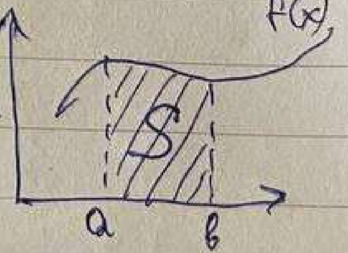
Неруссков Дмитрий группа: КС-26
Лекция 10
Численное интегрирование функций

Методы приближ. интегрир. используют разложение подынтегр. ф-ций в ряды Тейлора (Маклорена) и дальнейшего почленного интегрирования членов ряда.

$F(x)$ наз-ся первообразной для $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка выполн. равенство $F'(x) = f(x)$
Интегрирование – нахожд. первообразной

В м. численного инт-я подынтегральная ф-ция удовлетв. только усл. непрерывности
В числ. инт. не использ. нахожд-е первообр. Основу алгоритма числ. инт. состав. геометрический смысл определённого интеграла
Суть – приближ. вычисл. площади
При вычисл. интеграла подынтегр. ф-ция $f(x)$ аппроксим. интерпол. многочленом



$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$, т.е. $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + R$, где

$R = \int_a^b r(x)dx$ – априорная погреш. метода или остат. член. на инт. интегр-я, а $r(x)$ – априорная погреш-ть м. на отдельном шаге интегр-я.

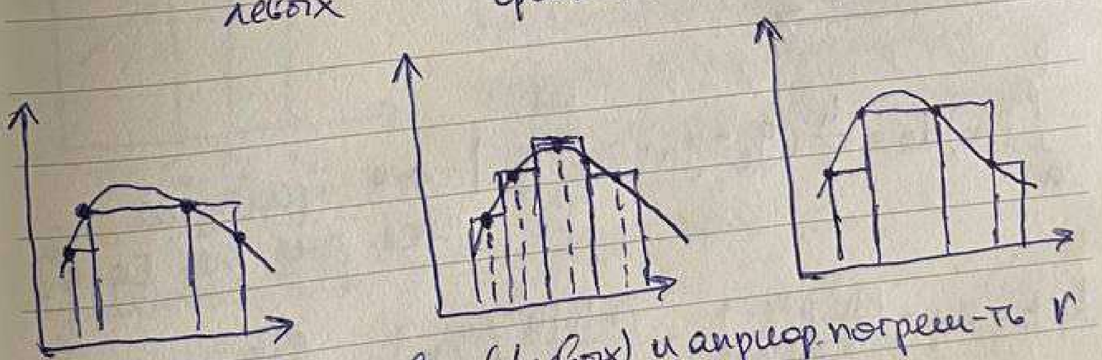
Обзор методов интегрирования

М. вычисл. однократных интегр-в наз-т квадра-турными, для кратных – кубатурные

1. Методы Ньютона-Котеса (м. прямоуг., трап., Симп.)
2. М. статических испытаний (м. Монте-Карло)
3. Сплайновые методы
4. М. наивысшей алгебраич. точности (м. Гаусса-К)

Методы прямоугольников

левых — средних — правых



$f(x_i)h + r_i$ – ф-ция правых (/левых) и априор. погреш-ть r

В случае равного шага h общая ф-а:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} r_i$$

На $[a;b]$ погреш. r_i необх. просумм. n раз,

$$n = \left(\frac{b-a}{h}\right) = R\frac{n \cdot h^2}{2} f(x_i)$$

Ср. прямоуг-к

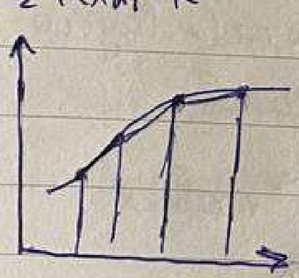
$\bar{x} = x_i + \frac{h}{2}$, т.е. $\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = hf(\bar{x}) + r_i$

$$r = \frac{h^3}{24} f''(\bar{x}) \; ; \; R = \frac{h^2}{24}\int_a^b f''(x)dx$$

М. Трапеций

Аппроксим. осуществ. полиномом первой степени

При $(n = const)$ $\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{1}{2}f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) + \frac{1}{2}f(x_n) + R$



$$r_i = \frac{h^3}{12} f''(x_i)$$

$$R = -\frac{h}{12}\int_a^b f''(x)dx$$

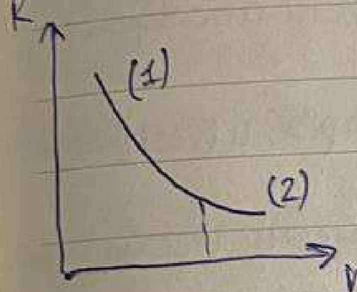
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$ – ф-а трапеций числ. инт. для $[a;b]$

$$R\text{-}p = nr_i - \frac{nh^3}{12} f''(x_i) = -\frac{(nh)h^2}{12} f''(x_i) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(x_i),$$

$x \in (a, b)$

Т.о. м.т. - м. второго пор. точности относит. шага h

Особенности поведения погреш.



