Markova analīzes modeļi

Ir sastopamas situācijas, kurās izpētei pakļaujams process, kas norit diskrētu soļu veidā un savā attīstībā neiziet ārpus noteiktas stāvokļu kopas. Ja reālā situācija pieļauj noteikta līmeņa vienkāršojumus procesa aprakstam, t.i., ļauj to apskatīt kā Markova procesu slēgtā sistēmā, tās un nākotnes attīstības analīzei un prognozēm var tikt izmantotas Markova ķēžu analīzes metodes.

Sākotnēji Markova analīze tika attīstīta, lai paredzētu gāzu uzvedību laboratorijas apstākļos, taču šobrīd tai rasti noderīgi un interesanti lietojumi arī uzņēmējdarbības un sociālajās zinātnēs. Piemēram, ņemot vērā preču izvēles vēsturi klientiem un pašreizējo tirgus daļu produktu grupām, ar tās palīdzību varam paredzēt produktu tirgus daļas nākotnes periodiem un plānot tirgus akcijas. Tāpat arī, ja mūsu rīcībā ir pacientu izveseļošanās statistika, varam paredzēt, kāds būs pašreizējo slimnīcas pacientu statuss nākotnes periodā. Iespējams paredzēt arī tādas situācijas, kā autonomā pieejamo automašīnu skaitu, studējošo sadalījumu studiju programmās nākotnes periodos un daudzas citas situācijas. Markova analīze var palīdzēt saprast, kā sistēma uzvedīsies kādā noteiktā laika periodā. Šāda veida zināšanas var būt noderīgas īstermiņa lēmumiem, piemēram, lai saplānotu darbaspēku, apgādātu noliktavas ar krājumiem, kā arī budžeta plānošanā un ilgtermiņa lēmumiem, piemēram, vietu noteikšanai jaunām iespējām un jaudas (ražotspējas) plānošanai.

Markova analīzei pakļaujamas sistēmas loģika

Kā jau iepriekš minēts, lai izmantotu Markova analīzes metodes, apskatāmajai sistēmai jāpiemīt noteiktām īpašībām un jāpakļaujas noteiktām likumsakarībām. Pirmkārt, sistēmai ir galīgs stāvokļu skaits, tā ir slēgta (t.i., satur visus iespējamos stāvokļus, kuros tā var atrasties), pārejas starp stāvokļiem notiek soļu veidā noteiktā laika periodā, īstenojot vienu soli, pāreja var notikt tikai uz vienu stāvokli. Otrkārt, pārejas starp stāvokļiem nosaka pārejas varbūtības, turklāt to, uz kuru stāvokli notiks pāreja, neietekmē sistēmas iepriekšējā uzvedība, bet tikai tās pašreizējais stāvoklis un pārejas varbūtības. Minētās īpašības piemīt diskrētam Markova procesam jeb ķēdei, kuras matemātiskais raksturojums tiks sniegts vēlāk.

Piemēri sistēmām, kas var tikt aprakstītas kā Markova sistēmas.

Sistēma	Sistēmas stāvokļu raksturojums	Pārejas varbūtību raksturojums
Noteiktas preces tirgus	Klientu daļa, kas pērk preci A, preci B, preci C...	Varbūtība, ka klients pāries no preces A uz preci B,...
TV tirgus daļa	Skatītāju daļa, kas skatās kanālu 1, kanālu 3, kanālu 4...	Varbūtība, ka skatītājs, kurš skatījās kanālu 1, pārslēgsies uz kanālu 4,...
Slimnīca	Reanimācijā, intensīvajā terapijā, atveseļošanās palātās esošo pacientu proporcija	Varbūtības slimnieka pārejai no vienas nodaļas uz citu
Autoparks	Automašīnas, kuras ir teicamā stāvoklī, remontētas, avarējušas...	Bojājumu, remonta kvalitātes varbūtības

Lai ilustrētu Markova analīzes loģisko saturu, apskatīsim vienkāršu piemēru.

Piemērs

Mazā pilsētā darbību ir uzsākušas divas konkurējošas frizētavas, viena pieder Jānim, otra - Pēterim. Septembra beigās ir novērtēts, ka Jāņa frizētavas pakalpojumus izmanto 50% pilsētas iedzīvotāju, Pētera - tāpat. Iepriekšējā pieredze rāda, ka Jānis katru mēnesi ir saglabājis 80% savu klientu, 20% no tiem zaudējot par labu Pētera frizētavai. Savukārt Pēteris ik mēnesi ir saglabājis 70% no saviem klientiem un 30% zaudējis par labu Jānim. Jānis vēlas noteikt, kāda būs viņa tirgus daļa oktobra beigās, kā arī, ar kādu tirgus daļu nākotnē viņš var rēķināties ilgā laika periodā, nemainot darbības stratēģiju (t.i., neizmainoties zaudēto un jauno klientu proporcijai).

Izmantojot vienkāršu loģiku, noteiksim, kāda tirgus daļa atbildīs katrai frizētavai oktobra beigās. Spriedumu vienkāršošanai ierobežosim tirgu ar 100 klientiem. Tas nozīmē, ka katru frizētavu septembra beigās apmeklē 50 klienti. Ja Jānis saglabā 80% no saviem klientiem, tad oktobra beigās viņš var rēķināties ar 40 klientiem ($0.80 \times 50 = 40$), kas paliek uzticīgi viņa kompānijai. Savukārt, ja Pēteris par labu Jānim ir zaudējis 30% no saviem klientiem, tad Jānis oktobra beigās var sagaidīt papildu 15 Pētera klientus ($0.30 \times 50 = 15$). Kopējo Jāņa frizētavas klientu skaitu oktobra beigās veidos saglabāto klientu skaits (40) plus iegūto klientu skaits (15): $40 + 15 = 55$.

Tādā pašā veidā varam noteikt arī Pētera klientu skaitu oktobra beigās. Pēteris saglabā 70% no saviem klientiem ($0.70 \times 50 = 35$) un iegūst 20% Jāņa klientu ($0.20 \times 50 = 10$). Kopējais Pētera klientu skaits oktobra beigās būs $30 + 10 = 45$. Tirgus daļa, kas oktobra beigās sagaidāma katrai frizētavai, ir:

$$\text{Jānis: } \frac{55}{100} = 0.55 \text{ vai } 55\%$$

$$\text{Pēteris: } \frac{45}{100} = 0.45 \text{ vai } 45\%$$

Tādā pašā vaidā varam aprēķināt katras frizētavas sagaidāmo tirgus daļu nākamā perioda beigām.

