# Masu apkalpošanas sistēmu modeļi

Operāciju pētīšanas lietojumos bieži nākas sastapties ar sistēmām, kas paredzētas vairākkārtīgai viena veida uzdevumu izpildei. Tajās noritošie procesi tiek asociēti ar *apkalpošanas procesiem*, bet pašas sistēmas sauktas par *masu apkalpošanas sistēmām.*

Lielākajā cilvēku darbības sfēru daļā sastopamas situācijas, kurām ir masu apkalpošanas raksturs gan tiešā, gan pārnestā nozīmē. Uzskatāms piemērs ir sadzīves pakalpojumu sfēra. Protams, pirmkārt, vērtējot sadzīves pakalpojumu sistēmas darbību, pakalpojuma novērtēšanā vērā ņemama ir apkalpošanas kvalitāte (piem., cik labi ir salaboti apavi). Taču bez sniegtā pakalpojuma kvalitātes, būtisks ir arī fakts, kā un cik labi ir organizēta apkalpošana (piem., vai apavu remonts neilgs veselu mēnesi?).

Te rodas nepieciešamība pēc apkalpošanas procesa organizatoriskās puses analīzes. Organizatoriskā puse var tikt raksturota ar dažādu rādītāju palīdzību: pakalpojuma gaidīšanas laiks, rindas garums u.c. Šiem faktoriem ir liela nozīme MAS (masu apkalpošanas sistēmu) procesos, un visi tie ir atkarīgi no daudz un dažādiem nosacījumiem, kurus vienmēr ņemt vērā nav iespējams. Taču, par laimi, tie visi nav vienādi nozīmīgi, ir pamata faktori, mazāk svarīgi un nebūtiski faktori, tāpēc, modelējot sistēmas, iekļaujamo nosacījumu skaitu var ierobežot.

Pieņemsim, ka gribam uzlabot pasažieru apkalpošanu dzelzceļa kasēs. Pasažieru skaits no mums nav atkarīgs – šo faktoru nevaram ietekmēt. Kasieres darba ātrums atkarīgs no viņas pieredzes, varbūt pat garastāvokļa - šeit iespējamā ietekme arī ir ierobežota. Atliek viens problēmas risināšanas ceļš – izmainīt apkalpošanas organizāciju. To var darīt eksperimentālā ceļā – mainot apkalpošanas parametrus un vērojot kāda tipa izmaiņas ir vislabvēlīgākās. Varam veikt modelēšanu, taču arī šai gadījumā, jo precīzāk būs izvēlēts sākotnējais risinājums, jo labāku rezultātu iegūsim īsākā laika sprīdī. Tieši te var palīdzēt masu apkalpošanas teorija, kur, pieņemot pamatotu lēmumu, jāizdara noteikti aprēķini un, pamatojoties uz tiem, var rast atbildes uz daudziem jautājumiem.

Masu apkalpošanas teorija nodarbojas ar masu apkalpošanas sistēmu matemātisku analīzi un izpēti. Tā ir svarīga ekonomiski matemātiskās modelēšanas sastāvdaļām, kas ietver masu apkalpošanas sistēmu konstruēšanas un ekspluatācijas efektivitātes jautājumu kompleksa teorētiskos pamatus.

Par masu apkalpošanas teorijas pamatlicēju uzskatāms dāņu zinātnieks *A. Erlangs*. Nozīmīgu ieguldījumu vispārējās teorijas izveidē devis padomju matemātiķis *A. Hinčins*, kura darbi sāka iznākt 1930.g. Viņš arī ieviesa nosaukumu MAS (ārzemju literatūrā – rindu sistēmas (*Queuing systems*)).

Jāpiemin, ka masu apkalpošanas procesu izpētei nepieciešams izmantot šo procesu kvantitatīvās analīzes metodes, un tā kā dažādiem masu apkalpošanas procesiem ir ļoti daudz kopīga, tad nav nepieciešams izstrādāt katram savas kvantitatīvās metodes. Pietiekami ir atrast tipiskus uzdevumus, kur kā piemērs ņemts konkrēts apkalpošanas process un izstrādātas metodes, kas būtu pieņemamas dažādu ar masu apkalpošanu saistītu uzdevumu risināšanai.

Par MAS var klasificēt gandrīz jebkuru sistēmu, kurā daudzkārtēji tiek veiktas vienveidīgas operācijas (piem., iekraušana, izkraušana, klientu apkalpošanas operācijas u.c.). Kā bieža parādība šādās sistēmās vērojama rinda – kad momentānais pieprasījums pēc apkalpošanas pārsniedz apkalpošanas iekārtu kapacitāti. To ir grūti novērst, jo nevar precīzi noteikt pieprasījuma pienākšanas brīžus, kā arī apkalpošanas ilgumu. Var paredzēt vairāk apkalpošanas staciju, palielinot apkalpošanas izmaksas, vai nerūpēties par jaudas palielināšanu un pieciest garu rindu. Savukārt ilgs apkalpošanas laiks parasti ir dārgs prieks; tās var būt dīkstāves izmaksas rūpniecībā, zaudētā peļņa tirdzniecībā un pakalpojumu sfērā.

Tādēļ centrālais mērķis ir sasniegt līdzsvaru masu apkalpošanas sistēmā starp servisa izmaksām un izmaksām, kas saistītas ar apkalpošanas gaidīšanu.

Masu apkalpošanas teorija nedod precīzu šīs problēmas risinājumu, taču sniedz svarīgu informāciju, kas būtu jāņem vērā šāda veida problēmu risinājumos; tā satur dažādus MAS raksturlielumus, piemēram, vidējais gaidīšanas laiks rindā, sistēmas noslodze u.c.

**MAS modeļu struktūra**

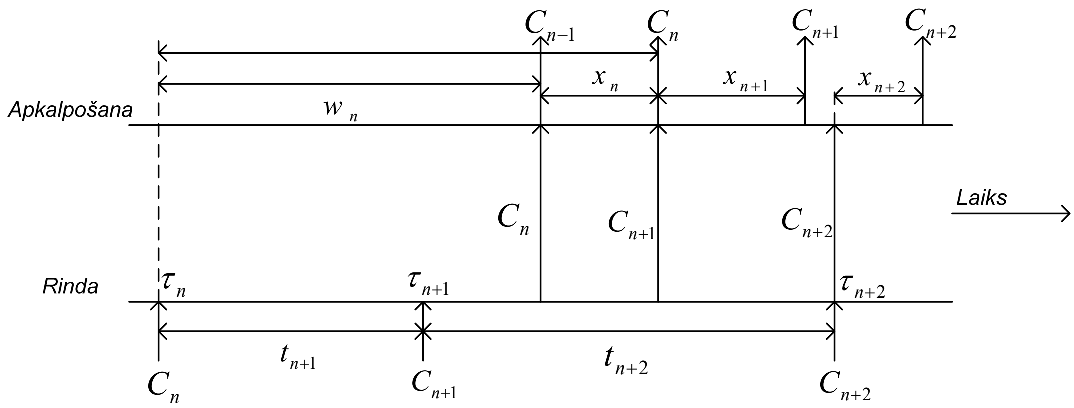
Masu apkalpošanas teorija piedāvā lielu skaitu alternatīvu matemātisku modeļu, kas lietojami MAS aprakstam. Apskatīsim to kopējās iezīmes.

Katra MAS savā struktūrā ietver zināmu skaitu apkalpošanas iekārtu – apkalpošanas kanālu, kas var būt cilvēki, sakaru līnijas, iekārtas u.c. MAS var būt vienkanāla vai daudzkanālu.

Katra MAS domāta pieprasījumu, kas pārsvarā pienāk neregulāri, gadījuma brīžos, apkalpošanai. Arī apkalpošana ilgst nevis noteiktu, iepriekš zināmu laiku, bet gadījuma laiku, kas atkarīgs no mums nezināmiem vai neietekmējamiem faktoriem.

Pieprasījumu plūsmai, kā arī apkalpošanas ilgumam piemīt gadījuma raksturs.

Lai demonstrētu abu minēto procesu sakaru, apskatīsim attēlu.




$C_k$ – izsaukumi;
$\tau_k$ – izsaukumu pienākšanas brīži;
$\tau_k - \tau_{k-1} = t_k$ – laiks starp izsaukumiem;
$w_k$ – izsaukumu gaidīšanas laiks;
$x_k$ – izsaukumu apkalpošanas laiks.

Pēc apkalpošanas kanāls atbrīvojas līdz nākamajam pieprasījuma. Tādā veidā kanāls ir aizņemts nevienmērīgi; dažkārt pie ieejas kanālā var uzkrāties pieprasījumi, dažkārt tas stāv brīvs. Uzkrātie pieprasījumi var veidot rindu vai tikt noraidīti.

Nozīmīga MAS klase, ar kuru mēs sastopamies ikdienā, ir komerciālās pakalpojumu sniegšanas sistēmas, kurās ārējie klienti saņem pakalpojumus no komerciālām organizācijām. Daudzās no tādām pakalpojumu ceļš ir no personas uz personu, piem., frizētavas, kur apkalpotājs ir frizieris, bankas operators bankā, kases veikalā, kafejnīcas. Ir arī cita veida sistēmas, piem., bankomāti, degvielas uzpildes stacijas, vai arī elektriķi, santehniķi, kas pakalpojumu „piegādā” uz mājām.

Cita veida sistēmas ir transporta sistēmas, kurās klienti ir automašīnas, kuģi, kas gaida izkraušanu, lidmašīnas, kas gaida skrejceļa atbrīvošanos. Automašīna gaida vietu stāvvietā.

Kā nākamās minamas sistēmas, kas klasificējamas kā iekšējas servisa sistēmas tirdzniecības vai industriālos uzņēmumos; materiālu transportēšanas sistēmas uzņēmuma iekšienē, kvalitātes kontroles vietas, redakcijas.

Jebkuru šāda veida sistēmu abstraktā veidā var aprakstīt ar vispārīgu modeli, kura svarīgākās sastāvdaļas ir:

- ieejas plūsma;
- rinda (ar noteiktu disciplīnu);
- apkalpošanas mehānisms;
- izejas plūsma.

