Varbūtību teorija un matemātiskā statistika

Kursa apraksts

Iznākumu telpa. Notikumu algebra. Varbūtības aksiomas. Klasiskā varbūtības definīcija. Statistiskā varbūtības definīcija. Kombinatorikas elementi. Klasiskā shēma. Nosacītās varbūtības. Pilnās varbūtības formula, Baijesa formula. Bernulli shēma. Diskrēti gadījuma lielumi. Matemātiskā cerība un dispersija. Vienmērīgais, ģeometriskais un Puasona sadalījums. Binomiālais sadalījums. Puasona un Muavra-Laplasa tuvinājums. Divdimensiju diskrēti gadījuma lielumi. Kovariācija un korelācija. Nosacītais varbūtību sadalījums. Neatkarība. Nepārtraukti gadījuma lielumi. Varbūtību sadalījums un sadalījuma blīvuma funkcija. Nepārtrauktu gadījuma lielumu matemātiskā cerība un dispersija. Vienmērīgais sadalījums. Eksponenciālais sadalījums. Normālais sadalījums un normālā sadalījuma tabulas. Čebiševa teorēma. Lielā skaita likums un centrālā robežteorēma. Novērojumu dati, ģenerālkopas un izlase. Statistiskie novērtējumi. Punktveida novērtējumi. Normāli sadalītas ģenerālkopas parametru ticamības intervāli. Statistisko hipotēžu pārbaude. Pirmā un otrā veida kļūdas. Kritērija jauda un nozīmības līmenis. Neimana-Pīrsona lemma. Baijesa un minimaksa kritēriji.

Literatūra

Latviešu valodā

1. E.Kronbergs, P.Rivža, Dz.Bože. *Augstākā matemātika*, 2.d. , Izd. ”Zvaigzne”, Rīga,1988.g.
2. J.Carkovs, M.Buiķis. *Diskrētā varbūtība un statistika.* Izd. RTU, Rīga. 1995.
3. M.Buiķis, V.Pekka. *Varbūtību teorija.* Izd. RPI, Rīga, 1981.g.
4. M. Bārzdiņa. *Varbūtību teorijas un matemātiskās statistikas tabulas un to lietošana*. RPI Izd.,Rīga,1982.g.
5. M.Buiķis *Varbūtību teorijas robežteorēmas*. Izd. RPI, Rīga,1985
6. V.Carkova. *Matemātiska statistika.* Izd.LVU, Rīga, 1979.g.
7. O.Krastiņš. *Varbūtību teorija un matemātiskā statistika*, Izd.”Zvaigzne”,Rīga,1978.g.
8. Dz.Bože, L.Biezā, B.Siliņa, A.Strence. *Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā*. Izd.”Zvaaigzne”,Rīga, 1986.g.
9. J.Carkovs. *Alternatīvā statistiskā metode*. Izd. RPI, Rīga,1984.
10. J.Carkovs, K.Šadurskis. *Statistiskie novērtējumi*. Izd. RPI, Rīga,1989.

Angļu valodā

11. Douglas C. Montgomery & George C. Runger. *Applied Statistics and Probability for Engineers. Second Edition.* John Wiley &Sons, Inc., NY.
12. Sheldon Ross. *Introduction to probability models*. Academic Press, NY.
13. John A. Gubner. *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers*, 2006.
15. L. Chaumont, M. Yor. *Exercises in Probability*. 2006.
16. David M. Levine, et al. *Applied Statistics for Engineers and Scientists Using Microsoft Excel and MINITAB (with CD-ROM).*

