A$ , potem je  $\delta_x$  tako imenovana Diracova mera za  $x$ . Katerakoli podmnozica  $\Omega \setminus \{x\}$  je  $\delta_x$ -zanemarljiva.

**Trditev 1.15.** (Lastnosti mere) Naj bo  $\mu$  mera na merljivem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Potem velja naslednje:

1.  $\mu$  je aditivna:  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  kadarkoli  $A \cap B = \emptyset$  in  $\{A, B\} \in \mathcal{F}$ .
2.  $\mu$  je monotona:  $A \subset B$  in  $\{A, B\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ .
3.  $\mu$  je zvezna od spodaj:  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \uparrow \text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  kadarkoli je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  narascajoče zaporedje v  $\mathcal{F}$ .
4.  $\mu$  je stevno subaditivna:  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$  kadarkoli je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{F}$ .
5. Predpostavimo da je  $\mu$  končna.  $\mu(\Omega \setminus A) = \mu(\Omega) - \mu(A)$  za vse  $A \in \mathcal{F}$ . Se vec,  $\mu$  je zvezna od zgoraj:  $\mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \downarrow \text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  kadarkoli je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  padajoče zaporedje v  $\mathcal{F}$ .
6. Za  $A \in \mathcal{F}$  je  $\mathcal{F}|_A := \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$ ; potem je  $\mu_A := \mu|_{\mathcal{F}|_A}$  mera na  $\mathcal{F}|_A$ . Imenuje se restrikcija/skrnitev mere  $\mu$  na  $A$ .

*Dokaz.* 1.  $(A, B, \emptyset, \emptyset, \dots)$  je zaporedje medseboj disjunktne množice v  $\mathcal{F}$ , torej po stevni aditivnosti velja  $\mu(A \cup B \cup \emptyset \cup \dots) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A) + \mu(B)$ .

2.  $B = A \cup (B \setminus A)$  in uporabimo končno aditivnost (1.).

3.  $(A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus A_2, \dots)$  je zaporedje paroma disjunktne množice v  $\mathcal{F}$  z unijo  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Uporabimo stevno aditivnost in za tem se končno aditivnost.

4.  $(A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots)$  je zaporedje paroma disjunktne množice v  $\mathcal{F}$  z unijo  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Uporabimo stevno aditivnost in za tem se monotonost (2.).

5. Prvi del sledi iz končne aditivnosti (1.). Za množici vzamemo  $A \in \Omega$  in  $B = \Omega \setminus A$ . Dobimo  $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(\Omega \setminus A)$ . Drugi del sledi iz zveznosti od spodaj (3.) tako da jo uporabimo na  $(\Omega \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\mu(\Omega) - \mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega \setminus A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega \setminus A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(\Omega) - \mu(A_n)) = \mu(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \Rightarrow \mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .

6. Preveriti moramo, da je  $\mathcal{F}|_A$   $\sigma$ -algebra na  $A$ . Kasneje bomo videli da je  $\mathcal{F}|_A = 2^A \cap \mathcal{F}$  in bo dokaz sledil iz tega.  $\square$

**Zgled 1.16.** (Borel-Cantellijeva lema) Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  merljiv prostor in  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{F}$ , da velja  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$ . Potem je  $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$ .

*Dokaz.* Zaporedje množic  $\{\cup_{n=N}^{\infty} A_n\}_{N=1}^{\infty}$  je padajoče:

$$\cup_{n=N}^{\infty} A_n \supseteq \cup_{n=N+1}^{\infty} A_n \supseteq \cdots \supseteq \cup_{n=M}^{\infty} A_n \supseteq \cdots \supseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} A_n$$

Po zveznosti od zgoraj (5.) sledi:

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \mu(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\cup_{n=N}^{\infty} A_n) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

$\square$

**Zgled 1.17.** Če je  $P$  vejretnost na  $(\Omega, \mathcal{F})$ , potem je  $P^{-1}(\{0, 1\})$  pod- $\sigma$ -algebra na  $\mathcal{F}$ . Tako imenovana  $P$ -trivialna  $\sigma$ -algebra.

### 1.1.3 Merjlive preslikave in generirane $\sigma$ -algebre

**Definicija 1.18.** (Generirana  $\sigma$ -algebra) Naj bo  $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ ; potem

$$\sigma_{\Omega}(\mathcal{A}) := \cap \{\mathcal{F} \in 2^{2^{\Omega}} : \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra na } \Omega \text{ in } \mathcal{A} \subset \mathcal{F}\}$$

imenujemo  $\sigma$ -algebra generirana na  $\Omega$  z  $\mathcal{A}$ . Je najmanjša  $\sigma$ -algebra, ki vključuje družino podmnožic  $\mathcal{A}$ .

**Opomba 1.19.**  $2^{\Omega}$  je gotovo  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , ki vsebuje  $\mathcal{A}$ , torej je  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})$  neprazna.

Za dve  $\sigma$ -algebri  $\mathcal{B}_1$  in  $\mathcal{B}_2$  na  $\Omega$  je množica  $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 := \sigma_{\Omega}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$  skupek  $\mathcal{B}_1$  in  $\mathcal{B}_2$ . Bolj splošno za družino  $(\mathcal{B}_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$   $\sigma$ -algeber na  $\Omega$  pravimo, da je  $\vee_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_{\lambda} := \sigma_{\Omega}(\cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_{\lambda})$  njen skupek.

**Opomba 1.20.** Razlog zakaj so generirane  $\sigma$ -algebre pomembne v teoriji mere je, ker le redko lahko eksplicitno podamo vse elemente  $\sigma$ -algebre, ki bi jo zeleli, ampak pogosto lahko eksplicitno podamo njene generatorje.

**Definicija 1.21.** (Zacetna in končna struktura) Naj bo  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ . Za podano  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}'$  na  $\Omega'$  definiramo

$$\sigma^{\mathcal{F}'}(f) := f^{-1}(\mathcal{F}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{F}'\},$$

zacetno strukturo za  $f$  glede na  $\mathcal{F}'$ . (oziroma  $\sigma$ -algebra generirana z  $f$  glede na  $\mathcal{F}'$ ).

Za podano  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  definiramo

$$\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) := \{A' \in 2^{\Omega'} : f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\},$$

končno strukturo za  $f$  na  $\Omega'$  glede na  $\mathcal{F}$ .

**Definicija 1.22.** Za dano  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}'$  na  $\Omega'$  in  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  pravimo da je  $f$   $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ -merljiva preslikava  $\iff f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$  za vse  $A' \in \mathcal{F}'$ .

**Opomba 1.23.** 1. V notacijah  $\sigma_\Omega(\mathcal{A})$  in  $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$  spuscamo  $\Omega$  in  $\mathcal{F}'$  kadar je to jasno iz konteksta. Torej pisemo preprosto  $\sigma(\mathcal{A})$  in  $\sigma(f)$ .

