Programma.

1. Gadījuma procesa definīcija. Daudzdimensiju sadalījumi. Gadījuma procesa korelācijas funkcija. Gadījuma procesi plašā nozīmē.
2. Markova ķēdes ar diskrētu laiku. Stāvokļu klasifikācija.
3. Markova ķēdes ar diskrētu laiku stacionārais sadalījums.
4. Markova ķēdes ar nepārtrauktu laiku. Kolmogorova-Čepmena vienādojumi.
5. Markova ķēdes ar nepārtrauktu laiku stāvokļu atgriezeniskuma nosacījumi, stacionārais sadalījums. Erlanga formulas.
6. Brauna kustības process. Jēdziens par Lebega-Stiltjesa integrāli.
7. Stohastiskie diferenciālvienādojumi. Difūzijas procesi.

Literatūra

1. V.Carkova, K.Šadurskis. Markova procesi. Mācību līdzeklis. Rīga, RTU, 2001, 121 lpp.; http://mspi.itl.rtu.lv/Sadurskis/materiali
2. V.Carkova, K.Šadurskis. Gadījuma procesi. Mācību līdzeklis. Rīga, RTU, 2005., http://mspi.itl.rtu.lv/Sadurskis/materiali
3. V. Carkova, D.Kalniņa. Gadījuma procesi. , Izd LU, Rīga,1981.g.
4. Sh.Ross. Introduction to Probability Models. 5th Ed., Acad. Press, NY, 1995.
5. В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. М. Высшая шк.

$$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \quad \rightarrow \quad (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathrm{P}_{\xi})$$

$$\xi = \xi(t, \omega)$$

Par gadījuma procesu sauc gadījuma lielumu $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ kopu, kas uzdoti vienā varbūtību telpā $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un atkarīgi no parametra *t*, kas pieņem vērtības no kādas kopas *T*.

$T \subseteq \{0, \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \dots\}$ - process ar diskrētu laiku

$T \subseteq \mathbb{R}^1$ - process ar nepārtrauktu laiku

$T \subseteq \mathbb{R}^n$ - gadījuma funkcija ($\mathbb{R}^2$ vai $\mathbb{R}^3$ gadījumā – gadījuma lauks)

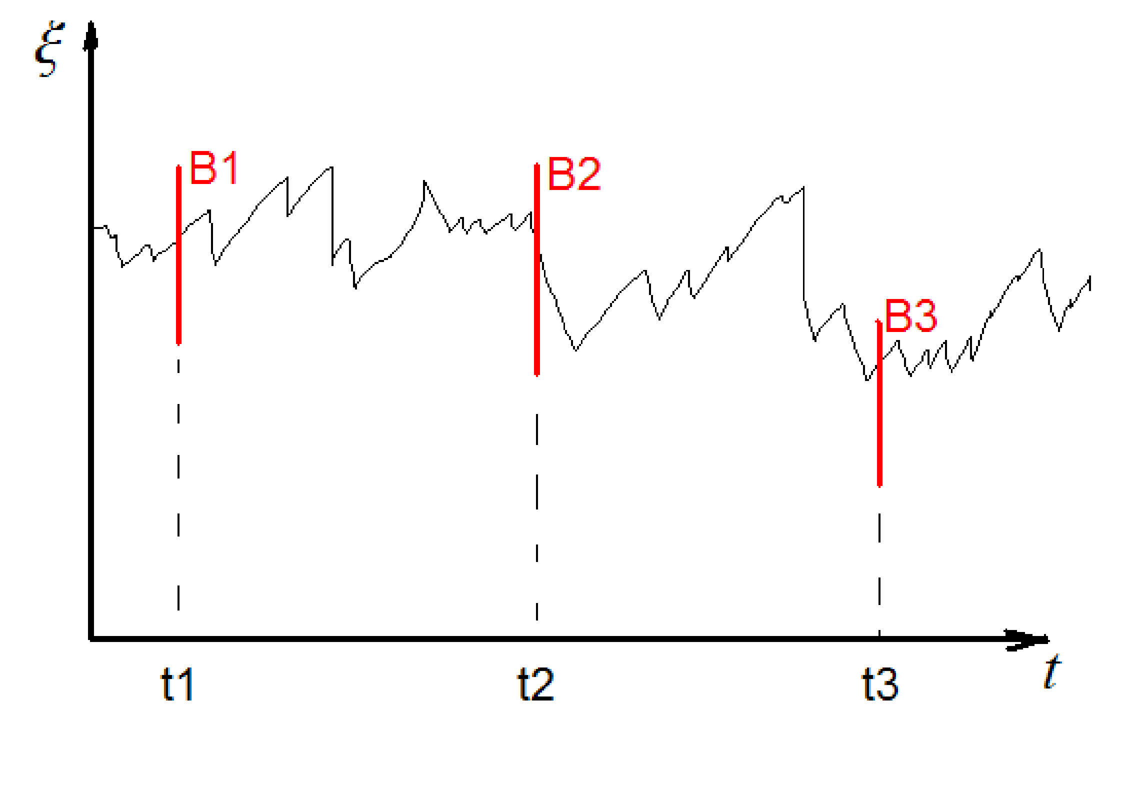
$\{\xi(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$

