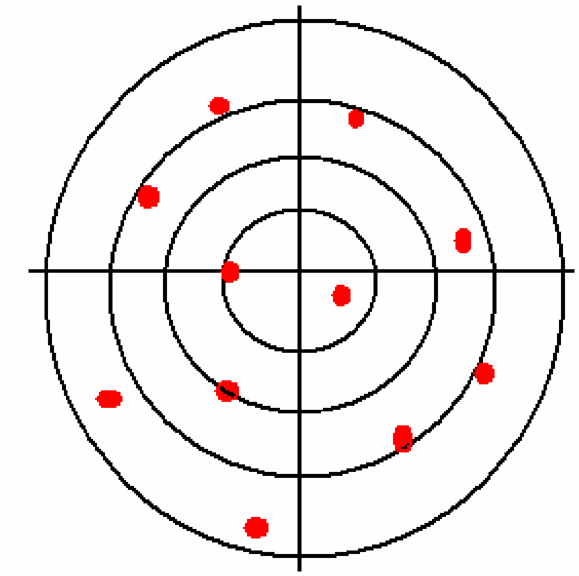
Ģeometriskās varbūtības.

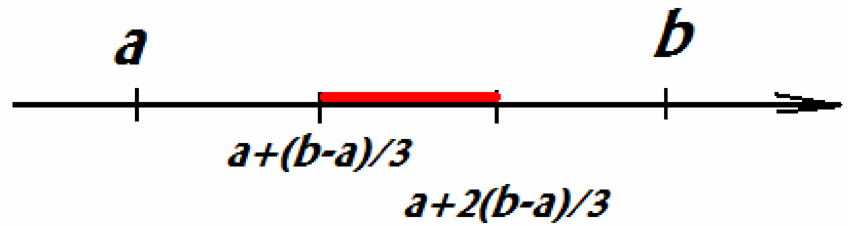
Uzdodot varbūtību pēc klasiskās shēmas, viens no pamatnosacījumiem ir vienmērīgs summārās vienu vienību lielās varbūtības sadalījums visiem elementārajiem notikumiem. Otrs nosacījums – galīgs elementāro notikumu skaits.

Atteiksimies no šī otrā nosacījuma, saglabājot vienmērību.



Piemēram, šāviens uz labu laimi mērķī (netēmējot) – var pieņemt, ka trāpījuma varbūtība jebkurā mērķa apgabalā nav atkarīga no šī apgabala atrašanās vietas.

Vai arī, uz labu laimi atzīmējot punktu kādā skaitļu ass intervālā, tā atrašanās iespēja jebkurā šī intervāla apakšintervālā atkarīga tikai no apakš-intervāla garuma, nevis tā novietojuma



Varbūtība trāpīt katrā no intervāla (a, b) trešdaļām ir vienāda. Tātad, ja varbūtība trāpīt visā intervālā ir 1, trāpījuma varbūtība katrā trešdaļā ir vienāda ar 1/3.

Elementāru notikumu telpas Ω ģeometriskas interpretācijas iespējas gadījumā, ja izpildās minētie simetrijas nosacījumi, apzīmēsim ar burtiem A, B, ... telpas Ω apakškopas (notikumus) un ievedīsim kopas funkciju $\mu(A)$ ar kuru atkarībā no telpas dimensiju skaita sapratīsim tās garumu, laukumu vai tilpumu.

Notikuma A varbūtību definēsim: $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Piemēri.

1. Vētras laikā starp elektropārvades līnijas 40. un 70. kilometru pārrauti vadi. Kāda varbūtība, ka bojājums noticis starp 50. un 55. kilometru?

$$\mu(\Omega) = 70 - 40 = 30$$

$$\mu(A) = 55 - 50 = 5$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

2. Nogrieznis ar garumu k uz labu laimi sagriezts trijās daļās. Kāda varbūtība, ka no sagrieztajām daļām var izveidot trijstūri?

