Praktiskais darbs „Markova ķēdes ar diskrēto laiku”

1 Markova ķēde. Pārejas matrica pa vienu soli.

Gadījuma lielumu virkne

$\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n$

ξ_0- gadījuma lielums laika momentā $t=0$ jeb sākuma momentā.

Apzīmēsim ar $E_1, E_2, ...E_k$ sistēmas iespējamos **stāvokļus**.

Varbūtību

$$P\left(\xi_n = E_j \ / \ \xi_{n-1} = E_i\right) = p_{ij}^{(n)} \tag{1}$$

sauksim *par pārejas varbūtību no stāvok ļa i uz stāvokli j laika momentā n.*

$P\left(\xi_n = E_j \ / \ \xi_{n-1} = E_i\right) = P\left(\xi_n = j \ / \ \xi_{n-1} = i\right)$

Markova īpašība

$$\begin{aligned} & P\left(\xi_n = E_j \ / \ \xi_{n-1} = E_i, \xi_{n-2} = E_k, ..., \xi_0 = E_m\right) = \\ = \ & P\left(\xi_n = E_j \ / \ \xi_{n-1} = E_i\right) \end{aligned} \tag{2}$$

tātad, nākotne nav atkarīga no pagātnes, bet ir atkarīga tikai no tagadnes.

Mēs apskatīsim **homogēnas** (pēc laika) Markova ķēdes, t.i. ka pārejas varbūtības $p_{ij}^{(n)}$ nav atkarīgas no laika n:

$$p_{ij}^{(n)} = p_{ij}$$

1. piemērs: gadījuma proces ir cilvēka garastāvoklis katru dienu. Pieņemsim, ka ir iespējami trīs stāvokļi:

$E_1 =$ labs garastāvoklis, E_2 =slikts garastāvoklis, E_3 =vidējs garastāvoklis.

Ja pārejas varbūtības ir atkarīgas no tā kāda ir šodien diena :

teiksim, ja šodien ir pirmdiena tad varbūtība $p_{12} = 0.4$, bet ja šodien ir piektdiena, tad $p_{12} = 0.1$, tad

mums nav homogēna Markova ķēde.

Turpmāk apskatīsim homogēnas Markova ķēdes.

Pārejas matrica pa vienu soli , ja sistēmai ir k stāvokļi

$$P = (p_{ij})_{k\times k} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & ..... & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & ..... & p_{2k} \\ .. & .. & .. & .. \\ p_{k1} & p_{k2} & ..... & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Tā ir stohastiska matrica, tātad ir spēkā sekojošas īpašības:

$$1) \quad \forall i,j \quad 0 \le p_{ij} \le 1$$

$$2) \quad \forall k \quad \sum_j p_{kj} = 1.$$

Markova ķēdi bieži vien uzdod ar grafa palīdzību.

Apskatīsim 1. piemēru homogeno gadījumu

Uzdevums: uzrakstīt pārejas matricu.

$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$

2. piemērs. Uz apļa ir seši punkti vienādā atālumā viens no otra. Molekula virzās no viena punkta uzotru pēc sekojoša likuma: ar varbūtību $\frac{1}{4}$ viņa pārvietojās uz blakuspunktu, vai ar varbūtību $\frac{1}{2}$ uz diametrāli pretējo punktu. Uzdevums: uzrakstīt pārejas matricu.

Iesakams zīmēt no sākuma grafu. Sistēmas stāvokļi E_j- molekula atrodās punktā j. Tātad sistēmai ir 6 stāvokļi un pārejas matrica ir 6×6.

3. piemērs. Mācības piedalāsdivi kuģi A un B. Viņi šauj vienlaicīgi viens otrā ik pēc 10 minūtēm, ja ir trāpijums, tad kuģis nogrimst.Tiek novēroti šāvienu sērijas rezultāti. Piņemsim, ka varbūtība trāpīt mērķī kuģim A ir $P(A) = \frac{2}{3}$, kuģim B - $P(B) = \frac{5}{8}$. Uzrakstīt sistēmas pārejas matricu.