– $\xi_{\omega}(t)$ – determinēta funkcija – trajektorija, realizācija, izlases funkcija

– $\xi_t(\omega)$ – gadījuma lielums

Kā uzdot gadījuma procesu?

$F_t(x) = P(\xi(t) < x)$ *– viendimensijas sadalījums*



$P(\xi(t_2) \in B_2 \mid \xi(t_1) \in B_1) = ?$

$P(\xi(t_1) \in B_1) = F_{t_1}(x_2) - F_{t_1}(x_1)$

$P(\xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2) = ?$

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2) = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2)$$ *– divdimensiju sadalījums*

$$P(\xi(t_3) \in B_3 \,|\, \xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2) = ?$$

$$P(\xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2, \xi(t_3) \in B_3) = ?$$

Vajadzīgs trīsdimensiju sadalījums utt.

Definīcija. Gadījuma procesu uzdod visu iespējamo varbūtību sadalījumu kopums jebkurai iespējamai galīgai procesa vērtību kopai:

$$\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n); \quad t_i \in T; \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad n = 1,2,\ldots$$

t.i., uzdotas funkcijas:

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \ldots, \xi(t_n) < x_n)$$

Visiem iespējamiem $t_i \in T; \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad n = 1,2,\ldots$

Saskaņas nosacījumi.

$$F_{t_1,\dots,t_k,t_{k+1},\dots,t_n}(x_1,\dots,x_k,\infty,\dots,\infty)=$$
$$=P(\xi(t_1)<x_1,\dots,\xi(t_k)<x_k,\xi(t_{k+1})<\infty,\dots,\xi(t_n)<\infty)=$$
$$=F_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k)$$

Stacionārs process. Procesu $\xi(t)$ sauc par stacionāru, ja visiem *n* un visiem $t_1,t_2,\dots,t_n$ un *t*, tādiem, ka $t_i\in T$, $i=1,2,\dots,n$ gadījuma lielumu virknes $\xi(t_1+t),\dots,\xi(t_n+t)$ daudzdimensiju sadalījuma funkcija nav atkarīga no *t*.

Process ar stacionāriem pieaugumiem. Procesu $\xi(t)$, $t\in T$ sauc par procesu ar stacionāriem pieaugumiem, ja starpību $\xi(t_2+t)-\xi(t_1+t),\dots,\xi(t_n+t)-\xi(t_{n-1}+t)$ sadalījums nav atkarīgs no *t* visiem *n, t* un visiem $t_1,t_2,\dots,t_n$ tādiem, ka $t_i+t\in T$, $i=1,2,\dots,n$

