

# Problemario de Álgebra Lineal

Andrés Fabián Leal Archila  
anfalear@correo.uis.edu.co  
Escuela de Matemáticas  
Universidad Industrial de Santander  
aleal214@unab.edu.co  
Departamento de Ciencias Básicas  
Universidad Autónoma de Bucaramanga

Última actualización: 11 de julio de 2025

---

*“Si he visto más, es poniéndome sobre los hombros de Gigantes”*  
***Isaac Newton.***

---



# Prefacio a la primera edición

Este documento proporciona preparación para exámenes, talleres y quices de Álgebra Lineal, presentando problemas prácticos y sus soluciones extraídas de diversas fuentes bibliográficas.

El documento inicia con las políticas del curso, contenidos, evaluación y contacto. Cada capítulo incluye secciones con resumen teórico, problemas resueltos y ejercicios de práctica. Al final se proponen rutinas de programación en Python 3.x, Wolfram Alpha, [www.matrixcalc.org/es](http://www.matrixcalc.org/es) y GeoGebra.

Este material está en construcción continua, por lo que algunos ejercicios pueden carecer de solución o presentar errores que se corregirán progresivamente.

Espero que este documento contribuya a su proceso de aprendizaje.

Cordialmente,  
Andrés Fabián Leal Archila  
Docente Escuela de Matemáticas  
Universidad Industrial de Santander  
Correo: [anfalear@correo.uis.edu.co](mailto:anfalear@correo.uis.edu.co)  
Docente Departamento de Ciencias Básicas  
Universidad Autónoma de Bucaramanga  
Correo: [aleal214@unab.edu.co](mailto:aleal214@unab.edu.co)

# Contenido

<b>Prefacio a la primera edición</b>	<b>3</b>
<b>1 Políticas del curso</b>	<b>17</b>
1.1 Contenido Álgebra Lineal . . . . .	17
1.2 Políticas de clase . . . . .	19
<b>2 Números complejos</b>	<b>21</b>
2.1 Propiedades básicas . . . . .	21
2.2 Teorema Fundamental del Álgebra . . . . .	29
2.3 Problemas propuestos para el capítulo . . . . .	30
<b>3 Espacio euclídeo <math>n</math>-dimensional</b>	<b>33</b>
3.1 Propiedades básicas . . . . .	33
3.2 Problemas propuestos . . . . .	48
<b>4 Matrices y determinantes</b>	<b>51</b>
4.1 Propiedades básicas . . . . .	51
4.2 Matrices invertibles . . . . .	60
4.2.1 Matrices invertibles: Método de eliminación gaussiana . . . . .	60
4.2.2 Matrices invertibles: determinantes . . . . .	68
<b>5 Sistemas de ecuaciones lineales</b>	<b>91</b>
5.1 Problemas propuestos para el capítulo . . . . .	123
<b>6 Espacios vectoriales</b>	<b>127</b>
6.1 Espacios vectoriales . . . . .	127
6.2 Subespacios vectoriales . . . . .	130
6.3 Combinaciones lineales y generados . . . . .	133
6.4 Independencia lineal . . . . .	136
6.5 Bases y dimensión . . . . .	138
6.6 Espacios fundamentales de una matriz . . . . .	142
6.7 Problemas propuestos para el capítulo . . . . .	148
<b>7 Espacios vectoriales con producto interno</b>	<b>153</b>
<b>8 Valores y vectores propios</b>	<b>175</b>
8.1 Algunas aplicaciones adicionales . . . . .	193
<b>9 Transformaciones lineales</b>	<b>195</b>
9.1 Transformaciones lineales . . . . .	195
<b>Bibliografía</b>	<b>233</b>

# Glosario

2.1	Definición (Número complejo)	21
2.2	Observación	21
2.3	Definición (Operaciones básicas)	21
2.4	Teorema (Propiedades de campo de los números complejos)	21
2.5	Problema	22
2.6	Problema	23
2.7	Problema	23
2.8	Problema	23
2.9	Definición (Módulo y argumento)	24
2.10	Teorema (Fórmula de Euler)	24
2.11	Definición (Forma polar)	24
2.12	Teorema (Multiplicación y división en forma polar)	24
2.13	Observación	24
2.14	Problema	24
2.15	Problema	24
2.16	Problema	25
2.17	Problema	26
2.18	Teorema (Potencias y raíces enésimas de un número complejo)	27
2.19	Problema	27
2.20	Problema	28
2.21	Definición (Raíz de un polinomio)	29
2.22	Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra)	29
2.23	Observación	29
2.24	Problema	29
2.25	Problema	30
2.26	Problema	30
2.27	Problema	31
2.28	Problema (Examen 1 - Preliminares, semestre 2019 - 2)	31
2.29	Problema (Examen 1 - Preliminares, semestre 2019 - 2)	31
2.30	Problema (Examen 1 - Preliminares, semestre 2022 - 2)	31
2.31	Problema	31
2.32	Problema	32
2.33	Problema	32
2.34	Problema	32
2.35	Problema	32
2.36	Problema	32
2.37	Problema	32
3.1	Definición (Suma y producto por escalar de vectores de manera geométrica)	33
3.2	Definición (Vectores en términos de coordenadas)	33
3.3	Definición (Operaciones con vectores usando coordenadas)	34
3.4	Ejemplo (Operaciones de vectores con coordenadas)	34
3.5	Problema	35
3.6	Definición (Norma de un vector)	35
3.7	Ejemplo	35
3.8	Definición (Vector unitario)	36
3.9	Ejemplo	36
3.10	Definición (Producto punto)	36

3.11	Ejemplo . . . . .	36
3.12	Observación . . . . .	36
3.13	Definición (Ángulo entre vectores) . . . . .	37
3.14	Definición (Producto cruz) . . . . .	37
3.15	Ejemplo . . . . .	37
3.16	Definición (Plano en el espacio) . . . . .	37
3.17	Ejemplo . . . . .	38
3.18	Problema . . . . .	38
3.19	Problema . . . . .	39
3.20	Problema . . . . .	40
3.21	Problema . . . . .	40
3.22	Definición (Proyección ortogonal) . . . . .	41
3.23	Ejemplo . . . . .	41
3.24	Teorema (Propiedades de la proyección ortogonal) . . . . .	41
3.25	Definición (Recta en el espacio) . . . . .	41
3.26	Ejemplo . . . . .	42
3.27	Problema . . . . .	42
3.28	Problema . . . . .	42
3.29	Problema . . . . .	43
3.30	Problema . . . . .	44
3.31	Problema . . . . .	44
3.32	Problema (Examen 3 - Vectores, semestre 2022 - 2) . . . . .	45
3.33	Problema (Examen 3 - Vectores, semestre 2022 - 2) . . . . .	46
3.34	Problema . . . . .	48
3.35	Problema . . . . .	48
3.36	Problema . . . . .	49
3.37	Problema . . . . .	49
3.38	Problema . . . . .	49
3.39	Problema . . . . .	49
3.40	Problema . . . . .	49
3.41	Problema . . . . .	49
3.42	Problema . . . . .	49
3.43	Problema . . . . .	49
3.44	Problema . . . . .	49
3.45	Problema . . . . .	49
4.1	Definición (Matriz) . . . . .	51
4.2	Ejemplo . . . . .	51
4.3	Definición (Suma de matrices) . . . . .	51
4.4	Ejemplo . . . . .	51
4.5	Definición (Multiplicación por escalar) . . . . .	51
4.6	Ejemplo . . . . .	51
4.7	Definición (Multiplicación de matrices) . . . . .	51
4.8	Ejemplo . . . . .	51
4.9	Definición (Matriz transpuesta) . . . . .	52
4.10	Ejemplo . . . . .	52
4.11	Problema . . . . .	52
4.12	Definición (Grafo dirigido) . . . . .	52
4.13	Ejemplo . . . . .	52
4.14	Ejemplo . . . . .	53
4.15	Problema . . . . .	53
4.16	Problema . . . . .	54
4.17	Problema . . . . .	56
4.18	Problema . . . . .	57
4.19	Problema . . . . .	57
4.20	Problema . . . . .	58
4.21	Definición (Matriz invertible) . . . . .	60