Parasti, veicot Markova analīzi, aprēķinos tiek izmantoti procentos nevis absolūtu vērtību veidā izteikti lielumi. Arī šoreiz izmantosim tirgus daļas procentus nevis patieso klientu skaitu.

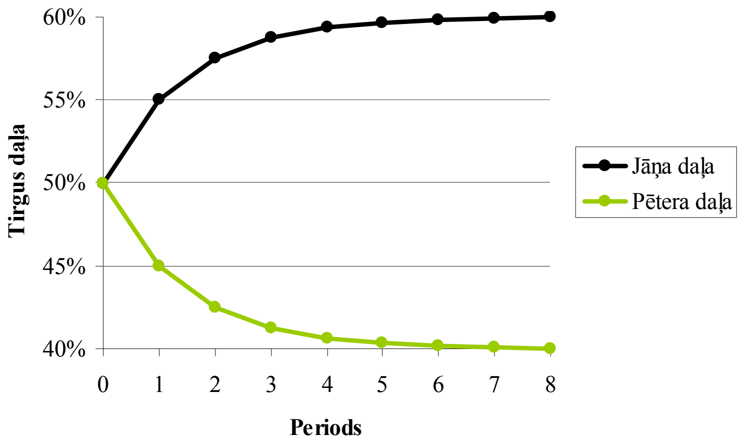
Protams, spēkā paliek pieņēmums, ka klientu atgriešanās, zaudējumu un ieguvumu procents paliek nemainīgs no iepriekšējā perioda. Rezultātā iegūstam, ka novembra beigās Jānim būs 80% no klientiem, kas viņam bija oktobra beigās $0.80 \times 0.55 = 0.440$, un tas iegūs 30% no klientiem, kuri oktobra beigās bija Pēterim $0.30 \times 0.45 = 0.135$. Tā iegūstam Jāņa klientus novembra beigās $0.44 + 0.135 = 0.575$ vai $57\frac{1}{2}$% tirgus daļas. Tas atstāj Pēterim $42\frac{1}{2}$% no tirgus daļas. Lai pārliecinātos, veiksim aprēķinus. Ja Pēteris saglabā 70% no saviem klientiem oktobrī, viņam būtu $0.70 \times 0.45 = 0.315$ no kopējā klientu skaita, un viņš iegūtu $0.2 \times 0.55 = 0.11$ no Jāņa klientiem, iegūstot kopējo skaitu $0.315 + 0.11 = 0.425$ vai $42\frac{1}{2}$%. Abu veikalu tirgus daļām kopā jābūt 100%. Saskaitot abas iegūtās tirgus daļas, iegūstam $57\frac{1}{2}$% + $42\frac{1}{2}$% = 100%.

No iepriekšējiem aprēķiniem redzams, ka katrā nākamajā periodā Jāņa tirgus daļa kļūst lielāka, taču tās pieaugums secīgi samazinās. To nosaka fakts, ka konkurējošās frizētavas tirgus daļa katrā nākamajā periodā kļūst mazāka, un, zaudējot to pašu klientu procentu, ko iepriekšējā mēnesī, skaitliski tā pazaudē mazāku klientu skaitu. Līdzīgi frizētava, kuras tirgus daļa palielinās, zaudējot konstantu klientu procentu, zaudē lielāku skaitu klientu, pieaugot tās tirgus daļai.

Ņemot vērā šos spriedumus varam secināt, ka apskatāmās divu frizētavu tirgus dalīšanas sistēmas darbībā pienāks tāds brīdis, kad klientu skaits, kas pāries no vienas frizētavas uz otru mēneša jeb perioda laikā, būs vienāds. Ja ir iestājusies tāda situācija, saka, ka sistēma sasniegusi stacionāru vai līdzsvara stāvokli. Apskatāmajā piemērā, sasniedzot tirgus līdzsvaru, visos nākamajos periodos (mēnešos) katrai frizētavai saglabāsies nemainīga tirgus daļa (ja, protams, ar kādu akciju vai reklāmas palīdzību kāds no tirgus dalībniekiem neietekmēs klientu izvēli, tādējādi izmainot pārejas varbūtības).

Lai noteiktu tirgus līdzsvara stāvokļa klientu dalījuma proporcijas, viena no iespējamām pieejām ir turpināt secīgi reizināt katra nākamā perioda tirgus daļas ar pārejas varbūtībām, līdz tirgus daļas pārstāj mainīties. Šī pieeja parādīta attēlā, kur redzams, ka, tuvojoties līdzsvara stāvoklim, procentuālā tirgus dalījuma izmaiņas no perioda uz periodu kļūst mazākas un mazākas, līdzsvara brīdī tuvojoties nullei.

Divu frizētavu tirgus daļas izmaiņas



Grafikā redzams, ka, ilgstoši darbojoties, Jāņa frizētava var rēķināties ar 60% klientu, 40% atstājot Pētera uzņēmumam.

Pamatojoties uz loģiskiem spriedumiem, esam ieguvuši atbildes uz piemērā izvirzītajiem jautājumiem, vienlaikus atklājot Markova analīzes būtību. Tagad pievērsīsim uzmanību situācijas matemātiskajam raksturojumam. Apskatīsim, kā ar matemātiskā aparāta palīdzību modelēt attiecīgās problēmas un kādas iespējas tas piedāvā analīzes veikšanai.

Markova ķēde

Īpaši neiedziļinoties gadījuma procesu teorijā, un tieši Markova procesu detalizētā iztirzājumā, šajā sadaļā tiks sniegts modeļu aprakstam un aprēķiniem izmantojamo matemātisko principu raksturojums.

Sākotnēji apskatīsim dažas definīcijas, kas palīdzēs izprast analīzei izmantojamo principu teorētisko bāzi.

