Aussage 1. *Der durch 4 Punkte auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^3$ definierte sphärische Tetraeder hat ein größeres Volumen als der durch die gleichen Punkte definierte euklidische Tetraeder. (Und das müsste sich eigentlich auf alle dimensionen verallgemeinern lassen.)*

Teil 1. *Der Abstand von jedem Punkt des euklidischen Tetraeders zum Nullpunkt ist ≤ 1.*

Beweis. Jeder Punkt auf der Kante zwischen den Punkten v_1 und v_2 lässt sich als $v_1 + (v_2 - v_1) \cdot t = (1-t)v_1 + tv_2$. Die Norm dieses Vektors ist:

$$\begin{aligned} \|(1-t)v_1 + tv_2\| &= ((1-t)x_1 + tx_2)^2 + ((1-t)y_1 + ty_2)^2 + ((1-t)z_1 + tz_2)^2 \\ &= (1-t)^2x_1^2 + t^2x_2^2 + (1-t)tx_1x_2 + (1-t)^2y_1^2 + t^2y_2^2 + (1-t)ty_1y_2 + (1-t)^2z_1^2 + t^2z_2^2 + (1-t)tz_1z_2 \\ &= (1-t)^2\|v_1\| + t^2\|v_2\| + (1-t)t\langle v_1, v_2\rangle \\ &= (1-t)^2 + t^2 + (1-t)t\langle v_1, v_2\rangle \\ &= 1 - 2t + 2t^2 + (t-t^2)\langle v_1, v_2\rangle \\ &= 1 - 2(t-t^2) + (t-t^2)\langle v_1, v_2\rangle \\ &= 1 + (t-t^2)(\langle v_1, v_2\rangle - 2) \\ &\leq 1 + (t-t^2)(1-2) \\ &= 1 - (t-t^2) \leq 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Alle anderen Punkte liegen auf Strecken zwischen Punkten auf diesem Kanten. Mit dem gleichen Argument Ergibt sich die Behaupttung somit für alle Punkte des euklidischen Tetraeders.

□