4.22	Ejemplo . . . . .	60
4.23	Teorema . . . . .	60
4.24	Definición (Operaciones elementales de fila) . . . . .	60
4.25	Ejemplo . . . . .	60
4.26	Observación . . . . .	61
4.27	Definición (Matriz elemental) . . . . .	61
4.28	Ejemplo . . . . .	61
4.29	Teorema . . . . .	61
4.30	Definición (Matrices equivalentes por filas) . . . . .	61
4.31	Ejemplo . . . . .	61
4.32	Ejemplo . . . . .	61
4.33	Definición (Matriz diagonal) . . . . .	62
4.34	Ejemplo . . . . .	62
4.35	Definición (Matriz triangular) . . . . .	62
4.36	Ejemplo . . . . .	62
4.37	Definición (Matriz simétrica) . . . . .	62
4.38	Ejemplo . . . . .	62
4.39	Definición (Matriz antisimétrica) . . . . .	62
4.40	Ejemplo . . . . .	62
4.41	Definición (Traza de una matriz) . . . . .	62
4.42	Ejemplo . . . . .	62
4.43	Teorema (Algunas propiedades de la traza, las matrices simétricas y antisimétricas) . .	62
4.44	Ejemplo . . . . .	63
4.45	Definición (Forma escalonada) . . . . .	63
4.46	Ejemplo . . . . .	63
4.47	Definición (Forma escalonada reducida) . . . . .	64
4.48	Ejemplo . . . . .	64
4.49	Ejemplo . . . . .	64
4.50	Observación . . . . .	64
4.51	Lema (Algoritmo de Eliminación Gaussiana) . . . . .	64
4.52	Ejemplo . . . . .	64
4.53	Lema (Algoritmo de Gauss-Jordan) . . . . .	65
4.54	Ejemplo . . . . .	65
4.55	Teorema (Unicidad de la forma escalonada reducida) . . . . .	65
4.56	Definición (Rango de una matriz) . . . . .	65
4.57	Teorema (Propiedades fundamentales del rango) . . . . .	65
4.58	Ejemplo (Cálculo por eliminación gaussiana) . . . . .	66
4.59	Teorema (Caracterización de matrices invertibles, version 1) . . . . .	66
4.60	Ejemplo . . . . .	67
4.61	Ejemplo . . . . .	67
4.62	Problema . . . . .	67
4.63	Definición (Determinante de una matriz $2 \times 2$ . [de Araújo, 2014]) . . . . .	68
4.64	Observación (Fundamentación) . . . . .	69
4.65	Definición (Determinante para matrices $3 \times 3$ [de Araújo, 2014]) . . . . .	69
4.66	Observación (Fundamentación: De eliminación gaussiana a determinante) . . . . .	69
4.67	Definición (Menor de una matriz [de Araújo, 2014]) . . . . .	70
4.68	Ejemplo (Menores en matriz $3 \times 3$ ) . . . . .	70
4.69	Ejemplo (Cálculo de determinante por expansión de cofactores) . . . . .	70
4.70	Teorema (Invariancia del determinante en la expansión por cofactores) . . . . .	71
4.71	Ejemplo (Expansión por cofactores en columna 2) . . . . .	71
4.72	Teorema (Regla de Sarrus para matrices $3 \times 3$ ) . . . . .	72
4.73	Ejemplo (Cálculo usando la Regla de Sarrus) . . . . .	73
4.74	Ejemplo (Cálculo para matriz $4 \times 4$ ) . . . . .	74
4.75	Teorema (Propiedades del determinante) . . . . .	74
4.76	Problema . . . . .	75
4.77	Observación . . . . .	76
4.78	Teorema (Propiedad fundamental de la matriz adjunta) . . . . .	76

4.79	Teorema (Caracterización de matrices invertibles - Versión 2)	77
4.80	Ejemplo	78
4.81	Observación	78
4.82	Problema	78
4.83	Problema	79
4.84	Problema	81
4.85	Problema	82
4.86	Problema	82
4.87	Problema	83
4.88	Problema ([Andreescu, 2014], Problema 12, p.44)	83
4.89	Problema	84
4.90	Problema	85
4.91	Problema	85
4.92	Problema	86
4.93	Problema	87
4.94	Problema ([Andreescu, 2014], Problema 4, p.56)	87
4.95	Problema	87
4.96	Problema	88
4.97	Problema	89
5.1	Definición (Combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^n$ )	91
5.2	Ejemplo	91
5.3	Definición (Sistema de ecuaciones lineales)	91
5.4	Definición (Tipos de soluciones de un sistema lineal)	92
5.5	Definición (Sistema de ecuaciones lineales homogéneo)	92
5.6	Ejemplo (Sistema $2 \times 2$ - Intersección de rectas)	92
5.7	Observación	93
5.8	Ejemplo (Sistema $3 \times 3$ - Intersección de planos)	93
5.9	Observación	94
5.10	Observación	95
5.11	Definición (Variables básicas y libres)	95
5.12	Ejemplo	95
5.13	Teorema (Teorema de Rouché-Frobenius)	96
5.14	Ejemplo	97
5.15	Observación	97
5.16	Teorema (Caracterización de matrices invertibles - Versión 3)	97
5.17	Teorema (Propiedades de los sistemas homogéneos)	98
5.18	Teorema (Regla de Cramer)	99
5.19	Problema	100
5.20	Problema	101
5.21	Problema	103
5.22	Problema	104
5.23	Problema	105
5.24	Problema	106
5.25	Problema	107
5.26	Problema	108
5.27	Problema	109
5.28	Problema	110
5.29	Problema	111
5.30	Problema	113
5.31	Problema	114
5.32	Problema	114
5.33	Problema	115
5.34	Problema	115
5.35	Problema	116
5.36	Problema	116
5.37	Problema	117



5.38	Problema . . . . .	118
5.39	Problema . . . . .	119
5.40	Problema . . . . .	120
5.41	Problema . . . . .	121
5.42	Problema . . . . .	123
5.43	Problema . . . . .	123
5.44	Problema . . . . .	123
5.45	Problema . . . . .	124
5.46	Problema . . . . .	124
5.47	Problema . . . . .	124
5.48	Problema . . . . .	124
6.1	Definición (Espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ ) . . . . .	127
6.2	Observación . . . . .	127
6.3	Ejemplo ( $\mathbb{R}^n$ , los vectores $n$ -dimensionales reales) . . . . .	128
6.4	Ejemplo ( $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , las matrices $m \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ ) . . . . .	128
6.5	Ejemplo ( $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ , los polinomios de grado menor o igual a $n$ ) . . . . .	128
6.6	Ejemplo ( $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , las funciones de una variable real) . . . . .	128
6.7	Ejemplo ( $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ , las funciones continuas de una variable real) . . . . .	128
6.8	Ejemplo . . . . .	128
6.9	Definición (Subespacio vectorial) . . . . .	130
6.10	Observación . . . . .	130
6.11	Teorema (Test del subespacio) . . . . .	130
6.12	Corolario (Test del subespacio, versión compacta) . . . . .	130
6.13	Observación . . . . .	131
6.14	Ejemplo . . . . .	131
6.15	Observación (Los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	131
6.16	Ejemplo . . . . .	131
6.17	Ejemplo . . . . .	132
6.18	Teorema (La intersección finita de subespacios es subespacio) . . . . .	132
6.19	Ejemplo (La solución de un S.E.L. homogéneo es subespacio) . . . . .	133
6.20	Observación . . . . .	133
6.21	Ejemplo . . . . .	133
6.22	Definición (Combinación lineal) . . . . .	134
6.23	Teorema . . . . .	134
6.24	Definición (Subespacio generado) . . . . .	134
6.25	Ejemplo . . . . .	134
6.26	Teorema . . . . .	135
6.27	Definición (Independencia lineal) . . . . .	136
6.28	Teorema (Test de independencia lineal) . . . . .	136
6.29	Corolario . . . . .	136
6.30	Definición (Wronskiano) . . . . .	136
6.31	Teorema (Criterio del Wronskiano) . . . . .	136
6.32	Problema . . . . .	136
6.33	Problema . . . . .	137
6.34	Problema . . . . .	137
6.35	Problema . . . . .	137
6.36	Definición (Espacio vectorial de dimensión finita) . . . . .	138
6.37	Definición (Base) . . . . .	138
6.38	Ejemplo (Base canónica de $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	138
6.39	Ejemplo . . . . .	138
6.40	Teorema (Unicidad de la representación) . . . . .	139
6.41	Definición (Vector de coordenadas) . . . . .	139
6.42	Teorema (Invariancia del número de elementos en una base) . . . . .	139
6.43	Definición (Dimensión) . . . . .	139
6.44	Teorema (Propiedades dimensionales) . . . . .	139
6.45	Teorema (Teorema de la base incompleta) . . . . .	139

