# Markova procesu klasifikācija

| | | stāvokļu telpa | |
|---|---|---|---|
| | | diskrēta | nepārtraukta |
| laiks | diskrēts | Markova ķēdes ar diskrētu laiku | Markova procesi ar diskrētu laiku |
| | nepārtr. | Markova ķēdes ar nepārtrauktu laiku | Markova procesi ar nepārtrauktu laiku |

| | | stāvokļu telpa | |
|---|---|---|---|
| | | diskrēta | nepārtraukta |
| laiks | diskrēts | matricu algebra | trūkst reālu modeļu. Galīgā laikā iespējama bezgalīgi maza stāvokļa maiņa |
| | nepārtr. | diferenciāl-vienādojumi | stohastiskie diferenciāl-vienādojumi |

# Markova ķēdes ar diskrētu laiku

$\mathbf{X} = \{1,\ 2,\ 3, ..., n\}$ $\qquad$ $\mathbf{X} = \{1,\ 2,\ 3, ...\}$

$T \subseteq \{0, 1,\ 2,\ 3, ...\}$

Izpildās Markova īpašība, t.i.,

$$P(\xi(n) = j \mid \xi(n-1) = i) = P(\xi(n) = j \mid \xi(n-1) = i, ..., \xi(1) = l_1)$$

Stacionāra ķēde

$$p_{ij} \triangleq P(\xi(n) = j \mid \xi(n-1) = i) = P(\xi(k) = j \mid \xi(k-1) = i), \qquad \forall k \neq n$$

***Definīcija.*** Stacionārai Markova ķēdei pārejas varbūtības pa vienu soli $p_{ij}$ atkarīgas tikai no stāvokļiem $i$ un $j$ un paliek nemainīgas visu ķēdes darbības laiku.

$\sum_j p_{ij} = 1$ $\qquad$ Sākuma sadalījums $p_i^0$ $\qquad$ $\sum_i p_i^0 = 1$

$$p_j(n) \triangleq P(\xi(n) = j)$$

Pilnās varbūtības formula
$$p_j(n) = \sum_k P(\xi(n) = j \,|\, \xi(n-1) = k) P(\xi(n-1) = k)$$

$$p_j(n) = \sum_k p_{kj} p_k(n-1)$$

Analoģiski patvaļīgam soļu skaitam $p_j(n+m) = \sum_k p_k(n) p_{kj}(m)$

Pārejas varbūtībām $p_{ij}(n+m) = \sum_k p_{ik}(n) p_{kj}(m)$

– Čepmena – Kolmogorova vienādojums.

Pieraksts matricu formā.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$$

Atradīsim pārejas varbūtību matricu pa 2 soļiem. Pēc Č – K vienādojuma $p_{ij}(2) = \sum_k p_{ik} p_{kj}$ .

Piemērs ķēdei ar 3 stāvokļiem:

$$P(2) = \begin{pmatrix} p_{11}(2) & p_{12}(2) & p_{13}(2) \\ p_{21}(2) & p_{22}(2) & p_{23}(2) \\ p_{31}(2) & p_{32}(2) & p_{33}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k p_{1k} p_{k1} & \sum_k p_{1k} p_{k2} & \sum_k p_{1k} p_{k3} \\ \sum_k p_{2k} p_{k1} & \sum_k p_{2k} p_{k2} & \sum_k p_{2k} p_{k3} \\ \sum_k p_{3k} p_{k1} & \sum_k p_{3k} p_{k2} & \sum_k p_{3k} p_{k3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{32} & p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} + p_{23}p_{31} & p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} + p_{23}p_{32} & p_{21}p_{13} + p_{22}p_{23} + p_{23}p_{33} \\ p_{31}p_{11} + p_{32}p_{21} + p_{33}p_{31} & p_{31}p_{12} + p_{32}p_{22} + p_{33}p_{32} & p_{31}p_{13} + p_{32}p_{23} + p_{33}p_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{32} & p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} + p_{23}p_{31} & p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} + p_{23}p_{32} & p_{21}p_{13} + p_{22}p_{23} + p_{23}p_{33} \\ p_{31}p_{11} + p_{32}p_{21} + p_{33}p_{31} & p_{31}p_{12} + p_{32}p_{22} + p_{33}p_{32} & p_{31}p_{13} + p_{32}p_{23} + p_{33}p_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = P^2$$