Krievu valodā

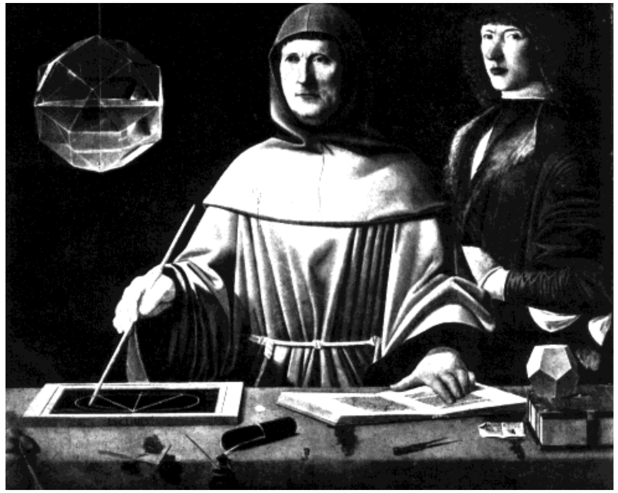
17. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. М. Наука.1987.
18. В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. М. Высшая шк.
19. В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М. Высшая шк.
20. Г.А.Соколов, Н.А. Чистякова. Теория вероятностей. М. Экзамен, 2005.
21. Г.А.Соколов, И.М.Гладких. Математическая статистика. М. Экзамен, 2004.

Mazliet vēstures

1. publikācija, kas satur varbūtību teorijas uzdevumu:

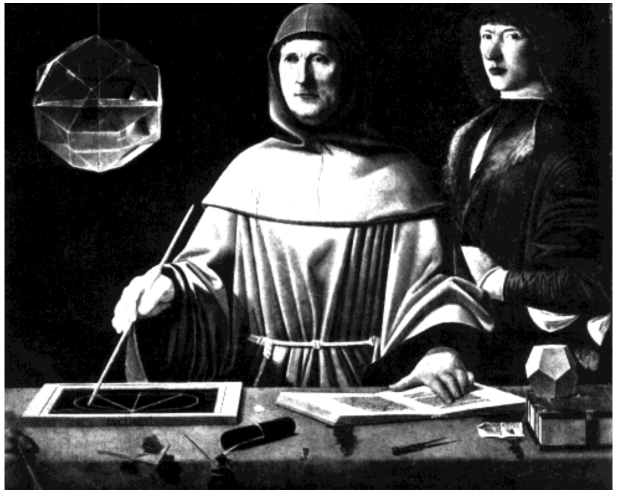
Fra Luca Pacciolo (1445-1509).

Summa de Arithmetica Geometrica a Proportionalitá. 1496. Napoli.



Spēlētāji A un B spēlē spēli, kuras likme ir 8 naudas vienības. Likmi saņem tas spēlētājs, kurš pirmais sasniedz 6 uzvaras. Neizšķirts rezultāts nav iespējams. Taču spēli nākas pārtraukt pie rezultāta 5:3 spēlētāja A labā. Kā taisnīgi sadalīt spēles likmi?

Mazliet vēstures



1. publikācija, kas satur varbūtību teorijas uzdevumu:

Fra Luca Pacciolo (1445-1509).

Summa de Arithmetica Geometrica a Proportionalitá. 1496. Napoli.

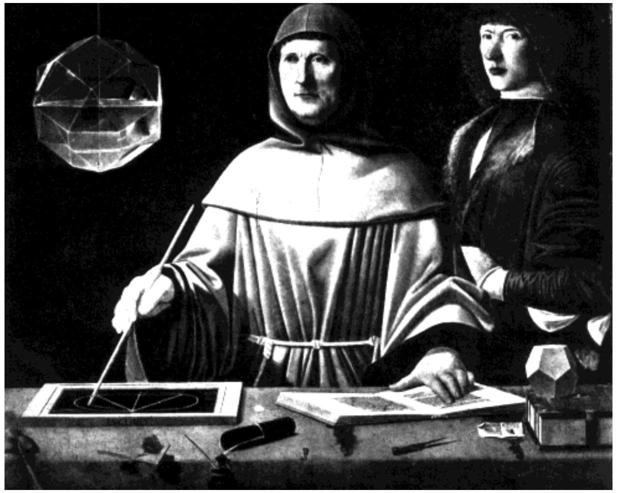
Spēlētāji A un B spēlē spēli, kuras likme ir 8 naudas vienības. Likmi saņem tas spēlētājs, kurš pirmais sasniedz 6 uzvaras. Neizšķirts rezultāts nav iespējams. Taču spēli nākas pārtraukt pie rezultāta 5:3 spēlētāja A labā. Kā taisnīgi sadalīt spēles likmi?

