Мерусков Дмитрий КС-26
Лекция 7
Комп. моделирование при обработке опытных данных

Интерполяция - нах-е по ряду данных значений ф-ции её промеж. зн-й, т.е. ~~ф-ции~~ восполнение ~~её~~ значений ф-ции в промежутках между её точными зн-ями и приближёнными.

Аппроксимация - приближ. выражение каких-либо величин через другие более известные, более точные величины.

Интерполирование ф-ций
Дана табл. ф-ция: $y_i = f(x)$, $i=\overline{0,n}$
Точки с координатами $(x_i; y_i)$ наз-ся узловыми точками или узлами. Кол-во узлов в табл. ф-ции равно $N=n+1$

Длина участка $[x_0, x_n]$ на графике равна $(x_n - x_0)$

Задача состоит в том, чтобы найти значения y_k табл-й ф-ции в любой промеж-й точке x_k, расположенной внутри интервала $[x_0, x_k]$, т.е

$x_i < x_k < x_{i+1}$ и $x_k \in [x_0; x_n]$

Задача экстраполяции (ф-ции) состоит в том, чтобы найти зн-я y_i табл. ф-ции в точке x_i, которая не входит в интервал $[x_0, x_n]$, т.е.

$x_e < x_0; x_e > x_n$

Такую задачу наз-т задачей прогноза. Обе эти задачи решаются при пом. нах-я аналит. выр-я некоторой вспом. ф-ции $F(x)$, которая приближала бы заданную табл. ф-цию, т.е. в узловых точках принимала бы значение табл. ф-ций:

$F(x_i) = y_i,\ i = 0, n$

Искомую ф-цию $F(x)$ будем искать в виде канонического полинома степени n:

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \dots + a_n x^0$

Этот многочлен должен пройти через все узловые точки, т.е. $P_n(x_i) = y_i$

Многочлен, который проходит через все узловые точки табл. ф-ции, наз-ся интерполяционным многочленом

Итак, для постр. интерп. мн-на необх. определить его коэф-ты $a_0 - a_n$
Кол-во неизв. равно $n+1 = N$, где n - степень многочлена
Имеем:

$$a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + \dots a_{n-1} x_i + a_n = y_i$$

Подставляя в ур-е: $i = \overline{0, n}$

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_n = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_n = y_1 \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_n = y_n \end{cases}$$

Решая сис-му, найдем коэф. $a_0, \dots, a_n$
Получившаяся СЛАУ отн. свобод. параметров a_i имеет решение, если среди узлов x_i нет совпадающих. Её опр-ль:

$$W = \begin{vmatrix} x_0^n & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & \dots & x_1 & 1 \\ x_n^n & & x_n & 1 \end{vmatrix}$$ - опр-ль Вандермонда

ерез все узловые
полуционном

обх. определить

n-степень

$a_0, \dots, a_n$
параметров a_i
x_i нет

рмена

Если $\det(W) \neq 0$, то решение СЛАУ методом обр. матрицы: $a = W^{-1} y$

Полином Лагранжа:

$$L_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)} \cdot y_0 + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n$$

$L_n(x_i) = y_i$

Если $x = x_0$, то $L_n(x_0) = y_0$, если $x = x_1$, то $L_n(x_1) = y_1$, ..., если $x = x_n$, то $L_n(x_n) = y_n$, т.е. $L_n(x_n) \approx y_k$

Свернём формулу:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} B_j y_j; \text{ где } B_j = \prod_{i=0}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \ i \neq j$$

Конечные разности:

Будем считать, что интерп. ф-ция $y = f(x)$ задана своими нач. зн-ями y_0, y_1, y_n на сист. равноот. узлов $x_0, \dots, x_n$, т.е. $x_i = x_0 + i \cdot h$, где $i = 0, \dots, n$, а $h > 0$ — шаг сетки

Вычитая из каждого последующего члена конечной пос-ти n-й член $y_0, ..., y_n$ предыду-щий, образуем n конеч. разностей 1-го пор-ка

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, ..., $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$ или проще, n первых разностей данной ф-ции.
Далее получаем вторые разности.

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

В итоге: $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

Связь между конеч. разностями и производными:

$$\lim_{h \to 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = f'(x_i),$$ то

можно сказать $\Delta y_i \approx f'(x_i) \cdot h$, т.е. $\Delta^k y_i \approx f^k(x_i) h^k$

Св-ва конеч. разностей:

1) Конечн. разности постоянной равны нулю
2) Пост. множ. у ф-ции можно выносить за знак конеч. разности
3) Конеч. разность от суммы равна сумме конеч. разностей в той же точке.

Общую таблицу наз-т таблицей конеч. раз-й.

Полином Ньютона:

$$N_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)\cdot f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1)\cdot f(x_0,x_1,x_2) + (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot f(x_0,x_1,x_2,x_3) + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\cdot f(x_0,x_1,\dots,x_n),$$

где n – степень многочлена

$f(x_0) \dots f(x_0,\dots,x_n)$ – разделённые разности

$$f(x_0,x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$ – разд. разности

$$f(x_i,x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

$$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1},x_{i+2})-f(x_i,x_{i+1})}{x_{i+2}-x_i}$$

Преимущества: в многочлене Ньютона при изменении кол-ва узловых точек N и степени мн-на n требуется добавить или отбросить соотв. число стандартных слагаемых в формуле

Погрешность полиномиальной интерполяции

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \le \frac{\max|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = (x-x_0)(x-x_1)\cdot(x-x_n)$$

Основной недостаток: неустранимое колебания

Соотношения между р.разн. и произв.:

$$f^{(n)}(x) \sim n!\, f_{01-n}$$

Соотн. между к.разн. и произв:

$$f^{n}(x) \sim \Delta^{n} \cdot y_i / h$$

f(x) интерп. на [a, b]

Метод решения этой задачи с помощью единого многочлена для всего отрезка наз-ют глобальн. полином интерпол.

На практике чаще исп. кусочно-полин. интерп.: исх. отрезок разбивается на части и на каждом участке нах-т полином невыс. степени.

Интерп. сплайнами:

$$q_i(x) = k_{1i} + k_{2i}x + k_{3i}x^2 + k_{4i}x^3, \quad i = \overline{1,n}$$

$q_i(x_i) = $ …

$q_i(x_i) = $ …

Ур-я сво…

$q_1^a = 0,$ …

Дефект с…

сплайна…

отрезке […

Реализаци…

y_i = inter…

method:

- cubic –
- spline –
- pchip
- 'neare…

vander(x…

interp2(…

interp3(…

polyfit(x, …

аппрокс…

n-степе…

$q_i(x_i) = y_i$, $i = \overline{1,n}$

$q_i(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n-1}$

Ур-я своб. концов сплайна:

$q_1'' = 0, \ldots, q_n''(x_n) = 0$

Дефект сплайна – разность между степенью сплайна и наивысшим порядком непр. на отрезке [a, b] производн.

Реализация в Matlab:

yi = interp1(x, y, xi, method)

method:

- cubic – куб. полиномом
- spline – куб. сплайном
- pchip – куб. эрм. сплайном
- 'nearest' – интерп. по сосед. точкам

vander(x) – строит матр. Вандермонда

interp2(x, y, z, xi, yi, method)

interp3(x, y, z, v, xi, yi, zi)

polyfit(x, y, n) – находит коэф-ты полинома аппрокс ф-цию, заданную векторами x и y, n – степень полинома.