



Sistēmu modelēšanas un imitācijas pamati (DMI201)

Lekciju materiāls sagatavots projekta

"RTU akadēmisko bakalauru studiju programmas "Datorsistēmas" datorzinātnes pamatkursu pilnveidošana" ietvaros





Sistēmu modelēšanas un imitācijas pamati

Profesore, Dr. tech.sc., Dr. sc.ing. Galina Merkurjeva

Rīgas Tehniskā universitāte

Datorzinātnes un informācijas tehnoloģijas fakultāte

Informācijas tehnoloģijas institūts

Modelēšanas un imitācijas katedra



Priekšmeta pamatdati

- Priekšmeta pieteicējs: Gaļina Merkurjeva
- Apjoms: 3 KP
- Kontroles veids: Studiju darbs, Eksāmens
- Studiju līmenis: Akadēmiskā bakalaura studiju programma
- Semestris: 3. semestris



Priekšmeta mērķi un uzdevumi

Mērķi:

- iepazīties ar pamatjēdzieniem, kas saistīti ar sistēmu modelēšanu, kā arī analītiskās un imitācijas modelēšanas pamatu apguve
- iegūt iemaņas darbam ar modernu modelēšanas programmatūru

• Uzdevumi:

- apgūt sistēmu analīzes un modelēšanas pamatjēdzienus, analītiskās un imitācijas modelēšanas metodes un programmatūru (eksāmens)
- apgūt imitācijas modelēšanas pamatprincipus, t.s. laika skaitīšanu, gadījuma faktora modelēšanu, paralēli notikušus un savstarpēji saistītus procesu attēlošanu un modelēšanas rezultātu apstrādi ar atbilstošu uzdevumu risināšanu individuālā studiju darbā (ieskaite studiju darbam ar atzīmi)
- iegūt iemaņas darbam ar modernu modelēšanas programmatūru un to pielietošanā praktisko uzdevumu risināšanai izstrādājot trīs darbus laboratorijā ar MATLAB un Promodel modelēšanas sistēmām (ieskaite par laboratorijas darbiem)





Pamatliteratūra

- www.vu.lv// Sistēmu modelēšanas un imitācijas pamati.
- Michael Pidd. Computer Simulation in Management Science, Willey & Sons, 1998. (RTU abonements)
- Grundspeņķis, J. Tolujevs. Sistēmu modelēšana. Lekciju konspekts. 1. daļa, Rīgas Politehniskais institūts, J. 1983. (RTU abonements)
- Grundspeņķis, J. Tolujevs. Sistēmu modelēšana. Lekciju konspekts. 2. daļa, Rīgas Politehniskais institūts, J. 1984. (RTU abonements)



Papildliteratūra

- Б.Я.Советов, С.А. Яковлев. Моделирование систем. М., Высшая школа, 1985. (RTU abonements)
- J. Banks, J.S.Carson, B.L.Nelson. Discrete-event Simulation. Prentice Hall, 2006. – 549 lpp. (ITI MIK)
- L. Frolova. Matemātiskā modelēšana ekonomikā un menedāmentā. Teorija un prakse. Izglītības soļi, Rīga, 2005.
- V. Jansons, V. Jurenoks. Ekonomiskā modelēšana.
 RTU izdevniecība, 2005. 219 lpp.





Atslēgas vārdi

- Sistēma
- Sistēmas struktūra
- Sistēmas elementi un dinamika
- Modelis
- Modeļa adekvātums
- Datormodelēšana
- Matemātiskais modelis
- Analītiskais modelis
- Imitācijas modelis
- Laika diagrammas





Pamattēmas

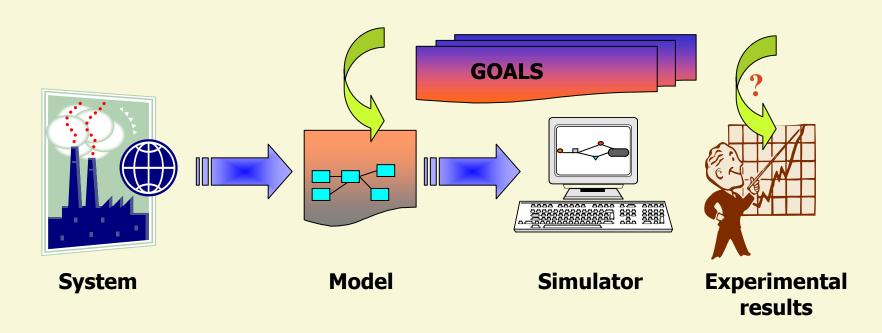
- Sistēmu analīzes pamatjēdzieni
- Sistēmu modelēšanas pamatjēdzieni
- Analītiskās sistēmu modelēšanas pamati
- Statistiskās modelēšanas pamati
- Modeļa adekvātums
- Imitācijas modelēšanas tehnoloģijas apgūšana ar ProModel palīdzību
- Modelēšanas programmatūras apskats





Kas ir modelēšana?

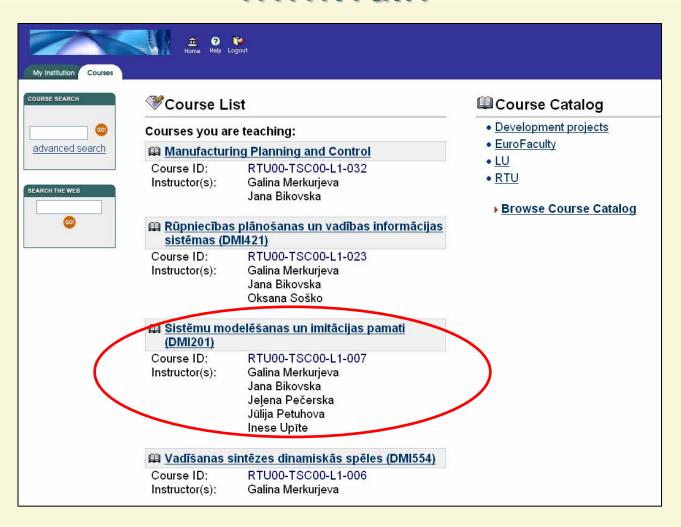
 Modelēšana ir reāla objekta pētīšana ar modeļu palīdzību







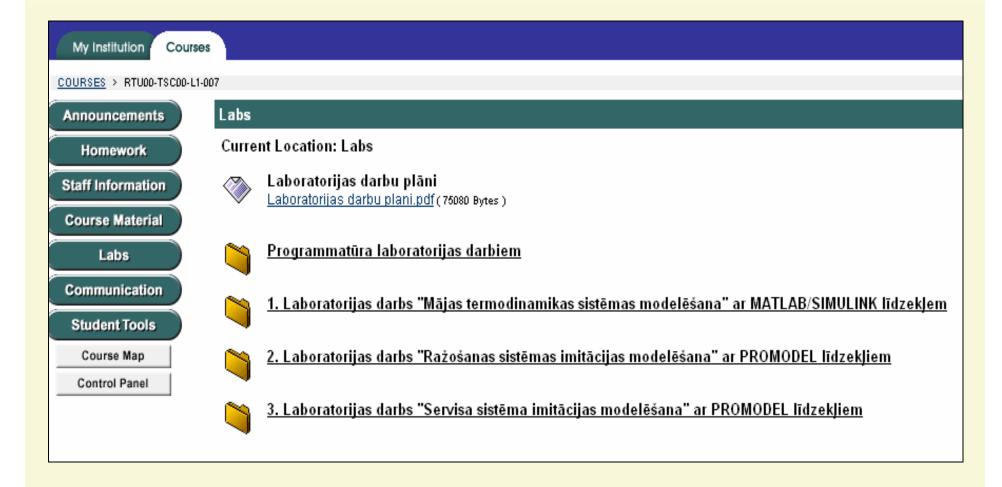
Virtuāla universitāte Blackboard www.vu.lv







Laboratorijas darbi







Programmatūra

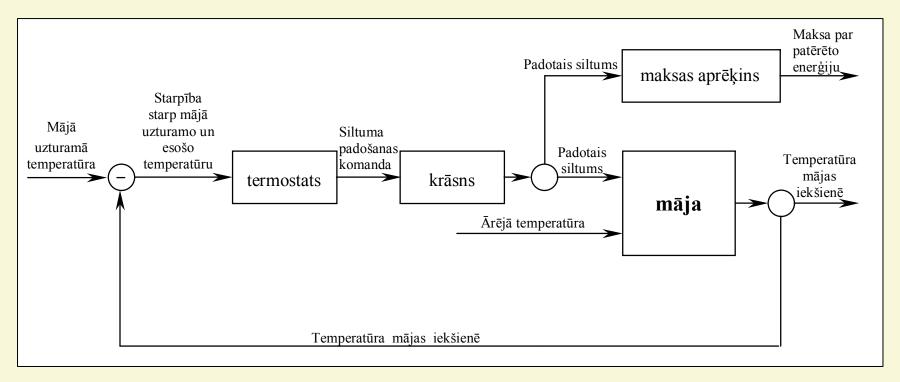






1. laboratorijas darbs

Pašregulējošās mājas termodinamikas sistēmas modelēšana ar MATLAB/SIMULINK

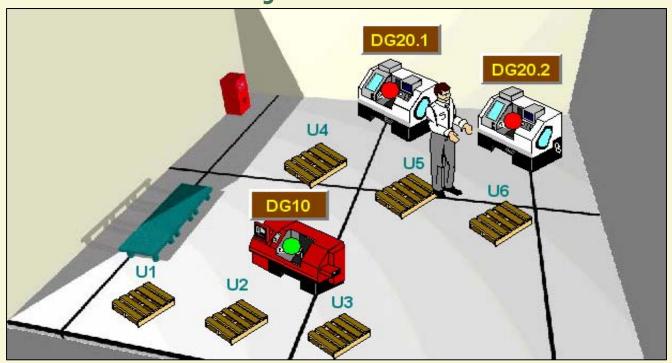






2. laboratorijas darbs

Ražošanas sistēmas imitācijas modelēšana ar PROMODEL līdzekļiem



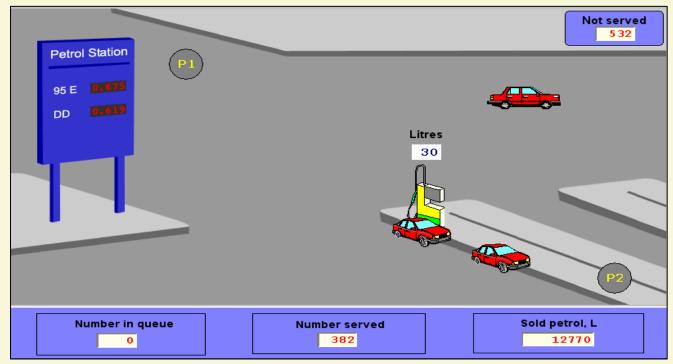
Ražošanas iecirkņa modeļa attēls





3. laboratorijas darbs

 Servisa sistēmas imitācijas modelēšana ar PROMODEL līdzekļiem

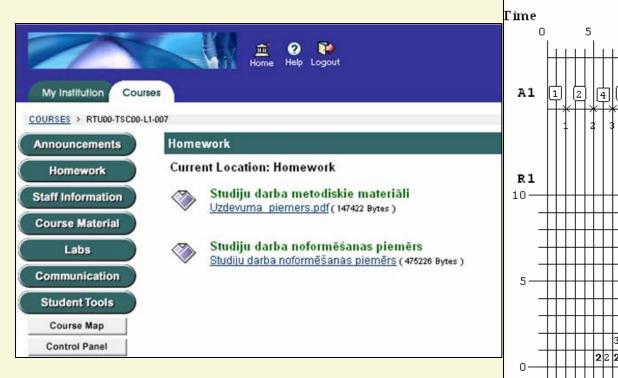


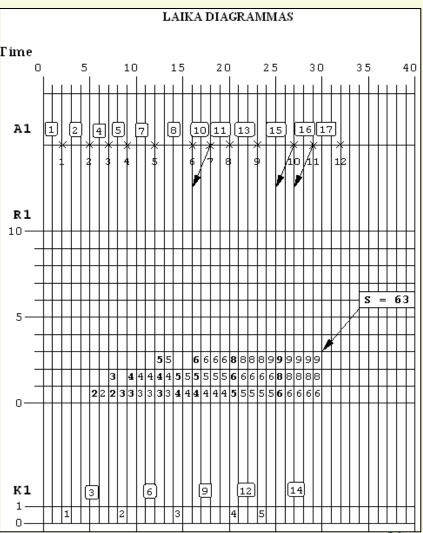
Degvielas uzpildes stacijas modeļa attēls





