Markova ķēdes stāvokļu klasifikācija

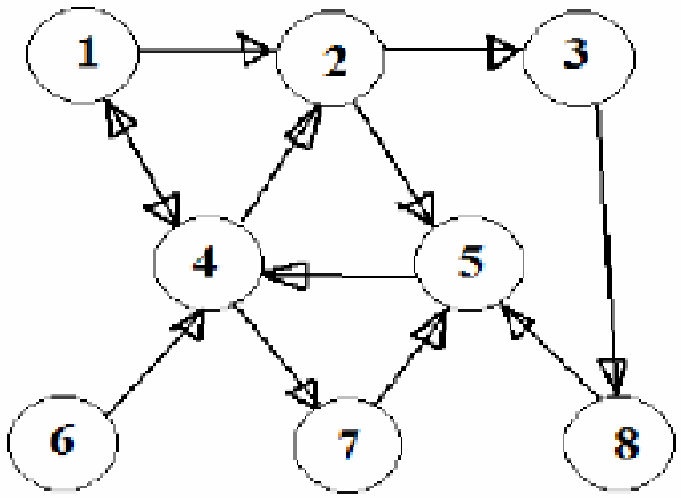
Sākuma sadalījums $p(0) = (p_1^0 \;\; p_2^0 \;\; p_3^0 \; \ldots)$

Pārejas varbūtību matrica $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

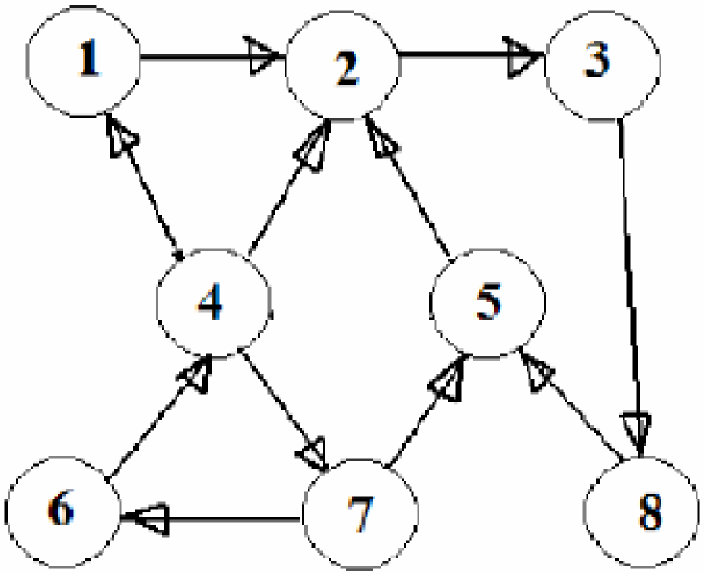
Definīcijas.

- Stāvoklis j ir sasniedzams no stāvokļa i, ja eksistē vesels skaitlis $n > 0$, tāds, ka $p_{ij}(n) > 0$.
- Stāvokļus i un j sauc par saistītiem, ja stāvoklis j ir sasniedzams no stāvokļa i un stāvoklis i ir sasniedzams no stāvokļa j.
- Markova ķēdi sauc par nedalāmu, ja tā sastāv no vienas savstarpēji saistītu stāvokļu klases.
- Stāvokli i sauc par būtisku, ja jebkurš stāvoklis j , kas ir sasniedzams no i, ir saistīts ar i.

