Klasiskā varbūtību definīcija

Piemērs. Kastē ir n lodītes, no kurām k ir baltas un n-k – melnas. Uz labu laimi izvilkta viena lodīte. Kāda varbūtība, ka tā ir balta?

Katras no lodītēm izvilkšanas varbūtība ir vienāda.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Jebkuriem ω_i un ω_j $(i \neq j)$ $\omega_i \omega_j = \varnothing$, savukārt $P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$, tātad katram ω_i varbūtība $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$.

Lai izvilktu baltu lodīti, der jebkura no k lodītēm. Ja notikums A – izvilkta balta lodīte, tad $P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{k} = \frac{k}{n}$

Definīcija. Ja elementāru notikumu telpa sastāv no galīga skaita vienādi varbūtīgiem elementāriem notikumiem, tad par patvaļīga notikuma varbūtību sauc šim notikumam labvēlīgā elementāro notikumu skaita attiecību pret visu elementāro notikumu skaitu. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Klasiskās definīcijas trūkumi.

1. derīga tikai galīgai elementāru notikumu telpai,
2. elementāro notikumu telpa jākonstruē tā, lai visi elementārie notikumi būtu vienādi varbūtīgi.

Piemērs, kur nav izmantojama klasiskā shēma.
Monētu met atkārtoti, līdz pirmo reizi uzkrīt ģerbonis.

$$\Omega=\left\{\{\text{Ģ}\},\{C,\text{Ģ}\},\{C,C,\text{Ģ}\},\ldots\{C,C,\ldots,C\text{Ģ}\},\ldots\right\}$$

<table>
<tr><td>Ģ</td><td colspan="3">½</td><td>½</td></tr>
<tr><td>CĢ</td><td rowspan="4">½</td><td>½ no ½</td><td rowspan="4">.........</td><td>¼</td></tr>
<tr><td>CCĢ</td><td rowspan="3">½ no ½</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr>
<tr><td>.........</td><td>$\frac{1}{16}$</td></tr>
<tr><td>CC...CĢ</td><td>.......</td></tr>
</table>

Statistiskā varbūtības definīcija.

Frekvenču stabilitāte

$$\left\{\frac{n_A}{n}\right\}\underset{n\to\infty}{\to}P(A)$$

Kombinatorikas elementi.

Apzīmējumi: $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ *– nesakārtota kopa,* $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ *– sakārtota kopa*

Permutācijas. Par permutācijām sauc sakārtotas izlases no *n* elementu kopas pa *n* elementiem katrā, kas atšķiras cita no citas ar elementu kārtību.

Piemērs: kopas $\{1,2,3\}$ permutācijas: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(3,2,1)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$

n	*n*-1	*n*-2	*n*-3	....	3	2	1

n permutāciju skaits: $P_n = n!$

<u>Variācijas bez atkārtojumiem.</u> Par variācijām bez atkārtojumiem sauc sakārtotas izlases no n elementu kopas pa k elementiem karā ($k \leq n$), kas atšķiras cita no citas ar saviem elementiem un to kārtību.

<u>Piemērs:</u> kopas $\{1,2,3,4\}$ variācijas pa diviem elementiem: $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$ $(3,4)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$ $(3,2)$, $(4,2)$ $(4,3)$

n	n-1	n-2	n-3	....	n-k+3	n-k+2	n-k+1

k

Variāciju bez atkārtojumiem no n elementiem pa k elementiem skaits:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>Variācijas ar atkārtojumiem.</u> Par variācijām ar atkārtojumiem sauc sakārtotas izlases no n elementu kopas pa k elementiem karā, kas atšķiras cita no citas ar saviem elementiem un to kārtību. Elementi var atkārtoties.

<u>Piemērs:</u> kopas $\{1,2,3,4\}$ variācijas pa diviem elementiem: $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$ $(3,4)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$ $(3,2)$, $(4,2)$ $(4,3)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline n & n & n & n & \ldots\ldots\ldots\ldots & n & n & n \\ \hline\end{array}}_{k}$$

Variāciju ar atkārtojumiem no n elementiem pa k elementiem skaits:

$$\tilde{A}_n^k = nn...n = n^k$$

Kombinācijas bez atkārtojumiem. Par kombinācijām bez atkārtojumiem sauc nesakārtotas izlases no n elementu kopas pa k elementiem karā ($k \leq n$), kas atšķiras cita no citas ar saviem elementiem.

Piemērs: kopas $\{1,2,3,4\}$ kombinācijas pa diviem elementiem: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$ $\{3,4\}$

Kombināciju skaits ir $k!$ Reizes mazāks par atbilstošo variāciju skaitu, jo $k!$ veidos izlases elementus var pārkārtot.