R - погреш-ть, n - число разб.

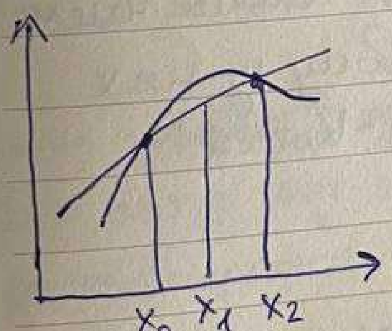
(1): погреш. уменьш. в связи с уменьш. шага h

(2): Начинает доминир. вычисл. ошибка, появл. в рез-те многочисл-х арифм. действий

Метод Симпсона

ф-ция $f(x)$ замен. интерпол. полином. 2-й степени $P(x)$ - параболой

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 f_2) + r \quad (6)$$



На $[a;b]$ выражен. (6) необходимо сложить m раз, поскольку имеется m пар отрезков длиной h, получ.:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}$$

$r_i = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(x_i)$ - погреш. ф-лы Симпсона

$R = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{IV}(x)$ - пар. на [a;b]

Процедура Рунге оценки погрешн.

$\Psi\left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{I^{h/2} - I_h}{2^p - 1}$ позволяет провести апостериорн. оценку погреш-ти вычисл. значен. опред. интеграла

$I = I^{h/2} + \frac{I^{h/2} - I_h}{2^p - 1} + O(h^{p+1})$ - простейш. процедура Рунге уточнения на 1 порядок ф-ы числ. интегр.

Использование полиномов высших степеней в квадратур. ф-ах Ньютона-Котеса сопряжено со значит. вычислит. трудностями. Поэтому разбивают промежуток интегрир. на достат. большое число маленьких отрезков и к каждому из них применяется квадр. ф-у Ньютона-Котеса

Метод Монте-Карло

1) одномерная случайн. величина - статист. вариант м. прямоуг.

В качестве текущ. узла x_i берётся случайн. число, равномерно распред. на интервале интегрир. [a;b]

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) + R$$

2) Двумерн. случ. величина – оценка площадей

Рассмотр. равном. распред. случ. величины x_i и y_i, кот-е можно рассмотр. как координаты точки в двумерн. простр.

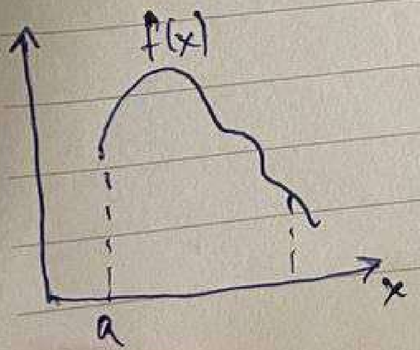
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{S}{N},$$ S - кол-во точек

Приближ. вычисл. несобств. интегр.

Несобств. наз-я интегралы, у кот-х 1 или оба предела интегрир. бесконечны

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Если пределы в правых ~~точках~~ частях равенств. $\exists$, то инт-л наз-я сходящимися, в против. случае расходящимися.



Геометр. для неопр. показат. функц ~~...~~ несобств. инт. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ предст. собой площадь криволин. трапеции

В основе прибл. вычисл.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

В случ. сходящ. интегралов:
а) нахожд. пределов интегралов $[a;b]$ при кот-х значения первого и третьего инт-в несущест.
б) приближ. расчёт второго инт-а в найден. пределах $[a;b]$ $\forall$ из рассмотрен. выше методов

Численное интегрир. в MATLAB
simplify() и factor() - упрощен. подынт. ф.
cimtrapz(y)
cumtrapz(x,y)
integral (fun, xmin, xmax)
integral2 (fun, xmin, xmax, ymin, ymax)
g = quad(fun, a, b)
g = quad2d(fun, a, b, c, c')
int(fun, var)