# 1 Masu apkalpošanas sistēmas (MAS).

## 1.1 MAS galvenās komponentes:

ieejas plūsma

apkalpošanas mehānisms

rindas kārtība

Pieņemsim ka ieejas plūsma ir **elementāra plūsma jeb Puassona plūsma**. Ieejas plūsmu raksturo plūsmas intensitāte $\lambda(t)$.

**Stacionāra**, t.i. plūsmas intensitāte nav atkarīga no laika $\lambda(t) = \lambda$.

**Ordināra** ja elementārā laika intervālā $\triangle t$ varbūtība iestāties diviem, vai vairākiem notikumiem ir nesalīdzināmi maza salīdzinot ar viena notikuma iestāšanās varbūtību.

**Bez pēcdarbības**, ja notikumu skaits, kas iestājas elementārā laika intervālā $\triangle t$, nav atkarīgs no notikuma skaita iepriekšējos laika intervālos.

Ieejas plūsmu raksturo plūsmas intensitāte $\lambda(t)-$ vidējais notikumu skaits vienā laika vienībā.

**Teorēma:** varbūtība $P_m(t)$ tam, ka intervālā garumā $t$ trāpīs $m$ punktu (laika intervālā $t$ atnāks $m$ klientu) tiek rēķināta pēc Puassona formulas:

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

**Pierādījums:**

Uz Ox ass gadījuma veidā tiek izvietoti punkti. Šo punktu sadalījums apmierina sekojošus nosacījumus (elementārās plūsmas nosacījumus):

1. Varbūtība trāpīt punktiem uz nogriezni t ir atkarīga tikai no nogriežņa $t$ garuma, bet nav atkarīga no viņa izvietojuma uz $Ox$ ass. Tas nozīmē, ka punkti ir sadalīti uz ass ar vienādu vidējo blīvumu. Apzīmēsim šo blīvumu (t.i. punktu skaita vienā garuma vienībā matemātiskā cerība) ar $\lambda$.

2. Punkti izvietojās uz $Ox$ ass neatkarīgi viens no otra, t.i. notikumi, ka punkti trāpa uz intervāliem, kuri nešķeļas, ir neatkarīgi.

3. Varbūtība trāpīt mazā intervālā $\triangle x$ divu vai vairāku punktu ir salīdzināmi maza ar varbūtību trāpīt vienam punktam.

Apskatīsim mazo intervālu $\triangle x$. Vidējais ($MC$) punktu skaits, kuri trāpīja šajā intervālā ir $\lambda \cdot \triangle x$. Tā kā atbilstoši 3. nosacījumam, intervālā $\triangle x$ var trāpīt tikai viens punkts, tad mēs varam uzskatīt, ka varbūtība trāpīt vienam (vai vismaz vienam) punktam intervālā $\triangle x$ ir aptuveni vienāda ar $\lambda \cdot \triangle x$.

Sadalīsim intervālu $t$ $n$ vienādās daļās ar garumu $\triangle x = \frac{1}{n}$. Elementāro nogriezni $\triangle x$ sauksim par "tukšu", ja viņā netrāpīja neviens punkts, ja trāpīja, tad sauksim viņu par "aizņemtu".

$P\left(nogrieznis\ \triangle x = \frac{1}{n}\ ir\ aizņemts\right) \approx \lambda \triangle x = \frac{\lambda t}{n}$, $P\left(nogrieznis\ \triangle x = \frac{1}{n}\ ir\ brīvs\right) \approx 1 - \frac{\lambda t}{n}$.

Tas kā notikumi, ka punkti trāpa uz intervāliem, kuri nešķeļas, ir neatkarīgi, tad punktu trāpijuma vai netrāpijuma $n$ nogriežņos var uzskatīt par $n$ neatkarīgu mēģinājumu rezultātu. Aprēķināsim varbūtību tam, ka starp $n$ intervāliem būs tieši $m$ intervāli aizņemti, pēc Bernulli formulas tas ir

$$C_n^m \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m} \tag{1}$$

Ja mēģinājumu skaits $n$ ir pietiekami liels, tad šī varbūtība ir aptuveni vienāda ar meklējamo $P_m$. Pariesim pie robežas

$$
\begin{aligned}
P_m &= \lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \frac{(\lambda t)^m}{n^m} \frac{\left(1-\frac{\lambda \dot{t}}{n}\right)^{n-m}}{\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^m} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \frac{\left(1-\frac{\lambda \dot{t}}{n}\right)^{n-m}}{\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^m} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} &= 1 \ ; \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^m = 1 \\
\left(1-\frac{\lambda \dot{t}}{n}\right)^n &= \left[\left(\left(1-\frac{\lambda \dot{t}}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda t}}\right)\right]^{\lambda t} \to e^{-\lambda t} \\
&= \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

Teorēma pierādīta.