Pačolo publicētā atbilde: **5 pret 3 A labā.**

Mazliet vēstures

1. publikācija, kas satur varbūtību teorijas uzdevumu:

Fra Luca Pacciolo (1445-1509).



Summa de Arithmetica Geometrica a Proportionalitá. 1496. Napoli.

Spēlētāji A un B spēlē spēli, kuras likme ir 8 naudas vienības. Likmi saņem tas spēlētājs, kurš pirmais sasniedz 6 uzvaras. Neizšķirts rezultāts nav iespējams. Taču spēli nākas pārtraukt pie rezultāta 5:3 spēlētāja A labā. Kā taisnīgi sadalīt spēles likmi?

Pačolo publicētā atbilde: **5 pret 3 A labā ir kļūda!**

Pareizā atbilde 1. reizi iegūta ap 1650. g. Fermā (*Pierre de Fermat 1601 - 1665*) vēstulē Paskālam (*Blaise Pascal 1623 - 1662*).

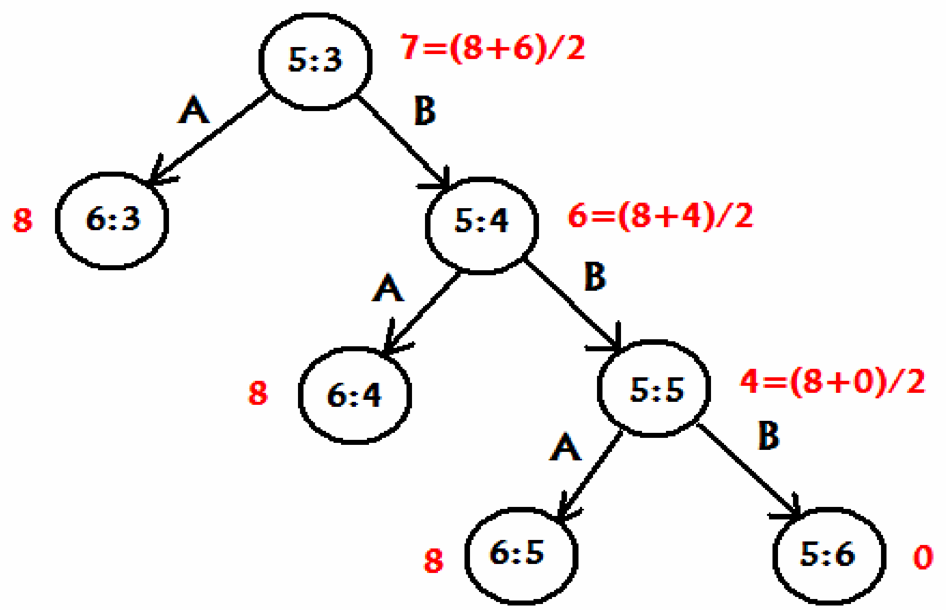
Maksimālais iespējamais atlikušo spēļu skaits ir 3.

Visu iespējamo rezultātu tabula:

1. sp.	2. sp.	3. sp.	Uzvarētājs
A	A	A	A
A	A	B	A
A	B	A	A
A	B	B	A
B	A	A	A
B	A	B	A
B	B	A	A
B	B	B	B

Ietonētās rūtiņas satur iespējas, kas vairs netiek realizētas, jo viens no spēlētājiem, jau ir ieguvis 6 uzvaras. Taču principā visas tabulas rindiņas ir vienādi iespējamas. Tāpēc taisnīgi ir sadalīt laimestu 7:1 A labā.