Studiju darbs





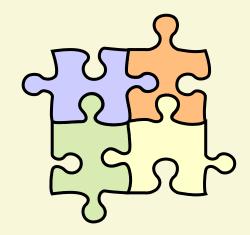
RTU akadēmisko bakalauru studiju programmas "Datorsistēmas" datorzinātnes pamatkursu pilnveidošana VPD1/ ESF/PIAA/04/APK/3.2.3.2/0065/0007





1. tēma. Sistēmu analīzes pamatjēdzieni

- 1.1. Sistēmas definīcijas
- 1.2. Sistēmas elementi un dinamika
- 1.3. Sistēmas raksturojums
- 1.4. Sistēmas klasifikācija
- 1.5. Sistēmas sarežģītība





1.1. Sistēmas definīcijas

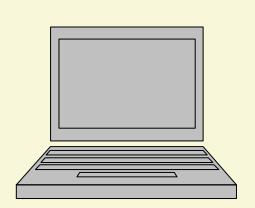
- Konceptuālā definīcija
 - sistēma ir jebkuras dabas savstarpēji saistītu komponenšu kopa, kas sakārtotas pēc attiecībām, kurām ir pilnīgi noteiktas īpašības. Šo kopu raksturo vienotība, kas izpaužas kopas funkcijās un integrālās īpašībās
 - <u>system</u> is defined as a collection of elements that function together to achieve a desired goal (Blanchard 1991)





Sistēmas pazīmes

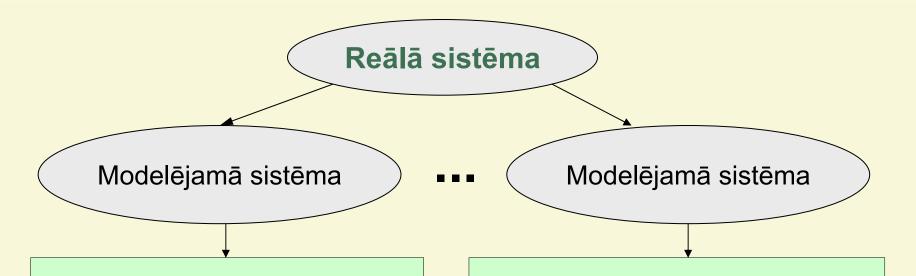
- Elementu kopa
- Sakari starp elementiem
- Sistēmas robežas
- Sakari ar apkārtējo vidi
- Sistēmas īpašības
- Sistēmas funkcijas (funkcionēšanas mērķis)
- <u>Piemēri</u>: transporta sistēmas, tehniskas sistēmas (1.darbs), politiskas sistēmas, ekonomiskas sistēmas, ražošanas sistēmas (2.darbs), servisa sistēmas (3. darbs), utt.







Sistēmas robežas



Slimnīcas nodaļa (pacientu plūsma, ārstu skaits, palātu skaits, utt.)

Slimnīca, pārējas slimnīcas, pacientu plūsma starp nodaļām

Slimnīca (pacientu plūsma, ārstu skaits, palātu skaits visā slimnīcā)

Pārējas slimnīcas, pacientu plūsma starp slimnīcām



Matemātiskā definīcija

- <u>Sistēma</u> ir sakārtots (strukturizēts) elementu sakopojums, kam definētas:
 - elementu kopa E={e_i}, i=1, 2,..., kuriem ir noteiktas īpašības;
 - <u>attieksmes</u> R starp elementiem, piemēram, bināras attieksmes $R=(e_i, e_j)$, i, j=1, 2, ...





Sistēmas nedalāmības princips

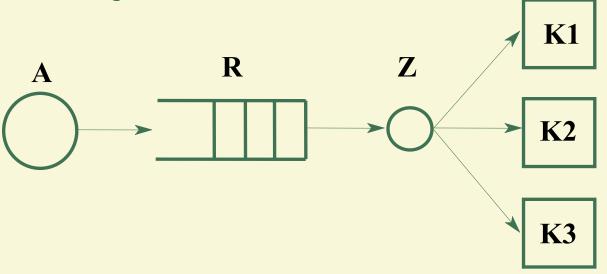
- Sistēmas īpašības <u>nevar apskatīt</u> kā vienkārši sistēmas elementu īpašību summu
- Sistēmas īpašības <u>nevar atvasināt</u> no sistēmas elementu īpašībām





Sistēmas struktūra S=[E,R]

Bankas nodaļa



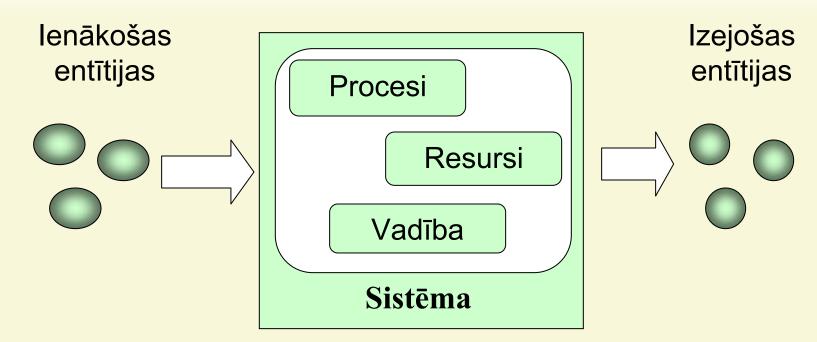
Pieprasījumu avots Rinda Zarošanās punkts Kanāls

Klienti Telpa Apkalpošanas Kasieri gaidīšanai disciplīna





1.2. Sistēmas elementi un dinamika (1)



- Entītijas ir objekti, kuri tiek apstrādāti sistēmā:
 - cilvēki vai pārējas dzīves būtnes (klienti, pacienti)
 - nedzīvie priekšmeti (detaļas, dokumenti)
 - nesataustāmie priekšmeti (zvani, elektroniskas vēstules)





Sistēmas elementi un dinamika (2)

- <u>Procesi</u> definē ar entītijām veiktās operācijas vai darbības sistēmā (klientu apkalpošana, detaļu apstrāde); aktivitātes prasa laiku un resursus
- <u>Resursi</u> ir līdzekļi, ar kuru palīdzību var veikt operācijas vai izpildīt darbības. Piemēram, serveris, iekārtas, instrumenti, operatori, informācija, elektroenerģija
- <u>Resursu raksturojumi</u>: iekārtu kapacitāte, uzstādīšanas laiks, transportlīdzekļa pārvietošanas ātrums. Resursi var būt pastāvīgie/mainīgie, mobilie/stacionārie
- <u>Vadības signāli</u> norada kur, kad un kā veikt operācijas vai izpildīt darbības. Piemēram:
 - maršrutizācijas shēma
 - ražošanas plāns
 - instrukcijas

- kalendāra plāns
- uzdevumu prioritāte





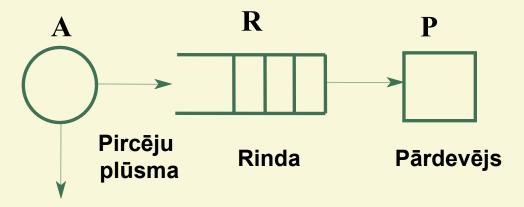
1.3. Sistēmas raksturojums

- <u>Sistēmas atribūti</u> lielumi, kuri raksturo gan pašus elementus, gan to saites ar pārējiem elementiem
- Sistēmas stāvoklis S(t) visu sistēmas atribūtu S₁(t), $S_2(t),...,S_i(t),...$ Kopa laikā momenta t
- Novērošanas laika intervāls T laika intervāls, kurā sistēma tiek novērota
- Sistēmas darba gājiens {S(t), t ∈ T} stāvokļu vektora konkrēta realizācija kā laika funkcija intervālā T ietvaros
- Notikums sistēmas stāvokļu maiņa
- Notikumu laika moments laika moments, kurā notiek notikums
- Process notikumu secība, kura ir sakārtota laikā





Sistēmas raksturojuma piemērs



Neapkalpotie pircēji

- <u>Notikumi</u> N={N₁, N₂}, N₁ ienāk pircējs, N₂ pārdevējs beidz apkalpot
- Sistēmas stāvoklis S(t)={<R(t), P(t)>}
- Rindas stāvoklis R(t)=R_i aizņemto vietu skaits rindā
- <u>Pārdevēja stāvoklis</u> P(t)= 0, pārdevējs ir brīvs
 1, pārdevējs ir aizņemts





Stāvokļu tabula (matrica)

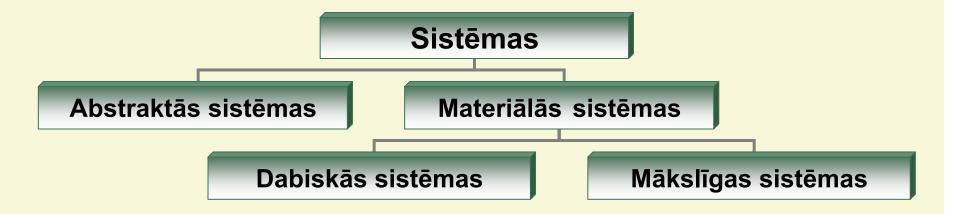
t_i	N _i	S _i	Atribūti		
-		-	R_i	P_i	Si
t _o		S ₀	0	0	0
t ₁	N ₁	S ₁	0	1	0
t ₂	N ₁	S ₂	1	1	0
t ₃	N ₂	S ₁	0	1	0
	•••		•••	•••	•••

- Process = { N_1 , N_1 , N_2 , ...}
- Sistēmas darba gājiens = $\{S_0, S_1, S_2, S_1, ...\}$

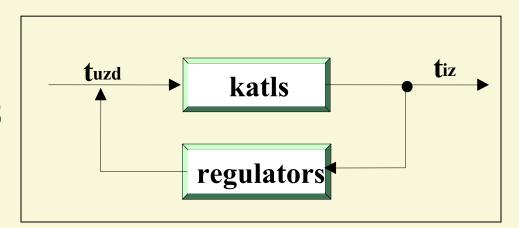




1.4. Sistēmu klasifikācijas shēma

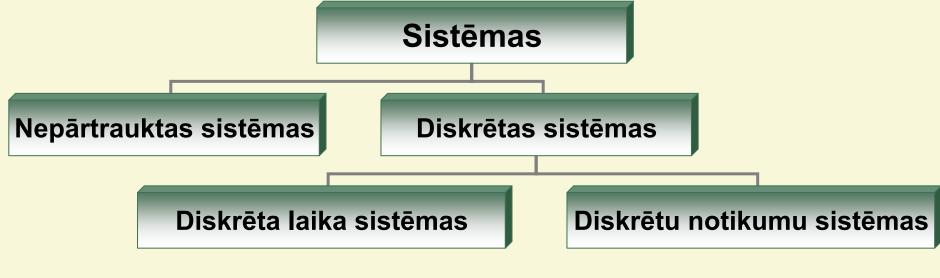


 Vadības sistēmās tiek realizēts vadības process, sadarbojoties vadības daļai ar vadāmo objektu (sk. 1. lab. darbu)