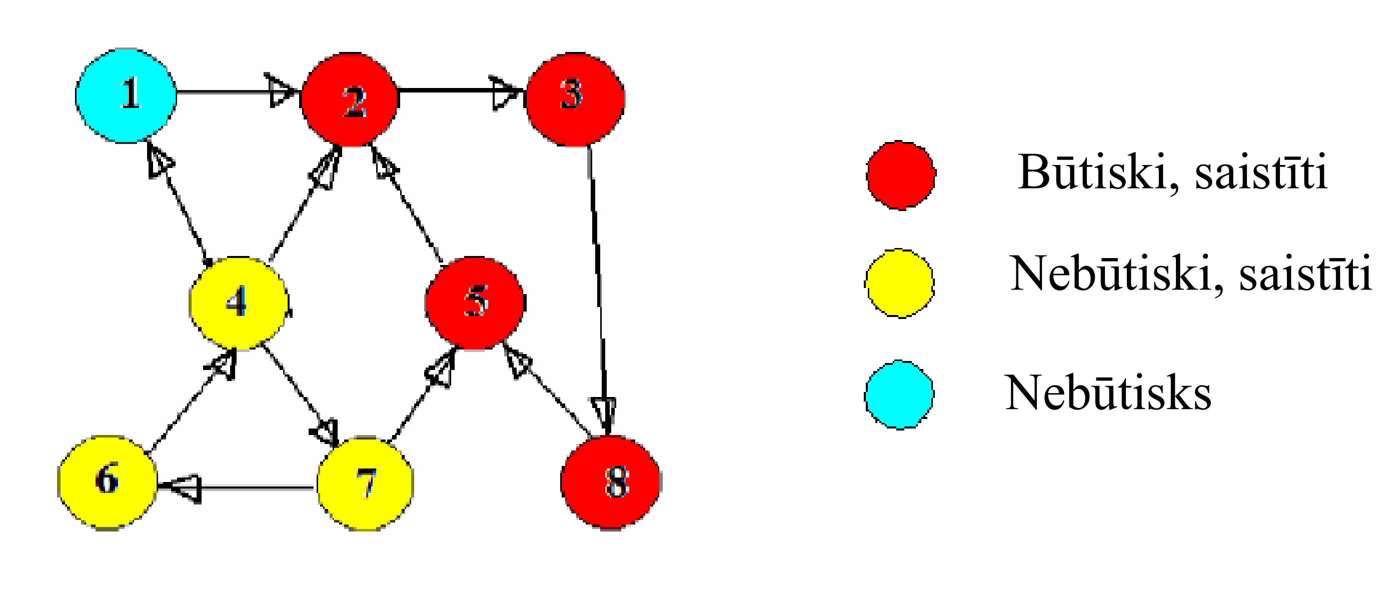
Piemēri



1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 – saistīti stāvokļi
1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 – stāvokļi, sasniedzami no 6
6 nav saistīts ne ar vienu
1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 – būtiski stāvokļi
6 – nebūtisks stāvoklis
Ķēde ir dalāma, tā dalās divās klasēs



?



Pieņemsim, ka ķēde sākuma stāvoklī atrodas stāvoklī i. Apzīmēsim ν_n varbūtību, ka ķēde stāvoklī i pirmo reizi atgriezīsies pēc n soļiem. Tad

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n$$

ir varbūtība, ka ķēde, izejot no stāvokļa i , kādreiz tajā atgriezīsies.

Definīcija. Stāvokli i sauc par atgriezenisku, ja tam varbūtība $\nu = 1$. Ja $\nu < 1$, stāvokli i sauc par neatgriezenisku.

1. teorēma. Stāvoklis *i* ir atgriezenisks tad un tikai tad, ja $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$.

Pierādījums.
Apzīmējumi: notikums H_k – ķēde pirmo reizi atgriezīsies stāvoklī *i* pēc *k* soļiem, $k = 1,2,\dots,n$. Notikums H_{n+1} – ķēde pa *n* soļiem ne reizes neatgriezīsies stāvoklī i . Notikums *A* – ķēde pēc *n* soļiem atradīsies stāvoklī *i*.

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n+1} P(A|H_k)P(H_k)$$

Lietojot iepriekšējo apzīmējumu, $P(H_k) = \nu_k$. Apzīmēsim:

$$P(A|H_k) = p_{ii}(n-k) \triangleq u_{n-k}$$

Varam rakstīt $P(A|H_{n+1}) = 0$. loģiski ir pieņemt $u_0 = p_{ii}(0) = 1$, $\nu_0 = 0$, jo ν_1 būtu varbūtība palikt stāvoklī i.

Izteiksmi $P(A) = \sum_{k=1}^{n+1} P(A|H_k)P(H_k)$ var pārrakstīt:

$$u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \cdots + u_0v_n + 0 = u_n \quad P(A) = p_{ii}(n)$$

$$u_nv_0 + \qquad P(A|H_{n+1}) = 0$$

jo $v_0 = 0$

Tad $u_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_{n-1}v_1 + u_nv_0$ (1)

Ievedīsim divas jaunas funkcijas:

$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_nx^n$ un $V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_nx^n, \quad |x| < 1$

Apskatīsim izteiksmi : $U(x) - 1 = U(x)V(x)$ (2)
Ievietojot iegūstam:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_nx^n - 1 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_mv_kx^{m+k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - 1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_m v_k x^{m+k}$$

Pielīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm:

x^0: $u_0 - 1 = u_0 v_0$ tas ir spēkā, jo $v_0 = 0,\ u_0 = 1$

x^1: $u_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0$

x^2: $u_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0$

....

x^n: $u_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0$ tā ir izteiksme (1)

Tātad (1) vietā var apskatīt (2). Pārrakstot: $U(x) = \frac{1}{1-V(x)}$ (3)

Stāvoklis i ir atgriezenisks, ja $v = 1$

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \lim_{x \to 1} V(x)$$

No (3) redzams, ka $\lim_{x\to 1} V(x) = 1$ ir ekvivalents $\lim_{x\to 1} U(x) = \infty$ un

$$\lim_{x\to 1} U(x) = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$$

Teorēma ir pierādīta.

2. teorēma. Ja stāvoklis *i* ir atgriezenisks, tad, izdarot bezgalīgu skaitu soļu, ķēde ar varbūtību 1 bezgalīgi daudz reižu atgriezīsies stāvoklī *i.* Ja stāvoklis *i* ir neatgriezenisks, tad izdarot bezgalīgu skaitu soļu, ķēde ar varbūtību viens tikai galīgu skaitu reižu atgriezīsies stāvoklī *i*.

Secinājums. Neatgriezeniskam stāvoklim *i* eksistē kaut kāds soļa numurs *n,* pēc kura ķēde nekad vairs neatgriezīsies stāvoklī *i.*

Teorēmas pierādījums. Apzīmēsim μ_k – soļu skaitu līdz *k* – *tajai* atgriešanās reizei stāvoklī *i*. Ja atgriešanās reižu skaits ir mazāks par *k*, tad $\mu_k = \infty$.
Notikums $\{\mu_k < \infty\}$ nozīmē – bijušas vismaz *k* atgriešanās.
Ar varbūtību $P(\mu_1 < \infty) = \nu$ ķēde kādreiz atgriezīsies stāvoklī *i*. Ja tas notiks, tad ķēdes turpmākā uzvedība būs pakļauta tām pašām likumsakarībām (stacionaritāte):
Tāpēc: $P(\mu_2 < \infty | \mu_1 < \infty) = \nu$ No šejienes:

$$P(\mu_2 < \infty) = P(\mu_2 < \infty | \mu_1 < \infty) P(\mu_1 < \infty) = \nu^2$$

……………………………..

$$P(\mu_k < \infty) = \nu^k$$

Ja stāvoklis i ir neatgriezenisks, $\nu < 1$. Varbūtība, ka ķēde bezgalīgi daudz reižu atgriezīsies i, ir:

$$\lim_{k\to\infty} P(\mu_k < \infty) = \lim_{k\to\infty} \nu^k = 0$$

Atgriezeniskam stāvoklim $\nu = 1$. Varbūtība, ka ķēde bezgalīgi daudz reižu atgriezīsies i, ir:

$$\lim_{k\to\infty} P(\mu_k < \infty) = \lim_{k\to\infty} \nu^k = 1$$

Teorēma ir pierādīta.

Markova ķēdes vidējais stāvoklī pabadītais laiks.

Apzīmēsim μ – soļu skaitu līdz pirmajai atgriešanās reizei stāvoklī *i*.

Atgriezeniskam stāvoklim: $P(\mu < \infty) = 1$.
Neatgriezeniskam: $P(\mu < \infty) = \nu < 1$ un $P(\mu = \infty) = 1 - \nu > 0$.

Apzīmēsim: $\eta = M\mu = \sum_{n=1}^{\infty} nP(\mu = n)$ – vidējo soļu skaitu, lai atgrieztos stāvoklī i (ja pieņem, ka laika intervāls starp diviem soļiem ir 1 laika vienīb, tas ir vidējais atgriešanās laiks).

Acīm redzot, neatgriezeniskam stāvoklim $\eta = \infty$.
Pretējais apgalvojums (atgriezeniskam stāvoklim $\eta < \infty$) ne vienmēr ir spēkā:

Piemēram, $P(\mu = n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$, $n = 1,2, \ldots$ Stāvoklis ir atgriezenisks, jo

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 n^2} = 1$$

Bet

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{6}{\pi^2 n^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Ieviesīsim gadījuma lielumus – katras atgriešanās stāvoklī i soļu skaitu (laiku):

$\tau_1 = \mu_1$

$\tau_2 = \mu_2 - \mu_1$

....

$\tau_n = \mu_n - \mu_{n-1}$

Visi τ_j ir neatkarīgi (kāpēc?) un vienādi sadalīti (kāpēc?) gadījuma lielumi ar matemātisko cerību $\eta = M\tau_j = M\mu_1$.

Saskaņā ar lielā skaita likumu (gadījuma lielumu skaitam tiecoties uz bezgalību, to vidējā vērtība tiecas uz vidējo matemātisko cerību ar varbūtību 1):

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tau_k = \eta\right) = 1$$

$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$ ir soļu skaits (laiks), kurā notikušas tieši n atgriešanās stāvoklī i.

n – summārais stāvoklī i pavadītais laiks.

Tad $P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{n} = \eta\right) = 1$, jeb $\frac{n}{\mu_n} \to \frac{1}{\eta}$ ar varbūtību 1, ja $n \to \infty$.

$\frac{1}{\eta}$ ir laika daļa, ko ķēde ir pavadījusi stāvoklī i, izdarot bezgalīgu skaitu soļu.

Ja $\frac{1}{\eta} > 0$, stāvokli i sauc par pozitīvu, ja $\frac{1}{\eta} = 0$, stāvokli i sauc par nulles stāvokli.