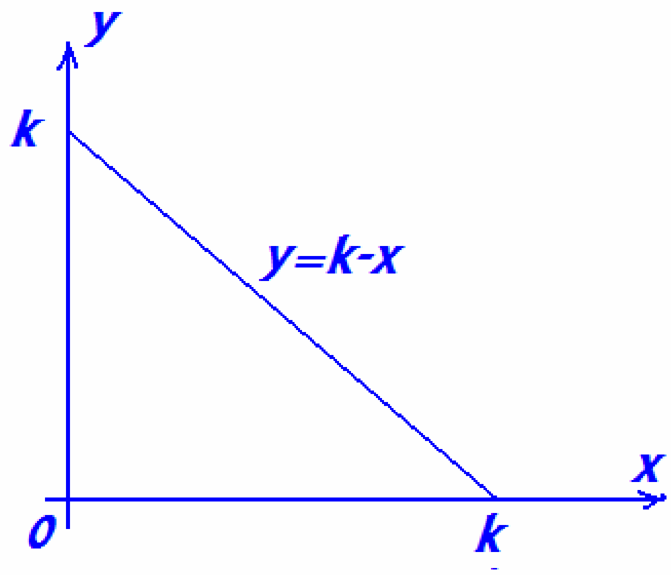
Nogriežņa daļas apzīmēsim: x, y, $k - x - y$. Ievedīsim koordinātu sistēmu.

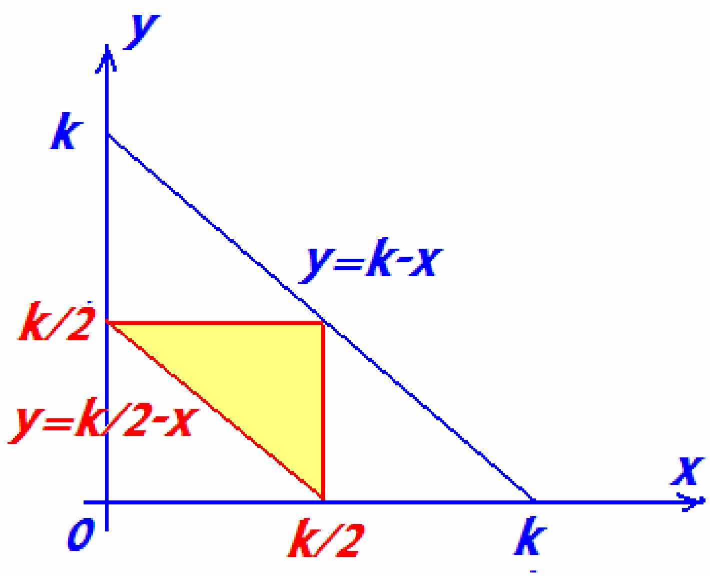
Visas iespējamās dalījuma punktu koordinātas: $0 < x < k$, $0 < y < k - x$

Pieļaujamo $(x,\, y)$ punktu kopa veido Ω.
Trijstūri varēs izveidot, ja katru divu malu summa būs lielāka par trešo malu:

$$\begin{cases} x+y>k-x-y \\ x+k-x-y>y \\ y+k-x-y>x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y>\dfrac{k}{2} \\ y<\dfrac{k}{2} \\ x<\dfrac{k}{2} \end{cases}$$





Viegli redzams, ka notikumam labvēlīgais Apgabals (ietonētā trijstūra laukums) ir ¼ no kopējā trijstūra laukuma.

$$P(A)=\frac{1}{4}$$

3. Students un studente norunāja tikšanos laikā starp pulksten diviem un trijiem dienā. Pirmais, kurš atnācis uz tikšanos, gaida otro 10 minūtes un, ja nav sagaidījis, iet projām. Kāda varbūtība, ka tikšanās notiks, ja katra ierašanās laiks stundas robežās ir pilnīgi nejaušs?

Piezīme. Ne vienmēr pašam uzdevuma tekstam ir izteikta ģeometriska interpretācija. Uz to, ka uzdevumu ērti risināt, izmantojot ģeometriskās varbūtības, norāda bezgalīgā elementāro notikumu telpa un simetrijas (vienmērīgā sadalījuma) nosacījumi.

Apzīmēsim ar x un y atbilstoši studenta un studentes ierašanās laiku.

Elementāro notikumu telpu Ω nosaka: $\begin{cases} 0 < x < 60 \\ 0 < y < 60 \end{cases}$.