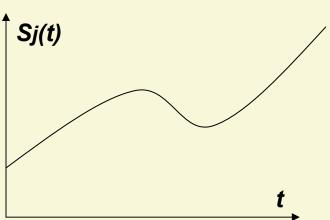




Nepārtrauktās un diskrētās sistēmas



- Sistēmas stāvoklis mainās monotoni un nepārtraukti laikā, t.i.
- S_j(t) nepārtrauktas laika funkcijas (sk. 1. lab. darbu)



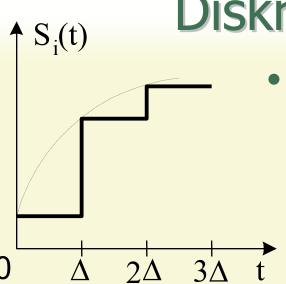




Diskrētas sistēmas

 Sistēma var atrasties tikai stingri noteiktos diskrētos stāvokļos, t.i.

$$S(t) \in \{S_1, S_2, ...\}$$



Diskrēta laika sistēmas

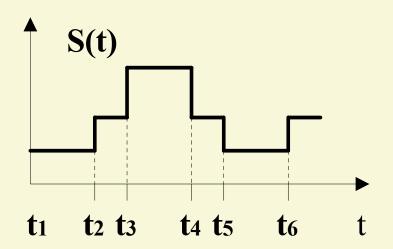
 Sistēma tiek novērota noteiktos laika momentos. Līdz ar to sistēmas stāvoklis mainās tikai šajos konkrētajos laika momentos (piemēram, ekonomiskajā modelēšanā)





Nepārtraukta laikā — diskrētu notikumu sistēmas

 Sistēma maina savu stāvokli nenoteiktos laika momentos t₁, t₂, Darba gājiens sastāv no notikumiem šajos momentos:



- t₁, t₂, t₃, t₆ pienāca kārtējais pircējs
- t₄, t₅ kārtējais pircējs tika apkalpots un aizgāja

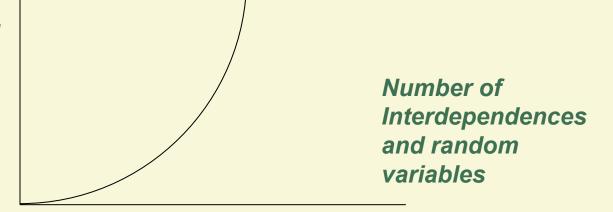




1.5. Sistēmas sarežģītība

- <u>Elementu savstarpēja atkarība</u> (liels skaits savstarpēji sadarbojošos elementu un saišu starp elementiem sarežģītais raksturs un daudzveidība)
- <u>Variabilitāte</u> (mainīgums) nepastāvīgā, neparedzamā sistēmas uzvedība (iekārtu bojājumi, mainīgais pieprasījums, utt.)

Degree of Analytical difficulty

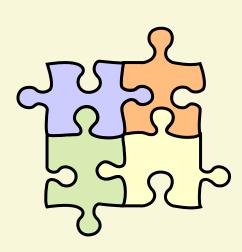






2. tēma. Sistēmu modelēšanas pamatjēdzieni

- 2.1. Modelēšanas jēdziens
- 2.2. Modeļa definīcija
- 2.3. Modelēšanas motivācijas
- 2.4. Modelēšanas pamatpaņēmieni
- 2.5. Modelēšanas uzdevumi
- 2.6. Datormodelēšanas procedūras tipiska struktūra
- 2.7. Modeļu klasifikācija
- 2.8. Matemātisko modeļu klasifikācija

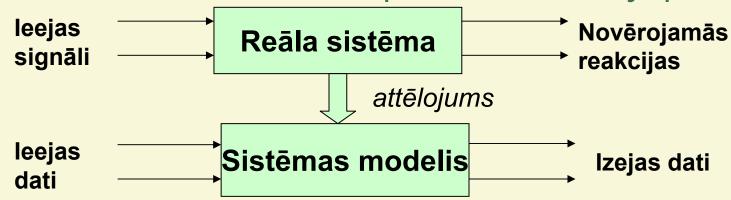






2.1. Modelēšanas jēdziens

Modelēšanas būtība: sistēmu pētīšana ar modeļu palīdzību



- <u>Modelēšana mērķis</u>: iegūt jaunu nepieciešamu informāciju par modelējamo sistēmu
- <u>Modelēšanas definīcija</u>: par modelēšanu sauc modeļa izveidošanas un pielietošanas procesu
- <u>Datormodelēšanas jēdziens</u>: modelēšana kas paredz datortehnikas pielietošanu modelēšanas gaitā





2.2. Modeļa definīcija

- Modelis ir abstrakta vai materiālā sistēma, kura:
 - attēlo modelējamā objekta (t.i. oriģināla) vissvarīgākās īpašības un attiecības
 - <u>izdevīgā formā</u> atspoguļo informāciju par modelējamo objektu
 - var tikt izmantota, <u>lai risinātu uzdevumus</u>, kurus nevar risināt ar paša objekta palīdzību

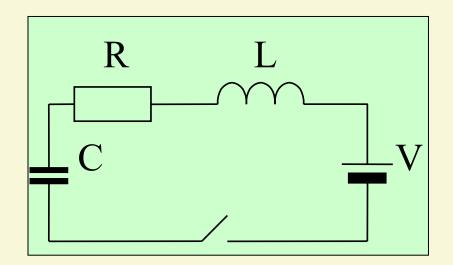


- Modeļa adekvātuma jēdziens:
 - modelis ir <u>adekvāts</u> modelējamajam objektam, ja tas pietiekami <u>pilnīgi</u> un <u>detalizēti</u> apraksta visas būtiskās objekta īpašības ar <u>precizitāti</u>, ko nosaka <u>mērķis</u>





Piemērs: Elektriskā sistēma



C - kondensators (kapacitāte)

R - rezistors (pretestība)

L - spole (induktivitāte)

V - baterija (elektriskais spriegums)

q - kondensatora elektriskaislādiņš

$$q''(t) + \frac{R}{L} \cdot q'(t) + \frac{1}{LC} \cdot q(t) = \frac{1}{L} \cdot V(t).$$

<u>Pielietošanas piemērs</u> – analogais modelis automobiļa piekares projektēšanai





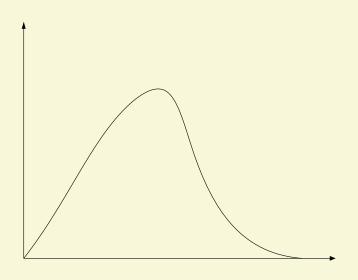
Prasības modelim

Modelim ir jābūt:

- pietiekami precīzam
- relatīvi vienkāršam
- atspoguļojošam būtiskos sakarus starp modelējamā objekta elementiem
- praktiski ērti pielietojamam



- 20% (t.i., būtiskais mazākums) sistēmas elementu nosaka
- 80% (t.i., pamatā) no sistēmas uzvedības







2.3. Modelēšanas motivācijas

- Strādāt ar pašu objektu ir <u>pārāk dārgi, grūti, vai pat bīstami</u> (kodolreaktors, kuģis, rūpnīca)
- Problēmu principiāli <u>nevar atrisināt</u> bez pētāmā objekta modeļa (diagnostika medicīnā, tehnikā)
- Pētāmais objekts vispār vēl <u>neeksistē</u> (konstruēšana)
- Pētāmie <u>procesi ir pārāk lēni vai ātri</u> (bioloģiskās vai astronomiskās sistēmas)







2.4. Modelēšanas pamatpaņēmieni

- <u>Abstrakcija</u> atteikšanas no nebūtiskajiem sīkumiem un detaļām, kas saistīti ar modelējamās sistēmas dabu
- Dekompozīcija sistēmas sadalīšana apakšsistēmas
- Agregācija sistēmas stāvokļu un signālu raksturojumu apvienošana (pretēja dekompozīcijai)
- <u>Vienkāršošana</u> nebūtisko parametru un signālu izslēgšana
- Randomizācija gadījuma skaitļu izmantošana, lai aprakstītu sistēmu elementus, kurus nav būtiski modelēt detalizēti
- Specializācija modeļa izveidošana katram mērķim atsevišķi





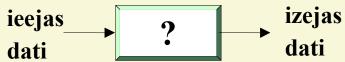
2.5. Modelēšanas uzdevumi

1. <u>Sistēmu analīze</u> (what if) – sistēmu reakcijas uz uzdotiem signāliem analīze (2. lab. d.)



Piemērs: tehnoloģiskā procesa ietekme uz apkārtējo vidi.

2. <u>Sistēmu sintēze</u> – sistēmu ar uzdotām īpašībām radīšana (1. lab. d.)



Piemērs: regulatora struktūras sintēze.

3. <u>Sistēmu optimizācija</u> — optimālo parametru noteikšana (3. lab. d.)

$$X \rightarrow M(P_1,...,P_j) \rightarrow Q(P_1,...,P_j) \rightarrow ext$$





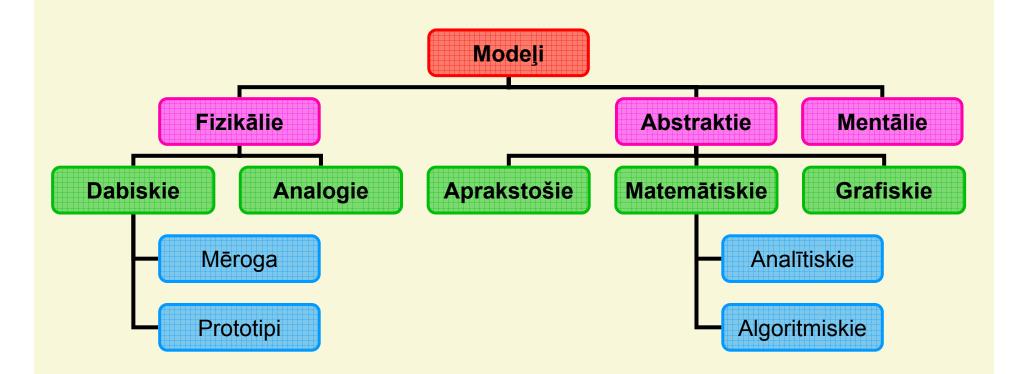
2.6. Datormodelēšanas procedūras tipiska struktūra

- 1. Modelēšanas problēmas definēšana:
 - modelējamās sistēmas analīze
 - modelēšanas uzdevuma nostādne
- 2. Modela izveidošana
- 3. Modelēšanas datorprogrammas izveidošana
- Modeļa adekvātuma pārbaude
- Eksperimentēšana ar modeli
- 6. Rezultātu interpretēšana un analīze





2.7. Modeļu klasifikācija (1)







Modeļu klasifikācija (2)

• Fizikālie modeļi

- materiālie objekti kas ir izveidoti tieši modelēšanas mērķiem
- modeļa izveidošanā tiek izmantotas reālas sistēmas fizikālas īpašības:
 - fizikālā daba sakrīt vai ir līdzīga (<u>dabiskie modeļi</u>)
 - izmanto fizikālas dabas analoģijas principu (analogie modeļi)





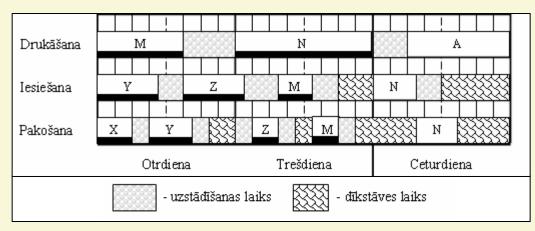






Modeļu klasifikācija (3)

- Abstraktie modeļi abstrakti apraksti (grafiki, shēmas, vienādojumi, formulas)
 - aprakstošie modeļi parastā valodā definē sistēmas funkcionēšanas procesu (uzdevuma nostādne, projekta pieteikums)
 - matemātiskie modeļi tādu formālu attiecību kopa, kuri apraksta saites starp objekta sākuma stāvokli, tekošo stāvokli, ieejas un izejas signāliem
 - grafiskie modeli tīkla veida grafi, diagrammas, utt.



