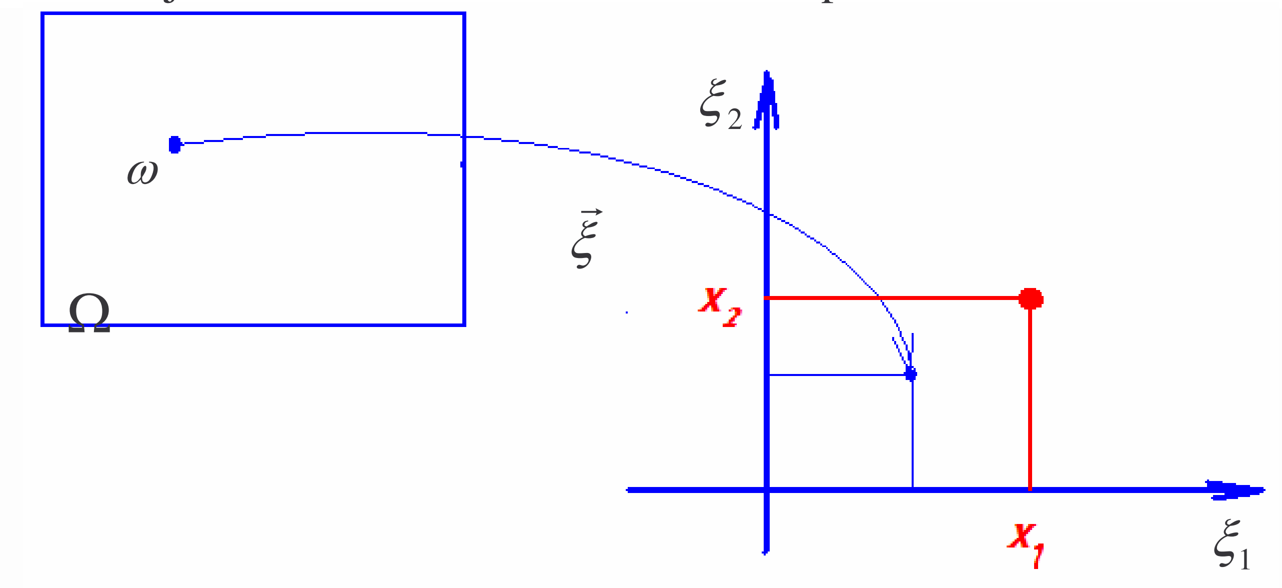
Daudzdimensiju gadījuma lielumi.

Dota varbūtību telpa $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Tajā uzdoti gadījuma lielumi $\xi_1 = \xi_1(\omega)$, $\xi_2 = \xi_2(\omega)$,..., $\xi_n = \xi_n(\omega)$. Katram elementārajam notikumam $\omega \in \Omega$ šie attēlojumi piekārto n-dimensiju skaitlisku vektoru. Vektoru $\xi = \left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right)$ sauc par daudzdimensiju gadījuma lielumu jeb gadījuma vektoru.

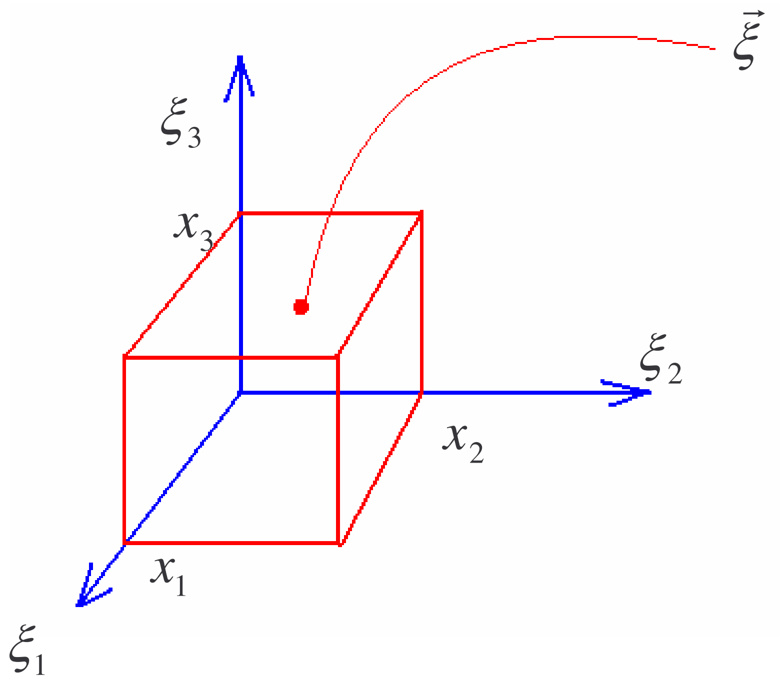
Definīcija. Skaitlisku funkciju $\vec{\xi} = \left(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)\right)$ sauc par gadījuma vektoru, ja visiem $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ir spēkā $\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\} \in \mathcal{F}$.