2. V primeru ko je zaloga vrednosti  $f$  stevna in nimamo podane ne  $\mathcal{F}'$  ali  $\Omega'$  za  $\Omega'$  vazamemo  $Z_f$  in za  $\mathcal{F}'$  vazamemo  $2^{\Omega'}$ .

3. Izmed objektov, ki smo ju uvedli v definiciji 1.21 je zacetna struktura bolj sugestivna/pomembna.

**Definicija 1.24.** Za dano  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  in  $\mathcal{F}'$  na  $\Omega'$  definiramo

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}' := \{g \in \Omega'^\Omega : g \text{ je } \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-merljiva}\}.$$

**Zgled 1.25.** Konstantna funkcija je vedno merljiva, ne glede na  $\sigma$ -algebro. Za poljubno  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  je  $id_\Omega \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ .

**Definicija 1.26.** (Indikator) Za  $A \subset \Omega$  definiramo  $\mathbb{1}_{A_\Omega} : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ :

$$\mathbb{1}_{A_\Omega}(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Funkciji pravimo indikator množice  $A$  v  $\Omega$ . Pisali bomo  $\mathbb{1}_A$  in predvidevali da se  $\Omega$  da razbrati iz konteksta.

**Zgled 1.27.** Naj bo  $A \subset \Omega$ . Potem  $\sigma^{2^{\{0,1\}}}(\mathbb{1}_A) = \sigma_\Omega(A) = \{\emptyset, \Omega, A, \Omega \setminus A\}$ . Če je nadaljno  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  potem je  $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}/2^{\{0,1\}} \iff A \in \mathcal{F}$

**Trditev 1.28.** Naj bodo  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$   $\sigma$ -algebre (vsaka na svoji množici). Naj bo  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{G}$  in  $g \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ . Potem je  $g \circ f \in \mathcal{F}/\mathcal{H}$ . Z besedami to pomeni: kompozitumi merljivih preslikav so merljive preslikave.

*Dokaz.*  $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$  za  $\forall H \in \mathcal{H}$  □

**Trditev 1.29.** (Lastnosti preslikav) Naj bo  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ .

1. Naj bo  $\mathcal{F}'$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega'$ .  $\sigma^{\mathcal{F}'}(f)$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ ; je najmanjša  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  da velja  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ .
2. Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ .  $\sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f)$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega'$ ; je največja  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}'$  na  $\Omega'$  da velja  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ .
3. Naj bo  $\mathcal{F}'$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega'$  in  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , potem  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \iff \sigma^{\mathcal{F}'}(f) \subset \mathcal{F} \iff \sigma_{\mathcal{F}}^{\Omega'}(f) \supset \mathcal{F}'$ .
4. Naj bo  $\mathcal{A}' \subset 2^{\Omega'}$ .  $\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')$  je najmanjša  $\sigma$ -algebra na  $\Omega'$ , ki ima  $\mathcal{A}'$  za svojo podmnožico. Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , potem je  $f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F} \text{ za vse } A' \in \mathcal{A}')$ . Natanko zapisemo  $\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')} (f) = \sigma_\Omega(\{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\})$ . V posebnem je  $f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')) = \sigma_\Omega(f^{-1}(\mathcal{A}'))$ .

*Dokaz.* 1.  $f^{-1}(\mathcal{F}')$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ :  $\forall \emptyset : f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{F}')$ ; za  $A' \in \mathcal{F}'$  je  $\Omega \setminus f^{-1}(A') = f^{-1}(\Omega \setminus A') \in f^{-1}\mathcal{F}'$ ; za zaporedje  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  je  $\cup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(A'_i) = f^{-1}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A'_i) \in f^{-1}(\mathcal{F}')$ . Drugi del je jasen

2. Podoben dokaz kot 1.

3. Je direktna posledica definicije zacetne in koncne strukture.

4. Prvi del: je jasen iz definicije generirane  $\sigma$ -algebre.

Drugi del:  $(\Rightarrow)$ : je jasen iz definicije generirane  $\sigma$ -algebre.

$(\Leftarrow)$ :  $A' \subset \sigma_{\mathcal{F}'}^{\Omega'}(f)$  torej sledi  $\sigma_{\Omega'}(A') \subset \sigma_{\mathcal{F}'}^{\Omega'}(f)$  in zato sledi  $f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(A')$ .

Tretji del: V drugem delu vzamemo  $\mathcal{F} = \sigma_{\Omega}(f^{-1}(A'))$ , kar nam da  $f \in \sigma_{\Omega}(f^{-1}(A'))/\sigma_{\Omega'}(A')$ . Opazimo, da je  $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(A'))$  in zato po točki

1. velja  $\sigma_{\Omega}(f^{-1}(A')) \subset f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(A'))$ .

□

**Opomba 1.30.** Tocka 4 nam pove da je dovolj da dokazemo merljivo lastnost na množici generatorjev. Se en način zapisa  $f \in \mathcal{F}/\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}') \iff (f^{-1}(A') \in \mathcal{F} \text{ za vse } A' \in \mathcal{A}')$ . Natancno zapisemo  $\sigma^{\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')}_{\Omega}(f) = \sigma_{\Omega}(\{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\})$  je  $f^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{A}')) = \sigma_{\Omega}(f^{-1}(\mathcal{A}'))$ , kar bomo interpretirali kot operacija dobivanja praslík in generiranih  $\sigma$ -algeber komutirati.

**Definicija 1.31.** Pisemo  $\mathcal{A}|_A := \{A' \cap A : A' \in \mathcal{A}\}$  za sled  $\mathcal{A}$  na  $A$ .

**Opomba 1.32.** Če je  $\mathcal{F}$  zaprta za  $\cap$  in  $A \in \mathcal{F}$ , potem je  $\mathcal{F}|_A = \mathcal{F} \cap 2^A$ .

**Posledica 1.33.** Naj bo  $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ . Če je  $A \subset \Omega$ , potem

$$\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A = \sigma_A(\mathcal{A}|_A);$$

v primeru ce je  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , potem je  $\mathcal{A}|_A$   $\sigma$ -algebra na  $A$ .

*Dokaz.* Po prejsnji trditvi (1. točka) je  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A = \sigma^{\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})}(id_A)$   $\sigma$ -algebra na  $A$  ki vsebuje  $\mathcal{A}|_A$ , torej velja  $\sigma_A(\mathcal{A}|_A) \subset \sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A$ . Po 2. točki je  $\mathcal{C} := \{C \in 2^{\Omega} : C \cap A \in \sigma_A(\mathcal{A}|_A)\} = \sigma_{\sigma_A(\mathcal{A}|_A)}^{\Omega}(id_A)$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , ki vsebuje  $\mathcal{A}$ , torej  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$ , torej  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})|_A \subset \sigma_A(\mathcal{A}|_A)$ .

