# Appunti di Ottica 2017

Andrea Martinelli

July 22, 2017

**Abstract**

# 1 Equazioni di Maxwell

Ci interessa studiare come il campo elettromagnetico si propaga nel vuoto, la sua natura ondulatoria e varie proprietà. Partiamo dalle equazioni di Maxwell in assenza di carica $\rho = 0$ ed in assenza di correnti $\vec{J} = 0$. Le eq. di Maxwell assumono la forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Ricaviamoci l'equazioni delle onde applicando l'operatore rotore $\nabla \times = (\nabla \times)(x, y, z)$ alla terza e alla quarta:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) \tag{5}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \tag{6}$$

Dalla relazione vettoriale: $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$, sostituendo la prima e la seconda otteniamo l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \tag{7}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} \tag{8}$$

Dove la costante $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 m/s$ è la velocità di propagazione dell'onda, detta velocità della luce nel vuoto. Essa è valida per ogni componente di $\vec{E}$ e di $\vec{H}$. Si noti che gli operatori sono lineari da cui segue che se $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ sono soluzione delle onde la loro combinazione lineare è ancora soluzione, il principio di sovrapposizione.

## 1.1 Caso unidimensionale

Supponiamo di avere un campo $\vec{U}$, soluzione dell'equazione delle onde che si propaga lungo la direzione $\hat{z}$ in coordinate cartesiane. Ci chiediamo quale forma analitica abbia. Per ipotesi:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U(z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{U}(z, t) \tag{9}$$

L'equazione differenziale a derivate parziali è soddisfatta dalla seguente equazione:

$$U(z,t) = U_0 cos(Kz - \omega t) \tag{10}$$

Ci chiediamo quale relazioni devono sussistere affinché essa rappresenti una soluzione. Derivandola ed inserendola nelle eq. delle onde segue che:

$$K^2 U_0 cos(Kz - \omega t) = \frac{1}{c^2}\omega^2 U_0 cos(Kz - \omega t) \tag{11}$$

Dunque sussiste la relazione:

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \implies \boxed{K = \frac{\omega}{c}} \tag{12}$$

Dove $c$ è la velocità di propagazione dell'onda, $\omega$ la pulsazione $(T^{-1})$ e $\vec{K}$ vettore d'onda.

**Velocità di propagazione** Rappresentiamo la soluzione $U(z)$ nel piano $U(z) vs z$ ad un istante di tempo $t$ generico fissato. Essa assume una forma sinusoidale tipica di un moto armonico. Ci chiediamo a che velocità si muovono i punti in fase dell'onda all'istante $t + \Delta t$. Segue che, dato che il valore di $U(z)$ è il medesimo perché la variazione di $t + \Delta t$ trasla il profilo dell'onda lungo l'asse $z$, allora:

$$c = \frac{\Delta z}{\Delta t} \tag{13}$$

Dove $c$ è la velocità di propagazione di fase dell'onda. Sussistono le seguenti relazioni:

- $\boxed{K = \frac{\omega}{c}}$
- $\boxed{\lambda = cT}$ (Infatti: $\Delta z = c\Delta T$)
- $\boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda}}$ (Infatti: $K = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi\nu}{\frac{\lambda}{T}} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{2\pi}{\lambda}$)

## 1.2 Caso tridimensionale

Ci chiediamo nuovamente quale sia la soluzione analitica dell'equazione delle onde in coordinate cartesiane. L'equazione differenziale che deve soddisfare è la seguente:

$$\nabla^2 U(x,y,z,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x,y,z,t) \tag{14}$$

Quali condizioni soddisfano? Si scelga la base cartesiana $\beta = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{l}\}$. La soluzione assume la seguente forma analitica:

$$U(x, y, z, t) = U_0 cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{15}$$

Dove:

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{l}z \tag{16}$$

$$\vec{K} = \hat{i}K_x + \hat{j}K_y + \hat{l}K_z \tag{17}$$

Sostituendo la soluzione nell'equazione delle onde e prendendo la norma, sussiste la seguente relazione:

$$(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)U_0 = \frac{\omega^2}{c^2}U_0 \tag{18}$$

Ovvero:

$$\|K\| = \frac{\omega}{c}, \|K\| = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} \tag{19}$$

### 1.2.1 Definizioni e regimi

**Fronte d'onda** Definiamo il fronte d'onda come il luogo dei punti con medesimo valore del campo (ovvero quando l'argomento del coseno è costante, con un'eventuale fase $\phi$). Dunque:

$$(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t) = cost \tag{20}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi + 2n\pi = cost \tag{21}$$

L'ultima rappresenta l'equazione di un piano ortogonale al vettore fronte d'onda $\vec{K}$.

**Onda piana** L'onda piana, fronte d'onda rappresentato da un piano, è un'approssimazione di campo valida quando la sorgente emittente è molto lontana e si vuole studiare un campo localmente. L'equazione dell'onda piana in coordinate cartesiane è:

$$U(x, y, z, t) = U_0 cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{22}$$

**Onda sferica** Deriva da una sorgente puntiforme il cui fronte d'onda è una superficie sferica. L'equazione dell'onda sferica in coordinate sferiche $(\rho, \theta, \phi)$ è:

$$U(\rho, \theta, \phi) = U_0 \frac{1}{\rho} cos(K\rho - \omega t) \tag{23}$$

# 2 Spettro elettromagnetico

Qualsiasi onda è caratterizzata da $\nu, \lambda, T, \omega$, in base alle relazioni precedentemente viste. Osserviamo come esse variano al variare dello spettro elettromagnetico.

– Inserire foto

# 3 Propagazione onda in un mezzo

Supponiamo di avere un materiale isotropo, omogeneo, non conduttivo. Introdotta la costante di permeabilità magnetica del materiale $\mu = \mu_0\mu_r$ e la costante dielettrica del materiale $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ le equazioni di Maxwell in assenza di carica $\rho = 0$ e di corrente $\vec{J} = 0$ si riducono alle seguenti:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{24}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{25}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{26}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{27}$$

Dalle quali si ricavano le equazioni delle onde applicando l'operatore rotore alla terza e quarta e sfruttando le condizioni della prima e della seconda.

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \tag{28}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} \tag{29}$$

Dove $u$ indica la velocità di propagazione dell'onda, che risulta essere, approssimando $\mu_r \simeq 1$:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \simeq \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} \tag{30}$$

Dove si è definito per $n$ l'indice di rifrazione del materiale $n := \sqrt{\epsilon_r}$. Dato che $\epsilon_r > 1 \implies u < c$, ovvero la velocità di propagazione dell'onda in un materiale è ridotta di un fattore $n$.

**Cosa succede alle altre grandezze?** Analizziamo cosa succede alle altre grandezze che caratterizzano un'onda: frequenza $\nu$, o pulsazione $\omega$ o periodo $T$, vettore d'onda $\vec{K}$, lunghezza d'onda $\lambda$.

Nel passaggio si ha che:

- $\nu \to \nu' = \nu$ Non cambia la frequenza, e quindi neanche $\omega$ e $T$. Infatti: $\omega' = 2\pi\nu' = 2\pi\nu = \omega$. $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega} = T$.
- $\lambda' = \lambda n$. Infatti se $T$ è costante, nel mezzo la nuova velocità di propagazione $u$ risulta essere $u = \frac{c}{n}$ dalla quale si può scrivere che $\lambda' = uT = \frac{1}{n}cT = \frac{\lambda}{n}$.
- $K' = \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{\lambda}n = Kn$

**Relazioni vettoriali e d'ampiezza** In coordinate cartesiane $(x, y, z)$ analizziamo meglio l'equazione delle onde per ogni componente del campo $\vec{E}$, $\vec{H}$ e troviamo delle relazioni fra di loro a livello vettoriale e di intensità. Chiameremo con $U$ una qualsiasi componente del campo $\vec{E}$ o $\vec{H}$. Sappiamo che la soluzione onda piana risulta essere:

$$U(x, y, z, t) = U_0 cos(\vec{K} \cdot r - \omega t) \tag{31}$$

Che in notazione complessa risulta essere, dalla relazione di Eulero $e^{i\phi} = cos(\phi) + isin(\phi)$:

$$U(x, y, z, t) = U_0 cos(\vec{K} \cdot r - \omega t) = Re(U_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \tag{32}$$

Ometteremo il formalismo $Re()$, che sottointende la parte reale del campo scalare $U \in \mathbb{C}$, ricordando però sempre che il significato fisico risiede nella parte reale. Sostituiamo l'equazione in notazione complessa nell'equazione delle onde. Vediamo come agiscono gli operatori lineari $(\hat{\nabla}) = (\nabla)(x, y, z)$ e $(\hat{\frac{\partial}{\partial t}}) = (\frac{\partial}{\partial t})(t)$.

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{l}\frac{\partial}{\partial z} \tag{33}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{r} = \hat{i}K_x x + \hat{j}K_y y + \hat{l}K_z z \tag{34}$$

Segue che:

$$\nabla e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} = (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{l}\frac{\partial}{\partial z})(e^{i\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t}) \tag{35}$$

Svolgendo i conti:

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{i(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t)}) = iK_x(e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \tag{36}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{i(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t)}) = iK_y(e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(e^{i(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t)}) = iK_z(e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \tag{38}$$

Ovvero:

$$\nabla e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i\vec{K} e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{39}$$

Mentre l'operatore $(\hat{\frac{\partial}{\partial t}})$ fa scendere un $-i\omega$.

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -i\omega e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{40}$$

Possiamo concludere dunque che:

$$\begin{cases} (\hat{\nabla}) \to i\vec{K} \\ (\hat{\frac{\partial}{\partial t}}) \to -i\omega \end{cases} \tag{41}$$

Andando a sostituirle nelle equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \implies i\vec{K} \cdot \vec{E} = 0 \tag{42}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \implies i\vec{K} \cdot \vec{H} = 0 \tag{43}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \implies (i\vec{K}) \times \vec{E} = -\mu(-i\omega)\vec{H} \tag{44}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies (i\vec{K}) \times \vec{H} = \epsilon(-i\omega)\vec{E} \tag{45}$$

Che si riducono alle seguenti:

$$\vec{K} \cdot \vec{E} = 0 \tag{46}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{H} = 0 \tag{47}$$

$$\vec{K} \times \vec{E} = \mu\omega\vec{H} \tag{48}$$

$$\vec{K} \times \vec{H} = -\epsilon\omega\vec{E} \tag{49}$$

Ovvero che i campi $\vec{E}$ e $\vec{E}$ sono sempre ortogonali al vettore fronte d'onda $\vec{K}$ (prima e seconda equazione) e che i vettori $\vec{E}, \vec{H}, \vec{K}$ formano una triade mutualmente ortogonale, ovvero sono vettori due a due ortogonali. Vediamo le relazioni d'ampiezza prendendo i moduli della terza e quarta.

$$KH = \epsilon\omega E \implies H = \epsilon\frac{\omega}{K}E = \epsilon\frac{c}{n}E = \epsilon u E \tag{50}$$

Posso introdurre l'impedenza del vuoto $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 377\Omega$ nel seguente modo, ricordando che $n = \sqrt{\epsilon_r}$:

$$\epsilon\frac{c}{n} = (\epsilon_r\epsilon_0)n\frac{c}{n^2} = (\epsilon_r\epsilon_0)n\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\frac{1}{n^2} = n(\cancel{\epsilon_r}\epsilon_0)\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\cancel{\epsilon_r}} = \frac{n}{Z_0} \tag{51}$$

Dunque arriviamo alla seguente relazione:

$$H(|\vec{E}|) = \frac{n}{Z_0}|\vec{E}| \tag{52}$$

Che ci permetterà di lavorare solamente sul campo $\vec{E}$ ricordando le relazioni di ortogonalità e di intensità.

# 4 Vettore di Poyting

Il vettore di Pyoting serve per descrivere l'energia associala al campo $\vec{E}$ ed $\vec{H}$. Il teorema ci dice che il flusso d'energia per unità di area è uguale al flusso del vettore di Poyting $\vec{S}$, definito come segue:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, [\vec{S}] = Wm^2(S.I.) \tag{53}$$

Dunque calcolando il flusso di $\vec{S}$ attraverso una superficie posso sapere quant'è la potenza per unità d'area.

**Relazione fra $\vec{S}$ e $\vec{K}$** Sappiamo che:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E_0} cos(\vec{K} \cdot r - \omega t) \\ \vec{H} = \vec{H_0} cos(\vec{K} \cdot r - \omega t) \end{cases} \tag{54}$$

Dato che $\vec{E}, \vec{H}$ sono in fase ne segue che:

$$\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H} = (\vec{E_0} cos(\vec{K} \cdot r - \omega t)) \times (\vec{H_0} cos(\vec{K} \cdot r - \omega t)) = (\vec{E_0} \times \vec{H_0}) cos^2(\vec{K} \cdot r - \omega t) \tag{55}$$

Ovvero, ricordando la mutua ortogonalità ed avendo descritto il versore $\hat{\vec{K}} = \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}$:

$$\vec{S} = \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|} |E_0||H_0| cos^2(\vec{K} \cdot r - \omega t) \tag{56}$$

Da cui segue che per i $\boxed{\text{materiali isotropi} \Leftrightarrow \vec{S} // \vec{K}}$.