6.46	Teorema (Dimensión de subespacios) . . . . .	140
6.47	Definición (Matriz de cambio de base) . . . . .	140
6.48	Problema . . . . .	140
6.49	Problema . . . . .	140
6.50	Problema . . . . .	141
6.51	Problema . . . . .	141
6.52	Problema . . . . .	142
6.53	Problema . . . . .	142
6.54	Definición (Espacios fundamentales) . . . . .	142
6.55	Ejemplo . . . . .	143
6.56	Teorema (Caracterización de consistencia) . . . . .	143
6.57	Teorema (Invariancia bajo operaciones fila) . . . . .	143
6.58	Teorema (Base del espacio columna) . . . . .	143
6.59	Teorema (Teorema del rango-nulidad) . . . . .	144
6.60	Teorema (Teorema fundamental de los espacios fundamentales) . . . . .	144
6.61	Problema . . . . .	144
6.62	Problema . . . . .	145
6.63	Problema . . . . .	145
6.64	Problema . . . . .	146
6.65	Problema . . . . .	146
6.66	Teorema (Caracterización de matrices invertibles - Versión 4) . . . . .	147
6.67	Problema . . . . .	148
6.68	Problema . . . . .	148
6.69	Problema . . . . .	149
6.70	Problema . . . . .	149
6.71	Problema . . . . .	149
6.72	Problema . . . . .	149
6.73	Problema . . . . .	149
6.74	Problema . . . . .	149
6.75	Problema . . . . .	149
6.76	Problema . . . . .	149
6.77	Problema . . . . .	150
6.78	Problema . . . . .	150
6.79	Problema . . . . .	150
6.80	Problema . . . . .	150
6.81	Problema . . . . .	150
6.82	Problema . . . . .	150
6.83	Problema . . . . .	151
6.84	Problema . . . . .	151
6.85	Problema . . . . .	151
6.86	Problema . . . . .	151
6.87	Problema . . . . .	151
7.1	Definición (Espacio vectorial con producto interno) . . . . .	153
7.2	Ejemplo (Producto punto usual en $\mathbb{R}^2$ ) . . . . .	153
7.3	Ejemplo (Producto interno no usual) . . . . .	153
7.4	Definición (Norma inducida) . . . . .	153
7.5	Definición (Bola unitaria) . . . . .	153
7.6	Observación (Ejemplos de productos internos) . . . . .	153
7.7	Definición (Producto interno en espacios vectoriales complejos) . . . . .	154
7.8	Teorema (Propiedades del producto interno en espacios vectoriales complejos) . . . . .	154
7.9	Ejemplo (Producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$ ) . . . . .	154
7.10	Definición (Ortogonalidad y ángulo) . . . . .	154
7.11	Ejemplo . . . . .	154
7.12	Problema . . . . .	154
7.13	Problema . . . . .	155
7.14	Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) . . . . .	155

7.15	Teorema (Consecuencias de Cauchy-Schwarz)	155
7.16	Teorema (Teorema de Pitágoras)	156
7.17	Problema	156
7.18	Problema	156
7.19	Definición (Complemento ortogonal)	157
7.20	Teorema (Propiedades del complemento ortogonal)	157
7.21	Teorema (Relaciones fundamentales para una matriz)	158
7.22	Ejemplo	158
7.23	Definición (Conjunto ortogonal y ortonormal)	158
7.24	Teorema	158
7.25	Definición (Proyección ortogonal)	159
7.26	Teorema (Expansión en base ortogonal)	159
7.27	Teorema (Descomposición ortogonal)	159
7.28	Teorema	159
7.29	Teorema (Proceso de Gram-Schmidt)	159
7.30	Problema	160
7.31	Problema	160
7.32	Problema	161
7.33	Ejemplo	162
7.34	Ejemplo	163
7.35	Definición (Aproximación por mínimos cuadrados)	163
7.36	Ejemplo	163
7.37	Teorema (Mejor aproximación)	164
7.38	Teorema (Ecuaciones normales)	164
7.39	Ejemplo	164
7.40	Ejemplo	165
7.41	Teorema (Solución única)	165
7.42	Ejemplo	165
7.43	Problema	166
7.44	Problema (Regresión polinómica)	167
7.45	Definición (Serie de Fourier)	167
7.46	Lema (Polinomio de Taylor)	168
7.47	Teorema (Fórmula de Euler)	168
7.48	Problema	168
7.49	Problema	169
7.50	Problema	169
7.51	Problema	170
7.52	Problema	170
7.53	Problema	170
7.54	Problema	171
7.55	Problema	171
7.56	Problema	172
7.57	Problema	172
7.58	Problema	172
7.59	Problema	172
7.60	Problema	173
7.61	Problema	173
8.1	Definición (Valores y vectores propios)	175
8.2	Ejemplo	175
8.3	Definición (Multiplicidad algebraica y geométrica)	175
8.4	Observación	175
8.5	Teorema (Caracterización de valores propios)	176
8.6	Corolario (Valores propios de matrices triangulares)	176
8.7	Teorema (Potencia de valores propios)	176
8.8	Ejemplo	176
8.9	Problema	176

8.10	Observación (¿Qué ocurre si los valores propios $\lambda$ son complejos?)	179
8.11	Definición (Matriz diagonalizable)	179
8.12	Teorema (Condición de diagonalización)	179
8.13	Teorema	180
8.14	Ejemplo	180
8.15	Observación (Cálculo de potencias de una matriz)	181
8.16	Ejemplo	181
8.17	Problema (Solución de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes)	181
8.18	Ejemplo	182
8.19	Teorema	183
8.20	Ejemplo	183
8.21	Teorema (Cayley-Hamilton)	184
8.22	Problema	185
8.23	Teorema (Caracterización de matrices invertibles - Versión 5)	186
8.24	Problema	187
8.25	Problema	187
8.26	Problema	187
8.27	Problema	188
8.28	Problema	189
8.29	Problema	189
8.30	Problema	190
8.31	Problema	190
8.32	Problema	190
8.33	Problema	192
8.34	Problema	192
8.35	Definición	193
8.36	Teorema	193
8.37	Definición	193
8.38	Ejemplo	193
8.39	Definición	193
8.40	Teorema	193
8.41	Ejemplo	193
8.42	Definición	193
8.43	Ejemplo	193
8.44	Ejemplo	194
8.45	Teorema	194
9.1	Definición (Transformación lineal)	195
9.2	Ejemplo	195
9.3	Observación	196
9.4	Ejemplo (Operador integral)	197
9.5	Teorema	197
9.6	Ejemplo	197
9.7	Definición (Kernel e imagen de una transformación lineal)	197
9.8	Teorema	198
9.9	Definición (Rango y nulidad)	198
9.10	Teorema (Teorema de la dimensión)	198
9.11	Definición (Transformación lineal inyectiva)	199
9.12	Definición (Transformación lineal sobreyectiva)	199
9.13	Teorema	199
9.14	Teorema (Versión finita)	200
9.15	Definición (Composición de transformaciones lineales)	200
9.16	Teorema	200
9.17	Definición (Inversa de una transformación lineal)	201
9.18	Teorema	201
9.19	Definición (Isomorfismo)	201

