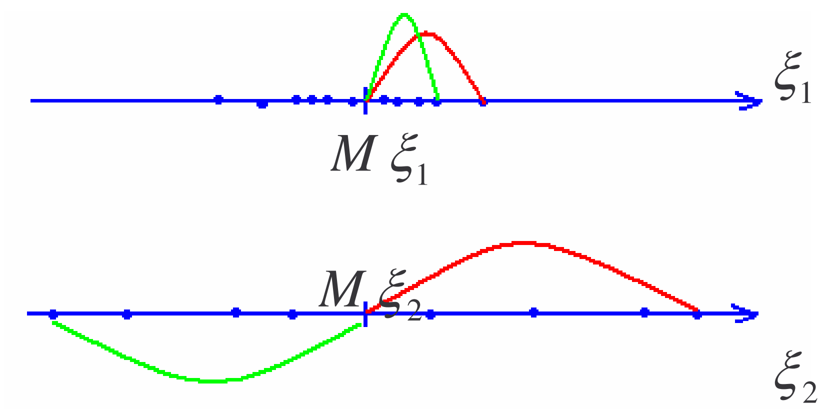
Kovariācija. Korelācijas koeficients.

Kā aprakstīt divu gadījuma lielumu savstarpējo saistību?



<u>Definīcija</u>. Par divu gadījuma lielumu ξ_1 un ξ_2 <u>kovariāciju</u> sauc skaitli

$$K(\xi_1, \xi_2) = M((\xi_1 - M\,\xi_1)(\xi_2 - M\,\xi_2))$$

Var pārrakstīt 4. dispersijas īpašību:

$$D(\xi_1 \pm \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2 \pm 2M((\xi_1 - M\,\xi_1)(\xi_2 - M\,\xi_2)) =$$

$$= D\xi_1 + D\xi_2 \pm 2K(\xi_1, \xi_2)$$

$$K(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1\xi_2 - \xi_1 M\,\xi_2 - \xi_2 M\,\xi_1 + M\,\xi_1 M\,\xi_2) = M(\xi_1\xi_2) - M\,\xi_1 M\,\xi_2$$

Kovariācijas īpašības.

1. $K(\xi,\xi) = D\xi$
2. $K(\xi_1,\xi_2) = K(\xi_2,\xi_1)$
3. $K(c\xi_1,\xi_2) = cK(\xi_1,\xi_2)$
4. neatkarīgiem gadījuma lielumiem $K(\xi_1,\xi_2) = 0$, jo $K(\xi_1,\xi_2) = M(\xi_1\xi_2) - M\xi_1 M\xi_2$

4a. no $K(\xi_1,\xi_2) = 0$ vēl neseko, ka ξ_1 un ξ_2 neatkarīgi.

5. $-\infty < K(\xi,\xi) < \infty$ (galvenais kovariācijas trūkums)

<u>Definīcija</u>. Par divu gadījuma lielumu ξ_1 un ξ_2 <u>korelācijas koeficientu</u> sauc skaitli

$$\rho(\xi_1,\xi_2) = \frac{K(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 D\xi_2}}$$

Korelācijas koeficienta īpašības.

1. $-1 \le \rho(\xi_1,\xi_2) \le 1$

Pierādījums. Ievedīsim normētu gadījuma lielumu $\tilde{\xi} = \dfrac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$

$$M\tilde{\xi} = \frac{1}{\sqrt{D\xi}} M(\xi - M\xi) = 0 \qquad D\tilde{\xi} = \left(\frac{1}{\sqrt{D\xi}}\right)^2 D(\xi - M\xi) = \frac{1}{D\xi}(D\xi + 0) = 1$$

$$\rho(\xi_1,\xi_2)=\frac{M\,((\xi_1-M\,\xi_1)(\xi_2-M\,\xi_2))}{\sqrt{D\xi_1 D\xi_2}}=M\,(\tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_2)$$

$$0\le D(\tilde{\xi}_1\pm\tilde{\xi}_2)=M\,(\tilde{\xi}_1\pm\tilde{\xi}_2)^2-\underbrace{(M\,(\tilde{\xi}_1\pm\tilde{\xi}_2))^2}_{0}=M\,\tilde{\xi}_1^{\,2}\pm 2M\,(\tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_2)+M\,\tilde{\xi}_2^{\,2}=$$

$$=2\pm 2\rho(\xi_1,\xi_2)\qquad\Rightarrow\qquad -1\le\rho(\xi_1,\xi_2)\le 1$$

2. neatkarīgiem gadījuma lielumiem $\rho(\xi_1,\xi_2)=0$. Seko no kovariācijas 4. īpašības.