**Relazione fra $|\vec{S}|$ e $|\vec{E}|$** Dalla relazione:

$$H(|\vec{E}|) = \frac{n}{Z_0} |\vec{E}| \tag{57}$$

Segue che:

$$|\vec{S}| = |\vec{H}||\vec{E}| cos^2(\vec{K} \cdot r - \omega t) = \frac{n}{Z_0} |\vec{E}|^2 cos^2(\vec{K} \cdot r - \omega t) \tag{58}$$

Ovvero che $\boxed{|\vec{S}| \propto |\vec{E}|^2}$, cioè l'intensità misurata è proporzionale al modulo quadro del campo.

Nel visibile, $\nu = 10^{14} - 10^{15}$ $(T = 1fs)$ il campo $\vec{E}$ è altamente oscillante, quindi quando se ne misura una media.

$$I = < S >_t = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} |\vec{E}|^2 \tag{59}$$

Dove il fattore $\frac{1}{2}$ è venuto fuori dalla media temporale (integrale nel tempo) della funzione $cos^2(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)$.

Per l'effetto fotoelettrico $I = Nh\nu$, dove $N$ è il numero di fotoni e $h\nu$ l'energia del singolo fotone.

# 5 Battimento

Usciamo dall'approssimazione di onda piana monocromatica, ovvero onda alla stessa pulsazione $\omega$. Consideriamo due onde armoniche di pari intesità ma con pulsazioni diverse: $\omega + \Delta\omega$ e $\omega - \Delta\omega$ a cui corrispondono rispettivamente i vettori d'onda $K = K + \Delta K$ e $K = K - \Delta K$, nel caso unidimensionale con propagazione lungo $\hat{z}$. Per il principio di sovrapposizione (linearità degli operatori), la combinazione lineare di due soluzioni, e quindi di due onde, è ancora soluzione, ovvero è ancora un'onda. Segue che:

$$
\begin{aligned}
U(\vec{r}, t) &= U_0 e^{i((K+\Delta K)z-(\omega+\Delta\omega)t)} + U_0 e^{i((K-\Delta K)z-(\omega-\Delta\omega)t)} \\
&= U_0 e^{i(Kz-\omega t)} \left[ e^{i(\Delta Kz-\omega t)} + e^{-i(\Delta Kz-\omega t)} \right] \\
&= 2U_0 e^{i(Kz-\omega t)} cos(\Delta Kz - \Delta\omega t)
\end{aligned}
\tag{60}
$$

**Analisi** Dove il fattore $2U_0 e^{i(Kz-\omega t)}$ è il campo, il quale però viene modulato in ampiezza dal fattore $cos(\Delta Kz - \Delta\omega t)$. Il fattore 2 deriva dal fatto che abbiamo consideratore i campi in fase e quindi interferenza costruttiva. Inoltre, otteniamo due velocità:

- Velocità di fase $v_f := \frac{\omega}{K}$.
- Velocità di gruppo $v_g := \frac{\Delta\omega}{\Delta K}$.

La velocità di fase $v_f$ è la velocità con cui si propaga il campo, ovvero $e^{i(Kz-\omega t)}$, mentre la velocità di gruppo $v_g$ è la velocità con cui si propaga la modulazione, ovvero $cos(\Delta Kz - \Delta\omega t)$. Si noti che esistono situazioni fisiche in cui la velocità del campo $v_f$ può essere superluminosa ($v_f > c$) ma la velocità di propagazione della modulazione $v_g$, ovvero il segnale rimarrà sempre minore della velocità della luce $c$.

# 6 Velocità di gruppo

Possiamo definire formalmente la velocità di gruppo come il limite del rapporto incrementale fra $\Delta\omega$ e $\Delta K$ per $\Delta K \to 0$, ovvero:

$$
v_g := \frac{d\omega}{dK} \tag{61}
$$

**Nel vuoto** Nel vuoto $\omega = cK \implies \frac{d\omega}{dK} = c$ ne segue che $\boxed{v_g = c}$, ovvero nel vuoto la velocità di propagazione del segnale è uguale a quella della luce.

**Nel materiale** Nel materiale $\omega = \frac{c}{n}K$, inoltre generalmente $n = n(K)$ (si pensi ai materiali birifrangenti o con diverso indice di rifrazione a seconda della polarizzazione del campo). Ne segue che $\omega = \frac{c}{n(K)}K$, allora:

$$
v_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{c}{n} + K\frac{c}{n}(-\frac{dn}{dK}) = \frac{c}{n}(1 - K\frac{dn}{dK}) \tag{62}
$$

Possiamo dunque distinguere due casi:

- Dispersione normale ($\frac{dn}{dK} > 0$): ne segue che $v_g < v_f$. Infatti: $v_g = \frac{c}{n} - K\frac{dn}{dK} = v_f - K\frac{dn}{dK}$, ricordando che $K > 0$ e $\frac{dn}{dK} > 0$ per ipotesi.

- Dispersione anomala ($\frac{dn}{dK} < 0$): ne segue che $v_g = \frac{c}{n}(1 + K|\frac{dn}{dK}|)$. Anche in questo caso, dato che necessariamente $v_g < v_f$, il fattore $\gamma := (1 + K|\frac{dn}{dK}|) \leq 1$ in modo tale che $v_g = v_f\gamma \leq v_f$.

# 7 Polarizzazione campo elettrico

## 7.1 Introduzione

Supponiamo di avere un campo elettromagnetico diretto nel seguente modo, data la terna $\beta = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{l}\}$ cartesiana.

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E_0}e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ \vec{H} = \vec{H_0}e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{cases} \tag{63}$$

Ricordando che il significato fisico è racchiuso nella parte reale di queste equazioni e supponendo che $\vec{E_0} = \hat{j}|\vec{E_0}$, $\vec{H_0} = \hat{i}|\vec{H_0}$ ne segue dalla terna mutualmente ortogonale $K = \hat{l}|\vec{K}|$.

Definiamo:

**Onda polarizzata** Un'onda si dice polarizzata se esiste una relazione di fase ben definita e costante fra le componenti del campo $\vec{E_0}$. Nel nostro caso, se esiste una relazione fissata fra $E_x$ ed $E_y$, visto che nel nostro caso non esiste componente lungo $\hat{l}$.

**Direzione di polarizzazione** La direzione di polarizzazione indica la direzione del campo $\vec{E}$.

**Polarizzazione lineare** Quando siamo in condizioni di polarizzazione ed i coefficienti sono reali ($\mathbb{R}$).

**Polarizzazione circolare** Quando siamo in condizioni di polarizzazione e le componenti sono sfasate di $\phi \pm \frac{\pi}{2}$, ai quali corrisponde rispettivamente la circolare oraria (sinistra, L) e antioraria (destra, R).

**Polarizzazione ellittica** Quando siamo in condizioni di polarizzazione circolare, ovvero sfasamento di $\phi \pm \frac{\pi}{2}$ fra le varie componenti, ma esse hanno ampiezza diversa; $|E_x| \neq |E_y|$.

Si noti che la polarizzazione circolare ed ellittica richiedono un coefficiente $i \in \mathbb{C}$ fra le componenti. Ne segue che non possono essere lineari. Inoltre:

$\boxed{\text{Se non esiste una relazione di fase costante, l'onda non è polarizzata.}}$

## 7.2 Formalismo generale

In forma complessa in coordinate polari, un generico campo $\vec{E} \in \mathbb{C}$ può essere scritto come $\vec{E} = (E_{ox}, E_{oy})$, dove:

$$\begin{cases} E_{0x} = |E_{0x}|e^{i\phi_x} \\ E_{0y} = |E_{0y}|e^{i\phi_y} \end{cases} \tag{64}$$

Che rappresenterà un'onda:

$$\vec{E} = \vec{E_0}e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \vec{E_0} \in \mathbb{C}. \tag{65}$$

Posso rappresentarlo vettorialmente con quelli che si definiscono i vettori di Jones:

$$\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_{0x}|e^{i\phi_x} \\ |E_{0y}|e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \tag{66}$$

Il modulo del campo $\vec{E}$ sarà dunque:

$$|\vec{E}| = \sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2} \tag{67}$$

## 7.3 Esempi

Supponiamo di avere un campo polarizzato, con relazione di fase fra $E_{0x}$ ed $E_{0y}$ costante. Possiamo avere le seguenti polarizzazioni normalizzate che possono costituire una base nello spazio lineare dei campi completamente polarizzati (spazio bidimensionale):

**Orizzontale:** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Verticale:** $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**A ±45:** $+45$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $-45$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**Circolare destra (R):** $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

**Circolare sinistra (L):** $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

**Ad angolo $\phi$:** $\begin{pmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \end{pmatrix}$

### 7.4 Prodotto scalare nello spazio dei campi polarizzati

Dato che la rappresentazione di Jones per gli i campi polarizzati è uno spazio lineare su campo complesso, introduciamo il prodotto scalare standard per poter identificare stati polarizzati ortogonalmente.

**Prodotto scalare** Siano $\vec{E_1} = (E_{1x}, E_{1y}, E_{1z}), \vec{E_2} = (E_{2x}, E_{2y}, E_{2z})$ due campi appartenerti allo spazio dei campi polarizzati. Allora il prodotto scalare $\boxed{\vec{E_1} \cdot \vec{E_2} := E_{1x}E_{2x} + E_{1y}E_{2y} + E_{1z}E_{2z}}$.

## 8 Matrici di Jones

Supponiamo di avere della luce polarizzata $\vec{J}$ entrante in un dispositivo ottico, il quale ne eseguirà una trasformazioni, trasformando $\vec{J} \to \vec{J'}$. Se i materiali ottici mandano stati polarizzati in stati polarizzati, è possibile rappresentare ogni dispositivo con una matrice, detta matrice di Jones.

Generalmente avremo la seguente situazione: Entra luce polarizzata rappresentata dal vettore $\vec{J} = (A, B)$, il dispositivo ottico esegue la trasformazione $(\hat{M})$, esce luce polarizzata rappresentata da $\vec{J'}$:

$$\vec{J'} = \hat{M}\vec{J} \tag{68}$$

Ovvero:

$$\vec{J'} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bB \\ cA + dB \end{pmatrix} \tag{69}$$

Se ho più dispositivi ottici in cascata, i quali eseguono in ordine le trasformazioni $\hat{M}_1, \hat{M}_2, ...\hat{M}_n$, il vettore di Jones risultate $\vec{J'}$ sarà:

$$\vec{J'} = (\hat{M}_n...\hat{M}_2\hat{M}_1)\vec{J} \tag{70}$$

### 8.1 Polaroid: proiettore

Il polaroid è un dispositivo ottico che lascia passare (proietta) solamente la componente del campo lungo la direzione del polaroid.

**Polaroid orizzontale** Supponiamo di voler filtrare solamente la componente orizzontale. Inviamo luce polarizzata rappresentata dal vettore $\vec{J} = (A, B)$ al dispositivo ottico, dopo il quale otterremo solo la componente orizzontale, ovvero il vettore di Jones $\vec{J'} = (A, 0)$. Troviamo la matrice $\hat{M}$ che rappresenta il dispositivo ottico:

$$\vec{J'} = \hat{M}\vec{J} \tag{71}$$

Che significa risolver il seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bB \\ cA + dB \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$\begin{cases} A = aA + bB \\ 0 = cA + dB \end{cases} \quad \forall A, B \in \mathbb{C} \tag{73}$$

E' facilmente verificabile che l'operatore seguente è un polaroid con asse di proiezione orizzontale:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{74}$$

## 8.2 Propagazione nel vuoto

La propagazione nel vuoto percorrendo una distanza $z$ è rappresentato dal seguente operatore:

$$\vec{J'} = \begin{bmatrix} e^{iKz} & 0 \\ 0 & e^{ikz} \end{bmatrix} \vec{J} = e^{iKz} \vec{J} \tag{75}$$

Infatti esso altro non fa che sfasare l'onda polarizzata in ingresso, ricordando che $K = \frac{2\pi}{\lambda}$.

## 8.3 Propagazione nel materiale

Nella propagazione in un materiale di spessore $d$ il vettore d'onda varia e assume la forma $K' = \frac{2\pi}{\lambda} n = Kn$:

$$\vec{J'} = \begin{bmatrix} e^{iKnz} & 0 \\ 0 & e^{iKnz} \end{bmatrix} \vec{J} = e^{iKnz} \vec{J} \tag{76}$$

## 8.4 Rotatore di angolo $\theta$

E' un operatore in grado di ruotare la polarizzazione della lunce in ingresso di angolo $\theta$ con l'asse cartesiano $\hat{i}$ crescente in senso orario. Assume la forma della matrice delle rotazioni $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{77}$$

**Esempio** Supponiamo di avere in ingresso al rotatore un luce polarizzata $\vec{J} = (1, 0)$. In uscita otterremo:

$$\vec{J'} = R(\theta) \vec{J} \tag{78}$$

$$\vec{J'} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ -sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{79}$$

Che è proprio l'espressione originata dal vettore $\vec{J} = (1, 0)$ ruotato di $\theta$ in senso orario.