9.20	Teorema (Isomorfismo con $\mathbb{R}^n$ ) . . . . .	201
9.21	Ejemplo . . . . .	202
9.22	Definición (Matriz asociada a una transformación lineal) . . . . .	202
9.23	Ejemplo . . . . .	202
9.24	Observación . . . . .	203
9.25	Ejemplo . . . . .	203
9.26	Definición (Kernel e imagen de una transformación lineal bajo su matriz) . . . . .	203
9.27	Ejemplo . . . . .	204
9.28	Teorema . . . . .	204
9.29	Ejemplo . . . . .	205
9.30	Ejemplo (Transformaciones lineales clásicas en $\mathbb{R}^2$ ) . . . . .	206
9.31	Ejemplo (Transformaciones lineales: la casita y sus imágenes) . . . . .	207
9.32	Problema . . . . .	208
9.33	Problema . . . . .	209
9.34	Problema . . . . .	212
9.35	Problema . . . . .	213
9.36	Problema . . . . .	215
9.37	Problema . . . . .	216
9.38	Problema . . . . .	216
9.39	Problema . . . . .	217
9.40	Problema . . . . .	217
9.41	Problema . . . . .	217
9.42	Problema . . . . .	218
9.43	Problema . . . . .	219
9.44	Problema . . . . .	220
9.45	Problema . . . . .	220
9.46	Problema . . . . .	222
9.47	Problema . . . . .	222
9.48	Problema . . . . .	223
9.49	Problema . . . . .	224
9.50	Problema . . . . .	225
9.51	Problema . . . . .	225
9.52	Problema . . . . .	228
9.53	Problema . . . . .	231

# Índice de figuras

2.1	Representación geométrica del complejo $-5 - 4i$ .	23
2.2	Representación gráfica en <code>matplotlib</code> del complejo $-5 - 4i$ .	25
2.3	Representación gráfica de la solución	26
2.4	Figura del problema 2.26	31
2.5	Figura del problema 2.28	31
3.1	Representación de un vector geométrico	33
3.2	La regla del paralelogramo	33
3.3	Vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en el plano	34
3.4	Vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en el espacio	34
3.5	Suma de vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$	34
3.6	Resta de vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	34
3.7	Multiplicación por escalar: $2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	35
3.8	Vectores del problema 3.5	35
3.9	Norma del vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$	36
3.10	Vector unitario con dirección de $\mathbf{u}$	36
3.11	Ángulo entre vectores	37
3.12	Producto cruz entre los vectores $(1, 2, 0)$ y $(3, 4, 0)$ . El resultado es un vector perpendicular al plano $xy$ con dirección hacia el eje $z$ negativo.	37
3.13	Representación geométrica de un plano: El vector normal $\vec{n}$ es perpendicular a cualquier vector contenido en el plano.	38
3.14	Triángulo del problema 3.18	39
3.15	Proyección ortogonal del vector $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v}$ .	41
3.16	Representación bidimensional de una recta en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ . El punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es el punto de apoyo, $\vec{d} = (a, b, c)$ es el vector director, y el parámetro $t \in \mathbb{R}$ determina todos los puntos de la recta.	41
4.1	Grafo del ejemplo 4.13	53
4.2	Grafo del ejemplo 4.14	53
4.3	Grafo del problema (a)	55
4.4	Grafo del problema (b)	55
4.5	Grafo del problema (c)	56
4.6	Red de vuelos de la aerolínea	56
4.7	Regla de Sarrus, método de extender columnas	72
4.8	Regla de Sarrus, método de extender las filas	73
5.1	Intersección de las rectas $2x + 3y = 7$ y $x - y = 1$ . La solución del sistema corresponde al punto donde ambas rectas se cruzan.	93

5.2 Intersección de tres planos en el espacio. Cada ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano, y la solución del sistema corresponde al punto donde los tres planos se intersectan. . . . . 94

5.3 Interpretación geométrica de sistemas  $2 \times 2$  . . . . . 94

5.4 Parábola de interpolación . . . . . 105

5.5 Circunferencia del problema . . . . . 106

5.6 Triángulo del problema . . . . . 117

5.7 Curvas que cumplen la condición del problema 5.39 . . . . . 120

5.8 Flujos en una refinería de petróleo . . . . . 121

5.9 Tráfico proyectado en el parque principal . . . . . 125

7.1 Recta de mínimos cuadrados para los datos del resorte . . . . . 167

7.2 Altura de un triángulo . . . . . 169

9.1 Reflexión respecto a la recta  $y = x$ . . . . . 206

9.2 Rotación de un punto respecto al origen. . . . . 207

9.3 Escalado de una región en el plano. . . . . 207

9.4 Reflexión de la casita respecto al eje  $y$ . . . . . 207

9.5 La casita ampliada al doble. . . . . 208

9.6 Reflexión de la casita respecto al eje  $x$ . . . . . 208

9.7 Figura original en el plano . . . . . 225

9.8 Reflexión respecto a la recta  $y = x$ . . . . . 225

9.9 Estiramiento y reflexión respecto al eje  $y$ . . . . . 226

9.10 Proyección sobre el eje  $x$ . . . . . 226

9.11 Proyección sobre el eje  $y$ . . . . . 227

9.12 Transformación general invertible. . . . . 227

9.13 Escalado anisotrópico. . . . . 228

9.14 Rotación de  $30^\circ$  respecto al origen. . . . . 228

9.15 Figura original (Sudoku 3D cube, <https://texample.net/tikz/examples/sudoku-3d-cube>) 229

9.16 Reflexión respecto al plano  $XY$  (inversión de  $z$ ). . . . . 229

9.17 Reflejo y estiramiento en  $x$ , estiramiento en  $z$ . . . . . 230

9.18 Proyección sobre el plano  $YZ$ . . . . . 230

9.19 Rotación de  $30^\circ$  en el plano  $YZ$  alrededor del eje  $x$ . . . . . 231





# Capítulo

# 1

## Políticas del curso

*La información aquí presentada no se modificará por ninguna de las partes a menos que haya un consenso entre estas, el cual debe ser oportunamente informado y reportado por escrito en este documento. Ante cualquier instancia, este documento será soporte para las acciones a las que se de lugar, por lo cual, tanto el profesor como el estudiante lo aceptan y se someten a lo que esté aquí escrito.*

Esta política se rige de acuerdo a lo dispuesto en los Reglamentos Académicos de Pregrado de cada institución (R.A.P.) disponibles en las web institucionales.

Los cursos de Álgebra Lineal tendrán su Aula Virtual, donde se informarán horarios de atención, distribución de exámenes, demás aspectos particulares, calificaciones y distribuciones de porcentajes. La nota mínima de aprobación es 3.0.

## 1.1

### Contenido Álgebra Lineal

La cobertura total del contenido dependerá del progreso del semestre; es responsabilidad del estudiante mantenerse al día. Los temas evaluados en cada corte se proporcionarán oportunamente. Los temas marcados con asterisco (\*) son opcionales según el progreso del semestre.

#### 1. El campo de los números complejos

- a) Orígenes, definición y representaciones (geométrica, binomial y polar).
- b) Aritmética: suma, producto, potencias y raíces. Propiedades.
- c) Ecuaciones polinómicas y Teorema Fundamental del álgebra.

#### 2. Matrices

- a) Álgebra de matrices: suma, producto por escalar y producto de matrices.
- b) Operaciones elementales entre filas. Matrices elementales, equivalentes por filas y escalonadas reducidas.
- c) Matrices invertibles. Algoritmo para encontrar la inversa.

#### 3. Determinantes

- a) Definición. Fórmulas de expansión (método de cofactores).
- b) Cálculo por diagonalización.
- c) Propiedades: fórmula del producto, determinante de la transpuesta e inversa. Fórmula de la adjunta.

