Неруссков Дмитрий КС-26 Лекция 6

Решение систем нелинейных ур-й

Перед решением СНАУ необходимо убедиться, существует ли решение и кол-во корней, а так же выбрать нач-е приближение.

- В случае сист. двух ур-й с двумя неизвестными, это можно сделать, построив графики ф-ций
- В случае сложных фун. можно посмотреть на поведение полиномов, аппроксимирующих их.
- В случае трёх и более неизвестных, а также комплексных корней, хороших способов ~~нач.~~ подбора нач. приближений — нет.

Область, в которой нач. прибл. x^0 сходится к искомому реш., наз-ся областью сходимости b.

Метод простых итераций

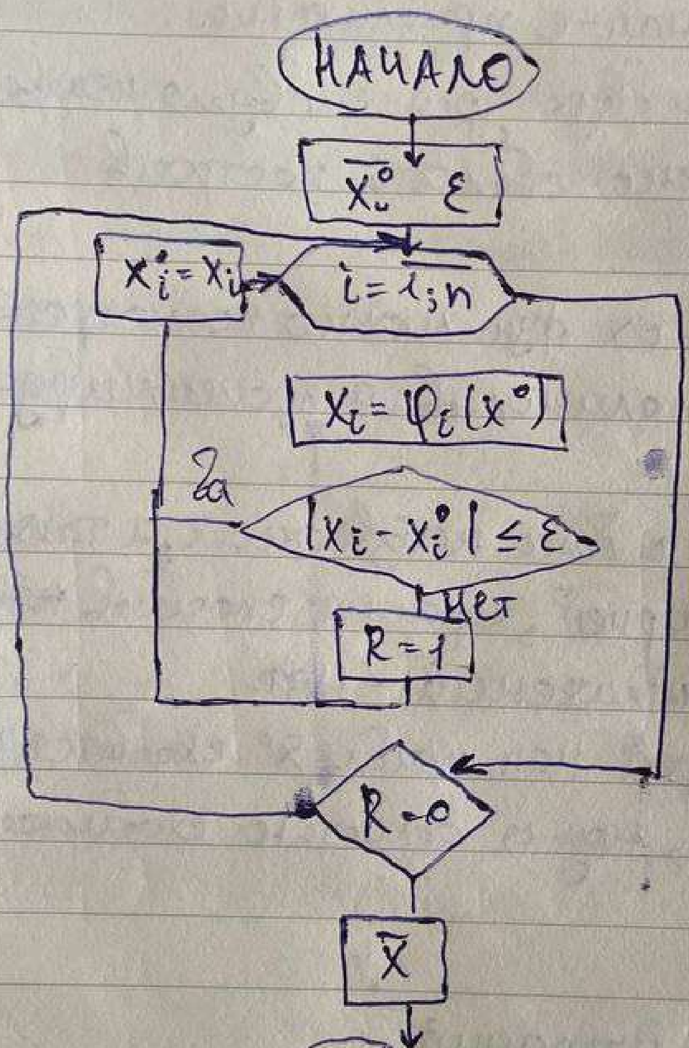
Искомая сист. должна быть преобразована к вид:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \qquad x_i^k = {}_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_n^{k-1})$$

Или $x_i^k = \varphi_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_n^{k-1})$; $i = \overline{1;n}$

Усл-е прекращения выч-й: $|x_i^k - x_i^{k-1}| \le \varepsilon$; $i = \overline{1;n}$

Усл-е сх-ти: $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right) < 1$; $i = \overline{1;n}$



$\overline{1;n}$

Метод Ньютона

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{или} \quad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0;\ i = \overline{1;n} \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$\vec{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ с точностью ε

Метод Ньютона обеспеч. более быструю сход. по сравн. с итер-м.

В основе метода лежит идея минимизации всех НУ сист.

Сообщим всей сист. малые приращ. h; и разл каждое ур-е в ряд Тейлора

$$\begin{cases} f_1(x_1+h_1; x_2+h_2; \ldots; x_n+h_n) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + h_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + R_1, \\ \ldots \\ f_n(x_1+h_1; x_2+h_2; \ldots; x_n+h_n) = f_n(x_1, x_2, x_n) + h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \\ + \ldots + h_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{cases}$$

$$h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + h_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + R_1 =$$

$$= -f_n(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

$$h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots h_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + R_n = -f_n(x_1; x_2; x_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$ - мат. коэф. сист.

$$B = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \ldots \\ -f_n \end{bmatrix}$$ - вектор своб. чл-в

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \ldots \\ h_n \end{bmatrix}$$ - вект. неизв. сист.

усл. окон $|n_i| \leq \varepsilon$

Матр. А составлена из частных произв.

$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}$; $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$ - мат. Якоби

Условия вып. М. Ньютона

1) ∃ частных произв-х 1-го пор. входящ. в мат. Якоби

2) Мат. Якоби для каждой итер. должна быть невырождена

$$\det\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right] \neq 0$$

Метод Зейделя

М. Зейделя имеет аналогичное с МПИ усл. сх-ти

Алгоритм:

$$x_1^{k+1} = \varphi_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$

$$x_2^{k+1} = \varphi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^k)$$

$$x_n^{k+1} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}, x_n^k)$$

Усл. сх-ти:

$$\|J(x^k)\| < 1, \quad J(x^k) = \left[\frac{\partial \varphi_i(x_i^k)}{\partial x_j}\right], \quad i, j = \overline{1,n}$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon$$

Методы контроля сх-ти

1) Норма (Евклидова) вектора

$$\sqrt{F_{i1}^2 + F_{i2}^2 + \ldots + F_{in}^2} \leq \varepsilon$$

2) Евклидова норма вектора отн. отклон. пер-х

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta x_n}{x_n}\right)^2} \leq \varepsilon$$

3) Норма-максимум вектора относ. отклон.

$$\max\left|\frac{\Delta x_i}{x_i}\right| \leq \varepsilon$$

4) $|x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}$