3. Ja $\xi_2=A\xi_1+B$ un $A\neq 0$, tad $|\rho(\xi_1,\xi_2)|=1$

Pierādījums. Pieņemsim, ka $M\,\xi_1=a$ un $D\xi_1=\sigma^2$. Tad $M\,\xi_2=Aa+B$ un $D\xi_2=A^2\sigma^2$.

$$K(\xi_1,\xi_2)=M\,((\xi_1-a)(\xi_2-Aa+B))=M\,((\xi_1-a)(A\xi_1-B-Aa+B))=$$

$$=AM\,(\xi_1-a)^2=A\sigma^2$$

$$\rho(\xi_1,\xi_2)=\frac{A\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2A^2\sigma^2}}=\frac{A}{\pm A}=\pm 1$$

Augstāku kārtu momenti. *k*-tās kārtas sākuma moments $M\,\xi^k$.

k-tās kārtas centrālais moments $M\,(\xi-M\,\xi)^k$.

Statisticians may be dull, but they have their moments!

Jauktie momenti.

Dots gadījuma vektors $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

Definīcija. Skaitli $M\left(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\ldots\xi_n^{k_n}\right)$, kur $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$, sauc par gadījuma lielumu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ jaukto *k*-tās kārtas momentu.

Definīcija. Skaitli $M\left((\xi_1 - M\xi_1)^{k_1}(\xi_2 - M\xi_2)^{k_2}\ldots(\xi_n - M\xi_n)^{k_n}\right)$, kur $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$, sauc par gadījuma lielumu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ jaukto *k*-tās kārtas centrālo momentu.

Kovariācija ir divu gadījuma lielumu otrās kārtas jauktais centrālais moments.

$$K(\xi_1, \xi_2) = M((\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - M\xi_1)(x_2 - M\xi_2)\, p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$$

$$K(\xi_1, \xi_2) = M((\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_{1_i} - M\xi_1)(x_{2_j} - M\xi_2)\, p_{ij}$$

Kovariācijas aprēķina piemēri.

1. Diskrēts sadalījums

$\xi_1 \backslash \xi_2$	**-2**	**0**	**2**	**4**
1	0.1	0.2	0.1	0
2	0.2	0.1	0	0.1
3	0	0	0.1	0.1

Koordinātas ξ_1 sadalījuma likums

ξ_1	**1**	**2**	**3**
p	0.4	0.4	0.2

Koordinātas ξ_2 sadalījuma likums

ξ_2	**-2**	**0**	**2**	**4**
p	0.3	0.3	0.2	0.2

$$M\xi_1 = 1\cdot 0.4 + 2\cdot 0.4 + 3\cdot 0.2 = 1.8$$

$$M\xi_2 = -2\cdot 0.3 + 0\cdot 0.3 + 2\cdot 0.2 + 4\cdot 0.2 = 0.6$$

$$K(\xi_1,\xi_2) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(x_{1_i} - M\xi_1)(x_{2_j} - M\xi_2)p_{ij} =$$

$$= (1-1.8)(-2-0.6)0.1 + (1-1.8)(0-0.6)0.2 + (1-1.8)(2-0.6)0.1 + (1-1.8)(4-0.6)0 +$$

$$+(2-1.8)(-2-0.6)0.2 + (2-1.8)(0-0.6)0.1 + (2-1.8)(2-0.6)0 + (2-1.8)(4-0.6)0.1 +$$

$$+(3-1.8)(-2-0.6)0 + (3-1.8)(0-0.6)0 + (3-1.8)(2-0.6)0.1 + (3-1.8)(4-0.6)0.1 = 0.72$$

Kovariācijas aprēķina piemēri.