Ganta diagrammas piemērs





Modeļu klasifikācija (4)

- Matemātiskie modeļi
 - Analītiskais modelis tiek uzdots analītisku izteiksmju veidā (formulas, vienādojumi, utt.)

ieejas
spriegums

Reostats
spriegums

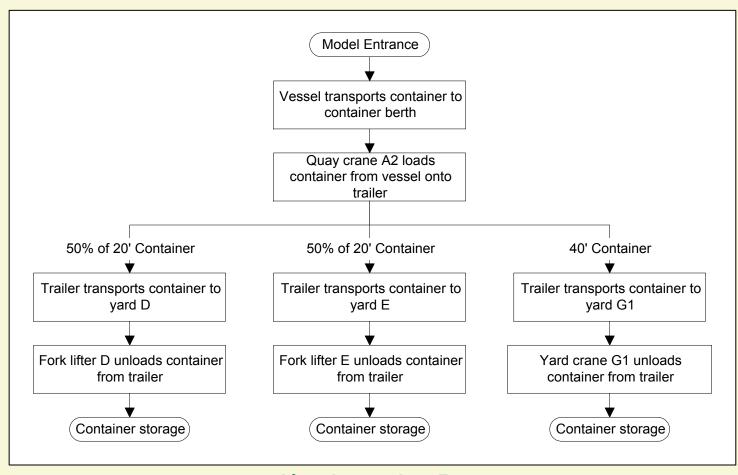
$$U_{iz}(t)=k^*U_{ie}(t)$$

- <u>analītiski</u> (iegūt risinājumu vispārīgā veidā ar analītisku izteiksmi)
- <u>skaitliski</u> (iegūt skaitlisku risinājumu pie uzdotiem nosacījumiem)
- <u>kvalitatīvi</u> (iespējams noteikt modelējamās sistēmas īpašības (piem. ar analītisku izteiksmi analīze atrisinājuma stabilitāti)
- Algoritmiskais modelis tiek izveidots algoritmu un atbilstošo datorprogrammu veidā





Modeļu klasifikācija (5)



Algoritma piemērs





Modeļu klasifikācija (6)

 Mentālie modeļi – modeļu izveidošanā izmanto cilvēku pieredzi un zināšanas (piem. lai rakstītu dzejoļus ar datoru palīdzību). Tiek izmantoti mākslīgā intelekta sistēmās (piem. modelis ekspertu zināšanas likumu veidā.)

Kopēšanas mašīnas izvēle

Kritērijs	Novērtējums	
Formāts	A3, A4	
Ātrums	Noteicošais, ir vēlams, nav svarīgs	
Mērogošana	Nepieciešama, ir vēlama, nav svarīga	
Izmērs	Nav svarīgs, pēc iespējas minimāls	

RUI F: IF Ātrums ir noteicošais 16532 **ELSE**

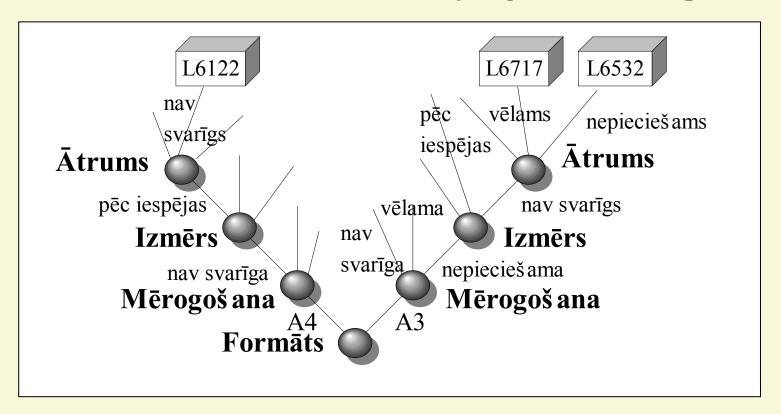
L6112 OR L6514





Modeļu klasifikācija (7)

Grafiskais modelis – lēmuma pieņemšanas grafs

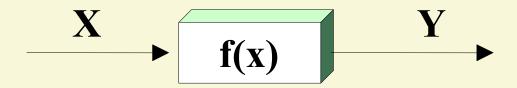






2.8. Matemātisko modeļu klasifikācija (1)

1. Lineārie un nelineārie modeļi



Superpozīcijas princips:

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$$

Piemēram, $y = a \cdot x$, kur $a = const$





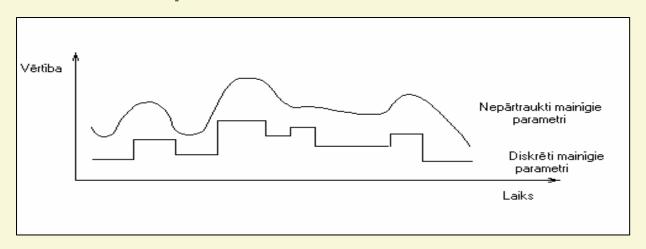
Matemātisko modeļu klasifikācija (2)

2. <u>Dinamiskie un statiskie modeli</u>

$$rac{x}{F(x)}$$

y(t) = $F[x(\tau)] | \tau \in [t-T, t]$, kur T - objekta "atmiņa"

3. <u>Diskrētie un nepārtrauktie</u>





Matemātisko modeļu klasifikācija (3)

4. Determinētie un stohastiskie modeļi

```
y = a \cdot x, kur a = const, x - determinēts lielums

y = a \cdot x + e, kur a = const, x - determinēts lielums,

e - gadījuma lielums ar zināmu matemātisko

cerību M[ e ] = E,

Tad M[ y ] = M[ a \cdot x + e ] = M[ a \cdot x ] + M[ e ] = a \cdot x + E,

bet y - ???
```

5. Stacionārie un nestacionārie modeļi

```
y = a \cdot x, kur a = const

y = a \cdot x, kur a = a(t)
```





Matemātisko modeļu klasifikācija (4)

Klasifikācijas pazīmes:

- V uzdošanas Veids (Analītiskie un algoritmiskie modeļi)
- L Laika faktors (Dinamiskie un statiskie modeļi)
- S Stāvokļu faktors (Diskrētie un nepārtrauktie modeļi)
- G Gadījuma faktors (Determinētie un stohastiskie modeļi)

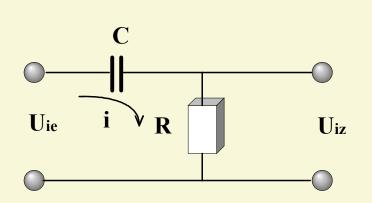
MatMod=<V, L, S, G>





Matemātisko modeļu klasifikācija (5)

• <u>Piemērs</u>: Diferencējošais RC četrpols



$$U_{ie} = R \cdot i + U_c$$

$$\frac{dU_{ie}}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{dU_c}{dt}$$

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{c}i, i = \frac{U_{iz}}{R}$$

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{U_{iz}}{RC}, \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dU_{iz}}{dt}$$

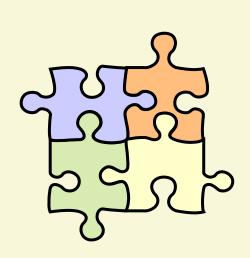
- <u>Modeļa raksturojums</u>: <analītisks, dinamisks, nepārtraukts, determinēts>
- <u>Pielietojums</u>: automātiskās vadības sistēmas (PI regulators)





3.tēma. Analītiskās sistēmu modelēšanas pamati

- 3.1. Diferenciālvienādojumi
- 3.2. Diferenču vienādojumi
- 3.3. Būla funkcijas
- 3.4. Galīgi automāti
- 3.5. Tīklveida modeļi
- 3.6. Petri tīkli







3.1. Diferenciālvienādojumi (1)

- Diferenciālvienādojumi apraksta objektu un procesu izmaiņu raksturu laikā, ievērojot ārējās iedarbes un objektu vai procesu iekšējās īpašības
- Modelējamais objekts:



Vispārīgā n-tās kārtas vienādojuma forma ir:

$$a_{n} \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{1} \cdot y'(t) + a_{0} \cdot y(t) =$$

$$= b_{m} \cdot x^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot x^{(m-1)}(t) + \dots + b_{1} \cdot x'(t) + b_{0} \cdot x(t)$$

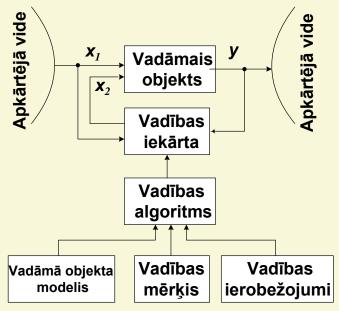
Fiziski realizējamie objekti: m ≤ n





Diferenciālvienādojumi (2)

- <u>Diferenciālvienādojumus pielieto</u>:
 - automātiskas vadības sistēmu modelēšanā
 - tehnoloģisko procesu automatizēto vadības sistēmu vadības objektu modelēšanā



Vadības sistēmu struktūra





Diferenciālvienādojumi (3)

 Dažādus diferenciālvienādojuma tipus pielieto dažādu sistēmu aprakstam

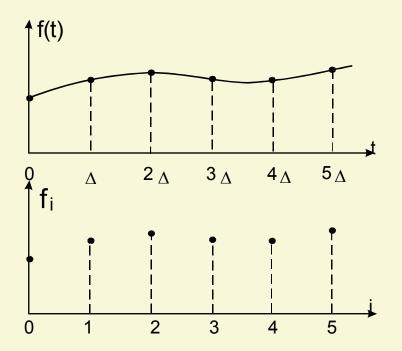
Sistēmas tips	Diferenciālvienādojuma tips
Vispārīgā gadījumā nepārtrauktas sistēmas	Parastie vai parciālie diferenciālvienādojumi
Diskrētas sistēmas	Diferenču vienādojumi
Lineāras nepārtrauktas sistēmas	Lineāri diferenciālvienādojumi
Nelineāras nepārtrauktas sistēmas	Nelineāri diferenciālvienādojumi
Stacionāras sistēmas	Diferenciālvienādojumi ar konstantiem koeficientiem
Nestacionāras sistēmas	Diferenciālvienādojumi ar laika funkcijām





3.2. Diferenču vienādojumi

 Tas ir diferenciālvienādojumu tips, ko izmanto diskrēto sistēmu aprakstam



$$c_0 \cdot y_i + c_1 \cdot y_{i-1} + c_2 \cdot y_{i-2} + \dots + c_n \cdot y_{i-n} =$$

$$= d_0 \cdot x_i + d_1 \cdot x_{i-1} + d_2 \cdot x_{i-2} + \dots + d_m \cdot x_{i-m}$$

$$y_0, y_1, ..., y_{n-1} \Rightarrow y_n \rightarrow y_{n+1} \rightarrow y_{n+2} \rightarrow ...$$





Diferenču vienādojumu piemērs

$$a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot x(t)$$

$$y'(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta)}{\Delta}$$

$$y'(t) = \frac{y(t) - y(t - \Delta)}{\Delta};$$

$$a_1 \cdot \frac{y(t) - y(t - \Delta)}{\Delta} + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot x(t),$$

$$(a_1 + a_0 \cdot \Delta) \cdot y(t) - a_1 \cdot y(t - \Delta) = b_0 \cdot \Delta \cdot x(t);$$