Pieņemsim, ka mēs novērojām klientu skaitu aptiekā un ieguvām sekojošus datus:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $9-10$ | $10-11$ | $11-12$ | $12-13$ | $14-15$ | $15-16$ |
| 5 | 6 | 3 | 4 | 4 | 3 |

Vidējais klientu skaits vienā stundā $\bar{x} = \frac{5+6+3+4+4+3}{6} = \frac{25}{6} = 4.1667 \approx 4$.

Tātad $\lambda = 4$.

$\xi$- klientu skaits vienas stundas laikā, ja $\lambda = 4$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $P_m(1)$ | 0.02 | 0.07 | 0.15 | 0.20 | 0.20 | 0.16 | 0.10 | 0.06 | 0.03 | 0.01 |

$\eta$- klientu skaits 15 minūšu laikā, ja $\lambda = 4$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $P_m\left(\frac{15}{60}=\frac{1}{4}\right)$ | 0.37 | 0.37 | 0.18 | 0.06 | 0.02 |

Laiks starp diviem notikumiem ieejas plūsmā ir gadījuma lielums, apzīmēsim viņu ar $\nu$, ja ieejas plūsma ir elementāra tad gadījuma lielums $\nu$ ir sadalīts eksponenciāli un viņa blīvumfunkcija ir

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \lambda e^{-\lambda t}. \\
P(t_1 < \nu < t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}
\end{aligned}
$$

Aprēķināsim varbūtību tam, ka nākamo klientu vajadzēs gaidīt ilgāk par piecām minūtēm:

$$P(5 < \nu < \infty) = e^{-\frac{5}{60}*4} - e^{-4*\infty} = .71653$$

$$P(10 < \nu < 15) = e^{-4*\frac{10}{60}} - e^{-4*\frac{15}{60}} = e^{-\frac{2}{3}} - e^{-1} = 0.14554.$$

**Apkalpošanas laiks.**
Apkalpošanas intensitāte $\mu$ - cik vidēji vienā laika vienībā tiek apkalpots klientu.

$$\mu = \frac{1}{t_{apk.}}$$

Ja teikts, ka viens klients vidēji tiek apkalpots 5 minūtes, tad $\mu = \frac{60\,\text{min}}{5\,\text{min}} = 12$.
Parasti teorijā un praksē pieņem, ka apkalpošanas laiks $t_{apk.}$ ir eksponenciāli sadalīts.

$$\begin{aligned} g(t) &= \mu e^{-\mu t} \\ P(t_1 < t_{apk.} < t_2) &= e^{-\mu t_1} - e^{-\mu t_2}. \end{aligned}$$

Pieņemsim, ka viens klients tiek apkalpots vidēji 20 minūtes. Tātad, ja viena laika vienība 1 stunda, tad $\mu = \frac{1st}{20\,\text{min}} = 3$.
$P(10 < t_{apk.} < 15) = e^{-3*\frac{10}{60}} - e^{-3*\frac{15}{60}} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{4}} = .13416$

$P(15 < t_{apk.} < 20) = e^{-3*\frac{15}{60}} - e^{-3*\frac{20}{60}} = e^{-\frac{3}{4}} - e^{-1} = .10449$

$P(20 < t_{apk.} < \infty) = e^{-3*\frac{20}{60}} - e^{-3*\infty} = e^{-1} - e^{-3\infty} = .36788$

## 1.2 MAS ar atteikumiem.

-apkalpošanas sistēmai ir n kanālu;

-pasūtījumu plūsma ir elementāra ar intensitāti $\lambda$ un nav atkarīga no sistēmas stāvokļa;

-apkalpošanas intensitāte ir $\mu$.