Gadījuma vektora sadalījuma funkcija

$$F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)$$

Sadalījuma funkcijas definēšana nozīmē varbūtību uzdošanu, ka gadījuma punkts *n*-dimensiju telpā $\vec{\xi} \in \mathbf{R}^n$ trāpa visos iespējamajos paralēlskaldņos $B \in \mathbf{R}^n$. ($\mathfrak{F}$ $\sigma-$ algebra, kas sastāv no visiem paralēlskaldņiem.)



Tāpat kā viendimensiju gadījuma lielumi arī gadījuma vektori var būt diskrēti vai nepārtraukti.

Definīcija. Gadījuma vektoru $\vec{\xi} \in \mathbf{R}^n$ sauc par diskrētu , ja eksistē punktu kopa $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots\} \in \mathbf{R}^n$, tāda, ka $P(\vec{\xi} = \vec{x}_k) = p_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Definīcija. Gadījuma vektoru $\vec{\xi} \in \mathbf{R}^n$ sauc par absolūti nepārtrauktu , ja eksistē nenegatīva funkcija $p_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$, tāda, ka jebkuram paralēlskaldnim $B \in \mathbf{R}^n$ var atrast varbūtību $P(\vec{\xi} \in B) = \int\limits_B \dots \int p_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

Blīvuma funkcija ir sadalījuma funkcijas *n*-tās kārtas jauktais parciālais atvasinājums pēc visām *n* koordinātām: $p_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\partial^n F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$

Nosacītie sadalījuma likumi.

Piemēram, dota divdimensiju gadījuma lieluma $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$ sadalījuma funkcija $F_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2)$. Atradīsim:

$$F_{\xi_1}(x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} F_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1\xi_2}(x_1, \infty),$$

$$F_{\xi_2}(x_2) = \lim_{x_1 \to \infty} F_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1\xi_2}(\infty, x_2).$$

Nepārtraukta gadījuma lieluma gadījumā:

$F_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(x_1)dx_1$, kur $p_{\xi_1}(x_1)$ ir gadījuma lieluma koordinātas ξ_1 sadalījuma blīvuma funkcija.

Gadījuma lielumu neatkarība.

Definīcija. Gadījuma lielumus ξ_1 un ξ_2 sauc par neatkarīgiem, ja jebkuriem x_1 un x_2 ir spēkā $F_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)$.

Neatkarīgiem gadījuma lielumiem:

1. jebkuriem $a_1 < a_2$ un $b_1 < b_2$ ir spēkā
2. $P(\xi_1 \in [a_1, a_2), \xi_2 \in [b_1, b_2)) = P(\xi_1 \in [a_1, a_2))P(\xi_2 \in [b_1, b_2))$
3. ja ξ_1 un ξ_2 diskrēti, tad

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) = P(\xi_1 = x_1)P(\xi_2 = x_2)$$

4. ja ξ_1 un ξ_2 nepārtraukti, tad

$$p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)$$

Vairāku gadījuma lielumu gadījumā:

1. diskrēti: $P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k = x_k)$
2. nepārtraukti: $p_{\xi_1 \dots \xi_2}(x_1, \dots, x_2) = \prod_{k=1}^{n} p_{\xi_k}(x_k)$

Funkcijas no gadījuma lielumiem.