## 8.5 Polaroid ruotato di $\theta$

E' un dispositivo ottico in grado di filtrare e far passare solo la componente polarizzata lungo la direzione $\theta$ con l'asse cartesiano $\hat{i}$, ovvero un polaroid orizzontale ruotato di angolo $\theta$.

**Dimostrazione** Supponiamo che nel sistema di riferimento S.R.' (primato) l'operatore di proiezioni lungo la direzione $\theta$ agisca come semplice proiettore lungo la direzione $\hat{i}'$ in quanto in due assi coincidono. Ne segue che, nel S.R.' l'operatore di proiezione è rappresentato da:

$$\hat{M}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{80}$$

Ci chiediamo qual è l'espressione di $\hat{M}$ nel sistema di riferimento S.R. non primato. Possiamo passare da S.R. $\rightarrow$ S.R.' tramite l'operatore di rotazione $R(\theta)$ lungo l'asse $\hat{l}$, che assume la forma:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{81}$$

E tornare indietro tramite l'operatore $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$. Allora nel S.R. l'operatore $\hat{M}$ assumerà la forma data dal prodotto:

$$M(\theta) = R^{-1}(\theta) M' R(\theta) = R(\theta) M' R(\theta) \tag{82}$$

In quanto si applica prima $R(theta)$ per andare nel S.R. dove sappiamo scrivere l'operatore, lo applichiamo, e ritorniamo nel S.R. corretto. Dunque:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{83}$$

Svolgendo i conti:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} cos^2(\theta) & sin(\theta)cos(\theta) \\ sin(\theta)cos(\theta) & sin^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{84}$$

## 8.6 Materiale birifrangente

E' un materiale con diverso indice di rifrazione, $n_o$ indice ordinario ed $n_e$ indice straordinario, a seconda del vettore $K$ incidente. Supponiamo che il dispositivo ottico abbia spessore $d$, allora lo rappresentiamo con la matrice:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{2\pi n_o d}{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi n_e d}{\lambda}} \end{bmatrix} = e^{i\frac{2\pi n_o d}{\lambda}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d} \end{bmatrix} \tag{85}$$

A seconda dello spessore o dello sfasamento che si vuole ottenere possiamo distingere due casi:

### 8.6.1 Lamina di ritardo $\frac{\lambda}{4}$

Supponiamo di volere uno sfasamento lungo l'asse $\hat{j}$ di $\frac{\pi}{2}$. Ci chiediamo quale debba essere lo spessore $d$ della lamina. Segue che:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2} \implies \boxed{d = \frac{\lambda}{4}\frac{1}{(n_e - n_o)}} \tag{86}$$

E' rappresentata, a parte lo sfasamento a fattor comune, dalla matrice:

$$\hat{M} = e^{i\frac{2\pi n_o d}{\lambda}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = e^{i\frac{2\pi n_o d}{\lambda}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \tag{87}$$

Se l'asse è ruotato di angolo $\theta$ assume la forma:

$$\hat{M}_{\frac{\lambda}{4}}(\theta) = R(-\theta)\hat{M}R(\theta) \tag{88}$$

$$\hat{M}_{\frac{\lambda}{4}}(\theta) = \begin{bmatrix} cos^2(\theta) + isin^2(\theta) & sin(\theta)cos(\theta) - isin(\theta)cos(\theta) \\ sin(\theta)cos(\theta) + isin(\theta)cos(\theta) & sin^2(\theta) + icos^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{89}$$

### 8.6.2 Lamina di ritardo $\frac{\lambda}{2}$

Analogo problema, supponiamo di volere uno sfasamento lungo l'asse $\hat{j}$ di $\pi$. Ci chiediamo quale debba essere lo spessore $d$ della lamina. Segue che:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = \pi \implies \boxed{d = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{(n_e - n_o)}} \tag{90}$$

E' rappresentata, a parte lo sfasamento a fattor comune, dalla matrice:

$$\hat{M} = e^{i\frac{2\pi n_o d}{\lambda}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{bmatrix} = e^{i\frac{2\pi n_o d}{\lambda}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{91}$$

Se l'asse è ruotato di angolo $\theta$ assume la forma:

$$\hat{M}_{\frac{\lambda}{2}}(\theta) = R(-\theta)\hat{M}R(\theta) \tag{92}$$

$$\hat{M}_{\frac{\lambda}{2}}(\theta) = \begin{bmatrix} cos(2\theta) & sin(2\theta) \\ sin(2\theta) & -cos(2\theta) \end{bmatrix} \tag{93}$$

### 8.6.3 Alcune considerazioni matematiche

Le matrici di Jones rappresentano trasformazioni unitarie. Pertanto mandano stati ortogonali in stati ortogonali. Ovvero se $\vec{J_A} \cdot \vec{J_B} = 0 \implies \vec{J'_A} \cdot \vec{J'_B} = 0$, dove $\vec{J'_i} = \hat{M}\vec{J_i}$ con $i \in \{A, B\}$.

## 9 Riflessione e rifrazione

Supponiamo di avere due materiali (1, 2) con diverso indice di rifrazione, rispettivamente $n_1, n_2$ (Si ricordi che per definizione $n_i = \sqrt{\epsilon_{r_i}}$). Supponiamo che un'onda elettromagnetica piana, descritta dal vettore d'onda $\vec{K}$, dal materiale (1) incida sul secondo materiale (2) formando un angolo $\theta$ rispetto al piano d'incidenza, ovvero il piano individuato dal vettore d'onda $\vec{K}$ e la normale uscente alla superficie del materiale inciso. Parte dell'onda verrà riflessa con un angolo $\theta'$, parte dell'onda verrà rifratta - trasmessa - con un angolo $\phi$; entrambi gli angolo rispetto al piano d'incidenza. Vediamo quale relazione devono sussistere.

Consideriamo onde piane. Nella notazione utilizzata, $\vec{E}$ indica il campo incidente, descritto da $\vec{K}$; $\vec{E'}$ il campo riflesso e $\vec{E''}$ il campo rifratto, descritti rispettivamente da $\vec{K'}, \vec{K''}$.

$$\begin{cases} \vec{E} & = \vec{E}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{E'} & = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{K'} \cdot \vec{r} - \omega' t)} \\ \vec{E''} & = \vec{E}''_0 e^{i(\vec{K''} \cdot \vec{r} - \omega'' t)} \end{cases} \tag{94}$$

Se trascuriamo l'attenuazione del mezzo, abbiamo la condizione che:

$$\vec{E} = \vec{E'} + \vec{E''}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \forall t \in \mathbb{R} \tag{95}$$

La quale implica necessariamente che gli esponenziali siano gli stessi, ovvero che:

$$\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t = \vec{K'} \cdot \vec{r} - \omega' t = \vec{K''} \cdot \vec{r} - \omega'' t \tag{96}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{K} \cdot \vec{r} = \vec{K'} \cdot \vec{r} = \vec{K''} \cdot \vec{r} \\ \omega = \omega' = \omega'' \end{cases} \tag{97}$$

Dalla relazione $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, osservando con l'onda riflessa ha lo stesso indice di rifrazione dell'onda incidente, segue che:

$$\begin{cases} \lambda = \lambda' \\ n_2 \lambda'' = n_1 \lambda \implies \lambda'' = \frac{n_1}{n_2} \lambda \end{cases} \tag{98}$$

Dalla scelta degli assi, il piano incidente è $\hat{xz}$ e proiettando l'equazione precedente otteniamo:

$$\begin{cases} \hat{y} : K_y = K'_y = K''_y = 0 \\ \hat{x} : K_x x = K'_x x + K''_x x, \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{99}$$

# 10 Dispersione ed indice di rigrazione nono costante

## 10.1 Dispersione

Ci proponiamo di studiare la dispersione, ovvero l'attenuazione del campo dopo che esso ha percorso una certa distanza in un determinato materiale e successivamente dimostrare che l'indice di rifrazione $n = n(\omega)$. Le equazioni di Maxwell in assenza di carica $\vec{\rho} = 0$ ed in assenza di corrente $\vec{J} = 0$ si riducono alle seguenti:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{100}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{101}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{102}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{103}$$

Dove il vettore $\vec{P}$ indica la polarizzazione della materia. Applicando il rotore alla terza e sfruttando le altre relazioni otteniamo l'equazione delle onde con il vettore di polarizzazione. Infatti:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) \tag{104}$$

Ovvero:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \tag{105}$$

Che rappresenta l'equazione delle onde in presenza di polarizzazione $\vec{P}$. Ricaviamo, ora, il vettore di polarizzazione.

**Campo esterno statico** Supponiamo di applicare un campo elettrico $\vec{E}$ esterno. La materia tenderà a formare un momento di dipolo $\vec{p}$, che per definizione è:

$$\vec{p} = q\vec{\delta} \tag{106}$$

Dove $q$ indica la carica elettrica e $\delta$ la distanza fra le cariche di segno opposto. Nel nostro caso si avrà un equilibrio fra l'attrazione/repulsione del campo esterno sulla molecola e l'interazione Coulombiana che assumiamo elastica:

$$\vec{F_{E,ext}} = \vec{F_{el}} \implies -Ze\vec{E} = K\vec{\delta} \tag{107}$$

Da cui possiamo ricavare il raggio d'equilibrio $\vec{\delta}$:

$$\vec{\delta} = -\frac{e}{K}\vec{E} \tag{108}$$

Nella materia si crea una polarizzazione macroscopica $\vec{P}$ dovuta agli $N$ atomi presenti che avrà l'espressione:

$$\boxed{\vec{P} = N(-Ze)\vec{\delta} = N\frac{Z^2e^2}{K}\vec{E}} \tag{109}$$

**Campo esterno variabile** Supponiamo di avere un campo esterno locale variabile $\vec{E_{locale}}$ nella forma:

$$\vec{E_{locale}} = \vec{E_0}e^{i(Kz-\omega t)} \tag{110}$$

Ricaviamo il momento di dipolo locale $\vec{p_{locale}}$ e otteniamo quello macroscopico imponendo che $\vec{P} = N\vec{p_{locale}}$. Per trovare $\vec{p_{locale}}$ bisogna trovare il raggio $\vec{r(t)}$ variabile del momento di dipolo. A tale scopo sosteniamo la teoria per la quale il materiale si comporta come un oscillatore armonico smorzato. Ne segue che:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} + m\gamma\frac{d}{dt}\vec{r} + K\vec{r} = (-Ze)(\vec{E_0}e^{-i\omega t}) \tag{111}$$

La cui soluzione $\vec{r(t)}$, dove con $\vec{r}$ si indica il raggio vettore fra nucleo e nube elettronica, è quella dell'oscillatore armonico smorzato:

$$\vec{r(t)} = \vec{r_0}e^{-i\omega t} \tag{112}$$

Sostituendola nell'equazione di Newton possiamo ricavare $\vec{r_0}$ che assume la seguente espressione:

$$\vec{r_0} = -\frac{Ze\vec{E_0}}{m}\frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2} \tag{113}$$

Dove $\omega_0^2$ è la pulsazione dell'interazione elastica ovvero:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{114}$$

**Osservazione importante** Osserviamo che il raggio vettore $\vec{r_0} \in \mathbb{C}$, per cui ha un proprio modulo e fase. L'ampiezza delle oscillazioni sarà rappresentata dal modulo, la fase invece rappresenterà il ritardo di fase dovuto all'onda.

Dunque la polarizzazione sarà:

$$\vec{P} = -NZe\vec{r_0} = N\frac{Z^2e^2}{m}\frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2}\vec{E_0} \tag{115}$$

Si osservi che imponendo $\omega = 0$ si ottiene esattamente il caso del campo esterno statico. Siamo pronti per ricavare l'espressione di attenuazione, ovvero di dispersione, dovuta alla propagazione in un mezzo. Utilizzando il vettore di polarizzazione dovuto ad un campo elettrico esterno variabile l'equazione di Maxwell assume la forma:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(N\frac{Z^2e^2}{m}\frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2}\vec{E_0}\big) \tag{116}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 N\frac{Z^2e^2}{m}\frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2}\frac{\partial^2 \vec{E_0}}{\partial t^2} \tag{117}$$

La seguente equazione differenziamo è l'equazione delle onde che avrà come soluzione:

$$\vec{E} = \vec{E_0}e^{i(\vec{\tilde{K}}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{118}$$

Dove il vettore $\vec{\tilde{K}} \in \mathbb{C}$ si ricavava sostituendo la soluzione nell'equazione. Ha la seguente espressione:

$$\vec{\tilde{K}} = \frac{\omega}{u} = \frac{\omega}{c}\big(1 + \frac{NZ^2e^2}{m\epsilon_0}\frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2}\big) \tag{119}$$

Supponiamo di avere un'onda piana che si propaga lungo $\hat{z}$. Possiamo scrivere $\tilde{K} \in \mathbb{C}$ come $\tilde{K} = K + i\beta$. Allora la soluzione avrà l'espressione:

$$\vec{E} = \vec{E_0}e^{i(\vec{\tilde{K}}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \vec{E_0}e^{i(Kz+i\beta z-\omega t)} \tag{120}$$

Ovvero:

$$\vec{E} = \vec{E_0}e^{i(Kz-\omega t)}e^{-\beta z} \tag{121}$$

Ne segue che l'intensità $I \propto |\vec{E}|^2$ sarà:

$$\boxed{I \propto |\vec{E_0}|^2 e^{-2\beta z}} \tag{122}$$

Quindi l'onda, propagandosi per uno spessore $z$, attenuerà la propria intensità di un fattore $e^{-2\beta z}$.

