

Appunti di Meccanica Quantistica

Andrea Martinelli

November 20, 2018

Abstract

1 Concetti matematici

Partiamo da alcuni concetti matematici di base. Sia $A \in M_{m,n}[\mathbb{C}]$ una matrice a coefficienti complessi, ovvero $a_{m,n} \in \mathbb{C} \forall m, n$. Allora definiamo le seguenti:

1.1 Matrice aggiunta

Si definisce *Acroce* l'aggiunta di A la matrice che per elementi il trasposto e coniugato di A , ovvero:

$$(A)_{m,n}^+ = \overline{(A)_{n,m}} \quad (1)$$

1.2 Matrice hermitiana

1.3 Prodotto scalare

Relazioni varie

Spettro reale

Base ortogonale

1.4 Matrice unitaria

Teoremi

1.5 Commutatore

Proprietà

Teoremi

2 Calcolare la probabilità

3 Autostati come base

Postulato di Von Neumann

4 Operatori associati a grandezze fisiche

5 Valori di aspettazione

Varianza

6 Teorema di indeterminazione: principio di indeterminazione di Heisenberg

Proprietà operatori q, p

7 Operatore Hamiltoniano nel commutatore

8 Oscillatore armonico quantistico

Supponiamo di essere nel caso di un oscillatore armonico, con $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ definito dai vettori (monodimensionali) (q, p) . La sua hamiltoniana sarà:

$$H(q, p) = K(q, p) + V(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (2)$$

Sapendo che l'energia $E \geq 0$, ci chiediamo quale sia lo spettro degli autovalori dell'operatore hamiltoniano \hat{H} , ovvero l'insieme dei valori $E \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\hat{H} |E\rangle = E |E\rangle \quad (3)$$

Supponiamo ancora che lo stato $|E\rangle$ sia descritto da una base ortonormale. Quindi $\langle E|E\rangle = 1$. Osserviamo che:

$$\langle E| \hat{H}(q, p) |E\rangle = \langle E| \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \right) |E\rangle = \langle E| \frac{p^2}{2m} |E\rangle - \langle E| \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 |E\rangle \quad (4)$$

Osserviamo che:

$$\langle E| \hat{H}(q, p) |E\rangle = \langle E| (\hat{H} |E\rangle) = E \langle E|E\rangle = E \geq 0 \quad (5)$$

Ovvero l'energia E altro non è che il valore medio dell'operatore hamiltoniano.

Eguagliando la (4) e la (5) segue che:

$$\langle E | \frac{p^2}{2m} | E \rangle - \langle E | \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 | E \rangle \geq 0 \quad (6)$$

Per calcolare la seguente espressione dobbiamo calcolare q^2, p^2 , in particolare:
{