2 Studentu piedāvātie piemēri.

4. piemērs. Students iestājās augstskolā. Pēc sesijas ir iespējami trīs stāvokļi: E_1- students ir joprojām students (nokārtoja sesiju bez parādiem); E_2- students ir izmests; E_3-students studē, bet ar parādiem. Solis - pusgads (jeb nākamā sesija). Pārejas matrica pa vienu soli:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

p_{11} =P(students nokārto sesiju bez parādiem, ja iepriekšejo sesiju viņš nokārtoja bez parādiem)

p_{12} =P(studentu izmetīs, ja iepriekšejo sesiju viņš nokārtoja bez parādiem)

....

p_{32} =P(studentu izmetīs, ja iepriekšejo sesiju viņš nokārtoja ar parādiem)

p_{33} =P(students nokārto sesiju ar parādiem, ja iepriekšejo sesiju viņš nokārtoja ar parādiem).

5. piemērs. Studentu dienesta viesnīcas parādes durvis. Studenti staigā iekšā ($E_1 = i$) vai ārā ($E_2 = \bar{a}$). 10 minūtēs fiksēti sekojoši stāvokļi:

i i i i ā i ā ā ā i ā ā i i i i ā i i

$$P = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

6. piemērs. Pilsētiņā X ir trīs uzņēmumi A, B un C, kas konkurē savā starpā un cīnās par klientiem, kas izmanto šo uzņēmumu pakalpojumus. Un cīnās sekmīgi, jo gada laikā patiesi notiek šādas tādas izmaiņas.

Sistēmas stāvokļi: E_1- klients izmanto uzņēmuma A pakalpojumu; E_2- klients izmanto uzņēmuma B pakalpojumu; E_3- klients izmanto uzņēmuma C pakalpojumu. Solis - 1 gads.

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.15 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.15 & 0.15 & 0.7 \end{pmatrix}$$

7. piemērs. Tika aptaujāti 200 cilvēki un jautāts ir vai nav viņiem dators. Sistēmas stāvokļi:

E_1- nav datora; E_2- ir dators; E_3- ir dators+INTERNET pieslēgums.

Solis - 6 mēneši.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{21}{70} & \frac{37}{70} & \frac{12}{70} \\ \frac{3}{80} & \frac{50}{80} & \frac{27}{80} \\ \frac{1}{50} & \frac{4}{50} & \frac{45}{50} \end{pmatrix}$$

8. piemērs. 40 cilvēkiem tika pajautāts : kādas cigaretes cilvēks smēķē. Sistēmas stāvokļi: E_1- smēķē ļoti vieglas cigaretes; E_2- smēķē vieglas cigaretes; E_3- smēķē normālas cigaretes. Solis - 1gads.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{2}{10} & 0 \\ \frac{6}{25} & \frac{15}{25} & \frac{4}{25} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

3 Ķēdes pārejas matrica pēc n soļiem

$$P^n = (p_{ij}(n))$$

$P^2 = P * P$
$P^3 = P * P * P$
.....
$P^n = \underbrace{P * P * .... * P}_{n}$

9. piemērs: students strādā internet-firmā, viņam jaapkalpo klientus, kuriem ir kādas problēmas ar datoru. Sistēmas stāvokļi: E_1- dators inficēts ar datoru vīrusu; E_2- datoram bojāta operētājsistēma; E_3- operetājsistēma nepareizi noskaņota.Solis - 1 diena.

P=$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

Kāda ir varbūtība, ka parīt vajadzēs "cīnīties " ar datoru vīrusu, ja šodien es laboju operētājsistēmu?

4 Markova ķēdes sadalījums pēc n soļiem.

Sākuma sadalījums $\pi^0 = (p_1^0, p_2^0, ...p_k^0)$

$p_i^0 = P(\xi_0 = E_i)$- varbūtības ka sākumā sistēma atrodās stāvokli E_i.

Sadalījums pēc n soļiem (varbūtības atrasties stāvokļos pēc n soļiem):

$\pi^n = (p_1^n, p_2^n, ...p_k^n) = (p_1^n = P(\xi_n = E_1), p_2^n = P(\xi_n = E_2), ...p_k^n = P(\xi_n = E_k))$

$\forall n \sum\limits_{i=1}^{k} p_i^n = 1$

$$\pi^n = \pi^{n-1} * P = \pi^0 * P^n \tag{3}$$

10. piemērs.

Studentu grupā tiek veikta aptauja. Pēc sesijas ir iespējami trīs stāvokļi: E_1- students ir joprojām students (nokārtoja sesiju bez parādiem); E_2-students studē, bet ar parādiem; E_3-students ir izmests.