2. Nepārtraukts sadalījums.

Dota gadījuma vektora $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ sadalījuma blīvuma funkcija $p_{\xi_1\xi_2}(x, y) = \frac{4}{3}(x + \frac{y}{2})$, ja $x, y \in D$, ko nosaka nevienādības $0 < x < 1$ un $0 < y < 1$. Ārpus šī apgabala $p(x, y) = 0$. Aprēķināsim gadījuma lielumu ξ_1 un ξ_2 kovariāciju.

$$K(\xi_1, \xi_2) = M((\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - M\xi_1)(x_2 - M\xi_2)\, p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$p_{\xi_1}(x) = \int_0^1 \frac{4}{3}(x + \frac{y}{2})dy = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$p_{\xi_2}(y) = \int_0^1 \frac{4}{3}(x + \frac{y}{2})dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}y$$

$$M\xi_1 = \int_0^1 x\left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right)dx = \frac{11}{18}$$

$$M\xi_2 = \int_0^1 y\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}y\right)dy = \frac{5}{9}$$

$$K(\xi_1, \xi_2) = \int_0^1\int_0^1 (x - \frac{11}{18})(y - \frac{5}{9})\frac{4}{3}\left(x + \frac{y}{2}\right)dxdy = -\frac{1}{162} \approx -0.0061728$$

Piemērs

No Kovariācijas vienādības ar 0 vēl neseko gadījuma lielumu neatkarība (īpašība 4a).

$\xi_1 \backslash \xi_2$	**1**	**2**	**3**
1	0	0.2	0
2	0.1	0	0.1
3	0.2	0.2	0.2

Koordinātas ξ_1 sadalījuma likums

ξ_1	**1**	**2**	**3**
p	0.2	0.2	0.6

Koordinātas ξ_2 sadalījuma likums

ξ_2	**1**	**2**	**3**
p	0.3	0.4	0.3

$$M\,\xi_1 = 1\cdot 0.2 + 2\cdot 0.2 + 3\cdot 0.6 = 2.4$$

$$M\,\xi_2 = 1\cdot 0.3 + 2\cdot 0.4 + 3\cdot 0.3 = 2$$

$$K(\xi_1,\xi_2) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_{1_i} - M\,\xi_1)(x_{2_j} - M\,\xi_2)\,p_{ij} = (1-2.4)(1-2)0 + (1-2.4)(2-2)0.2 +$$

$$+(1-2.4)(3-2)0 + (2-2.4)(1-2)0.1 + (2-2.4)(2-2)0 + (2-2.4)(3-2)0.1 +$$

$$+(3-2.4)(1-2)0.2 + (3-2.4)(2-2)0.2 + (3-2.4)(3-2)0.2 = 0$$

Taču lielumi ir atkarīgi, jo, piemēram,

$\xi_2 \mid \xi_1 = 1$	1	2	3
P	$\frac{0}{0.2} = 0$	$\frac{0.2}{0.2} = 1$	$\frac{0}{0.2} = 0$

$\xi_2 \mid \xi_1 = 3$	1	2	3
P	$\frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$	$\frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$	$\frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$

$$P(\xi_2 \,|\, (\xi_1 = 1) = 1) = \frac{P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1)}{P(\xi_1 = 1)} = \frac{0}{0.2} = 0 \qquad P(\xi_2 \,|\, (\xi_1 = 1) = 2) = \frac{P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 2)}{P(\xi_1 = 1)} = \frac{0.2}{0.2} = 1$$

Neatkarīgiem lielumiem šiem sadalījumiem būtu jābūt vienādiem.