Dota funkcija $y = f(x)$. Argumentu x aizstāsim ar gadījuma lielumu ξ ar zināmu sadalījumu. Iegūsim jaunu gadījuma lielumu $\eta = f(\xi)$. Uzdevums – atrast η sadalījuma likumu.

Piemēram, $y = x^2$, tad $\eta = \xi^2$

<u>Teorēma.</u> Ja $\eta = f(\xi)$ ir monotona funkcija, kuras inversā funkcija $\xi = f^{-1}(\eta)$ ir viennozīmīga, t.i., katrai ξ vērtībai atbilst tikai viena η vērtība un otrādi, tad gadījuma lieluma η blīvuma funkcija $p_\eta(y)$ ir vienāda ar $p_\eta(y) = p_\xi(f^{-1}(y))\dfrac{df^{-1}(y)}{dy}$.

(Pierādījumu var atrast, piemēram, *В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. М. Наука.1987.* 88. lpp.)

Piemērs. $\eta = \xi^2$. $\xi \sim [0,2]$ (ξ – sadalīts vienmērīgi segmentā $[0,2]$), tad

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & 0 < x < 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Inversā funkcija $\xi = \sqrt{\eta}$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$,

$\dfrac{df^{-1}(y)}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, un $p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}} = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0 < y < 4, \\ 0, & y > 4 \end{cases}$, jo, pārrēķinot intervāla robežas, ja $0 < \xi < 2$, tad $0 < \eta < 4$.

Gadījuma skaitļu ģeneratori.

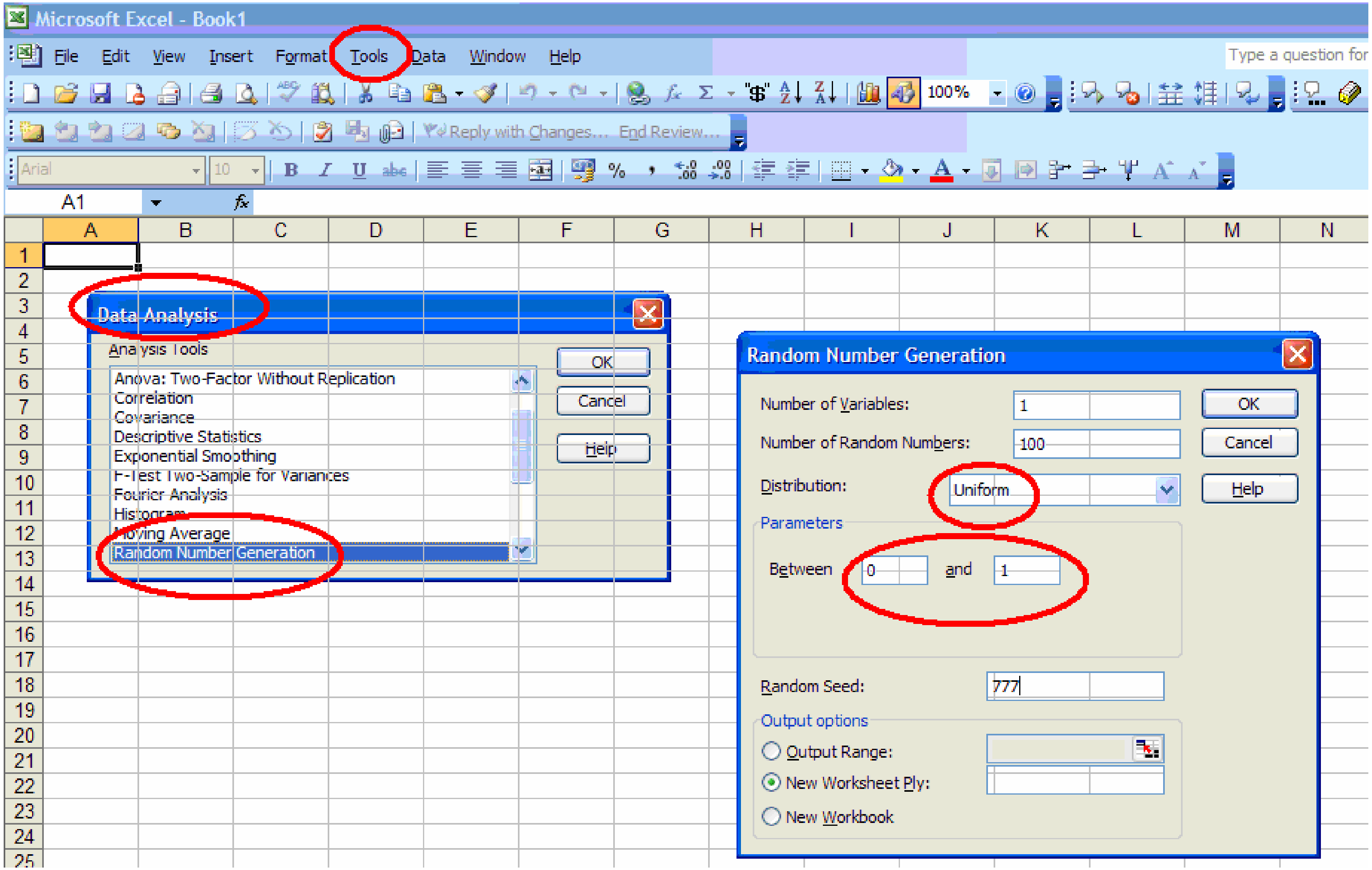
Piemērā, izmantojot vienmērīgi $\xi \sim [0,2]$ sadalītu gadījuma lielumu, iegūts jauns varbūtību sadalījums. Interesants uzdevums – atrast funkciju, kas pārveido vienmērīgi sadalīto gadījuma lielumu par iepriekš uzdotu gadījuma lielumu ar sadalījuma funkciju $G(x)$. Pieņemsim $\xi \sim [0,1]$. Gadījuma lielumam η ir sadalījuma funkcija $G(x)$.

