# Markova ķēdes stacionārais sadalījums

Sākuma sadalījums $p(0) = \begin{pmatrix} p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & \dots \end{pmatrix}$, pārejas varbūtību matrica $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

$$p(0) = \begin{pmatrix} p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$p(1) = \begin{pmatrix} p_1(1) & p_2(1) & p_3(1) & \dots \end{pmatrix}$$

$$p(2) = \begin{pmatrix} p_1(2) & p_2(2) & p_3(2) & \dots \end{pmatrix}$$

.....................................

$$p(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) & p_2(n) & p_3(n) & \dots \end{pmatrix}$$

Vai eksistē robežas $\lim_{n\to\infty} p_j(n)$, $j = 1, 2, \dots$ ?

Pieņemsim, ka eksistē. Tad pie pietiekami lieliem $n$ (robežas apkārtnē) sadalījumi vairs praktiski nemainās.

Būtu jābūt: $p_j(n+1) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(n) p_{ij}$

Varētu būt: $p_j(n+1) \approx p_j(n)$

Tādā gadījumā par stacionārajam sadalījumam jāizpildās

$p^* = \left( p_1^* \quad p_2^* \quad p_3^* \quad \dots \right)$, kuram $p_j^* = \sum_{i=1}^{\infty} p_i^* p_{ij}$ , $\quad j = 1, 2, \dots$

***Teorēma.*** Ja eksistē vesels pozitīvs skaitlis $n_0$, pie kura visi pārejas varbūtību matricas pa $n_0$ soļiem $P^{n_0}$ elementi ir pozitīvi, tad eksistē robežas $\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = p_j^*$ $j = 1, 2, \dots$ Robežvarbūtības nav atkarīgas no ķēdes sākumstāvokļa un ir vienīgais vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_{kj} = x_j \quad j = 1, 2, \dots \\ \sum_{j=1}^{\infty} x_j = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

atrisinājums.

***Pierādījums.***

Apzīmēsim $M_j(n)=\sup_i p_{ij}(n)$ un $m_j(n)=\inf_i p_{ij}(n)$. Acīm redzot,

visiem $k$: $m_j(n)\le p_{kj}(n)\le M_j(n)$.

Saskaņā ar pilnās varbūtības formulu: $p_{ij}(n+1)=\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}p_{kj}(n)$

$$m_j(n+1)=\inf_i p_{ij}(n+1)=\inf_i \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}}_{=1} p_{kj}(n)\ge \inf_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}m_j(n)=m_j(n)$$

aizstāj ar mazāku

$$M_j(n+1)=\sup_i p_{ij}(n+1)=\sup_i \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}}_{=1} p_{kj}(n)\le \sup_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}M_j(n)=M_j(n)$$

aizstāj ar lielāku

Tādējādi

$$m_j(1)\le m_j(2)\le\ldots\le m_j(n)\le\ldots\le M_j(n)\le\ldots\le M_j(2)\le M_j(1)$$

Virknēm $m_j(n)$ un $M_j(n)$ eksistē robežas, ja $n\to\infty$. pierādīsim, ka tās sakrīt.

Izvēlēsimies stāvokļus $i$ un $j$, tā lai izpildītos

$$M_k(n+n_0) = p_{ik}(n+n_0) = \sum_{l=1}^{\infty} p_{il}(n_0)p_{lk}(n)$$

$$m_k(n+n_0) = p_{jk}(n+n_0) = \sum_{l=1}^{\infty} p_{jl}(n_0)p_{lk}(n)$$ atņem

---

$$M_k(n+n_0) - m_k(n+n_0) = \sum_{l=1}^{\infty} (p_{il}(n_0) - p_{jl}(n_0))p_{lk}(n) =$$

$$= \sum_l {}^{+}(p_{il}(n_0) - p_{jl}(n_0))p_{lk}(n) + \sum_l {}^{-}(p_{il}(n_0) - p_{jl}(n_0))p_{lk}(n) \le$$

pozitīvas starpības negatīvas starpības

$$\le M_k(n)\sum_l {}^{+}(p_{il}(n_0) - p_{jl}(n_0)) + m_k(n)\sum_l {}^{-}(p_{il}(n_0) - p_{jl}(n_0)) \qquad (*)$$

Ievērojot, ka pilna summa $\sum_{l=1}^{\infty}(p_{il}(n_0) - p_{jl}(n_0)) = 0 = \sum_l {}^{+} + \sum_l {}^{-}$ redzam, ka

$\sum_j^+ = \sum_j^- \triangleq d_{ij} < 1$ daļa no visas summas, kas vienāda ar 1 $d \triangleq \sup_{i,j} d_{ij} < 1$

No (*) seko $M_k(n+n_0) - m_k(n+n_0) \le d(M_k(n) - m_k(n))$

Ja ķēde izdarīs vēl $n_0$ soļus, koeficients būs $d^2$ utt. Redzams, ka $M_k(n)-m_k(n)\underset{n\to\infty}{\to}0$, bet ievērojot, ka $m_k(n)\le p_{ik}(n)\le M_k(n)$, seko, ka eksistē robežsadalījums, kas nav atkarīgs no sākumstāvokļa *i*.

Varam rakstīt: $p_{ij}(n+1)=\sum_{k=1}^{\infty}p_{ik}(n)p_{kj}$. Ievietojot robežvērtības:

$p_j^*=\sum_{k=1}^{\infty}p_k^*p_{kj}$, turklāt $\sum_{j=1}^{\infty}p_j^*=1$. <u>Tātad robežsadalījuma eksistence pierādīta</u>.