Par MAS parasti runā tad, ja ieejas plūsma un/vai apkalpošana ir stohastiski sadalīta. Ja abi ir determinēti un stingri noteikti, to izpēte nesagādā grūtības.

Lai pētītu un klasificētu MAS, nepieciešama informācija par:

- ieejas plūsmas raksturojumu;
- apkalpošanas raksturu;
- kanālu skaitu un izkārtojumu;
- gaidīšanas telpas raksturojumu;
- rindas disciplīnu.

Pamatojoties uz minēto informāciju, tiek veidoti modeļi, kuru mērķis ir izstrādāt rekomendācijas racionālai MAS izveidei, tās darba organizācijai un plūsmas regulēšanai, lai nodrošinātu augstu MAS funkcionēšanas efektivitāti.

Lai sasniegtu mērķi, tiek formulēti masu apkalpošanas teorijas uzdevumi, kurus veido MAS funkcionēšanas efektivitātes un tās organizācijas sakarību noteikšana (pieprasījumu plūsmas raksturs u.c. parametri).

Katrai MAS atkarībā no tās parametriem, pieprasījumu plūsmas rakstura, kanālu skaita, to produktivitātes, kā arī darba organizācijas noteikumiem ir noteikta funkcionēšanas efektivitāte. Kā MAS efektivitātes raksturotājus var izvēlēties trīs parametru grupas:

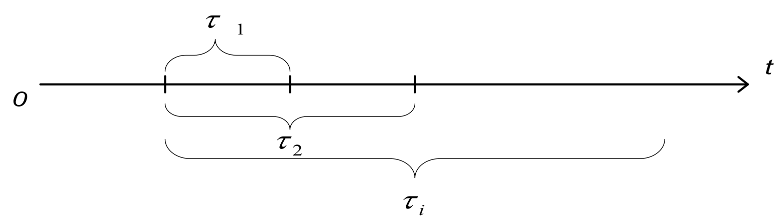
1. MAS izmantošanas efektivitātes rādītāji:
   - absolūtā caurlaidība – vidējais pieprasījumu skaits, ko MAS var apkalpot laika vienībā;
   - relatīvā caurlaidība – vidējā pieprasījumu skaita, ko MAS apkalpo laika vienībā, attiecība pret vidējo pieprasījumu skaitu, kas pienākuši šai pat laikā;
   - vidējais MAS aizņemtības perioda ilgums;
   - MAS izmantošanas koeficients – vidējais laika periods, kurā MAS aizņemta, apkalpojot pieprasījumu.
2. Apkalpošanas kvalitātes rādītāji:
   - vidējais gaidīšanas laiks rindā;
   - vidējais laiks, ko pieprasījums pavada MAS;
   - atteikuma varbūtība (bez gaidīšanas);
   - varbūtība, ka pieprasījums tiks apkalpots nekavējoties;
   - pieprasījumu gaidīšanas rindā laika sadalījuma likums;
   - pieprasījuma atrašanās MAS laika sadalījuma likums;
   - vidējais pieprasījuma skaits rindā;

- vidējais pieprasījumu skaits, kas atrodas MAS.

3. Pašas „MAS - patērētājs” funkciju efektivitātes rādītāji – piemēram, vidējā peļņa laika vienībā u.c., šie rādītāji atkarīgi no MAS specifikas.

**Izsaukumu/pieprasījumu plūsmas sadalījuma likums**

Lai raksturotu pieprasījumu pēc pakalpojuma pienākšanas procesu, jāpiemin notikumu plūsma – notikumu iestāšanās secība zināmos (vai gadījuma) laika momentos, piemēram, izsaukumi telefonu centrālē. Nosacīti to var attēlot ar punktiem uz skaitļu ass.




Plūsmu veidi:

- regulāra notikumu plūsma – notikumi seko viens otram pēc noteiktiem laika intervāliem;
- stacionāra plūsma – ja varbūtība, ka noteikts punktu skaits nokļūs $O_t$ segmentā atkarīgs tikai no segmenta garuma *t* un nav atkarīgs no segmenta atrašanās vietas uz ass $O_t$;
- ordināra plūsma – ja varbūtība, ka mazā segmentā $\Delta t$ nokļūs divi vai vairāk punktu ir salīdzinoši neievērojama nekā varbūtība, ka segmentā ar garumu $\Delta t$ nokļūst viens pats; notikumi parādās pa vienam nevis grupās, vienā momentā ne vairāk kā viens;
- plūsma bez pēcdarbības ir tad, ja katros divos nešķeļošos laika intervālos $\tau_1$, $\tau_2$ nonākušo notikumu skaits nav atkarīgs no tā, cik notikumi ir otrā intervālā. Būtībā tas nozīmē, ka notikumi parādās tajā vai citā laikā neatkarīgi viens no otra.

Izsaukumu jeb pieprasījumu plūsma ir visvienkāršākā notikumu plūsma; tā ir stacionāra, ordināra plūsma bez pēcdarbības (procesa nākotnes attīstība nav atkarīga no tā vēstures, tikai no šī brīža stāvokļa).

Šādu plūsmu bez pēcdarbības sauc par stacionāru Puasona plūsmu. Tas nozīmē, ka sadalījums laikam starp diviem, viens otram sekojošiem notikumiem, ir pakļauts Puasona likumam. Tātad varbūtību, ka laikā *t* viens otram sekos tieši *m* notikumi, aprēķina pēc formulas:

$$P_m(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^m}{m!} e^{-\lambda \cdot t} \quad .$$

Raksturojot pieprasījumu plūsmu, $P_m(t)$ apzīmē varbūtību, ka laikā *t* pienāks *m* izsaukumi; savukārt $\lambda$ - vidējais punktu skaits, kas nokļūst vienības segmentā, šai kontekstā ataino vidējo izsaukumu skaitu laika vienībā jeb ieejas plūsmas intensitāti.

Lai noteiktu laika intervālu starp viens otram sekojošiem notikumiem sadalījuma likumu, aplūkosim gadījuma lielumu T – laika intervālu starp jebkuriem diviem, viens otram sekojošiem notikumiem visvienkāršākajā notikumu plūsmā. Tādā gadījumā sadalījuma funkcija ir izsakāma šādi:

$$F(t) = P(T < t) \rightarrow 1 - F(t) = P(T \geq t)\text{, kur}$$

*P(T<t)* – varbūtība, ka laika intervāls būs mazāks par kādu *t*, tātad laikā *t* būs notikums – pienāks izsaukums;
*P(T≥t)* –varbūtība, ka laikā *t* nepienāks izsaukums, pretēja varbūtībai *P(T<t)*. Tā atrodama, izmantojot Puasona formulu: ja $m$=0, iegūstam varbūtību, ka segmentā nav neviena punkta (nav neviena izsaukuma laikā *t*):

$$P(T \geq t) = P_o(t) = e^{-\lambda \cdot t}.$$

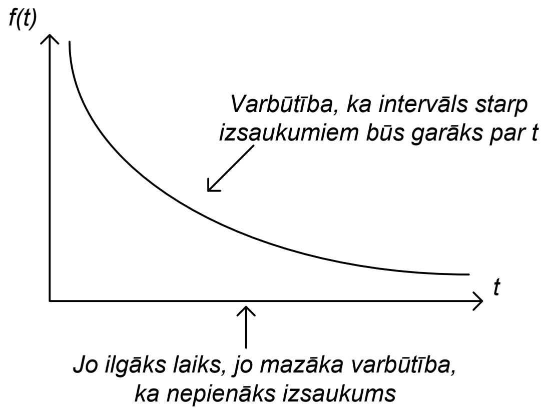
Tāpēc laika starp izsaukumiem sadalījuma funkciju nosaka izteiksme:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t},$$

un sadalījuma blīvuma funkcija ir:

$$f(t) = F'(t)\text{, jeb}$$

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}\text{, ja } t \geq 0.$$




Pamatojoties uz šiem pārveidojumiem, ieguvām ekvivalentus pieņēmumus – ja ieejas plūsmu raksturo Puasona likums, tad laiku starp izsaukumiem raksturo eksponenciālais likums.

Sadalījuma vidējo vērtību (vidējais intervāla garums starp diviem, viens otram sekojošiem izsaukumiem) atrod kā:

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Modelējot masu apkalpošanas sistēmas, svarīgākais pieprasījumu plūsmas parametrs ir ieejas intensitāte $\lambda$, kas apraksta vidējo notikumu skaitu laika vienībā (tā var būt konstanta vai mainīga laikā). Tas ir apgriezti proporcionāls lielums vidējam laikam starp izsaukumiem, tātad $\lambda = \frac{1}{\bar{t}}$.

Tagad apskatīsim piemēru, kā reālā situācijā noteikt pieprasījumu plūsmas parametru $\lambda$.

*Piemērs*

a) Apkalpošanas punktā 3 stundu laikā tika reģistrēts pienākošo klientu skaits minūtē. Dati apkopoti tabulā. Jānosaka $\lambda$.

| klienti/min. $n_i$ | biežums $f_i$ | relatīvais biežums $p_i$ | $n_i \cdot p_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 30 | 0,167 | - |
| 1 | 50 | 0,278 | 0,278 |
| 2 | 40 | 0,223 | 0,446 |
| 3 | 30 | 0,166 | 0,498 |
| 4 | 20 | 0,111 | 0,444 |
| 5 | 10 | 0,055 | 0,275 |
| 6 | 0 | -- | -- |
| | 180 | 1,0 | 1,941 |

No tabulas datiem iegūstam $\lambda = \sum n_i \cdot p_i = 1.941$ klienti minūtē.

b) Novēroti 360 izsaukumi un doti laiki starp tiem. Noteikt $\lambda$.

| laiks starp izsaukumiem (s) $t_i$ | $\bar{t}_i$ | biežums fi | relatīvais biežums pi | $f_i \cdot p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 – 10 | 5 | 150 | 0,417 | 2,08 |
| 11 – 20 | 15 | 80 | 0,222 | 3,33 |
| 21 – 30 | 25 | 60 | 0,167 | 4,17 |
| 31 – 40 | 35 | 30 | 0,083 | 2,92 |
| 41 – 50 | 45 | 20 | 0,055 | 2,50 |
| 51 – 60 | 55 | 10 | 0,028 | 1,53 |
| 61 – 120 | 90 | 10 | 0,027 | 2,50 |
| | | 360 | 1,0 | 19,03 |

Vispirms nosakam vidējo laiku starp izsaukumiem
$\bar{t}_{izs} = \sum t_i \cdot p_i = 19.03 = 0.32\,\text{min}$.