Sistēmas stāvokļi

$E_0$- visi kanāli ir brīvi,

$E_1$- viens kanāls ir aizņemts;

....

$E_k$- $k$ aizņemti $k$ kanāli (sistēmā ir $k$ klienti)

...

$E_n$- visi kanāli ir aizņemti.

Mūsu uzdevums ir aprēķināt $p_k(t)$ - varbūtība, ka laika momentā $t$ sistēma būs stāvoklī $E_k$.

Erlanga diferenciālvienādojumu sistēma.

$$\begin{cases} \begin{array}{lllll} \frac{dp_0(t)}{dt} = & -\lambda p_0(t) & +\mu p_1(t) & & \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = & \lambda p_0(t) & -(\lambda+\mu)p_1(t) & +2\mu p_2(t) & \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = & 0+ & \lambda p_1(t) & -(\lambda+2\mu)p_2(t) & +3\mu p_3(t) \\ .... & & ... & .... & ... \\ \frac{dp_n(t)}{dt} = & \lambda p_{n-1}(t) & -n\mu p_n(t) & & \\ & & \sum\limits_{k=0}^{n} p_k(t) = 1 & & \end{array} \end{cases}$$

**Piemērs:** atrisināsim Erlanga diferenciālvienādojumu sistēmu gadījumā ja ir viens kanāls $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = & -\lambda p_0(t) \quad +\mu p_1(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = & \lambda p_0(t) \quad\quad -\mu p_1(t) \\ & p_o(t) + p_1(t) = 1 \\ & p_0(0) = 1 \end{cases}$$

$p_0(t) = 1 - p_1(t) \Rightarrow \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu(1 - p_0(t))$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} + (\lambda + \mu) p_0(t) = \mu \tag{2}$$

$\Rightarrow$ tas lineārs nehomogēns vienādojums, izmantosim metodi

meklēsim $p_0(t)$ kā divu funkciju reizinājumu $u(t)$ un $v(t)$, vienu no funkcijām izvēlamies patvaļīgi un otru atrodam:

$p_0(t) = u(t)v(t)$ ievietosim (2) vienādojumā:

$\frac{du(t)}{dt}v(t) + \frac{dv(t)}{dt}u(t) + (\lambda + \mu)u(t)v(t) = \mu$

$$\frac{du(t)}{dt}v(t) + u(t)\left(\frac{dv(t)}{dt} + (\lambda + \mu)v(t)\right) = \mu \tag{3}$$

izvēlēsimies $v(t)$ tādu lai $\frac{dv(t)}{dt} + (\lambda + \mu)v(t) = 0$, tas ir diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgajiem:

$\frac{dv(t)}{v(t)} = -(\lambda + \mu)dt$

$\int \frac{dx}{x} = \ln x$

$\int \frac{dv(t)}{v(t)} = \int -(\lambda + \mu)dt \Longrightarrow \ln v(t) = -(\lambda + \mu)t \Longrightarrow$

$$v(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{4}$$

Ievietosim (4) vienādojumā (3) :

$\frac{du(t)}{dt}e^{-(\lambda+\mu)t} = \mu \Longrightarrow du(t) = \mu e^{(\lambda+\mu)t}dt$

$\int du(t) = \int \mu e^{(\lambda+\mu)t}dt \Longrightarrow$

$$u(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}e^{(\lambda+\mu)t} + C$$

Tātad $p_0(t) = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t} + C\right)e^{-(\lambda+\mu)t} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + Ce^{-(\lambda+\mu)t}$

Atradīsim konstanti $C$ no sākuma nosacījuma

$p_0(0) = 1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + Ce^{-(\lambda+\mu)*0} \Rightarrow C = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \Rightarrow$