### 10.2 Indice di rifrazione non costante

## 11 Interferenza

Ci proponiamo di studiare l'interferenza, ovvero semplicemente la combinazione di più campi - valida per il principio di sovrapposizione - il cui modulo totale può variare l'intensità risultante.

Supponiamo di avere $S_1, S_2, ..., S_n$ sorgenti che originano $\vec{E_1}, \vec{E_2}, ..., \vec{E_n}$ indipendenti. Per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico risentito in un punto dello spazio generico identificato dal raggio vettore $\vec{r}$ è:

$$\vec{E_{tot}} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + ... + \vec{E_n} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E_i} \tag{123}$$

Ci concentreremo sul vettore di Poyting $\vec{S}$ perché è la grandezza fisica che si misura in laboratorio. Nel vuoto, ovvero $n = 1$, segue che:

$$|\vec{S}| = \frac{1}{Z_0}|\vec{E}|^2 = c\epsilon_0|\vec{E}|^2 \tag{124}$$

Dove $Z_0$ è la cosiddetta impedenza caratteristica del vuoto di circa $Z_0 = 377\Omega$. Se rappresentiamo il campo elettrico totale oscillante come un'onda piana, allora $\vec{E^{tot}}(\vec{r}) = \vec{E_0^{tot}}cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)$ e la frequenza d'oscillazione è molto elevata, allora misureremo necessariamente un valore medio dell'intensità rappresentata dal modulo del vettore di Poyting, ovvero:

$$< |\vec{S}| >_t = \frac{1}{2}c\epsilon_0|\vec{E_0^{tot}}|^2 \tag{125}$$

Ovvero misurerò il modulo quadro del campo elettrico totale tramite la misura d'intensità. Studiamo il caso di due sorgenti monocromatiche indipendenti.

Supponiamo di avere due sorgenti $S_1, S_2$ che generano rispettivamente due campi indipendenti $\vec{E_1}, \vec{E_2}$ nel punto dello spazio definito dal raggio vettore $\vec{r}$ così definiti:

$$\begin{cases} \vec{E_1}(\vec{r}) = E_1^0 e^{i(\vec{K_1}\cdot\vec{r} - \omega_1 t + \phi_1)} \\ \vec{E_2}(\vec{r}) = E_2^0 e^{i(\vec{K_2}\cdot\vec{r} - \omega_2 t + \phi_2)} \end{cases} \tag{126}$$

Se supponiamo che le sorgenti siano monocromatiche alla stessa pulsazione $\omega = \omega_1 = \omega_2$.

## 11.1 Caso scalare

Studiamo il caso scalare, ovvero quando i campi hanno la stessa polarizzazione, li possiamo trattare come scalare appartenenti al campo $\mathbb{C}$ e non più con la natura vettoriale.

L'intensità del campo risultante $\vec{E_{tot}}(\vec{r}) = \vec{E_1}(\vec{r}) + \vec{E_2}(\vec{r})$ nel punto $\vec{r}$ sarà per le considerazioni fatto pocanzi:

$$I_T \propto |\vec{E_{tot}}|^2 = E_{tot}E_{tot}^* = (E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*) \tag{127}$$

Ovvero, imponendo la costante di proporzionalità unitaria, segue che:

$$\begin{aligned} I_T &= E_1E_1^* + E_1E_2^* + E_2E_1* + E_2E_2^* \\ &= |E_1|^2 + |E_2|^2 + E_1E_2^* + E_2E_1* \\ &= I_1 + I_2 + E_1E_2^* + E_2E_1* \end{aligned} \tag{128}$$

L'intensità totale $I_T$ è dunque composta dalle singole intensità $I_1, I_2$ a da un altro termine, il contributo di interferenza, dato da $E_1(\vec{r})E_2^*(\vec{r}) + E_2(\vec{r})E_1*(\vec{r})$. Osserviamo meglio il contributo di interferenza $I_{int}(\vec{r})$:

$$I_{int}(\vec{r}) = |E_1^0||E_2^0|\big(e^{i(\vec{K_1}\cdot\vec{r}-\vec{K_2}\cdot\vec{r}+\phi_1-\phi_2)} + e^{i(\vec{K_2}\cdot\vec{r}-\vec{K_1}\cdot\vec{r}+\phi_2-\phi_1)}\big) \tag{129}$$

Definendo $\theta = \vec{K_1}\cdot\vec{r} - \vec{K_2}\cdot\vec{r} + \phi_1 - \phi_2$, segue che il termine d'interferenza è riscrivibile come:

$$I_{int} = |E_1^0||E_2^0|\big(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\big) = 2|E_1^0||E_2^0|cos(\theta) \tag{130}$$

Dove $\theta = \theta(\vec{K_1}, \vec{K_2}, \vec{r}, \Delta\phi)$, ovvero l'interferenza dipende sia dalla posizione spaziale $\vec{r}$, sia dalla fase relativa $\Delta\phi$ fra i due campi, sia dai vettori d'onda $\vec{K_1}, \vec{K_2}$.

**Interferenza costruttiva** Si otterrà l'interferenza costruttiva quando il termine d'interferenza $I_{int}(\theta(\vec{K_1}, \vec{K_2}, \vec{r}, \Delta\phi))$ è positivo, ovvero per $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. L'intensità del campo totale, se hanno medesima ampiezza, dove $I_0$ rappresenta la singola intensità, ed in condizioni di interferenza costruttiva massima sarà:

$$I_T = I_0 + I_0 + 2I_0 = 4I_0 \tag{131}$$

**Interferenza distruttiva** Si otterrà l'interferenza distruttiva quando il termine d'interferenza $I_{int}(\theta(\vec{K_1}, \vec{K_2}, \vec{r}, \Delta\phi))$ è negativo, ovvero per $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$. L'intensità del campo totale, se hanno medesima ampiezza, dove $I_0$ rappresenta la singola intensità, ed in condizioni di interferenza distruttiva massima sarà:

$$I_T = I_0 + I_0 - 2I_0 = 0 \tag{132}$$

## 11.2 Caso vettoriale

Analogo discorso può essere fatto svolgendo i conti in forma vettoriale, dove l'intensità del campo sarà dunque:

$$I_T = |\vec{E_1}|^2 + |\vec{E_2}|^2 + 2\vec{E_1}\cdot\vec{E_2}cos(\theta) \tag{133}$$

Dove $\theta = \vec{K_1}\cdot\vec{r} - \vec{K_2}\cdot\vec{r} + \phi_1 - \phi_2$ , ovvero $\theta = \theta(\vec{K_1}, \vec{K_2}, \vec{r}, \Delta\phi)$

**Osservazione importante** Si osservi che fra due campi con polarizzazione ortogonale non esiste interferenza. Infatti, sotto queste ipotesi $\vec{E_1}\cdot\vec{E_2} = 0 \implies I_{int} = 0$. Ne segue che:

$$I_T = I_0^1 + I_0^2 \tag{134}$$

# 12 Interferometro di Young (1802)

L'esperimento proposto da Young ha lo scopo di mettere in luce l'interferenza fra due onde. Si basa su una sorgente monocromatica che, tramite un reticolo ed il principio di Huygens, genera a sua volta due sorgenti in fase. A seconda del cammino ottico è possibile dunque osservare l'interferenza, in quanto un diverso percorso implica uno sfasamento fra i campi e quindi interferenza.

Supponiamo che la sorgente monocromatica $S$ generi un campo con polarizzazione fissata. Dunque ne possiamo studiare la natura scalare. Per la simmetria del problema e per il principio di Hyugens, le nuove sorgenti poste sul reticolo generano i campi:

$$E_1 = E_1 e^{i(\vec{K_1}\cdot\vec{r}-\omega_1 t)} E_2 = E_2 e^{i(\vec{K_2}\cdot\vec{r}-\omega_2 t)} \tag{135}$$

Per le ipotesi di monocromaticità, di polarizzazione e di sistemi di riferimento possiamo esplicitare che:

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 = \omega_2 \\ \vec{K} = \vec{K_1} = \vec{K_2} \\ E = E_1 = E_2 \\ \vec{K}\cdot\vec{r} = K_x x \equiv Kx \end{cases} \tag{136}$$

Sia $h$ la distanza fra le fenditure. Se $h \ll x$, dove $x$ è la distanza fra il reticolo e lo schermo, allora possiamo concludere che:

$$\vec{d_1} - \vec{d_2} \simeq d_1 - d_2 \tag{137}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} I_T &= I_{0,1} + 0,2 + |E_{0,1}||0,2cos(\theta) \\ \implies I_T &= 2I_0 + I_0 cos(\theta) = 2(I_0 + cost(\theta)) \end{aligned} \tag{138}$$

Dove la variabile, per le considerazioni precedenti è definita come $\theta = \theta(\vec{K}, \vec{r}, \Delta\phi)$ ovvero:

$$\begin{aligned} \theta(\vec{K}, \vec{r}, \Delta\phi) &= \vec{K_1}\cdot\vec{r} - \vec{K_2}\cdot\vec{r} + \phi_2 - \phi_1 \\ &= Kd_1 - Kd_2 + \Delta\phi \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) + \Delta\phi \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) \end{aligned} \tag{139}$$

Dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $\theta = \theta(d_1 - d_2)$ in quanto si può scegliere $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Studiamo dove troveremo i massimi ed i minimi d'interferenza, in quanto essa è dovuta al $cos(\theta(d_1 - d_2))$.

**Massimi** I massimi si troverano per $cos(\theta) = 1$, ovvero per:

$$\begin{gathered}\theta_{max} = 0 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \implies \boxed{\theta_{max} = \pm 2n\pi, n \in \mathbb{N}}\end{gathered} \tag{140}$$

**Minimi** Analogo discorso si può fare per i minimi che si troveranno per $cos(\theta) = -1$, ovvero:

$$\boxed{\theta_{min} = \pm(2n+1)\pi, n \in \mathbb{N}} \tag{141}$$

Sia $\epsilon$ l'angolo indicato in figura, allora possiamo affermare che:

$$d_1 - d_2 = hsin(\epsilon) \simeq h\epsilon = htan(\epsilon) = h\frac{y}{x} \tag{142}$$

Dove il punto di coordinate $(x, y)$ è il punto posto nel S.R. del reticolo, nel centro della distanza fra i fori. Oppure si può immaginare che per costruzione la distanza $x$ è fissata e quindi variando $y$ sullo schermo possiamo visualizzare l'andamento dell'interferenza. Vediamo a quali $y$ corrispondono i massimi ed i minimi.

Sappiamo che:

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) = \frac{2\pi}{\lambda}h\frac{y}{x} \tag{143}$$

Ovvero:

$$y(\theta) = \theta\frac{x\lambda}{2\pi h} \tag{144}$$

A cui corrispondono:

$$\begin{cases} y_{max}\big|_{\theta\in\{0,\pm2\pi,\pm4\pi\}} = 0, \frac{\lambda x}{h}, 2\frac{\lambda x}{h} \\ y_{min}\big|_{\theta\in\{\pm\pi,\pm3\pi\ \pm5\pi\}} = \frac{1}{2}\frac{\lambda x}{h}, \frac{3}{2}\frac{\lambda x}{h} \end{cases} \tag{145}$$

# 13 Interferometro di Michelson

L'interferometro di Michelson studia l'interferenza facendo variare la fase relativa $\Delta\phi$ fra i due campi. Questo viene ottiene modificando il cammino geometrico che uno dei due campi deve fare rispetto all'altro. La differenza con l'interferometro di Young è che agisce lo studio dell'interferenza, e quindi di $\theta()$, avviene modificando la variabile $\Delta\phi$ e mantenendo le altre costanti; l'interferometro precedente invece faceva variare il contributo $K(d_1 - d_2)$. Inoltre l'interferometro di Michelson, per costruzione, ha un beam splitter (BS) 50% che separa il fascio entrante in due direzioni di uguale intensità (50%). Quindi misureremo in uscita un'intensità dimezzata a cui andrà sommato, chiaramente, il contributo d'interferenza.

**Esperimento** La luce polarizzata in entrata, con modulo del campo elettrico $E_0$, passando per il BS 50% divide geometricamente il fascio in due componenti di uguale intensità che affronteranno cammini ottici differenti. Il contributo in uscita dal BS per ogni lato, fattori di fase a parte (si suppongono essere uguali per entrambe le uscite) è in modulo pari a $\frac{E_0}{2}$ dovuto al BS impostato al 50%.