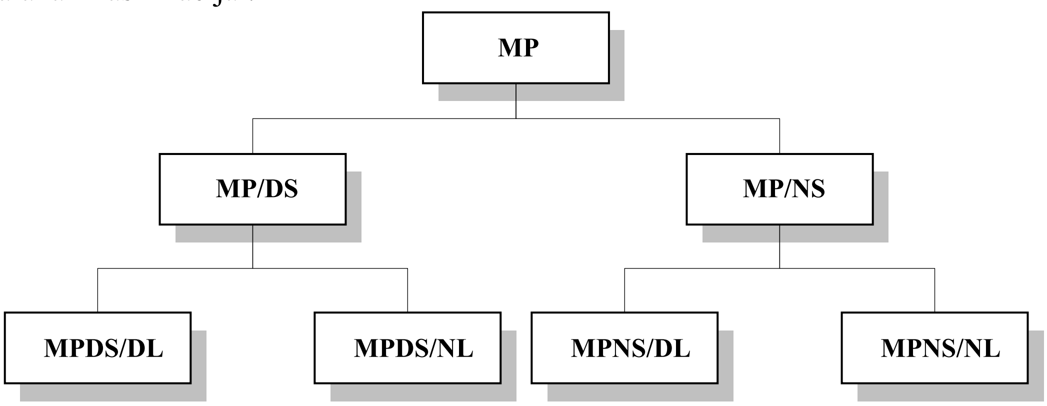
Pieņemsim, ka eksistē sistēma Γ, kurā noris kādu nejaušu faktoru pavadīts process, kas izpaužas šīs sistēmas stāvokļu maiņā.

Def. *Gadījuma process $S(t)$ ir gadījuma skaitļu kopa, kas definēta laikam $t \in T$, kur t - konkrēts laika moments, T - procesa definīcijas apgabals.*

Laiks var būt definēts diskrētu – veselu, nenegatīvu skaitļu vērtību (t=0, 1, 2,...) vai nepārtraukta intervāla ($0 \le t \le \infty$) veidā. Procesa $S(t)$ vērtību laika momentam $t \in T$ sauc par *sistēmas stāvokli.*

Def. *Gadījuma process, kas noris sistēmā, ir Markova process, ja jebkuram laika momentam $t \in T$ sistēmas nākamā stāvokļa varbūtība laika momentam $(t' > t) \in T$ ir atkarīga no tās stāvokļa momentā $t \in T$ un nav atkarīga no tā, kā un kādā veidā sistēma ir nonākusi šajā stāvoklī.*

Markova procesu sauc arī par *procesu bez pēcdarbības*, jo procesa attīstība nākotnē nav atkarīga no tā pagātnes uzvedības. Markova procesu klase ir salīdzinoši plaša, tāpēc, atkarībā no laika un stāvokļu veida raksturojumiem, tie tiek pakļauti tālākai klasifikācijai.



- MP - Markova procesu klase
- MP/DS - Markova process ar diskrētiem stāvokļiem
- MP:DS/DL - Markova process ar diskrētiem stāvokļiem un diskrētu laiku
- MP:DS/NL - Markova process ar diskrētiem stāvokļiem un nepārtrauktu laiku
- MP/NS - Markova process ar nepārtrauktiem stāvokļiem
- MP:NS/DL - Markova process ar nepārtrauktiem stāvokļiem un diskrētu laiku
- MP:NS/NL - Markova process ar nepārtrauktiem stāvokļiem un nepārtrauktu laiku

Def. *Markova procesu sauc par* **procesu ar diskrētu laiku**, *ja laika faktors definēts integru lielumu kopā.*

Def. *Markova procesu sauc par* **procesu ar nepārtrauktu laiku**, *ja laika definīcijas apgabals ir nepārtrauktu lielumu kopa.*

Markova procesu apraksts un ar tiem saistītais matemātiskais aparāts kļūst sarežģītāks katram nākamajam procesa veidam. Šajā nodaļā apskatītā metode attiecināma uz situācijām, kuru raksturojumam izmantojams visvienkāršākais no Markova procesiem - Markova process ar diskrētiem stāvokļiem un diskrētu laiku (MP:DS/DL), saukts arī par Markova ķēdi. Tālāk apskatīsim to sīkāk.

Pieņemsim, ka sistēma var atrasties stāvokļos S_1, S_2, ..., S_n, un stāvokļa maiņa var notikt tikai laika momentos t_1, t_2, ..., t_k ... Sauksim šos laika momentus par *procesa soļiem,* un gadījuma procesu aprakstīsim kā veselu skaitļu 1, 2, ..., k argumenta funkciju.

Apzīmēsim ar $S_i(k)$ notikumu, kad pēc k soļiem sistēma atrodas stāvoklī S_i. Jebkuram k notikumi $S_1(k)$, $S_2(k)$, ..., $S_i(k)$, ..., $S_n(k)$ veido *pilnu notikumu grupu* un ir nesavietojami, t.i., sistēma vienlaikus var atrasties tikai vienā no stāvokļiem un bez minētajiem nav citu stāvokļu, kurus sistēma var pieņemt.

Def. *Nejaušu notikumu secību sauc par Markova ķēdi, ja katrā solī varbūtība pāriet no jebkura stāvokļa S_i uz jebkuru S_j, nav atkarīga no tā, kad un kādā veidā sistēma ir nonākusi stāvoklī S_i.*

Markova ķēdes (MK) formālam aprakstam tiek izmantotas stāvokļu varbūtības, apkopotas *stāvokļa varbūtību vektorā* π, un pārejas *varbūtību matrica* P.

Pieņemsim, ka sistēma pēc jebkura k-tā soļa var būt vienā no stāvokļiem S_i .Tas nozīmē, ka izpildās viens no pilnās grupas notikumiem $S_1(k)$, $S_2(k)$, ..., $S_n(k)$. Stāvokļu varbūtības apzīmēsim šādi:

- pēc 1. soļa:
  $p_1(1) = P(S_1(1))$, $p_2(1) = P(S_2(1))$, ..., $p_n(1) = P(S_n(1))$ jeb vektora formā
  $\pi(1) = (p_1(1), p_2(1),..., p_n(1))$;
- pēc 2. soļa:
  $p_1(2) = P(S_1(2))$, $p_2(2) = P(S_2(2))$, ..., $p_n(2) = P(S_n(2))$)) jeb vektora formā
  $\pi(2) = (p_1(2), p_2(2),..., p_n(2))$;
- pēc k-tā soļa:
  $p_1(k) = P(S_1(k))$, $p_2(k) = P(S_2(k))$, ..., $p_n(k) = P(S_n(k))$)) jeb vektora formā
  $\pi(k) = (p_1(k), p_2(k),..., p_n(k))$.

Katram solim k izpildās nosacījums

$$p_1(k) + p_2(k) + ... + p_n(k) = 1, \tag{4.1}$$

kas garantē, ka sistēma noteikti atrodas kādā no fiksētajiem stāvokļiem.

Katrā solī eksistē kādas varbūtības pārejai no jebkura stāvokļa jebkurā citā, vai varbūtība uzkavēties šajā stāvoklī. Šīs varbūtības sauksim par *pārejas varbūtībām*. Lai definētu pārejas varbūtību matricu, Markova procesu apskatu sašaurināsim vēl vairāk. Markova ķēdes var dalīt homogēnās MK - ja pārejas varbūtības nav atkarīgas no soļa, t.i., paliek nemainīgas visā sistēmas darbības laikā, un nehomogēnās MK - pretējā gadījumā. Turpmāk apskatīsim homogēnas Markova ķēdes.

