Неруханов Дмитрий КС-26 Лекция №2

Источники погрешности результата вычислений:

- мат. модель
- исходные данные
- приближённый метод
- округления при вычислениях

Погрешность при численном решении задач делятся на две категории – неустранимые и устранимые

Анализ погрешностей приближ. вычислений:

- <u>Погрешность задачи</u> – прибл. характер мат. описания поведения реального процесса вследствие неучёта или неправ. учёта сущ. факторов, влияющих на рез-тат решения задачи
- <u>Погрешности исходных данных</u> – точность изм-й экспр. данных
- <u>Обусловленность задачи</u> – чувствительность её к малым изм-м вх-х парам-в.
- <u>Погрешности методов решения задач</u> – эффектив-ность и надёжность метода
- <u>Погрешности алг.-на реал-ции числ. метода</u> решения задачи – сходимость к прав. решению после разумн. кол-ва выч-й, влияющих на их суммарную погрешность

Учёт погрешностей арифм. операций

- Приближ. числом a наз-ся число, незначительно отлич. от точного A и заменяющее его в вычисл-ях.
- Ошибка или погрешность Δa прибл. числа a — разность между точным и прибл. зн-ями, $\Delta a = A - a$
- Абс. погрешность Δ прибл. числа a: $\Delta = |\Delta a|$
- Относ. погреш. δ прибл. числа a, $\delta = \Delta / |A|$
- Предельная абс. погреш. прибл. числа a — всякое число Δ_a, не меньшее абс. погреш. этого числа: $\Delta = |A - a| \le \Delta_a$
- Предельная относительная погрешность прибл. числа a — всякое число δ_a, не меньшее относ. погрешности этого числа: $\delta \le \delta_a$

Числа Δa и δ_a называют оценками или границами абс-й и относ-й погрешности.

Значащими цифрами числа в его позиционной записи наз-ся все его цифры, начиная с первой ненулевой слева.

Значащую цифру числа a называют верной, если абс. погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Прямая задача теории погрешностей

Основная задача теории погрешностей состоит в том, чтобы определить по известным погрешностям параметров погреш. ф-ции от этих параметров

При грубом оценивании погреш. рез-та вычисления значения дифф. ф-ции $u=f(x_1,\dots,x_n)$ с приближ. арг-ми $x_1,\dots,x_n$ будем считать, что известны границы абс. погреш-й аргументов $\Delta x_1,\dots,\Delta x_n$ соответственно

В этом случае точные значения аргументов $x_1^*,\dots,x_n^*$ лежат соотв. на отрезках:

$$[x_1-\Delta x_1, x_1+\Delta x_1],\dots,[x_n-\Delta x_n, x_n+\Delta x_n]$$

При этом абс. погреш. рез-та $u=f(x_1,\dots,x_n)$ равна

$$\Delta u = |f(x_1,\dots,x_n) - f(x_1^*,\dots,x_n^*)|$$

и представляет собой модуль полного приращения ф-ции

$$\Delta u \approx |du| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |x_i - x_i^*| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$$

Граница абс. погрешности: $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$ (1.1)

Граница относ. погр.:

$$\delta = \frac{\Delta u}{|u|} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \frac{\Delta x_i}{|u|} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{u\,\partial x_i}\right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln|u|}{\partial x_i}\right| \Delta x_i \quad (1.2)$$

Оценка погрешностей арифм. действий проводится с применением формул (1.1) и (1.2)

• Сложение (вычитание)

$u = x_1 + \dots + x_n \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| = 1$ и абс. погреш. операции слож-я (выч-я) по формуле (1.1) будет равна

$$\Delta_{\Sigma(\pm x_i)} = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i}$$

При оценке относ. погреш. суммы положительных прибл. чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, имеющих границы относительных погрешностей $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$, соотв., будет справедливо:

$$\delta(x_1 + \dots + x_n) = \frac{\Delta(x_1 + \dots + x_n)}{x_1 + \dots + x_n} \le \frac{\Delta x_1 + \dots x_n}{x_1 + \dots + x_n} = \frac{\Delta_{x_1} + \dots + \Delta_{x_n}}{x_1 + \dots + x_n} =$$

$$= \frac{x_1 \delta_{x_1} + \dots + x_n \delta_{x_n}}{x_1 + \dots + x_n} \le \frac{x_1 \delta^* + \dots + x_n \delta^*}{x_1 + \dots + x_n} \le \delta^*,$$

где $\delta^* = \max \delta_{x_i} \ (1 \le i \le n)$

В рез-те можно сделать вывод, что относ. погр. суммы полож. чисел не превосходит макс. относ. погр.-ти слагаемых

Для оценки относ. погр. разности будет справедливо

$$\delta_{x_1-x_2} = \frac{\Delta_{x_1-x_2}}{|x_1-x_2|} \le \frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{|x_1-x_2|}$$

Что указывает на возможность сильного возрастания погрешности при $x_1-x_2 \to 0$

В этом случае принято говорить о потере точности при вычитании близких чисел.