Tātad $\lambda = \dfrac{1}{t_{izs}} = 3.15$ klienti minūtē.

Ieejas plūsmu var raksturot arī cits sadalījums. Piemēram:
*Palma* plūsmas sadalījuma likums

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} e^{-\frac{(t-Mt)^2}{2\sigma_t^2}}.$$

*Erlanga* sadalījuma likums

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad , t > 0.$$

**Apkalpošanas laika sadalījums**

Raksturojot apkalpošanas procesu bieži vien tiek runāts par apkalpošanas plūsmu. Tai tiek noteikti plūsmas raksturojumi līdzīgi kā pieprasījumu plūsmas gadījumā.
Viena pieteikuma apkalpošanas laiks $T_{apk}$ – var būt noteikts vai gadījuma lielums.
$T_{apk}$ – gadījuma lielums, tā sadalījuma funkcija:

$$G(t) = P(T_{apk} < t) \ .$$

Atbilstošā blīvuma funkcija ir:

$$g(t) = G'(t) .$$

Apkalpošanas laika sadalījuma raksturošanai var izmantot vairākus sadalījuma likumus, taču vislielākā praktiskā nozīme ir eksponenciālajam sadalījuma likumam, jo tam piemīt šāda īpatnība: ja laika momentā $t_0$ noris pieprasījuma apkalpošana, tad atlikušā apkalpošanas laika sadalījums nav atkarīgs no tā, cik ilgi pieprasījums apkalpots pirms šī momenta, tas ir tam nav pēcdarbības. Tāpat tiek uzskatīts, ka ilgu apkalpošanas periodu ir neievērojami mazāk nekā īsu apkalpošanas laiku, t.i., sadalījuma blīvums, pieaugot t vērtībai, samazinās. Abas minētās īpašības piemīt eksponenciālajam likumam. Ja vēl tiek noteikts, ka vienlaikus viens kanāls apkalpo tikai vienu pieprasījumu, loģiski, ka pēc šādiem pieņēmumiem:

$$P(T_{apk} \geq t) = e^{-\mu \cdot t} ,$$

kur $\mu$ - apkalpošanas intensitāte (apkalpoto skaits laika vienībā).

Dotā formula pietiekami labi apraksta arī robežgadījumu: ja $t \to \infty$, protams, varbūtība, ka apkalpošanas laiks būs bezgalīgs tiecas uz 0.

Tātad:

$$G(t) = P(T_{apk} \geq t) = 1 - e^{-\mu \cdot t}$$

$$g(t) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot t}$$

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{apk}} \text{ vai } \bar{t}_{apk} = \frac{1}{\mu}$$

Vispārīgā gadījumā ieejas plūsmas intensitāte var būt mainīga laikā, tad to apzīmē $\lambda(t)$. Apkalpošanas intensitāte dažādiem kanāliem var būt atšķirīga, tad lieto apzīmējumus $\mu_k$ - k-tā kanāla apkalpošanas intensitāte.

Apkalpošanas laika sadalījumu var noteikt arī *Erlanga* sadalījuma likums:

$$f_k(t) = \mu \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t} .$$

Ja pieprasījumu plūsmu veido n tipu pieprasījumi ar apkalpošanas laika parametriem $\mu_i (i = 1,2,...,n)$, tad apkalpošanas laiku raksturo hipereksponenciāls sadalījums ar blīvuma funkciju:

$$f(t) = p_1 \mu_1 e^{-\mu_1 t} + p_2 \mu_2 e^{-\mu_2 t} + ... + p_n \mu_n e^{-\mu_n t} .$$

Tomēr visbiežāk pieprasījumu pienākšanas un apkalpošanas plūsmu raksturošanai tiek izmantots eksponenciālais sadalījums. Ja uzskata, ka pieprasījumu un apkalpošanas plūsmas sadalītas eksponenciāli, var teikt, ka sistēmā norit Markova process. Tieši šis fakts būtiski atvieglo formālu modeļu izveidi un to analīzi.

**MAS klasifikācija**

Masu apkalpošanas sistēmas var klasificēt pēc dažādiem kritērijiem.
Pēc kanālu skaita:

- vienkanāla $n=1$;
- daudzkanālu $n \geq 2$.

Pēc apkalpošanas disciplīnas:

- MAS ar atteikumiem (zudumiem) – ja pieprasījums ienāk sistēmā tajā brīdī, kad visi kanāli ir aizņemti, tas saņem atteikumu;
- MAS ar gaidīšanu jeb rindu - ja pieprasījums ienāk sistēmā tajā brīdī, kad visi kanāli ir aizņemti, tas stājas rindā;
- jaukta tipa MAS – apkopotas abas iepriekš minētās sistēmas.

Pēc ieejas plūsmas ierobežotības:

- slēgtas – ierobežota pieprasījumu plūsma (sistēmu pametušie pieprasījumi periodiski atgriežas, nenākot klāt jauniem);
- atvērtas - neierobežota pieprasījumu plūsma.

Pēc apkalpošanas posmu skaita:

- vienfāzes – kanāli ir viendabīgi, t.i., izpilda vienu un to pašu operāciju;
- daudzfāzu – neviendabīgi, secīgi izvietoti kanāli, kas izpilda atšķirīgas operācijas.

Pēc rindas disciplīnas veida:

- MAS ar prioritāti;
- MAS bez prioritātes.

Sistēmās ar rindu galvenokārt interesējamies:

- Kāda ir gaidīšanas varbūtība?
- Kāds ir iespējamais rindas garums, kāds laiks jāpavada rindā?
- Vai apkalpošana notiek pēc FIFO, LIFO, SIRO (gadījuma rindas kārtības) principiem, vai ir citas prioritātes?
- Vai vietas rindā ir sakārtotā, vai nesakārtotā secībā?

MAS teorijā parasti apskata situācijas, kad:

- ir iespējama gaidīšana;
- ir rinda;
- apkalpošana notiek pēc FIFO principa;
- vietas rindā tiek ieņemtas sakārtotā secībā.

Angļu matemātiķis *D. J. Kendals* (~1951.g.) piedāvāja šādu iespējamo sistēmu klasifikācijas shēmu. Katru sistēmu var raksturot, izmantojot trīs rādītājus *A/B/s,* kur:
A – varbūtību sadalījums laikam starp izsaukumiem;
B – varbūtību sadalījums apkalpošanas laikiem;
s – kanālu skaits.

Varbūtību sadalījuma attēlošanai izmanto šādus apzīmējumus:
M – eksponenciālais (Markova);
G – vispārīgais gadījums, t.i., nav ierobežojuma (ģenerālais sadalījums);

E – *Erlanga* sadalījums;
D – determinēts sadalījums (konstanti laiki).
Piemēram, M/M/1.

*Kendala* klasifikāciju 1966.g. papildināja *S. Lee* formā: *A/B/s: (d/e),* kur:
d – maksimālais vietu skaits rindā;
e – rindas disciplīna.
Piemēram, M/M/1: (∞/FIFO).

**Masu apkalpošanas sistēmas ar atteikumiem**

Masu apkalpošanas sistēmas ar atteikumiem bieži tiek dēvētas arī par sistēmām ar zudumiem. Tās paredz, ka pieprasījums, kas pienācis laikā, kad visi apkalpošanas kanāli ir aizņemti, sistēmā netiek pieņemts, t.i., tiek zaudēts.

Kopējie nosacījumi modeļu izveidei ir šādi:

1) pieprasījumu plūsma ir Puasona plūsma ar parametru $\lambda$;
2) apkalpošanas laiks ir eksponenciāli sadalīts ar parametru $\mu$;
3) izsaukumi, kas pienāk sistēmas aizņemtības laikā, zūd.

Apskatīsim šāda tipa sistēmu modeļus gadījumos, ja ir viens vai vairāki apkalpošanas kanāli.

**Vienkanāla sistēma ar atteikumiem**

Kā jau iepriekš tika teikts, modeļi tiek veidoti ar mērķi atrast sistēmu raksturojumus un efektivitātes novērtējumus. Lai tos noteiktu vienkanāla sistēmai ar zudumiem, detalizēti izskatīsim modeļa izveides shēmu.

Noteiksim iespējamos sistēmas stāvokļus:

- $s_0$ - sistēma ir brīva;
- $s_1$ - apkalpošanas kanāls ir aizņemts, sistēmā ir viens klients.

Mazā laika intervālā $\Delta t \to 0$ sistēmas pārejas raksturo varbūtības:

$$p_{00} = e^{-\lambda \cdot \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + 0(\Delta t)$$

$$p_{01} = 1 - e^{-\lambda \cdot \Delta t} = \lambda \Delta t + 0(\Delta t)$$

$$p_{10} = 1 - e^{-\mu \cdot \Delta t} = \mu \Delta t + 0(\Delta t)$$

$$p_{11} = e^{-\mu \cdot \Delta t} = 1 - \mu \Delta t + 0(\Delta t)$$

kur 0( $\Delta t$ ) ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums salīdzinot ar $\Delta t$.
Tādā gadījumā stāvokļu varbūtības laikā $\Delta t$ var izmainīties šādi:

$$\begin{cases} p_0(t+\Delta t) = p_0(t) p_{00}(t+\Delta t) + p_1(t) p_{10}(t+\Delta t) \\ p_1(t+\Delta t) = p_0(t) p_{01}(t+\Delta t) + p_1(t) p_{11}(t+\Delta t) \end{cases}$$

Ievietojam vienādojumos pārejas varbūtību izteiksmes:

$$\begin{cases} p_0(t+\Delta t) = (1-\lambda \Delta t) p_0(t) + \mu \Delta t \cdot p_1(t) \\ p_1(t+\Delta t) = \lambda \Delta t \cdot p_0(t) + (1-\mu \Delta t) p_1(t) \end{cases}$$

Pārrakstām vienādojumu sistēmu šādā veidā:

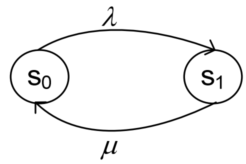
$$\begin{cases} \dfrac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ \dfrac{p_1(t+\Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = \lambda \cdot p_0(t) - \mu \cdot p_1(t) \end{cases}$$

Ņemot robežu $\Delta t \to 0$, vienādojumu kreisajās pusēs iegūsim stāvokļu varbūtību atvasinājumus pēc *t*, kas izsaka to izmaiņas laikā.