□

**Opomba 1.34.** Kako lahko v splošnem določimo  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})$ ? Zagnemo z  $\mathcal{A}$  karkoli kar mora biti v  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{A})$  da zadosca pogojem  $\sigma$ -algebre, vse komplemente, stevne unije,  $\emptyset$ ,  $\Omega$  in stevne unije teh itd. Po tem postopku dokazemo, da je to kar imamo  $\sigma$ -algebra.

**Zgled 1.35.** Naj bosta  $\{E, F\} \subset 2^{\Omega}$ . Potem mora  $\sigma_{\Omega}(\{E, F\})$  vsebovati  $\{\emptyset, E, F, E \setminus F, E \cap F, \dots\}$  (Particije na  $\Omega$  inducirane z  $E, F$ ). Torej  $\sigma_{\Omega}(\{E, F\}) \supset \sigma_{\Omega}(\mathcal{P})$ . Ampak  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{P})$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ , ki vsebuje  $\{E, F\}$ , torej  $\sigma_{\Omega}(\{E, F\}) = \sigma_{\Omega}(\mathcal{P}) = \sigma\mathcal{P}$  iz zgleda 1.8.

**Trditev 1.36.** Naj bo  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  in naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  ter  $\mathcal{F}'$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega'$ .

1. Če je  $A' \subset \Omega$  taksna, da  $f : \Omega \rightarrow A'$ , potem je  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$  natanko tedaj ko je  $f \in \mathcal{F}/(\mathcal{F}'|_{A'})$ .



2. Za  $A \subset \Omega$ , ce je  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ , je  $f|_A \in (\mathcal{F}|_A)/\mathcal{F}'$ .
3. Ce za zaporedje  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  v  $\mathcal{F}$ , za katerega je  $\Omega = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ , velja  $f|_{A_i} \in (\mathcal{F}|_{A_i})/\mathcal{F}'$  za vsak  $i \in \mathbb{N}$ , potem  $f \in \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ .

*Dokaz.* 1. Za  $H' \in \mathcal{F}'$  je  $f^{-1}(H') = f^{-1}(H' \cap A')$ .

2. Za  $F' \in \mathcal{F}'$  je  $(f|_A)^{-1}(F') = A \cap f^{-1}(F') \in \mathcal{F}|_A$ .

3. Za  $F' \in \mathcal{F}'$  je  $f^{-1}(F') = \cup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(F') \cap A_i \underbrace{=}_{\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega} \cup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{(f|_{A_i})^{-1}(F')}_{\in \mathcal{F}|_{A_i} = \mathcal{F} \cap 2^{A_i} \subset \mathcal{F}}$

□

**Opomba 1.37.** Tocki 1. in 2. pomenita da se merljivost obnaša lepo pod omejitvami. Tocka 3. pa nam pove da je lahko merljivost preverjena "lokalno".

#### 1.1.4 Borelove množice na razširjeni realni osi in Borelova merljivost numericnih funkcij

**Definicija 1.38.** Naj bo  $[-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  razširjena realna os, opremljena z naravno relacijo  $\leq$ . Vpeljemo družino množic  $\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} := \sigma_{[-\infty, \infty]}(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$ , ki ji pravimo Borelova  $\sigma$ -algebra na  $[-\infty, \infty]$ . Za  $A \subset [-\infty, \infty]$  vpeljemo družino množic  $\mathcal{B}_A = \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}|_A$ , ki ji pravimo Borelova  $\sigma$ -algebra na  $A$ .

**Opomba 1.39.** Funkcije, ki so merljive glede na  $\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  na kodomeni, so nekako natanko tiste, ki se "lepo" obnašajo s stalisca integracije. Pričakovanje tega, kar sledi, nam je vseh tudi zato, ker na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  lahko definiramo prijetno - netrivialno translacijsko invariantno - tako imenovano Lebesquovo mero. Prav tako lahko trdimo, da je reči, da je numerična preslikava  $f$  merljiva (z vidika merjenja zanimiva), treba vsaj izmeriti množice  $\{f \leq a\} := f^{-1}[-\infty, a]$  za vsak  $a \in \mathbb{R}$  (zlasti, ob malce predvidevanju vsebine drugega dela teh zapisov, za naključno spremenljivko  $X$  bi želeli biti sposobni povedati, kaj je verjetnost dogodkov  $\{X \leq a\}$  za  $a \in \mathbb{R}$ ).

**Zgled 1.40.** Vsi intervali in stevne podmnožice  $[-\infty, \infty]$  pripadajo  $\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Prav tako vse zaprte in odprte podmnožice  $[-\infty, \infty]$  pripadajo  $\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Če je  $A \subset [-\infty, \infty]$  stevna, potem je  $\mathcal{B}_A = 2^A$ .

**Definicija 1.41.** Če  $f$  slika v  $[-\infty, \infty]$  (je numericna), potem:

1.  $\sigma(f) = \sigma^{\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}}(f)$ .
2. Za  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $D_f$  recemo da  $f$  je  $\mathcal{F}$ -merljiva  $\iff f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .
3. Za  $g : D_f \rightarrow [-\infty, \infty]$ ;  $g \wedge f := \min\{g, f\}$ ,  $g \vee f := \max\{g, f\}$ ,  $f^+ := \max\{f, 0\}$  in  $f^- := \max\{-f, 0\}$ .

**Zgled 1.42.**  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{R}}(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$ . Posledicno po trditvah 1.29 in 1.36 za  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{F}$  na  $\Omega$  in  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  Borelovo merljiva  $\iff f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \iff \{f \leq a\} := f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$  za  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

**Definicija 1.43.** (Aritmetika z  $\infty$ )

1.  $0 \cdot (\pm\infty) := 0$
2.  $\infty + (-\infty) := 0$

Preostanek aritmetike v  $[-\infty, \infty]$  vpeljemo naravno, npr.  $a \cdot \infty = \text{sgn}(a)\infty$  za  $a \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\}$ ,  $a + \infty = \infty$  itd.

**Trditev 1.44.** Za  $A \subset [-\infty, \infty]$  in  $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  zvezna, potem  $f \in \mathcal{B}_A \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Če je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra in  $\{f, g\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ , potem je  $\{f + g, fg\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  in  $\{\{f = g\}, \{f \subset g\}, \{f \leq g\}\} \subset \mathcal{F}$ .

*Dokaz.* Brez dokaza. □

**Trditev 1.45.** Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra in  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Potem je

$$\{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}.$$

Ce je  $f_n \geq 0$  za  $n \in \mathbb{N}$ , je  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ .

*Dokaz.*  $\mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} = \sigma_{[-\infty, \infty]}(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$ . Za  $a \in \mathbb{R}$   $(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)^{-1}([-\infty, a]) = \{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a\} = \{f_n \leq a \ \forall n \in \mathbb{N}\} = \cap_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a = \cap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{f_n^{-1}([-\infty, a])}_{\in \mathcal{F} : f_n \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}}$  Da

je  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  utemeljimo tako, da zapišemo  $\inf_{n \in \mathbb{N}} = -\sup_{n \in \mathbb{N}} -f_n$  in opazimo, da je  $-id_{[-\infty, \infty]} \in \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$   $\limsup$  in  $\liminf$  sta kombinaciji  $\sup$  in  $\inf$ . Končno v primeru, da je  $f_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$  je  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n f_k}_{\in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \text{ po trditvi 1.44}}$ . Kar nam da  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ . □

**Posledica 1.46.** Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra, potem je  $\{\max(f, g), \min(f, g), f^+, f^-, |f|\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  za  $\{f, g\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Poleg tega je  $\{\{f_n \text{ konvergira, ko gre } n \rightarrow \infty\}, \{f_n \text{ konvergira k vrednosti iz } \mathbb{R} \text{ ko gre } n \rightarrow \infty\}, \{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_0\}\} \subset \mathcal{F}$  za vsako zaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  v  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .

*Dokaz.* Brez dokaza. □

### 1.1.5 Argumenti monotonega razreda

IDEJA: Zelimo dokazati trditve, ki se tice vseh funkcij iz  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . Najprej pokazemo trditev za  $\mathbb{1}_A, A \in \mathcal{F}$ .  $\rightarrow$  izrek o monotonem razredu  $\rightarrow$  trditev velja v splošnem.

**Definicija 1.47.** Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  in  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ .  $f$  je  $\mathcal{F}$ -enostavna  $\iff f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  in  $Z_f$  je omejena množica.

**Trditev 1.48.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F})$  merljiv prostor in  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ .  $f$  je  $\mathcal{F}$ -enostavna  $\iff f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}$  za neke  $c_i \in [0, \infty), A_i \in \mathcal{F}, i \in [n]$  za nek  $n \in \mathbb{N}$ . Naprej, ce je  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ , potem je  $\min(2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor, n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje  $\mathcal{F}$ -enostavnih funkcij, ki narasajo proti ( $\uparrow$ )  $f$ . (Celo enakomerno na vsaki množici na kateri je  $f$  omejena).

*Dokaz.*  $(\Rightarrow) : f = \sum_{\mathcal{Z}_f \setminus \{0\}} a \cdot \mathbb{1}_{\{f=a\}}, \{f=a\}$  pomeni  $f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{F}$ .  $(\Leftarrow) :$  Baje da je očitno (V skripti ni dokaza).  $\square$

**Opomba 1.49.** 1.  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \iff f = 1 - \lim \mathcal{F}$ -enostavnih funkcij.

2.  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \iff f = \text{limita linearnih kombinacij indikatorjev množic iz } \mathcal{F}.$

**Posledica 1.50.** (izrek o monotonem razredu) Naj bo  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra in  $\mathcal{M} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ . Če velja

1.  $\mathbb{1}_A \in \mathcal{M}$  za  $\forall A \in \mathcal{F}$
2.  $\mathcal{M}$  je konveksen stozec; tj.  $af + g \in \mathcal{M}$  za  $\forall a \in [0, \infty] \forall f \in \mathcal{M} \forall g \in \mathcal{M}$
3.  $\mathcal{M}$  zaprt za  $\uparrow$  limite; tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{M} \forall$  narascajoče zaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  v  $\mathcal{M}$

Potem je  $\mathcal{M} = \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ .

*Dokaz.* Po 1. in 2.  $\mathcal{M}$  vsebuje vse  $\mathcal{F}$ -enostavne funkcije. Vsaka funkcija iz  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$  je po trditvi 1.48  $\uparrow$ -limita  $\mathcal{F}$ -enostavnih funkcij in zato pripada  $\mathcal{M}$  po 3.  $\square$

**Opomba 1.51.** Pomembnost tega rezultata postane jasna v nadaljevanju, saj nam pove da "razsirimo" trditev ki velja za indikatorje merljivih množic na vse nenegativne preslikave (z uporabo linearnosti in monotone konvergence) in nato na vse merljive numericne preslikave (po linearnosti in zapisu funkcije kot vsoto njenega negativnega in pozitivnega dela).

**Trditev 1.52.** (Doob-Dynkinova faktorizacijska lema) Naj bo  $X : \Omega \rightarrow A$  in  $(A, \mathcal{A})$  merljiv prostor. Potem je

$$Y \in \sigma^{\mathcal{A}}(X) \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \iff \left( \exists h \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}, \text{ da je } Y = \underbrace{h \circ X}_{h(X)} \right).$$

*Dokaz.*  $(\Leftarrow) : X \in X^{-1}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$  in  $h \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \Rightarrow$  (kompozitumi merljivih preslikav so merljive)  $\Rightarrow h \circ X \in X^{-1}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .

$(\Rightarrow) :$  Naj bo  $\mathcal{M} := \{Y \in \sigma^{\mathcal{A}}(X) \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]} \mid \exists h \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]} \text{ da je } Y = h(X)\}$  Potem je  $\mathcal{M}$  konveksen stozec zaprt za  $\uparrow$  limite in po definiciji  $\sigma^{\mathcal{A}}(X)$  vsebuje vse indikatorje množic iz  $\sigma^{\mathcal{A}}(X)$ , torej je po izreku o monotonem razredu  $\mathcal{M} = \sigma^{\mathcal{A}}(X) \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ . Torej ce je  $Y \in \sigma^{\mathcal{A}}(X) \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  lahko za  $h_+$  in  $h_-$  iz  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$  zapisemo  $Y = Y^+ - Y^-$  kjer sta  $Y^+ = h_+(X)$  in  $Y^- = h_-(X)$ . Velja  $h_+ - h_- \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .  $\square$

**Definicija 1.53.** (Dynkinov sistem) Naj bo  $\mathcal{D} \subset 2^\Omega$ .  $\mathcal{D}$  je Dynkinov (tudi  $\lambda$ -) sistem na  $\Omega \iff \Omega \in \mathcal{D}$  in  $(B \setminus A \in \mathcal{D} \text{ za } \mathcal{D} \ni A \subset B \in \mathcal{D})$  in za vsako zaporedje  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  v  $\mathcal{D}$  za katerega velja  $A_i \subset A_{i+1}$  za  $\forall i \in \mathbb{N}$  velja  $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$ .