Korelācijas koeficienta aprēķins

<u>1. piemērs</u>

Koordinātas ξ_1 sadalījuma likums

ξ_1	**1**	**2**	**3**
p	0.4	0.4	0.2

Koordinātas ξ_2 sadalījuma likums

ξ_2	**-2**	**0**	**2**	**4**
p	0.3	0.3	0.2	0.2

$M\xi_1 = 1.8 \qquad M\xi_2 = 0.6 \qquad K(\xi_1, \xi_2) = 0.72$

$$D\xi_1 = (1-1.8)^2 \cdot 0.4 + (2-1.8)^2 \cdot 0.4 + (3-1.8)^2 \cdot 0.2 = 0.56$$

$$D\xi_2 = (-2-0.6)^2 \cdot 0.3 + (0-0.6)^2 \cdot 0.3 + (2-0.6)^2 \cdot 0.2 + (4-0.6)^2 \cdot 0.2 = 4.84$$

$\sigma(\xi_1) = \sqrt{0.56} = 0.74833 \qquad \sigma(\xi_2) = \sqrt{4.84} = 2.2$

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{K(\xi_1, \xi_2)}{\sigma(\xi_1)\sigma(\xi_2)} = \frac{0.72}{0.74833 \cdot 2.2} = 0.43734$$

Korelācijas koeficienta aprēķins
2. piemērs

$$p_{\xi_1\xi_2}(x,y)=\frac{4}{3}(x+\frac{y}{2})$$

$$p_{\xi_1}(x)=\int_0^1\frac{4}{3}(x+\frac{y}{2})dy=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$p_{\xi_2}(y)=\int_0^1\frac{4}{3}(x+\frac{y}{2})dx=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}y$$

$$M\xi_1=\frac{11}{18}$$

$$M\xi_2=\frac{5}{9}$$

$$K(\xi_1,\xi_2)=-0.0061728$$

$$D\xi_1=\int_0^1\left(x-\frac{11}{18}\right)^2\left(\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx=\frac{23}{324}\approx 0.070988$$

$$D\xi_2=\int_0^1\left(y-\frac{5}{9}\right)^2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}y\right)dy=\frac{13}{162}\approx 0.080247$$

$$\sigma(\xi_1)=\sqrt{0.070988}=0.26644$$

$$\sigma(\xi_2)=\sqrt{0.080247}=0.28328$$

$$\rho(\xi_1,\xi_2)=\frac{K(\xi_1,\xi_2)}{\sigma(\xi_1)\sigma(\xi_2)}=\frac{-0.0061728}{0.26644\cdot 0.28328}=-0.081784$$

Varbūtību teorijas robežteorēmas.
Lielā skaita likums. (*The Law of Great Numbers. Закон больших чисел*)

1. teorēma. Ja gadījuma lielums $\xi = \xi(\omega) \geq 0$ visiem $\omega \in \Omega$ un $M\xi < \infty$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ ir spēkā $P(\xi \geq \varepsilon) \leq \dfrac{M\xi}{\varepsilon}$.

Pierādījums. Apzīmēsim $\Omega_\varepsilon = \{\omega : \xi(\omega) \geq \varepsilon\} \subset \Omega$. Ievedīsim jaunu gadījuma lielumu $\eta = \begin{cases} 0, & \omega \notin \Omega_\varepsilon \\ \varepsilon, & \omega \in \Omega_\varepsilon \end{cases}$. Redzams, ka visiem $\omega \in \Omega$ ir spēkā $\xi \geq \eta$. Tad

$$M\xi = \int_\Omega xp(x)dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} xp(x)dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon p(x)dx \geq \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} p(x)dx = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon).$$

2. teorēma (Čebiševa nevienādība). Ja gadījuma lielumam ξ $D\xi < \infty$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ ir spēkā $P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}$.

Pierādījums. Ievedīsim jaunu gadījuma lielumu $\eta = (\xi - M\xi)^2 \geq 0$.

$M\eta = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$ un saskaņā ar 1. teorēmu

$$P(\eta \geq \varepsilon^2) = P((\xi - M\xi)^2 \geq \varepsilon^2) = P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M\eta}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Piemērs. $\xi \sim N(0,1)$. Novērtēsim $P(|\xi|>3)$. Saskaņā ar 2. teorēmu $P(|\xi|>3) \le \frac{1}{9} \approx 0.11111$.

Precīzi: $P(|\xi|>3) = 1 - 2\Phi_0(3) = 1 - 2 \cdot 0.49865 = 0.0026998$.