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda \cdot p_0(t) - \mu \cdot p_1(t) \end{cases}$$

Iegūta *Kolmogorova* vienādojuma sistēma, kas dod iespēju iegūt MAS noritošā Markova procesa stāvokļu varbūtības (kā funkcijas no laika).

Apskatot rezultējošos vienādojumus, redzams, ka vispārīgā gadījumā tos viegli iegūt no sistēmas grafa, ņemot vērā tikai ieejas plūsmas intensitāti ($\lambda$) un apkalpošanas intensitāti ($\mu$).




Apskatīsim stāvokļu varbūtību iegūšanas principus šim visvienkāršākajam gadījumam.

Skaidrs, ka $p_0(t) + p_1(t) = 1$ un abu stāvokļu varbūtības ir savstarpēji atkarīgas. Tas nozīmē, ka vienu no diferenciālvienādojumiem varam atmest un risināt sistēmu:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ p_0(t) + p_1(t) = 1 \end{cases}$$

Izsakot $p_1(t) = 1 - p_0(t)$ un ievietojot $\dfrac{dp_0(t)}{dt} + (\lambda + \mu)p_0 = \mu$, iegūstam lineāru nehomogēnu diferenciālvienādojumu:

$$p_0(t) = e^{-\int(\lambda+\mu)dt}(C + \int \mu \cdot e^{\int(\lambda+\mu)dt} dt) =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)t}(\mu \int e^{(\lambda+\mu)t} dt + C) =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)t}(\frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{(\lambda+\mu)t} + C) =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + C \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Lai noteiktu konstanti C, pieņem, ka sākuma momentā sistēma bijusi brīva, t.i., $p_0(0)=1$, $p_1(0)=0$. Ievietojot šādus sākuma nosacījumus iegūsim:

$$1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + C \Rightarrow C = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Esam ieguvuši $p_0(t)$ izteiksmi:

$$p_0(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu + \lambda \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}) \qquad t \geq 0.$$

Ņemot vērā, ka $p_1(t) = 1 - p_0(t)$,

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}).$$

Noteiksim apskatāmās sistēmas darbības raksturojumus.

Varbūtība, ka pieprasījums tiks pieņemts apkalpošanā, sakrīt ar varbūtību, ka kanāls ir brīvs.

$$p_{apk}(t) = p_0(t)\ .$$

Relatīvā caurlaides spēja izsaka attiecību starp vidējo apkalpoto pieprasījumu skaitu laika vienībā pret visiem ienākošajiem pieprasījumiem šai laika vienībā. Šajā gadījumā:

$$Q(t) = p_0(t) = p_{apk}(t)$$

- t.i., relatīvā caurlaides spēja laika momentā $t$ ir varbūtība, ka momentā $t$ pienākošais pieprasījums tiks apkalpots.

Absolūtā caurlaides spēja - vidējais pieprasījumu skaits, kas tiek apkalpots laika vienībā. Ņemot vērā relatīvās caurlaides definīciju $Q = \frac{A}{\lambda}$:

$$A(t) = Q(t)\cdot\lambda = \lambda\cdot p_0(t)\,.$$

Tāpat intuitīvi var noteikt izejas plūsmas intensitāti:

$$\nu(t) = A(t)\,.$$

Atteikumu varbūtība šajā gadījumā ir varbūtība, ka kanāls ir aizņemts:

$$p_{att}(t) = p_1(t) = 1 - p_0(t) = 1 - p_{apk}(t) = 1 - Q(t)\,.$$

Sistēmā pavadītais vidējais laiks:

$$\overline{T}_{sist}(t) = \overline{T}_{apk}\cdot p_0(t) = \frac{1}{\mu}\cdot p_0(t)\,.$$

MAS izpētē un analīzē liela nozīme ir robežstāvokļu varbūtībām, kas dod iespēju novērtēt sistēmas darbību stacionārā režīmā, t.i., ilgstošā laika periodā.

Stacionārais režīms iestājas, sistēmai darbojoties ilgstošu laiku, turklāt varbūtības pieņem robežvērtības, kas nav atkarīgas no laika momenta, kurā tās apskata.

Apskatāmajā vienkanāla sistēmas gadījumā tās viegli iegūstamas, veicot robežpāreju:

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$p_1 = \lim_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Vidējais laiks starp izsaukumiem raksturo sistēmas vidējo dīkstāvi. Apzīmēsim $\bar{t} = \overline{T}_{dī}$, tad $\mu = \frac{1}{\overline{T}_{apk}}$ $,\lambda = \frac{1}{\overline{T}_{dī}}$ un mēs varam iegūt arī citas $p_0$ un $p_1$ izteiksmes:

$$p_0 = \frac{\frac{1}{\overline{T}_{apk}}}{\frac{1}{\overline{T}_{apk}} + \frac{1}{\overline{T}_{dī}}} = \frac{\overline{T}_{dī}}{\overline{T}_{apk} + \overline{T}_{dī}}$$

$$p_1 = 1 - p_0 = \frac{\overline{T}_{apk}}{\overline{T}_{dī} + \overline{T}_{apk}}$$

Tā kā visi raksturlielumi sistēmā izsakāmi ar $p_0(t)$ palīdzību, var noteikt arī robežgadījuma pārējos raksturojumus.

$p_{apk} = p_0$ - varbūtība, ka pieteikums tiks pieņemts apkalpošanā.

$Q = p_0 = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} = \dfrac{\overline{T}_{d\bar{\imath}}}{\overline{T}_{apk} + \overline{T}_{d\bar{\imath}}}$ - relatīvā sistēmas caurlaides spēja.

$A = \lambda \cdot p_0 = \dfrac{1}{\overline{T}_{apk} + \overline{T}_{d\bar{\imath}}}$ - absolūtā caurlaides spēja ir apgriezti proporcionāla viena pieprasījuma apkalpošanas vidējā laika summai ar dīkstāves vidējo laiku.

$p_{att} = p_1$ - varbūtība, ka pieteikums saņems atteikumu.

$\overline{T}_{sist} = \overline{T}_{apk} \cdot p_0 = \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} = \dfrac{1}{\lambda + \mu}$ - vidējais viena pieteikuma atrašanās laiks sistēmā.

$\overline{T}_{apk} = \dfrac{1}{\mu}$ - viena pieteikuma vidējais apkalpošanas laiks.

$\nu = A = \dfrac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu} = \dfrac{1}{\overline{T}_{apk} + \overline{T}_{d\bar{\imath}}}$ , $\nu \le \min\{\lambda, \mu\}$ - apkalpoto pieteikumu izejas plūsmas intensitāte.

**Daudzkanālu sistēmas ar atteikumiem**

Daudzkanālu sistēmu gadījumā modeļa izveide ir sarežģītāka, salīdzinot ar vienkanāla gadījumu. Veidojot daudzkanālu sistēmas modeli, sāksim ar to, ka atradīsim varbūtību, ka laikā *t* būs aizņemti k kanāli $p_k(t)$.

Lai to izdarītu, ir jāapskata sistēmas uzvedība laikā $t + \Delta t$, ja fiksētajā momentā sistēma atrodas stāvoklī *k:*

1) sistēma laika momentā *t* ir stāvoklī k un laikā $t + \Delta t$ to nemaina;
2) laikā *t* atrodas stāvoklī *k-1* un laikā $(t,\ t + \Delta t)$ pāriet uz stāvokli *k;*
3) laikā *t* atrodas stāvoklī *k+1* un laikā $(t,\ t + \Delta t)$ atbrīvojas viens kanāls, un sistēma pāriet uz stāvokli *k*.

Tātad:

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t) p_{kk}(\Delta t) + p_{k-1}(t) p_{k-1,k}(\Delta t) + p_{k+1}(t) p_{k+1,k}(\Delta t) + o(\Delta t)$$

,

kur $p_{ij}(t)$ - pārejas varbūtība no stāvokļa uz stāvokli.

Uzskatāmības labad stāvokļu varbūtību atrašanas shēmu detalizēti izskatīsim divu apkalpošanas kanālu gadījumam. Tātad, iespējamās stāvokļu vērtības ir *k=0,1,2.*

Tā kā $p_0, p_1, p_2$ veido pilnu notikumu sistēmu (citi varianti nav iespējami), tad

$$\sum_{i=0}^{z} p_i = 1 .$$

Balstoties uz Markova procesu pārejas varbūtību īpašībām:

$$\sum_{j=0}^{2} p_{ij}(\Delta t) = 1, \qquad i=0,\ 1,\ 2.$$

Ņemot vērā, ka ieejas plūsma sadalīta pēc Puasona likuma ($\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$) vai izmantojot to, ka tiek apskatīts Markova process un gaidīšanas laiks starp stāvokļu izmaiņām sadalīts eksponenciāli, varam rakstīt:

$$p_{00} = e^{-\lambda \cdot \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$p_{01} = p_{12} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Tā kā plūsma ir ordināra, stāvoklis var mainīties tikai par vienu vienību.
Apkalpošanas laiks arī ir sadalīts eksponenciāli un ar parametru $\mu$, tāpēc:

$$p_{10} = 1 - e^{-\mu \cdot \Delta t} = \mu \Delta t + 0(\Delta t)$$

Izmantojot $\sum_{j=0}^{2} p_{ij}(\Delta t) = 1$, ($i$=0, 1, 2) iegūsim $p_{11}(\Delta t)$:

$$p_{10}(\Delta t) + p_{11}(\Delta t) + p_{12}(\Delta t) = \mu \Delta t + p_{11}(\Delta t) + \lambda \Delta t + o(\Delta t) = 1$$

$$p_{11}(\Delta t) = 1 - (\mu + \lambda)\Delta t + o(\Delta t).$$

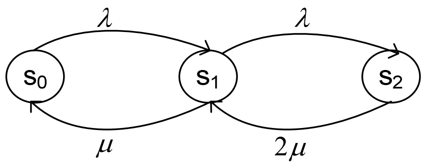
Visbeidzot atliek atrast varbūtību, ka mazā laika sprīdī sistēmā arvien tiek apkalpoti divi izsaukumi. Ņemot vērā apkalpošanas sadalījumu, kā arī to, ka abi apkalpošanas kanāli darbojas neatkarīgi, lietojam varbūtību reizināšanas principu:

$$p_{22}(\Delta t) = [P(apkalp.laiks > t)]^2 = \\ = (1 - \mu \Delta t + o(\Delta t))^2 = 1 - 2\mu \Delta t + o(\Delta t).$$