**Definicija 1.54.**  $\mathcal{D}$  je  $\pi$ -sistem  $\iff \mathcal{D}$  je se dodatno zaprta za  $\cap$ .

**Zgled 1.55.**  $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$  je  $\pi$ -sistem.

**Trditev 1.56.** Naj bo  $\mathcal{D} \subset 2^\Omega$ .  $\mathcal{D}$  je Dynkinov sistem na  $\Omega \iff \Omega \in \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}$  je zaprt za  $c^\Omega$ ,  $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$  za  $\forall$  zaporedje  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  v  $\mathcal{D}$  ki ima  $A_i \cap A_j = \emptyset$  za  $i \neq j$  iz  $\mathbb{N}$ .  
 Dodatno  $\mathcal{D}$  je  $\sigma$ -algebra na  $\Omega \iff \mathcal{D}$  je  $\pi$ -sistem in Dynkinov sistem na  $\Omega$ .

*Dokaz.* Brez dokaza. □

**Definicija 1.57.** Za  $\mathcal{L} \subset 2^\Omega$  definiramo najmanjsi Dynkinov sistem na  $\Omega$  ki vsebuje  $\mathcal{L}$  kot podmnozico

$$\lambda_\Omega(\mathcal{L}) := \cap \{ \mathcal{D} \in 2^{2^\Omega} \mid \mathcal{D} \text{ je Dynkinov sistem na } \Omega \text{ in } \mathcal{L} \subset \mathcal{D} \}.$$

**Trditev 1.58.** Naj bo  $\mathcal{L}$   $\pi$ -sistem in  $\mathcal{L} \subset 2^\Omega$ . Potem je  $\lambda_\Omega(\mathcal{L}) = \sigma_\Omega(\mathcal{L})$ .

*Dokaz.* Brez dokaza. □

**Posledica 1.59.** (Dynkinova lema) Naj bo  $\mathcal{L}$   $\pi$ -sistem in  $\mathcal{D}$  Dynkinov sistem na  $\Omega$  in  $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$ . Potem je  $\sigma_\Omega(\mathcal{L}) \subset \mathcal{D}$ .

*Dokaz.* Brez dokaza. □

Pomembnost zgoraj navedenega rezultata izhaja predvsem iz naslednje opazke. Naj bo  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra in  $\mathcal{L} \subset 2^\Omega$   $\pi$ -sistem. Predpostavimo, da je  $\mathcal{A} = \sigma_\Omega(\mathcal{L})$ . Pogosto v teoriji mere (in zlasti v teoriji verjetnosti) želimo pokazati, da neka lastnost,  $P(A) \in \mathcal{A}$ , velja za vse elemente  $A \in \mathcal{A}$ , in to želimo storiti, potem ko smo že prejeli ali že predhodno vzpostavili, da  $P(A)$  velja za vse  $A \in \mathcal{L}$ . Običajno je enostavno (ker se mere lepo obnašajo pri disjunktih/neopadajočih števnih unijah in ker se končne mere tudi lepo obnašajo pri "primerljivih razlikah"/komplementih) neposredno preveriti, da je zbirka  $\mathcal{D} := \{A \in \sigma_\Omega(\mathcal{L}) \mid P(A)\}$   $\lambda$ -sistem, vendar pa običajno ni tako enostavno (ker se mere ne obnašajo tako lepo pri poljubnih števnih unijah), preveriti neposredno, da je  $\mathcal{D}$   $\sigma$ -algebra. Lema  $\pi \setminus \lambda$  vzpostavi izjemno uporabno bližnjico za to posredno preverjanje. Njena uporabnost je še dodatno okrepljena s tem, da običajno ni težko najti generirajočega  $\pi$ -sistema, na katerem lastnost  $P$  "očitno" velja. Naslednji rezultat je dosežen v skladu z zgoraj navedenim in ga bomo še večkrat uporabili v preostanku tega besedila.

**Trditev 1.60.** (Meri, ki se strinjata na  $\sigma$ -lokalizirajočem generirajočem  $\pi$ -sistemu) Naj bosta  $\mu$  in  $\nu$  meri na merljivem prostoru  $(E, \Sigma)$ , naj bo  $\mathcal{L} \subset \Sigma$   $\pi$ -sistem za katerega velja  $\sigma_E(\mathcal{L}) = \Sigma$ . Naj velja  $\mu|_{\mathcal{L}} = \nu|_{\mathcal{L}}$  in naj obstaja zaporedje  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  v  $\mathcal{L}$ , ki ga sestavljajo  $\uparrow$  paroma disjunktne množice, da velja  $\mu(L_n) = \nu(L_n) < \infty$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$  in  $\cup_{n \in \mathbb{N}} L_n = E$ . Potem  $\mu = \nu$ .

*Dokaz.* Denimo, da smo trditev pokazali v primeru, ko sta  $\mu$  in  $\nu$  končni meri z enako maso. Potem za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja, da sta  $\mu|_{L_n}$  in  $\nu|_{L_n}$  končni meri z enako maso. (Namrec  $\mu(L_n) = \nu(L_n) < \infty$  na merljivem prostoru  $(L_n, \Sigma|_{L_n})$ ).  $\mathcal{L}|_{L_n}$  je  $\pi$ -sistem ( $[= \mathcal{L} \cap 2^{L_n}, \Rightarrow L_n \in \mathcal{L}]$  in  $\sigma_{L_n}(\mathcal{L}|_{L_n}) = \sigma_E(\mathcal{L})|_{L_n} = \Sigma|_{L_n}$ ) in  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je zaporedje v  $\mathcal{L}|_{L_n}$  za katerega je res  $\mu|_{L_n}(L_n) = \nu|_{L_n}(L_n) < \infty$  ter  $\cup_{n \in \mathbb{N}} L_n = E$ . Dokončaj dokaz. □

Z besedami: dve meri ki se strinjata na  $\sigma$ -lokalizirajočem generirajočem  $\pi$ -sistemu se strinjata povsod.

### 1.1.6 Lebesgue-Stieltjesove mere

**Izrek 1.61.** (Lebesgue-Stieltjesove mere) Naj bo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nepadajoca in zvezna z desne. Potem obstaja natanko ena mera  $\mu$  na  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  za katero velja

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a) \text{ za } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

*Dokaz.* (Enolicnosti)  $\{(a, b] \mid a \leq b \in \mathbb{R}\}$  je  $\pi$  sistem, ki generira  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  na  $\mathbb{R}$  in je tudi lokalizirajoc za  $\mu : \cup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1] = \mathbb{R}$ . Apliciramo prejsnjo trditev o strinjanju mer na  $\sigma$ -lokalizirajočem generirajočem  $\pi$ -sistemu. (Ce sta meri  $\mu$  in  $\nu$  verjetnostni, lahko pogoj, ki se tice obstoja  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  izpustimo, ker lahko zamenjamo  $\mathcal{L}$  z  $\mathcal{L} \cup \{E\}$  in vzamemo  $L_n = E \forall n \in \mathbb{N}$ ).  $\square$

**Definicija 1.62.** Meri  $\mu$  iz izreka pravimo Lebesgue-Stieltjesova mera prirejena  $F$  in jo oznacimo z  $dF$ . ( $\mathcal{L} := d(id_{\mathbb{R}})$  je Lebesgueova mera na  $\mathbb{R}$ , ne obstaja razsiritvev  $\mathcal{L}$  na mero na  $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ ).