I campi (1) e (2) si propagano su cammini ottici differenti da cui segue uno sfasamento fra di loro. Otteniamo dunque in uscita dal BS e considerando per semplicità il caso scalare:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{E_0}{2} e^{i(K2L_1+Kz)} \\ E_2 = \frac{E_0}{2} e^{i(K2L_2+Kz)} \end{cases} \tag{146}$$

Ne segue che il campo presente sul fotodiodo è:

$$E_{tot} = E_1 + E_2 = \frac{E_0}{2} e^{iKz} \big( e^{iK2L_1} + e^{iK2L_2} \big) \tag{147}$$

A parte un fattore di fase $e^{iKz}$ in comune, irrilevante ai nostri fini, otteniamo che:

$$\begin{aligned} |E_{tot}|^2 &= \frac{|E_0|^2}{4} \big| e^{iK2L_1} + e^{iK2L_2} \big|^2 \\ &= \frac{|E_0|^2}{4} \big( e^{iK2L_1} + e^{iK2L_2} \big) \big( e^{iK2L_1} + e^{iK2L_2} \big)^* \\ &= \frac{|E_0|^2}{4} \big( e^{iK2L_1} + e^{iK2L_2} \big) \big( e^{-iK2L_1} + e^{-iK2L_2} \big) \\ &= \frac{|E_0|^2}{4} \big[ 2 + 2cos(\Delta) \big] \\ &= \frac{|E_0|^2}{2} \big( 1 + cos(\Delta) \big) \end{aligned} \tag{148}$$

Dove la variabile $\Delta = 2K(L_2 - L_1)$ che, fattore di propozionalità a parte, risulta essere proprio lo sfasamento dovuto alla differenza fra i cammini ottici. Stimiamo che l'intensità rilevabile in uscita risulta essere:

$$I_T \propto |E_{tot}|^2 = \frac{I_0}{2} (1 + cos(\Delta)) \tag{149}$$

**Massimi e minimi** Osserviamo che $I_T = I_T(\Delta)$ la quale presenta dei massimi e dei minimi in funzione del valore che assume $\Delta$.

$$\begin{cases} I_T^{max} \big|_{\Delta_{max}} = \frac{I_0}{2}(1+1) = I_0 \\ I_T^{min} \big|_{\Delta_{min}} = \frac{I_0}{2}(1-1) = 0 \end{cases} \tag{150}$$

Osserviamo i massimi per $\Delta = \Delta_{max}$ ovvero per:

$$cos(\Delta) = 1 \Leftrightarrow 2K(L_2 - L_1) = 2n\pi, n \in \mathbb{N} \implies \Delta L \equiv (L_2 - L_1) = \boxed{n\frac{\lambda}{2}} \tag{151}$$

Ovvero i massimi per $\Delta L$:

$$\Delta L \in \{0, \frac{\lambda}{2}, ..., n\frac{\lambda}{2}\}, n \in \mathbb{N} \tag{152}$$

Ed i minimi per $\Delta = \Delta_{min}$ ovvero per:

$$cos(\Delta) = -1 \Leftrightarrow 2K(L_2 - L_1) = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{N} \implies \Delta L \equiv (L_2 - L_1) = \boxed{\frac{\lambda}{2}(n + \frac{1}{2})} \tag{153}$$

Ovvero i minimi per $\Delta L$:

$$\Delta L \in \{\frac{\lambda}{4}, \frac{3}{8}\lambda, ..., \frac{\lambda}{2}(n + \frac{1}{2})\}, n \in \mathbb{N} \tag{154}$$

# 14 Coerenza parziale

Il laser genera è un dispositivo in grado di generare luce, ovvero un'onda elettromagneticha, caratterizzata da intervalli di tempo $\tau_0$ nei quali quest'ultima conserva la stessa fase durante l'intero intervallo. In realtà l'intervallo di tempo non è ben definito ma risulta essere una funzione statistica, da cui segue che possiamo associare un valore medio $< T >_t \equiv \tau_0$. Introdurremo uno strumento in grado di rappresentare la coerenza di un laser.

**Schema concettuale** Supponiamo di avere una sorgente in grado di dividere e generare due fasci di luce $E_1, E_2$, scalari, che affronteranno due cammini ottici differenti e che ricombiniamo successivamente su un rivelatore. Supponiamo che sia $t$ il tempo di propagazione del campo con cammino minore per giungere al rivelatore e definiamo il tempo $\tau$ come il ritardo rispetto ad $E_1$ per giungere anch'esso sullo strumento di misura. Dallo schema concettuale ne segue che:

$$E_{tot} = E_1(t) + E_2(t + \tau) \tag{155}$$

Misurandone l'intensità $< I_T > \propto |E_{tot}|^2$:

$$\begin{aligned} < I_T > &=< (E_1(t) + E_2(t+\tau))(E_1(t) + E_2(t+\tau))^* > \\ &=< I_1 > + < I_2 > + < E_1(t)E_2^*(t+\tau) > + < E_1^*(t)E_2(t+\tau) > \\ &=< I_1 > + < I_2 > + 2Re(< E_1(t)E_2^*(t+\tau) >) \end{aligned} \tag{156}$$

Definiamo $\Gamma_{1,2}(\tau) \in \mathbb{C}$, funzione di correlazione o correlazione mutua, come la seguente:

$$\Gamma_{1,2}(\tau) :=< E_1(t)E_2^*(t+\tau) > \tag{157}$$

Ne segue che possiamo scrivere l'intensità media come:

$$< I_T >=< I_1 > + < I_2 > +2Re(\Gamma_{1,2}(\tau)) \tag{158}$$

Osserviamo che:

$$\begin{cases} \Gamma_{1,1}(0) \equiv < E_1(t)E_1^*(t) >=< I_1 > \\ \Gamma_{2,2}(0) \equiv < E_2(t)E_2^*(t) >=< I_2 > \end{cases} \tag{159}$$

Definiamo, inoltre, $\gamma_{1,2}(\tau)$ la funzione di correlazione normalizzata:

$$\gamma_{1,2}(\tau) = \frac{\Gamma_{1,2}(\tau)}{\sqrt{< I_1 >< I_2 >}} \implies \Gamma_{1,2}(\tau) = \sqrt{< I_1 >< I_2 >}\gamma_{1,2}(\tau) \tag{160}$$

Ovvero che l'intensità totale media risulta essere:

$$< I_T >=< I_1 > + < I_2 > +2\sqrt{< I_1 >< I_2 >}Re(\gamma_{1,2}(\tau)) \tag{161}$$

Essendo $\gamma_{1,2}(\tau) \in \mathbb{C}$ possiamo riscriverla come $\gamma_{1,2}(\tau) = |\gamma_{1,2}(\tau)|e^{i\Delta\phi}$, con $|\gamma_{1,2}(\tau)| \in [0,1]$. Ne segue che $Re(\gamma_{1,2}(\tau) = |\gamma_{1,2}(\tau)|cos(\Delta\phi)$. Distinguiamo i seguenti casi:

- $\boxed{|\gamma_{1,2}(\tau)| = 1} \implies$ Coerenza completa
- $\boxed{|\gamma_{1,2}(\tau)| \in (0,1)} \implies$ Coerenza parziale
- $\boxed{|\gamma_{1,2}(\tau)| = 0} \implies$ Incoerenza completa

Osserviamo per finire un'esperimento in grado di misurare la funzione di correlazione normalizzata.

**Misuriamo $\gamma_{1,2}(\tau)$:** Supponiamo che $I_0 =< I_1 >=< I_2 >$ ed inoltre che:

$$\begin{cases} I_{max} = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0^2}|\gamma_{1,2}(\tau)| = 2I_0(1 + |\gamma_{1,2}(\tau)|) \\ I_{min} = I_0 + I_0 - 2\sqrt{I_0^2}|\gamma_{1,2}(\tau)| = 2I_0(1 - |\gamma_{1,2}(\tau)|) \end{cases} \tag{162}$$

Definiamo la funzione visibilità delle frange $V(\tau)$ come:

$$V(\tau) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{163}$$

Nelle nostre ipotesi $I_0 =< I_1 >=< I_2 >$, ovvero:

$$\begin{aligned} V &= \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \\ &= \frac{(2I_0 + 2I_0|\gamma_{1,2}(\tau)|) - (2I_0 - 2I_0|\gamma_{1,2}(\tau)|)}{(2I_0 + 2I_0|\gamma_{1,2}(\tau)|) + (2I_0 - 2I_0|\gamma_{1,2}(\tau)|)} \\ &= \frac{4I_0^2}{4I_0^2}|\gamma_{1,2}(\tau)| \\ &= |\gamma_{1,2}(\tau)| \end{aligned} \tag{164}$$

Ne deduciamo che ci basta studiare la visibilità delle frange $V(\tau)$, che sperimentalmente risulta essere $V(I_{max}, I_{min})$ per determinare la funzione di correlazione normalizzata precedentemente introdotta.

Per completezza nel caso in cui $< I_1 > \neq < I_2 >$ allora la funzione visibilità delle frange $V(\tau)$ assume la forma:

$$V(\tau) = \frac{2\sqrt{< I_1 >< I_2 >}}{< I_1 > + < I_2 >} |\gamma_{1,2}(\tau)| \tag{165}$$

**Osservazioni importanti** Abbiamo visto come l'intensità totale dipenda dal valore che assume $\theta$, che nel nostro caso risulta essere $\Delta\phi$. Il tempo di ritardo $\tau$ possiamo variarlo icrementando la distanza (e quindi il tempo di propagazione) fra i percorsi ottici. Questa operazione prende il nome di spostamento macroscopico. Ci resta difficile variare la fase relativa fra i due campi. E' possibile ottenere questo risultato montando un piezoelettrico su uno specchio, che modificherà la distanza dell'ordine della lunghezza d'onda avendo ricevuto in ingresso un segnale triangolare in grado di eseguire spostamenti fini.

### 14.1 Espressione analitica di $|\gamma_{1,2}(\tau)|$: primo modello teorico

Supponiamo di avere un'onda piana monocromatica tale che dopo ogni intervallo $\Delta t \equiv \tau_0$ definito cambia fase $\phi$ in modo arbitrario con $\phi \in [-\pi, \pi]$. Possiamo dunque affermare che $\phi = \phi(t)$ ne segue che l'equazione scalare dell'onda monocromatica assume la seguente forma:

$$E_j(t) = E_0 e^{i(Kz - \omega t + \phi(t))} = E_0 e^{iKz} e^{-i\omega t} e^{i\phi(t)} \tag{166}$$

Dunque la funzione di correlazione normalizzata assume la forma, a parte il fattore di propagazione $Kz$ che sarà differente visto il cammino differente che i campi affrontano:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,2}(\tau) &= \frac{< E_1(t) E_2^*(t+\tau) >}{< |E|^2 >} \\
&= < \frac{(E_0 e^{i(-\omega t + \phi(t))})(E_0 e^{i(-\omega t + \phi(t))})^*}{E_0^2} > \\
&= < E_0^2 \frac{e^{-(i\omega t + \phi(t))} e^{-(-i\omega t + \phi(t))}}{E_0^2} > \\
&= < e^{i[\phi(t) - \phi(t+\tau)]} >
\end{aligned} \tag{167}$$

Osserviamo che l'espressione di $\phi(t) - \phi(t+\tau)$ assume la seguente forma:

$$\phi(t) - \phi(t+\tau) = \begin{cases} 0, 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 \implies n\tau_0 + \tau \leqslant t \leqslant (n+1)\tau_0 \\ \Delta, n\tau_0 \leqslant t \leqslant (n+t)\tau \end{cases} \tag{168}$$

Ci resta dunque da calcolare il valore medio temporale dell'epressione precedente. Segue che, dividendo l'intervallo di tempo $T$ in $N$ intervalli di durata $\tau_0$, ovvero $T = N\tau_0$:

$$
\begin{aligned}
< e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]} > &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]}dt \\
&= \frac{1}{N\tau_0}\Big[\int_0^{\tau_0} e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]}dt \int_{\tau_0}^{2\tau_0} e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]}dt + ...+ \\
&+ s\int_{(N-1)\tau_0}^{N\tau_0} e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]}dt\Big] \\
&= \frac{1}{N\tau_0}\big[N\big] \\
&= \frac{(\tau_0 - \tau}{\tau_0} = 1 - \frac{\tau}{\tau_0}, \tau \in (0, \tau_0)
\end{aligned}
\tag{169}
$$

Ovvero l'espressione di $\gamma_{1,2}(\tau)$ assume la forma lineare:

$$\gamma_{1,2}(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\tau_0}, \tau \in (0, \tau_0) \tag{170}$$

Quello che osserveremo graficando $\gamma_{1,2}(\tau) vs \tau$ è una discesa non lineare al crescere di $\tau$ bensì gaussiana. Superato il tempo di coerenza $\tau_0$ la funzione $\gamma_{1,2}(\tau)$ sarà identicamente nulla. Concludiamo che:

$$\gamma_{1,2}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{\tau_0}, \tau \in (0, \tau_0) \\ 0, \tau \notin (0, \tau_0) \end{cases} \tag{171}$$

Conoscendo $\tau_0$ possiamo stimare la lunghezza massima di sfasamento ottico oltre la quale non si osserva più interferenza ovvero in regime di incoerenza totale. La lunghezza di coerenza $l_0$ viene definita come:

$$l_0 := c\tau_0 \tag{172}$$

Dunque $\Delta \equiv |(L_1 - L_2)| \in [0, l_0]$.