#### 4. Sistemas de ecuaciones lineales

- a) Definición, ejemplos y representación matricial.
- b) Solución general (método de eliminación de Gauss).
- c) Regla de Cramer.
- d) Condiciones de existencia y unicidad. Sistemas homogéneos.
- e) Problemas de aplicación.

#### 5. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial euclidiano

- a) Vectores en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ . Representación geométrica y algebraica.
- b) Álgebra de vectores: suma, producto por escalar. Propiedades de  $\mathbb{R}^n$ .
- c) Producto escalar, vectorial, proyecciones, ángulos, normas, distancias, ortogonalidad.
- d) Rectas en el espacio.
- e) Planos en el espacio.

#### 6. Espacios vectoriales

- a) Definición y ejemplos.
- b) Subespacios vectoriales.
- c) Combinaciones lineales: subespacio generado, sistemas generadores.
- d) Dependencia e independencia lineal. Bases y dimensión.
- e) Coordenadas y cambios de bases.
- f) Espacios fundamentales: fila, columna y nulo; nulidad, rango y teorema de la dimensión.

#### 7. Espacios con producto interno

- a) Definición y ejemplos.
- b) Normas, ángulos, distancias, desigualdades triangular y de Cauchy-Schwarz, teorema de Pitágoras.
- c) Conjuntos ortogonales y ortonormales. Proceso de Gram-Schmidt.
- d) Proyecciones ortogonales. Complementos ortogonales. Teorema de descomposición ortogonal.
- e) Aplicaciones: mínimos cuadrados.
- f) Aplicaciones: aproximación por series de Fourier.

#### 8. Valores y vectores propios

- a) Definición, ejemplos y polinomio característico.
- b) Subespacios propios: multiplicidad geométrica y algebraica.
- c) Diagonalización: matrices semejantes y simétricas.
- d) Teorema de Cayley-Hamilton.
- e) Aplicaciones: potenciación, formas cuadráticas, ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y cadenas de Markov.

#### 9. Transformaciones lineales

- a) Definición, ejemplos y propiedades básicas.
- b) Transformaciones en el plano y espacio. Geometría en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ : rotación, estiramientos, deslizamientos.
- c) Núcleo e imagen: rango, nulidad y teorema de la dimensión.
- d) Representación matricial.

- e) Álgebra de operadores. Composición y multiplicación de matrices.
- f) Isomorfismos: transformación inversa.

Notas aclaratorias:

- No hay número específico de quices o trabajos; si son varios se promedian.
- Las calificaciones se publican en la plataforma universitaria con notificación por correo. Si el estudiante no puede visualizar su nota, debe manifestarlo por correo al profesor.
- El profesor acordará con los estudiantes la forma de revisar trabajos y exámenes.

1.2

Políticas de clase

- Los instrumentos electrónicos requieren aprobación del profesor.
- Quices y exámenes sin apuntes, libros ni aparatos electrónicos (salvo flexibilización informada). El estudiante debe leer las reglas de cada evaluación.
- El trabajo debe ser autónomo o en grupo designado. **Ofrecer** o **aceptar** soluciones ajenas constituye **plagio**, penalizado según el R.A.P. Incluye omisión de fuentes e uso no citado de IA.
- **No se reciben trabajos fuera de fecha**, excepto con excusa según R.A.P.
- **Asistencia obligatoria** con control por parte del profesor.
- En exámenes escritos se esperan 15 minutos tras el inicio para ingresar; después se requiere supletorio según R.A.P.
- **Casos de emergencia:** El profesor informará evacuaciones necesarias. No se responsabiliza por decisiones estudiantiles post-evacuación.



# Capítulo

## 2

# Números complejos

Los números complejos son una extensión de los números reales que surgieron de la necesidad de calcular todas las raíces de un polinomio y darle sentido al Teorema Fundamental del Álgebra, el cual establece que todo polinomio de grado  $n$  tiene exactamente  $n$  raíces contando multiplicidades. Su aplicación es esencial en matemáticas, física e ingeniería. Este capítulo presenta su definición, propiedades básicas y su relación con el Teorema Fundamental del Álgebra.

### 2.1

### Propiedades básicas

**Definición 2.1** (Número complejo). Un número complejo es un número de la forma

$$z = x + iy$$

donde  $x$  y  $y$  son números reales e  $i$  es la unidad imaginaria definida como  $i^2 = -1$ . El valor  $x$  se denomina **parte real** y el valor  $y$  **parte imaginaria**. El conjunto de todos los números complejos se denota por  $\mathbb{C}$ .

**Observación 2.2.** En ingeniería, la unidad imaginaria suele representarse como  $j$  en lugar de  $i$ . Esta diferencia es puramente notacional. En este texto se utiliza la convención matemática  $i$  para la unidad imaginaria.

En este capítulo se estudiarán las propiedades básicas de los números complejos y su representación geométrica en el plano complejo. Se inicia con la definición de las operaciones básicas:

**Definición 2.3** (Operaciones básicas). Sean  $z_1 = x_1 + iy_1$  y  $z_2 = x_2 + iy_2$  números complejos, se definen:

- **Suma:**  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ .
- **Multiplicación:**  $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ .
- **Conjugado:**  $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$ . En algunos textos avanzados, el conjugado se denota por  $z^*$ . Para evitar confusiones, aquí se usará la notación con línea superpuesta.

Estas operaciones dotan a los números complejos de la estructura de **campo**, fundamental para espacios vectoriales (ver Definición 6.1). La demostración de las siguientes propiedades se propone como ejercicio.

**Teorema 2.4** (Propiedades de campo de los números complejos). Sean  $z_1, z_2$  y  $z_3 \in \mathbb{C}$ , entonces:

1. **Cerradura bajo la suma y la multiplicación:**  $z_1 + z_2$  y  $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ .
2. **Asociatividad:**  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  y  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ .
3. **Elementos neutros:** Existen  $\mathbf{0} = 0 + 0i$  y  $\mathbf{1} = 1 + 0i \in \mathbb{C}$  tales que  $z_1 + \mathbf{0} = z_1$  y  $\mathbf{1} \cdot z_1 = z_1$ .

4. **Inversos:** Existe  $-z_1 = -x_1 - iy_1 \in \mathbb{C}$  tal que  $z_1 + (-z_1) = 0$ . Si  $z_1 \neq 0$ , existe  $z_1^{-1} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - i \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \in \mathbb{C}$  tal que  $z_1 z_1^{-1} = 1$ .

5. **Distributividad:**  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ .

**Problema 2.5.** ([Andreescu and Andrica, 2014], p. 19, Problema 1) Considere los complejos  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = -2 + 3i$  y  $z_3 = 1 - i$ . Calcule:

- (a)  $z_1 + z_2 + z_3$ . (c)  $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$ .
- (b)  $z_1 z_2 z_3$ . (d)  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ .

**Solución:** (a) Sumando las partes reales e imaginarias:

$$(2.1) \quad z_1 + z_2 + z_3 = (1 + 2i) + (-2 + 3i) + (1 - i) = (1 - 2 + 1) + (2 + 3 - 1)i = \boxed{0 + 4i}.$$

(b) Calculando paso a paso y utilizando  $i^2 = -1$ :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= (1 + 2i)(-2 + 3i)(1 - i) \\ &= (-2 + 3i + 4i + 6i^2)(1 - i) \\ &= (-2 + 3i + 4i - 6)(1 - i) \\ &= (-8 + 7i)(1 - i) \\ &= -8 + 8i + 7i^2 - 7i \\ &= -8 + 8i - 7 - 7i \\ &= \boxed{-15 + i} \end{aligned}$$

(c) Calculando cada término:

$$\begin{aligned} z_1^2 &= (1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i \\ z_2^2 &= (-2 + 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i \\ z_3^2 &= (1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2} &= \frac{(-3 + 4i) + (-5 - 12i)}{(-5 - 12i) + (-2i)} \\ &= \frac{-8 - 8i}{-5 - 14i} \end{aligned}$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{-8 - 8i}{-5 - 14i} &= \frac{(-8 - 8i)(-5 + 14i)}{(-5 - 14i)(-5 + 14i)} \\ &= \frac{40 + 112i + 40i - 112i^2}{25 + 70i - 70i - 196i^2} \\ &= \frac{40 + 152i + 112}{25 + 196} \\ &= \frac{152 + 152i}{221} \\ &= \boxed{\frac{152}{221} + \frac{152}{221}i} \end{aligned}$$

(d) Utilizando los cálculos previos:

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= (-3 + 4i) + (-5 - 12i) + (-2i) \\ &= -8 - 10i \end{aligned}$$

**Problema 2.6.** Demuestre que  $z$  es real si y solo si es igual a su conjugado.

**Solución:** Sea  $z = a + bi$  un número complejo, donde  $a$  y  $b$  son números reales. El conjugado de  $z$  es  $\bar{z} = a - bi$ .