Kombināciju bez atkārtojumiem no n elementiem pa k elementiem skaits:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Daži piemēri

1. Kastē atrodas 10 vienādas sanumurētas ar numuriem no 1 līdz 10 detaļas. Uz labu laimi izvēlētas 6 detaļas. Kāda varbūtība, ka starp izvēlētajām ir

a) detaļa ar numuru 1? b) detaļas ar numuriem 1 un 2?

Daži piemēri

1. Kastē atrodas 10 vienādas sanumurētas ar numuriem no 1 līdz 10 detaļas. Uz labu laimi izvēlētas 6 detaļas. Kāda varbūtība, ka starp izvēlētajām ir

a) detaļa ar numuru 1? b) detaļas ar numuriem 1 un 2?

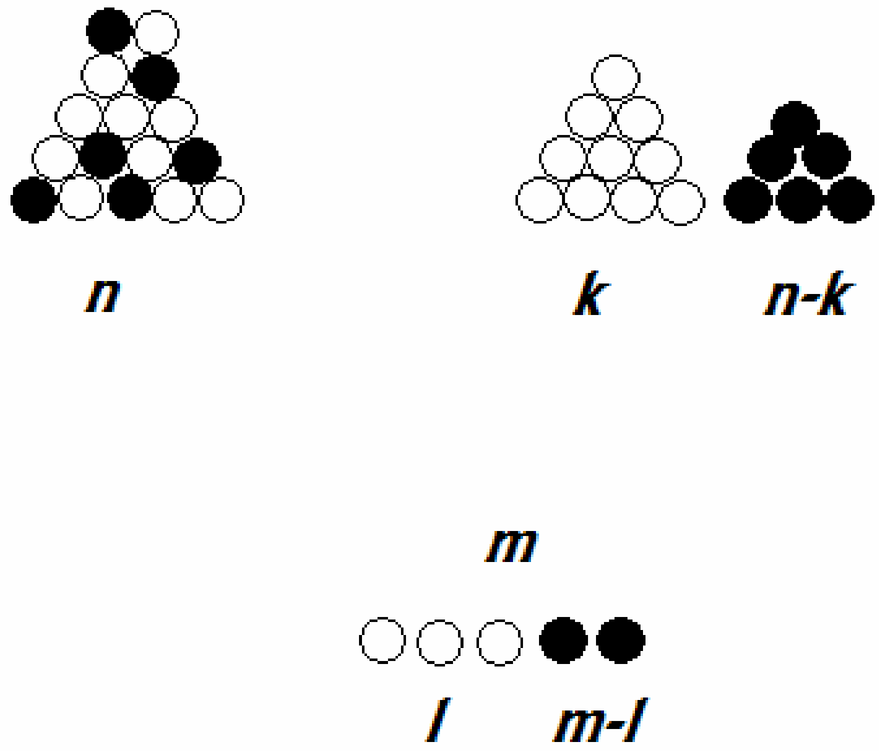
Varbūtības aprēķins pēc klasiskās shēmas: $P(A) = |A| \big/ |\Omega|$

Kopējais elementāro notikumu skaits, velkot 6 detaļas no 10 ir: C_{10}^{6}

a) Notikumam A labvēlīgo elementāro notikumu skaits: derīgas visas izlases, kurās atrodas 1. detaļa un 5 jebkuras citas detaļas. 1. detaļu var paņemt vienā veidā, piecas citas var paņemt C_9^5 veidos. Tātad: $P(A) = \dfrac{C_9^5}{C_{10}^6} = \dfrac{9!}{5!4!} \Big/ \dfrac{10!}{6!4!} = \dfrac{6}{10} = 0.6$

b) Notikumam B labvēlīgo elementāro notikumu skaits: derīgas visas izlases, kurās atrodas 1. un 2. detaļa un 4 jebkuras citas detaļas. 1. un 2. detaļu var paņemt vienā veidā, četras citas var paņemt C_8^4 veidos: $P(B) = \dfrac{C_8^4}{C_{10}^6} = \dfrac{8!}{4!4!} \Big/ \dfrac{10!}{6!4!} = \dfrac{6 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \dfrac{1}{3}$

2. Kastē atrodas n lodītes, no kurām k ir baltas un atlikušās n-k melnas. Uz labu laimi izvēlētas m lodītes. Kāda varbūtība, ka starp izvēlētajām ir l baltas un m-l melnas lodītes?