### 14.2 Ulteriore modello

## 15 Interferenza multi-fasci: Fabry Perot

Il miglior modo per produrre più fasci *coerenti* fra loro è dividendo il fascio entrante più volte e ricombinandolo. Possiamo realizzare questo schema con un Fabry Perot, strumento composto da due specchi parzialmente riflettenti (altrimenti non ci sarebbe rifrazione!) posti uno di fronte all'altro a distanza $d$ nota.

Supponiamo di avere due superfici parzialmente riflettendi di uguale riflettività e trasmittività. Dalla teoria precedente, abbiamo definito:

$$\begin{cases} r \equiv \frac{E'}{E} \implies E' = Er \\ t \equiv \frac{E''}{E} \implies E'' = Et \end{cases} \tag{173}$$

Dove $r, t \in [0, 1)$.

Supponiamo di avere in entrata un fascio di modulo $E_0$. Dopo aver attraversato il primo specchio avremo un fascino d'intensità $E_0 t$, il quale verrà riflesso generando un fascio d'intensità $E_0 tr$ e rifratto con intensità $E_0 t^2$. Dato che il fascio riflesso, dopo un'ulteriore riflessione verrà ritrasmesso con uno sfasamento, in uscita dal secondo specchio avremo la sovrapposizione di più fasci sfasati, che daranno luogo ad un'interferenza. Calcoliamo il campo totale in uscita.

$$E_{tot} = E_0 t^2 + E_0 t^2 r^2 e^{i\delta} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} E_0 t^2 r^{2n} e^{in\delta} = E_0 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 e^{i\delta})^2 \tag{174}$$

L'ultima espressione rappresenta la serie geometrica, che per definizione dei coefficienti di riflettività e trasmittività sappiamo convergere. Segue che il campo totale avrà intensità pari a:

$$E_{tot} = E_0 t^2 \cdot \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}} \tag{175}$$

Osseriamo che lo sfasamento $\delta$ è composto da un possibile sfasamento dovuto alla riflessione $\frac{\delta_r}{2}$ (se ne prende la metà visto che vi è sempre una doppia riflessione) e lo sfasamento costituito dal cammino diverso che il fascio affronta (che d'ora in poi chiameremo $\delta$). Dunque definiamo $\Delta$ lo sfasamento totale come:

$$\Delta := \delta + \delta_r \tag{176}$$

Per calcolare il lo sfasamento dovuto al cammino ottico differente, possiamo osservare che esso sarà $\delta = Kl$, dove $l$ è la differenza di cammino. Inoltre $l$ è a sua volta costituito da $AB + BC$, dove, se con $\theta$ indichiamo l'angolo d'incidenza:

$$\begin{cases} AB = BCcos(2\theta) \\ BCcos(\theta) = d \end{cases} \tag{177}$$

$$\begin{cases} AB = \frac{d}{cos(\theta)} cos(2\theta) \\ BC = \frac{d}{cos(\theta)} \end{cases} \tag{178}$$

Dunque lo sfasamento totale $\Delta$:

$$\Delta \equiv \delta + \delta_r = (AB + BC) + \delta_r = \frac{4\pi}{\lambda_0} ndcos(\theta) + \delta_r \tag{179}$$

Possiamo osservare, dunque, che lo sfasamento e quindi l'interferenza, essendo dovuti a $\Delta$ sono regolabili in funzione della distanza degli specchi, in quanto $\Delta = \Delta(d)$, avendo approssimato $cos(\theta) \simeq 1$ per un possibile allineamento sperimentale.

Dunque il campo totale risulta essere:

$$E_{tot} = E_0 \frac{t^2}{1 - r^2 e^{i\Delta}} \tag{180}$$

L'intensità misurata, essendo proporzionale al modulo quadro del campo, sarà:

$$I_{tot} = |E_0|^2 \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{i\Delta}|^2} = I_0 \frac{T^2}{|1 - Re^{i\Delta}|^2} \tag{181}$$

Dove $T \equiv t^2$, $R \equiv r^2$. Possiamo scrivere meglio la forma analitica dell'intensità osservando che il termine $|1 - Re^{i\Delta}|^2$ può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} |1 - Re^{i\Delta}|^2 &= (1 - Re^{i\Delta})(1 - Re^{i\Delta})^* = (1 - Re^{i\Delta})(1 - Re^{-i\Delta}) = \\ &= 1 + R^2 - Re^{i\Delta} - Re^{-i\Delta} = 1 + R^2 - Rcos(\Delta) = \\ &= (1 - R)^2 \big(1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} sin^2(\frac{\Delta}{2})\big) \end{aligned} \tag{182}$$

Definendo $F(R) := \frac{4R}{(1-R)^2}$ *funzione di Airy* possiamo concludere che l'intensità misurata in uscita da un Fabry Perot seguirà l'andamnto tipico spettrale descritto dalla seguente funzione analitica:

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + Fsin^2(\frac{\Delta}{2})} = I_0 \frac{1}{1 + Fsin^2(\frac{\Delta}{2})} \tag{183}$$

Dove l'ultima approssimazione è valida in assenza di assorbimento, ovvero per $T^2 + R^2 = 1$.

**Osservazioni** L'intensità d'uscita di un Fabry Perot è funzione della riflettività $R$ e dello sfasamento $\Delta$, ovvero $I = I(R, d)$ in quanto $\Delta = \Delta(d)$ sotto le approssimazioni fatte e gli esperienze affrontate in laboratorio.

**Intensità massima** Osserveremo l'intensità massima quando, in assenza di assorbimento, il denominatore sarà minimo, dunque per:

$$\frac{\Delta}{2} = 2\pi N \tag{184}$$

Dove $N$ indica l'ordine di interferenza o anche il multiplo della lunghezza d'onda necessarie per rappresentare lo sfasamento. Infatti:

$$2\pi N = \frac{4\pi}{\lambda_0} nd + \delta_r \tag{185}$$

Scrivibile anche come:

$$N(\frac{\lambda_0}{n}) \equiv N\lambda = 2dcos(\theta) + \delta_r \simeq l + \frac{\lambda_0}{2\pi n}\delta_r \tag{186}$$

In quanto la distanza di sfasamento definita come $l$ era $l = AB + BC = 2dcos(\theta) \simeq 2d$ per $cos(\theta) \simeq 1$. Si osservi che il termine dovuto allo sfasamento degli specchi risulta ancora essere dimensionalmente una lunghezza, chiaramente.

## 15.1 Risoluzione Fabry Perot: interferometro

Supponiamo di avere un fascio di luce composto da due onde monocromatiche di pulsazione $\omega, \omega'$ molto vicine fra loro, ovvero $d\omega = \omega - \omega' \simeq 0$. L'andamento analitico spettrale in uscita sarà dunque in assenza di assorbimento:

$$I_{tot} = I_0\frac{1}{1+Fsin^2(\frac{\Delta}{2})} = I_0\frac{1}{1+Fsin^2(\frac{\Delta}{2})} + I_0\frac{1}{1+Fsin^2(\frac{\Delta}{2})} = I_0\frac{1}{1+Fsin^2(\frac{\Delta'}{2})} \tag{187}$$

Dove $\Delta(\omega) = Kl + \delta_r \simeq \frac{\omega}{c}2n + \delta_r$. Dunque:

$$\begin{cases} \Delta = \frac{\omega}{c}2nd + \delta_r \\ \Delta' = \frac{\omega'}{c}2nd + \delta_r \end{cases} \implies |\Delta - \Delta'| = 2n\frac{\delta\omega}{c} \tag{188}$$

Per vedere la risoluzione spaziale del Fabry Perot, ovvero sostanzialmente fino a che punto posso poter affermare di distinguere due frequenze diverse, applico il principio di Taylor, il quale afferma che *due righe spettrali uguali sono considerate risolte se le curve individuali si incontrano nel punto d'intersezione* $\tilde{\Delta} = \Delta - \Delta'$ *con valore d'intensità pari a* $\frac{I_0}{2}$*, tale che la loro somma risulta dunque essere pari a* $I_0$*.*

Imponendo questa condizione deduciamo che:

$$I_{tot}(\tilde{\Delta})\big|_{\tilde{\Delta}=\Delta-\Delta'} = \frac{I_0}{2} \tag{189}$$

$$\implies I_0\frac{1}{1+Fsin^2(\frac{\Delta-\Delta'}{2})} = \frac{I_0}{2} \tag{190}$$

Valida se:

$$Fsin^2(\frac{\Delta-\Delta'}{2}) = 1 \tag{191}$$

Dato che sotto la condizione che $\delta\omega \simeq= 0 \implies |\Delta - \Delta'| \simeq 0$ possiamo sostituire il seno con il suo argomento:

$$F\frac{|\Delta-\Delta'|^2}{4} = 1 \implies |\Delta - \Delta'| = 2F^{-\frac{1}{2}} \tag{192}$$

Dalla quale possiamo calcolarci che la minima variazione spaziale risulta essere:

$$\boxed{|\Delta - \Delta'| = 4F^{-\frac{1}{2}}} = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}} \tag{193}$$

Che in termini di frequenza, visto che $|\Delta - \Delta'| = 2n\frac{\delta\omega}{c}d$:

$$\delta\omega = \frac{c}{nd}F^{-\frac{1}{2}} \tag{194}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} |\Delta - \Delta'| = 2F^{-\frac{1}{2}} = \frac{1-R}{\sqrt{R}} \\ \delta\omega = \frac{c}{nd}F^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{nd}\frac{1-R}{\sqrt{R}} \end{cases} \tag{195}$$

**Free spectral range** Definiamo il *free spectral range* anche chiamato *coefficiente di Finesse F* come:

$$F = \frac{\Delta_{N+1} - \Delta N}{|\Delta - \Delta'|} = \frac{2\pi}{4F^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{F} = \pi\frac{\sqrt{R}}{1-R} \tag{196}$$

**Potere risolutivo** Definiamo il *potere risolutivo RP* come:

$$RP = \frac{\omega}{d\omega} = \frac{\nu}{d\nu} = \frac{\lambda}{|d\lambda|} \tag{197}$$

Dove $d\omega$ rappresenta il range strumentale. Nel caso di Un Fabry Perot, il potere risolutivo risulta essere:

$$RP = N\pi\frac{\sqrt{R}}{1-R} \tag{198}$$

Il termine N, che indica l'ordine d'interferenza, si presenta perché la differenza fra i due massimi è $2\pi N$.

**Osserviamo che stimando il coefficiente di Finesse possiamo dedurre il potere risolutivo del Fabry Perot e quindi la sensibilità di quest'ultimo come strumento usato per interferometria.**

# 16 Diffrazione

La diffrazione è un fenomeno ondulatorio riscontrabile quando il fronte d'onda viene limitato in presenza di ostacoli, come fenditure o fori, od oggetti in mezzo al cammino ottico della luce. E' presente quando le lunghezze in gioco sono circa quelle della lunghezza d'onda $\lambda$. A tale proposito, si osservi quanto maggiore è $\lambda$ tanto maggiore osserverò la diffrazione. Riportiamo una definizione tratta da Wikipedia:

> In fisica, fenomeno che si manifesta tutte le volte che un'onda (luminosa, elastica, ecc.) incontra un ostacolo (per es. un foro, una fenditura, un bordo) e per il quale tutti i punti dell'ostacolo diventano sorgenti di altre onde sferiche coerenti elementari; al di là dell'ostacolo opaco le onde riescono a raggiungere anche punti che resterebbero in ombra se la propagazione fosse semplicemente rettilinea.

Osserviamo come possiamo trattare matematicamente il fenmeno.

## 16.1 Introduzione e regimi

E' possibile descrivere la diffrazione ipotizzando che ogni punto del fronte d'onda è composto a sua volta da onde sferiche. L'inviluppo delle onde sferiche rappresenta il nuovo fronte d'onda. Supponiamo di avere una sorgente $S$, una parete con fenditure $\Sigma$ ed uno schermo $\sigma$. Possiamo distinguere due diversi regimi di diffrazione:

- Regime di Fraunhofer
- Regime di Fresnel

Supponiamo che l'onda in ingresso alla fenditura sia piana e monocromatica. In uscita dalla parete con la fenditura $\Sigma$, distingueremo i casi:

**Regime di Fraunhofer** Il regime di Fraunhofer si verifica quando la distanza fra la parete con le fenditure e lo schermo è molto maggiore di $\lambda$, $\boxed{d(\Sigma, \sigma) \gg \lambda}$. Ovvero quando in uscita da $\Sigma$ possiamo approssimare la luce come onda piana.