Pieņemsim, ka sistēma var atrasties vienā no n iespējamiem stāvokļiem S_1, ..., S_n.

Apzīmēsim:

- P_{ij} - pārejas varbūtību viena soļa laikā no stāvokļa S_i uz S_j.
- P_{ii} - sistēmas aiztures varbūtību stāvoklī S_i.

Tad pārejas varbūtību matrica uzrakstāma šādi:

$$P = \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ P_{n1} & P_{n1} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nn} \end{Vmatrix}$$

(4.2)

izpildoties nosacījumiem:

$$0 \le P_{ij} \le 1 \quad \text{un} \quad \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \tag{4.3}$$

Tādā veidā k-tā matricas rinda satur varbūtības pārejai no k-tā stāvokļa uz viņu pašu un uz jebkuru citu sistēmas stāvokli atbilstoši kolonnas numuram. Nosacījumi (4.3) garantē, ka pāreja noteikti tiks veikta.

Matemātiskā risinājuma principi

Ja ir zināma matrica P un sistēmas sākuma stāvoklis π (0) = (p_1(0), p_2(0),..., p_n(0)), tad var atrast stāvokļu varbūtības π (k) =(p_1(k), p_2(k), ..., p_n(k)) pēc jebkura k-tā soļa. Stāvokļa varbūtības katrā nākamajā sistēmas solī jeb periodā iegūstamas, iepriekšējā soļa jeb perioda stāvokļa varbūtību vektoru reizinot ar pāreja varbūtību matricu. Tādējādi, sākot no $\pi(0)$, k reizināšanas darbību rezultātā tiks iegūts $\pi(k)$. Šo pašu rezultātu var iegūt, sareizinot sākuma stāvokļa vektoru ar pārejas varbūtību matricu, kas kāpināta k-tajā pakāpē.

Ilustrēsim to šādi:

$$\begin{aligned} &\pi (1) = \pi (0)P, \\ &\pi (2) = \pi (1)P = \pi (0)PP = \pi (0)P^2, \\ &\pi (3) = \pi (2)P = \pi (0)P2\ P = \pi (0)P^3, \\ &..... \\ &\pi (k) = \pi (k\text{-}1)P = \pi (0)P^{k-1}\, P = \pi (0)P^k. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ja atsaucas uz nodaļas sākumā izskatīto piemēru, izmantojot Markova ķēdes procesa matemātiskā apraksta principus, sistēmas stāvokļu varbūtības nākotnes periodos būtu iegūstamas, neizplūstot garos spriedumos. Turklāt, iepriekšējie spriedumi kļūtu arvien nogurdinošāki, palielinoties soļu skaitam, savukārt izmantojot (4.4) matricu reizināšanas principu, varbūtību aprēķins jebkuram solim (sevišķi, ja aprēķinus veic datorizēti) ir ātrs un ērts.

Izskatītajā piemērā runājām par sistēmas stacionāro jeb līdzsvara stāvokli. Arī tā atrašanai var izmantot matricu reizināšanas aprēķinus, fiksējot tās stāvokļu varbūtības, kas, procesam nonākot noteiktā attīstības stadijā, kļūst nemainīgas. Taču var tikt izmantots arī cits princips – tīri matemātisks līdzsvara stāvokļa aprēķins.

Ja ar $\pi^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*)$ apzīmē stāvokļa varbūtību vektoru, kas tālākajā sistēmas attīstības gaitā paliek nemainīgs, tad pēc tā sasniegšanas katram nākamajam solim izpildās vienādība:

$\pi^* P = \pi^*$ jeb

$$(p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & ... & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & ... & P_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ P_{n1} & P_{n2} & ... & P_{nn} \end{pmatrix} = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*). \tag{4.5}$$

Izmantojot šo faktu un nosacījumu (4.1), no matricu vienādojuma iegūstama lineāra vienādojumu sistēma, kuru atrisinot, tiek noteiktas stacionārā jeb līdzsvara stāvokļa varbūtības p_i^*.

Markova analīzes risināmie jautājumi

Tagad, zinot Markova ķēdes procesa attīstības matemātiskā apraksta principus, varam izskatīt dažus tās izmantošanas piemērus.

Piemērs

Apskatīsim šādu situāciju. Pieņemsim, ka katrā no pilsētas divām lidostām atrodas kādas automašīnu nomas aģentūras biroji. Aģentūras klienti ir tiesīgi nogādāt atpakaļ iznomāto automašīnu vai nu vienas, vai otras lidostas nomas birojā neatkarīgi no tā, kurā no lidostām automašīna iznomāta. Pieņemsim, ka klients-noma ir noslēgta sistēma: visas automašīnas tiek nomātas no vienas vai otras lidostas nomas biroja. Gadījumi, kad automašīna tiek nomāta tikai vienam virzienam uz kādu citu pilsētu vai nogādāta atpakaļ no citas pilsētas, tiek izslēgti no sistēmas un apskatīti atsevišķi. Turklāt tiek uzskatīts, ka automašīnas tiek nomātas vienai dienai un līdz dienas beigām tiek nogādātas atpakaļ vienā vai otrā nomas punktā. Automašīnu nomas aģentūras vadītājs ir apkopojis autonomas darbības statistiku un ieguvis šādu informāciju: 70% automašīnu, kas iznomātas lidostas A nomā, tiek nogādātas atpakaļ šajā pašā lidostā, savukārt atlikušie 30% tiek nogādāti lidostas B nomas punktā; 10% no automašīnām, kas iznomātas lidostas B nomā, tiek nogādātas atpakaļ lidostā A, 90% no tām tiek nogādātas atpakaļ lidostā B. Šie dati ir arī apkopoti tabulā pārejas varbūtību veidā.

Pārejas varbūtības p_{ij}		Nogādātas atpakaļ		$\sum p_{ij}$
		Lidosta A	Lidosta B	
Iznomātas no	Lidosta A	0.70	0.30	1.00
	Lidosta B	0.10	0.90	1.00

Tā kā ir noteikts, ka visas iznomātās automašīnas ir jānogādā atpakaļ vienā no divām lidostām, tad rindu kopējā vērtība ir 1.00 vai 100%. Pirmā vērtība tabulā, 0.70, atspoguļo automašīnu, kas tiks iznomātas un nogādātas atpakaļ lidostā A, proporcijas prognozi. Otrā vērtība atbilstošajā rindā, 0.30 atspoguļo automašīnu, kas tiks iznomātas lidostā A, bet nogādātas atpakaļ lidostā B, proporcijas prognozi. Līdzīgi interpretējama arī otrā tabulas rinda, kas attiecas uz lidostā B iznomātajām automašīnām.