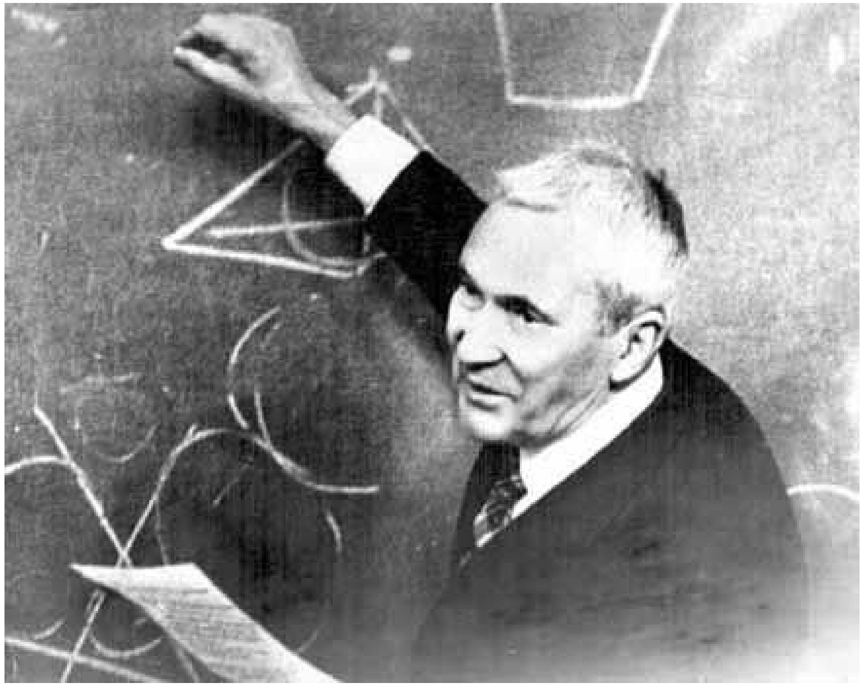
Paskāla atbilde:



16. gadsimts. Itālija. Kardano (*Gerolamo Cardano 1501 – 1576*), Tartalja (*Niccolò Fontana Tartaglia 1500 – 1557*). Kauliņu spēle.

17. – 19. gadsimts. Klasiskā varbūtību teorija. Laimesta varbūtības aprēķins azarta spēlēs. (kāršu spēlēs, ruletē u.c.) Pjērs Fermā (*Pierre de Fermat 1601 - 1665*), Blēzs Paskāls (*Blaise Pascal 1623 - 1662*), Kristians Heigenss (*Christiaan Huygens (1629 – 1695*), Jakobs Bernulli (*Jakob Bernoulli 1654–1705*), Abrahams Muavrs (*Abraham de Moivre 1667 – 1754*), Pjērs Laplass (*Pierre-Simon, Marquis de Laplace 1749 – 1827*), Karls Gauss (*Johann Carl Friedrich Gauß 1777 – 1855*), Simons Puasons (*Siméon-Denis Poisson 1781 – 1840*).

19. g.s. beigas – 20. g.s. sākums. Dabaszinātņu attīstība. Uzdevumi, kurus nespēja atrisināt klasiskā matemātika. Aleksandrs Ļapunovs (*Александр Михайлович Ляпунов 1857 – 1918*), Andrejs Markovs (*Андрей Андреевич Марков 1856 – 1922*)



1933. g. Andrejs Kolmogorovs (*Андрей Николаевич Колмогоров 1903 – 1987*). Основания теории вероятностей.

„Varbūtību teorija kā matemātiska disciplīna var balstīties un tai jābūt balstītai aksiomu sistēmā līdzīgi kā algebrai un ģeometrijai.”

3 Kolmogorova aksiomas.

Vai dabā pastāv nejaušība?

Iespējams, ka notikumu iestāšanās nejaušība izriet no mūsu nezināšanas. Ja spēsim izveidot pilnīgus matemātiskos modeļus nejaušība izzudīs.