$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$

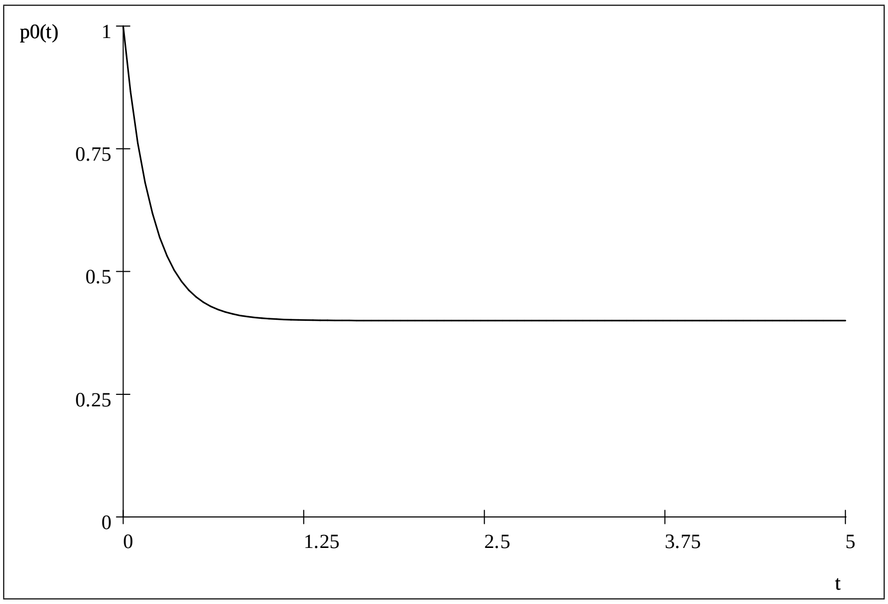
$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

$p_1(t) = 1 - p_0(t) \Rightarrow$

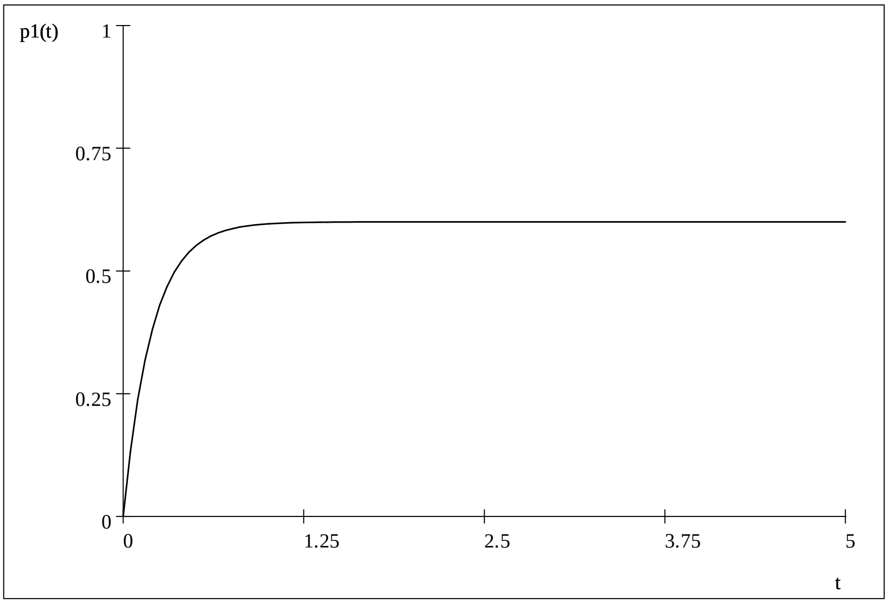
$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

Apskatīsim gadījumu kad $\lambda = 3$ un $\mu = 2$

$p_0(t) = \frac{2}{3+2}\left(1 + \frac{3}{2}e^{-(3+2)t}\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t}$




$p_1(t) = \frac{3}{2+3}\left(1 - e^{-(3+2)t}\right) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-5t}$



## 1.3 Stacionārais sadalījums.

### 1.3.1 MAS ar atteikumiem (bez rindas)

Pieņemsim, ka ir $n$ kanālu sistēma bez rindas.

Stacionārais sadalījums $(p_0; p_1; ...p_n)$ tas ir robežsadalījums $\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k$

$$\begin{cases} 0 = & -\lambda p_0 & +\mu p_1 & & \\ 0 = & \lambda p_0 & -(\lambda+\mu)p_1 & +2\mu p_2 & \\ 0 = & 0+ & \lambda p_1 & -(\lambda+2\mu)p_2 & +3\mu p_3 \\ .... & & ... & .... & ... \\ 0 = & \lambda p_{n-1} & -n\mu p_n & & \\ & & \sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1 & & \end{cases}$$

Sistēmas atrisinājums ir Erlanga formula

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\alpha^i}{i!}} = \frac{\alpha^k}{k!}p_0, \quad kur$$

$$p_0 = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+...+\frac{\alpha^n}{n!}}$$

**Efektivitātes rādītāji**

Atteikuma varbūtība, varbūtība ka klients netiks apkalpots $=p_n$.