Pēc ziemas sesijas no 25 studentiem:

$$\textit{pēc} \quad vasasras \quad sesijas$$

20 studentiem E_1
$$\begin{array}{lll} \to 14 & stud. & E_1 \\ \to 6 & stud. & E_2 \end{array}$$

$$\textit{pēc} \quad vasasras \quad sesijas$$

5 studentiem -$E_2 \longrightarrow$
$$\begin{array}{lll} \to 1 & stud. & E_1 \\ \to 3 & stud. & E_2 \\ \to 1 & stud. & E_3 \end{array}$$

Kāda ir varbūtība ka pēc vasaras sesijas students studēs, bet ar parādiem, ja pēc ziemas sesijas nebija parāda?

Students iestājās augstskolā. Kāda ir varbūtība ka pēc vasaras (*otrās*) sesijas students studēs ar parādiem?

Kāda ir varbūtība ka pēc pirmās sesijas students studēs, bet ar parādiem?

Kāda ir varbūtība ka pēc otrās sesijas students studēs bez parādiem?

Kāda ir varbūtība ka pēc trešā kursa vasaras sesijas students tiks atskaitīts?

11. piemērs: Trīs mobīlo telefonu tīkli $LMT, TELE2, BITE$
Tika aptaujāti 25 cilvēki.
Sākuma sadalījums 2004. gadā:
$\pi^0 = (L, T, B) = \begin{pmatrix} \frac{15}{25} & \frac{10}{25} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.0 \end{pmatrix}$

2005	**L**	**L**	*T*	*B*	**L**	**L**	*L*	*L*	*T*	**L**	*T*	*B*	**L**	**L**	*T*	**L**	*T*	*T*	*L*	*B*	*L*	*T*	**L**	*T*	**L**
2006	**L**	**L**	*T*	*T*	**L**	**L**	*B*	*T*	*T*	**L**	*B*	*L*	**L**	**L**	*T*	**L**	*T*	*B*	*T*	*B*	*T*	*B*	**L**	*L*	**L**

Aprēķināt sadalījumus laika momentos $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (sadalījumus pēc $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ soļiem)

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.46} & \mathbf{0.32} & \mathbf{0.22} \end{pmatrix}$$

$$\pi^2 = \pi^0 P^2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.54 & 0.27 & 0.19 \\ 0.24 & 0.39 & 0.37 \\ 0.36 & 0.33 & 0.31 \end{pmatrix} =$$

$$= \pi^1 P = \begin{pmatrix} 0.46 & 0.32 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.42} & \mathbf{0.318} & \mathbf{0.262} \end{pmatrix}$$

$$\pi^3 = \pi^0 P^3 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.462 & 0.3 & 0.238 \\ 0.318 & 0.354 & 0.328 \\ 0.378 & 0.33 & 0.292 \end{pmatrix} =$$

$$= \pi^2 P = \begin{pmatrix} 0.42 & 0.318 & 0.262 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.4044} & \mathbf{0.3216} & \mathbf{0.274} \end{pmatrix}$$

$$\pi^4 = \pi^0 P^4 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4248 & 0.3138 & 0.2614 \\ 0.3564 & 0.339 & 0.3046 \\ 0.3852 & 0.3282 & 0.2866 \end{pmatrix} =$$

$$= \pi^3 P = \begin{pmatrix} 0.4044 & 0.3216 & 0.274 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.39744} & \mathbf{0.32388} & \mathbf{0.27868} \end{pmatrix}$$

$$\pi^5 = \pi^0 P^5 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.40716 & 0.32028 & 0.27256 \\ 0.37476 & 0.33216 & 0.29308 \\ 0.38844 & 0.32712 & 0.28444 \end{pmatrix} =$$

$$= \pi^4 P = \begin{pmatrix} 0.39744 & 0.32388 & 0.27868 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.3942} & \mathbf{0.32503} & \mathbf{0.28077} \end{pmatrix}$$

$$\pi^6 = \pi^0 P^6 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.39881 & 0.32334 & 0.27785 \\ 0.38347 & 0.32896 & 0.28757 \\ 0.38995 & 0.32658 & 0.28347 \end{pmatrix} =$$

$$= \pi^5 P = \begin{pmatrix} 0.3942 & 0.32503 & 0.28077 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.39267} & \mathbf{0.32559} & \mathbf{0.28174} \end{pmatrix}$$

$$\pi^7 = \pi^0 P^7 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.39486 & 0.32479 & 0.28036 \\ 0.38760 & 0.32744 & 0.28496 \\ 0.39066 & 0.32632 & 0.28301 \end{pmatrix} =$$

$$= \pi^6 P = \begin{pmatrix} 0.392\,67 & 0.325\,59 & 0.281\,74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.391\,95} & \mathbf{0.325\,85} & \mathbf{0.282\,20} \end{pmatrix}$$

$$\pi^8 = \pi^0 P^8 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.392\,98 & 0.325\,47 & 0.281\,54 \\ 0.389\,55 & 0.326\,73 & 0.283\,72 \\ 0.391 & 0.326\,20 & 0.282\,8 \end{pmatrix} =$$

$$= \pi^7 P = \begin{pmatrix} 0.391\,95 & 0.325\,85 & 0.282\,20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.391\,61} & \mathbf{0.325\,98} & \mathbf{0.282\,42} \end{pmatrix}$$