$P(3) = P^3$ utt. $P(n) = P^n$

Izmantojot apzīmējumu, $p(0) = \begin{pmatrix} p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & \dots \end{pmatrix}$ sākuma sadalījumam:

$$p(n) = \begin{pmatrix} p_1^n & p_2^n & p_3^n & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_k p_k^0 p_{k1}(n) & \sum_k p_k^0 p_{k2}(n) & \sum_k p_k^0 p_{k3}(n) & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1^0 & p_2^0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \dots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = p(0)P^n$$

$$p(n) = p(0)P^n.$$

***Secinājums.*** Zinot ķēdes sākuma sadalījumu $p(0) = \begin{pmatrix} p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & \dots \end{pmatrix}$ un pārejas varbūtību matricu pa vienu soli

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

var atrast varbūtību jebkuram ķēdes stāvoklim patvaļīgā laika momentā un jebkuru divu stāvokļu pārejas varbūtības pa patvaļīgu soļu skaitu.

***Hipotēze.*** Gadījuma process tika uzdots ar visu daudzdimensiju sadalījumu kopumu:

$$F_{t_1,t_2,...,t_k}(x_1,x_2,...,x_k)=P(\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2,...,\xi(t_k)<x_k).$$

Iespējams, ka, zinot sākuma sadalījumu $p(0)$ un pārejas varbūtību matricu *P*, iespējams iegūt daudzdimensiju sadalījumus. Ja tā, šie divi objekti pilnībā uzdotu gadījuma procesu (stacionāru Markova ķēdi ar diskrētu laiku).

Pie katra fiksēta *t* gadījuma lielums $\xi(t)$ diskrēts, tāpēc daudzdimensiju sadalījumu var rakstīt patvaļīgiem laika momentiem $n_1 \le n_2 \le ... \le n_k$ un jebkuriem stāvokļiem $i_1,i_2,...,i_k$ veidā:

$$P(\xi(n_1)=i_1,\xi(n_2)=i_2,...,\xi(n_k)=i_k).$$

Pieņemsim, ka $\xi(n_1)=i_1$, $\xi(n_2)=i_2$, ..., $\xi(n_{k-1})=i_{k-1}$. Uzrakstīsim varbūtību $n_k$ momentā nonākt stāvoklī $i_k$.

$$P(\overbrace{\xi(n_1)=i_1,\,\xi(n_2)=i_2,\ldots,\xi(n_{k-1})=i_{k-1},\,\xi(n_k)=i_k}^{A}\,\big|\,\underbrace{\xi(n_1)=i_1,\,\xi(n_2)=i_2,\ldots,\xi(n_{k-1})=i_{k-1}}_{B})=$$
$$=p_{i_{k-1}i_k}(n_k-n_{k-1})$$

Izmantojot nosacītās varbūtības īpašību $P(A|B)=P(AB)/P(B)$, var rakstīt $P(AB)=P(B)P(A|B)$. Šajā gadījumā $A\subset B$ un $AB=A$, tātad $P(A)=P(B)P(A|B)$

$$P(\xi(n_1)=i_1,\,\xi(n_2)=i_2,\ldots,\xi(n_{k-1})=i_{k-1},\,\xi(n_k)=i_k)=$$

$$=P(\xi(n_1)=i_1,\,\xi(n_2)=i_2,\ldots,\xi(n_{k-1})=i_{k-1})\,p_{i_{k-1}i_k}(n_k-n_{k-1})$$

Analoģiski:

$$P(\xi(n_1)=i_1,\,\xi(n_2)=i_2,\ldots,\xi(n_{k-1})=i_{k-1})=$$
$$=P(\xi(n_1)=i_1,\,\xi(n_2)=i_2,\ldots,\xi(n_{k-2})=i_{k-2})\,p_{i_{k-2}i_{k-1}}(n_{k-1}-n_{k-2})$$

.................

$$P(\xi(n_1)=i_1,\,\xi(n_2)=i_2,\ldots,\xi(n_k)=i_k)=p_{i_1}(n_1)\,p_{i_1i_2}(n_2-n_1)\ldots p_{i_{k-1}i_k}(n_k-n_{k-1})$$

Daudzdimensiju sadalījums izteikts ar sākuma varbūtību un pārejas varbūtībām.

**Hipotēze ir pareiza.**