Tad saskaņā ar teorēmu pārveidojums $\eta = G^{-1}(\xi)$.

<u>Piemērs</u>. $p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-y), & 0 < y < 2, \\ 0, & y \notin [0,2] \end{cases}$, tad $F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y - \frac{y^2}{4}, & 0 < y \le 2, \\ 1, & y > 2 \end{cases}$

$G(y) = y - \frac{y^2}{4}$ Inverso funkciju atrod, atrisinot vienādojumu $x = G(y)$, tad

$x = y - \frac{y^2}{4}$, $\quad y = 2\left(1 - \sqrt{1-x}\right)$. Gadījuma lielumam $\eta = 2\left(1 - \sqrt{1-\xi}\right)$ būs iepriekš uzdotais sadalījuma likums.


Microsoft Excel - Book1
File Edit View Insert Format Tools Data Window Help
Data Analysis
Analysis Tools
Anova: Two-Factor Without Replication
Correlation
Covariance
Descriptive Statistics
Exponential Smoothing
F-Test Two-Sample for Variances
Fourier Analysis
Histogram
Moving Average
Random Number Generation
OK
Cancel
Help
Random Number Generation
Number of Variables: 1
Number of Random Numbers: 100
Distribution: Uniform
Parameters
Between 0 and 1
Random Seed: 777
Output options
Output Range:
New Worksheet Ply:
New Workbook
OK
Cancel
Help

Gadījuma lielumu skaitliskie raksturotāji.

Matemātiskā cerība.

Empīriskā vidējā vērtība. Gadījuma lielums ξ – skolēna atzīmes matemātikā semestra laikā. ξ – kaut kā sadalīts diskrēts gadījuma lielums, kas pieņem vērtības no kopas $\Xi = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Ξ sauksim par ģenerālkopu. Pieņemsim, ka n eksperimentu rezultātā iegūta izlase no ģenerālkopas $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Xi^n$.