Apzīmēsim:

$$a_1 + a_0 \cdot \Delta = c_0$$
, $-a_1 = c_1$, $b_0 \cdot \Delta = d_0$,

$$x(t) = x_i$$
, $y(t) = y_i$, $y(t - \Delta) = y_{i-1}$;

Tad:

$$c_0 \cdot y_i + c_1 \cdot y_{i-1} = d_0 \cdot x_i$$





3.3. Būla funkcijas

- Būla funkcija ir funkcijas $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, kas var pieņemt tikai divas patiesumvērtības 0 un 1 ("aplams" un "patiess")
- No n Būla mainīgiem var izveidot 2n šo mainīgo kombināciju, kas neatkārtojas
- Būla funkcijas parasti uzdod ar patiesuma tabulu palīdzību

X_1	X_2	$F_1 = \\ = X_1 \wedge X_2$	$F_2 = \\ = X_1 \vee X_2$	$F_3 = \overline{X}_1$	$F_4 = \overline{X}_2$	$F_5 = \\ = X_1 \wedge \overline{X}_2$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Patiesuma tabulas piemērs

- Būla funkcijas pielieto:
 - releju un kontaktu shēmu
 - diskrētu automātu
 - ESM iekārtu un programmu analīzē un sintēzē





Būla algebra

• Elementāro Būla funkciju algebras operācijas ir:

$$y_1=0,$$
 $y_2=\overline{x},$ $y_3=x_1\vee x_2,$ - atbilst loģiskam UN $y_4=x_1\wedge x_2,$ - atbilst loģiskam VAI

- Būla algebras loģisko operāciju likumi:
 - divkāršās negācijas likums
 - komutatīvie likumi
 - asociatīvie likumus
 - distributīvie likumi, utt.
- Būla algebras loģisko operāciju likumus izmanto Būla funkciju pārveidojumiem



3.4. Galīgi automāti

- Galīgs automāts ir objekts, kas spēj uztvert ieejas, bet izdot izejas signālus, kā arī mainīt iekšējos stāvokļus
- Automāta stāvokļus un tā signālus apraksta ar skalāriem vai vektoriāliem lielumiem
- Automāts funkcionē diskrētā laikā, kura momentus t = 0, 1, 2,... sauc par taktīm. Mainīgais t – automāta laiks, kurā jebkura momentā automāts atrodas kādā stāvoklī z(t). Z – automāta stāvokļu kopa, kura ir galīga





Galīgu automātu izmantošana (1)

- Galīgam automātam definē ieejas alfabētu X un izejas alfabētu Y
- Jebkurš ieejas vārds izsauc tāda paša garuma izejas vārda parādīšanos automātā izejā
- Automāta funkcionēšanu apraksta divas funkcijas: pāreju funkcija φ un izeju funkcija ψ

$$z(t) = \varphi[z(t-1), x(t)], \tag{1}$$

$$y(t) = \psi \left[z(t-1), x(t) \right], \tag{2}$$

t - tekošais takts,

x(t) - ieejas signāls,

z(t) - stāvoklis, kurā automāts pāriet tekošajā taktī,

z(t-1) - stāvoklis, kurā automāts atradās iepriekšējā taktī,

y(t) - izejas signāls, ko automāts izdod tekošajā taktī.





Galīgu automātu izmantošana (2)

- Automātus, kam pāreju un izeju funkcijas apraksta izteiksmes (1) un (2), sauc par <u>Milija automātiem</u>
- To var uzdot vai ar grafu, vai arī <u>pāreju un izeju tabulu</u> veidā

Ja X=(x1,x2) – ieejas alfabēts, Z=(z0,z1,z2) – iekšējo stāvokļu kopa un Y=(y1,y2) – izejas alfabēts, tad

Pāreju tabula					
z_0 z_1 z_2					
X ₁	Z_1	z_2	z_0		
X ₂	Z_1	z_1	z_2		

Izeju tabula					
	\boldsymbol{z}_{o}	Z ₁	Z ₂		
X ₁	y ₁	y ₂	y ₁		
X ₂	y ₂	y ₂	y ₁		

- Galīgus automātus pielieto:
 - diskrētas darbības sistēmu un iekārtu aprakstam
 - ražošanas procesu vadības sistēmu, ekonomiskas dabas objektu modelēšanai

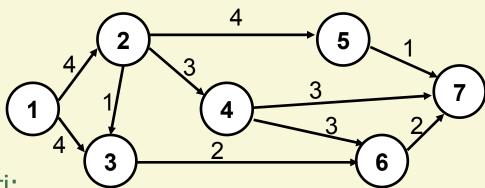




3.5. Tīklveida modeļi (1)

Tiklveida modeļu pamatā ir procesu attēlošana ar <u>tīklveida grafika</u>

palīdzību



- <u>Tiklveida grafika elementi</u>:
 - orientētie loki (apzīmē <u>darbus</u>, operācijas)
 - mezglpunkti (raksturo konkrētu <u>notikumu</u> iestāšanos darba izpildes rezultātā)
- <u>Tiklveida modeļus pielieto</u>:
 - sarežájītu tehnisku objektu projektēšana
 - liela rūpniecības un civilo objektu celtniecība
 - jaunu produkcijas veidu apgūšana



Tīklveida modeļi (2)

Pamatdefinīcijas:

- <u>Darbs</u> ir process, kura izpilde prasa darba, materiālo resursu un laika patēriņu
- Gaidīšana ir process, kas prasa laika patēriņu
- Fiktīvs darbs ir loģiska saite starp darbiem, kas neprasa laika un resursu patēriņu, bet parāda, ka kādu darbu var uzsākt, tikai pabeidzot citus darbus
- <u>Ceļš</u> ir jebkuru darbu secība tīklveida grafikā, kur katra nākamā darba sākums sakrīt ar katra iepriekšējā darba beigu notikumu
- Pilns celš ir sākas izejošā notikumā (pirms tā nav ne viena darba),
 bet beidzas noslēdzošā notikumā (pēc tā nenotiek ne viens darbs)
- Kritiskais ceļš ir pilns ceļš ar maksimālo garumu L_{kr}



3.6. Petri tīkli (1)

- Petri tīkli ir matemātiskais un grafiskais rīks sistēmu modelēšanai un analīzei
- Petri tīklu attīstības pirmsākumi meklējami 1962.g. Karls Adams Petri disertācijā
- Modelējamo sistēmu veids ir <u>diskrētu notikumu sistēmas</u>
- Petri tīklus pielieto:
 - konceptuālā un imitācijas modeļa veidošanā
 - modeļa validācijā un verifikācijā
 - sistēmas stāvokļu analīzē
- <u>Piemēram</u>, elastīgās ražošanas sistēmās, multiapstrādes sistēmās, komunikācijas protokolos





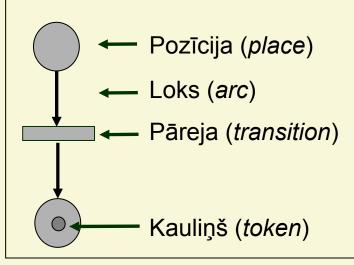
Petri tīkli (2)

Petri tīklu pāreju un pozīciju interpretācijas

Pirmsnosacījumi Notikums Pēcnosacījumi leejas dati Aprēķina formula Izejas dati

leejas signāli Signālu procesors Izejas signāli

Grafiskais modelis



Matemātiskais modelis

$$PN = (P, T, A, W, M_0)$$
 - Petri tīkls

$$P = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$$
 – galīga pozīciju kopa

$$T = \{t_1, t_2, t_3, ...\}$$
 – galīga pāreju kopa

$$A \subset (P \times T) \cup (T \times P)$$
 – loku kopa

$$W = A\{1,2,3,...\}$$
 – loku svaru kopa

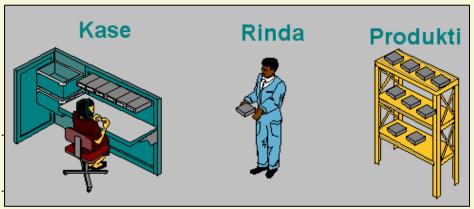
$$M_0 = p_i \{1,2,3,...\} \forall p_i$$
 – sākuma marķējums





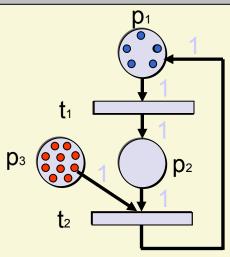
Petri tīkli: piemērs

Modelējamā sistēma: Veikals



Sistēmas apraksts:

Pircēji pienāk pa vienam veikalā un izvēlas produktus. Katrs pircējs var nopirkt tikai vienu produktu. Pēc tam pircējs aizņem vietu rindā un gaida apkalpošanu. Vietu skaits veikalā ir ierobežots (5 vietas), un produktu daudzums ir 10



Pozīcijas:

p1: Brīvo vietu skaits rindā

p2: Pircēju skaits rindā

p3: Produktu skaits veikalā

Kauliņi:

Produkti

Pircēji

Pārejas:

t1: Pircējs pienāk veikalā

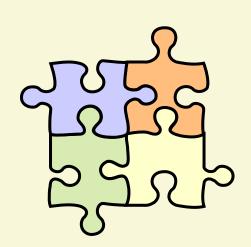
t2: Pircējs tiek apkalpots un aiziet no veikala





4.tēma. Statistiskās modelēšanas pamati

- 4.1. Statistiskās sistēmu modelēšanas definīcija Piemērs. Montēšanas ceha statistiskā modelēšana
- 4.2. Montekarlo modelēšana. Integrāļa vērtības novērtēšana
- 4.3. Imitācijas modelēšanas definīcija un veidi
- 4.4. Imitācijas modelēšanas uzdevumi
- 4.5. Imitācijas modeļa struktūra
- 4.6. Laika skaitīšana imitācijas modeļos
- 4.7. Imitācijas modelēšanas stratēģijas
- 4.8. Imitācijas modelēšanas procedūra







4.1. Statistiskās modelēšanas definīcija

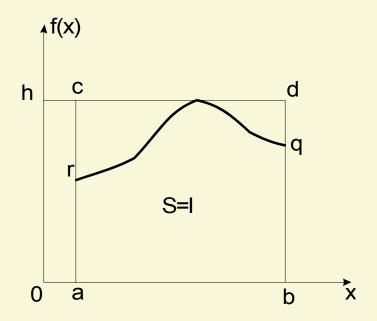
- <u>Statistiskā modelēšana</u> modelēšanas process, kas ietver sevī gadījuma skaitļu ģenerāciju, pārveidošanu un statistisko analīzi
- <u>Gadījuma skaitlis</u> gadījuma lieluma vērtība ar uzdoto sadalījuma likumu
- Gadījuma skaitļu iegūšanas veidi:
 - ar datora palīdzību, izmantojot gadījuma procesus
 - ar dabiskiem gadījuma procesiem (monētas mešana)





4.2. Montekarlo modelēšana (1)

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx - ?$$



Gadījuma algoritms:

- ģenerēt N punktus(x_i,y_i) ∈ abdc
- no tiem izvēlēt punktus, kuros

$$y_i \le f(x_i)$$





Montekarlo modelēšana (2)

• Integrāļa vērtības novērtēšana:

$$P = P\{(x_i, y_i) \in abqr\} = \frac{I}{(b-a) \cdot h} \approx \frac{n}{N}$$

• kur n ir punktu skaits, kuros $y_i \le f(x_i)$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N}=P$$

$$I \approx \frac{n}{N} \cdot (b - a) \cdot h$$

x_i: **X** - vienmērīgi sadalīts intervālā [a, b]

y_i: **Y** - vienmērīgi sadalīts intervālā [0, h]