Dīkstāves varbūtība -$p_0$.

Vidējais aizņemto kanālu skaits $n_A$

$$\begin{array}{cccccc} k & 0 & 1 & 2 & .... & n \\ p_k & p_0 & p_1 & p_2 & .... & p_n \end{array} \Longrightarrow \text{vid. aizņ.kanālu sk.=matemātiskā cerība}$$

$n_A = 0 * p_0 + 1 * p_1 + 2 * p_2 + .... + n * p_n$

**1. uzdevums.**

Dota divkanālu MAS:

$n = 2$

Vidēji vienas minūtes laikā pienāk 2 pieprasījumi. Viens pieprasījums vidēji tiek apkalpots 1 minūti vienā no kanāliem.

Atrast stacionāro sadalījumu $(p_0, p_{1,} p_2)$.

1 laika vienība=1min$\Longrightarrow \lambda = 2$ un $\mu = 1$

$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2$

1.variants (atrisinām sistēmu).

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_0 - (\lambda+\mu)p_1 + 2\mu p_2 = 0 \\ \lambda p_1 - 2\mu p_2 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2p_0 + p_1 = 0 \\ 2p_0 - 3p_1 + 2p_2 = 0 \\ 2p_1 - 2p_2 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow p_0 = \frac{1}{5}; \quad p_1 = \frac{2}{5}; \quad p_2 = \frac{2}{5}$

2. variants (izmantojam Erlanga formulas).

$p_0 = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}} = \frac{1}{1+\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2!}} = \frac{1}{5}$

$p_1 = \frac{\alpha^1}{1!}p_0 = 2 * \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$p_2 = \frac{\alpha^2}{2!}p_0 = \frac{2^2}{2} * \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Pārbaude: ievietosim $p_k$ vienādojumā $\lambda p_0 - (\lambda+\mu)p_1 + 2\mu p_2 = 0$

$2 * \frac{1}{5} - 3 * \frac{2}{5} + 2 * \frac{2}{5} = 0$

**2. uzdevums.**

Dota MAS,

$n = 3$,

Vidēji vienas stundas laikā pienāk 10 pieprasījumi. Viens pieprasījums vidēji tiek apkalpots 5 minūtes vienā no kanāliem.

1 laika vienība=1stunda$\Longrightarrow \lambda = 10$ un $\mu = 12$

$\alpha = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

1) Kāda ir dīkstāves varbūtība ?

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} \left(\frac{5}{6}\right)^k} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{1296}{2951} = 0.439\,17$$

2) Kāda ir varbūtība, ka klients netiks apkalpots ?

$$p_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{5}{6}\right)^3 p_0 = \frac{125}{1296} * \frac{1296}{2951} = \frac{125}{2951} = 4.235\,9 \times 10^{-2}$$

### 1.3.2 MAS ar rindu.

Pieņemsim ka ir $n-$ kanālu sistēma. Ja sistēmā nav brīvu kanālu, ienākušais pieprasījums stājas rindā uz apkalpošanu. Pieņemsim ka ja klients ir iestājies rindā, tad viņš noteikti tiks apkalpots. Ja vietas rindā jau ir aizņemtas, pieprasījums atstāj sistēmu neapkalpots.

$r-$ vietu skaits rindā

$\lambda-$ klientu plūsmas intensitāte;

$\mu-$ apkalpošanas intensitāte

Stāvokļi:

E$_0$- visi kanāli ir brīvi,

....

E$_k$- aizņemti $k$ kanāli (sistēmā ir $k$ klienti)

...

E$_n$- visi kanāli ir aizņemti.

E$_{n+1}$- aizņemti visi $n$ kanāli un viens klients ir rindā

E$_{n+2}$- aizņemti visi $n$ kanāli un divi klienti ir rindā

.....

E$_{n+r}-$aizņemti visi $n$ kanāli un rindā ir $r$ klientu.