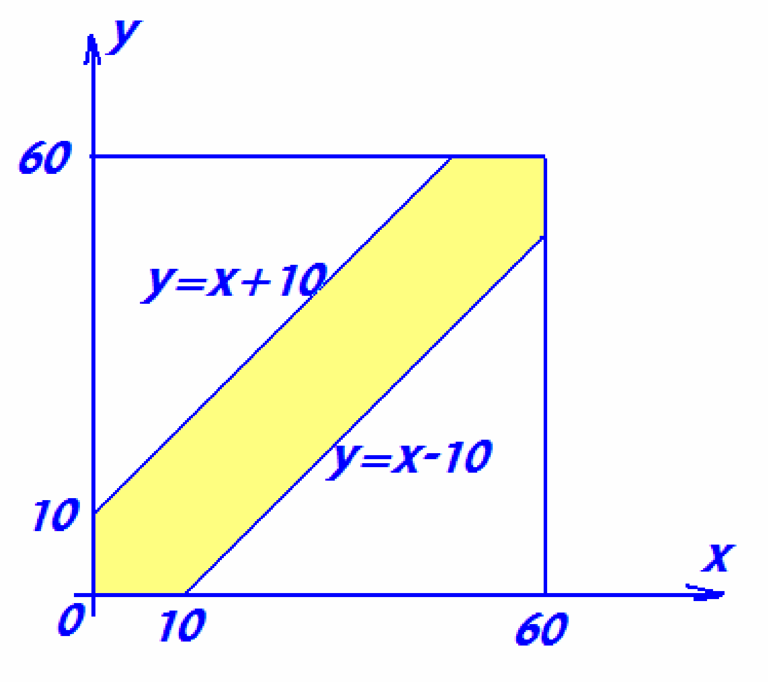
Tikšanās notiks, ja $|x - y| < 10$.

Kopējais kvadrāta laukums $\mu(\Omega) = 60^2 = 3600$

Viena neietonētā trijstūra laukums $S = \dfrac{50^2}{2} = 1250$

Varbūtība, ka tikšanās notiks:

$$P(A) = \frac{3600 - 2 \cdot 1250}{3600} = \frac{11}{36}$$



Bernulli shēma

Eksperiments ar diviem iespējamiem iznākumiem – A un $\bar{A}$. Veic atkārtotus neatkarīgus novērojumus – notikuma A iestāšanos vai neiestāšanos vienos un tajos pašos apstākļos.

$P(A) = p \quad P(\bar{A}) = 1 - p$ novērojumu skaits – n.

Elementārie notikumi ir novērojumu rezultātu virknes $\omega_m = (i_1, i_2, ..., i_n)$, kur katru i_j interpretēsim kā $i_j = 0$, ja notikums A j-tajā novērojumā nav iestājies vai $i_j = 1$, ja notikums A j-tajā novērojumā ir iestājies. Šādas elementāro notikumu telpas apjoms (dažādo iespējamo mēģinājumu virkņu iznākumu – variāciju ar atkārtojumiem – skaits) $\tilde{A}_2^n = 2^n$. Katra elementārā notikuma varbūtību var uzrakstīt

$P(\omega_m) = p^{\sum_{j=1}^{n} i_j} (1 - p)^{n - \sum_{j=1}^{n} i_j}$ (var lietot varbūtību reizināšanu likumu, jo novērojumi neatkarīgi; reizinājumā skaitlis p tiek reizināts tik reizes, cik reižu iestājies notikums A; skaitlis $1 – p$ tik reizes, cik reižu iestājies notikums $\bar{A}$.)

Jautājums: kā aprēķināt varbūtību notikumam, ka, veicot n neatkarīgus eksperimentus, notikums A iestāsies tieši k reizes?
Piemēram, katra loterijas biļete laimē ar varbūtību 0.05. Kāda varbūtība, ka nopērkot 10 biļetes, būs a) viens, b) divi vai c) vismaz divi laimesti?

Apzīmējums: $\mu_n = \sum_{j=1}^{n} i_j$ – notikuma *A* iestāšanās reižu skaits *n* novērojumos.