( $\Rightarrow$ ) Si  $z$  es real, entonces  $z = a$  con  $b = 0$ . Por tanto,  $\bar{z} = a - 0i = a = z$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $z = \bar{z}$ , entonces  $a + bi = a - bi$ . Esto implica que  $2bi = 0$ , lo que solo es posible si  $b = 0$ . Por lo tanto,  $z = a$  es un número real.

En conclusión,  $z$  es real si y solo si  $z = \bar{z}$ .

**Problema 2.7.** ([Andreescu and Andrica, 2014], p. 19, Problema 9) Encuentre los números reales  $x, y$  tales que  $\frac{x-3}{3+i} + \frac{y-3}{3-i} = i$ .

**Solución:** Multiplicando ambos lados por el denominador común  $(3+i)(3-i) = 9+1 = 10$ :

$$\frac{x-3}{3+i} + \frac{y-3}{3-i} = i$$
$$(x-3)(3-i) + (y-3)(3+i) = 10i$$
$$3x - xi - 9 + 3i + 3y + yi - 9 - 3i = 10i$$
$$(3x + 3y - 18) + i(-x + y) = 10i$$

Igualando partes reales e imaginarias:

$$3x + 3y - 18 = 0$$
$$-x + y = 10$$

De la segunda ecuación:  $y = 10 + x$ . Sustituyendo en la primera:

$$3x + 3(10 + x) - 18 = 0$$
$$3x + 30 + 3x - 18 = 0$$
$$6x + 12 = 0$$
$$6x = -12$$
$$x = -2$$

Por lo tanto,  $x = -2$  y  $y = 10 + (-2) = 8$ .

La forma presentada anteriormente se denomina **forma binomial** o **cartesiana** de un número complejo. También es posible representar un número complejo como una pareja ordenada  $(x, y)$  de números reales, donde la parte real se grafica en el eje  $X$  y la parte imaginaria en el eje  $Y$ . Esta es conocida como la **representación geométrica** del complejo  $z$ .

**Problema 2.8.** Calcule la representación geométrica del complejo  $z = -5 - 4i$ .

**Solución:** La parte real del complejo  $z$  es  $-5$  y la parte imaginaria es  $-4$ . Por tanto,  $z$  corresponde al punto  $(-5, -4)$  en el plano complejo. Su representación geométrica es:

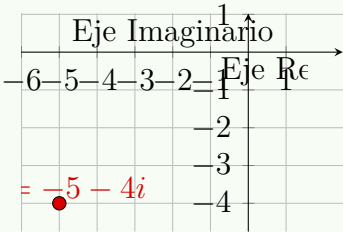


Figura 2.1: Representación geométrica del complejo  $-5 - 4i$ .

Haciendo uso de las coordenadas polares, podemos obtener otra representación del número complejo  $z$ :

**Definición 2.9** (Módulo y argumento). Sea  $z = x + iy$  un número complejo, y  $P$  el punto en el plano cartesiano que lo representa. El **módulo** de  $z$ , denotado por  $|z|$ , es la distancia desde el origen  $O$  hasta el punto  $P$ , dado por  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . El **argumento** de  $z$ , denotado por  $\arg(z)$ , es el ángulo medido desde la parte positiva del eje real hasta el segmento  $\overline{OP}$ . Aunque el argumento puede tomar cualquier valor que difiera en múltiplos de  $2\pi$ , se suele considerar el **argumento principal** en el intervalo  $[0, 2\pi)$ .

Antes de presentar la forma polar, introducimos una de las fórmulas más importantes en matemáticas, cuya demostración se hará en el Teorema 7.47.

**Teorema 2.10** (Fórmula de Euler). Para cualquier número real  $\theta$ :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

**Definición 2.11** (Forma polar). Sea  $z = x + iy$  un número complejo con módulo  $|z|$  y argumento  $\theta = \arg(z)$ . La forma polar de  $z$  se expresa como:

$$z = |z| e^{i\theta}.$$

Una ventaja significativa de la forma polar es la simplificación de las operaciones de multiplicación y división:

**Teorema 2.12** (Multiplicación y división en forma polar). Sean  $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$  y  $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$  números complejos. Entonces:

- 1.  $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ .
- 2.  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ .

**Observación 2.13.** De este teorema se deduce que multiplicar complejos en forma polar equivale a multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos, mientras que dividir complejos equivale a dividir sus módulos y restar sus argumentos. Para estas operaciones es importante considerar el cuadrante y posiblemente ajustar para obtener el argumento principal.

**Problema 2.14.** Encuentre la forma polar del número complejo  $z = -5 - 4i$ . ¿Cuál es el efecto geométrico en el plano complejo de multiplicar y dividir por este número? Justifique su respuesta.

**Solución:** Para encontrar la forma polar de  $z = -5 - 4i$ , calculamos:

El módulo:  $|z| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$ .

Para el argumento, calculamos  $\tan \theta = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$ , lo que da  $\theta = \arctan\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0,6747$  radianes.

Como  $z$  se encuentra en el tercer cuadrante (tanto  $x$  como  $y$  son negativos), debemos sumar  $\pi$  al valor obtenido:

$$\arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{4}{5}\right) \approx 3,8163 \text{ radianes.}$$

Por tanto, la forma polar de  $z$  es  $z = \sqrt{41} e^{i \cdot 3,8163}$ .

Respecto al efecto geométrico: - Multiplicar un número complejo por  $z$  tiene dos efectos: (1) una dilatación por un factor de  $\sqrt{41} \approx 6,40$  y (2) una rotación en sentido antihorario de aproximadamente 3,8163 radianes (218.8°). - Dividir por  $z$  produce: (1) una contracción por un factor de  $\frac{1}{\sqrt{41}} \approx 0,156$  y (2) una rotación en sentido horario de 3,8163 radianes.

Es posible verificar los resultados de los problemas 2.8 y 2.14 mediante el siguiente programa en Python 3.x:

**Problema 2.15.** Use el lenguaje de programación Python 3.x para calcular la forma geométrica y polar del número complejo  $-5 - 4i$ .



Solución:

```
import cmath
import matplotlib.pyplot as plt

def calcular_modulo_argumento(numero_complejo):
    modulo = abs(numero_complejo)
    argumento = cmath.phase(numero_complejo)

    # Normalizar el argumento al intervalo [0, 2)
    if argumento < 0:
        argumento += 2 * cmath.pi
    elif argumento > 2 * cmath.pi:
        argumento %= 2 * cmath.pi

    return modulo, argumento

# Entrada de valores
real_part = float(input("Parte real: "))
imag_part = float(input("Parte imaginaria, sin la i: "))
numero_complejo = complex(real_part, imag_part)

# Cálculo de módulo y argumento
modulo, argumento = calcular_modulo_argumento(numero_complejo)
print(f'Módulo: {modulo}')
print(f'Argumento: {argumento} radianes ')

# Visualización gráfica
plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.scatter(real_part, imag_part, color='red', marker='x', label='Número complejo ')
plt.xlabel('Parte Real')
plt.ylabel('Parte Imaginaria')
plt.title('Representación en el Plano Complejo')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.legend()
plt.show()
```

Este programa genera la siguiente salida:  
Parte real: -5  
Parte imaginaria, sin la i: -4  
Módulo: 6,4031242374328485  
Argumento: 3,8163335958133455 radianes.