Automašīnu nomas aģentūras vadītājam radušies vairāki jautājumi attiecībā uz sistēmas darbību:

1. Kāda automašīnu daļa tiks iznomāta katrā lidostā kādā noteiktā laika posmā (piemēram, nākamajās septiņās dienās)? Šāda veida informācija palīdzētu vadītājam plānot iznomājamo automašīnu skaitu katrā vietā.
2. Kāda tendence sagaidāma kopējam nogādāto atpakaļ automašīnu skaitam katrā no nomas punktiem ilgākā laika periodā? Šāda veida informācija varētu būt noderīga, izlemjot, kuru no divām nomas vietām vajadzētu izvēlēties automašīnu apkopes un remonta punkta izveidei.

Sistēmas uzvedība īsā laika periodā ir atkarīga tikai no sistēmas stāvokļa pašreizējā periodā un pārejas varbūtībām. Automašīnu nomas piemērā tas ir redzams pārejas matricā, ka 70% no lidostā A iznomātajām automašīnām tiks nogādātas atpakaļ lidostā A, 30% tiks nogādātas atpakaļ lidostā B. Līdzīgi 10% automašīnu, kas iznomātas lidostā B, tiks nogādātas atpakaļ lidostā A un 90% lidostā B. Tātad, atdoto automašīnu skaits katrā vietā, jebkurā laika periodā ir funkcija no pārejas varbūtībām un automašīnu skaita, kas iznomāts katrā vietā iepriekšējā laika periodā. Zinot automašīnu skaitu katrā vietā dotajā laika momentā, ar sakarību (4.4) palīdzību varam noskaidrot sistēmas uzvedību nākamajā vai aiznākamajā laika periodā.

Sistēmas uzvedību ilgstošas darbības rezultātā neietekmē sākotnējais automašīnu skaits katrā nomā; kā to garantē līdzsvara stāvokļa īpašība (4.5), katrā nomā atdoto automašīnu proporcija ilgākā laika periodā pieņems vienu un to pašu vērtību, neņemot vērā sākuma nosacījumus. (Tiesa, ne visām sistēmām ir tendence laika gaitā stabilizēties. Dažas sistēmas savā darbībā cikliski virzās pa riņķi, turp un atpakaļ, savukārt dažu darbība saplūst vienā vienīgā absorbējošā stāvoklī.)

Stāvokļu varbūtības atsevišķiem laika periodiem. Apskatīsim matemātiskā risinājuma principu izmantojumu sistēmas darbības analīzei atsevišķos laika posmos – īsā laika periodā. Piemēram, pašreizējo jeb sākuma stāvokli raksturo vektors ar diviem iespējamiem stāvokļu veidiem, no kuriem viens raksturo automašīnas atrašanās iespēju lidostā A, otrs – lidostā B. Piemēram, stāvokļa vektors (1 0) automašīnu nomas piemērā var atainot situāciju – automašīna, par kuras pārvietošanos starp sistēmas stāvokļiem interesējamies, atrodas lidostā A, vai arī visas automašīnas sākotnēji atrodas lidostā A. Līdzīgi, ja sākuma perioda atskaite sākas no stāvokļa B, to attēlo kā (0 1). Vektora komponentes var raksturot gan atsevišķa sistēmas elementa, gan arī visu elementu kopuma atrašanās iespēju noteiktā stāvoklī.

Ja sistēmai ir trīs stāvokļu veidi, tad izpētes sākuma brīdis var tikt izteikts trijos veidos atkarībā no sākuma stāvokļa:

Sākuma stāvoklis	**Stāvokļa vektors**
A	(1 0 0)
B	(0 1 0)
C	(0 0 1)

Lai noteiktu stāvokļa maiņu viena vai noteikta skaita periodu laikā, izmantojam sakarības (4.4). Vektora un matricas reizināšana paredz, ka vektora rindas elementi tiek sareizināti ar matricas pirmās kolonnas elementiem un saskaitīti, lai iegūtu jaunā vektora pirmo komponenti jeb pirmā stāvokļa daļu nākamajam periodam; sareizināti ar otrās kolonnas elementiem un saskaitīti, lai iegūtu otro komponenti jeb otrā stāvokļa daļu utt. Piemēram, aprēķināsim stāvokļu varbūtības pirmajam periodam automašīnu nomas piemērā, ja izejas punkts ir A.

$$(1 \quad 0)\times\begin{pmatrix}0{,}70 & 0{,}30\\ 0{,}10 & 0{,}90\end{pmatrix}=\begin{matrix}1\times 0.70 & 1\times 0.30\\ +(0\times 0.10) & +(0\times 0.90)\end{matrix}=\begin{pmatrix}0{,}70 & 0{,}30\end{pmatrix}$$

Šīs vērtības, protams, ir pārejas matricas pirmās rindas elementi. Atradīsim stāvokļu varbūtības otrajam un trešajam periodam.

Tā kā pirmā perioda varbūtības ir 0.70 un 0.30, tad otrajam periodam varam aprēķināt:

$$\begin{pmatrix}0{,}70 & 0{,}30\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0{,}70 & 0{,}30\\ 0{,}10 & 0{,}90\end{pmatrix}=\begin{matrix}0.70\times(0.70) & 0.70\times(0.30)\\ +0.30\times(0.10) & +0.30\times(0.90)\end{matrix}=\begin{pmatrix}0{,}52 & 0{,}48\end{pmatrix}$$

Tas nozīmē, ka otrā periodā 52% automašīnu tiek prognozēti stāvoklim A un 48% tiek prognozēti stāvoklim B. Šo skaitļu interpretācija var būt divējāda atkarībā no mūs interesējošā jautājuma. Pirmkārt, automašīna, kas šobrīd atrodas lidostas A nomā, pēc divām dienām tur atradīsies ar varbūtību 0,52, savukārt ar varbūtību 0,49 tā būs lidostas B nomā. Otrkārt, ja sākotnēji visas automašīnas atrodas lidostas A nomā, pēc divām dienām tur atradīsies tikai 52% no tām, pārējās atradīsies lidostā B.