Stacionārais sadalījums$\left( \underbrace{p_0; p_1; ...p_n;}_{varb.ka \quad aiz\c{n}emti \quad kan\bar{a}li} \quad \underbrace{p_{n+1}; p_{n+2}; ...; p_{n+r}}_{varb.atrasties \quad rind\bar{a}} \right)$

$$p_k = \begin{cases} \frac{\alpha^k}{k!} p_0, & 1 \leq k \leq n \\ \frac{\alpha^k}{n! n^{k-n}} p_0, & k > n \\ \sum\limits_{k=0}^{n+r} p_k = 1 & \\ p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{r} \frac{\alpha^s}{n^s}} & \end{cases}$$

**Piemērs:**

Dota masu apkalpošanas sistēma ar **diviem** apkalpojošiem kanāliem un **vienu** vietu rindā. Pieprasījumi var pienākt un tikt apkalpoti patvaļīgos laika momentos. Vidēji vienas stundas laikā pienāk 3 pieprasijumi. Viens pieprasījums vidēji tiek apkalpots 15 minūtes vienā no kanāliem. Ja sistēmā nav brīvu kanālu, ienākušais pieprasījums stājas rindā uz apkalpošanu. Ja vietas rindā jau ir aizņemtas, pieprasījums atstāj sistēmu neapkalpots.

Atrast Markova ķēdes stacionāro sadalījumu, pieprasijuma apkalpošanas varbūtību, atteikuma varbūtību, vidējo aizņemto kanālu skaitu.

Atrisinājums:

$n = 2$; $r = 1$

1 laika vienība=1stunda$\Longrightarrow \lambda = 3, \mu = 4$

$\alpha = \frac{3}{4}$

$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{r} \frac{\alpha^s}{n^s}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\frac{3}{4}}{1!}+\frac{\frac{3}{4}^2}{2!}\right)+\frac{\frac{3}{4}^2}{2!}\frac{\frac{3}{4}}{2}} = \frac{256}{547} = 0.468\,01$

$p_1 = \frac{\alpha^1}{1} p_0 = \frac{\frac{3}{4}}{1}\frac{256}{547} = \frac{192}{547} = 0.351\,01$

.

$p_2 = \frac{\alpha^2}{2!} p_0 = \frac{\frac{3}{4}^2}{2!}\frac{256}{547} = \frac{72}{547} = 0.131\,63$

.

$p_3 = \frac{\alpha^k}{n! n^{k-n}} p_0 = \frac{\frac{3}{4}^3}{2! 2^{3-2}}\frac{256}{547} = \frac{27}{547} = 0.049\,36$

Pārbaude: ievietosim vienādojumā priekš $E_2$ :

$\lambda p_1 - (\lambda + 2\mu)\, p_2 + 2\mu p_3 = 0$

$3p_1 - (3 + 2 * 4)\, p_2 + 2 * 4 p_3 = 0$

$3 * 0.351\,01 - 11 * 0.131\,63 + 8 * 0.049\,36 = -0.000\,02 \approx 0$

$3 * \frac{192}{547} - 11 * \frac{72}{547} + 8 * \frac{27}{547} = 0$

Markova ķēdes stacionārais sadalījums $(0.468; 0.351; 0.132; 0.049)$,

pieprasījuma apkalpošanas varbūtība - $(1 - p_3) = 1 - 0.049 = 0.951$

atteikuma varbūtība - p$_3 = 0.049$,

vidējo aizņemto kanālu skaits

$n_A = 1 * p_1 + 2 * p_2 + ... + n\,(p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + ... + p_{n+r})$

$n_A = 1 * 0.351 + 2 * (0.132 + 0.049) = \mathbf{0.713}$

**Piemērs:**

Dota masu apkalpošanas sistēma ar **diviem** apkalpojošiem kanāliem un **vienu** vietu rindā. Pieprasījumi var pienākt un tikt apkalpoti patvaļīgos laika momentos. Vidēji vienas minūtes laikā pienāk 1 pieprasījums. Viens pieprasījums vidēji tiek apkalpots 30 sekundes vienā no kanāliem. Ja sistēmā nav brīvu kanālu, ienākušais pieprasījums stājas rindā uz apkalpošanu. Ja vietas rindā jau ir aizņemtas, pieprasījums atstāj sistēmu neapkalpots.