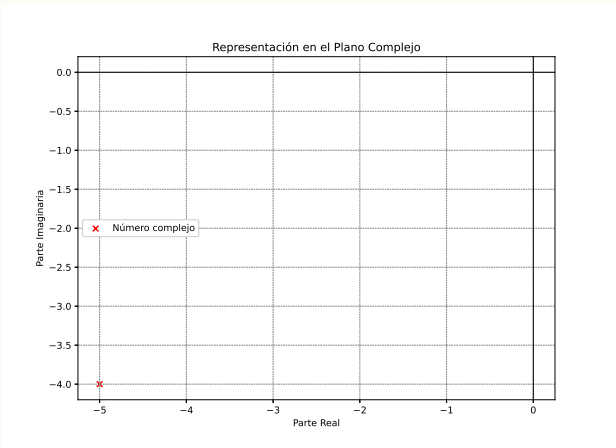


Figura 2.2: Representación gráfica en `matplotlib` del complejo  $-5 - 4i$ .

Estos resultados confirman los cálculos realizados en los problemas 2.8 y 2.14.

**Problema 2.16.** Sea  $z$  un número complejo. Es posible probarse que si  $|z| = 1$ , con  $z \neq 1$  entonces

$z = \frac{1 + it}{1 - it}$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Para el complejo  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  se tiene que  $it$  es igual a

- (a)  $\frac{1 - \sqrt{3}}{-3 - \sqrt{3}}$ .
- (b)  $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ .
- (c)  $\frac{-1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$ .
- (d) Ninguna.

**Solución:** Observe que si  $z = \frac{1 + it}{1 - it}$ , entonces

$$z(1 - it) = 1 + it$$
$$z - zit = 1 + it$$
$$z - 1 = zit + it$$
$$\frac{z - 1}{z + 1} = it.$$

De esta manera,

$$it = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1}$$
$$= \frac{1 + \sqrt{3}i - 2}{1 + \sqrt{3}i + 2} = \boxed{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{3 + \sqrt{3}i}}.$$

Por lo cual, la opción correcta es **Ninguna**.

**Problema 2.17.** ([Andreescu and Andrica, 2014], p. 30, Problema 5) Sean  $z_1 = 1 + i$  y  $z_2 = -1 - i$ . Encuentre el número complejo  $z_3$  tal que el triángulo  $z_1, z_2$  y  $z_3$  sea equilátero.

**Solución:** El problema tiene dos soluciones, dependiendo del argumento a tomar. Se muestran ambas.

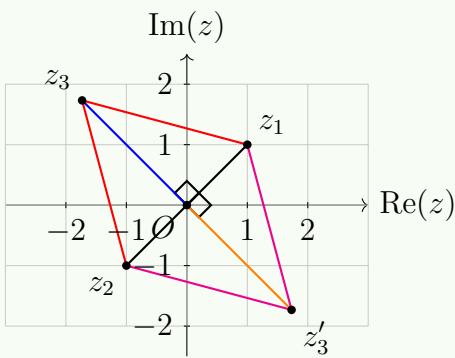


Figura 2.3: Representación gráfica de la solución

Observe que si  $z_1 = 1 + i$  y  $z_2 = -1 - i$  son vértices, entonces el segmento  $\overline{z_1 z_2}$  es un lado del triángulo. Como este es equilátero, su altura pasa por el punto medio del segmento, que es precisamente  $0 + 0i$ .

La estrategia es calcular el módulo y argumento del complejo  $z_3$  usando propiedades geométricas del triángulo equilátero.

**Cálculo del argumento:**

El argumento de  $z_1$  es  $\arg(z_1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ .

Como la altura del triángulo equilátero es perpendicular al lado  $\overline{z_1 z_2}$ , los posibles argumentos de

$z_3$  son:

(2.2)

$$\arg(z_3) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

(2.3)

$$\arg(z'_3) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

**Cálculo del módulo:**

La longitud del lado del triángulo es:

$$|z_1 - z_2| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$$

En un triángulo equilátero, si el lado mide  $a$ , entonces la altura mide  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ . Por tanto:

$$|z_3| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$$

**Soluciones finales:**

$$z_3 = \sqrt{6} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$$

$$z'_3 = \sqrt{6} \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

De la multiplicación de números complejos en forma polar se derivan las siguientes propiedades importantes:

**Teorema 2.18** (Potencias y raíces enésimas de un número complejo). *Sea  $z = |z|e^{i\theta}$  un número complejo y  $n$  un entero positivo, entonces:*

- 1.  $z^n = |z|^n e^{in\theta}$ .
- 2. **Fórmula de De Moivre:**  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$  donde  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Problema 2.19.** Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones donde  $z$  y  $w \in \mathbb{C}$ . Si son verdaderas, demuéstrelas; de lo contrario, presente un contraejemplo.

- a)  $z\bar{z} = |z|^2$ .
- b)  $|z^n| = |z|^n$ .
- c) Si  $\operatorname{Re}(w) \neq 0$ ,  $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\arg(z)}{\arg(w)}$ .
- d) Si  $z \in \mathbb{R}$ , entonces  $\arg(z) = \pi$ .

**Solución:**

a) Verdadero. **Demostración:** Sea  $z = a + bi$ , entonces  $\bar{z} = a - bi$ . Por lo tanto:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

b) Verdadero. **Demostración:** Primero demostraremos que para cualesquiera números complejos  $w$  y  $z$ , se cumple que  $|wz| = |w||z|$ .

Sean  $w = a + ib$  y  $z = c + di$ . Entonces:

$$\begin{aligned} wz &= (a + ib)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc) \\ |wz|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= |w|^2|z|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $|wz| = |w||z|$ .  
Para demostrar que  $|z^n| = |z|^n$  para todo entero positivo  $n$ , usamos inducción matemática: - Base ( $n = 1$ ): Trivialmente,  $|z^1| = |z|^1 = |z|$ . - Paso inductivo: Supongamos que  $|z^k| = |z|^k$  para algún  $k \geq 1$ . - Para  $n = k + 1$ :  $|z^{k+1}| = |z^k \cdot z| = |z^k| \cdot |z| = |z|^k \cdot |z| = |z|^{k+1}$ .  
Por el principio de inducción matemática,  $|z^n| = |z|^n$  para todo entero positivo  $n$ .

c) Falso. **Contraejemplo:** Sea  $z = 1$  y  $w = 1 + i$ .

Calculamos  $\frac{z}{w} = \frac{1}{1+i} = \frac{1(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}$ .

Por lo tanto:

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg\left(\frac{1-i}{2}\right) = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Mientras que:

$$\frac{\arg(z)}{\arg(w)} = \frac{\arg(1)}{\arg(1+i)} = \frac{0}{\frac{\pi}{4}} = 0$$

Como  $\frac{7\pi}{4} \neq 0$ , la afirmación es falsa.

d) Falso. **Contraejemplo:** Sea  $z = 1 \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\arg(z) = 0 \neq \pi$ .

En realidad, para cualquier número real positivo  $z > 0$ , tenemos  $\arg(z) = 0$ , y para cualquier número real negativo  $z < 0$ , tenemos  $\arg(z) = \pi$ . La afirmación solo es cierta para números reales negativos.

**Problema 2.20.** ([Andreescu and Andrica, 2014], p. 55, Problemas 1 y 3) Use la fórmula de De Moivre para encontrar las raíces cuartas de los siguientes complejos:

- a)  $z = -27$ .
- b)  $z = -7 + 24i$ .

**Solución:** Para calcular las raíces cuartas de los números complejos dados, primero los expresaremos en forma polar y luego aplicaremos la fórmula de De Moivre.

a) Para  $z = -27$ :

El módulo es  $|-27| = 27$  y su argumento es  $\arg(-27) = \pi$ , por lo cual,  $z = 27 \cdot e^{i\pi}$ .

Las raíces cuartas están dadas por:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{27} \cdot e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

donde  $k = 0, 1, 2, 3$ .