4.3. Imitācijas modelēšanas definīcija

- Imitācijas modelēšana sarežģītu sistēmu modelēšana ar datora palīdzību, imitējot šo sistēmu ārēju un iekšēju gadījuma faktoru iedarbību
- <u>Tipiskie IM objekti</u>:
 - informatīvās sistēmas
 - ražošanas uzņēmumi
 - transporta sistēmas
 - noliktavas
 - tirdzniecības centri
 - sabiedriskās ēdināšanas sistēmas



4.4. Imitācijas modelēšana uzdevumi

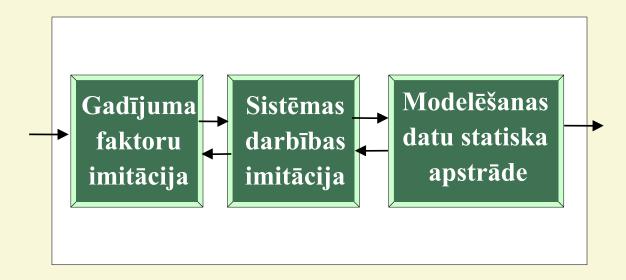
- <u>Uzdevumu novērtēšana</u> MS uzvedības novērtēšana
- Novērošana MS uzvedības padziļināta analīze
- <u>Jūtīguma analīze</u> jūtīguma uz dažādu faktoru izmaiņām analīze
- <u>Šauro vietu analīze</u> šauro vietu, kas būtiski samazina sistēmas darbības efektivitāti, noskaidrošana, analīze un likvidēšana
- <u>Paredzēšana</u> sistēmas uzvedības prognozēšana dažādos apstākļos
- Alternatīvu salīdzināšana vairāku MS uzbūves variantu vai dažādu MS darbības režīmu salīdzināšana un labākā varianta izvēle
- <u>Parametru optimizācija</u> MS parametru optimizācija
- <u>Metamodelēšana</u> analītisku sakarību izveidošana starp MS ieejas un izejas lielumiem





4.5. Imitācijas modeļa struktūra

- <u>Imitācijas (imitējošais) modelis</u> algoritmisks, stohastisks modelis, kas imitē sistēmas darbības algoritmu, datorprogrammu veidā
- Imitācijas modeļa struktūra:

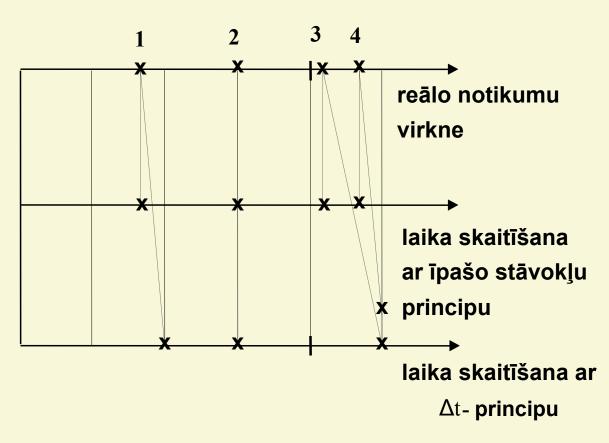






4.6. Laika skaitīšana imitācijas modeļos (1)

• Laika skaitīšanas principu attēlošana:

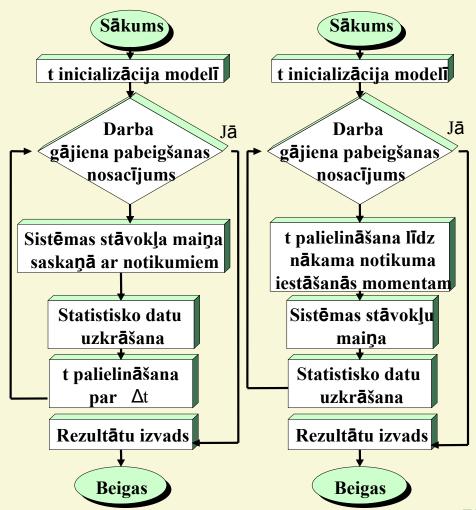






Laika skaitīšana imitācijas modeļos (2)

 <u>Laika skaitīšanas</u> algoritmi:







Laika skaitīšana imitācijas modeļos (3)

- Laika skaitīšanas principu īpašības:
 - $-\Delta t$ princips (fixed time increment)
 - + universālums
 - + vienkāršība
 - notikumu attēlošanas sagrozījums
 - mašīnlaika patēriņš
 - <u>īpašo stāvokļu princips</u> (next event time increment)
 - + precizitāte
 - + ekonomiskums





4.7. Imitācijas modelēšanas stratēģijas (1)

- Programmatūras izstādes principi:
 - notikumu plānošana (event scheduling)
 - procesu sadarbība (process interaction)
 - darbību pārskatīšana (activity scanning)

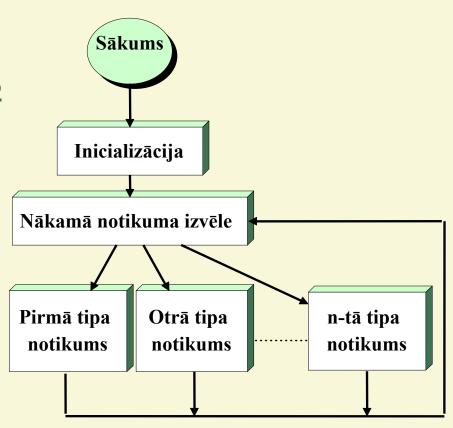
Modelēšanas specializētās valodas						
Event-oriented	Activity- oriented	Process- oriented				
SIMSCRIPT	CSL, SIMON,	SIMULA, GPSS,				
GASP	GSP	DEMOS, SOL				





Imitācijas modelēšanas stratēģijas (2)

<u>Uz notikumiem</u>
 orientēts simulators
 (event-oriented simulator)







Imitācijas modelēšanas stratēģijas (3)

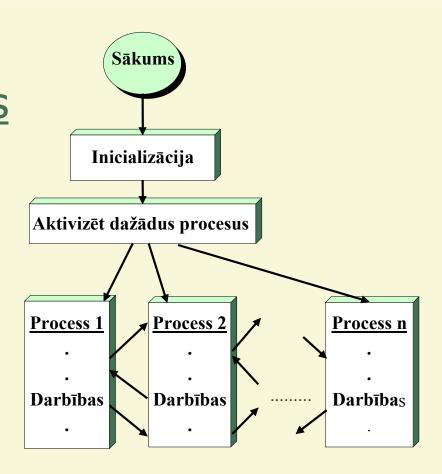
- <u>Piemērs</u>: Automašīnu mazgāšanas stacija ar vienu apkalpojošo iekārtu
- <u>Uzdevums</u>: novērtēt apkalpojošās iekārtas noslodzes koeficientu
- <u>Elementi</u>: apkalpojošā iekārta, automašīnas, stāvvieta (M vietas)
- Stāvoklis: N (t) automašīnu skaits mazgāšanas stacijā
- Modelēšanas laiks: T
- Notikumi: automašīnu piebraukšana, aizbraukšana N(t) = N(t) + 1, N(t) = N(t) - 1
- <u>Datu uzkrāšana</u>: T_0 kopējais laiks, kurā N (t) = 0
- Rezultāta izskaitļošana: $U = 1 \frac{I_0}{T}$





Imitācijas modelēšanas stratēģijas (4)

<u>Uz procesiem</u>
 orientēts simulators
 (process-oriented simulator)

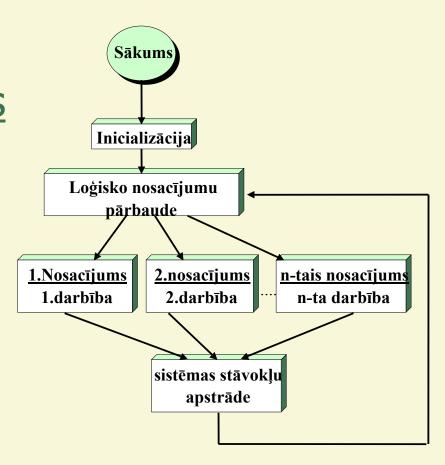






Imitācijas modelēšanas stratēģijas (5)

<u>Uz darbībām</u>
 orientēts simulators
 (activity-oriented simulator)





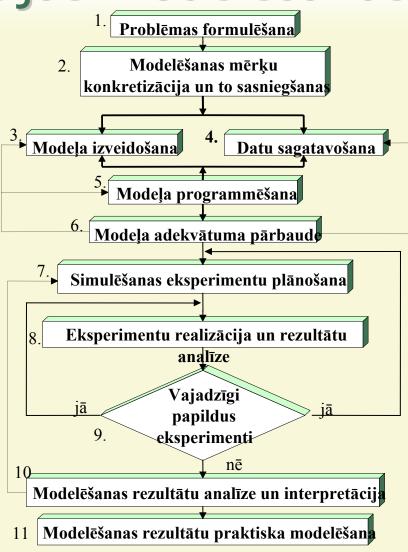


Imitācijas modelēšanas stratēģijas (6)

- Priekšrocības un trūkumi
 - Uz notikumiem orientēts simulators
 - + vienkārši realizēt vadības struktūru
 - sarežģīti modelēt paralēlus procesus
 - sarežģīti modelēt sarežģītus procesus
 - Uz procesiem orientēts simulators
 - + sistēmas augsta līmeņa abstrakcija modelī
 - + vienkārši realizēt savstarpēji saistītu procesu vadību
 - + vienkārši modelēt paralēlus procesus
 - Uz darbībām orientēts simulators
 - + vienkārši atrisināt paralelitātes problēmas
 - sarežģīti programmēt



4.8. Imitācijas modelēšanas procedūra







5. tēma. Modeļa adekvātums

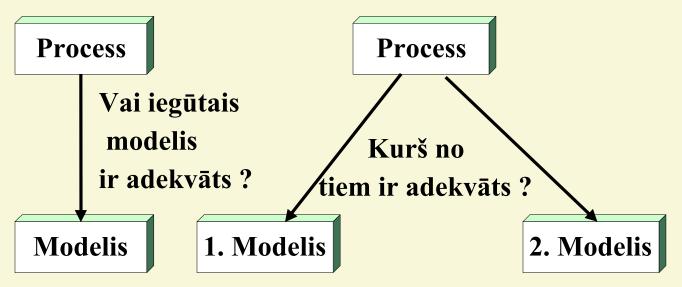
- 5.1. Modeļa adekvātuma definīcija
- 5.2. Modeļa validācija un verifikācija
- 5.3. Modelēšanas un programmēšanas kļūdas
- 5.4. Modeļa validācijas un verifikācijas procedūras





5.1. Modeļa adekvātuma definīcija

 Modelis ir <u>adekvāts</u> modelējamajam objektam, ja tas <u>pietiekami pilnīgi</u> un <u>detalizēti</u> apraksta visas būtiskās objekta īpašības <u>ar precizitāti</u>, ko nosaka <u>mērķis</u>







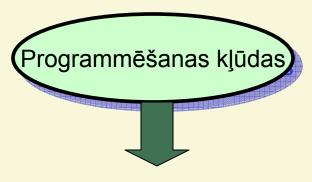
5.2. Modeļa validācija un verifikācija

- Programmas verifikācija
- Modeļa validācija
- Programmas verifikācija noteic, vai izveidotais programmlīdzeklis uzvedas tā, kā to gaida izstrādātāji
- Modeļa validācija noteic, vai izveidotais modelis uzvedas tā, kā to gaida lietotājs