Tālāk var aprēķināt arī trešā perioda attiecību:

$$[0.52\ 0.48]\begin{bmatrix}0.70 & 0.30\\ 0.10 & 0.90\end{bmatrix} = \begin{matrix}0.52\times(0.70) & 0.52\times(0.30)\\ +0.48\times(0.10) & +0.48\times(0.90)\end{matrix} = \begin{pmatrix}0{,}412 & 0{,}588\end{pmatrix}$$

Iegūtās trešā stāvokļa varbūtības ir interpretējamas līdzīgi kā iepriekš.

Ja mēs turpinātu secīgi reizināt katra perioda stāvokļu vektoru ar pārejas varbūtību matricu, pēc noteikta soļu skaita mēs atklātu, ka sistēmā iestājies stacionārs režīms, t.i., stāvokļu varbūtības ir nostabilizējušās, un ir sasniegts līdzsvara stāvoklis. Līdzsvara stāvoklis tiek sasniegts neatkarīgi no kādām stāvokļu proporcijām jeb no kura stāvokļa sistēma ir uzsākusi darbību. Minētie apstākļi vienīgi var ietekmēt soļu skaitu līdz līdzsvaram.

Līdzsvara sadalījums. Sistēmas līdzsvara sadalījuma interpretācijas var sniegt atbildes uz vairākiem ar sistēmas darbību saistītiem jautājumiem, tāpēc ne pārāk ērti katru reizi to vērtības iegūt iteratīvā secīgu reizinājumu ceļā. Tālāk uz autonomas piemēra bāzes izskatīsim stacionārā stāvokļa jeb sistēmas līdzsvara atrašanas algoritmu, izmantojot sakarības (4.5) un (4.1).

Matemātiskā risinājuma pamatā ir vienādojumi, kuri tiek atrasti no pārejas varbūtību matricas (4.5). Tā kā stāvokļi ir savstarpēji atšķirīgi un kopīgi izsmeļoši, tad stāvokļu varbūtību summai ir jābūt 1, un šī prasība iepriekšējiem pievieno vienādojumu (4.1). Tādā veidā iegūstam vienādojumu sistēmu, kuru var izmantot, lai atrastu sistēmas stāvokļu līdzsvara sadalījumu.

$$\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}70 & 0{,}30\\ 0{,}10 & 0{,}90\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix},$$

$$A + B = 1.$$

Kur

$$0.70A + 0.10B = A$$
$$0.30A + 0.90B = B$$
$$A + B = 1.$$

Tā kā atrastajā sistēmā ir divi nezināmie un trīs vienādojumi, tad viens no vienādojumiem ir lieks, un var tikt izslēgts. Parasti netiek izslēgts tiešās atkarības vienādojums. Patvaļīgi izvēlamies izslēgt B vienādojumu. Mums paliek:

$$0.70A + 0.10B = A$$
$$A + B = 1.$$

No otrā vienādojuma izsakām B → $B = 1 - A$

Pēc tam izteikto B ievietojam pirmajā vienādojumā un atrodam A.

$$A = 0.70A + 0.10(1 - A) =$$
$$= 0.70A + 0.10 - 0.10A =$$
$$= 0.60A + 10$$

$$A - 0.60A = 0.10$$
$$0.40A = 0.10$$
$$A = \frac{0.10}{0.40} = 0.25$$

Kad atrasts A, atliek noteikt B:

$$B = 1 - A$$
$$B = 1 - 0.25 = 0.75$$

Esam ieguvuši līdzsvara sadalījumu jeb sadalījumu, kas raksturo automašīnu skaitu katras lidostas nomas punktā, nomas aģentūrai darbojoties ilgā laika periodā. Tas nozīmē, ka, šī brīža automašīnu nogādāšanas atpakaļ tendencei (kas fiksēta kā pārejas varbūtības) paliekot nemainīgai, lidostas A nomas punktā vidēji vienmēr atradīsies 25% no aģentūras automašīnām, savukārt atlikušie 75% atradīsies lidostā B.

Līdzsvara sadalījums, kā jau iepriekš teikts, ilgstošas darbības rezultātā tiek sasniegts neatkarīgi no tā, kāds ir sistēmas sākuma stāvoklis. Gan gadījumā, ja sākotnēji lidostas A nomā būtu 400 automašīnas un lidostas B nomā 300 automašīnas, gan, ja autonoma darbību uzsāks, visām 700 automašīnām atrodoties lidostā A, vidējais sagaidāmais automašīnu skaits katrā lidostā iegūstams kā kopējā automašīnu skaita (700) reizinājums ar katrai lidostai atbilstošo līdzsvara stāvokļa proporciju:

$$A = 700(0.25) = 175$$

$$B = 700(0.75) = 525.$$

Jāņem vērā, ka visas automašīnas paliek sistēmā, neviena jauna klāt nenāk, un automašīnas netiek transportētas starp lidostām.

Līdzsvara sadalījuma atrašana kļūst sarežģītāka, palielinoties sistēmas stāvokļu skaitam, jo palielinās atrisināmā vienādojumu sistēma. Tālāk apskatīsim trīs stāvokļu sistēmas gadījumu.

Piemērs

Sarežģīsim nodaļas sākumā izskatīto piemēru par mazpilsētas frizieru konkurenci. Bez jau minētajām Jāņa un Pētera frizētavām mazpilsētas skaistumkopšanas pakalpojumu tirgu papildināsim ar trešo frizētavu, kas pieder Oskaram. Kad Oskars jau kādu laiku ir darbojies minētajā tirgū un ieguvis klientu uzticību, viņš sāk interesēties uz kādu tirgus daļu var cerēt nākotnē, ja konkurences situācija paliek nemainīga. Izvērtējot klientu lojalitāti pret tirgus dalībniekiem, Oskars apkopoja šādu informāciju: Jānis katru mēnesi saglabā 80% no saviem klientiem, par labu katram konkurentam zaudējot 10% no klientiem. Pēteris saglabā 70% no saviem klientiem, zaudējot 20% par labu Jānim un 10% par labu Oskaram. Oskars saglabā 90% no saviem klientiem, zaudējot 10% par labu Jānim. Pārejas varbūtību matrica attēlojama šādi:

$$\begin{array}{lll} & & \text{uz} \\ & & \text{Jānis Pēteris Oskars} \\ \text{no} & \begin{array}{l}\text{Jānis}\\ \text{Pēteris}\\ \text{Oskars}\end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Lai noskaidrotu, kāds ir sagaidāmais tirgus dalījums, tālāk noteiksim tirgus līdzsvara stāvokli trim frizētavām, izmantojot sakarības (4.5) un (4.1).