Atrast Markova ķēdes stacionāro sadalījumu.

$n = 2$; $r = 1$

1 laika vienība=1minute$\Longrightarrow \lambda = 1, \mu = 2$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{r} \frac{\alpha^s}{n^s}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}+\frac{\frac{1}{2}^2}{2!}\right)+\frac{\frac{1}{2}^2}{2!}\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \frac{32}{53} = .\,60377$

$p_1 = \frac{\alpha^1}{1} p_0 = \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{32}{53} = \frac{16}{53} = .\,30189$

.

$p_2 = \frac{\alpha^2}{2!} p_0 = \frac{\frac{1}{2}^2}{2!}\frac{32}{53} = \frac{4}{53} = 7.\,5472 \times 10^{-2}$

.
$p_3 = \frac{\alpha^k}{n!n^{k-n}} p_0 = \frac{\frac{1}{2}^3}{2!2^{3-2}} \frac{32}{53} = \frac{1}{53} = 1.8868 \times 10^{-2}$
Markova ķēdes stacionārais sadalījums $(0.604; 0.302; 0.075; 0.019)$
Pārbaude: ievietosim vienādojumā priekš $E_2$ :
$\lambda p_1 - (\lambda + 2\mu) p_2 + 2\mu p_3 = 0$

$1p_1 - (1 + 2 * 2) p_2 + 2 * 2p_3 = 0$

$1 * 0.302 - 5 * 0.075 + 4 * 0.019 = 0.003 \approx 0$
precīzāk: $1 * \frac{16}{53} - 5 * \frac{4}{53} + 4 * \frac{1}{53} = 0$

Dota masu apkalpošanas sistēma ar **trim** apkalpojošiem kanāliem un **div**ām vietām rindā. Pieprasījumi var pienākt un tikt apkalpoti patvaļīgos laika momentos. Vidēji vienas stundas laikā pienāk 2 pieprasījumi. Viens pieprasījums vidēji tiek apkalpots 20 minūtes vienā no kanāliem. Ja sistēmā nav brīvu kanālu, ienākušais pieprasījums stājas rindā uz apkalpošanu. Ja vietas rindā jau ir aizņemtas, pieprasījums atstāj sistēmu neapkalpots

$n = 3; r = 2$

1 laika vienība=1stunda$\Longrightarrow \lambda = 2, \mu = 3$

1) P(pusstundas laikā atnāks divi klienti)=$P_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(2*\frac{1}{2}\right)^2}{2!}e^{-2*\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e^{-1} = 0.18394$

2) P(klientu apkalpos ilgāk par 40 minūtēm)=$e^{-\mu t_1} - e^{-\mu t_2}. = e^{-3*\frac{40}{60}} - e^{-\infty} = e^{-2} = 0$ $.13534$

3) Atrast Markova ķēdes stacionāro sadalījumu, pieprasījuma apkalpošanas varbūtību, vidējo aizņemto kanālu skaitu, kanāla noslodzes koeficientu.

$\alpha = \frac{2}{3}$

Stacionārais sadalījums$\left( \begin{array}{ccccccc} & \overbrace{p_0; p_1; p_2; p_3} & & & & \overbrace{p_4; p_5} & \\ varb.ka & aizņemti & n & kanāli & varb.atrasties & & rindā \end{array} \right)$

$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{r}\frac{\alpha^s}{n^s}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{1!}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3!}\right)+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3!}\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^1}{3^1}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{3^2}\right)} = \frac{6561}{12805} = 0.51238$

$p_1 = \frac{\alpha^1}{1}p_0 = \frac{\frac{2}{3}}{1}\frac{6561}{12805} = \frac{4374}{12805} = 0.34159$

.

$p_2 = \frac{\alpha^2}{2!}p_0 = \frac{\frac{2}{3}^2}{2!}\frac{6561}{12805} = \frac{1458}{12805} = 0.11386$

$p_3 = \frac{\alpha^3}{3!}p_0 = \frac{\frac{2}{3}^3}{3!}\frac{6561}{12805} = \frac{324}{12805} = 0.02530$

....