Piemēram: $\vec{x} = (7,7,6,4,2,8,6,3,1,8,7,7)$. Semestra beigās liecībā tiek ielikta noapaļota līdz veselam skaitlim vidējā atzīme, jeb izlases vidējā vērtība:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{12}(7+7+6+4+2+8+6+3+1+8+7+7) = \frac{66}{12} = 5.5 \approx 6$$

Ievērojot, ka vairāki izlases elementi atkārtojas, varam rakstīt:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{12}(7\cdot 4 + 6\cdot 2 + 4\cdot 1 + 2\cdot 1 + 8\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1) = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{n_i}{n}$$

$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{n_i}{n}$ – Izlases vidējā vērtība vienāda ar novēroto gadījuma lieluma vērtību reizinājumu ar novērojumu frekvenci summu.

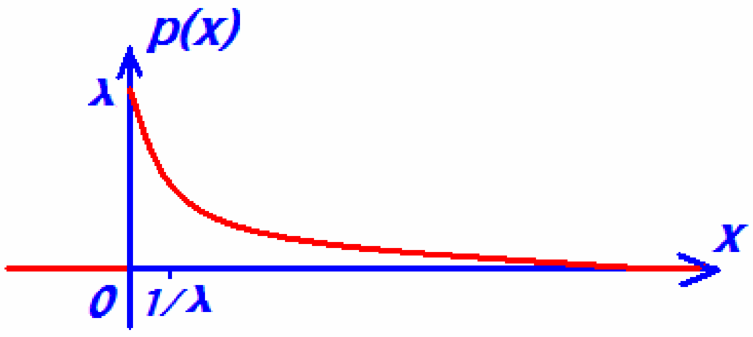
Teorētiskais vidējais ir gadījuma lieluma matemātiskā cerība, ko iegūst, aizstājot novērojumu frekvenci ar varbūtību.

Diskrēta gadījuma lieluma matemātiskā cerība: $$M\,\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(\xi = x_i)$$

ξ	x_1	x_2	x_3	....	x_n	....
p	p_1	p_2	p_3	....	p_n	....

$$M\,\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Nepārtraukta gadījuma lieluma matemātiskā cerība: $$M\,\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$



$$M\,\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \lambda \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = e^{-\lambda x} \\ du = dx & v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{bmatrix} = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Ģeometriski – matemātiskā cerība ir figūras, ko ierobežo blīvuma funkcija, smaguma centra koordināta.

Matemātiskās cerības īpašības.

1. $Mc = c$

ξ	c
p	1

2. $M\left(c\xi\right) = cM\xi$

$$M\left(c\xi\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(cx\right)p(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx = cM\xi$$

3. $\left|M\xi\right| \le M\left|\xi\right|$

$$\left|M\xi\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|x\right|p(x)dx = M\left|\xi\right|$$

4. $M\left(\xi_1 \pm \xi_2\right) = M\xi_1 \pm M\xi_2$

4a. $M\left(c_1\xi_1 \pm c_2\xi_2\right) = c_1 M\xi_1 \pm c_2 M\xi_2$

5. Ja gadījuma lielumi ξ_1 un ξ_2 neatkarīgi, tad $M\left(\xi_1\xi_2\right) = M\xi_1 M\xi_2$

$$M\left(\xi_1\xi_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp_{\xi_1\xi_2}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}xp_{\xi_1}(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}yp_{\xi_2}(y)dy = M\xi_1 M\xi_2$$

Matemātiskās cerības piemēri.

1. <u>Bernulli sadalījums</u> $P\left(\xi=1\right)=p$, $P\left(\xi=0\right)=1-p$

$$M\xi=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

2. <u>Binomiālais sadalījums</u> $\xi\sim B(n,p)$, $\quad P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$$M\xi=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=*$$

Ievērojot kombināciju īpašību $kC_n^k=\dfrac{kn!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=nC_{n-1}^{k-1}$

$$*=\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=$$

$$=np\sum_{k=0}^{n}C_{n-1}^{k}p^k(1-p)^{n-1-k}=np\left(p+(1-p)\right)^{n-1}=np$$

Izmantojot 4. matemātiskās cerības īpašību: binomiāls lielums ir *n* Bernulli lielumu summa. Ja Bernulli lielumam matemātiskā cerība ir *p*, tad binomiālajam *np*.