Momentu funkcijas

$$m_{j_1, j_2, \ldots, j_s}(t_1, \ldots, t_s) = \mathbf{M}\left(\xi^{j_1}(t_1)\xi^{j_2}(t_2)\ldots\xi^{j_s}(t_s)\right)$$

$q = j_1 + j_2 \ldots + j_s$ – momentu funkcijas kārta

1. kārtas momentu funkcija (matemātiskās cerības funkcija)

$$m_1(t) = \mathbf{M}\xi(t) \triangleq m(t)$$

Centrālo momentu funkcijas

$$\mu_{j_1, j_2, \ldots, j_s}(t_1, \ldots, t_s) = \mathbf{M}\left((\xi(t_1) - m(t_1))^{j_1} \ldots (\xi(t_s) - m(t_s))^{j_s}\right)$$

2. kārtas centrālā momentu funkcija (korelācijas funkcija)

$$\mu_{11}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\left((\xi(t_1) - m(t_1))(\xi(t_2) - m(t_2))\right) \triangleq R(t_1, t_2)$$

Dispersijas funkcija $\sigma^2(t) = R(t, t)$

Teorēma. Stacionāram procesam matemātiskās cerības funkcija ir konstanta.

Stacionāram procesam $F_{t+\tau}(x) = F_t(x) = P(\xi(t) < x)$ nav atkarīga no τ.

Tātad matemātiskās cerības funkcija $m(t+\tau) = \int x dF_{t+\tau}(x) = \int x dF_t(x) = m(t)$ nav atkarīga no nobīdes pa laika asi – ir konstanta.

Teorēma. Stacionāram procesam korelācijas funkcija nav atkarīga no saviem argumentiem, bet tikai no to starpības.

$$R(t_1, t_2) = \mathbf{M}\Big((\xi(t_1) - m)(\xi(t_2) - m)\Big) =$$

$$= \iint (x_1 - m)(x_2 - m) dF_{t_1, t_2}(x_1, x_2) =$$

$$= \iint (x_1 - m)(x_2 - m) dF_{t_2 - t_1, 0}(x_1, x_2) = R(t_2 - t_1, 0)$$

Tātad $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1, 0) \triangleq R(t_2 - t_1)$

Piezīme. No tā, ka $m(t) = \text{const}$ un $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$ vēl neseko procesa stacionaritāte. Saka, ka process ir stacionārs plašā nozīmē.

Piezīme. Stacionāram procesam $\sigma^2(t) = R(t,t) = R(t-t) = R(0) = \text{const}$

Korelācijas funkcijas īpašības

1. $R(t,t) \geq 0$. Turklāt, ja $R(t,t) \equiv 0$, $\xi(t)$ – determinēta funkcija

$$R(t,t) = \mathbf{M}\Big((\xi(t)-m(t))(\xi(t)-m(t))\Big) = \mathbf{M}\big(\xi(t)-m(t)\big)^2 \geq 0$$

$$\mathbf{M}\big(\xi(t)-m(t)\big)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P\big(\xi(t)=m(t)\big)=1$$

2. $R(t_1,t_2) = R(t_2,t_1)$

3. $\left|R(t_1,t_2)\right|^2 \leq R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)$

Korelācijas funkcijas īpašības stacionāriem procesiem

1’. $R(0) \geq 0$

2’. $R(t) = R(-t)$

3’. $\left|R(t)\right| \leq R(0)$

Doti divi gadījuma procesi $\xi_1(t)$ un $\xi_2(t)$. Cik stipri tie ir saistīti?

Savstarpējā korelācijas funkcija

$$R_{\xi_1\xi_2}(t_1,t_2)=\mathbf{M}\Big((\xi_1(t_1)-\mathbf{M}\xi_1(t_1))(\xi_2(t_2)-\mathbf{M}\xi_2(t_2))\Big)$$

Procesus sauc par stacionāri saistītiem, ja tie ir stacionāri plašā nozīmē un

$$R_{\xi_1\xi_2}(t_1,t_2)=R_{\xi_1\xi_2}(t_2-t_1)$$