Pirmais solis. Sastādām līdzsvara vienādojumus:

$$\begin{pmatrix} J & P & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & P & O \end{pmatrix},$$

$$J + P + O = 1$$

izmantojot vektora un matricas reizināšanas principus, iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$0.8J + 0.2P + 0.1O = J$$
$$0.1J + 0.7P + 0O = P$$
$$0.1J + 0.1P + 0.9O = O$$
$$J + P + O = 1$$

Otrais solis. Pārveidojam vienādojumus standarta formā.

$$-0.2J + 0.2P + 0.1O = 0$$
$$0.1J - 0.3P + 0O = 0$$
$$0.1J + 0.1P - 0.1O = 0$$
$$J + P + O = 1$$

Trešais solis. Tā kā jebkurš no pirmajiem trīs vienādojumiem var tikt izteikts no abiem pārējiem, tie nav neatkarīgi vienādojumi. Ir jāizslēdz viens no trim vienādojumiem, jo visu informāciju, ko tie satur, var iegūt no diviem atlikušajiem vienādojumiem. Tādēļ no sistēmas izsvītrojam vismazāk vēlamo vienādojumu. Šajā gadījumā tas ir otrais vienādojums, jo koeficients 0.3 nav ērts reizināšanai.

Ceturtais solis. Lineāro vienādojumu sistēmu var atrisināt, izmantojot dažādas algebriskās metodes, piemēram, substitūcijas vai izslēgšanas metodi, taču šai gadījumā sistēmas atrisinājuma atrašanai izmantosim Krāmera metodi. Tāpēc tālāk atlikusī vienādojumu sistēma tiek apskatīta matricu formā.

$$\begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J \\ P \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Izmantojot Krāmera formulas, katru nezināmā vektora komponentes vērtību iegūst, tai atbilstošo determinantu dalot ar sistēmas determinantu. (Vektora komponentei atbilstošais determinants iegūstams, sistēmas determinantā nomainot attiecīgo kolonnu ar brīvo locekļu vērtībām.)

$$J = \frac{\begin{Vmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} -0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}} = \frac{-0.03}{-0.08} = 0.375$$

$$P = \frac{\begin{Vmatrix} -0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & -0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} -0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}} = \frac{-0.1}{-0.8} = 0.125$$

$$O = \frac{\begin{Vmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} -0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}} = \frac{-0.4}{-0.8} = 0.500$$

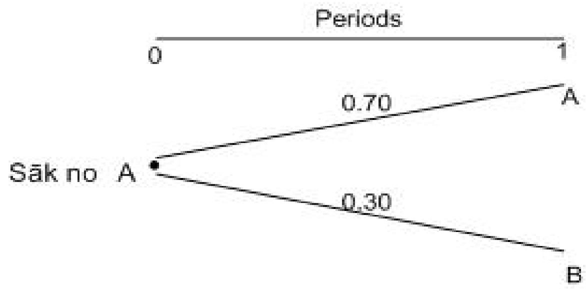
Atrastās līdzsvara tirgus daļas ir:

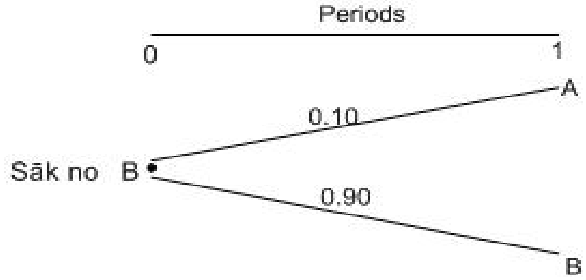
Jānim = 37,5%
Pēterim = 12,5%
Oskaram = 50,0%

Iegūtā informācija liecina, ka, piekopjot līdzšinējo uzņēmuma politiku, un, ja gadījumā konkurenti nesāk veikt pasākumus klientu pievilināšanai, Oskaram paredzams kļūt par tirgus līderi. Ja ir šāda prognoze, viņa interesēs būtu saglabāt situāciju pēc iespējas nemainīgu. Savukārt, ja šī informācija nonāktu Jāņa vai Pētera rīcībā, viņu labākā reakcija būtu, nekavējoties veikt pasākumus klientu piesaistei.

Bez jau minētās informācijas, veiktā analīze dod iespēju prognozēt arī citus ar uzņēmuma darbību saistītus rādītājus. Piemēram, ja ir zināms kopējais potenciālo klientu skaits mazpilsētā un vidējais peļņas rādītājs no katra klienta, Oskars var prognozēt savu vidējo nākotnes peļņu pārejas perioda ietvaros. Pieņemot, ka mazpilsētā frizētavu pakalpojumus izmanto vidēji 1000 cilvēku mēnesī, katram apmeklējumam vidēji tērējot Ls10, Oskara sagaidāmie mēneša ieņēmumi būs 0.5*1000*10=5000 Ls.

Koka diagramma (*Tree Diagramm*). Sistēmas pāreju secīgu periodu laikā detalizētai izpētei ērti izmantot tā saucamo koka diagrammu, kas būtībā ir sistēmas iespējamo pāreju no stāvokļa uz stāvokli vizuāls attēlojums. Koka zari atspoguļo iespējamos pāreju variantus atsevišķos periodos, fiksējot tām atbilstošās nosacītās varbūtības. Lai ilustrētu koka diagrammas izmantojumu, atgriezīsimies pie autonomas piemēra. Atgādināsim, ka apskatītajā piemērā no lidostas A iznomāto automašīnu iespējams atdot gan lidostā A, gan lidostā B, kas realizējas attiecīgi ar varbūtībām 0.70 un 0.30. Tāpat arī, ja automašīna tiek iznomāta no lidostas B, iespēja to atdot lidostā A tiek realizēta ar varbūtību 0.10, lidostā B - ar varbūtību 0.90. Tādējādi katram iespējamam sākuma punktam (nomas vietai) ir divas iespējamās atdošanas vietas. Tālāk to attēlosim koka diagrammā.