Piemēri:

1. monēta
2. gāzes spiediena atkarība no temperatūras

   ideālas gāzes stāvokļa vienādojums: $pV = \frac{m}{\mu} RT$)
3. kosmisko daļiņu reģistrācija
4. radioaktīvas vielas atoma dzīves laiks.

   De Broljī (*Louis de Broglie 1892 – 1987*) viļņu vienādojumi. Daļiņu nav iespējams lokalizēt telpā, tās atrašanās vietu raksturo varbūtību sadalījums.

Varbūtību teorijas aparāta lietošanas nepieciešamība un mērķtiecība.

4, 1, 3 – jā   2 – nē

notikumi → determinēti

notikumi → nejauši, gadījuma notikumi

Spekulatīvs pieņēmums:

pieņemsim, ka katram nejaušam notikumam piemīt objektīva iestāšanās iespējamība, kas saglabājas viena un tā pati, neierobežotu skaitu reižu atkārojot eksperimentu vienos un tajos pašos apstākļos neatkarīgi no iepriekšējo eksperimentu rezultātiem.

Nosauksim to par notikuma iestāšanās varbūtību.

determinēti notikumi:

- iestājas vienmēr – drošs notikums
- neiestājas nekad – neiespējams notikums

gadījuma notikumi – reizēm iestājas, reizēm neiestājas

Varbūtību teorija ir matemātiska disciplīna, kas pēta likumsakarības nejaušās parādībās, ļauj aprēķināt vienu notikumu iestāšanās varbūtības, zinot citu ar tiem saistītu notikumu iestāšanās varbūtības, pēta tās likumsakarības, kas izpaužas, veicot lielu skaitu novērojumu.

Eksperimentu virknes

Bifona (*Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon 1707 – 1788*) eksperiments:

eksperimentu skaits (n)	notikuma A iestāšanās reižu skaits (n_A)	notikuma A iestāšanās frekvence (n_A/n)
4040	2048	0.508

Pīrsonsa (*Karl Pearson 1857 – 1936*) eksperiments:

eksperimentu skaits (n)	notikuma A iestāšanās reižu skaits (n_A)	notikuma A iestāšanās frekvence (n_A/n)
24000	12012	0.5005

Var uzskatīt, ka eksistē skaitlis $p \in [0, 1]$, tāds, ka $\frac{n_A}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} p$

$p = P(A)$ – notikuma *A* iestāšanās varbūtība.

Elementāru notikumu telpa

Veicot nejaušu eksperimentu, tam var būt vairāki iznākumi:

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ – sauksim par elementāriem notikumiem. Elementāru notikumu skaits var būt **galīgs** vai **bezgalīgs** – **sanumurējams** vai **nesanumurējams**.

$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\} = \Omega$ – sauksim par elementāru notikumu telpu.

Visi ω_j – savstarpēji **nesavienojami** un visi kopā aptver visus iespējamos eksāmena iznākumus (veido **pilnu notikumu grupu**).

Piemēri:

1. monētu met vienu reizi

2. spēļu kauliņu met vienu reizi

3. monētu met, līdz uzmests ģerbonis

4. uz labu laimi plaknes apgabalā atzīmē punktu

Notikumi $A = \{\omega_1, ..., \omega_k\}$

Piemēri:

1. uz spēļu kauliņa uzkritis pārskaitlis

2. lai uzmestu ģerboni, monētu jāmet ne vairāk kā 2 reizes

3. punkts trāpījis norādītajā apgabalā

Darbības ar notikumiem

$A \cup B$ „vai”

$AB = A \cap B$ „un”

$\overline{A}$ „ne”

$A \setminus B = A\overline{B}$ „*A* un ne*B*”

$AB = \varnothing$ nesavienojami – neiespējams notikums

Ω drošs notikums

$A \subset B$ no *A* seko *B*

Notikumu algebra

Kopas (elementāru notikumu telpas) Ω apakškopu klasi $\mathfrak{A}$ sauc par algebru (notikumu algebru), ja