**Regime di Fresnel** Il regime di Fresnel si verifica quando la distanza fra la parete con le fenditure e lo schermo è di qualche $\lambda$, $\boxed{d(\Sigma, \sigma) \simeq \lambda}$. Ovvero quando in uscita da $\Sigma$ trattiamo la luce come onda sferica.

**Osservazioni importanti** Se la distanza fra parete e schermo è molto minore di $\lambda$, ovvero $d(\Sigma, \sigma) \ll \lambda$ non si osserverà diffrazione. Inoltre, se $\lambda \mapsto 0$ nuovamente non sarà possibile osservare diffrazione.

Il nostro obiettivo sarà relazionare il valore del campo di un punto del fronte d'onda sferico (che avrà, dunque, medesima intensità su tutto il fronte) con il valore del campo in un punto $P$ generico di raggio vettore noto.

## 16.2 Trattazione matematica formale

Si considerino $U, V$ due campi scalari monocromatici tali che:

$$\begin{cases} \nabla^2 U = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U \\ \nabla^2 V = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V \end{cases} \tag{199}$$

Dove $v \equiv \frac{c}{n}$ è la velocità di fase. Osserviamo che vale la seguente relazione:

$$U\nabla^2 V - V\nabla^2 U = 0 \tag{200}$$

Dal teorema di Green, dove A è una superficie sferica ed $n = \hat{n}$ la normale uscente da essa:

$$\oint_A (V grad_n(U) - U grad_n(V))dA = \int\int\int_V (U\nabla^2 V - V\nabla^2 U)dV \tag{201}$$

Sfruttando la relazione precedente segue che:

$$\oint_A (V grad_n(U) - U grad_n(V))dA = 0 \tag{202}$$

Dove:

$$\begin{cases} grad_n(U) = \frac{\partial}{\partial n}U \\ grad_n(V) = \frac{\partial}{\partial n}V \end{cases} \tag{203}$$

Imponiamo che il campo V sia un'onda sferica monocromatica centrato in P, il punto in cui vogliamo calcolare il campo. Ne segue che:

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r}V_0 e^{iKr} e^{-i\omega t} \tag{204}$$

Osserviamo che il campo diverge per $r \to 0$. Per calcolare l'integrale, dunque, dobbiamo eliminare una sfera di raggio $\rho$ centrata in P e poi fare il limite per $\rho \to 0$.

$$\begin{aligned} &\oint_A (V grad_n(U) - U grad_n(V))dA = \\ &= \oint_A (V grad_n(U) - U grad_n(V))dA - \lim_{\rho\to 0} \oint_\rho (V grad_n(U) - U grad_n(V))\rho^2 d\Omega \end{aligned} \tag{205}$$

Calcoliamo il secondo integrale osservano che $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ e sostituiamo $V(r, \theta, \phi)$.

$$\begin{aligned} \oint_\rho (V grad_n(U) - U grad_n(V))\rho^2 d\Omega &= V_0 e^{-i\omega t} \oint_\rho \big(U \frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{iKr}}{r} - \frac{e^{iKr}}{r}\frac{\partial}{\partial r}U\big)_{r=\rho} \rho^2 d\Omega \\ &= V_0 e^{-i\omega t} \oint_\rho \\ &= V_0 e^{-i\omega t} \oint_\rho \\ &= -4\pi U(P) \end{aligned} \tag{206}$$

Allora:

$$Prova \tag{207}$$

(...)
L'equazione finale nota come formula integrale di Fresnel-Kirchoff:

$$U(P) = -\frac{iKU_0e^{-i\omega t}}{4\pi}\int\int_A \frac{e^{iK(r+r')}}{rr'}[cos(n\cdot r) - cos(n \cdot r')]dA \tag{208}$$

Riscrivibile sotto approssimazioni come:

$$U(P) = C\int\int_A e^{iKr}dA \tag{209}$$

### 16.3 Fenditura singola (1D)

Sia $r = r_0 + ysin(\theta)$, allora:

$$\begin{aligned} U(P) &\equiv C\int_A e^{iKr}dA = C\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} e^{iKr+iKysin(\theta)}Ldy = \\ &= \frac{1}{iKsin(\theta)}(CLe^{iKr_0})\big[e^{ikysin(\theta)}\big]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=+\frac{b}{2}} = \\ &= \frac{2}{ksin(\theta)}(\frac{sin(\beta)}{\beta}) \end{aligned} \tag{210}$$

Dunque l'intensità seguirà la forma analitica:

$$I = I_0(\frac{sin(\beta)}{\beta})^2 \tag{211}$$

Dove $\beta \equiv \frac{1}{2}Kb$.

### 16.4 Fenditura singola (2D)

Analogo procedimento alla fenditura unidimensionale, integrando $dA$ su un dominio $[-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}] \times [-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}] \in \mathbb{R}$. Ne segue che:

$$I = I_0(\frac{sin(\beta)}{\beta})^2(\frac{sin(\alpha)}{\alpha})^2 \tag{212}$$

Dove $\beta \equiv \frac{1}{2}Kb, \alpha \equiv \frac{1}{2}Ka$

### 16.5 Fori

Risolvendo in coordinate sferiche si dimostra che l'intensità assume la seguente forma analitica:

$$I = I_0\big[\frac{2J_1(\rho)}{\rho}\big]^2, \forall\phi \in [0, 2\pi] \tag{213}$$

Dove $J_1(\rho)$ è la funzione di Bessel che assume un minimo per $\rho_{min} = 3.832$, con $\rho$ definito come $\rho = KRsin(\theta)$. Possiamo dunque calcolare a quale angolo esso si presenta:

$$\rho_{min} = KRsin(\theta_{min}) \implies sin(\theta_{min}) = \frac{\rho_{min}}{KR} = \frac{\rho_{min}}{2\pi R}\lambda \tag{214}$$

Ovvero, definito $D := 2R$ il diametro del foro ed essendo $\theta \simeq 0 \implies sin(\theta) \simeq \theta$:

$$sin(\theta_{min}) \simeq \theta_{min} = \frac{\rho_{min}}{\pi}\frac{\lambda}{D} = \frac{1.22\lambda}{D} \tag{215}$$

### 16.6 Reticolo: N Fenditure

Sia $b$ l'apertura delle N fenditure distanziate di $h$ l'una dall'altra, l'integrale si riduce alla seguente forma:

$$\begin{aligned} U(P) \equiv C\int_A e^{iKr}dA = C\int_0^b \int_h^{h+b} \int_{2h}^{2h+b} ... \int_{(N-1)h}^{(N-1)h+b} e^{iKr+iKysin(\theta)}Ldy = \\ = \frac{(e^{ikbsin(\theta)}-1)}{iksin(\theta)}\frac{1-e^{iK(N-1)hsin(\theta)}}{1-e^{iKNhsin(\theta)}} = \\ = be^{i\beta}e^{i(N-1)\gamma}(\frac{sin(\beta)}{\beta})(\frac{sin(N\gamma)}{\gamma}) \end{aligned} \tag{216}$$

Dove le variabili ultime variabili sono definite come segue:
$\beta = \frac{1}{2}khsin(\theta), \gamma = \frac{1}{2}khsin(\theta)$.

## 17 Riflessione e rifrazione

### 17.1 Relazione vettoriale

Determiniamo le equazioni fisiche che trattano la riflessione e la rifrazione. Consideriamo un'onda piana monocromatica in propagazione in un materiale con indice di rifrazione $n_1$ che incide su un altro materiale con indice di rifrazione $n_2$.

$$\begin{cases} E(\vec{r},t) &= E_0 e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ E'(\vec{r},t) &= E_0' e^{i(\vec{K'}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ E''(\vec{r},t) &= E_0'' e^{i(\vec{K''}\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{cases} \tag{217}$$

Dove i vettori d'onda $K, K', K''$ (e quindi i campi $E^j$) rappresentano rispettivamente l'onda incidente, riflessa e rifratta.

**Condizione** Affinché la relazione seguente sia valida per ogni costante, per ogni punto del piano d'incidenza (boundary) e per ogni tempo è necessario che **gli argomenti degli esponenziali siano uguali al confine**.

Ne segue che:

$$\begin{aligned} \vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t = {}'\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t = \vec{K''} \cdot \vec{r} - \omega t \\ \implies \vec{K} \cdot \vec{r} = {}'\vec{K} \cdot \vec{r} = \vec{K''} \cdot \vec{r} \end{aligned} \tag{218}$$

Ne deduciamo che:

- $K, K', K''$ sono complanari;
- Le loro proiezioni sul piano d'incidenza sono uguali;

Dunque, proiettando sul piano di confine ne segue che:

$$K sin(\theta) = K' sin(\theta') = K'' sin(\phi) \tag{219}$$

Dato che $K = K'$ perché l'onda riflessa si propaga nello stesso mezzo, giungiamo alle seguenti conclusioni:

$$\begin{cases} sin(\theta) = sin(\theta') & \implies \boxed{\theta = \theta'} \\ K sin(\theta) = K'' sin(\phi) & \implies \boxed{n_1 sin(\theta) = n_2 sin(\phi)} \end{cases} \tag{220}$$

## 17.2 Relazione d'ampiezza

Vediamo ora le relazione d'ampiezza fra il campo incidente $E$, il campo riflesso $E'$ ed il campo rifratto o trasmesso $E''$. Ricordando che dalle equazioni di Maxwell si possono sostituire gli operatori rotore con il prodotto vettoriale del vettore d'onda e l'operatore temporale con la pulsazione ne segue che:

$$\begin{cases} \vec{H} & = \frac{1}{\mu\omega} \vec{K} \times \vec{E} \\ \vec{H'} & = \frac{1}{\mu\omega} \vec{K'} \times \vec{E'} \\ \vec{H''} & = \frac{1}{\mu\omega} \vec{K''} \times \vec{E''} \end{cases} \tag{221}$$

Osserviamo che le relazioni sono valide istantaneamente e la fase viene elisa a destra ed a sinistra in quanto presente in ambo i membri. Inoltre i vettori $K, H, E$ sono una terna mutualmente ortogonale.

**Sistema di riferimento** Scegliamo di scomporre il campo in una componente ortogonale (trasversa) al piano di confine fra i due materiali ed una componente parallela al piano di confine. Definiamo dunque:

- **TE** - **T**ransverse **E**lectric polarization: componente di $\vec{E}$ parallela al piano di confine
- **TM** - **T**ransverse **M**agnetic polarization: componente di $\vec{H}$ parallela al piano di confine

Dalle condizioni al bordo delle equazioni di Maxwell deve valere che fra materiale 1, 2, dove la sigla $t$ indica la componente tangente al bordo:

$$\begin{cases} E_{t_1} = E_{t_2} \\ H_{t_1} = H_{t_2} \end{cases} \tag{222}$$

Ora scomponiamo l'onda incidente nella base $TE, TM$ (si osservi che TM implica la componente ortogonale a TE) e imponiamo le condizioni di bordo:

**TE** Per la componente TE, dove $E$ risulta già essere parallela e quindi tangente al bordo per scelta del sistema di riferimento:

$$\begin{cases} -E + E' = E'' \\ -Hcos(\theta) + H'cos(\theta) = -H''cos(\phi) \end{cases} \tag{223}$$

Dalla seconda, sostituendo le relazioni fra H ed E vista la loro mutua ortogonalità e semplificando il fattore $\frac{1}{\mu\omega}$ ne segue:

$$\boxed{-KEcos(\theta) + KE'cos(\theta) = -K''E''cos(\phi)} \tag{224}$$

**TM** Per la componente TM, dove $E$ risulta ora essere ortogonale al bordo per scelta del sistema di riferimento mentre H ne è tangente:

$$\begin{cases} Ecos(\theta) + E'cos(\theta) = E''cos(\phi) \\ H - H' = H'' \end{cases} \tag{225}$$

Dalla seconda, sostituendo le relazioni fra H ed E vista la loro mutua ortogonalità e semplificando il fattore $\frac{1}{\mu\omega}$ ne segue:

$$KE - K'E' = K''E' \implies E - E' = \frac{K''}{K'}E'' = nE'' \tag{226}$$

Dunque, dato che $K' = K$:

$$\boxed{E - E' = nE''} \tag{227}$$

Svolgendo i conti possiamo definire i coefficienti $r_s, r_p, t_s, t_p$ definiti come segue e che regolano le relazioni d'ampiezza:

$$\begin{cases} r_s = \left[\frac{E'}{E}\right]_{TE} \\ r_p = \left[\frac{E'}{E}\right]_{TM} \\ \\ t_s = \left[\frac{E''}{E}\right]_{TE} \\ t_p = \left[\frac{E''}{E}\right]_{TM} \end{cases} \tag{228}$$

Si osservi che ne definiscono la relazione d'ampiezza perché è possibile, conoscendo i coefficienti $r_j, t_j$ scrivere per le componenti del campo riflesso:

$$\begin{cases} E'_j = E_j r_j \\ E'_j = E_j t_j \end{cases} \tag{229}$$

Possiamo scrivere analiticamente i coefficienti in tre possibili forme, a seconda delle loro funzioni. Si osservi che sono generalmente funzione di $\theta, \phi, n$.