3. teorēma (Lielā skaita likums). Ja gadījuma lielumi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \cdots$ neatkarīgi un to dispersijām ir spēkā $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k = 0$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$:

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} M\xi_k\right| < \varepsilon\right) = 1$. (Vidējais aritmētiskais tiecas uz vidējo matemātisko cerību pēc varbūtības).

Pierādījums. Ievedīsim gadījuma lielumus $\eta_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Tad jāpierāda, ka

$\lim\limits_{n\to\infty} P(|\eta_n - M\eta_n| \ge \varepsilon) = 0$. No lielumu neatkarības seko $D\eta_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k$ (*).

No Čebiševa nevienādības: $P(|\eta_n - M\eta_n| \ge \varepsilon) \le \frac{D\eta_n}{\varepsilon^2}$. Tad

$\lim\limits_{n\to\infty} P(|\eta_n - M\eta_n| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k = 0$. Teorēma pierādīta.

Piezīme. Gadījuma lielumu $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \cdots$ neatkarības prasību var nedaudz mīkstināt. Pietiek ar to nekorelētību pa pāriem, jo, ja $K(\xi_i, \xi_j) = 0$, tad arī izpildās (*).

Ja gadījuma lielumiem $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \cdots$ izpildās 3. teorēmas nosacījumi, saka, ka tiem ir spēkā lielā skaita likums.

4. teorēma (Čebiševa teorēma). Ja gadījuma lielumi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \cdots$ neatkarīgi un to dispersijas ir vienmērīgi ierobežotas, t.i., $D\xi_k \le c$, visiem $k = 1, 2, \dots$ tad jebkuram $\varepsilon > 0$: $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k\right| < \varepsilon\right) = 1$. (Tas pats apgalvojums, kas 3. teorēmā).

Pierādījums. Ja $D\xi_k \le c$, tad izpildās 3. teorēmas prasība $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k = 0$.

Čebiševa teorēmas speciālgadījumi.

5. teorēma (Hinčina teorēma). Ja gadījuma lielumi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \cdots$ vienādi sadalīti, neatkarīgi un tiem eksistē dispersija, t.i., $D\xi_k < \infty$, tad: $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| < \varepsilon\right) = 1$, kur $M\xi_k = a$.

6. teorēma (Bernulli teorēma). Ja μ_n ir labvēlīgo notikumu skaits un p labvēlīgā notikuma iestāšanās varbūtība Bernulli shēmā, tad jebkuram $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Pierādījums seko no Hinčina teorēmas, ja $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \cdots$ ir sadalīti ar Bernulli sadalījumu. Tad $\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \mu_n$ un $M\xi_k = p$.

Secinājums. Kursa sākumā mēs bijām spekulatīvi pieņēmuši, ka eksistē skaitlis $p \in [0, 1]$, tāds, ka $\frac{n_A}{n} \underset{n\to\infty}{\to} p$, neierobežotu skaitu reižu atkārojot eksperimentu vienos un tajos pašos apstākļos neatkarīgi no iepriekšējo eksperimentu rezultātiem. **Tagad mēs to esam pierādījuši!**

Centrālā robežteorēma. (*The Central Limit Theorem. Центральная предельная теорема*)
Jau apskatītas trīs teorēmas, kur pierādīta sadalījuma likumu konverģence – Puasona teorēma, lokālā un integrālā Muavra – Laplasa teorēma. Integrālās Muavra – Laplasa teorēma apgalvo, ka ar atbilstošu normējumu un centrējumu Bernulli sadalījums konverģē uz standartnormālo sadalījumu pēc varbūtības.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Ievērojot Bernulli sadalījuma skaitliskos raksturotājus $M\xi_k = p$ un $D\xi_k = p(1-p)$, un pārejot uz robežu, kad $a \to -\infty$, var pārrakstīt:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-\infty < \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - nM\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx .$$

Izteiksmes kreisajā un labajā pusē ir gadījuma lielumu sadalījuma funkcijas $P(\xi < x) = F(x)$.

Tātad gadījuma lielums $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - nM\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}}$ ir asimptotiski normāls.

Var pierādīt analoģisku rezultātu jebkuram patvaļīgam varbūtību sadalījumam.

Teorēma (Centrālā robežteorēma vienādi sadalītiem gadījuma lielumiem).