Teorēma. Bernulli shēmā varbūtību, ka notikums *A* iestāsies jebkuru fiksētu skaitu reižu μ_n $\left(0 \le \mu_n \le n\right)$ uzdod formula:

$$P\left(\mu_n = k\right) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pierādījums. Katras novērojumu virknes, kurā notikums *A* iestājies *k* reizes un notikums $\bar{A}$ iestājies *n*–*k* reizes, varbūtība ir $p^k (1-p)^{n-k}$. Visas šīs virknes atšķiras ar elementu kārtību. Katras no tām garums ir *n*, un tajās ir *k* vieninieki un *n*–*k* nulles. Iedomājoties neaizpildītu šādu virkni, izvēlēsimies to pozīciju numurus, kuros ierakstīsim vieniniekus. Šādu iespējamo izlašu skaits ir C_n^k. Katra mēģinājumu virkne ir nesavienojama ar jebkuru citu atšķirīgu virkni – var lietot varbūtību saskaitīšanas likumu: $\underbrace{p^k (1-p)^{n-k} + \ldots + p^k (1-p)^{n-k}}_{C_n^k}$. Teorēma pierādīta.

Piemēra risinājums. a) $P\left(\mu_{10}=1\right)=C_{10}^{1}(0.05)^{1}(0.95)^{9}=0.31512$

b) $$P\left(\{\mu_{10}=1\}\cup\{\mu_{10}=2\}\right)=P\left(\mu_{10}=1\right)+P\left(\mu_{10}=2\right)=$$
$$=C_{10}^{1}(0.05)^{1}(0.95)^{9}+C_{10}^{2}(0.05)^{2}(0.95)^{8}=0.31512+0.07463=0.38975$$

c) Rēķinot tieši, gari aprēķini.   Vieglāk atrast pretējā notikuma – mazāk nekā divi laimesti – varbūtību:

$$P\left(\{\mu_{10}=0\}\cup\{\mu_{10}=1\}\right)=P\left(\mu_{10}=0\right)+P\left(\mu_{10}=1\right)=$$
$$=C_{10}^{0}(0.05)^{0}(0.95)^{10}+0.31512=0.59874+0.31512=0.28362$$

Atbilde: $1-0.28362=0.71638$

Secinājums. Aprēķini pēc Bernulli formulas pie lieliem n ir darbietilpīgi.

Gadījumos, ja n ir liels un labvēlīgā notikuma varbūtība p maza, var lietot tuvinātu formulu. Ja p ir liela, tad maza ir $1-p$ un arī var lietot to pašu tuvināto formulu, pārformulējot uzdevumu un rēķinot notikuma $\bar{A}$ iestāšanās reižu skaita varbūtību.

Robežteorēmas Bernulli shēmā

Puasona teorēma. Ja novērojumu skaitam $n \to \infty$, katra novērojuma labvēlīgā notikua iestāšanās varbūtība $p \to 0$ tā, ka reizinājums $np \to \lambda$, kur konstante $0 < \lambda < \infty$, tad

$$P\left(\mu_n = k\right) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Pierādījums. Katram fiksētam n apzīmēsim $np = \lambda_n$. Tad

$$P\left(\mu_n = k\right) = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda_n{}^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} =$$

$$\frac{\lambda_n{}^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Šeit izmantots: $\lambda_n \to \lambda$, visas iekavas ar galīgu kāpinātāju tiecas uz 1, iekavas ar bezgalīgo kāpinātāju tiecas uz $e^{-\lambda}$ (otrā ievērojamā robeža $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$). Teorēma pierādīta.

Piezīme. Kļūda, aizstājot Bernulli formulu ar Puasona formulu, nepārsniedz lielumu np^2.

Piemērs. $n = 100$, $k = 1$, $p = 0.1$

Bernulli f–la: $P\left(\mu_{100} = 10\right) = C_{100}^{10}(0.1)^{10}(0.9)^{90} = 0.13187$

Puasona f–la: $\lambda = 10$ $\quad P\left(\mu_{100} = 10\right) \approx \dfrac{10^{10}}{10!}e^{-10} = 0.12511$

Piemērs. Sportists šaujot katrā šāvienā trāpa mērķī ar varbūtību 0.98. Atrast varbūtību, ka no 50 šāvieniem viņš kļūdīsies ne vairāk kā 5 reizes.