**Trditev 1.63.** Naj bo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nepadajoca in zvezna z desne. Mera  $dF$  je:  $\sigma$ -koncna; koncna  $\iff F$  je omejena; verjetnostna  $\iff \lim_{\infty} F - \lim_{-\infty} F = 1$  Za  $x \in \mathbb{R}$  je  $dF(\{x\}) = F(x) - \underbrace{F(x-)}_{\text{leva limita } F \text{ v } x}$ .

*Dokaz.*  $\sigma$ -koncnost:

$\cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1] = \mathbb{R}$ ;  $dF((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty \forall n \in \mathbb{Z}$ ;  $dF((-n, n]) = F(n) - F(-n) \Rightarrow$  ko gre  $n \rightarrow \infty \Rightarrow dF(\mathbb{R}) = \lim_{\infty} F = \lim_{-\infty} F$ . Od tod dobimo karakterizacijo koncnosti  $dF$  in kdaj je  $dF$  verjetnostna mera. Za  $x \in \mathbb{R}$  je  $(x - \frac{1}{n}, x] \downarrow \{x\}$ , ko gre  $n \rightarrow \infty$  cez  $\mathbb{N}$  in zato je po zveznosti  $dF$  od zgoraj na mnozicah s koncno mero  $dF(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} dF((x - \frac{1}{n}, x]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x) - F(x - \frac{1}{n})$ .  $\square$

**Zgled 1.64.**  $\mathcal{L}$  je  $\sigma$ -koncna in  $\mathcal{L}(A) = 0$  za vsako stevno  $A \subset \mathbb{R}$ .

**Zgled 1.65.** (Cantorjeva mnozica) Naj bo  $V$  preslikava na intervalih oblike  $[0, 1]$ .  $V(A)$  odstrani srednjo tretjino vsakega intervala iz  $A$ . Torej  $V([0, 1]) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . Potem je  $C := \cap_{n \in \mathbb{N}} V^n([0, 1])$  nestevna kompaktna mnozica z  $\mathcal{L}(C) = 0$ .

## 1.2 Integracija na merljivih prostorih

Uvod v abstraktno integracijo. Naj bo  $\mathcal{P}$  particija  $\Omega$  in  $\mu' : \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty)$  in  $f' : \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty)$  ( $\mu$  je mera na  $\sigma_{\Omega}(\mathcal{P}) = \{\cup Q : Q \in 2^{\mathcal{P}}\}$ ;  $\mu(\cup Q) := \sum_{p \in Q} \mu'(p)$  za  $Q \subset \mathcal{P}$ ), ( $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ ;  $f(\omega) = f'(p)$  za  $\omega \in p \in \mathcal{P}$ ) Potem je  $\sum_{p \in \mathcal{P}} f'(p) \mu'(p) = \sum_{r \in \mathcal{Z}_f} r \cdot \underbrace{\mu(\{f = r\})}_{f^{-1}(\{r\})}$ .  $\sum_{p \in \mathcal{P}} f'(p) \mu'(p) = \int_a^b f(z) dz$  Riemann - Darbouxov integral

odsekoma konstantne funkcije  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ .

### 1.2.1 Lebesgueov integral

**Definicija 1.66.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero in  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$

- Ce je  $f$   $\mathcal{F}$ -enostvna, potem je

$$\int f d\mu := \sum_{a \in \mathcal{Z}_f} a \cdot \underbrace{\mu(\{f = a\})}_{f^{-1}(\{a\})}$$

- Če  $f$  ni  $\mathcal{F}$ -enostvna, je pa  $f \geq 0$ , potem je

$$\int f d\mu := \sup\left\{\int q d\mu : q \text{ je } \mathcal{F}\text{-enostvna in } q \leq f\right\}$$

- Če  $f$  ni  $\geq 0$ , potem je

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

$\int f d\mu$  pravimo integral  $f$  proti  $\mu$  (tudi pričakovana vrednost, če je  $\mu$  verjetnostna mera). Druge notacije za  $\int f d\mu$  so  $\mu[f] := \mu^x[f(x)] := \int f(x)\mu(dx)$ .

Za  $A \in \mathcal{F}$  pisemo  $\mu[f; A] := \mu^x[f(x); x \in A] := \int_A f(x)\mu(dx) := \int f \mathbf{1}_A d\mu$ .

**Definicija 1.67.** Integral  $f$  proti  $\mu$  je dobro definiran  $\iff \int f^+ d\mu \wedge \int f^- d\mu < \infty$ .  
 $f$  je  $\mu$ -integrabilen  $\iff \int f^+ d\mu \vee \int f^- d\mu < \infty$ .

**Definicija 1.68.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero.

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \{f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : f \text{ je } \mu \text{ integrabilna}\}.$$

Za  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  za katero je  $\{Re(g), Im(g)\} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$  je  $\int g d\mu := \int Re(g) d\mu + i \int Im(g) d\mu$ .

**Izrek 1.69.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero. Integral ima sledece lastnosti.

1. *Aditivnost:*  $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$  za  $\{f, g\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  take, da je  $\int f^- d\mu \vee \int g^- d\mu < \infty$ .
2. *Integral indikatorja:*  $\int \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)$  za  $\forall A \in \mathcal{F}$ . (V posebnem je  $\int 0 d\mu = 0$  in torej  $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$  za vse  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ )
3. *Integrali, ki so nič, ki so končni:* Za  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$  je  $\int f d\mu = 0 \iff \mu(f > 0) = 0$  ( $f$  je skoraj povsod glede na  $\mu$ ), Če  $\int f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(f = \infty) = 0$  ( $f < \infty$  skoraj povsod glede na  $\mu$ .)
4. *Trikotniska neenakost:*  $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$  za  $\forall f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .
5. *Integral ne vidi množic z mero 0:* Če je  $\int f d\mu = \int g d\mu$  za  $\{f, g\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  za katere je  $f = g$  skoraj povsod glede na  $\mu$  ( $\mu(f \neq g) = 0$ )
6. *Monotonost:*  $\int g d\mu \leq \int f d\mu$ , brz ko je  $\{g, f\} \subset \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ ,  $g \leq f$  in  $\int g d\mu < \infty$ .
7. *Homogenost:*  $\int c f d\mu = c \int f d\mu$  za vsak  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  za katero velja  $\int (c f)^- d\mu \wedge \int (c f)^+ d\mu < \infty$  za vsak  $c \in (-\infty, \infty)$ .

