Appunti di Meccanica Quantistica

Andrea Martinelli

November 20, 2018

Abstract

1 Concetti matematici

Partiamo da alcuni concetti matematici di base. Sia $A \in M_{m,n}[\mathbb{C}]$ una matrice a coefficienti complessi, ovvero $a_{m,n} \in \mathbb{C} \forall m, n$. Allora definiamo le seguenti:

1.1 Matrice aggiunta

Si definisce *Acroce* l'aggiunta di A la matrice che per elementi il trasposto e coniugato di A, ovvero:

$$\left(A\right)^{+}_{m,n} = \overline{\left(A\right)_{n,m}} \tag{1}$$

1.2 Matrice hermitiana

1.3 Prodotto scalare

Relazioni varie

Spettro reale

Base ortogonale

1.4 Matrice unitaria

Teoremi

1.5 Commutatore

Proprietà

Teoremi

2 Calcolare la probabilità

3 Autostati come base

Postulato di Von Neumann

4 Operatori associati a grandezze fisiche

5 Valori di aspettazione

Varianza

6 Teorema di indeterminazione: principio di indeterminazione di Heisemberg

Proprietà operatori q, p

7 Operatore Hamiltoniano nel commutatore

8 Oscillatore armonico quantistico

Supponiamo di essere nel caso di un oscillatore armonico, con $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ definito dai vettori (monodimensionali) (q, p). La sua hamiltoniana sarà:

$$H(q,p) = K(q,p) + V(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{2}$$

Sapendo che l'energia $E \geq 0$, ci chiediamo quale sia lo spettro degli autovalori dell'operatore hamiltoniano $\hat{H}$, ovvero l'insieme dei valori $E \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\hat{H}\left|E\right\rangle = E\left|E\right\rangle \tag{3}$$

Supponiamo ancora che lo stato $|E\rangle$ sia descritto da una base ortonormale. Quindi $\langle E|E\rangle = 1$. Osserviamo che:

$$\langle E|\,\hat{H}(q,p)\,|E\rangle = \langle E|\,\big(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\big)\,|E\rangle = \langle E|\,\frac{p^2}{2m}\,|E\rangle - \langle E|\,\frac{1}{2}m\omega^2 q^2\,|E\rangle \tag{4}$$

Osserviamo che:

$$\langle E|\,\hat{H}(q,p)\,|E\rangle = \langle E|\,\big(\hat{H}\,|E\rangle\,\big) = E\,\langle E|E\rangle = E \geq 0 \tag{5}$$

Ovvero l'energia E altro non è che il valore medio dell'operatore hamiltoniano.

Eguagliando la (4) e la (5) segue che:

$$\langle E| \frac{p^2}{2m} |E\rangle - \langle E| \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 |E\rangle \geq 0 \tag{6}$$

Per calcolare la seguente espressione dobbiamo calcolare q^2, p^2. Il caso degenere non può esistere, in quanto $E = 0$ implica che sia l'oscillatore sia fermo con velocità iniziale nulla. Da cui seguirebbe che:

$$\begin{cases} \langle E| \hat{p} |E\rangle = 0 \\ \langle E| \hat{q} |E\rangle = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Nel caso in cui $E \neq 0$, allora:

$$\begin{cases} \Delta q^2 = \overline{q^2} - \overline{q}^2 \\ \Delta p^2 = \overline{p^2} - \overline{p}^2 \end{cases} \tag{8}$$