3. <u>Puasona sadalījums</u>. $P(\xi=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$$M\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

4. Vienmērīgais sadalījums. $\xi \sim [a, b]$

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & x>b\end{cases}$$

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)dx=\int_a^b \frac{xdx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}$$

5. Normālais sadalījums. $\xi \sim N(a, \sigma^2)$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\begin{bmatrix} y=\dfrac{x-a}{\sigma}\\ x=\sigma y+a\\ dx=\sigma dy\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma y+a)e^{-\frac{y^2}{2}}dy=$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy+a\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy=a$$

nepāru funkcija, integrēta simetriskās robežās = 0

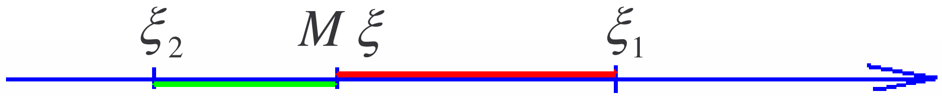
standartnormālā sadalījuma blīvuma funkcija, integrēta bezgalīgās robežās

6. Eksponenciālais sadalījums. $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}, \quad x>0,$ $\qquad M\xi=1/\lambda$.

Dispersija.

Matemātiskā cerība raksturo gadījuma lieluma vidējo izturēšanos. Svarīgs skaitlisks raksturotājs ir izkliedes ap matemātisko cerību mērs.

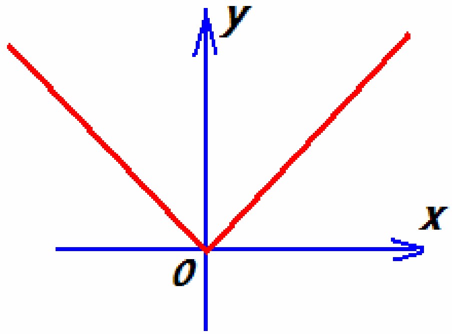
1. mēģinājums – vidējās novirzes no vidējā mērs:

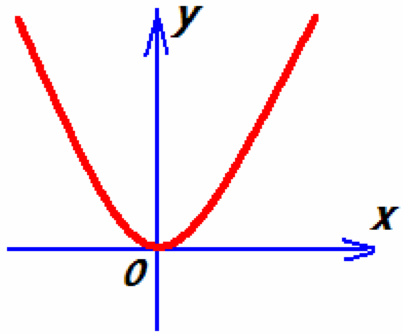


$$M(\xi - M\xi) = M\xi - MM\xi = M\xi - M\xi = 0$$

2. mēģinājums – vidējās novirzes no vidējā pēc moduļa mērs:

$$M\left|\xi - M\xi\right| \geq 0$$





Definīcija. Par gadījuma lieluma ξ dispersiju sauc skaitli $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$

Definīcija. Skaitli $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$ sauc par gadījuma lieluma ξ vidējo kvadrātisko novirzi.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2\left(M\xi\right)^2 + \left(M\xi\right)^2 =$$
$$= M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2$$

Diskrēta gadījuma lieluma dispersija $D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M\xi)^2 p_i$ vai arī

$$D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i\right)^2$$

Nepārtraukta gadījuma lieluma dispersija $D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p(x)dx$ vai arī

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx\right)^2$$

Dispersijas īpašības.

1. $D\xi \geq 0$
2. $Dc = 0$

2a. No tā, ka $Dc = 0$ seko, ka $P(\xi = c) = 1$

3. $D(c\xi) = c^2 D\xi$

$$D\left(c\xi\right) = M\,(c\xi - M\,(c\xi))^2 = c^2 M\,(\xi - M\,\xi)^2 = c^2 D\xi$$