Vsi integrali ki zadostujejo 1.-4. so dobro definirani. Enako velja za 7. le v primeru, ko je  $c = 0$  in  $\mu[f^+] = \mu[f^-] = \infty$ . Za 5. je  $\int f d\mu$  dobro definiran  $\iff \int g d\mu$  je dobro definiran.

**Trditev 1.70.** Naj bosta  $a \leq b \in \mathbb{R}$  in  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Potem je  $f \mathbf{1}_{[a, b]}$   $\mathcal{L}$ -integrabilna in

$$\int_{[a, b]} f d\mathcal{L} = \int_a^b f(x) dx,$$

kjer je na desni Riemann-Darbouxov integral.

**Zgled 1.71.**  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$  je  $\mathcal{L}$ -integrabilna (ker je stevna  $\equiv 0$ ), ni pa R-D integrabilna.

### 1.2.2 Konvergenčni izreki s posledicami

**Izrek 1.72.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero in  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .

1. Naj obstaja  $g \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ ,  $\int g d\mu < \infty$ , za katero je  $g \geq f_n^-$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Povezanost od spodaj (Fatoujeva lema):

$$\mu \left[ \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right)^- \right] < \infty \text{ in } \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

(b) Monotona konvergenca (Lévi): Če je  $f_n \leq f_{n+1}$  za  $\forall n \in \mathbb{N}$ , potem je:

$$\mu \left[ \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)^- \right] < \infty \text{ in } \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \uparrow - \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

2. Dominirana konvergenca (Lebesgue): Če obstaja  $g \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ , ki je  $\mu$ -ntegrabilna in za katero je  $|f_n| \leq g$  za  $\forall n \in \mathbb{N}$  in če obstaja  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  (povsod), potem je:

$$\mu \left[ \left| \lim_{m \rightarrow \infty} f_m \right| \right] < \infty \text{ in } \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m| d\mu = 0 \text{ in torej } \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. (ib)  $\Rightarrow$  (ia) in (ii): (ia):

$$(in f_{n \geq m} f_n)_{m \in \mathbb{N}} \text{ je zaporedje v } \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]},$$

ki je narascajoče.  $f_n^- \leq g \Rightarrow (in f_{n \geq m} f_n)^- \leq g$ . Po (ib) sledi da

$$\int \lim_{m \rightarrow \infty} f_m d\mu = \int \lim_{m \rightarrow \infty} in f_{n \in \mathbb{N} \geq m} f_n d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int in f_{n \in \mathbb{N} \geq m} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

(ii): Uporabim (ia). Za  $\left( - \underbrace{|f_n - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m|}_{\leq 2g} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  in dobimo

$$0 = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( - \underbrace{|f_n - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m|}_{\leq 2g} \right) d\mu \leq \dots$$

□

**Posledica 1.73.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero in  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ . Potem je

$$\int \sum_{n \in \mathbb{N}_0} f_n d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \int f_n d\mu.$$

Dokaz.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f_m \text{ (narascajoče v } n \text{)}$$

Zaradi prejšnjega izreka sledi

$$\int \sum_{n \in \mathbb{N}_0} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{m=1}^n f_m d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \int f_m d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \int f_n d\mu.$$

□

**Posledica 1.74.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F})$  merljiv prostor in  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje mer na  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Potem je  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$  mera na  $(\Omega, \mathcal{F})$  in za  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  je

$$\int f d\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) \text{ dobro definirana} \iff \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \int f^+ d\mu_n\right) \wedge \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \int f^- d\mu_n\right) < \infty.$$

V tem primeru je

$$\int f d\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f d\mu_n.$$

*Dokaz.* Za  $A \in \mathcal{F}$  je  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A) = \int \mu_n(A) c_{\mathbb{N}}(dn)$ . Potem je za zaporedje  $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$  paroma disjunktnih množic v  $\mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) \left(\cup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) &= \int \mu_n \left(\cup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) c_{\mathbb{N}}(dn) \\ &= \int \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu_n(A_m) c_{\mathbb{N}}(dn) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \int \mu_n(A_m) c_{\mathbb{N}}(dn) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu_n(A_m))\right) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \left[\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) (A_m)\right] \end{aligned}$$

Poleg tega je  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n)(\emptyset) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(\emptyset) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = 0$ . Torej je  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$  mera na  $(\Omega, \mathcal{F})$ .  $\square$

Naprej, razred funkcij  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  za katere velja prejsnja posledica je

$$\int f d\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n\right) = \int \int f d\mu_n c_{\mathbb{N}}(dm)$$

konveksen stožec zaprt za  $\uparrow$  limite, ki vsebuje  $1_A$  za  $A \in \mathcal{F}$ . Po izreku o monotonem razredu prejsnja posledica velja za vse  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-0, \infty]}$ .

**Definicija 1.75.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero in  $(\Omega', \mathcal{F}')$  merljiv prostor. Za  $\in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$  vpeljemo

$$f * \mu : \mathcal{F}' \rightarrow [0, \infty], (f * \mu)(A') := \mu(f^{-1}(A')) \text{ za } A' \in \mathcal{F}'.$$

$f * \mu$  označimo tudi z  $\mu \circ f^{-1}$  ali  $\mu_f$  in ji recemo potisk  $\mu$  po  $f$  glede na  $\mathcal{F}'$ , ali zakon  $f$  pod  $\mu$  glede na  $\mathcal{F}'$  (v primeru, da je verjetnostna).

**Definicija 1.76.** Z  $f * \mu$  označimo sliko mere  $\mu$  pod  $f$  glede na  $\mathcal{F}$ .



**Posledica 1.77.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor z mero in  $(\Omega', \mathcal{F}')$  merljiv prostor. Za  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$  je  $f * \mu$  mera na  $(\Omega', \mathcal{F}')$ , ki je končna ali verjetnostna - kakor je  $\mu$ . Poleg tega je za  $g \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$

$$\int g d(f * \mu) \text{ dobro definiran} \iff \int g \circ f d\mu \text{ dobro definiran.}$$

in tedaj je

$$\int g d(f * \mu) = \int g \circ f d\mu.$$

*Dokaz.*  $(f * \mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ . Za zaporedje  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paroma disjunktnih množic v  $\mathcal{F}'$  je  $(f * \mu)(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(f^{-1}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)) = \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(f^{-1}(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f * \mu)(A_n)$ . Torej velja da je  $f * \mu$  mera na  $(\Omega', \mathcal{F}')$ . Naprej,  $(f * \mu)(\Omega') = \mu(f^{-1}(\Omega')) = \mu(\Omega)$ , torej je res  $f * \mu$  končna oz. verjetnostna  $\iff$  je  $\mu$  končna oz. verjetnostna.  $\square$

Postavimo sedaj

$$\mathcal{M} := \{g \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]} \mid \int g d(f * \mu) = \int g \circ f d\mu\}.$$

$\mathbb{1}_A \in \mathcal{M} \forall A \in \mathcal{F}'$ , kajti  $\int \mathbb{1}_A d(f * \mu) = (f * \mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)) = \int \mathbb{1}_{f^{-1}(A)} d\mu$ .  $\mathcal{M}$  je konveksen stožec.