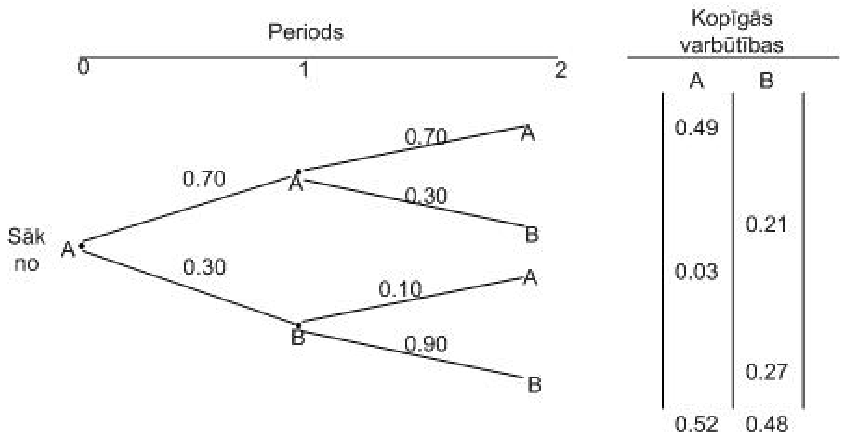
Ja tiek iesaistīti divi vai vairāk periodu, tad koks kļūst sarežģītāks, bet tas joprojām ir informatīvs, ja tiek atspoguļotas kopīgās varbūtības katram zaram. Tālāk apskatīsim koka diagrammu diviem periodiem.

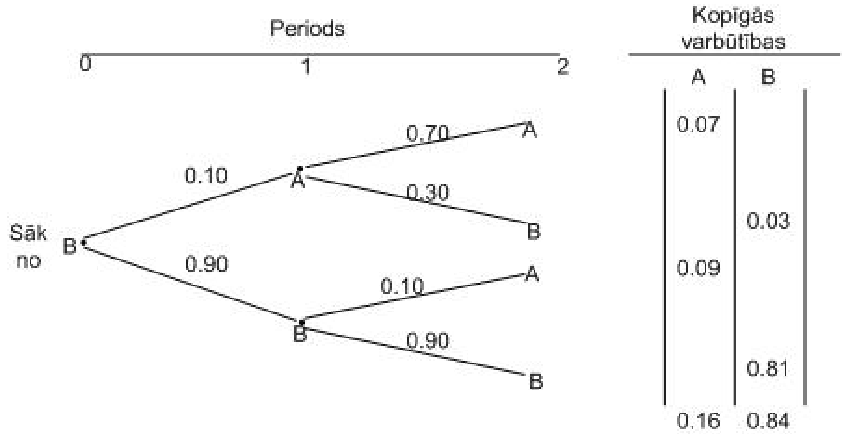
Piemērs

Kāda ir varbūtība, ka automašīna, kas pašreiz iznomāta lidostā A, pēc divām dienām atradīsies lidostas A nomā? Kāda varbūtība, ka divas dienas pēc kārtas tā tiks nogādāta atpakaļ lidostas A nomā? Cik daudz automašīnas būs lidostā A pēc divām dienām (diviem periodiem), ja šajā nomas punktā patlaban atrodas 100 automašīnas, savukārt nomas punktā B ir 80 automašīnas?

Lai atrastu atbildes uz uzdotajiem jautājumiem, konstruēsim koka diagrammu diviem periodiem. Virs katra koka zara, kas savieno stāvokļus, starp kuriem veikta pāreja, fiksēsim attiecīgās pārejas varbūtības. Divu periodu pārejas ceļu veido divi secīgi zari, tāpēc ceļa kopējā varbūtība iegūstama kā secīgo varbūtību reizinājums. Piemēram, automašīna, kas sākuma brīdī iznomāta lidostā A, turpat tiks atdota un tad vēlreiz iznomāta un nogādāta atpakaļ tajā pašā lidostā A ar varbūtību $0.70 \times 0.70 = 0.49$. (Šo varbūtību var interpretēt arī kā to daļu no sākotnēji lidostā esošajām automašīnām, kas divus periodus pēc kārtas tiks iznomātas un nogādātas atpakaļ lidostā A.) Tādējādi esam ieguvuši atbildi uz piemēra otro jautājumu. Lai atbildētu uz pirmo, jāņem vērā vēl arī tas gadījums, kad automašīna pirmajā dienā tiek nogādāta atpakaļ lidostā B, tad atkal iznomāta un otrajā periodā nogādāta atpakaļ lidostā A. Šo iespēju koka diagrammā apraksta ceļš A-B-A, un tā ir $0.30 \times 0.10 = 0.03$. Lai noteiktu, kāda ir varbūtība, ka automašīna pēc divām dienām atradīsies lidostā A, ja tā tur ir atradusies sākumā, jāņem vērā gan ceļš A-A-A, gan A-B-A un jāsaskaita tiem atbilstošās varbūtības. Atbilde uz pirmo piemēra jautājumu ir: minētā automašīna pēc divām dienām lidostā A atradīsies ar varbūtību 0.49 + 0.03 = 0.52.

Šis skaitlis tāpat raksturo to automašīnu proporciju, kuras sākotnēji iznomātas no lidostas A un pēc diviem periodiem atkal tur atrodas - 52%.





Izmantojot abu attēlā redzamo diagrammu informāciju, atbildēsim uz piemēra trešo jautājumu. Blakus diagrammām ailēs fiksētās kopīgās varbūtības atklāj, ka pēc diviem periodiem lidostā A atgriezīsies 52% automašīnu, kas sākotnēji iznomātas lidostā A, un 16% automašīnu, kas sākotnēji tika iznomātas lidostas B nomā. Sareizinot šīs varbūtības ar sākotnējo automašīnu skaitu katrā no nomas punktiem, iegūsim sagaidāmo automašīnu skaitu lidostā A otrā perioda beigās, tas ir, $100 \times (0.52) + 80 \times (0.16) = 64.8$ automašīnas. Desmitdaļas (0.8) nenozīmē, ka automašīna tiks atdota bez durvīm vai bampera. 64.8 atspoguļo vidējo automašīnu skaitu. Patiesais automašīnu skaits, protams, būs vesela vērtība, kas ir tuva skaitļiem – 64, 65, 66.

Koka diagrammas priekšrocības ir:

- tā ir viegli veidojama;
- vizuāls modelis, kas ilustrē, kā tiek kombinētas, apvienotas pārejas varbūtības, lai detalizēti pētītu sistēmas uzvedību nelielā laika periodā.

Trūkums:

- Ja sistēmai ir vairāk par diviem, trim periodiem, diagrammas zaru skaits būtiski palielinās, kas padara šo metodi nepraktisku. Piemēram, 5 periodiem atbilst 32 beigu zari, un 6 periodiem atbildīs 64 beigu zari.

Šo pašu metodi, kuru izmantojām, lai analizētu pārejas varbūtību matricu ar diviem stāvokļiem, var izmantot lielākām problēmām ar trim un vairāk stāvokļiem.