$p_4 = \frac{\alpha^k}{n!n^{k-n}}p_0 = \frac{\frac{2}{3}^4}{3!3^{4-3}}\frac{6561}{12805} = \frac{72}{12805} = 0.00562$

$p_5 = \frac{\alpha^k}{n!n^{k-n}}p_0 = \frac{\frac{2}{3}^5}{3!3^{5-3}}\frac{6561}{12805} = \frac{16}{12805} = 0.00124$

Pārbaude: ievietosim vienādojumā priekš $E_n = E_3$ :

$\lambda p_2 - (\lambda + 3\mu)\, p_3 + 3\mu p_4 = 0$

$2p_2 - (2 + 3 * 3)\, p_3 + 3 * 3p_4 = 0$

$2 * \frac{1458}{12805} - 11 * \frac{324}{12805} + 9 * \frac{72}{12805} = 0$

Markova ķēdes stacionārais sadalījums $(0.512; 0.341; 0.114; 0.006; 0.001)$

pieprasījuma apkalpošanas varbūtība - $(1 - p_5) = 1 - 0.001 = 0.999$

vidējo aizņemto kanālu skaits

$n_A = 1 * \frac{4374}{12805} + 2 * \frac{1458}{12805} + 3 * \left(\frac{324}{12805} + \frac{72}{12805} + \frac{16}{12805}\right) = \frac{8526}{12805} = 0.66583$

kanāla noslodzes koeficients $\frac{n_A}{n} = \frac{0.66583}{3} = 0.22194$

**Kontroldarba piemērs:**

Dota **divkanālu** masu apkalpošanas sistēma. Vienas minūtes laikā vidēji atnāk 8 klienti. Viens klients tiek vidēji apkalpots 40 sekundes.

**1.** Kāda ir varbūtība, ka 3minūšu laikā atnāks 12 klienti ?

Kāda ir varbūtība, ka nākamo klientu gaidīs ilgāk par 10 sekundēm?

**2.** Kāda ir varbūtība, ka vienu klientu apkalpos ilgāk par 1minūti?

**3** Aprēķināt sistēmas stacionāro sadalījumu, ja

3.1 nav rindas;

3.2 ir 3 vietas rindā;

3.2.1 Kāda ir varbūtība, ka klients netiks apkalpots?

3.2.2 Kāda ir dīkstāves varbūtība ?

3.2.3 Kāds ir vidēji aizņemto kanālu skaits?

Atbildes:

**1)** P(ka 3 minūšu laikā atnāks 12 klienti)=$P_{12}(3) = 2.8783 \times 10^{-3}$

P(nākamo klientu gaidīs ilgāk par 10 sekundēm)= $e^{-\frac{4}{3}} = 0.26360$

**2**) P( vienu klientu apkalpos ilgāk par 1minūti)=$e^{-\frac{3}{2}} = 0.22313$

**3** sistēmas stacionārais sadalījums

$\alpha = \frac{16}{3} = 5.3333$

**3.1** nav rindas;

$p_0 = \frac{9}{185} = 4.8649 \times 10^{-2}$

$p_1 = \frac{48}{185} = 0.25946$

$p_2 = \frac{128}{185} = 0.69189$

stacionārais sadalījums $(0.049; 0.259; 0.692)$

**3.2** ir 3 vietas rindā; $r = 3$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{r} \frac{\alpha^s}{n^s}} = \left[ \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!}\right) + \frac{\alpha^2}{2!}\left(\frac{\alpha^1}{2^1} + \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^3}{2^3}\right)\right]^{-1}$$

$p_0 = \frac{243}{104323} = 2.3293 \times 10^{-3}$

$p_1 = \frac{1296}{104323} = 1.2423 \times 10^{-2}$

$p_2 = \frac{3456}{104323} = 3.3128 \times 10^{-2}$

$p_3 = \frac{9216}{104323} = 8.8341 \times 10^{-2}$

$p_4 = \frac{24576}{104323} = 0.23558$

$p_5 = \frac{65536}{104323} = 0.6282$

3.2.1 Kāda ir varbūtība, ka klients netiks apkalpots?-$p_5 = 0.6282$

3.2.2 Kāda ir dīkstāves varbūtība ?-$p_0 = 2.3293 \times 10^{-3}$

3.2.3 Kāds ir vidēji aizņemto kanālu skaits?

$n_A = 1.9829$