Неруссков Дмитрий Лекция 9

Численное дифференцирование

Пусть в некоторой т x^* требуется вычисл. производные 1,2 и т.д. порядков от дискретно заданной ф-ции

Могут иметь место 2 случая:

а) точка $x^* \in (x_{i-1}; x_i)$, $i=\overline{1,n}$

б) $x^* = x_i$; $i=\overline{1,n-1}$

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

а) заданная табл. сглаживается какой-либо ф-цией $\varphi(x)$, яв. глобальным (локальным) интерполяц. многочленом или мн-ом, полученным по МНК с некоторой погреш-ю $R_n(x)$, в рез-те чего имеют место след-е равенства:

$$y(x)=\varphi(x)+R_n(x), \quad y(x^*)=\varphi(x^*)+R_n(x^*)$$
$$y'(x)=\varphi'(x)+R'_n(x), \quad y'(x^*)=\varphi'(x^*)+R'_n(x^*) \qquad (2)$$
$$y''(x)=\varphi''(x)+R''_n(x) \quad y''(x^*)=\varphi''(x^*)+R''_n(x^*)$$

Согласно (2) погреш. произв-й интерполир. ф-ции равна произв. от погреш-ти этой ф-ции б) используется аппарат разложения ф-ций в ряд Тейлора, для чего ф-ция в т. x^* должна иметь достаточное число произв.-х. С этой целью предполагается, что зад. таблица явл. точной ф-цией для некот. $y(x)$, имеют в т. x^* произв-е до 4го порядка вкл., т.е. что $y_i = y(x_i)$

Тогда внутр. узел. $x^* = x_i$, $i = \overline{1, n-1}$, окруж. узлы x_{i-1}, x_{i+1}, причём $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i+1} = h$

Тогда разлагая знач. y_{i-1}, y_{i+1} на точной ф-ции в ряд Тейлора в окрест-и т. x_i до производ. 4-го порядка вкл., получим:

$$(3) \quad y_{i+1} = y(x_i + h) = y_i + y'_i h + y''_i \frac{h^2}{2} + y'''_i \frac{h^3}{6} + y^{IV}(\varepsilon_1) \frac{h^4}{24}$$

$\varepsilon_1 \in (x_i, x_i + 1)$ $\quad \varepsilon_1 \in (x_{i-1}, x_i)$

$$(4) \quad y_{i+1} = y(x_i + h) = y_i + y'_i h + y'' \frac{h^2}{2} + y'''_i \frac{h^3}{6} + y^{IV}(\varepsilon_1) \frac{h^4}{24}$$

$\varepsilon_1 \in (x_i, x_i + 1)$

Выразим вначале y'_i из (3), затем из (4), разделив предварительно на h и оставляя слагаемое с 1 степенью шага h, получим:

$$\bar{y}'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h) = \frac{\Delta \bar{y}_i}{h} + O(h) \quad (5)$$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h) = \frac{\Delta y_i}{h} + O(h) \quad (6)$$

Вычтем из (4) выр. (3), разделим получен. соот. на 2h получим след. значение производ. 1-го порядка в т. x_i

$$\mathring{y}'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) = \frac{\Delta \mathring{y}_i}{2h} + O(h^2) \quad (7)$$

где $\Delta \mathring{y}_i = y_{i+1} - y_{i-1}$ - центр. разность 1-го порядка
Выражение (5) опред. производную 1-го порядка в узле x_i с помощью отнош. конечных разностей слева
Выр. (6) определяет произв-ю 1-го порядка в узле x_i с помощью отнош. конечных разност. справа
Выр. (7) опред. производную 1-го порядка в узле x_i с помощью отношения центр. разностей

Вычисление первой произв-й в середине инт-а по 4 узлам сетки:

$$f'(x_1+1,5h) = (-y_4 + 27y_3 - 27y_2 + y_1)(24h) + O(h^4) \quad (9)$$

а второй произв-й в центре по 5 узлам:

$$f''(x_3) = (-y_5 + 16y_4 - 30y_3 + 16y_2 - y_1)/(12h^2) + O(h^4) \quad (10)$$

~~Ант~~ Миним. кол-во узлов, необх-мо для вычисл. конеч-ных разностей какого-либо порядка, должно быть на ед. больше этого порядка

При числ. диф-и отсут. устойчивость решения

Метод Рунге-К. уточнения формул ч.д.
Из (5)-(7) видно, что метод p-го порядка ч.д. обладает с показателем степени шага h в главном члене погрешности и имеет вид

$$f'(x) = \varphi'_h(x) + h^p \cdot \psi(x) + O(h^{p+1}) + O(h^{p+2}) + \dots, \quad (11)$$

где $f'(x) \approx \varphi'_h(x)$
а остаточный член имеет вид

$$R_p = h^p \psi(x) + O(h^{p+1}) + O(h^{p+2}) + \dots$$

С целью повышения на ед. порядка точности метода продиф-м численно методом p-го порядка ф-цию $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$, с шагом h, получим выражение (11)

Затем продиф. численно ф-цию тем же методом p-го порядка, с шагом kh, ($k = 1/2; 1/4; 1/16; \ldots$), получим $f'(x) = \varphi'_{kh}(x) + (kh)^p \psi(x) + O(h^{p+1})$ (12)

Вычитая из (12) выр-е (11) и определяя из полученного равенства $\psi(x)$, находим

$$h^p \psi(x) = \frac{\varphi'_h(x) - \varphi'_{kh}(x)}{k^p - 1} + O(h^{p+1}) \quad (13)$$

(13) можно использ. для оценки погреш-ти ч.д.
Подставим (13) в (12), получаем окончательно

$$f'(x) = \varphi'_{kh}(x) + k^p \frac{\varphi'_h - \varphi'_{kh}(x)}{k^p - 1} + O(h^{p+1}) \quad (14)$$

Из (14) видно, что это уже метод порядка $p+1$, т.е. на порядок точнее.
Метод Рунге обобщается на случай произвольного количества сеток q. В этом случае соотв. образом модифиц. схему расчётов, можно повысить точность аппроксимации до уровня $O(h^{p+q-1})$. Такая схема расчётов наз-ся схемой Ромберга.

Более общий подход для получения выражений остаточных членов интерпол-х формул и.д. состоит в диф-и остаточного члена интерпол-го ф-лы Лагранжа:

$$R_n(x) := f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x)$$

Для оценивания точности расчётов ч.д. можно воспользоваться простейшими связями м/д производными и конечными или раз-ми разностями, принимая за $\max|f^{(m+1)}(x)|$ величину $\max\{|\Delta^{n+1} y_i|\}/h^{n+1}$ для равноотстающих узлов или $\max\{|(n+1)!\, f(x_0, \ldots x_{m+1})|\}$