2. Kastē atrodas *n* lodītes, no kurām *k* ir baltas un atlikušās *n-k* melnas. Uz labu laimi izvēlētas *m* lodītes. Kāda varbūtība, ka starp izvēlētajām ir *l* baltas un *m-l* melnas lodītes?

m lodītes no *n* var izvēlēties C_n^m veidos.

Lai iestātos notikums *A,* katrā no šīm no *m* lodīšu izlasēm jābūt *l* baltām lodītēm. Kopējais balto lodīšu skaits ir *k*.

l baltas lodītes var izvēlēties C_k^l veidos. Aizpildot *l* vietas izlasē ar baltajām lodītēm, atliek *m-l* vietas, kas jāaizpilda ar melnajām lodītēm. Kopējais melno lodīšu skaits ir *n-k*.

m-l melnas lodītes var izvēlēties C_{n-k}^{m-l} veidos.

Kopējais notikumam *A* labvēlīgo izlašu skaits $C_k^l \cdot C_{n-k}^{m-l}$

$$P(A) = \frac{C_k^l \cdot C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$$

$$P(A) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_6^2}{C_{16}^5} = \frac{10!6!5!11!}{3!7!2!4!16!} = \frac{75}{182} = 0.41209$$

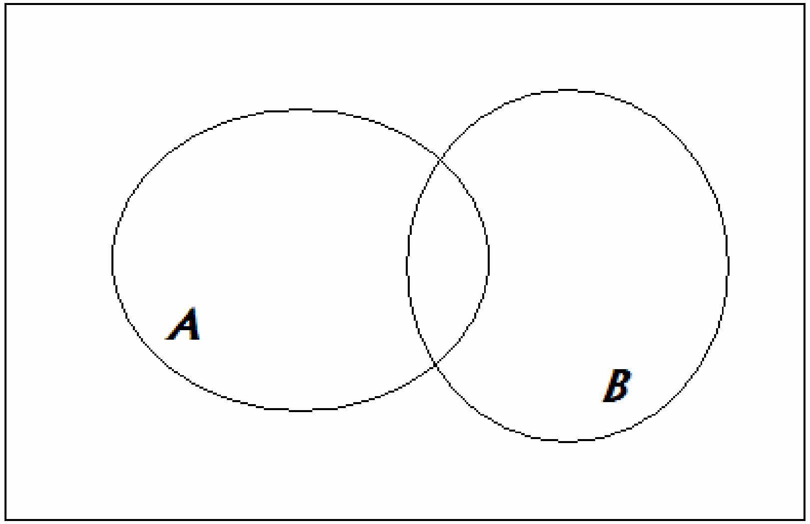
Nosacītās varbūtības. Neatkarīgi notikumi.

$$|\Omega| = n$$

$$|A| = m$$

$$|B| = k \quad (k > 0)$$

$$|AB| = r$$



$$P(A|B) = \frac{r}{k} = \frac{r/n}{k/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \qquad P(BA) = P(A)P(B|A)$$

Piemērs. Kastē ir 4 baltas un 6 melnas lodītes. Atrast varbūtību, ka no divām uz labu laimi paņemtām lodītēm viena ir balta un otra melna.

1. variants $$P(A)=\frac{C_4^1\cdot C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{4\cdot 6\cdot 2}{10\cdot 9}=\frac{8}{15}$$

2. variants $P(b)=\frac{4}{10}$ $\quad P(m|b)=\frac{6}{9}$ $\quad P(b,m)=\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{4}{15}$

$P(m)=\frac{6}{10}$ $\quad P(b|m)=\frac{4}{9}$ $\quad P(m,b)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$

$$P\left(\left\{"b"\ un\ "m"\right\}\right)=P(b,m)+P(m,b)=\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{8}{15}$$

Secinājums. Kopējā vairāku notikumu iestāšanās varbūtība ir vienāda ar viena no notikumiem iestāšanās varbūtību reizinājumu ar pārējo notikumu nosacītajām iestāšanās varbūtībām, uzskatot, ka iepriekšējie notikumi ir notikuši.

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$$

Pieņemsim, ka notikums A nav atkarīgs no notikuma B iestāšanās, t.i., $P(A) = P(A|B)$. Tad var rakstīt: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$, vai arī $P(AB) = P(A)P(B)$

No šejienes $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. Tam būtu jābūt vienādam ar $P(B|A)$. Tātad šajā gadījumā arī $P(B|A) = P(B)$, t.i., notikums B nav atkarīgs no notikuma A iestāšanās, jeb notikumi A un B ir neatkarīgi.