Pretējā varbūtība, ka process izies no stāvokļa k=2, t. i., viens pieprasījums tiks apkalpots un viens no kanāliem atbrīvosies:

$$p_{21}(\Delta t) = 2\mu \Delta t + o(\Delta t).$$

Rezultātā pārejas diagramma izskatīsies šādi:




Ievietojot iegūtās izteiksmes sākotnējā vienādojumā, iegūstam stāvokļu varbūtības:

$$p_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) p_0(t) + \mu \Delta t \cdot p_1(t) + o(\Delta t)$$

$$p_1(t + \Delta t) = \lambda \Delta t \cdot p_0(t) + (1 - (\lambda - \mu)\Delta t) p_1(t) + 2\mu \Delta t \cdot p_2(t) + o(\Delta t)$$

$$p_2(t + \Delta t) = \lambda \Delta t \cdot p_1(t) + (1 - 2\mu \Delta t) p_2(t) + o(\Delta t)$$

Visu vienādojumu kreisās pusēs pārnesam $p_i(t)$, izdalām vienādojumus ar $\Delta t$, ņemam robežu $\Delta t \to 0$ un iegūstam diferenciālvienādojumu sistēmu:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t)$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda \cdot p_0(t) - (\lambda + \mu) p_1(t) + 2\mu \cdot p_2(t)$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda \cdot p_1(t) - 2\mu \cdot p_2(t).$$

Tā kā sistēmā norit Markova process, varam runāt par stacionāro sadalījumu, jo ir spēkā Markova teorēma, kas garantē: ja $\exists t > 0$, ka $\forall p_{ik}(t) > 0$, $i,k = \overline{0,n}$, tad Markova procesam eksistē no $i$ neatkarīga robeža $\lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) = p_k$. Šis nosacījums izpildās, ja Markova procesa pārejas varbūtību matrica $P$ kāpināta kādā pakāpē $s$, t.i., $P^s$ ir pozitīva matrica. Savukārt, ja $\exists \lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) = p_k$, ir izpildīts nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai eksistētu $\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k$.

Tātad eksistē stāvokļa robežvarbūtības, kas nozīmē, ka pēc noteikta laika sistēma pāriet uz stacionāru darbības režīmu; stāvokļu varbūtības tiecas uz noteiktām vērtībām, kas nav atkarīgas no sistēmas sākuma stāvokļa.

Tā kā izmaiņas laikā nenotiek, varbūtību diferenciāļi ir 0. Iepriekš apskatītajā modelī:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 = 0 \\ \lambda \cdot p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu \cdot p_2 = 0 \\ \lambda \cdot p_1 - 2\mu \cdot p_2 = 0 \end{cases}$$

Iegūstam homogēnu vienādojumu sistēmu, kurai pievienojam nosacījumu:

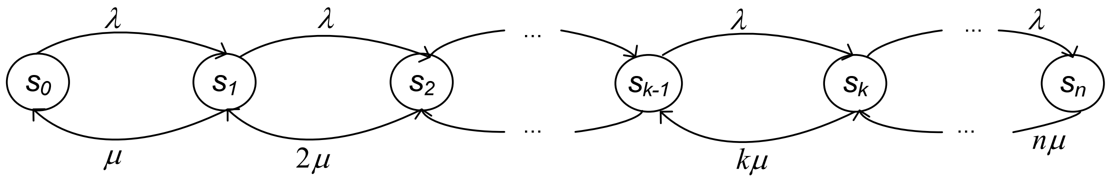
$$p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

Atrisinot sistēmu, iegūstam $p_0 = C$, $p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} C$, $p_2 = \dfrac{\lambda^2}{2\mu^2} C$.

C atrodam no papildnosacījuma: $C = (1 + \dfrac{\lambda}{\mu} + \dfrac{\lambda^2}{2\mu^2})^{-1}$.

**n-kanālu sistēma ar atteikumiem**

Vispārīgajā gadījumā sistēmas grafs un atbilstošā vienādojumu sistēma iegūstama līdzīgi, kā iepriekš.




$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ \dots \\ \dfrac{dp_k(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) p_k(t) + (k+1)\mu \cdot p_{k+1}(t) \\ \dots \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - n\mu \cdot p_n(t) \end{cases}$$

Apskatāmā diferenciālvienādojuma sistēma (tieši n-kanālu ar atteikumiem gadījumā) tiek saukta par *Erlanga* diferenciālvienādojumu sistēmu.

Stāvokļu varbūtības atkarībā no laika rēķināmas diezgan sarežģīti, to var izdarīt ar datora palīdzību. Pēc tam, izmantojot robežu $t \to \infty$, var noteikt stacionārā procesa varbūtības.

Taču, apskatot procesa grafu, redzams, ka tas ir īpašs Markova procesa paveids – saukts par vairošanās – bojāejas procesu. Šajā procesā, ņemot vērā, ka $\exists \lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) = p_k$ (t.i., dzimstība un mirstība stabilizē kādu noteiktu stāvokli), varam pāriet uz lineāru sistēmu:

$$0 = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1$$
$$0 = -(\lambda + k\mu)p_k + \lambda \cdot p_{k-1} + (k+1)\mu \cdot p_{k+1}$$
$$0 = \lambda \cdot p_{n-1} - n\mu \cdot p_n$$

Sistēmas atrisinājumi ir:

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} \cdot p_0 .$$

Ņemot vērā, ka $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} \cdot p_0 = 1,$$

tātad

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}} .$$

Kā redzams, $p_k$ atkarīgi no ieejas plūsmas intensitātes $\lambda$ un apkalpošanas intensitātes $\mu$ attiecības, ko nosaucam par MAS noslodzes koeficientu:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu},\ (\rho = \lambda \cdot \overline{T}_{apk},\ \text{jo}\ \mu = \frac{1}{\overline{T}_{apk}}).$$

Tādā veidā noslodze raksturojama kā vidējais izsaukumu skaits, kas pienāk viena izsaukuma vidējā apkalpošanas laikā; par mērvienību tai lieto erlangu.

Izmantojot šos apzīmējumus, iegūstam *Erlanga* formulas:

$$\begin{cases} p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1} \\ p_k = (\frac{\rho^k}{k!})p_0 \end{cases},\ \text{k=1, ..., n}$$

Sistēmas raksturlielumi:

$p_{att} = p_n = (\frac{\rho^n}{n!})p_0$ - atteikuma varbūtība.

$p_{apk} = 1 - p_{att} = 1 - p_n$ - varbūtība tam, ka pienākušais pieteikums tiks apkalpots.

$Q = p_{apk} = 1 - p_{att} = 1 - p_n$ - relatīvā caurlaides spēja.

$A = \lambda \cdot Q = \lambda(1 - p_n)$ - absolūtā caurlaides spēja.

$\nu = A = \lambda(1 - p_n)$ - izejas plūsmas intensitāte.

$\overline{K} = \overline{N}_{apk} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda(1 - p_n)}{\mu} = \rho(1 - p_n)$ - vidējais aizņemto kanālu skaits.

$\overline{N}_{apk}$ - vidējais izsaukumu skaits, kas tiek apkalpoti.

Sistēmai ar atteikumiem $\overline{N}_{apk}$ ir tas pats, kas $\overline{N}_{sist}$ - sistēmā esošo pieprasījumu vidējais skaits.

$a_{\bar{k}} = \dfrac{\overline{K}}{n}$ - viena kanāla noslodzes koeficients.

$\overline{n}_b = n - \overline{K}$ - vidējais brīvo kanālu skaits.

$\bar{t}_a = \bar{t}_{apk} \cdot \dfrac{1 - a_{\bar{k}}}{a_{\bar{k}}}$ - vidējais dīkstāves laiks kanālam.

$\overline{T}_{sist} = \dfrac{1}{\mu}(1 - p_n) = \dfrac{1}{\lambda}\overline{K} = \dfrac{1}{\lambda}\overline{N}_{sist}$ - pieteikuma atrašanās MAS vidējais laiks.

Izskatīsim dažus MAS ar atteikumiem lietošanas piemērus.

*Piemērs*

Telefoncentrāle var vienlaikus apkalpot $n$ abonementu izsaukumus. Pieņemsim, ka pieprasījumu plūsma ir vienkārša ar vidējo izsaukumu skaitu minūtē $\lambda = 2$. Varbūtība, ka saruna nebūs garāka par $t$ minūtēm, ir $F(t) = 1 - e^{-2t}$, t.i., $\mu = 2$.

Jānoskaidro, kādu skaitu izsaukumu n centrālei būtu jāspēj vienlaikus apkalpot, lai atteikumu varbūtība nepārsniegtu 0,01.

Tiek pieņemts, ka izsaukums saņem atteikumu, kad visas $n$ līnijas ir aizņemtas.

Novērtēt katras līnijas aizņemtības pakāpi. Vai tās būs pietiekami noslogotas? Vai nebūtu mērķtiecīgāk izvēlēties citu līniju skaitu?

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $p_{att} = p_n \le 0{,}01$, tā kā sistēmai paredzami $n$ apkalpošanas kanāli. Tātad meklēsim:

$$p_n = \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}} \le 0{,}01$$

Mainot $n$ vērtības, meklējam to $p_n$, kurš pirmo reizi nepārsniegs 0,01:

$n$=4 $p_4 = 0{,}015$

$n$=5 $p_5 = 0{,}003$.