$n = 50$, kļūdas varbūtība: $p = 0.02$, $np = \lambda = 1$

$$P(A) = \sum_{k=0}^{5} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-1} \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 0.99941$$

Lokālā Muavra – Laplasa teorēma. Ja Bernulli shēmā $n \to \infty$, varbūtība p paliek konstanta un lielums $x = \dfrac{k - np}{\sigma}$, kur $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, ir vienmērīgi pēc k un n ierobežots (tas nozīmē – jebkurām k un n vērtībām eksistē vienas un tās pašas konstantes a un b, kurām $-\infty < a \le x \le b < \infty$), tad

$$P\left(\mu_n = k\right) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Pierādījums ir tīri konstruktīvs – izmanto t.s. Stirlinga formulu, kas faktoriālu izsaka eksponentes formā. Logaritmē izteiksmes kreiso pusi, pielieto Stirlinga formulu un tieši aprēķina robežas. Pierādījumu var atrast, piemēram, *В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. М. Наука.1987*. 58. lpp.

Formula lieliem n dod sliktus rezultātus, ja p tuvs 0 vai 1 (tad jālieto Puasona formula). Parasti formulu lieto, ja aptuveni $n > 100$, $np(1-p) > 20$.

Piemērs. Atrast varbūtību, ka no 100 jaundzimušiem bērniem būs 50 zēni un 50 meitenes, ja zēna piedzimšanas varbūtība ir 0.51 un meitenes piedzimšanas varbūtība ir 0.49.

$n = 100$, $k = 50$, $p = 0.51$, $1 - p = 0.49$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.51 \cdot 0.49} = 4.99900$$

$$x = \frac{k - np}{\sigma} = \frac{50 - 100 \cdot 0.51}{4.99900} = -0.20004$$

$$P(\mu_{100} = 50) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4.999} e^{-\frac{(-0.20004)^2}{2}} = 0.078224$$

(Precīzi, rēķinot pēc Bernulli formulas – $P(\mu_{100} = 50) = 0.078013$)

Bieži jāatrod šādu notikumu varbūtības: $P(\alpha \le \mu_n \le \beta)$. Tad ērti lietot teorēmu:

<u>Integrālā Muavra – Laplasa teorēma.</u> Ja Bernulli shēmā $n \to \infty$, izpildās visi lokālās teorēmas nosacījumi, tad vienmērīgi pa a un b

$$P\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b \right) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

<u>Pierādījuma ideja.</u> Pierādāmās izteiksmes kreisā puse ir varbūtību summa pa visiem x, kam izpildās $a \le x \le b$. Katram saskaitāmajam lieto lokālo teorēmu un robežgadījumā, ja $n \to \infty$, iegūst integrāli. Pierādījumu var atrast, piemēram, *В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. М. Наука.1987*. 60. lpp.

Zemintegrāļa funkcija $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ir elementāri neintegrējama, taču noteiktais integrālis $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ jebkuriem a un b konverģē. Integrāļa vērtības var aprēķināt, zinot t.s.

Laplasa funkciju $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$. Tā ir saistīta ar t.s. normālo varbūtību sadalījumu, tā ir tabulēta (parasti $x > 0$) visās varbūtību teorijas un statistikas tabulās, skat, piemēram, *В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. М. Наука.1987*. 2. tabula 225. lpp.

Lietošanas algoritms: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi_0(b) - \Phi_0(a)$, ja jāoperē ar negatīviem skaitļiem, jāievēro, ka Laplasa funkcija ir nepāru funkcija, t.i., $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$. Ja jāatrod varbūtība $P\left(\alpha \le \mu_n \le \beta\right)$, var lietot formulu