Viegli redzēt,ka palielinoties soļu skaitam piemēram, ja $n = 8$, varbūtība nokļūt, pir-

majā stāvoklī $p_{11}(8), p_{21}(8)$ un $p_{31}(8)$ būtiski neatšķirās. Izskatās, ka pie $n \longrightarrow \infty$ pārejas varbūtības $p_{ij}(n)$ konverģē uz skaitli, kurš ir atkarīgs tikai no j. Citiem vārdiem, mēs gaidām, ka varbūtība sistēmai atrasties j-stāvoklī pēc liela soļu skaita nav atkarīga no sistemas sākuma stāvokļa.

5 Stacionārais sadalījums.

Ergodiskā teorēma: Pieņemsim ka K ir Markova ķēdes $\{\xi_n, n \geq 0\}$ stāvokļu skaits.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j^* > 0, \quad i, j = 1, 2, ...K$$

tad un tikai tad, ja gaduma lielumu virkne $\{\xi_n, n \geq 0\}$ veido homogēnu nereducējamu Markova ķēdi bez apakšklasēm. Bez tam skiatļi $p_j^*, \quad i, j = 1, 2, ...K$ ir sistēmas

$$\begin{cases} p_j^* = \sum\limits_{k=1}^{K} p_k^* p_{kj}, \quad j = 1, 2, ...K \\ \sum\limits_{k=1}^{K} p_k^* = 1 \end{cases} \tag{4}$$

vienīgais atrisinājums, un eksistē tāds $0 < h_0 < 1$, ka izpildās

$$\left| p_{ij}(h) - p_j^* \right| < h_0^n.$$

Apzīmēsim *vektoru* $\begin{pmatrix} p_1^* & p_2^* & .. & p_K^* \end{pmatrix} = \pi^*$, tad vienādības (4) var uzrakstīt matricu formā

$$\begin{cases} \pi^* * P = \pi^* \\ p_1^* + p_2^* + ... + p_k^* = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Vektoru π^* sauksim par **stacionāro sadalījumu.**

Stacionārā sadalījuma eksistences nepieciešamības nosacījumu varam pārformulēt:

stacionārais sadalījums eksistē tad un tikai tad, ja eksistē tāds soļu skaits m, ka pārejas matrīcā P^m visas $p_{ij}(m) \neq 0$.

Piemēram, ja

$$\text{P}=\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\text{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} .16 & .34 & .5 \\ 0 & .36 & .64 \\ 0 & .32 & .68 \end{pmatrix}$$

$$\text{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} .064 & .348 & .588 \\ 0 & .328 & .672 \\ 0 & .336 & .664 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$neeksistē stacionārais sadalījums

Apskatīsim **11. piemēru.**

Tā kā jau pārejas matricā P jau visi $p_{ij} \neq 0$, tātad eksistē stacionārais sadalījums $\pi^* = \begin{pmatrix} p_1^* & p_2^* & p_3^* \end{pmatrix}$

Noteiksim šo sadalījumu atrisiniot vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} p_1^* & p_2^* & p_3^* \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^* & p_2^* & p_3^* \end{pmatrix} \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.7p_1^* + 0.1p_2^* + 0.3p_3^* = p_1^* \\ 0.2p_1^* + 0.5p_2^* + 0.3p_3^* = p_2^* \\ 0.1p_1^* + 0.4p_2^* + 0.4p_3^* = p_3^* \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -0.3p_1^* + 0.1p_2^* + 0.3p_3^* = 0 \\ 0.2p_1^* - 0.5p_2^* + 0.3p_3^* = 0 \\ 0.1p_1^* + 0.4p_2^* - 0.6p_3^* = 0 \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \end{cases}$$

Mums sanāca četru lineāro vienādojumu sistēma ar trim nezināmiem. Vienu no vienādojumiem vajag izsvītrot. Viegli redzēt, ka pirmie trīs vienādojumi ir lineāri saistīti, nekādā gadījumā nedrīkst izsvītrot vienādojumu $p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1$.

Stacionārais sadalījums $\pi^* = (0.3913; \quad 0.32609; \quad 0.28261)$

12. piemērs: Dota Markova ķēdes pārejas matrica pa vienu soli:

$$P=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Aprēķināt stacionāro sadalījumu.

Sastādam vienādojumu sitēmu:

$$\begin{cases} 0.1p_1^* + 0.1p_2^* + 0.2p_3^* = p_1^* \\ 0.2p_1^* + 0 * p_2^* + 0.2p_3^* = p_2^* \\ 0.7p_1^* + 0.9p_2^* + 0.6p_3^* = p_3^* \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -0.9p_1^* + 0.1p_2^* + 0.2p_3^* = 0 \\ 0.2p_1^* - 1 * p_2^* + 0.2p_3^* = 0 \\ 0.7p_1^* + 0.9p_2^* - 0.4p_3^* = 0 \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \end{cases}$$ (pareizināsim ar 10 pirmo un otro vienādojumus)

Atrisināsim šo sistēmu ar Gausa metodi.

Stacionārais sadalījums $\pi^* = \left(\frac{1}{6}; \quad \frac{1}{6}; \quad \frac{2}{3}\right) = (0.16667; \quad 0.16667; \quad 0.66667)$

6 Ķēdes realizācijas varbutība.

13. piemērs: Dota Markova ķēdes pārejas matrica pa vienu soli

$$\text{P}=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

un sākuma sadalījums $\pi^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0.6} & \mathbf{0.3} & \mathbf{0.1} \end{pmatrix}$

Mūs interesē sekojoš ķēdes realizācija: $\text{P}(\xi_0 = E_1, \xi_2 = E_2, \xi_5 = E_1, \xi_6 = E_3) =?$

(Izmantosim varbūtību reizināšanas teorēmu $P(AB) = P(A/B)\,P(B)$)

$\text{P}(\xi_6 = E_3, \xi_5 = E_1, , \xi_2 = E_2, \xi_0 = E_1) =$

$=\text{P}(\xi_6 = E_3/\xi_5 = E_1, \xi_2 = E_2, \xi_0 = E_1)\,P(\xi_4 = E_1, \xi_1 = E_2, \xi_0 = E_1) =$

=(tā kā mums izpildās Markova īpašība (2),tad

$\text{P}(\xi_6 = E_3/\xi_5 = E_1, \xi_2 = E_2, \xi_0 = E_1) = \text{P}(\xi_6 = E_3/\xi_5 = E_1))=$

$=\text{P}(\xi_6 = E_3/\xi_5 = E_1)\,P(\xi_4 = E_1/\xi_1 = E_2, \xi_0 = E_1)\,P(\xi_1 = E_2, \xi_0 = E_1) =$

$$\begin{array}{ccccc} = P(\xi_6 = E_3/\xi_5 = E_1)* & P(\xi_4 = E_1/\xi_1 = E_2)* & P(\xi_1 = E_2/\xi_0 = E_1)* & P(\xi_0 = E_1) & \\ = p_{13}* & p_{21}(3)* & p_{12}* & p_1^0 & = \\ \in P & \in P^3 & \in P & \in \pi^0 & \end{array}$$

$= \mathbf{0.5 * 0.299 * 0.2 * 0.6 = 0.017\,94}$

Aprēķinam P^3 :

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.31 & 0.325 & 0.557 \\ 0.299 & 0.3 & 0.635 \\ 0.391 & 0.431 & 0.576 \end{pmatrix}$$

Aprēķināsim sekojošas realizācijas varbūtību $\text{P}(\xi_2 = E_1, \xi_4 = E_3, \xi_6 = E_1, \xi_7 = E_2) =?$

$\text{P}(\xi_2 = E_1, \xi_4 = E_3, \xi_6 = E_1, \xi_7 = E_2) =$

$=\text{P}(\xi_2 = E_1)\text{P}(\xi_4 = E_3/\xi_2 = E_1)\text{P}(\xi_6 = E_1/\xi_4 = E_3)\text{P}(\xi_7 = E_2/\xi_6 = E_1)$

$$\begin{array}{ccccc} = P(\xi_7 = E_2/\xi_6 = E_1)* & P(\xi_6 = E_1/\xi_4 = E_3)* & P(\xi_4 = E_3/\xi_2 = E_1)* & P(\xi_2 = E_1) & \\ = p_{12}* & p_{31}(2)* & p_{13}(2)* & p_1^2 & \underset{(*)}{=} \\ \in P & \in P^2 & \in P^2 & \in \pi^2 & \end{array}$$

vajag izrēķināt π^2 :

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0.6} & \mathbf{0.3} & \mathbf{0.1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.2 & 0.57 \end{pmatrix}$$

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.2 & 0.57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.323} & 0.355 & 0.456 \end{pmatrix}$$

$$\text{un P}^2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.31 & 0.33 & \mathbf{0.46} \\ 0.36 & 0.43 & 0.37 \\ \mathbf{0.29} & 0.28 & 0.69 \end{pmatrix}$$

$\underset{(*)}{=} 0.2 * 0.29 * 0.46 * 0.323 = \mathbf{0.008\,617\,6}$

14. piemērs:

Mobīlo telefonu firmai TELE2 pastāv sekojoši pieslēgumu tarifi
Starta=E_1; Ekonomiskais=E_2; Aktīvais=E_3; Biznesa=E_4
2003. gadā 15%-S, 40%-E; 25%-A; 20%-B
$\pi^0 = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.4 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix}$

no S$\longrightarrow$ 5% uz E; 2% uz A; 1% uz B,
no E$\longrightarrow$ 3%S 1% uz A; 1% uz B,
no A$\longrightarrow$ 5%S 5% uz E; 1% uz B,
no B$\longrightarrow$ 5%S 4% uz E; 3% uz A;

$$P = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.05 & 0.02 & 0.01 \\ 0.03 & 0.95 & 0.01 & 0.01 \\ 0.05 & 0.05 & 0.89 & 0.01 \\ 0.05 & 0.04 & 0.03 & 0.88 \end{pmatrix}$$

Stacionārais sadalījums

$$\left\{ \begin{array}{c} -0.08p_1^* + 0.03p_2^* + 0.05p_3^* + 0.05p_4^* = 0 \\ 0.05p_1^* - 0.05p_2^* + 0.05p_3^* + 0.04p_4^* = 0 \\ 0.02p_1^* + 0.01p_2^* - 0.11p_3^* + 0.03p_4^* = 0 \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -8p_1^* + 3p_2^* + 5p_3^* + 5p_4^* = 0 \\ 5p_1^* - 5p_2^* + 5p_3^* + 4p_4^* = 0 \\ 2p_1^* + 1p_2^* - 11p_3^* + 3p_4^* = 0 \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = 1 \end{array} \right.$$

Ieteicams atrisināt šo sistēmu ar Gausa metodi.
Stacionārais sadalījums $\pi^* = \begin{pmatrix} 0.308\,88 & 0.492\,31 & 0.121\,89 & 0.076\,92 \end{pmatrix}$

7 Kontroldarba variants

Dota Markova ķēdes pārejas matrica

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

un sākuma sadalījums $\pi^0 = (0.1, 0.3, 0.6)$
1. Noteikt sadalījumu laika momentā $t = 3$.

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.12 & 0.23 \end{pmatrix}$$

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.12 & 0.23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.373 & 0.413 & 0.214 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\pi}^3 == \begin{pmatrix} 0.373 & 0.413 & 0.214 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.391\,1} & \mathbf{0.245\,2} & \mathbf{0.363\,7} \end{pmatrix}$$

Aprēķināt pārejas matricu pa diviem soļiem:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.14 & 0.46 \\ 0.69 & 0.25 & 0.06 \\ 0.21 & 0.54 & 0.25 \end{pmatrix}$$

2. Aprēķināt varbūtību
$\mathbf{P}(\xi_1 = E_2, \xi_2 = E_1, \xi_4 = E_3, \xi_7 = E_1) =$
$= p_2^1 * p_{21} * p_{13}(2) * p_{31}(3) \underset{*}{=}$

$$p_{31}(3) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.69 \\ 0.21 \end{pmatrix} = 0.429$$

$$= 0.12 * 0.3 * 0.46 * 0.429 = \mathbf{7.1042 \times 10^{-3}}$$

*

3. Noteikt sistēmas stacionāro sadalījumu.

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.3 & 0.9 \\ 0.6 & -1 & 0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ Solution is: } \begin{pmatrix} 0.42857 \\ 0.28571 \\ 0.28571 \end{pmatrix}$$

$$\pi^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0.42857} & \mathbf{0.28571} & \mathbf{0.28571} \end{pmatrix}$$