Visas trīs izteiksmes ir ekvivalentas:

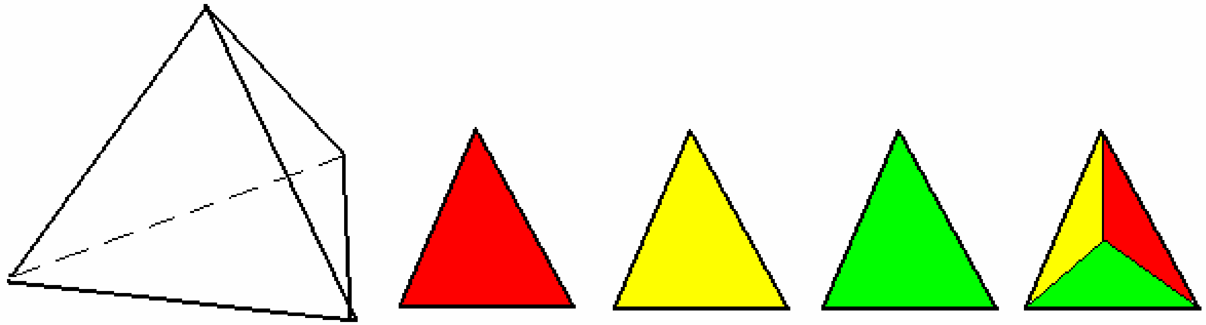
$$P(A|B) = P(A) \qquad P(B|A) = P(B) \qquad P(AB) = P(A)P(B)$$

<u>Īpašības.</u>

1. Ja notikumi A un B ir neatkarīgi, tad arī $\bar{A}$ un B ir neatkarīgi.
2. Ja notikumi A un B ir neatkarīgi, notikumi A un C ir neatkarīgi un $BC = \varnothing$, tad neatkarīgi ir A un $B \cup C$.

Vispārinājums vairāku notikumu gadījumam

Uz plaknes met tetraedru, kura skaldnes nokrāsotas kā parādīts zīmējumā. Notikumi:
S – uz plaknes uzkritusī skaldne satur sarkanu krāsu
D – uz plaknes uzkritusī skaldne satur dzeltenu krāsu
Z – uz plaknes uzkritusī skaldne satur zaļu krāsu



$$P(S) = P(D) = P(Z) = \frac{1}{2}$$

$P(SD) = \frac{1}{4} = P(S)P(D)$ $\quad$ $P(SZ) = \frac{1}{4} = P(S)P(Z)$ $\quad$ $P(DZ) = \frac{1}{4} = P(D)P(Z)$

Notikumi ir pa pāriem neatkarīgi.

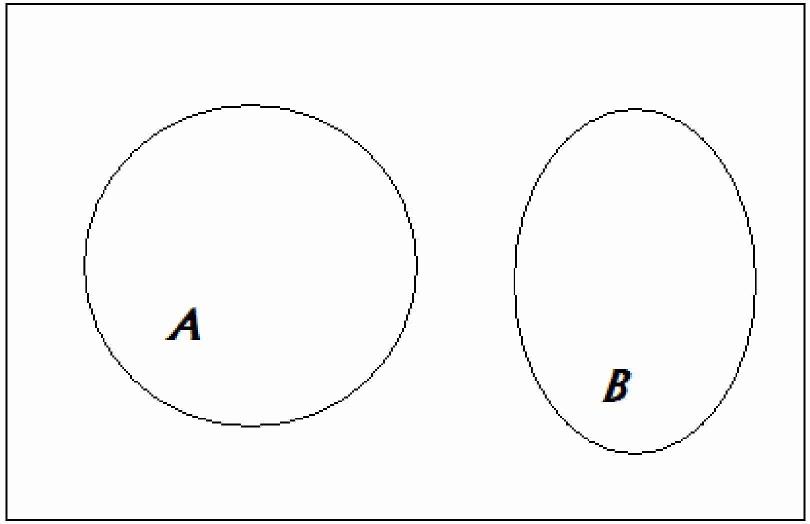
$$P(SDZ) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(S)P(D)P(Z)$$

Notikumi nav neatkarīgi kopumā.

Vai neatkarīgi notikumi var būt nesavienojami?

Pieņemsim, ka $P(A) > 0$, $P(B) > 0$.

