Неруссков Дмитрий КС-26 Лекция 8

Аппроксимация экспериментальных данных

Задача аппроксимации зак-ся в отыскании аналит зависимостей $y=f(x)$ полученной табл. фун. Сущ-т 2 способа аппроксимации опытн. данных

1) Интерполяция требует, чтобы аппроксимирующая кривая $\varphi(x)$, аналитический вид которой необходимо найти, проходила через все узловые точки таблицы. Эту зав. можно реш. инт. мн-ч.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

Недостатки: удв. точность только на 7-8 табл. точках. Погрешности при измерении эксп. данных.

2) Сглаживание опытн. данных (аппроксимация). Сущность этого метода состоит в том, что табл. данные аппроксимируются кривой $\varphi(x)$, которая не обязательно должна пройти через все узловые точки, а должна как бы сгладить все случайные помехи табл. фун.

Сглаживание опытных данных методом наим. квадратов

В этом методе при сглаживании опытных данных аппр. кривую $\varphi(x)$ стремятся провести так, чтобы её отклонения ε_i от табл. данных ко всем узловым т. были мин-но; т.е.:

$$\varepsilon_i = |\varphi(x_i) - y_i| \to \min$$

Избавимся от знака отклонения: $Q = \varepsilon_i^2 = (\varphi(x_i) - y_i)^2 \to \min$

Суть МНК: отыскать аналит. зав. $\varphi(x)$, сумма кв-в уклонений которой от табл. данных во всех узловых точках была бы мин, т.к.

$$Q = \sum_{i=0}^{n} p_i(\varphi(x_i) - y(x_i))^2 = \min \quad (3),$$ где p_i — весовые коэфф-ы

Вес. p для i-ой точки придают смысл точности измерения данного значения: чем больше p, тем больше аппр. кривая притяг. к данной т.

default set up for $p = 1$

Если известна эксп. (исходная) погрешность, то $\sqrt{Q} \approx \varepsilon$

Аппроксимация каноническим полиномом

Выберем базисные фун. в виде послед. степ. аргум. x:

$\varphi_0(x) = x^0 = 1$; $\varphi_1(x) = x_1$; $\varphi_m(x) = x^n$, $m < n$

Т.е. иском. ф-ция $\varphi(x)$ будет из класса алгеб. многочленов степ. m: $\varphi(x) = P_m(x) = a_0 x^0 + ... + a_m x^m$

Аппроксимирующий многочлен не проходит через все узловые точки табл. Поэтому его степ. m не зависит от их числа:

$$1 < m < N-2$$

При $m=0$ мн-н принимает вид: $\varphi(x) = P_0(x) = a_0$

Для нахожд. неизв. коэф. a_0 имеем ур-е: $a_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i$

Если $m=1$, то мн. аппр. табл. фун. прямой линией. Это наз-ся мн. регрессией

Аппр. полином принимает вид: $\varphi(x) = P_1(x) = a + bx$

Знач. коэф. a и b можно получить по фор-м:

$a = \bar{y} - b\bar{x}$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^2}; \quad \bar{x} = \sum_{i=0}^{n}\frac{x_i}{n}; \quad \bar{y} = \sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{n}$$

Если используется многочл. второй степени $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, то норм. сист. ур-й принимает вид:

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_1 + a_2x_2^2 - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_1 + a_2x_2^2 - y_i)x_i = 0$$

Такая задача называется параболической аппр.

$$\frac{\partial R}{\partial a_2} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_1 + a_2x_2^2 - y_i)x_i^2 = 0$$

Кубическая аппроксимация

Если $m=3$, то мы аппр-м табл. ф. кубическим полин., общий случай:

$P_m(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$ или $P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_jx^j$

$S = \sum_{i=0}^{n}(a_0x_i^0 + a_1x_i^1 + \ldots + a_mx_i^m) \to \min$

где x_i и y_i — координаты узл. точек табл.

$a_j = \overline{1,m}$ — неизвестные коэф. многочлена

Необходимым усл. сущ-я мин. ф-ции S явл. равенство нулю её первых част. произв. по каждой a_j

$$\begin{cases} \dfrac{\delta S}{\delta a_0} \to 2\sum_{i=0}^{m}((a_0x_i^0 + \ldots + a_mx_i^m - y_i)x_i^0) = 0 \\ \dfrac{\delta S}{\delta a_m} \to 2\sum_{i=0}^{m}((a_0x_i^0 + \ldots + a_mx_i^m - y_i)x_i^m) = 0 \end{cases}$$

Раскрывая скобки и перенося св. члены получим

$$\begin{cases} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_m a_m = d_0 \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \ldots + c_{m+1} a_m = d_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ c_m a_0 + c_{m+1} a_1 + \ldots + c_{2m} a_m = d_m \end{cases}$$

где a_j - неизв. СЛАУ

$c_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k$, $k = \overline{0,2m}$ - коэф.

$d_j = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k$, $j = \overline{0,m}$ - св. члены

Алгоритм решения задачи аппроксимации:

1) Строим сист. мн. ур-е. Определяем коэф. c_k и своб. членов d_k. Т.к. сист. симм-на относ. гл. диаг, то опред. только недиаг. элем

2) Решаем СЛАУ методом Гаусса. Находим коэф. a, аппр. мн-на

3) Строим аппр. мн-н и опред. его значение в каждой узловой точке $P_i = P_m(x_i)$

4) Находим отклонение каждой узл. точки $\varepsilon_i = P_i - y_i$

5) Находим сумму кв-в отклонений по всем узловым точкам $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$

6) Нах-м ост. дисперсию $D = \frac{S}{n-(m+1)}$

Ортогональн

Св-во ортог

$[x_0; x_n]$, н

скалярное

$\int_{x_0}^{x_n} p(x)\varphi_i(x)\varphi$

Для таких

равенства:

$\int_a^b Q_i(x)\, Q_j(x$

Если кроме

То говорят,

ортогональ

Ортогональность полиномов

Св-во ортогональности закл. в том, что отрезок $[x_0; x_n]$, на котором обращаются в нуль скалярные произв. полиномов разного порядка

$\int_{x_0}^{x_n} p(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)\,dx = 0$; $j \neq k$, p - некоторая вес-я ф-ция

Для таких многочленов $Q_i(x)$ справедливы равенства:

$\int_a^b Q_i(x)\, Q_j(x)\,dx = 0$, для $i \neq j$

Если кроме того $\int_a^b Q_i^2(x)\,dx = 1$, $(i=\overline{0,n})$

То говорят, что мн-ны $Q_i(x)$ образуют ортогональную систему.