*Dokaz.* Za  $\forall a \in [0, \infty) \forall q_1, q_2 \in \mathcal{M}$  je  $aq_1 + q_2 \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ , in  $\int (aq_1 + q_2) d(f * \mu) = a \int q_1 d(f * \mu) + \int q_2 d(f * \mu) = a \int q_1 \circ f d\mu + \int q_2 \circ f d\mu = \int (aq_1 + q_2) \circ f d\mu$ . Torej je  $aq_1 + q_2 \in \mathcal{M}$ .  $\square$

$\mathcal{M}$  je zaprta za  $\uparrow$  limite.

*Dokaz.* Za vsako  $\uparrow$  zaporedje  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  v  $\mathcal{M}$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$  in  $\int \lim_{n \rightarrow \infty} q_n d(f * \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int q_n d(f * \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int q_n \circ f d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (q_n \circ f) d\mu = \int (\lim_{n \rightarrow \infty} q_n) \circ f d\mu$ . Torej je  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ .  $\square$

Za splošen  $g \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$  je  $\{g^+, g^-\} \subset \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ , zato  $\int g^+ d(f * \mu) = \int g^+ \circ f d\mu$  ... to je del dokaza.

**Posledica 1.78.** Naj bo  $(X, \Sigma, \mu)$  prostor z mero in  $O$  neka odprta podmnožica  $\mathbb{R}$  in  $f : X \times O \rightarrow \mathbb{R}$ . Denimo, da je

- $F(., t)$   $\mu$ -integrabilna za  $\forall t \in O$
- $F(x, .)$  odvedljiva za  $\forall x \in X$

Predpostavimo, da  $\exists g \in \Sigma \setminus \mathcal{B}_{[0, \infty]}$ ,  $\int g d\mu < \infty$ , taka da je

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \forall x \in X \quad \forall t \in O.$$

Potem velja

1.  $(X \ni x \rightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(x, t))$  je  $\mu$ -integrabilna
2.  $(O \ni t \rightarrow \int F(x, t) \mu(dx))$  je odvedljiva in
3.  $\frac{d}{dt} \int F(x, t) \mu(dx) = \int \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \mu(dx)$ .  $\forall t \in O$

*Dokaz.* Dokaz v skripti (stran 19).  $\square$

### 1.2.3 Zamenjava vrstnega reda integracije in povezane teme

**Definicija 1.79.** Naj bosta  $(\Omega', \mathcal{F})$  in  $(\Omega', \mathcal{F}')$  merljiva prostora.

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' := \sigma_{\Omega \times \Omega'}(\{A \times A' \mid (A, A') \text{ in } \mathcal{F} \times \mathcal{F}'\})$$

je produktna  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{F}'$  ( $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} := \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ) je Borelova  $\sigma$ -algebra na  $\mathbb{R}^n$ .

**Trditev 1.80.** Za  $A \subset \mathbb{R}^2$  in  $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$ , ki je zvezna je  $f \in \mathcal{B}_A \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ .

*Dokaz.* Brez dokaza. □

**Trditev 1.81.** Naj bosta  $(\Omega, \mathcal{F})$  in  $(\Omega', \mathcal{F}')$  merljiva prostora. Potem velja:

1.  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$  je najmanjša  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{G}$  na  $\Omega \times \Omega'$  za katero je  
 $pr_{\Omega} := (\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \rightarrow \omega) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$  in  
 $pr_{\Omega'} := (\Omega \times \Omega' \ni (\omega, \omega') \rightarrow \omega') \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}'$ .
2. Za  $f \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \Rightarrow f(\omega, \cdot) \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \forall \omega \in \Omega$  in  $f(\cdot, \omega') \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \forall \omega' \in \Omega'$ .
3. Za vsako  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{G}$  na  $G$  in  $f : G \rightarrow \Omega$  ter  $f' : G \rightarrow \Omega'$  je  $(f, f') \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' \iff f \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$  in  $f' \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}'$ .

*Dokaz.* Brez dokaza. □

**Izrek 1.82.** Naj bosta  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  in  $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$  prostora z mero ter  $\mu$  in  $\mu'$   $\sigma$ -končni. Potem velja:

1. Obstaja natanko ena mera  $\nu$  na  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ , ki jo označimo  $\mu \times \mu'$ , da je  $\nu(A \times A') = \mu(A)\mu'(A') \forall (A, A') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}'$ .
2. Naj bo  $f \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$ . in naj velja:
  - (a)  $f \geq 0$  (Tonelli) ali
  - (b)  $\int |f| d(\mu \times \mu') < \infty$  (Fubini) ali
  - (c)  $\iint f^-(\omega, \omega') \mu(d\omega) \mu'(d\omega') \wedge \iint f^-(\omega, \omega') \mu'(d\omega') \mu(d\omega) < \infty$ .

Potem je

$$(\Omega \ni \omega' \rightarrow \int f(\omega, \omega') \mu(d\omega)) \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]} \text{ in } (\Omega' \ni \omega \rightarrow \int f(\omega, \omega') \mu'(d\omega')) \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}_{[-\infty, \infty]}$$

ter

$$\int f^-(\omega, \omega') \mu(d\omega) < \infty \text{ skoraj povsod glede na } \mu' \text{ in } \omega' \text{ in}$$

$$\int f^-(\omega, \omega') \mu'(d\omega') < \infty \text{ skoraj povsod glede na } \mu \text{ in } \omega$$

ter

$$\int f d(\mu \times \mu') = \iint f(\omega, \omega') \mu(d\omega) \mu'(d\omega') = \iint f(\omega, \omega') \mu'(d\omega') \mu(d\omega).$$

*Dokaz.* Brez dokaza. □

**Definicija 1.83.** Meri  $\mu \times \mu'$  recemo produktna mera. ( $\mathcal{L}^n := \mathcal{L} \times \cdots \times \mathcal{L}$  pravimo  $n$ -razsezna Lebesquova mera na  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ ).