...Parametriskās statistikas uzdevumu klasifikācija.

Gadījuma lielums ξ , blīvuma funkcija $p(x,\theta)$, nezināmie parametri $\theta = (\theta_1, \theta_2, .., \theta_k)$.

Dota izlase $\vec{x} = \{x_1, x_2, .., x_n\} \in X$.

1. **<u>Nezināmo sadalījuma parametru punktveida novērtējumi.</u>**
2. **<u>Nezināmo sadalījuma parametru intervālie novērtējumi.</u>**
3. **<u>Statistisko hipotēžu pārbaude par nezināmajiem sadalījuma parametriem.</u>**

Pieņemsim, ka nezināmais sadalījumu klases parametrs $\theta \in \Theta$ ir skalārs. Kopu Θ sadalīsim divās nešķeļošās apakškopās, t.i., $\Theta_0 \Theta_1 = \varnothing$, tā lai $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

Izvirzīsim divas hipotēzes par parametra θ patiesās vērtības piederību:

$h_0 : \theta \in \Theta_0$ – nulles hipotēze,

$h_1 : \theta \in \Theta_1$ – alternatīva (konkurējošā hipotēze)

Ja $|\Theta_i| = 1$, hipotēzi sauc par vienkāršu, ja $|\Theta_i| > 1$ – par saliktu.

Šeit apskatīsim tikai vienkāršas hipotēzes $h_0 : \theta = \theta_0$, $h_1 : \theta = \theta_1$

<u>Zaudējumi.</u> Ja jāpieņem lēmums par θ piederību vienai vai otrai apakškopai, var kļūdīties. Lēmums atkarīgs no zaudējumu lieluma, ko ciešam katrā gadījumā.

Zaudējumu funkcija $L(\theta,h,n)=L(\theta,h)+cn$

$$L(\theta,h)=\begin{cases} l, & \theta=\theta_0, h=h_1, \\ 1-l, & \theta=\theta_1, h=h_0, \\ 0, & \theta=\theta_0, h=h_0, \\ 0, & \theta=\theta_1, h=h_1. \end{cases} \qquad l\in[0,1]$$

Abas iespējamās kļūdas var maksāt dažādi. Konkrētības dēļ tās būs jāprot atšķirt.

Nepareizo lēmumu – nepareizi noraidīt 0–hipotēzi: $\{\theta=\theta_0, h=h_1\}$ sauksim par <u>I veida kļūdu.</u> Nepareizo lēmumu – nepareizi noraidīt alternatīvu: $\{\theta=\theta_1, h=h_0\}$ sauksim par <u>II veida kļūdu</u>.

Vispār, analizējot katru izlasi, var pieņemt vienu no trim lēmumiem: pieņemt 0–hipotēzi, pieņemt alternatīvu vai turpināt novērošanu. Šeit turpmāk uzskatām, ka izlases apjoms n ir fiksēts.

Stratēģija $h=\delta(\vec{x})$. Iespējamās vērtības: $\delta(\vec{x})=\begin{cases} h_0, \\ h_1 \end{cases}$.

Ja eksperimentu rezultātā iegūta izlase $\vec{x}$, tad ar varbūtību $\varphi\left(\vec{x}\right) = P(\delta(\vec{x}) = h_1)$ tiek pieņemta alternatīva, ar varbūtību $1-\varphi\left(\vec{x}\right) = P(\delta(\vec{x}) = h_0)$ tiek pieņemta 0–hipotēze.

Funkciju $\varphi\left(\vec{x}\right)$, t.i., alternatīvas pieņemšanas varbūtību, sauc par <u>kritēriju</u>.

Ar $\varphi\left(\vec{x}\right)$ palīdzību ģenerālkopas X tiek sadalīta trijās nešķeļošās daļās:

$X_0 = \left\{\vec{x} : \varphi(\vec{x}) = 0\right\}$ – hipotēzes pieņemšanas apgabals

$X_1 = \left\{\vec{x} : \varphi(\vec{x}) = 1\right\}$ – kritiskais apgabals

$X_R = X \setminus \left(X_0 \cup X_1\right)$ – randomizācijas apgabals

Var gadīties, ka $\varphi\left(\vec{x}\right)$ ir tāds, ka $X_R = \varnothing$, tad stratēģiju un kritēriju sauc par tīru, ja randomizācijas apgabals $X_R \neq \varnothing$ – par randomizētu.

<u>**Risks**</u>. Patiesā parametra θ vērtība nav zināma. Optimāla būtu tāda stratēģija, kas sagādātu vismazākos zaudējumus pie visām iespējamajām θ vērtībām. Parasti tas nav reāli iespējams. Ja stratēģija tiek radīta masveida izmantošanai, tai vajadzētu minimizēt vidējos zaudējumus. Vidējos zaudējumus sauksim par <u>risku</u> $R(\theta, \delta) = ML(\theta, \delta(\vec{x}))$

$$R(\theta,\delta)=ML(\theta,\delta(\vec{x}))=L\left(\theta,h_0\right)P(\delta(\vec{x})=h_0)+L\left(\theta,h_1\right)P(\delta(\vec{x})=h_1)=$$

Pieraksta vienkāršošanai pieņemsim, ka izlase sastāv no viena elementa no diskrēta gadījuma lieluma ģenerālkopas $X=\{a_1,a_2,...\}$

$$=L\left(\theta,h_0\right)\sum_{k=1}^{\infty}P(\delta(a_k)=h_0)p(a_k,\theta)+L\left(\theta,h_1\right)\sum_{k=1}^{\infty}P(\delta(a_k)=h_1)p(a_k,\theta)=$$

Turpmākais pieraksts diskrētam un nepārtrauktam gadījumam:

$$=\begin{cases} L\left(\theta,h_0\right)\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-\varphi(a_k))p(a_k,\theta)+L\left(\theta,h_1\right)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi(a_k)p(a_k,\theta)= \\ L\left(\theta,h_0\right)\int\limits_X(1-\varphi(x))p(x,\theta)dx+L\left(\theta,h_1\right)\int\limits_X\varphi(x)p(x,\theta)dx= \end{cases}$$

Ja $\theta=\theta_0$, zaudējumus cieš tikai, ja pieņem alternatīvu, ja $\theta=\theta_1$ – tikai, ja pieņem 0–hipotēzi.

$$=\begin{cases} l\int\limits_X\varphi(x)p(x,\theta_0)dx, & \theta=\theta_0, \\ \left(1-l\right)\int\limits_X(1-\varphi(x))p(x,\theta_1)dx, & \theta=\theta_1, \end{cases}=\begin{cases} l\int\limits_X\varphi(x)p(x,\theta_0)dx, & \theta=\theta_0, \\ \left(1-l\right)\left(1-\int\limits_X\varphi(x)p(x,\theta_1)dx\right), & \theta=\theta_1, \end{cases}=$$

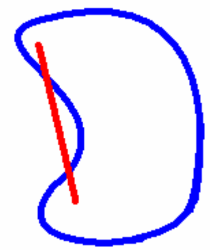
$$\begin{cases} l\alpha(\varphi), & \theta=\theta_0, \\ \left(1-l\right)\left(1-\beta(\varphi)\right), & \theta=\theta_1, \end{cases}$$ kur $\alpha(\varphi)=\int\limits_X\varphi(x)p(x,\theta_0)dx$ un $\beta(\varphi)=\int\limits_X\varphi(x)p(x,\theta_1)dx$

$\alpha(\varphi) = \int\limits_X \varphi(x) p(x, \theta_0) dx$ – alternatīvas pieņemšanas varbūtība, ja pareiza ir 0–hipotēze.

$\beta(\varphi) = \int\limits_X \varphi(x) p(x, \theta_1) dx$ – pareizas alternatīvas pieņemšanas varbūtība.

Redzams, ka faktiski risks ir atkarīgs tikai no θ un φ: $R(\theta, \delta) = R(\theta, \varphi)$

$\alpha(\varphi)$, kas ir kritērija φ I veida kļūdas varbūtība, sauc arī par kritērija izmēru vai līmeni $\beta(\varphi)$ sauc par kritērija jaudu, $1 - \beta(\varphi)$ ir kritērija φ II veida kļūdas varbūtība.



Kritēriju kopa. $\varphi : X \to [0,1]$

Teorēma. Kritēriju kopa Φ ir :

1) izliekta (ja $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ un $\gamma \in [0,1]$, tad $\gamma\varphi_1 + (1-\gamma)\varphi_2 \in \Phi$)
2) ja $\varphi \in \Phi$, tad $1 - \varphi \in \Phi$

Ja uzdevums ir izvēlēties hipotēzi, kas minimizē vidējos zaudējumu, t.i., risku, bet risku pilnīgi nosaka kritērijs, tad jāmāk salīdzināt kritēriji.

Definīcija. Kritērijs φ_1 dominē pār kritēriju φ_2 ($\varphi_1 \succ \varphi_2$), ja visiem $\theta \in \Theta$:

$R(\theta, \varphi_1) \le R(\theta, \varphi_2)$, bet eksistē arī tāds $\tilde{\theta} \in \Theta$, kuram $R(\tilde{\theta}, \varphi_1) < R(\tilde{\theta}, \varphi_2)$

Definīcija. Kritēriju φ sauc par pieļaujamu, ja kopā Φ neeksistē pār to dominējoši kritēriji.

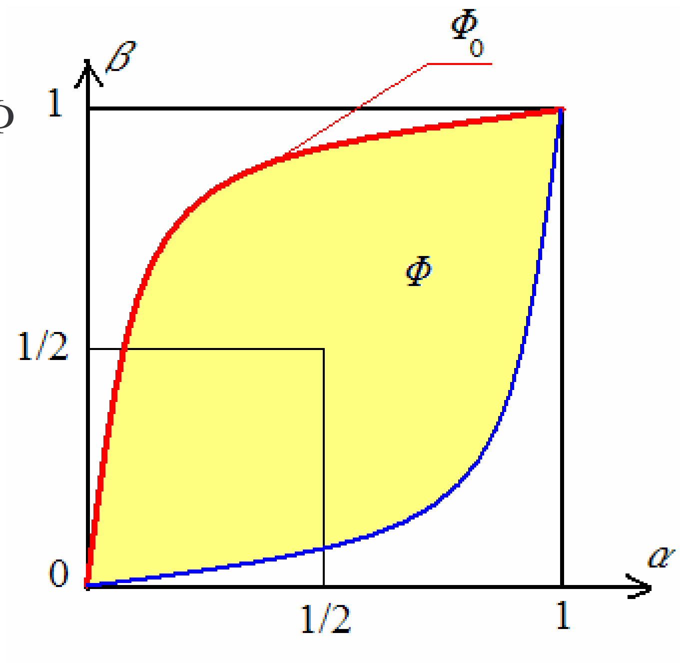
Apzīmēsim Φ_0 pieļaujamo kritēriju kopu.

Konstruēsim pieļaujamo kritēriju kopu. Tā kā $\alpha(\varphi)$ un $\beta(\varphi)$ ir svarīgākie kritērija kvalitātes rādītāji, konstruēsim kritērijus kā punktus α , β plaknē.

1. Punktam $(0,0)$ atbilst kritērijs $\varphi(x) \equiv 0$. T.i., neatkarīgi no novērojumu datiem alternatīvu pieņem ar 0 varbūtību. Tātad vienmēr pieņem 0–hipotēzi. Tātad I veida kļūdu izdarīt nav iespējams, bet arī kritērija jauda vienāda ar 0.
2. Punktam $(1,1)$ atbilst kritērijs $\varphi(x) \equiv 1$. T.i., neatkarīgi no novērojumu datiem alternatīvu pieņem ar varbūtību 1. Tātad kritērija jauda vienāda ar 1, bet, ja 0–hipotēze ir pareiza, tā vienalga netiek pieņemta, tātad I veida kļūdas varbūtība ir 1.
3. Kopa Φ ir simetriska pret punktu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

   Tas seko no teorēmas. Ja $\varphi \in \Phi$, tad $1-\varphi \in \Phi$

4. Kopa Φ ir izliekta.



Secinājums. Vienlaicīgi minimizēt $\alpha(\varphi)$ un $\beta(\varphi)$ nav iespējams.
Iespējama pieeja. Atrast maksimālās jaudas Kritēriju, kura līmenis nepārsniedz uzdotu α_0

Kritērija forma.

Lemma. Ja $\alpha(\varphi) \in (0,1)$, tad $\alpha(\varphi) < \beta(\varphi)$

Teorēma (Neimana – Pīrsona lemma). Hipotēzes $h_0 : \theta = \theta_0$, pārbaudei pie alternatīvas $h_1 : \theta = \theta_1$ katram kritērija līmenim α_0 var atrast kritēriju φ^* formā:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & p(x,\theta_1) > Kp(x,\theta_0) \\ c, & p(x,\theta_1) = Kp(x,\theta_0) \\ 0, & p(x,\theta_1) < Kp(x,\theta_0) \end{cases}$$

kur $0 \le c \le 1$, K ir konstante un $\int_X \varphi^*(x) p(x,\theta_0) dx = \alpha_0$

Baijesa kritēriji.

Ja ir papildu informācija par hipotēžu pareizību. Uzskatīsim parametru θ par kāda gadījuma lieluma ϑ realizāciju. Tas nozīmē, ka kopā $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ eksistē kāds apriors sadalījums $\pi = \{p, 1-p\}$. T.i., $P(\theta = \theta_0) = p$ un $P(\theta = \theta_1) = 1 - p$. Aprēķināsim risku.

Zinām, ka risks $R(\theta,\varphi) = ML(\theta, \delta(\vec{x}))$ un zaudējumi $L(\theta,h) = \begin{cases} l, & \theta = \theta_0, h = h_1, \\ 1-l, & \theta = \theta_1, h = h_0, \\ 0, & \theta = \theta_i, h = h_i. \end{cases}$.

$r(p,\varphi) = ML(\vartheta, \delta(\vec{x})) = R(\theta_0,\varphi)p + R(\theta_1,\varphi)(1-p)$ un $R(\theta,\varphi) = \begin{cases} l\alpha(\varphi), & \theta = \theta_0, \\ (1-l)(1-\beta(\varphi)), & \theta = \theta_1. \end{cases}$

Tad risku var pārrakstīt

$$r(p,\varphi) = R(\theta_0,\varphi)\,p + R(\theta_1,\varphi)(1-p) = \alpha(\varphi)\,pl + (1-\beta(\varphi))(1-p)(1-l)$$

Kritēriju , kas minimizē šo risku, sauc par Baijesa kritēriju.

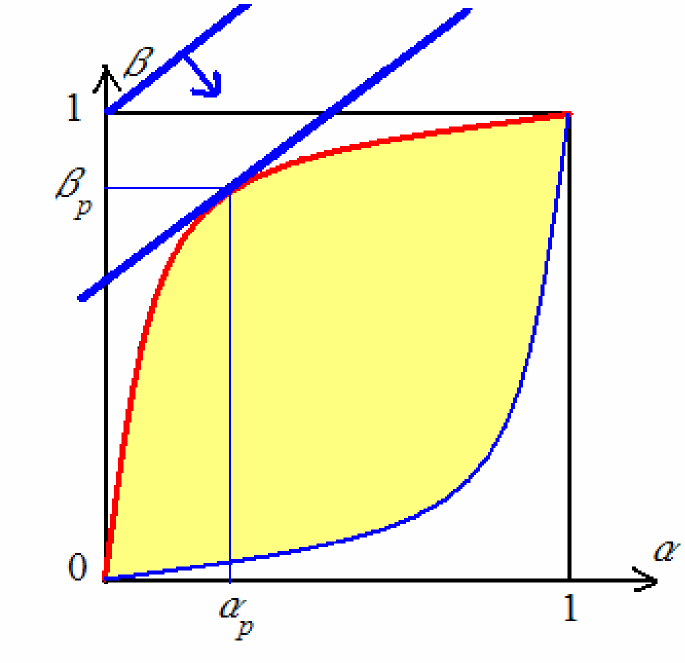
Konstruējot attēlu α , β plaknē, jāminimizē $r = \alpha\, pl + (1-\beta)(1-p)(1-l)$. Izsaka β :

$$\beta = 1 + \alpha\frac{pl}{(1-p)(1-l)} - \frac{r}{(1-p)(1-l)}$$

Taisnes vienādojums. Virziena koeficients $\dfrac{pl}{(1-p)(1-l)}$. Jo augstāks krustpunkts ar β asi, jo mazāks risks r .

Baijesa kritērija līmenis ir α_p , jauda β_p .

Formu uzdod Neimana – Pīrsona lemma:



$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 1, & p(x,\theta_1) > Kp(x,\theta_0) \\ c, & p(x,\theta_1) = Kp(x,\theta_0) \\ 0, & p(x,\theta_1) < Kp(x,\theta_0) \end{cases}$$

un $\int\limits_X \varphi_p(x)\,p(x,\theta_0)\,dx = \alpha_p$

Minimaksa kritēriji.

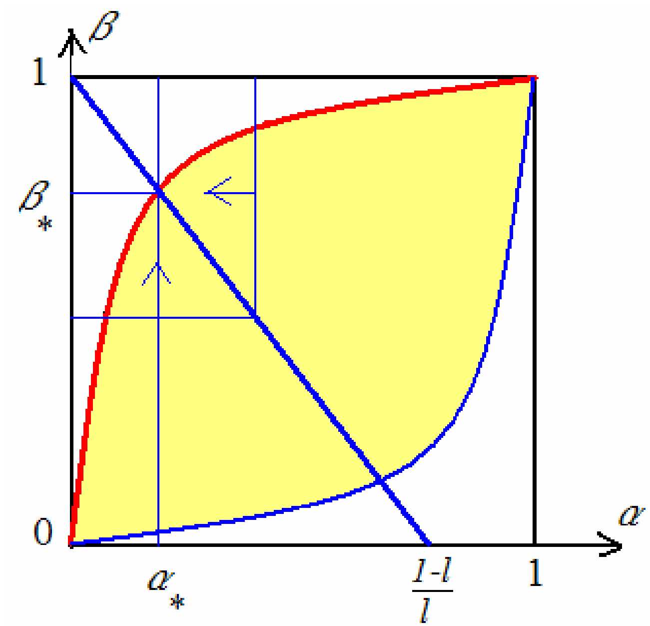
Nav zināmas apriorās hipotēžu pareizības varbūtības. Nav iespējams izvēlēties kritērija līmeni α_0. Apskatīsim risku $R(\theta,\varphi) = ML(\theta,\delta(\vec{x}))$. Pieņemsim, ka no mums neatkarīgie apstākļi ir visnelabvēlīgākie (θ ir tāds, pie kura $R^*(\varphi) = \sup_\theta R(\theta,\varphi)$). Šajā gadījumā saprātīgi izvēlēties to φ_*, kurš nodrošina $\inf_\varphi R^*(\varphi)$. Šo kritēriju sauc par minimaksa kritēriju.

Risks ir $R(\theta,\varphi) = \begin{cases} l\alpha(\varphi), & \theta = \theta_0, \\ (1-l)(1-\beta(\varphi)), & \theta = \theta_1. \end{cases}$ Var rakstīt:

$R^*(\varphi) = \max\left\{R(\theta_0,\varphi), R(\theta_1,\varphi)\right\} = \max\{l\alpha(\varphi), (1-l)(1-\beta(\varphi))\}$. Meklēsim φ_*, kuram tiek sasniegts minimums izteiksmei $\max\{l\alpha, (1-l)(1-\beta)\} = R$

$$\begin{cases} R = \alpha l, & \alpha l \ge (1-\beta)(1-l) \\ R = (1-\beta)(1-l), & \alpha l < (1-\beta)(1-l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{R}{l}, & \alpha l \ge (1-\beta)(1-l) \\ \beta = 1 - \dfrac{R}{1-l}, & \alpha l < (1-\beta)(1-l) \end{cases}$$



Robežtaisne $\alpha l = (1-\beta)(1-l)$, t.i., $\beta = 1 - \dfrac{\alpha l}{1-l}$

Piemēri.

Vienu reizi novēro binomiāli sadalītu gadījuma lielumu $\xi \sim B(10,\theta)$, kur $n=10$, bet varbūtība p nav zināma. ξ var pieņemt vērtības no kopas $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Hipotēzes $h_0:\theta=0.1$, $h_1:\theta=0.4$.

Hipotētiskā sadalījuma blīvuma funkcija $p(x,\theta_0)=C_{10}^x(0.1)^x(0.9)^{10-x}$,

Alternatīvā sadalījuma blīvuma funkcija $p(x,\theta_1)=C_{10}^x(0.4)^x(0.6)^{10-x}$.

Meklēsim kritēriju $\varphi^*(x)=\begin{cases}1, & p(x,\theta_1)>Kp(x,\theta_0)\\ c, & p(x,\theta_1)=Kp(x,\theta_0)\\ 0, & p(x,\theta_1)<Kp(x,\theta_0)\end{cases}$ ar līmeni $\int\limits_X \varphi^*(x)p(x,\theta_0)dx=\alpha_0$

$\dfrac{p(x,\theta_1)}{p(x,\theta_0)}>K$ Kritiskā apgabala nosacījums

$$\frac{C_{10}^x(0.4)^x(0.6)^{10-x}}{C_{10}^x(0.1)^x(0.9)^{10-x}}>K \qquad x\ln\left(4\cdot\frac{3}{2}\right)+10\ln\frac{2}{3}>\ln K$$

$$\ln\frac{(0.4)^x(0.6)^{10-x}}{(0.1)^x(0.9)^{10-x}}>\ln K \qquad x\ln 6+10\ln\frac{2}{3}>\ln K$$

$$x\ln 4+(10-x)\ln\frac{2}{3}>\ln K \qquad x>\frac{\ln K-10\ln\frac{2}{3}}{\ln 6}=q \qquad x>q$$

Uzrakstīsim kritērija I veida kļūdas varbūtību:

$$\alpha(\varphi) = \sum_{p(x,\theta_1)>Kp(x,\theta_0)} p(x,\theta_0) + c \sum_{p(x,\theta_1)=Kp(x,\theta_0)} p(x,\theta_0) =$$

Hipotētisko blīvumu summē pa kritisko apgabalu (nepareizi noraida 0–hipotēzi) .

Ja q nav vesels skaitlis, tad kritisko apgabalu $x > q$ var pārrakstīt $x = [q]+1, [q]+2,...,10$.

Tad randomizācijas apgabals ir $x = [q]$. q veselā daļa $[q]$ var mainīties no 0 līdz 9.

$$= \sum_{x=[q]+1}^{10} C_{10}^{x} (0.1)^{x} (0.9)^{10-x} + cC_{10}^{x} (0.1)^{[q]} (0.9)^{10-[q]}$$

Kritērija jauda:

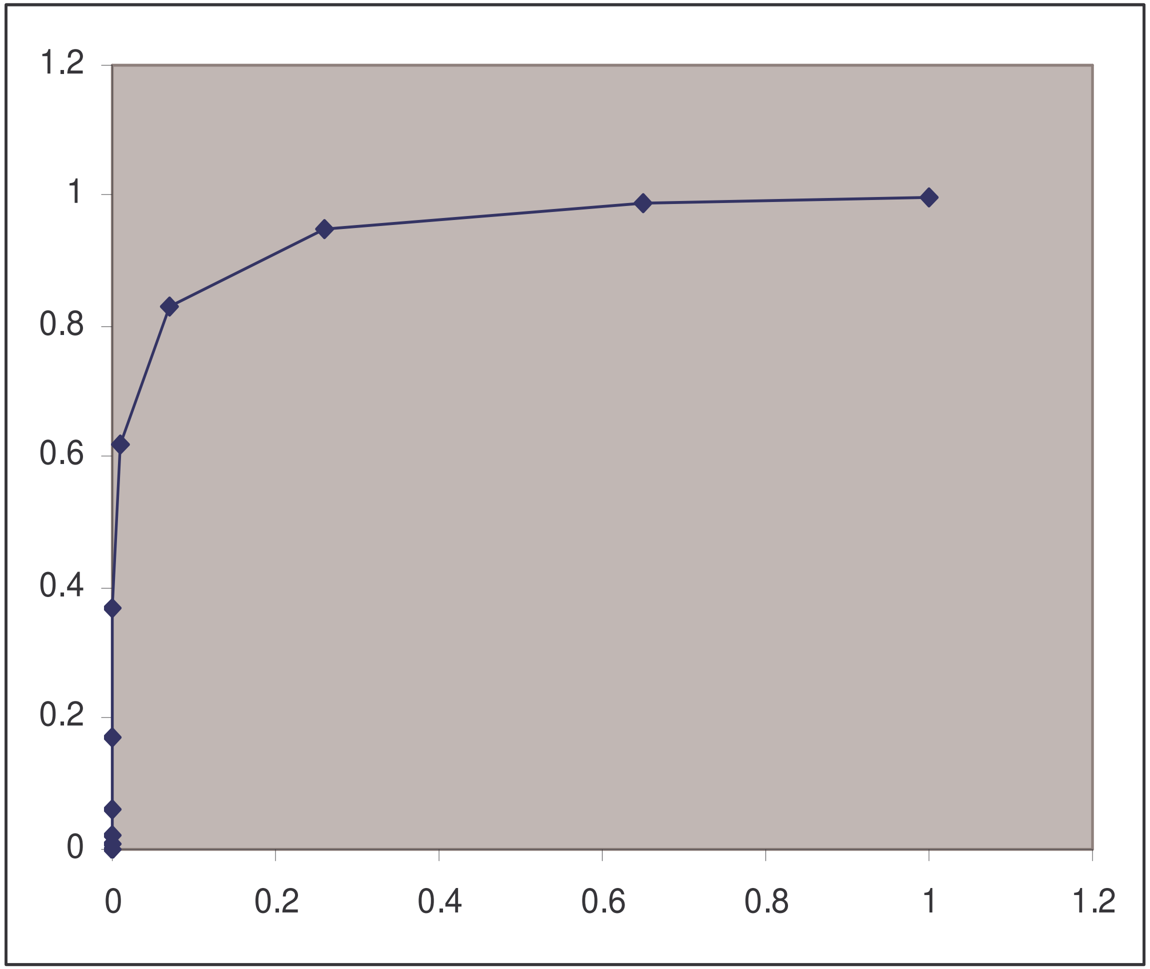
$$\beta(\varphi) = \sum_{p(x,\theta_1)>Kp(x,\theta_0)} p(x,\theta_1) + c \sum_{p(x,\theta_1)=Kp(x,\theta_0)} p(x,\theta_1) =$$

$$= \sum_{x=[q]+1}^{10} C_{10}^{x} (0.4)^{x} (0.6)^{10-x} + cC_{10}^{x} (0.4)^{[q]} (0.6)^{10-[q]}$$

1) Pieņemsim, ka $c = 0$:

$[q]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	0.65	0.26	0.07	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
β	0.99	0.95	0.83	0.62	0.37	0.17	0.06	0.02	0.01	0.00

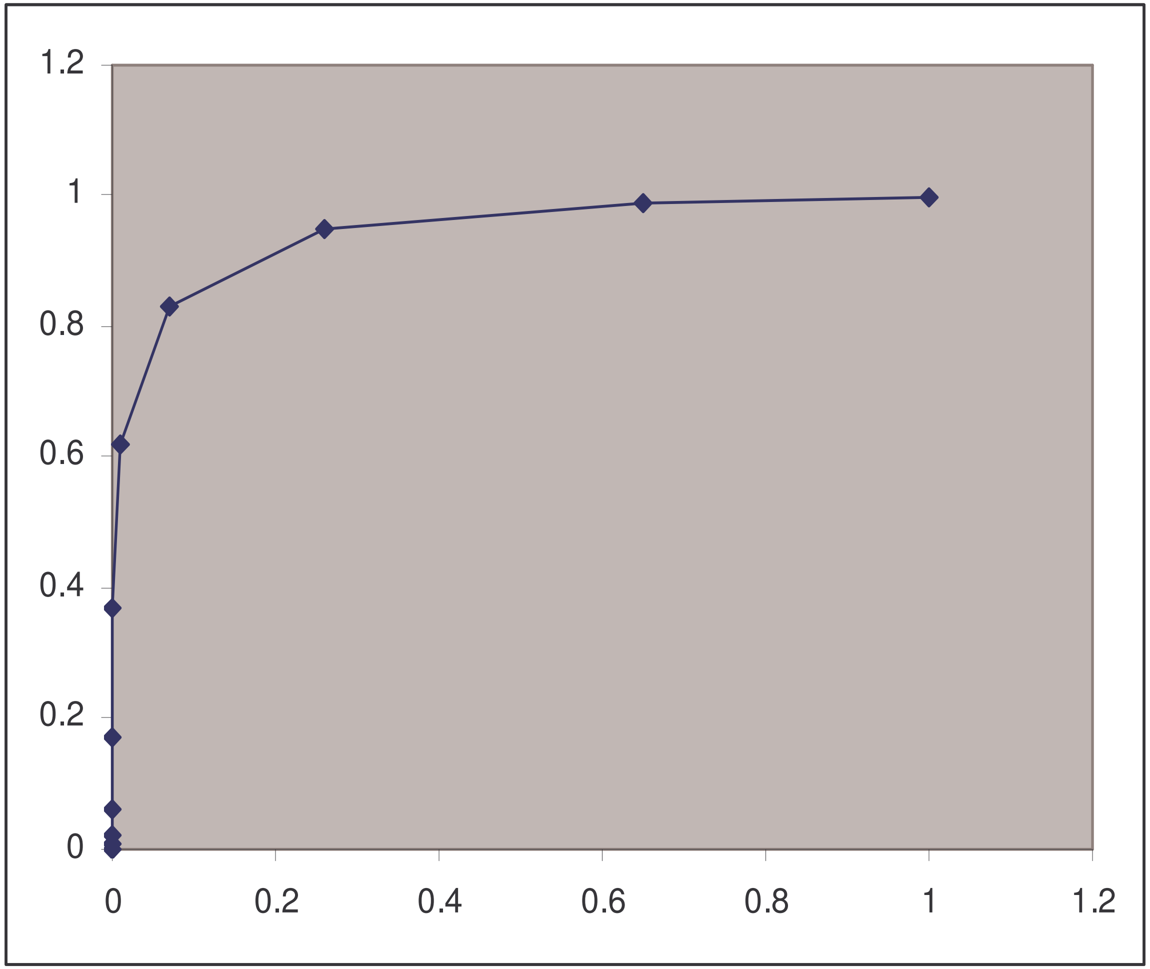
$[q]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	0.65	0.26	0.07	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
β	0.99	0.95	0.83	0.62	0.37	0.17	0.06	0.02	0.01	0.00



$\alpha = \alpha(c)$ un $\beta = \beta(c)$ lineāras funkcijas, tad arī $\beta = \beta(\alpha)$ ir lineāra funkcija.

