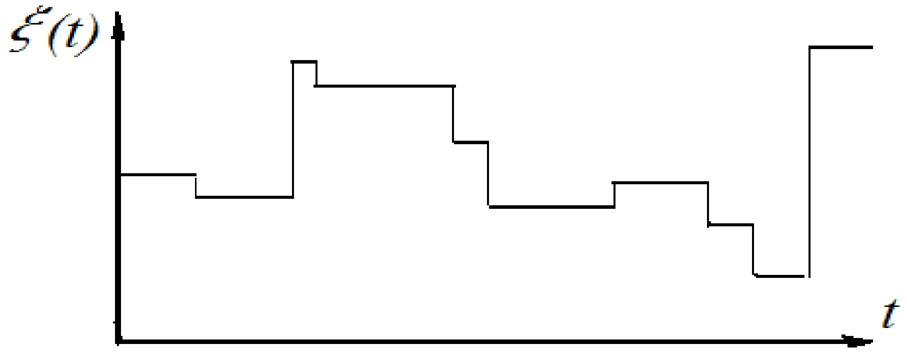
Markova ķēdes ar nepārtrauktu laiku



Stacionāra Markova ķēde

$\xi(t) \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, $t \in [0, \infty)$.

Pāreja no viena stāvokļa uz citu iespējama jebkurā laika momentā.

Pārejas varbūtība $p_{ij}(t) \triangleq P(\xi(t) = j | \xi(0) = i) = P(\xi(t+s) = j | \xi(s) = i)$

Sākuma sadalījums $p(0) = \begin{pmatrix} p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & \ldots \end{pmatrix}$

Pilnās varbūtības formula $p_j(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i^0 p_{ij}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$ (1)

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(t) p_{kj}(s), \quad i, j = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Problēma. Ķēdi ar diskrētu laiku uzdod sākuma sadalījums $p(0)$ un pārejas varbūtību matrica P. Ķēdei ar nepārtrauktu laiku formulas (1) un (2) nedod jaunu informāciju.

Ķēde atrodas stāvoklī *i*. Apzīmēsim τ laiku, ko ķēde pavada stāvoklī *i* līdz tā nomaiņai. Vairākkārt atgriežoties *i*, visas τ realizācijas neatkarīgas (kāpēc?) un pakļaujas vienam sadalījuma likumam (kāpēc?).

$$P(\tau \geq s+t) = P(\tau \geq s+t \mid \tau \geq s)P(\tau \geq s) = P(\tau \geq t)P(\tau \geq s)$$

Laika līdz izejai no stāvokļa *i* sadalījums $P(\tau \geq t \mid \xi(0) = i) = e^{-\lambda_i t}$.

1. $\lambda_i > 0$ $\quad \frac{1}{\lambda_i} = \mathrm{M}\tau$ - vidējais gaidīšanas laiks stāvoklī *i*. λ_i - izejas no stāvokļa *i* blīvums (intensitāte).
2. $\lambda_i = 0$ - process uz visiem laikiem paliek stāvoklī *i*. *i* – absorbējošs stāvoklis.

Ja $0 < \lambda_i < \infty$, mazā laika intervālā stāvoklis *i* tiks nomainīts ar varbūtību:

$P(\tau < \Delta t) = 1 - P(\tau \geq \Delta t) = 1 - \left(1 - \lambda_i \Delta t + \frac{\lambda_i^2 \Delta t}{2!} - \cdots\right) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$Analoģiski pārejas varbūtība no *i* uz *j* mazā laikā Δt ir: $\lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$, λ_{ij} - pārejas no *i* uz *j* blīvums (intensitāte).

varbūtība iziet no stāvokļa i mazā laikā Δt: $1 - p_{ii}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ (*)

$p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$ $i \neq j$. λ_{ij} - daļa no λ_i .

Ievedīsim apzīmējumu: $\lambda_{ii} \triangleq -\lambda_i$ - palikšanas stāvoklī i blīvums (intensitāte).

Teorēma. Pārejas varbūtība $p_{ij}(t)$ apmierina vienādojumus:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ik} p_{kj}(t) \tag{3}$$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(t) \lambda_{kj} \tag{4}$$

Ar sākuma nosacījumiem $p_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, $\quad i, j = 1, 2, \ldots$

(3), (4) – *atbilstoši apgrieztā un tiešā Kolmogorova diferenciālvienādojumu sistēma.*

Pierādījums. (Tiešā sistēma). Izmantojot (2) un (*), var rakstīt

$$p_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(t) p_{kj}(\Delta t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} p_{ik}(t) \left(\lambda_{kj}\Delta t + o(\Delta t)\right) + p_{ij}(t)(1 - \lambda_j \Delta t + o(\Delta t))$$

Izmantojot $\lambda_j = -\lambda_{jj}$

$$p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(t)(\lambda_{kj}\Delta t + o(\Delta t))$$

Dalām ar Δt:

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(t) \left(\lambda_{kj} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right)$$

Pāriesim uz robežu $\Delta t \to 0$:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(t) \lambda_{kj} \quad .$$

Analoģiski pierāda sistēmu (3).