Tātad, lai atteikumi nepārsniegtu 1%, jānodrošina 5 telefonlīniju darbību.

Noteiksim vidējo aizņemto līniju skaitu: $\overline{K} = \dfrac{\lambda}{\mu}(1 - p_5) = 0{,}997$ - vidēji visu laiku aizņemta būs viena līnija. Tātad katra līnija būs aizņemta mazāk nekā 0.2 darba laika $(\dfrac{\overline{K}}{5})$; vai katra līnija būs noslogota par 20%.

Ne mazāk kā divas līnijas ($p_{\ge 2} = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0{,}263$) būs aizņemtas nedaudz vairāk par ¼ no dienas, jeb 26,3 % no darba laika.

Šie rādītāji liecina, ka sistēmā iespējamas lielas dīkstāves, un varbūt tiešām ekonomisks būtu mazāks kanālu skaits. Taču precīzi to varētu novērtēt, ja būtu zināmas katras līnijas ekspluatācijas izmaksas un ieņēmumi no viena izsaukuma apkalpošanas.

*Piemērs*

Automašīnu nomas uzņēmumā nepieciešams aprēķināt, vai atmaksāsies papildu automašīnu iegāde, kā arī aprēķināt sistēmas, kas izveidosies pēc automašīnu iepirkšanas, raksturojošos parametrus.

Pašreiz uzņēmumam ir 10 automašīnas. Uzņēmums izskata iespēju iegādāties vienu vai divas automašīnas. Par tās darbību zināmi šādi dati. Vidēji dienā piesakās 3 klienti. Bet daudzi no viņiem saņem atteikumu, ja visas automašīnas ir izīrētas. Vidēji katrs klients automašīnu lieto 3 dienas. Vienas automašīnas radītie izdevumi gada laikā ir Ls 2000, bet vidējie ieņēmumi no viena klienta – Ls 45.

Risinājumā pieņemsim, ka katra automašīna ir apkalpojošais kanāls. Ja visas automašīnas ir iznomātas, tad klients saņemot atteikumu rindā, protams, nestāv un dodas uz citu uzņēmumu. Tātad situācijas aprakstāma kā $n$ kanālu sistēma ar atteikumiem, kurā klientu pienākšanas intensitāte $\lambda = 3$, bet apkalpošanas intensitāte $\mu = 1/3$.

Lai optimizētu šīs sistēmas apkalpojošo kanālu skaitu, ir jānosaka, vai pievienojot nākamo kanālu, papildus apkalpotie klienti segs papildu radušās izmaksas. Lai to aprēķinātu, pirmkārt, jānosaka atteikumu varbūtības interesējošam kanālu skaitam.

Atrodam atteikumu varbūtības sistēmai ar 10, 11 un 12 automašīnām.

| 10 automašīnas | 11 automašīnas | 12 automašīnas |
|---|---|---|
| $p_{10} = 0.167963$ | $p_{11} = 0.1208$ | $p_{12} = 0.0831$ |

Atteikumu varbūtība sakrīt ar varbūtību, ka visi kanāli ir aizņemti: $p_{att} = p_n$.

Ja $n$=10, tad $p_{att}$ =0.1680,
$n$=11, tad $p_{att}$ =0.1208,
$n$=12, tad $p_{att}$ =0.0831.

Tā kā ir zināmas ar automašīnas uzturēšanu saistītās izmaksas gadam, tad visus nepieciešamos aprēķinus veiksim tādam pašam laika periodam.

Noteiksim, cik klientu gadā vidēji saņems atteikumu katrā no iespējamiem gadījumiem - $S_{att} = \lambda \cdot 365 \cdot p_{att}$. Izmantojot šo informāciju, noteiksim katras automašīnas iegūtos klientus un tādējādi gūtos papildu ienākumus un peļņu gada laikā.

| n=10 | $S_{att}$ = 184 | Ieguvums | Papildu ienākumi | Peļņa no pievienotā auto |
|---|---|---|---|---|
| n=11 | $S_{att}$ = 132.5 | $S_{ieg}$ = 51.5 | 51.5*45=2317.5 | 2317.5-2000=317.5Ls |
| n=12 | $S_{att}$ = 91 | $S_{ieg}$ = 41.5 | 41.5*45=1867.5 | 1867.5-2000=-132.5 Ls |

Kā redzams pēc aprēķiniem, tad vienpadsmitā automašīna savu pašizmaksu gada laikā atpelna un vēl arī nes peļņu, savukārt divpadsmitā jau saistīta ar zaudējumiem, tāpēc izdevīgāk ir nopirkt vēl vienu automašīnu, bet ne divas.

Apskatīsim vienpadsmit automašīnu sistēmas raksturlielumus.

Sistēmas noslodzes koeficients: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 9$. Tik klienti vidēji ierodas viena pieprasījuma vidējā apkalpošanas laikā.

Atteikumu varbūtība ir vienāda ar varbūtību, ka visas 11 automašīnas ir aizņemtas: $p_{att} = p_{11} \approx 0{,}1208$. Tas nozīmē, ka 12% klientu saņems atteikumu.

Varbūtība, ka pieprasījums tiks apkalpots jeb klients automašīnu varēs noīrēt: $p_{apk} = 1 - p_{att} \approx 0.8792$.

Vidējais aizņemto automašīnu skaits: $\overline{K} = \alpha \cdot p_{apk} \approx 7.9128$.

Automašīnu noslodzes koeficients: $\eta = \dfrac{\overline{K}}{n} = 0.7$.

Vidējais brīvo automašīnu skaits: $\overline{n}_b = n - \overline{K} = 3.0872$.

Automašīnas vidējais dīkstāves laiks: $\bar{t}_d = \bar{t}_{apk} \dfrac{1-\eta}{\eta} = 1.1705$ dienas.

*Piemērs*

Apskatīsim n-kanālu sistēmu ar atteikumiem, tās ieejas plūsmas intensitāte $\lambda$, apkalpošanas intensitāte $\mu$.

Viena pieprasījuma apkalpošana vidēji nodrošina ienākumus $C_1$. Apkalpošanas kanāla izveide rada izdevumus $C_2$. Viena kanāla ekspluatācija laika vienībā izmaksā $C_3$. Jānosaka laiks $\tau$, pēc kura sistēma sāks nest peļņu.

Pieņemsim, ka process jau pārgājis stacionārā režīmā. Peļņa tiks gūta tad, kad kanāla nestie ienākumi pārsniegs tā uzturēšanas izmaksas.

Laika vienībā viena kanāla vidēji ienākumi, apkalpojot $\mu$ pieprasījumus, ir $C_1 \cdot \mu$, kanāla uzturēšanas izdevumi laika vienībā ir $C_3$. Tad peļņas nosacījums ir $C_1 \cdot \mu > C_3$.

Sistēmas ienākumi laikā $\tau$, strādājot stacionārā režīmā:

$$C_1 \cdot A \cdot \tau,$$

jo A – vidējais sistēmā apkalpoto skaits laika vienībā. Tā kā $A = \mu \cdot \overline{K}$, kur $\overline{K}$ - vidējais aizņemto kanālu skaits, tad vidējie ienākumi laikā $\tau$ ir:

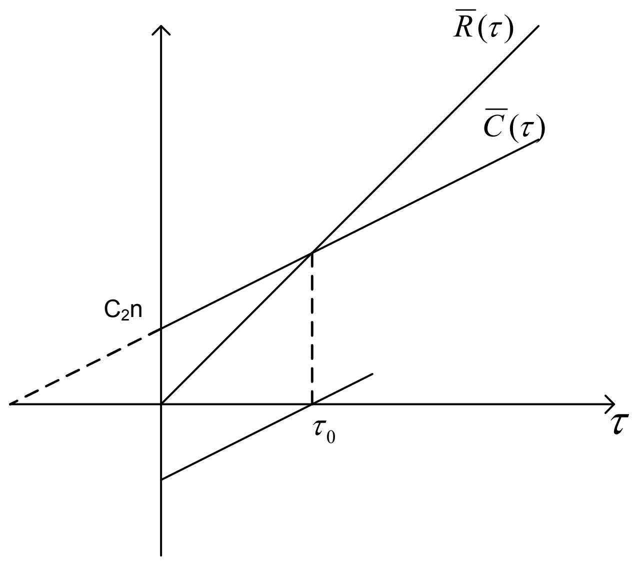
$$\overline{R(\tau)} = C_1 \cdot \mu \cdot \overline{K} \cdot \tau.$$

Ienākumu funkcijas grafiks ir taisne ar pozitīvu virzienu $tg\alpha = C_1 \mu \overline{K}$.

Vidējie izdevumi šai laikā $\tau$ sastāv no $n$ kanālu uzstādīšanas izmaksām $C_2 n$ un ekspluatācijas izdevumiem $C_3 \overline{K} \tau$:

$$\overline{C}(\tau) = C_3 \overline{K} \tau + C_2 n \quad .$$

Arī izdevumu funkcijas grafiks ir taisne ar pozitīvu virziena koeficientu $tg\beta = C_3 \overline{K}$.




Ņemot vērā peļņas nosacījumu $C_1 \cdot \mu > C_3$, $tg\alpha > tg\beta \rightarrow \alpha > \beta$. Tātad šīs taisnes krustojas pozitīvās pusass punktā $\tau_0$, kur $\overline{R}(\tau) = \overline{C}(\tau)$ un peļņa ir 0, jo $\overline{P}(\tau) = \overline{R}(\tau) - \overline{C}(\tau)$.

Tātad no minētās vienādības varam iegūt izteiksmi laika momentam, pēc kura sistēmas darbība kļūst rentabla:

$$C_3\overline{K}\tau + C_2n = C_1 \cdot \mu \cdot \overline{K} \cdot \tau$$

$$\tau_0 = \frac{C_2n}{(C_1\mu - C_3)\overline{K}}$$

Sākot no šī laika brīža, t.i. pēc laika $\tau_0$, sistēma strādā ar peļņu, kuras lielumu visiem sekojošajiem laika momentiem varam noteikt izmantojot sakarību

$$P(\tau) = (C_1\mu - C_3)\overline{K}\tau - C_2n.$$

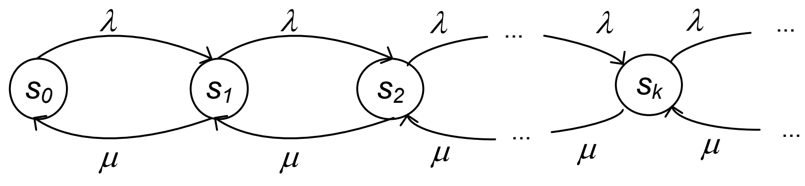
Tālāk sniegsim sistēmu, kuras paredz gaidīšanu rindā, īsu raksturojumu.