Pierādīsim <u>unitāti</u> (vienādojumu sistēmai (1) nav cita atrisinājuma kā robežvarbūtības).

Pieņemsim, ka kaut kādi $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ir sistēmas (1) atrisinājums. Tad

$$x_j=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_{kj}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}x_l p_{lk}\right)p_{kj}=\sum_{l=1}^{\infty}x_l\sum_{k=1}^{\infty}p_{lk}p_{kj}=\sum_{l=1}^{\infty}x_l p_{lj}(2)=\ldots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_{kj}(n)$$

Pārejot uz robežu, ja $n\to\infty$,

$$x_j = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_j^* = p_j^* \sum_{k=1}^{\infty} x_k = p_j^*$$

=1, jo apmierina sistēmu (1)

Markova ķēdi, kas apmierina teorēmas nosacījumus, sauc par ergodisku.

**Piemēri.**

**1.** $$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

*Scientific Work Place 5.50*

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}p_1^* + \frac{1}{5}p_4^* = p_1^* \\ \frac{1}{2}p_1^* + \frac{1}{3}p_2^* + \frac{1}{5}p_4^* = p_2^* \\ \frac{1}{3}p_2^* + \frac{1}{4}p_3^* + \frac{1}{5}p_4^* = p_3^* \\ \frac{1}{3}p_2^* + \frac{3}{4}p_3^* + \frac{2}{5}p_4^* = p_4^* \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = 1 \end{array}$$

, Solution is: $\left[p_1^* = \frac{3}{19}, p_2^* = \frac{9}{38}, p_3^* = \frac{4}{19}, p_4^* = \frac{15}{38}\right]$

Stacionārais sadalījums: $p_1^* = \dfrac{3}{19},\quad p_2^* = \dfrac{9}{38},\quad p_3^* = \dfrac{4}{19},\quad p_4^* = \dfrac{15}{38}$

**2.** $$P = \begin{pmatrix} 1/10 & 5/10 & 4/10 \\ 6/10 & 2/10 & 2/10 \\ 3/10 & 4/10 & 3/10 \end{pmatrix}$$

**2.** $$P = \begin{pmatrix} 1/10 & 5/10 & 4/10 \\ 6/10 & 2/10 & 2/10 \\ 3/10 & 4/10 & 3/10 \end{pmatrix}$$

*Scientific Work Place 5.50*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{10}p_1^* + \tfrac{6}{10}p_2^* + \tfrac{3}{10}p_3^* &= p_1^* \\ \tfrac{5}{10}p_1^* + \tfrac{2}{10}p_2^* + \tfrac{4}{10}p_3^* &= p_2^* \\ \tfrac{4}{10}p_1^* + \tfrac{2}{10}p_2^* + \tfrac{3}{10}p_3^* &= p_3^* \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* &= 1 \end{aligned}$$

, Solution is: $\left[p_1^* = \tfrac{16}{47}, p_2^* = \tfrac{17}{47}, p_3^* = \tfrac{14}{47}\right]$

Stacionārais sadalījums: $p_1^* = \dfrac{16}{47}, \quad p_2^* = \dfrac{17}{47}, \quad p_3^* = \dfrac{14}{47}$

**3.** $$P=\begin{pmatrix} 8/10 & 1/10 & 1/10 \\ 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**3.** $$P = \begin{pmatrix} 8/10 & 1/10 & 1/10 \\ 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Scientific Work Place 5.50*

$$\begin{aligned} \tfrac{8}{10}p_1^* &= p_1^* \\ \tfrac{1}{10}p_1^* + \tfrac{9}{10}p_2^* &= p_2^* \\ \tfrac{1}{10}p_1^* + \tfrac{1}{10}p_2^* + p_3^* &= p_3^* \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* &= 1 \end{aligned}$$, Solution is: $[p_1^* = 0, p_2^* = 0, p_3^* = 1]$

Stacionārais sadalījums: $p_1^* = 0, \quad p_2^* = 0, \quad p_3^* = 1$

**4.** $$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**4.** $$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Scientific Work Place 5.50*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}p_1^* + \tfrac{1}{2}p_2^* + p_3^* &= p_1^* \\ \tfrac{1}{3}p_1^* + \tfrac{1}{2}p_2^* &= p_2^* \\ \tfrac{1}{3}p_1^* &= p_3^* \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* &= 1 \end{aligned}$$

, Solution is: $\left[p_1^* = \tfrac{1}{2}, p_2^* = \tfrac{1}{3}, p_3^* = \tfrac{1}{6}\right]$

Stacionārais sadalījums: $p_1^* = \dfrac{1}{2}, \quad p_2^* = \dfrac{1}{3}, \quad p_3^* = \dfrac{1}{6}$

**5.** $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

*Scientific Work Place 5.50*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}p_1^* + \tfrac{1}{3}p_2^* &= p_1^* \\ \tfrac{1}{2}p_1^* + \tfrac{2}{3}p_2^* &= p_2^* \\ \tfrac{2}{3}p_3^* + \tfrac{1}{2}p_4^* &= p_3^* \\ \tfrac{1}{3}p_3^* + \tfrac{1}{2}p_4^* &= p_4^* \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* &= 1 \end{aligned}$$

, Solution is: $\left[p_1^* = \frac{2}{5} - p_4^*, p_2^* = \frac{3}{5} - \frac{3}{2}p_4^*, p_3^* = \frac{3}{2}p_4^*\right]$

Stacionārais sadalījums neeksistē