**In funzione di** $(\theta, \phi, n)$

$$\begin{cases} r_s(\theta, \phi, n) = \frac{cos(\theta) - ncos(\phi)}{cos(\theta) + ncos(\phi)} \\ r_p(\theta, \phi, n) = \frac{-ncos(\theta) + cos(\phi)}{ncos(\theta) + cos(\phi)} \end{cases} \tag{230}$$

**In funzione di** $(\theta, \phi)$**: eq. di Fresnel**

$$\begin{cases} r_s(\theta, \phi) = -\frac{sin(\theta - \phi)}{sin(\theta + \phi)} \\ r_p(\theta, \phi) = -\frac{tan(\theta - \phi)}{tan(\theta + \phi)} \end{cases} \tag{231}$$

**In funzione di** $(\theta, n)$

$$\begin{cases} r_s(\theta, \phi) = \frac{cos(\theta) - \sqrt{(n^2 - sin^2(\theta))}}{cos(\theta) + \sqrt{(n^2 - sin^2(\theta))}} \\ r_p(\theta, \phi) = \frac{-n^2 cos(\theta) - \sqrt{(n^2 - sin^2(\theta))}}{n^2 cos(\theta) + \sqrt{(n^2 - sin^2(\theta))}} \end{cases} \tag{232}$$

**Angolo di Brewster** Si definisce angolo di Brewster $\theta_B$ l'angolo di incidenza per il quale la componente del campo TM, ovvero quella ortogonale al piano di confine ha riflessione nulla. Dunque:

$$r_p(\theta)|_{\theta = \theta_B} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\theta_B = arctan(\frac{n_2}{n_1})} \tag{233}$$

Nel caso fra aria e perspex $\theta_B \simeq 57$ gradi.

# 18 Dispersione: ottica dei solidi

Dall'elettromagnetismo classico si è definita la costante suscettività $\chi$ il fattore di proporzionalità fra vettore di polarizzazione P e campo elettrico E, la quale risultava essere un numero reale perché il materiale era per ipotesi omogeoneo ed isotropo. Dunque:

$$P = \epsilon_0 \chi E \tag{234}$$

Nei materiali non isotropici, il coefficiente suscettività risulta essere un tensore perché la polarizzazione dipende sia dal valore del campo, ma anche dalla sua direzione. **Il tensore $\chi$ determina la maggior parte delle proprietà ottiche degli elementi/cristalli**. Vediamo perché.

Ipotizziamo di trattare con materiali non magnetici ed elettricamente neutri. Dunque:

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases} \tag{235}$$

Le equazioni di Maxwell si riducono alle seguenti:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{P} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} + \vec{J} \end{cases} \tag{236}$$

Possiamo scrivere l'equazione delle onde:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} \tag{237}$$

I termini al secondo membro sono i cosiddetti *source terms* in quanto spiegano molti degli effetti ottici quali assorbimento, dispersione e doppia riflessione. Possiamo trascurare il vettore $\vec{J}$ che risulta essere dominante nei conduttori ma trascurabile nel nostro caso.

Dunque ci interessa scrivere l'equazione delle onde determinando unicamente il vettore di polarizzazione $\vec{P}$. Possiamo osservare che la polarizzazione risulta essere proporzionale al numero di atomi per unità di volume $N$, alla carica elettrica $q = -e$ ed al raggio d'equilibrio.

$$P = -Ner_0 \tag{238}$$

Ci interessa determinare il raggio d'equilibrio nel caso statico e dinamico per ottenere la polarizzazione.

**Campo elettrico $\vec{E}$ esterno statico** Nel caso in cui vi sia un campo elettrico esterno statico, gli elettroni risultano legati elasticamente al nucleo, ne deduciamo che:

$$-eE = Kr_0 \implies r_0 = -\frac{e}{K} E \tag{239}$$

Dunque il vettore di polarizzazione è:

$$P = \frac{Ne^2}{K} E \tag{240}$$

**Campo elettrico $\vec{E}$ esterno variabile** Supponiamo di avere un campo elettrico esterno variabile armonicamente, con pulsazione $\omega$. Ovvero:

$$E = E_0 e^{-i\omega t} \tag{241}$$

Possiamo riscrivere l'equazione di Newton ma dobbiamo aggiungere un termine di smorzamento. Ne segue che:

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{r} + m\gamma\frac{\partial}{\partial t}\vec{r} + K\vec{r} = -eE \tag{242}$$

Se imponiamo un'andamento radiale della forma:

$$r(t) = r_0 e^{-i\omega t} \tag{243}$$

Sostituendolo nell'equazione otteniamo che:

$$(-m\omega^2 - mi\omega\gamma + K)r = -eE \implies r = -\frac{eE}{K - m\omega^2 + im\omega\gamma} \tag{244}$$

Ponendo $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ possiamo scrivere il vettore polarizzazione come:

$$P(\omega) = \frac{1}{m}\frac{Ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}E \tag{245}$$

Osserviamo che $P = P(\omega) \in \mathbb{C}$, con un modulo ed una fase. La fase possiamo rappresentarla come il tempo di reazione. Si osservi che per $\omega = 0$ si ritorna al caso statico.

Sostituendo il vettore di polarizzazione nell'equazione delle onde, osservando che il termine risulta lineare per $E$ possiamo concludere che:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\big(1 + \frac{1}{m}\frac{Ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\big)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \tag{246}$$

Cercando una soluzione piana monocromatica $E = E_0 e^{i(Kz - \omega t)}$ osserviamo che abbiamo un nuovo vettore d'onda $K \in \mathbb{C}$:

$$K = \frac{\omega^2}{c^2}\big(1 + \frac{1}{m}\frac{Ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\big) \in \mathbb{C} \tag{247}$$

Dunque possiamo scrivere $K_c = K_R + iK_I$. Ne concludiamo che l'onda piana monocromatica dopo aver percorso una distanza $z$ attraverso il mezzo sarà:

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{i(K_c z - \omega t)} = E_0 e^{i(K_R z + iK_I z - \omega t)} = \\ &= E_0 e^{-K_I z} e^{i(K_R z - \omega t)} \end{aligned} \tag{248}$$

Dunque la sua intensità, essendo proporzionale al modulo quadro del campo elettrico risulterà essere decrescente esponenzialmente:

$$\boxed{I = I_0 e^{-2K_I z}} \tag{249}$$

# 19 Propagazione della luce nei cristalli anisotropi

I cristalli sono caratterizzati da essere anisotropi, ovvero materiali in cui la polarizzazione $\vec{P}$ del campo è proporzionale sì al valore del campo, ma la stessa proporzionalità varia anche con la direzione del campo. La birifrangenza rappresenta lo sdoppiamento di un raggio che, incidendo sul cristallo, viene diviso in quello che si chiama raggio ordinario, nel senso che obbedisce alla legge usuale della rifrazione, lalegge dei seni, e in un raggio straordinario, che invece si rifrange in modo anomalo. (cit. Mataloni) Possiamo distinguere due casi:

- Materiali isotropi: la polarizzazione dipende scalarmente, linearmente ed in maniera costante dal campo, qualsiasi sia la direzione del campo. Ovvero $P = \epsilon_0 \chi E, \chi \in \mathbb{R}$ *per ogni direzione*.

- Materiali anisotropi: il vettore di polarizzazione mantiene la sua linearità (nell'ottica lineare, chiaramente) con il campo, ma la costante di proporzionalità $\chi$ diventa un tensore ed il suo significato fisico risiede nel fatto che la polarizzazione *dipende dalla direzione* e quindi dalla natura vettoriale di $\vec{E}$. Dunque $\vec{P} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \vec{E}$

Il tensore $\overleftrightarrow{\chi}$ è chiamato tensore di suscettività dal quale possiamo definire il tensore dielettrico relativo $\overleftrightarrow{\epsilon_r}$:

$$\overleftrightarrow{\epsilon_r} := \overleftrightarrow{1} + \overleftrightarrow{\chi} \tag{250}$$

E quindi il tensore dielettrico del mezzo $\overleftrightarrow{\epsilon}$ come:

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\epsilon_r} = \epsilon_0 (\overleftrightarrow{1} + \overleftrightarrow{\chi}) \tag{251}$$

**Osservazione** Per i cristalli <u>non assorbendi</u> esistono sempre tre assi lungo i quali il tensore è diagonale, chiamati assi ottici principali.

Vediamo come ottenerli.

Innanzitutto possiamo scrivere la relazione vettoriale:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{252}$$

Nel sistema di riferimento degli assi ottici, in cui la matrice risulta essere diagonale, gli autovalori vengono definiti come suscettività principali, quali $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{33}$ da cui possiamo definire le costanti dielettriche relative principali $K_{11}, K_{22}, K_{33}$:

$$\begin{cases} K_{11} := 1 + \chi_{11} \\ K_{22} := 1 + \chi_{22} \\ K_{33} := 1 + \chi_{33} \end{cases} \tag{253}$$

Ricordando l'equazione delle onde e trascurando il termine relativo al vettore $\vec{J}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \tag{254}$$

Al vettore di polarizzazione $\vec{P}$ sostituiamo la sua espressione in termini di tensore, da cui segue che, osservando che il tensore è indipendente dal tempo:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \overleftrightarrow{\chi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \tag{255}$$

Cercando una soluzione d'onda piana monocromatica l'espressione si riduce alla seguente:

$$\vec{K} \times (\vec{K} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\chi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \tag{256}$$

Questa espressione ci permette di scrivere tre equazioni scalari, mediante le quali, dopo aver imposto il determinante uguale a zero per scartare vettori d'onda $\vec{K}$ banali, si possono ottenere le condizioni che soddisfano la diagonalità della matrice e quindi gli assi ottici. Si otterranno generalmente per ogni asse equazioni di una circonferenza ed di un ellisse, la cui intersezione determinerà l'asse ottico corrispettivo.

Inoltre è facilmente dimostrabile che esistono velocità di fase differenti, in quanto esse sono definite come $K = \frac{\omega}{u} \implies u = \frac{\omega}{K}$ da cui, nel caso $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z) = (K_x, 0, 0)$ segue che:

$$\begin{cases} v_{g_1} = \frac{\omega}{K_1} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{K_{11}}} \\ v_{g_2} = \frac{\omega}{K_2} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{K_{22}}} \end{cases} \tag{257}$$

# 20 Attività ottica

Si definisce attività ottica la capacità di un materiale di far ruotare la polarizzazione della luce ricevuta in ingresso a causa della propagazione nel materiale. Questa peculiarità è descrivibile dalla teoria dei cristalli bifrangenti e dimostreremo come la luce, dopo aver percorso una certa distanza $l$, sarà ruotata di un certo angolo $\theta(l)$ rispetto alla polarizzazione in ingresso. Dalla precedente sezione possiamo definire i vettori d'onda $K_R, K_L$ per le polarizzazioni circolari destra e sinistra come:

$$\begin{cases} K_R := 1 + \chi_{11} + \chi 22 \\ K_L := 1 - \chi_{11} - \chi 22 \end{cases} \tag{258}$$

Supponiamo di avere in ingresso una polarizzazione di tipo $\vec{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nella base delle polarizzazione circolare destra e sinistra possiamo scrivere che:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{259}$$

Dopo aver percorso una distanza $l$ nel mezzo avremo che la polarizzazione circolare destra e sinistra avranno subito uno sfasamento totale di $\delta = K_{R,L}l$. Dunque il nuovo vettore di Jones sarà:

$$\begin{aligned} \vec{J}(l) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{iK_R l} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{iK_L l} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{iK_R l} + e^{iK_L l} \\ \frac{1}{2}e^{iK_R l} - e^{iK_R l} \end{pmatrix} = \\ = e^{i\frac{1}{2}(K_R + K_L)l}\begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix} = e^{i\phi}\begin{pmatrix} cos(\theta(l)) \\ sin(\theta(l)) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{260}$$

Dove abbiamo definito le seguenti quantità:

$$\begin{cases} \phi(l) = i\frac{1}{2}(K_R + K_L)l \\ \theta(l) = \frac{1}{2}(K_R - K_L)l \end{cases} \tag{261}$$

Osserviamo dunque che la polarizzazione del nuovo vettore di Jones dopo aver percorso una distanza $l$ è di angolo $\theta(l)$ che è propozionale alla differenza fra gli indici di rifrazione circolare destra e sinistra. Infatti:

$$\theta(l) = \frac{1}{2}(K_R - K_L)l = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}(n_R - n_L)l \tag{262}$$

Maggiore è la variazione $\Delta n \equiv n_r - n_L$ maggiore sarà la velocità di rotazione della polarizzazione a parità di distanza percorsa. E' chiaramente intuibile come il parametro importante che caratterizza l'attività ottica e quindi il potere rotativo ha le dimensioni di un angolo su una lunghezza. Infatti $\theta = \tilde{\omega} l$, con $\tilde{\omega} := \frac{\Delta\theta}{\Delta l}$.

# 21 Ottica geometrica

# 22 Esperienze di laboratorio