Ja gadījuma lielumi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \cdots$ neatkarīgi, vienādi sadalīti un tiem ir galīga dispersija, tad:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - nM\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx .$$

Ļapunova teorēma (Centrālā robežteorēma dažādi sadalītiem gadījuma lielumiem).

Ja gadījuma lielumi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \cdots$ neatkarīgi, dažādi sadalīti un tiem ir galīgi šādi momenti: $M\xi_k = a_k < \infty$, $D\xi_k = b_k^2 < \infty$ un $M\left|\xi_k - a_k\right|^3 = c_k^3 < \infty$ un summām:

$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$, $C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} c_k^3$ izpildās $\frac{C_n}{B_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, tad:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - A_n}{B_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx .$$

Daudzdimensiju normālais sadalījums.

Apskatīsim n-dimensiju gadījuma vektoru $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ un pierakstīsim m tā koordinātu

lineāras kombinācijas: $\eta_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \xi_j + a_i$, $i = 1, 2, ..., m$.

To var pierakstīt matricu formā $\vec{\eta} = C\vec{\xi} + \vec{a}$: , kur

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ . & . & . \\ c_{m1} & ... & c_{mn} \end{pmatrix}$$

. Apzīmēsim ar $K\left(\vec{\xi}\right)$ matricu, kas sastādīta no vektora $\vec{\xi}$ koordinātu kovariācijām:

$$K\left(\vec{\xi}\right) = \begin{pmatrix} K(\xi_1, \xi_1) & ... & K(\xi_1, \xi_n) \\ . & . & . \\ K(\xi_n, \xi_1) & ... & K(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix}.$$

$K\left(\vec{\xi}\right)$ sauc par kovariāciju matricu.

Var pierādīt, ka $M\vec{\eta} = M\vec{\xi} + \vec{a}$, $\quad K\left(\vec{\eta}\right) = CK\left(\vec{\xi}\right)C^T$.

Definīcija. Par m-dimensiju normāli sadalītu gadījuma lielumu (vektoru) sauc gadījuma vektoru $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$, kuru uzdod izteiksme $\vec{\eta} = C\vec{\xi} + \vec{a}$, bet gadījuma vektora $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ koordinātas ir standartnormāli sadalīti neatkarīgi gadījuma lielumi.

Īpašības.

1. Visas koordinātas η_i ir normāli sadalīti gadījuma lielumi vai konstantes.
2. Jebkuru koordinātu η_i lineāra kombinācija ir normāli sadalīts gadījuma lielums vai konstante.
3. Jebkurai lineārai funkcijai $\vec{\zeta} = A\vec{\eta} + \vec{b}$, kur A un $\vec{b}$ ir konstantas matricas, ir daudzdimensiju normālais sadalījums.

4. Ja neviena no koordinātām η_i nav konstante, kovariāciju matrica $K(\vec{\eta})$ nav singulāra, t.i., $\det\left(K(\vec{\eta})\right) \neq 0$. Šajā gadījumā vektoram $\vec{\eta}$ eksistē sadalījuma blīvuma funkcija

$$p_{\vec{\eta}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det\left(K(\vec{\eta})\right)}} e^{-\frac{1}{2}Q(\vec{x}-\vec{a})}$$

, kur

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

ir m-dimensiju vektori , bet

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$$

kvadrātiska forma, kuras koeficienti ir q_{ij} ir kovariāciju matricas $K(\vec{\eta})$ inversās matricas $K^{-1}(\vec{\eta})$ elementi.

Tātad daudzdimensiju normālais sadalījums tiek pilnībā uzdots ar vektora $\vec{a}$ un matricas $K(\vec{\eta})$ palīdzību.

Pēc definīcijas tā kā $\xi_j \sim N(0,1)$ un neatkarīgi, tad

$$K\left(\vec{\xi}\right) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ ir vienības matrica un $$M\vec{\xi} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$. Tad

$$K\left(\vec{\eta}\right) = CK\left(\vec{\xi}\right)C^T = CIC^T = CC^T$$ un

$$M\vec{\eta} = M\vec{\xi} + \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$