4. $D(\xi_1 \pm \xi_2) = M\,((\xi_1 \pm \xi_2) - M\,(\xi_1 \pm \xi_2))^2 = M\,((\xi_1 - M\,\xi_1) \pm (\xi_2 - M\,\xi_2))^2 =$

$$= M\,((\xi_1 - M\,\xi_1)^2 \pm 2(\xi_1 - M\,\xi_1)(\xi_2 - M\,\xi_2) + (\xi_2 - M\,\xi_2)^2) =$$

$$= M\,(\xi_1 - M\,\xi_1)^2 \pm 2M\,((\xi_1 - M\,\xi_1)(\xi_2 - M\,\xi_2)) + M\,(\xi_2 - M\,\xi_2)^2 =$$

$$= D\xi_1 + D\xi_2 \pm 2M\,((\xi_1 - M\,\xi_1)(\xi_2 - M\,\xi_2))$$

4a. Neatkarīgiem gadījuma lielumiem $D(\xi_1 \pm \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$. (seko no matemātiskās cerības 5. īpašības, jo tad

$$M\,((\xi_1 - M\,\xi_1)(\xi_2 - M\,\xi_2)) = M\,(\xi_1 - M\,\xi_1)M\,(\xi_2 - M\,\xi_2) = 0$$

Dispersijas piemēri.

1. Bernulli sadalījums $P\left(\xi=1\right)=p$, $P\left(\xi=0\right)=1-p$

$$D\xi=(1-p)^2\cdot p+(0-p)^2\cdot(1-p)=(1-2p+p^2)p+p^2(1-p)=$$

$$=p-2p^2+p^3+p^2-p^3=p-p^2=p(1-p)$$

2. Binomiālais sadalījums $\xi\sim B(n,p)$, $P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

Izmantojot 4a. dispersijas īpašību: binomiāls lielums ir *n* neatkarīgu Bernulli lielumu summa. Ja Bernulli lielumam dispersija ir $p(1-p)$, tad binomiālajam $np(1-p)$.

3. Puasona sadalījums. $P(\xi=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Atradīsim

$$M\left(\xi(\xi-1)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^{k-2}}{k!}e^{-\lambda}=$$

$$=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}=\lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda^2$$

Tā kā $M\left(\xi(\xi-1)\right)=M\xi^2-M\xi$ un $M\xi=\lambda$, tad

$$M\xi^2=M\left(\xi(\xi-1)\right)+M\xi=\lambda^2+\lambda,\quad D\xi=M\xi^2-\left(M\xi\right)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

4. <u>Vienmērīgais sadalījums</u>. $\xi \sim [a,b]$, $p(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & x>b\end{cases}$ $M\xi=\dfrac{a+b}{2}$

$$D\xi=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b(x^2-x(a+b)+\frac{\left(a+b\right)^2}{4})dx=$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2(a+b)}{2}+\frac{x\left(a+b\right)^2}{4}\right)\Bigg|_a^b=$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{(b^2-a^2)(a+b)}{2}+\frac{(b-a)\left(a+b\right)^2}{4}\right)=$$

$$=\frac{4b^3-4a^3+6a^3-6ab^2+6a^2b-6b^3+3a^2b+6ab^2+3b^3-3a^3-6a^2b-3ab^2}{12(b-a)}=$$

$$=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{12(b-a)}=\frac{(b-a)^3}{12(b-a)}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

5. <u>Normālais sadalījums</u>. $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $M\xi = a$

$$D\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{l} y = \frac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma y + a \\ dx = \sigma dy \end{array} \right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = y & dv = y e^{-\frac{y^2}{2}} \\ du = dy & v = -e^{-\frac{y^2}{2}} \end{array} \right] = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sigma^2$$

tiecas uz 0

standartnormālā sadalījuma blīvuma funkcija, integrēta bezgalīgās robežās =1

6. Eksponenciālais sadalījums. $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \qquad M\xi = 1/\lambda$.

$$D\xi = \lambda \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty \left(x^2 - \frac{2x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = e^{-\lambda x} \\ du = 2x dx & v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{bmatrix} =$$

$$= -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx - 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

Izlases dispersija:

Gadījuma lielums $\xi \in \Xi$. $\quad \Xi$ – ģenerālkopa, izlase no ģenerālkopas

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Xi^n$. Izlases vidējā vērtība $\quad \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Izlases dispersija $\quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x} \right)^2$