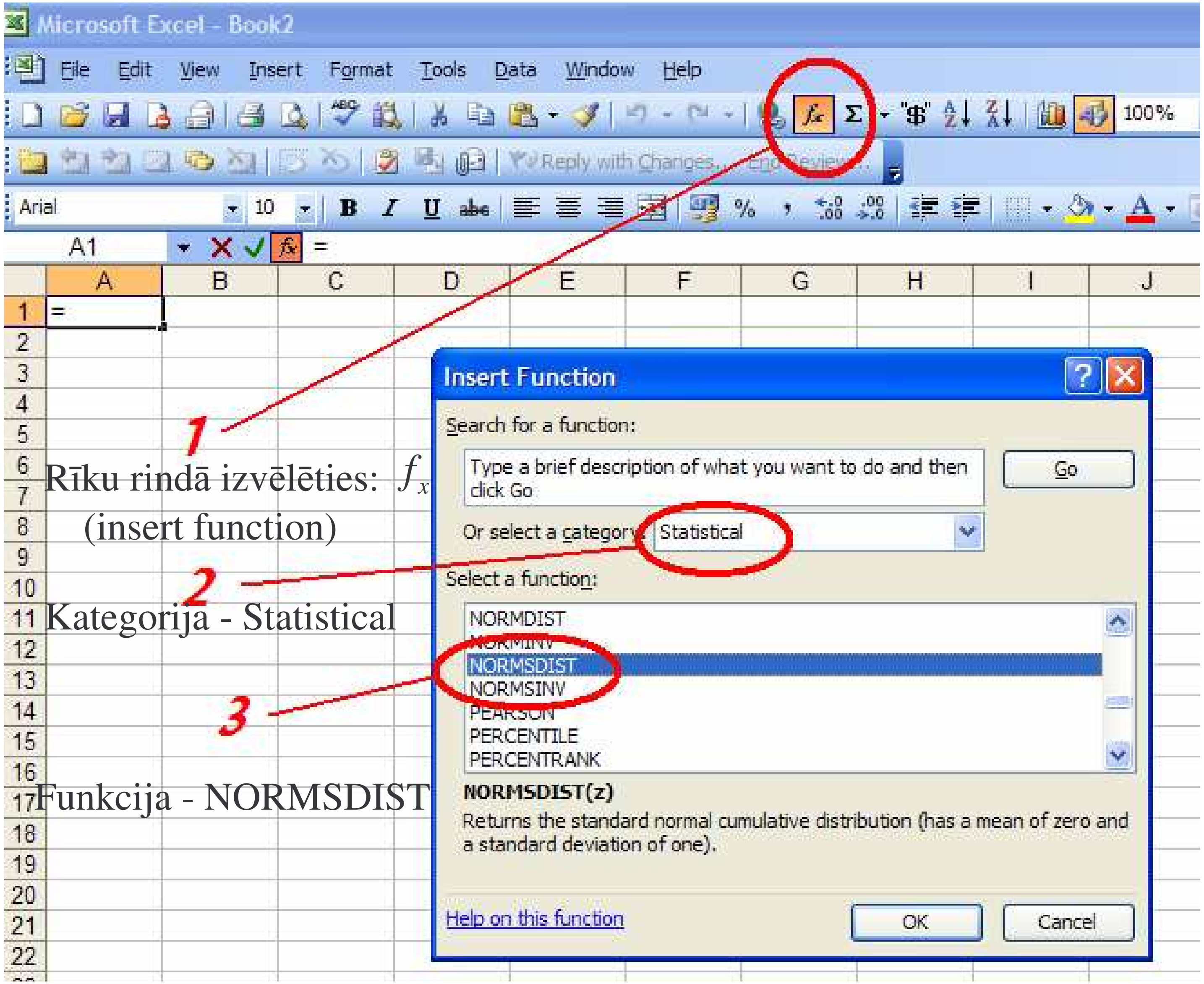
$$P\left(\alpha \le \mu_n \le \beta\right) = P\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

$$= P\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi_0(b) - \Phi_0(a) \qquad ,$$