2) Pieņemsim, ka $c = 1$:

$[q]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	1.00	0.65	0.26	0.07	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
β	1.00	0.99	0.95	0.83	0.62	0.37	0.17	0.06	0.02	0.01



Ja $\alpha_0 = 0.01$, tad $\beta(\varphi^*) = 0.62$, $1-\beta(\varphi^*) = 0.38$. Atradīsim kritēriju no 1. tabulas ($c = 0$). $[q] = 3$ Tad kritiskais apgabals ir $\{x > q\} = \{x \in \{4,5,6,7,8,9,10\}\}$.
Atradīsim kritēriju no 2. tabulas ($c = 1$). $[q] = 4$, un kritiskajā apgabalā nāk klāt viens saskaitāmais (ar reizinātāju c). Kritiskais apgabals tagad ir $\{x \geq q\} = \{x \in \{4,5,6,7,8,9,10\}\}$

Apgabali sakrīt! Tātad ir vienalga vai $c = 0$ vai $c = 1$.

Kritērijs ar līmeni $\alpha_0 = 0.01$ ir $\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{4,5,6,7,8,9,10\} \\ 0, & x \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$

3) Ko darīt, ja jāmeklē kritērijs ar tādu līmeni α_0 ,kāds nav atrodams tabulā? Piemēram, $\alpha_0 = 0.05$? Acīm redzot, tad c nevarēs ņemt ne 0, ne 1. Kritērijs būs randomizēts.

α_0	0.01	0.05	0.07
$[q]$	3	?	3
c	0	?	1

Apskatīsim no abām tabulām veidotu tabulas fragmentu, kurā iekļauti abi meklējamajam kritērijam blakusesošie tīrie kritēriji. Acīm redzot α_0 pieaugumu no 0.01 līdz 0.07 mēs varam interpretēt kā konstantes c pieaugumu no 0 līdz 1, $[q]$ paliekot nemainīgai, vienādai ar 3. Tiešām, jo lielāka daļa c no randomizācijas saskaitāmā ieiet α_0 izteiksmē, jo lielāka ir summa.

Konstanti c atrod no nosacījuma: $0.05 = \sum_{x=4}^{10} C_{10}^{x}(0.1)^{x}(0.9)^{10-x} + cC_{10}^{3}(0.1)^{3}(0.9)^{7}$,

Jeb no tabulas: $0.05 = 0.01 + c(0.07 - 0.01)$. $\quad c = \dfrac{2}{3}$.

Kritērijs ar līmeni $\alpha_0 = 0.05$ ir

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{4,5,6,7,8,9,10\} \\ \dfrac{2}{3}, & x = 3 \\ 0, & x \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Baijesa kritērijs.

Tas pats uzdevums. Uzskatīsim, ka 0–hipotēzes apriorā pareizības varbūtība $p = 0.2$ un zaudējumi, ko ciešam I veida kļūdas gadījumā, $l = 0.5$.

Atbalsta taisnes vienādojums:

$$\beta = 1 + \alpha \frac{pl}{(1-p)(1-l)} - \frac{r}{(1-p)(1-l)}$$

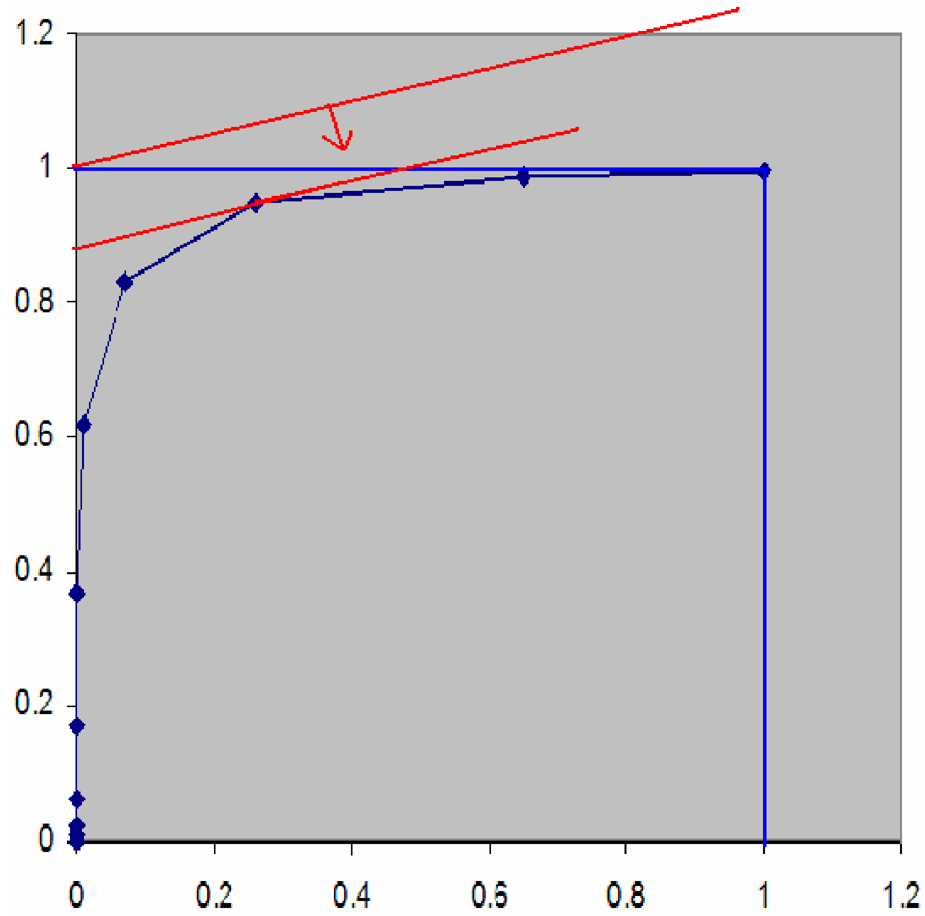
$$\beta = 1 + \frac{1}{4}\alpha - \frac{r}{(1-p)(1-l)}$$

$\alpha_p = 0.26$, $\beta_p = 0.95$

Tabulā $c = 0$ $\quad [q] = 1$,

kritērijs

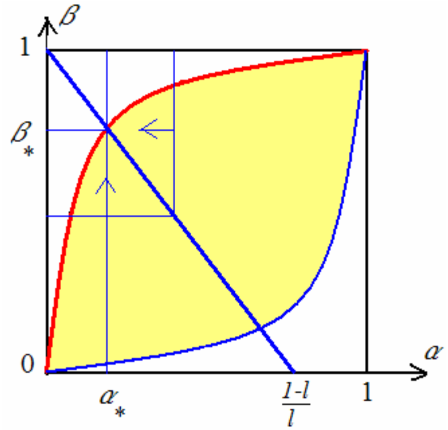
$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ 0, & x \in \{0,1\} \end{cases}$$

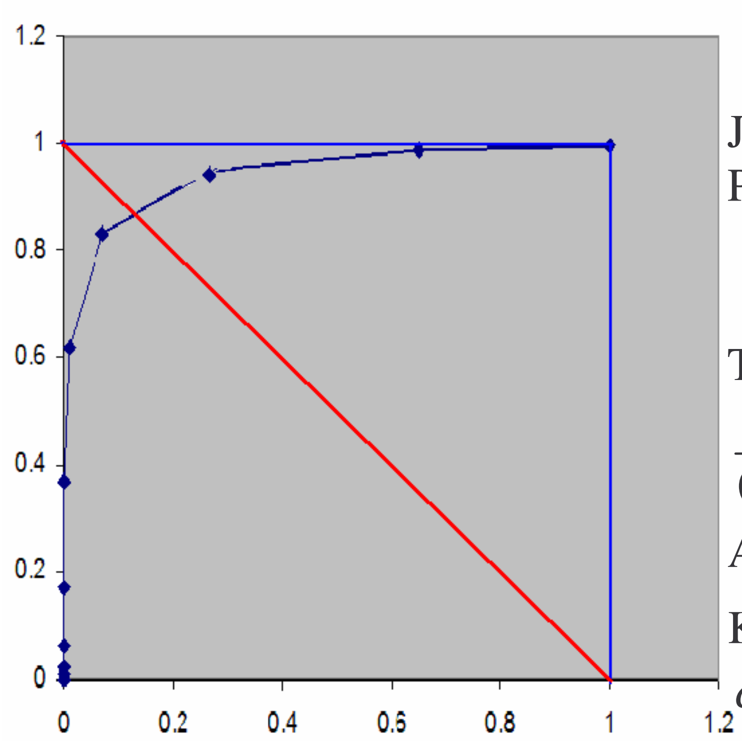


Minimaksa kritērijs.

Tas pats uzdevums. Uzskatīsim, ka zaudējumi, ko ciešam I veida kļūdas gadījumā, $l = 0.5$.

$$\frac{1-l}{l} = \frac{1-0.5}{0.5} = 1$$





Jāatrod krustpunkta koordinātas:

Pieļaujamo kritēriju kopas nogriežņa koordinātas:

α	0.07	0.26
β	0.83	0.95

Taisnes vienādojums:

$$\frac{\beta - 0.83}{0.95 - 0.83} = \frac{\alpha - 0.07}{0.26 - 0.07} \qquad \beta = 0.63\alpha + 0.79$$

Atbalsta taisnes vienādojums $\beta = 1 - \alpha$

Krustpunkts: $\alpha^* = 0.13 \quad \beta^* = 0.87$

c aprēķins: $0.13 = 0.07 + c(0.26 - 0.07)$, $c = 0.32$,

kritērijs:
$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ 0.32, & x = 2 \\ 0, & x \in \{0,1\} \end{cases}$$

Ārpus šī kursa programmas palikušie būtiskie statistikas jautājumi.

- Pakāpeniskās analīzes uzdevumi.
- Saliktu hipotēžu pārbaudes uzdevums, vienpusējas un divpusējas hipotēzes.
- Pietiekamās statistikas.
- Informācijas daudzuma, ko satur izlase, analīze. Novērtējumu kvalitātes analīze.
- Ticamības intervālu vispārīgie konstrukcijas principi un to eksistence (patvaļīgiem sadalījumiem)
- Saskaņas kritēriji.
- Regresiju un korelāciju analīzes jautājumi.
- Dispersiju analīze.
- Laikrindu analīze.
- Kategoriju datu apstrāde.
- Daudzdimensiju statistiskā analīze.
- Diskriminācija un klasifikācija.
- Eksperimentu plānošana.