1. $\Omega \in \mathfrak{A}$
2. ja $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$, tad $A \cup B \in \mathfrak{A}$
3. ja $A \in \mathfrak{A}$, tad $\overline{A} \in \mathfrak{A}$

No definīcijas seko, ka $\varnothing \in \mathfrak{A}$, jo $\varnothing = \overline{\Omega}$, $AB \in \mathfrak{A}$, jo $AB = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, $A \setminus B \in \mathfrak{A}$, jo $A \setminus B = A\overline{B}$. Visas aprakstītās kopu (notikumu) darbības neizved ārpus algebras. Tātad visu darbību rezultāti ir notikumi.

<u>Piemērs.</u> $\Omega = [0,1)$

1. triviāla algebra: $\mathfrak{A} = \left\{\varnothing, \Omega\right\}$

2. $\mathfrak{A} = \left\{\varnothing, [0,1), [0,\frac{1}{3}), [\frac{1}{3},\frac{2}{3}), [\frac{2}{3},1), [0,\frac{2}{3}), [\frac{1}{3},1), \left\{[0,\frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3},1)\right\}, \right\}$

Notikumu $\sigma-$ algebra.
Algebra ir noslēgta pret galīgu skaitu apvienojuma vai šķēluma operāciju, noslēdzot to pret sanumurējamu skaitu operāciju iegūst $\sigma-$ algebru.
Kopas Ω apakškopu klasi $\mathcal{F}$ sauc par $\sigma-$ algebru, ja $\mathcal{F}$ ir algebra un patvaļīgai bezgalīgai virknei $\{A_j\} \in \mathcal{F}$ izpildās $\left\{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\} \in \mathcal{F}$.

Piezīme. Ja $\Omega \subset \mathbb{R}^1$, tad iespējams izveidot $\sigma-$ algebru, kas sastāv no skaitļu ass intervāliem. Vismaz viena tāda $\sigma-$ algebra eksistē, jo visu iespējamo kopas Ω apakškopu kopa ir $\sigma-$ algebra. Var pierādīt, ka jebkuru divu $\sigma-$ algebru šķēlums ir $\sigma-$ algebra. Ja apskatīsim visas iespējamās $\sigma-$ algebras, kas satur intervālus un atradīsim to šķēlumu, iegūsim minimālo $\sigma-$ algebru, kas satur intervālus. To sauc par Boreļa kopu $\sigma-$ algebru, bet tās elementus par Boreļa kopām. Vispārīgi runājot, Boreļa kopu $\sigma-$ algebra ir kopas Ω apakškopu sistēma, kas satur visas tās kopas, kas iegūtas no intervāliem ar sanumurējama skaita apvienojumu, šķēlumu un papildinājumu palīdzību. Jebkuriem praktiskiem mērķiem tā ir ļoti bagāta apakškopu sistēma, kas pilnīgi pietiekama praktiski jebkuram ar notikumiem sasaistītam uzdevumam.

Varbūtību aksiomas.

1. $P(A) \geq 0$ jebkuram notikumam $A \in \Omega$ *nenegativitāte*
2. $P(\Omega) = 1$ *normētība*
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ja $AB = \varnothing$ *aditivitāte*

<u>Definīcija.</u> Par varbūtību sauc skaitlisku, nenegatīvu, ar vieninieku normētu aditīvu kopas funkciju.

No aksiomām seko **<u>īpašības</u>**:

4. $P(\varnothing) = 0$, jo $P(\Omega) = 1$, $P(\Omega \cup \varnothing) = 1$ un $\Omega\varnothing = \varnothing$ - nesavienojami
5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, jo $A\bar{A} = \varnothing$ $A \cup \bar{A} = \Omega$, $P(A \cup \bar{A}) = 1$
6. Ja $A \subset B$, tad $P(A) \leq P(B)$, jo $B = A \cup B \setminus A$ un $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$
7. $0 \leq P(A) \leq 1$, jo $\varnothing \subset A \subset \Omega$