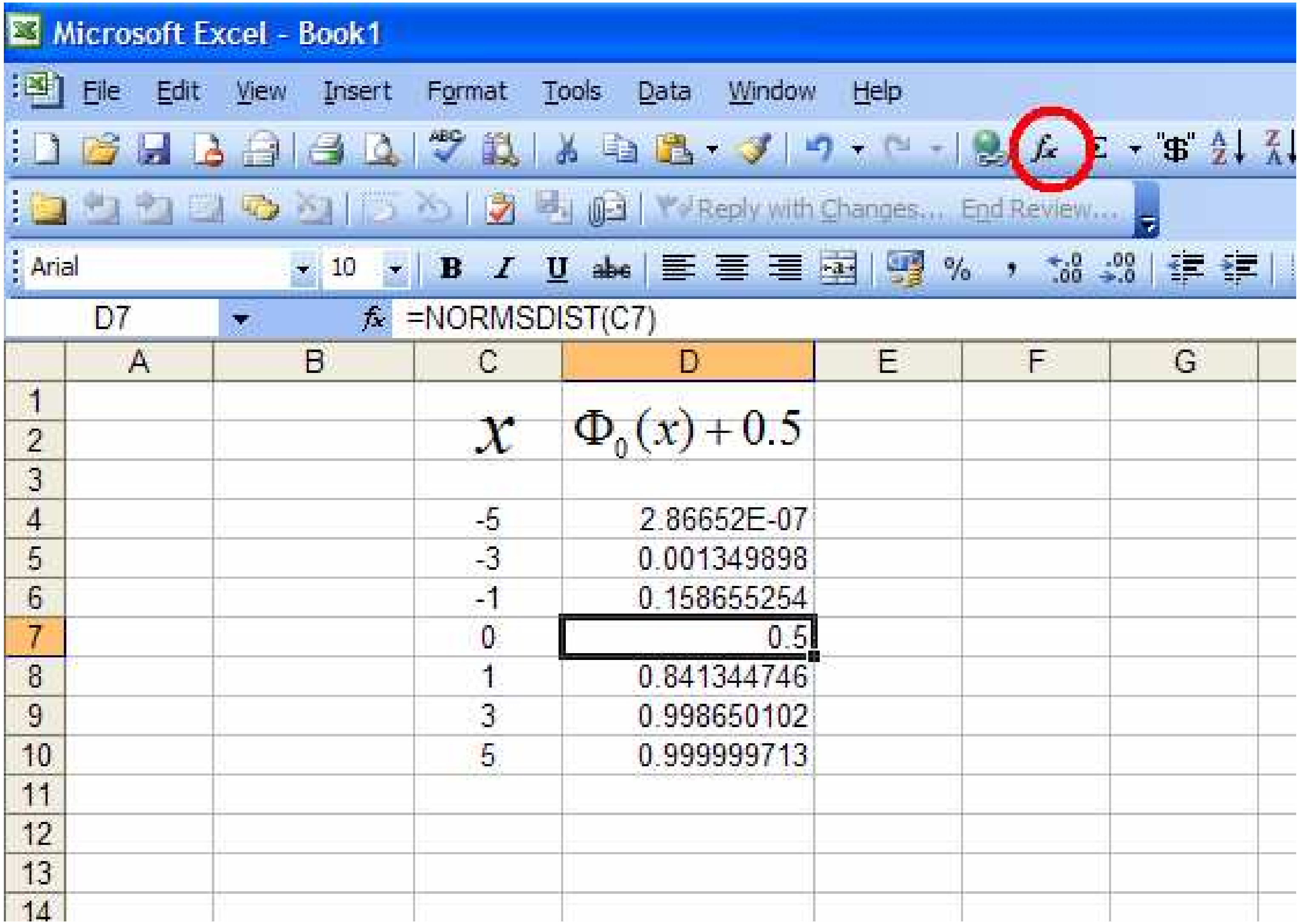
kur

$a = \frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ un $b = \frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Laplasa funkcijas vērtības var atrast arī EXCEL elektroniskajās tabulās:



EXCEL tabulēta t.s. standartnormālā sadalījuma funkcija (*standard normal cumulative distribution*), kuras vērtības ir par 0.5 lielākas par Laplasa funkcijas vērtībām. Lai iegūtu Laplasa funkciju, no NORMSDIST(x) vērtības jāatņem 0.5



Piemērs. Iepriekšējā piemērā atradīsim varbūtību, ka jaundzimušo zēnu skaits ir robežās no 40 līdz 60.

$n = 100$, $\alpha = 40$, $\beta = 60$, $p = 0.51$, $1 - p = 0.49$

$$a = \frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{40 - 100 \cdot 0.51}{\sqrt{100 \cdot 0.51 \cdot 0.49}} = -2.20044$$

$$b = \frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{60 - 100 \cdot 0.51}{\sqrt{100 \cdot 0.51 \cdot 0.49}} = 1.80036$$

$$P\left(40 \le \mu_n \le 60\right) \approx \Phi_0(1.80036) - \Phi_0(-2.20044) =$$

$$= \Phi_0(1.80036) + \Phi_0(2.20044) = 0.46410 + 0.48611 = 0.95021$$