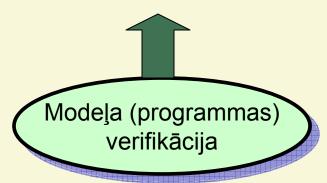


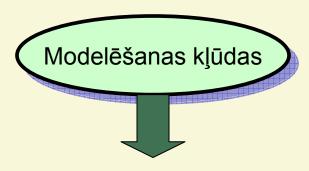


5.3. Modelēšanas un programmēšanas kļūdas

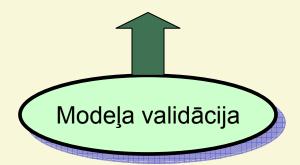


- sintaktiskās
- semantiskās
- loģiskās





- nepareizi pieņēmumi
- nepareizas modelēšanas metodes
- nepareiza ieejas datu vākšana







5.4. Modeļa validācijas un verifikācijas procedūras

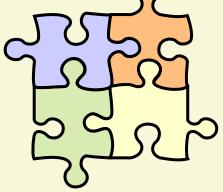
Verifikācija	Validācija				
Testa gājienu veikšana	Salīdzina modelēšanas rezultātus ar reālo objektu				
Gājienu trasēšana	Pārbauda dažādus pieņēmumus, pielietotus modelēšanā (piem., ar X ² palīdzību)				
Animācijas lietošana	Izmanto analītiskus algoritmus, lai pārbaudītu sakritības starp sistēmas elementiem				
	Modelēšanas rezultātu ekspertu novērtējums				





6. tēma. Imitācijas modelēšanas tehnoloģijas apgūšana ar ProModel palīdzību

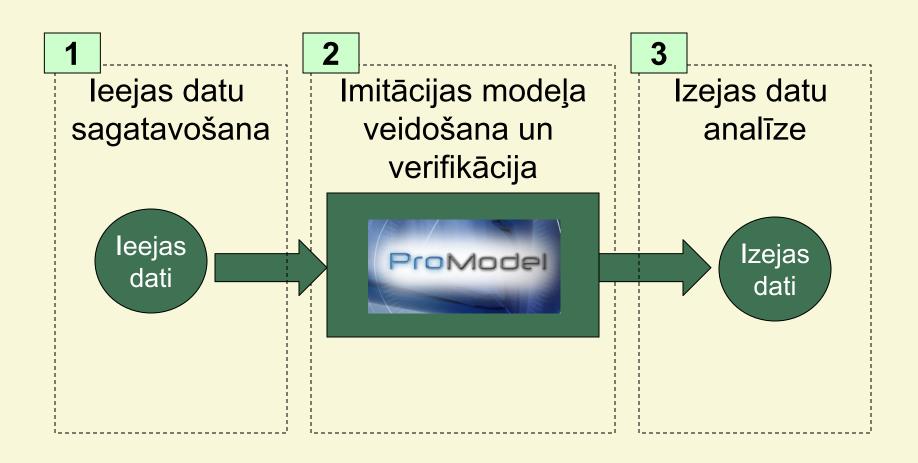
- 6.1. Imitācijas modelēšanas pamatposmi ProModel vidē
- 6.2. Imitācijas modelēšanas programmlīdzeklis ProModel
- 6.3. ProModel grafiskais interfeiss
- 6.4. ProModel failu struktūra
- 6.5. ProModel imitācijas modeļu piemēri







6.1. Imitācijas modelēšanas pamatposmi ProModel vidē







6.2. Imitācijas modelēšanas programmlīdzeklis ProModel

leejas datu statistiskā analīze ("Stat::Fit" līdzeklis)

Imitācijas modelēšanas scenāriju veidošana

Ražošanas un loģistikas sistēmu modelēšanas programmlīdzeklis



Izejas datu analīze un optimizācija ("SimRunner" līdzeklis)

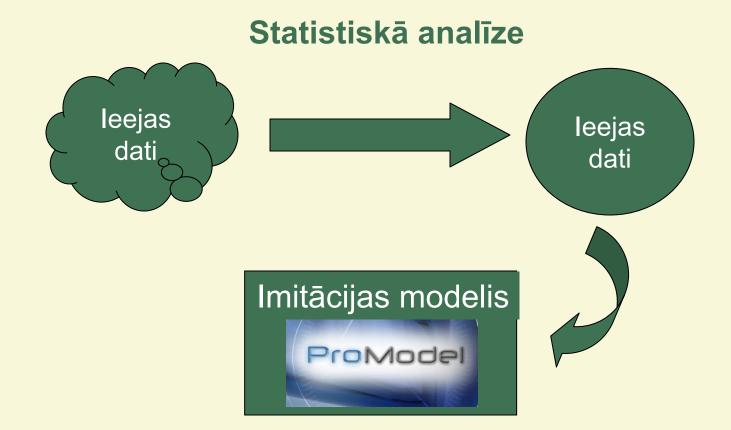
> Datu eksportēšana MS Excelī

Grafiskais interfeiss





6.2.1. Ieejas datu sagatavošana (1)





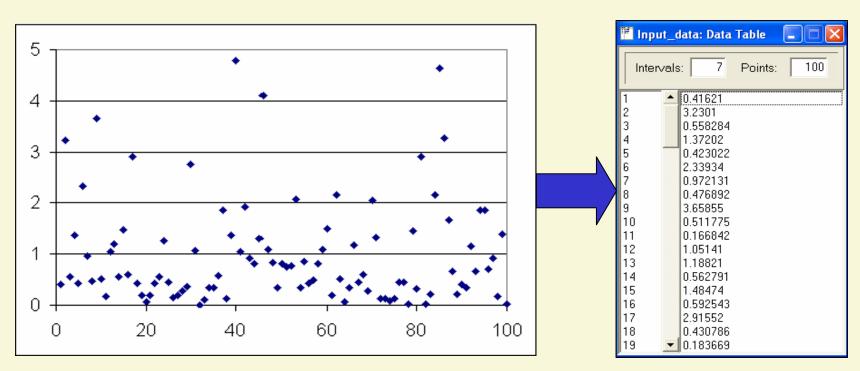


Ieejas datu sagatavošana (2)

• Piemērs:

Sākotnējie ieejas dati

Datu statistiskās analīzes programmlīdzeklis "Stat::Fit"

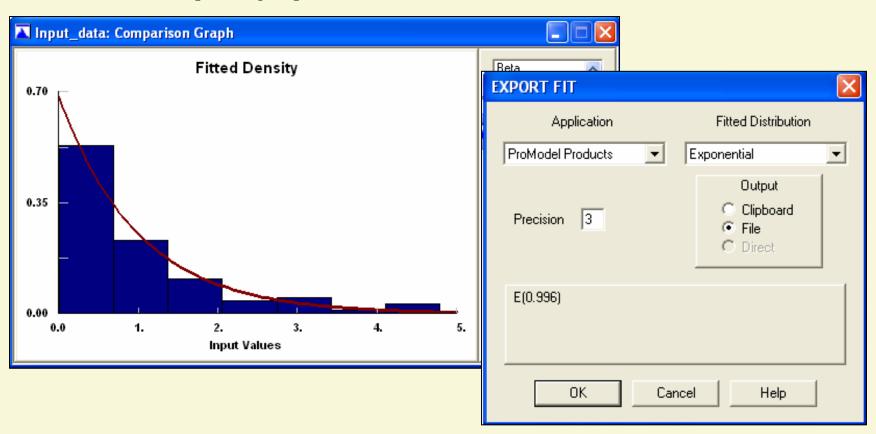






Ieejas datu sagatavošana (3)

• Piemērs (turp.):





6.2.2. Imitācijas modeļu veidošana ProModel vidē (1)

 Imitācijas modeļi tiek veidoti no atsevišķiem moduļiem

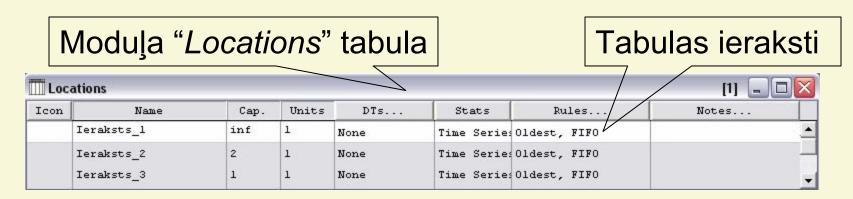






Imitācijas modeļu veidošana ProModel vidē (2)

- Katrs modulis sastāv no tabulas (edit table) un dialogu logiem (dialog boxes)
- Tabula sastāv no ierakstiem, katrs no kuriem definē atsevišķo modeļa elementu
- Piemērs:







Imitācijas modeļu veidošana ProModel vidē (3)

Build	Simulation	Output	Tools		
Loc	ations	Cti	rl+L		
Ent	ities	⊂tı	Ctrl+E		
Pat	:h Networks	Cti	Ctrl+N		
Re:	sources	Cti	Ctrl+R		
Pro	cessing	Cti	Ctrl+P		
Arr	ivals	Cti	rl+A		
Shi	fts		•		
Att	ributes	Cti	⊂trl+T		
Var	iables (global) Cti	rl+B		
Arr	ays	Cti	Ctrl+Y		
Ma	cros	Cti	rl+M		
Sul	proutines	Cti	rl+S		
Mo	re Elements		<u> </u>		
Gei	neral Informa	tion Cti	rl+I		
Co:	st				
Bad	ckground Grap	ohics	•		

- Moduļi var būt aizpildīti ar nepieciešamu informāciju jebkurā secībā
- Bet secība, kurā moduļi tiek sakārtoti *Build* apakšizvēlnē, ir ieteicama

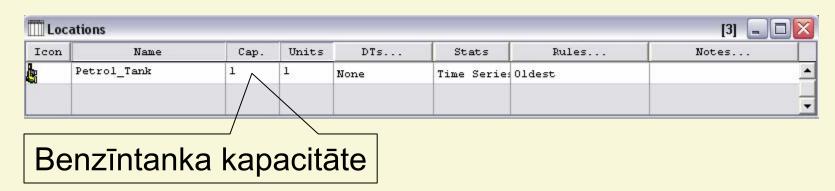




Imitācijas modeļu veidošana ProModel vidē (4)

- <u>Izvietojumi</u> (*Locations*) ir noteiktās vietas modelī, kurās entītijas tiek uzkrātas vai apstrādātas
- Piemērs:



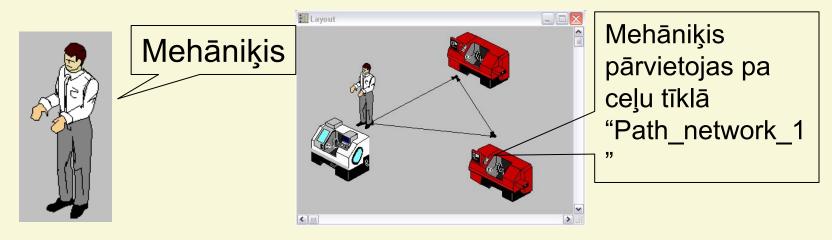






Imitācijas modeļu veidošana ProModel vidē (5)

- <u>Resursi</u> (*Resources*) ar tiem modelē transportēšanas līdzekļus vai palīgpersonālu, kas veic noteiktas operācijas. Resursiem definē ceļu tīklus (*Path Network*), pa kuriem tie pārvietojas starp izvietojumiem
- Piemērs:



Resources								
Icon	Name	Units	DTs	Stats	Specs	Search	Logic	Pts
f	Mehanikis	1	None	By Unit	Path_network	None	0	1





Imitācijas modeļu veidošana ProModel vidē (6)