**MAS ar neierobežotu rindu**

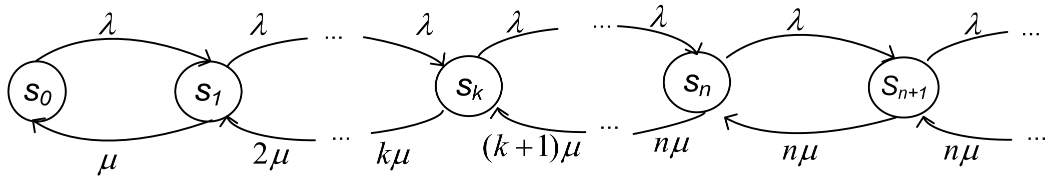
Tāpat kā iepriekš spēkā ir pieņēmums par to, ka ieejas plūsma $P_{ieej}$ ar intensitāti $\lambda$ un "apkalpošanas plūsma" $P_{apk}$ ar intensitāti μ ir vienkāršākās plūsmas, t.i., tās ir stacionāras, ordināras un bez pēcdarbības. Apkalpošanu veic viens vai n kanāli. Rindas garums un stāvokļu skaits šādā MAS ir bezgalīgs.

Atšķirībā no iepriekš apskatītajiem modeļiem, sistēmās ar rindu pieprasījumi, kas pienāk laikā, kad visi apkalpojošie kanāli ir aizņemti, netiek zaudēti, bet secīgi veido rindu un gaida savu kārtu apkalpošanā. Tiklīdz kāds no kanāliem atbrīvojas, pirmais rindā esošais pieprasījums tiek pieņemts apkalpošanai. Sistēmā noritošo procesu var uzskatāmi ilustrēt ar tās grafisku attēlu:

- vienkanāla MAS ar rindu:



- N-kanālu MAS ar rindu:




Šādu sistēmu darbība saistāma ar risku, ka sistēma tiks pārslogota, t.i., apkalpošana laikus nespēs tikt galā ar visiem pieprasījumiem, rinda augs bezgalīgi.

Izšķir šādus gadījumus:

- ja $\lambda>n\mu$ (vienkanāla gadījumā $\lambda>\mu$), t.i., vidējais pieprasījumu skaits laika vienībā ir lielāks par apkalpoto pieprasījumu vidējo skaitu tādā pašā laika vienībā, sistēmai nepārtraukti darbojoties, rindas garums bezgalīgi pieaug;
- ja $\lambda=n\mu$ (vienkanāla gadījumā $\lambda=\mu$), sistēma var ilgstoši darboties normālā režīmā, tikai ar nosacījumu, ka ieejas plūsma $P_{ieej.}$ un apkalpošanas plūsma $P_{apk.}$ ir regulāra; šādā gadījumā rindas vispār nebūs, kanāli veiks apkalpošanu nepārtraukti, bez dīkstāvēm. Taču tiklīdz ieejas plūsma vai apkalpošanas plūsma zaudēs regularitāti, parādīsies kaut mazākā stohastiskas iezīme - rindas garums pieaugs bezgalīgi;
- ja $\lambda\geq n\mu$ (vienkanāla gadījumā $\lambda\geq\mu$), tad sistēma ar gadījuma plūsmu raksturojumiem ir pārslogota, un robežvērtības neeksistē;
- ja $\lambda<n\mu$ (vienkanāla gadījumā $\lambda<\mu$), tad sistēma var ilgstoši darboties, sasniedzot stacionāro režīmu, t.i., raksturlielumu robežvērtības eksistē.

Tātad, lai sistēmas darbībai būtu jēga, vispārīgā gadījumā jāizpildās nosacījumam $\lambda \leq n\mu$, savukārt, ja ieejas un apkalpošanas plūsmām ir gadījuma raksturs, pieprasāms $\lambda<n\mu$. (vienkanāla gadījumā $n=1$).

Vienkanāla MAS ar gaidīšanu stāvokļu varbūtības nosakāmas no šādas *Kolmogorova* diferenciālvienādojumu sistēmas:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ \dfrac{dp_k(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda+\mu) \cdot p_k(t) + \mu \cdot p_{k+1}(t), \quad k \geq 1 \end{cases}.$$

Attiecīgi – robežvarbūtības no atbilstošās homogēnās vienādojumu sistēmas:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ 0 = \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda+\mu) \cdot p_k + \mu \cdot p_{k+1}, \quad k \geq 1 \end{cases}.$$

Daudzkanālu sistēmai atbilst analogas diferenciālvienādojumu sistēmas:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ \dots \\ \dfrac{dp_k(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda+k\mu) \cdot p_k(t) + (k+1)\mu \cdot p_{k+1}(t), \quad 1 \leq k < n \\ \\ \dfrac{dp_k(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda+n\mu) \cdot p_k(t) + n\mu \cdot p_{k+1}(t), \quad k \geq n \end{cases}$$

un

$$\begin{cases} 0 = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ \ldots \\ 0 = \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + k\mu) \cdot p_k + (k+1)\mu \cdot p_{k+1}, \quad 1 \le k < n \\ \\ 0 = \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + n\mu) \cdot p_k + n\mu \cdot p_{k+1}, \quad k \ge n \end{cases}$$

Tā kā redzamo diferenciālvienādojumu sistēmu atrisinājumu atrašana un spriedumi, kas saistīti ar vairāku MAS raksturojošo lielumu formulu izvedumiem, ir diezgan sarežģīti un darbietilpīgi, tie tiks izlaisti. Tālāk tabulās apkopotas vienkanāla un daudzkanālu MAS ar neierobežotu rindu raksturlielumu iegūšanai izmantojamas formulas.

**Vienkanāla MAS ar gaidīšanu raksturojumi**

| **Rādītāji** | **Nozīme** |
|---|---|
| Vidējais viena pieteikuma apkalpošanas laiks | $T_{apk} = 1/\mu$ |
| Sistēmas noslogotība | $\rho = (\lambda/\mu) < 1$ |
| Stāvokļu varbūtības | $p_k = \rho^k (1-\rho);\ k=0,1,2\ldots$ |
| Atteikumu varbūtība | $p_{att}=0$ |
| Varbūtība, ka pieteikums tiks pieņemts sistēmā | $p_{sist}=1$ |
| Sistēmas relatīvā caurlaides spēja | $Q=1$ |
| Sistēmas absolūtā caurlaides spēja | $A=1$ |
| Izejošo pieteikumu plūsmas intensitāte | $v=\lambda$ |
| Vidējais rindā esošo pieteikumu skaits | $N_{rind} = \rho^2/(1-\rho)$ |
| Vidējais apkalpošanā esošo pieteikumu skaits | $N_{apk} = \rho$ |
| Vidējais pieteikumu skaits sistēmā | $N_{sist} = N_{rind} + N_{apk} = \rho/(1-\rho)$ |
| Vidējais pieteikumu gaidīšanas laiks rindā | $T_{rind} = N_{rind}/\lambda = \rho^2/[\lambda(1-\rho)] = \rho/[\mu(1-\rho)]$ |
| Vidējais pieteikuma atrašanās laiks sistēmā (gan rindā, gan apkalpošanā) | $T_{sist} = T_{rind} + T_{apk} = (1/\lambda) N_{sist} = \rho/[\lambda(1-\rho)] = 1/[\mu(1-\rho)] = 1/(\mu-\lambda)$ |

**Daudzkanālu MAS ar gaidīšanu raksturojumi**

| **Rādītāji** | **Nozīme** |
|---|---|
| MAS noslodzes koeficients | $\rho=\lambda/\mu$ |

| | |
|---|---|
| Viena kanāla noslodzes rādītājs | $\psi=(\rho/n)<1$ |
| Vidējais viena pieteikuma apkalpošanas laiks | $T_{apk}=1/\mu$ |
| Varbūtība, ka visi kanāli ir brīvi (sistēmas dīkstāves varbūtība) | $p_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\psi^k+\frac{n^n}{n!}\frac{\psi^{n+1}}{1-\psi}\right)^{-1}$ |
| Stāvokļu varbūtības | $p_k=\begin{cases}(n^k/k!)\psi^k p_0, & k=1,..n\\(n^n/n!)\psi^k p_0, & k=n+1,...\end{cases}$ |
| Atteikumu varbūtība | $p_{att}=0$ |
| Varbūtība, ka pieteikums tiks pieņemts sistēmā | $p_{sist}=1$ |
| Relatīvā sistēmas caurlaides spēja | $Q=1$ |
| Absolūtā sistēmas caurlaides spēja | $A=1$ |
| Vidējais pieteikumu skaits rindā | $N_{rinda}=\frac{n^n}{n!}\frac{\psi^{n+1}}{(1-\psi)^2}p_0$ |
| Vidējais apkalpošanā esošo pieteikumu skaits – vidējais aizņemto kanālu skaits | $N_{apk}=\overline{K}=\rho(<n)$ |
| Viena kanāla noslodzes koeficients | $a_{\bar{k}}=\frac{\overline{K}}{n}$ |
| Vidējais pieteikumu skaits sistēmā | $N_{sist}=N_{rinda}+N_{apk}$ |
| Vidējais pieteikumu gaidīšanas laiks rindā | $T_{rinda}=N_{rinda}/\lambda$ |
| Vidējais pieteikuma atrašanās laiks sistēmā (gan rindā, gan apkalpošanā) | $T_{sist}=T_{rinda}+T_{apk}=N_{sist}/\lambda$ |

*Piemērs*

Sadzīves tehnikas remonta uzņēmumā strādā 3 meistari. Kā zināms, šobrīd sadzīves tehnika bojājas diezgan bieži.