Pieņemsim, ka $P(A)P(B) = P(AB) > 0$



$P(AB) = P(B)P(A|B)$, bet

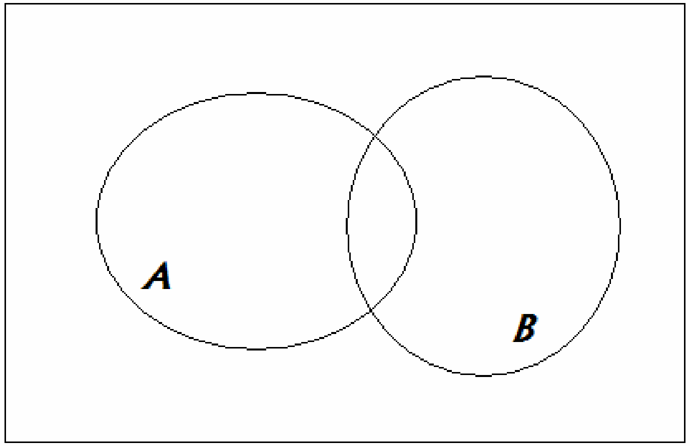
$P(A|B) = 0$

Pretruna!

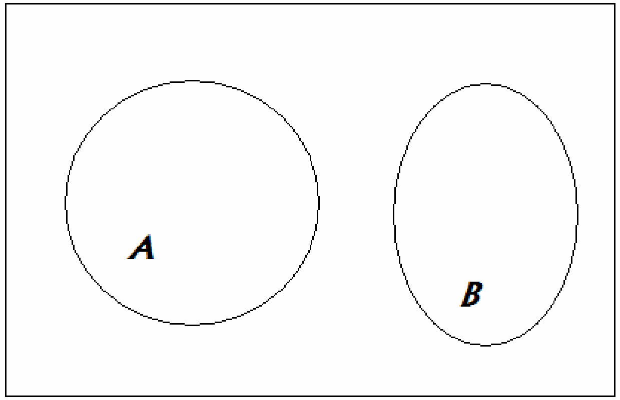
Neatkarīgi notikumi vienmēr ir savienojami

Varbūtību saskaitīšana

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Speciālgadījums nesavienojamiem notikumiem $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Varbūtību reizināšana

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

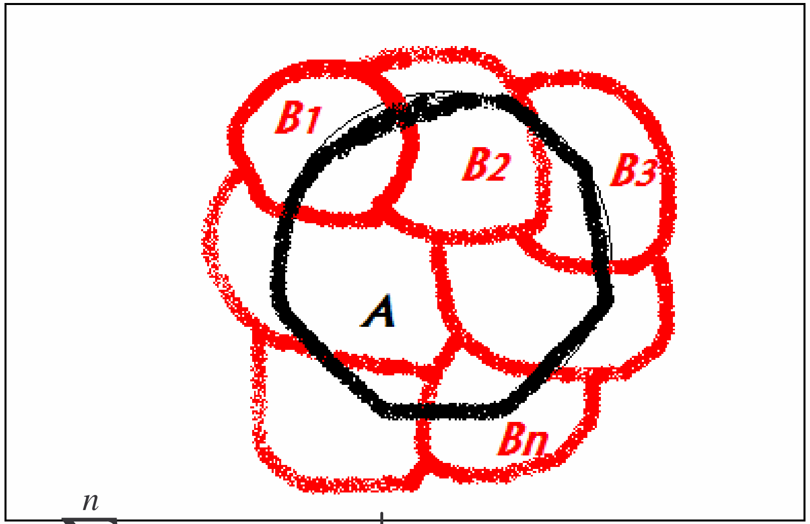
Speciālgadījums neatkarīgiem notikumiem $P(AB) = P(A)P(B)$

Pilnās varbūtības formula

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

$$B_i B_j = \varnothing \quad (i \neq j)$$

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} AB_j$$



$$P(A) = P(\bigcup_{j=1}^{n} AB_j) = \sum_{j=1}^{n} P(AB_j) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)$$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)$$

Piemērs. Vienā kastē ir 1 balta un 9 sarkanas lodītes, otrā – 9 baltas un 1 sarkana. No uz labu laimi izvēlētas kastes izvilkta 1 lodīte. Kāda varbūtība, ka tā ir balta?

A – izvilkta balta lodīte; B_1 – lodīte vilkta no 1. kastes; B_2 – lodīte vilkta no 2. kastes

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2} \qquad P(A|B_1) = \frac{1}{10} \qquad P(A|B_2) = \frac{9}{10}$$

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\frac{9}{10} = \frac{1}{2}$$

Baijesa formula.

Atradīsim varbūtības $P(B_j|A)$

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_jA)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Iepriekšējā piemērā pieņemsim, ka baltā lodīte ir izvilkta (noticis notikums A). Kāda varbūtība, ka tā ir izvilkta no 1. kastes?

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}$$