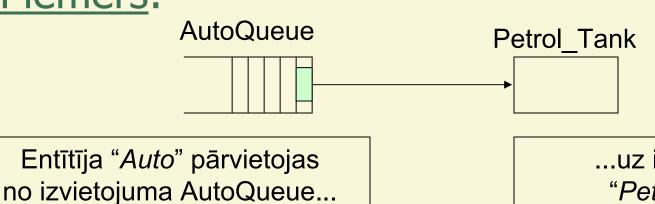
- Procesi un Maršrutizācija (Processing)
 - Procesi apraksta ar entītijām izvietojumos veiktās operācijas
 - Maršrutizācija definē entītijas pārvietošanās ceļus modelī. Tie nosaka entītijas pārvietošanu no izvietojuma, kurā tika pabeigts process jeb entītijas apstrāde, uz nākamo entītijas izvietojumu (Destination) un nosaka pārvietošanās likumus (Routing Rules) jeb izvēles kritērijus starp iespējamiem izvietojumiem

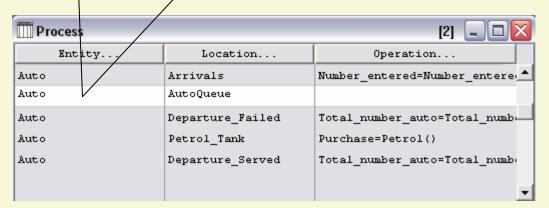




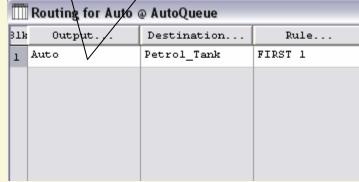
Imitācijas modeļu veidošana ProModel vidē (7)

Piemērs:





...uz izvietojumu "Petrol_Tank"

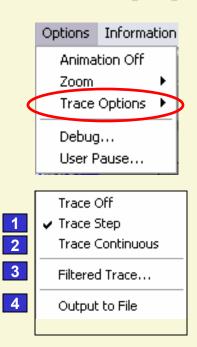






6.2.3. Imitācijas modeļu verifikācija ProModel vidē (1)

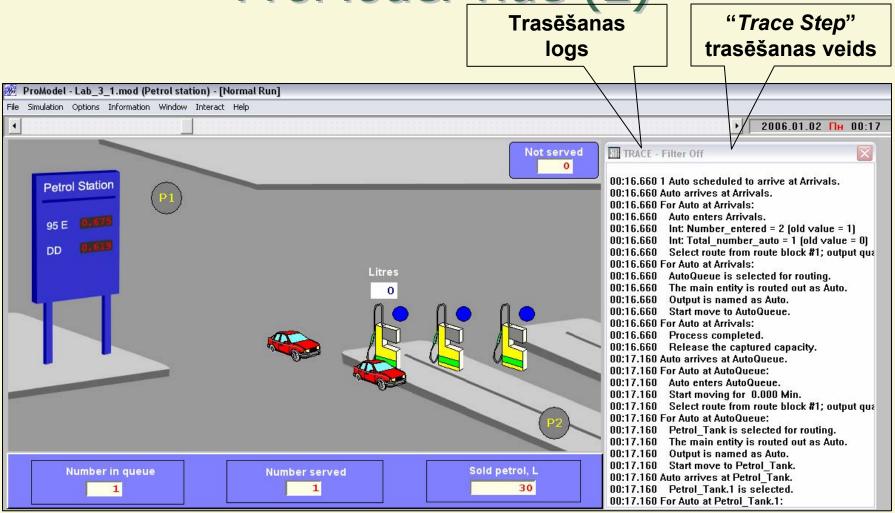
- Modeļu verifikācija notiek ar trasēšanas procedūras palīdzību
- ProModel atbalsta vairākus trasēšanas veidus









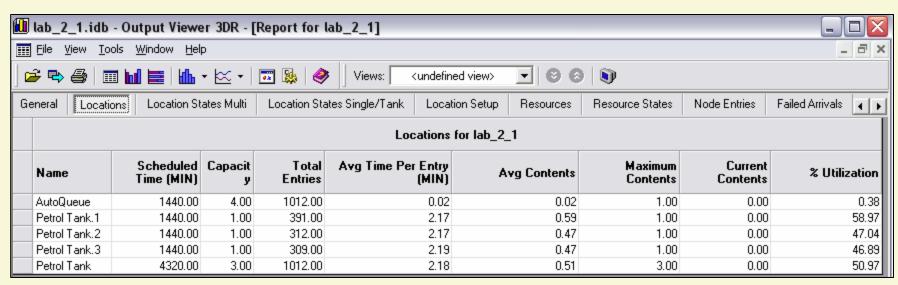






6.2.4. Izejas datu apskats un analīze (1)

- Imitācijas modeļu izejas dati tiek automātiski eksportēti datu redaktorā "Output Viewer"
- Dati no "Output Viewer" var būt tālāk eksportēti MS Excelī detalizētai analīzei

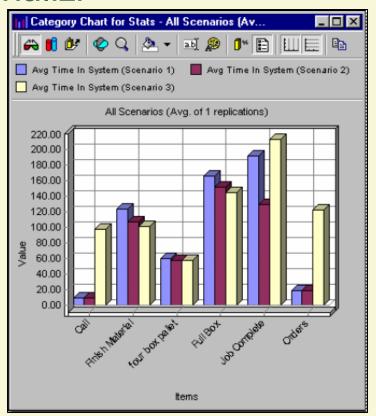


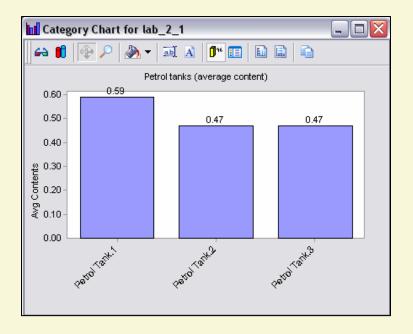




Izejas datu apskats un analīze (2)

 Datu redaktors "Output Viewer" atbalsta grafisko analīzi



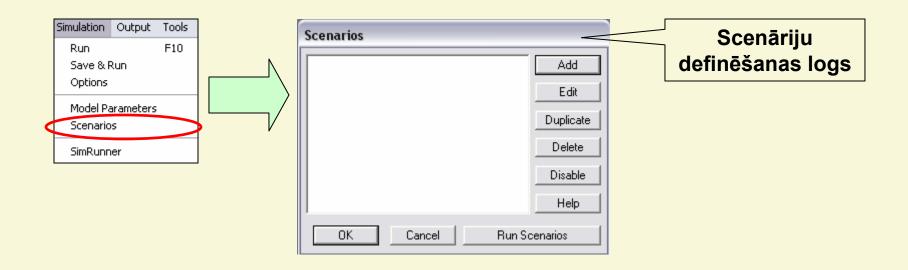






6.2.5. Imitācijas modelēšanas scenāriju veidošana (1)

 Imitācijas modelēšanas scenārijs ir modeļa parametru kopa, kurā katram parametram tiek piešķirta noteiktā vērtība



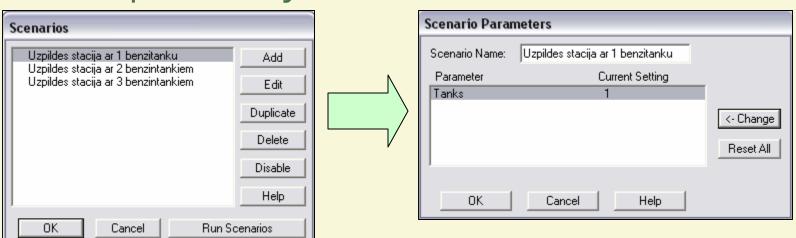




Imitācijas modelēšanas scenāriju veidošana (2)

Piemērs:

- trīs scenāriji
 - 1. uzpildes stacija ar 1 benzīntanku
 - 2. uzpildes stacija ar 2 benzīntankiem
 - 3. uzpildes stacija ar 3 benzīntankiem







6.3. ProModel grafiskais interfeiss

• Piemēri:



Transpt.glb



Aircraft.glb





6.4. ProModel failu struktūra

Modela fails:

- *.mod - imitācijas modeļa fails

Ieejas faili:

- *.xls masīvu fails
- *.glb grafiskās bibliotēkas fails
- *.sfp statistisko datu fails
- *.sft darba maiņu fails

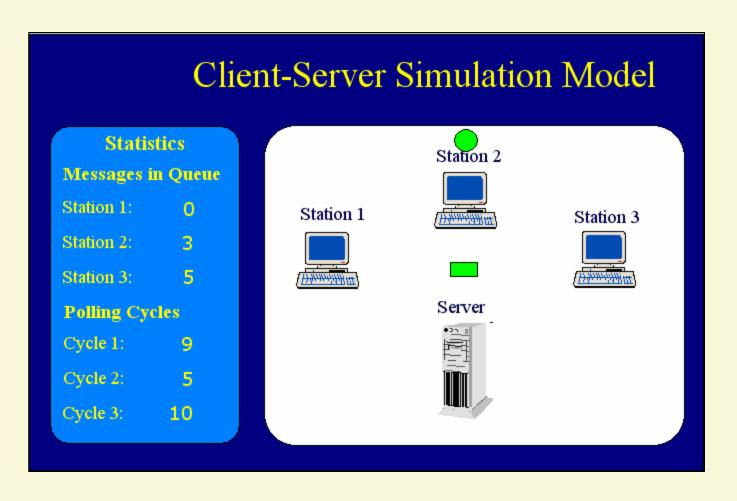
Izejas faili:

- *. idb – izejas datu fails





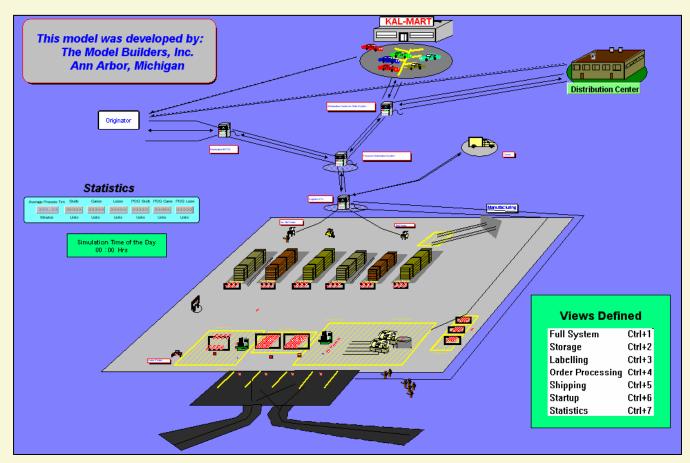
Piemērs 1. Klienta-servera imitācijas modelis







Piemērs 2. Sadales centra imitācijas modelis

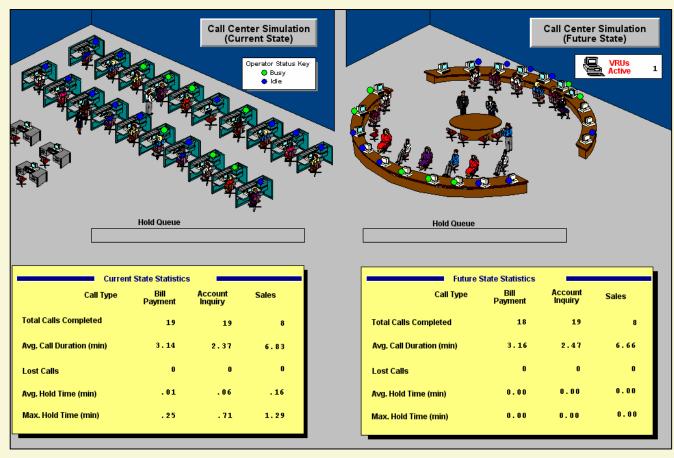


ProModel demo modelis





Piemērs 3. Klientu apkalpošanas imitācijas modelis



ProModel demo modelis