Sadzīves tehnikas skaits, kas bojājas, var tikt uzskatīts par bezgalīgu (potenciāli).

Dienā vidēji remontā nonāk $\lambda=8$ sadzīves tehnikas vienības. Varbūtība, ka $t$ dienās remontā nonāks $k$ tehnikas vienības ir $P_k(t)=\frac{(8t)^k}{k!}e^{-8t}$.

Vidējais vienas tehnikas vienības apkalpošanas laiks ir ½ darba dienas (trīs meistari dienā saremontē 6 sadzīves tehnikas vienības) $\mu=2$.

Cik labi darbnīca tiek galā ar sadzīves tehnikas remontu, t.i., kāds priekšmetu skaits vidēji gaidīs rindā apkalpošanu? Kāds vidējais skaits sadzīves tehnikas vienību atradīsies remontā? Cik ilgi īpašniekam būs jāgaida remonta beigas? Cik noslogoti būs darbinieki?

Pirmkārt pārbaudīsim sistēmas darbības nosacījumu: $\frac{8}{2} > n = 3$. Ir zināms, ja $\frac{\lambda}{\mu} \geq n$, rinda bezgalīgi aug, tātad šajā gadījumā trīs meistari nenodrošinās visu tehnikas vienību remontu.

Tas nozīmē, ka apkalpošana jāuzlabo. Jāpieņem darbā vēl vismaz divi meistari, jo tad $\frac{8}{2} < n = 5$, tas ir $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{2} = 4$. Aprēķināsim varbūtību, ka pieprasījuma pienākšanas laikā visi pieci meistari ir aizņemti:

$$P_{aizņ} = \sum_{k=5}^{\infty} p_k = \frac{8^5}{(5-1)!(5 \cdot 2 - 8)^5} \cdot p_0 = \frac{4^5}{4!} \cdot p_0 .$$

Tā kā

$$p_0 = \frac{1}{\sum \frac{\lambda^k}{k!\mu^k}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{5} \frac{5^k}{k!} (\frac{\lambda}{5\mu})^k + \frac{5^5}{5!}} = 0{,}01299,$$

tad $P_{aizņ}$=0,55424, kas nozīmē, ka visi meistari ir aizņemti tikai nedaudz vairāk kā pusi no darba dienas. Šāds aizņemtības raksturojums var liecināt par to, ka samērā bieža būs situācija, ka remonts tiks uzsākts nekavējoties pēc pieprasījuma saņemšanas.

$$N_{rinda} = \frac{n^n}{n!} \frac{\psi^{n+1}}{(1-\psi)^2} p_0 = 2{,}216 \text{ jeb}$$

vidēji rindā uz remontu gaida *2,216* sadzīves tehnikas vienības.

$N_{sist} = N_{rinda} + N_{apk} = 6{,}216$ jeb

vidēji darbnīcā atrodas 6*,216* sadzīves tehnikas vienības.

Vidējais remonta gaidīšanas laiks $T_{rinda}=N_{rinda}/\lambda=0{,}27712$ darba dienas, t.i., ja darba diena ilgst 8 stundas, remontējamo aparātu vidēji sāk remontēt aptuveni 2 stundas un 13 minūtes pēc iesniegšanas. Savukārt īpašnieks aparātu var saņemt vidēji pēc $T_{sist}=N_{sist}/\lambda=0{,}777$ darba dienas, t.i., pēc 6,216 stundām.

Pastāvot šādam darba režīmam, katra meistara vidējā noslodze būs

$$a_{\bar{k}} = \frac{\bar{K}}{n} = \frac{4}{8} = 0{,}5 \text{, t.i., 50\%.}$$

*Piemērs*

Uzņēmumam ir kopējamā iekārta, kuru lieto visi uzņēmuma darbinieki. Kopēto materiālu skaits ir absolūti nejaušs un eksponenciāli sadalīts. Vidējā apkalpošanas intensitāte ir 10 kopēšanas uzdevumi stundā. Pieprasījumu intensitāte ir 5 kopēšanas uzdevumi stundā. Jo biežāk tiek novērota rinda pie kopējamās mašīnas, jo vairāk uzņēmuma vadība sliecas izvērtēt darba efektivitāti.

Tādēļ vadība vēlas novērtēt:

a) kopējamās iekārtas vidējo noslodzes koeficientu;
b) varbūtību, ka pie kopējamās iekārtas ir 0, 1, 2 vai 3 darbinieki;
c) vidējo rindas garumu;

d) vidējo rindā pie kopējamās iekārtas pavadīto laiku;
e) vidējās ar kopēšanas darbiem saistītās personāla izmaksas (gaidīšanas un apkalpošanas) dienā, ja viens darbinieks uzņēmumam vidēji izmaksā 10 *nv/h*.

Risinājums:

a) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{10} = 0.5$;

b) $p_0 = 1 - \rho = 0.5$

$p_1 = \rho(1-\rho) = 0.25$

$p_2 = \rho^2(1-\rho) = 0.125$

$p_3 = \rho^3(1-\rho) = 0.0625$

c) $N_{sist} = \frac{\rho}{1-\rho} = 1$ - vidējais pieteikumu skaits sistēmā;

d) $T_{sist} = (1/\lambda)N_{sist} = \frac{1}{5} = 0.2h$ - vidējais pieteikuma atrašanās laiks sistēmā (gan rindā, gan apkalpošanā);

e) personāla izmaksas = kopēšanas uzdevumi/dienā * laiks sistēmā * vidējās personāla izmaksas = $8 \times \lambda \times 0.2 \times 10nv/d = 80nv/d$ .

Uzņēmuma vadība vēlas uzlabot esošo sistēmu klients- kopējamā iekārta, un izskata divas iespējas: izīrēt otru kopējamo iekārtu, kas ir ekvivalenta esošajai, vai jaudīgāku kopējamo iekārtu, kurai ir lielākas kopējās izmaksas.

| | **Apkalpošana** | **Īres maksas nv/d** |
|---|---|---|
| Otra kopējamā iekārta | 10 piepr./h | 20 nv/d |
| Kopējamā iekārta ar lielāku jaudu | 15 piepr./h | 40 nv/d |

1. Esošās situācijas izvērtējums:

kopējās sistēmas izmaksas/dienā = īre/dienā + personāla izmaksas/dienā=20+80=100 nv/d.

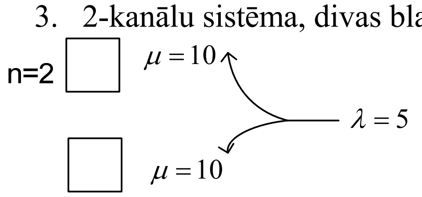
2. Ja iegādājas kopējamo iekārtu ar lielāku jaudu:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{15} = 0.33;$$

$$T_{sist} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{15-5} = 0.1 \text{ h/ uzdevums};$$

personāla izmaksas/dienā = $8 \times \lambda \times pers.izmaks/dien\bar{a} \times 10nv/h = 40nv$;
kopējās izmaksas/dienā = īre/dienā + personāla izmaksas/dienā = 40+40=80 *nv*.

3. 2-kanālu sistēma, divas blakus izvietotas kopējamās iekārtas ar mazāku jaudu.



$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 0.5$ - MAS noslodzes koeficients;

$\psi = \dfrac{\rho}{n} = \dfrac{0.5}{2} = 0.25$ - viena kanāla noslodzes koeficients;

$T_{sist} = T_{rinda} + T_{apak}$ - vidējais pieteikuma atrašanās laiks sistēmā (gan rindā, gan apkalpošanā);

$T_{apk} = \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{10} = 0.1$ vidējais viena pieteikuma apkalpošanas laiks;

$$p_0 = \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \cdot \psi^k + \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{\psi^{n+1}}{1-\psi} \right)^{-1} =$$

$$= \left( \left( \frac{2^0}{0!} \cdot (0.25)^0 + \frac{2^1}{1!} \cdot (0.25)^1 + \frac{2^2}{2!} \cdot (0.25)^2 \right) + \left( \frac{4}{2} \cdot \frac{0.25^3}{0.75} \right) \right)^{-1} = 0.6$$

varbūtība, ka visi kanāli ir brīvi;

$N_{rinda} = \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{\psi^{n+1}}{(1-\psi)^2} \cdot p_0 = \dfrac{2^2}{2!} \cdot \dfrac{0.25^3}{(1-0.25)^2} \cdot 0.6 = 0.033$ - vidējais pieteikumu skaits rindā;

$T_{rinda} = \dfrac{N_{rinda}}{\lambda} = \dfrac{0.033}{5} = 0.006$ - vidējais pieteikumu gaidīšanas laiks rindā;

$T_{sist} = T_{rinda} + T_{apak} = 0.006 + 0.1 = 0.106$ h;

Personāla izmaksas/dienā = $8 \cdot \lambda \cdot T_{sist} \cdot 10 nv/d = 8 \cdot 5 \cdot 0.106 \cdot 10 = 42.4$ *nv/d*;

Kopējās izmaksas = īre/dienā + personāla izmaksas = $2 \cdot 20 + 42.4 = 82.4$ *nv/d.*

4. Divas 1-kanāla sistēmas, kur katra kopējamā iekārta novietota savā stāvā.

$$\left.\begin{array}{ll} n=1 & \mu = 10 \ \lambda = 2.5 \\ n=1 & \mu = 10 \ \lambda = 2.5 \end{array}\right\} \lambda = 5$$

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{2.5}{10} = 0.25$;

$T_{sist} = \dfrac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \dfrac{0.25}{2.5(1-0.25)} = \dfrac{0.25}{1.875} = 0.133$ h;

Personāla izmaksas/dienā = $2 \cdot 8h/d \cdot \lambda \cdot T_{sist} \cdot 10 nv/d$ = $2 \cdot 8 \cdot 2.5 \cdot 0.133 \cdot 10 = 53.2$ *nv/d*;

Kopējās izmaksas = īre/dienā + personāla izmaksas = 40+53.2 = 93.2 *nv/d.*

Tādējādi var secināt, ka sistēmas uzlabošanai, t.i., ar to saistīto izmaksu samazināšanai, jāizvēlas jaudīgākas kopēšanas iekārtas īre.