Умножение (деление)

В соот. с формулой (1.2) при умножении полож. ~~чисел~~ сомножителей $u = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ будет спр-во

$\ln u = \ln x_1 + \ldots + \ln x_n$ $\quad \frac{\partial \ln u}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i}$

$$\delta_{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i$$

При делении двух чисел $u = \frac{x_1}{x_2}$, где $x_1, x_2 > 0$

$$\ln u = \ln x_1 - \ln x_2 \quad \left|\frac{\partial \ln u}{\partial x_i}\right| = \frac{1}{x_i}$$

$$\delta_{x_1/x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} = \delta x_1 + \delta x_2$$

Таким образом, при умнож. и делении прибл. чисел предельная отн. погр. рез-та равна сумме предельных отн. погр-й сомножителей

В отличие от прямой задачи оценивания погр-й рез-та вычисления значения ф-ции при заданных оценках погр-й аргументов обратная задача закл-ся в оценивании величин Δx_i по Δu

Для случая диф-емой ф-ции одной переменной грубое решение обр. задачи тривиально: если

$$y = f(x), \text{ то } \Delta y = |dy| = |f'(x)|\Delta x,$$

откуда $\Delta x = \dfrac{\Delta y}{|f'(x)|}$

Принцип равных влияний:

диф-лы $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Delta x_i$ в (1.1) одинаково влияют на погрешность значения ф-ции

В соответствии с (1.2) $\Delta u = n\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Delta x_i$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x_i = \frac{\Delta u}{n\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|}$$

Технический подход к учёту погрешностей арифм действий:

Согласно принципу А.Н. Крылова, приближенное число должно записываться так, чтобы в нём все значащие цифры кроме последней были верными и лишь последняя была бы сомнительна, и при том в среднем не более, чем на единицу.

Чтобы рез-тат арифм действий над приближенными числами, записанными таким образом, также соотв. этому принципу, нужно придерж-ся след. правила:

1) При слож. и выч. прибл. чисел в рез-те следует сохр. столько десят-х знаков, сколько их в прибл. данном с наим. кол-вом десят-х знаков

2) При умнож. и делении в рез-те следует сохр-ть столько знач-х цифр, сколько их имеет прибл. данное с наим. кол-вом значащих цифр.

3) Рез-ты промежут. выч-й должны иметь один-два запасных знака

Оценка погрешн. комп-ой арифметики

Основу памяти комп-ра сост. базисные элем-ты, имеющие r устойчивых сост-й (2, 8, 16 и т.п.).

Каждому числу ставится в соотв. опред-ое кол-во k базисных элем-ов

Упорядоченные базисные элем-ты образуют разрядную сетку машинного слова – в каждом разряде записано одно из базис-чисел $0, 1, 2, \dots, r-1$ и в спец. разряде – знак числа

При записи числа с фикс. запятой кроме r пар-в осн. сис-мы счисления и k разрядов числа указ-ся ещё кол-во l разрядов под запись дробной части числа.

Таким образом, полож. вещ-ое число a может представлять собой в r-ичной системе счисления дробь и отображается следующей конечной пос-ю:

$$a_1 a_2 \dots a_{k-l} a_{k-l+1} \dots a_{k-1} a_k,$$

где $a_i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$

$$\Downarrow$$

$$a \approx fix(a) = a_1 r^{k-l-1} + a_2 r^{k-l-2} + \dots + a_{k-l} r^0 + a_{k-l+1} r^{-1} + \dots + a_{k-1} r^{-(l-1)} + a_k r^{-l}$$

Абс.погр. представления вещ-х чисел с фикс. запятой одинакова в любой части диапазона, в то время, как относ.погр.

$$\left|\frac{a-fix(a)}{a}\right| \text{ или } \left|\frac{a-fix(a)}{fix(a)}\right|$$

может знач-но различаться в зависимости от того, берется a близким к 0 или к границе диапазона

Экспотенциальная форма числа: $a = \pm M \cdot r^p$,

где r - основание системы счисления;

p - порядок;

M - мантисса числа ($r^{-1} \le M \le 1 \ (=r^0)$)

$a = fl(a) = \pm(\beta_1 r^{-1} + \beta_2 r^{-2} + \dots + \beta_l r^{-l}) r^{\gamma}$, где

γ - целое число из промежутка

$[-r^m, r^m - 1]$ $\beta_1 \in [1; \dots; r-1]$ $\beta_i \in [0, 1; r-1]$

$(i = 2, \dots, l)$

Числа $\pm r^{r^m}$ определяют границы допустимого числ-го диапазона, при этом диапазон пред-я полож вещ чисел составляет промежуток $[r^{-r^m}, r^{r^m - 1}]$

машинный нуль машинная бесконечность

ε - машинный эпсилон (macheps) - определяется как расс-е между единицей и ближ следующим за ней числом системы машинных чисел с плавающей запятой

ε служит мерой отн. погр. пред-я вещ-х чисел, причём эта точность одинакова в любой части числового диапазона и зависит лишь от числа r-ичных разрядов, отводимых под мантиссу числа. В то же время оценка абс. погрешности

$$|a - fl(a)| \le |a| \cdot r^{(1-t)}$$

показ-т, что расс-е между вещ. числами и ком-ми прибл-ми к ним в системе с плавающей запятой не одинаковы в разных частях числового диапазона.

Величина ε служит оценкой отн. точности пред-я вещ числа a при усл., что $|a| > r^{-r^m}$

Если $a \in [-r^{-r^m}, r^{-r^m}]$, то $fl(a)=0$

$$\Downarrow$$

$$\text{отн. погр. } \left|\frac{a - fl(a)}{a}\right| = 1$$

Возникновение возможных больших случайных погрешностей обусловлено следующими прич.:

- методом округления, принятом в комп-ре
- потерями значащих разрядов в при вычитании
- потерей разрядов при превышении допустимой разрядности представления чисел

Устойчивость числ. метода - несущ. отклонение получаемых приближенных рез-в от точного решения.

Основной задачей при реализации числ. методов для решения задач комп. моделирования явл-ся обеспечение их устойчивости, т.е. минимизации всевозможных погрешностей.