Secinājums. Absolūtajām varbūtībām ir spēkā vienādojumu sistēma

$$p'_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \lambda_{kj} \qquad j = 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

Pārejas blīvumu (intensitāšu) matrica $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \cdots \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \cdots \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{pmatrix}$. Ievērojot, ka $\lambda_{ii} = -\lambda_i$ un $\lambda_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \lambda_{ij}$, katras matricas rindiņas elementu summa $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ij} = 0$.

Lai uzdotu Markova ķēdi ar nepārtrauktu laiku nepieciešams: sākuma sadalījums $p(0) = \begin{pmatrix} p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & \cdots \end{pmatrix}$, pārejas blīvumu (intensitāšu) matrica $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \cdots \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \cdots \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{pmatrix}$.

Piemēri.

1. Apkalpošanas sistēmā ienāk pieprasījumi ar intensitāti λ . $\xi(t)$ - laikā t ienākušo pieprasījumu skaits ir homogēna Markova ķēde ar stāvokļiem 0, 1, 2, ... No stāvokļa i var pāriet tikai uz stāvokli $i+1$.

$$\textcircled{0} \xrightarrow{\lambda} \textcircled{1} \xrightarrow{\lambda} \textcircled{2} \xrightarrow{\lambda}$$

Varbūtība laikā Δt iziet no stāvokļa i ir $1 - p_{ii}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$

Izejas blīvums $\lambda_i = \lambda$, tātad $\lambda_{ii} = -\lambda$

Pārejas blīvums $\lambda_{ij} = \lambda$, ja $j = i+1$; $\lambda_{ij} = 0$, ja $j \neq i+1$.

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$$

sākuma nosacījumi $p_0(0) = 1$

$$p_k(0) = 0$$

$$p_1'(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t)$$

....

$$p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t)$$

$$\frac{dp_0(t)}{p_0(t)} = -\lambda dt$$

$$\int \frac{dp_0(t)}{p_0(t)} = -\lambda \int dt$$

$$\ln p_0(t) = -\lambda t + C$$

$$p_0(t) = e^{-\lambda t + C} = C_1 e^{-\lambda t}$$

$$C_1 = 1$$

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$p_1'(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t)$$

$$p_1(t) = uv$$

$$u'v + uv' + \lambda uv = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$u'v + u(v' + \lambda v) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$v' = -\lambda v$$

$$v = e^{-\lambda t}$$

$$u' e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$u' = \lambda$$

$$u = \lambda t + C_2$$

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}$$

$$C_2 = 0$$

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

$$p_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!} e^{-\lambda t}$$

....

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Puasona process!

2. Apkalpošanas sistēmā pienākošie pieprasījumi veido Puasona plūsmu ar parametru λ (pieprasījumi ir neatkarīgi un katra pieprasījuma pienākšanas varbūtība mazā laika intervālā Δt ir $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$). Katrs pieprasījums tiek apkalpots gadījuma laiku τ , kas ir sadalīts eksponenciāli ar parametru μ , t.i. $P(\tau \geq t) = e^{-\mu t}$. Ja pieprasījums pienāk laika momentā, kad sistēma apkalpo citu pieprasījumu, tas atstāj sistēmu neapkalpots.

$$\mathbf{0} \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \mathbf{1}$$

$$\lambda_{01} = \lambda \qquad \lambda_{00} = -\lambda$$

$$\lambda_{10} = \mu \qquad \lambda_{11} = -\mu$$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(t)\lambda_{kj}$$

$$i = 0, \quad j = 0 \qquad p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t)$$

$$i = 0, \quad j = 1 \qquad p'_{01}(t) = \lambda p_{00}(t) - \mu p_{01}(t)$$

$$i = 1, \quad j = 0 \qquad p'_{10}(t) = -\lambda p_{10}(t) + \mu p_{11}(t)$$

$$i = 1, \quad j = 1 \qquad p'_{11}(t) = \lambda p_{10}(t) - \mu p_{11}(t)$$

$$p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$$
$$p_{10}(t) = 1 - p_{11}(t)$$

$$p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu - \mu p_{00}(t)$$
$$p'_{11}(t) = \lambda - \lambda p_{11}(t) - \mu p_{11}(t)$$

$$p'_{00}(t) + (\lambda + \mu) p_{00}(t) - \mu = 0$$
$$p'_{11}(t) + (\lambda + \mu) p_{11}(t) - \lambda = 0$$

sākuma nosacījumi $p_{00}(0) = 1$, $p_{11}(0) = 1$

Atrisinājums

$$p_{00}(t) = (1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}) e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$p_{11}(t) = (1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}) e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$