Dado que  $\sqrt[4]{27} \approx 2,28$ , tenemos:

$k = 0 :$	$\sqrt[4]{27} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$	$\approx$	$2,28 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$	$\approx$	$1,61 + 1,61i$
$k = 1 :$	$\sqrt[4]{27} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\approx$	$2,28 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\approx$	$-1,61 + 1,61i$
$k = 2 :$	$\sqrt[4]{27} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$	$\approx$	$2,28 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$	$\approx$	$-1,61 - 1,61i$
$k = 3 :$	$\sqrt[4]{27} \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$	$\approx$	$2,28 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$	$\approx$	$1,61 - 1,61i$

b) Para  $z = -7 + 24i$ :

El módulo es  $|z| = \sqrt{(-7)^2 + (24)^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$ .

Para el argumento, como  $z$  está en el segundo cuadrante (parte real negativa, parte imaginaria positiva):

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{24}{-7}\right) + \pi = \arctan\left(-\frac{24}{7}\right) + \pi \approx -1,2863 + \pi \approx 1,8553 \text{ radianes}$$

Por lo tanto,  $z = 25 \cdot e^{i1,8553}$ .

Las raíces cuartas están dadas por:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{25} \cdot e^{i\frac{1,8553+2k\pi}{4}}$$

donde  $k = 0, 1, 2, 3$  y  $\sqrt[4]{25} = 2,24$

$$\begin{aligned} k = 0 : \quad & 2,24 \cdot e^{i\frac{1,8553}{4}} \approx 2,24 \cdot e^{i\cdot 0,4638} \approx 2,02 + 0,94i \\ k = 1 : \quad & 2,24 \cdot e^{i\frac{1,8553+2\pi}{4}} \approx 2,24 \cdot e^{i\cdot 2,0344} \approx -0,68 + 2,14i \\ k = 2 : \quad & 2,24 \cdot e^{i\frac{1,8553+4\pi}{4}} \approx 2,24 \cdot e^{i\cdot 3,6050} \approx -2,02 - 0,94i \\ k = 3 : \quad & 2,24 \cdot e^{i\frac{1,8553+6\pi}{4}} \approx 2,24 \cdot e^{i\cdot 5,1756} \approx 0,68 - 2,14i \end{aligned}$$

2.2

Teorema Fundamental del Álgebra

**Definición 2.21** (Raíz de un polinomio). Sea  $p(z)$  un polinomio con coeficientes complejos. Diremos que  $\alpha \in \mathbb{C}$  es una raíz de  $p(z)$  si  $p(\alpha) = 0$ . Es decir,  $\alpha$  es una solución de la ecuación polinómica  $p(z) = 0$ . El cálculo de las raíces de un polinomio puede ser un problema muy difícil y se estudia ampliamente en matemáticas, en una rama llamada análisis numérico. Debido a los alcances de este curso, se tratarán polinomios especiales con coeficientes complejos (que incluyen los de coeficientes reales como caso particular) para los cuales sea fácil calcular su factorización. Sin embargo, el siguiente teorema no distingue el tipo de polinomio a estudiar. Este teorema es un resultado muy importante demostrado, entre otros, por **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855), un célebre matemático alemán que nombraremos bastante en este curso.

**Teorema 2.22** (Teorema Fundamental del Álgebra). *Todo polinomio no constante  $p(z)$  de grado  $n \geq 1$  con coeficientes complejos tiene exactamente  $n$  raíces en  $\mathbb{C}$ , contando sus multiplicidades algebraicas.*

**Observación 2.23.** *La multiplicidad algebraica de una raíz  $\alpha$  de un polinomio  $p(z)$  es el mayor entero positivo  $m$  tal que  $(z - \alpha)^m$  divide a  $p(z)$ . En otras palabras, es el exponente más alto de  $(z - \alpha)$  en la factorización completa de  $p(z)$ . Por ejemplo, si  $p(z) = (z - 1)^2(z - 2)$ , entonces  $z = 1$  es una raíz con multiplicidad algebraica 2, mientras que  $z = 2$  es una raíz con multiplicidad algebraica 1 (o raíz simple). En adelante, cuando se haga referencia a la multiplicidad de una raíz, se entenderá la multiplicidad algebraica ya que luego en la Definición 8.3 extenderemos este concepto.*

**Problema 2.24.** ([Andreescu and Andrica, 2014], p. 55, Problema 7) Use la fórmula de De Moivre para encontrar todas las raíces complejas de los siguientes polinomios:

- a)  $z^4 - z^2 + 1 = 0$
- b)  $z^7 - 2iz^4 - iz^3 - 2 = 0$

Solución:

a) Tome  $w = z^2$  entonces la ecuación se reduce a  $w^2 - w + 1 = 0$ . Usando la fórmula cuadrática las soluciones son

$$w = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Note que las soluciones son números complejos, además que  $w$  es raíz cuadrada de  $z$ , por lo cual se calcula la forma polar de cada complejo y sus raíces cuadradas:

■ Para  $w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ :

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \text{ y } \arg(w) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Las raíces cuadradas son  $\sqrt{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}}$  donde  $k = 0, 1$ .

$$k = 0 : e^{i\frac{\pi/3}{2}} = \boxed{e^{i\frac{\pi}{6}}} \text{ y } k = 1 : e^{i\frac{\pi/3+2\pi}{2}} = \boxed{e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

■ Para  $w = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ :

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ y } \arg(w) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

Tomando el argumento principal:  $\arg(w) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ .

Las raíces cuadradas son  $\sqrt[2]{1}e^{i\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}$  donde  $k = 0, 1$ .

$k = 0 : e^{i\frac{5\pi}{3}} = \boxed{e^{i\frac{5\pi}{3}}}$  y  $k = 1 : e^{i\frac{5\pi}{3} + 2\pi} = \boxed{e^{i\frac{11\pi}{3}}}$

Finalmente las soluciones de la ecuación son:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_3 = e^{i\frac{7\pi}{6}}, \quad z_4 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

b) Factorizando la ecuación:  $z^7 - 2iz^4 - iz^3 - 2 = z^4(z^3 - 2i) - i(z^3 - 2i) = (z^4 - i)(z^3 - 2i) = 0$ .  
Como los complejos forman un dominio entero, la ecuación se puede resolver calculando los valores de  $z$  tales que  $z^4 = i$  y  $z^3 = 2i$ .

■ Para  $z^4 = i$ :  $|i| = 1$  y  $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ .

Las raíces cuartas son  $e^{i\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$  donde  $k = 0, 1, 2, 3$ .

$k = 0 : \boxed{e^{i\frac{\pi}{4}}}$ ,  $k = 1 : \boxed{e^{i\frac{5\pi}{4}}}$ ,  $k = 2 : \boxed{e^{i\frac{9\pi}{4}}}$ ,  $k = 3 : \boxed{e^{i\frac{13\pi}{4}}}$ .

■ Para  $z^3 = 2i$ :  $|2i| = 2$  y  $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ .

Las raíces cúbicas son  $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$  donde  $k = 0, 1, 2$ .

$k = 0 : \boxed{\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$ ,  $k = 1 : \boxed{\sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$ ,  $k = 2 : \boxed{\sqrt[3]{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}}$ .

Finalmente las soluciones de la ecuación son:  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ ,  $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{8}}$ ,  $z_3 = e^{i\frac{9\pi}{8}}$ ,  $z_4 = e^{i\frac{13\pi}{8}}$ ,  $z_5 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ,  $z_6 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ,  $z_7 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ .

2.3

Problemas propuestos para el capítulo

**Problema 2.25.** Determine cuál opción es correcta y justifique por qué las demás son incorrectas:

El efecto geométrico de multiplicar por el complejo  $w = 6 \left( \frac{3 + 3i}{3 - 3i} \right)$  en el plano complejo es:

- (a) sextuplicar el módulo y girar  $\frac{\pi}{2}$  en sentido horario.
- (b) duplicar el módulo y girar  $\pi$  en sentido antihorario.
- (c) multiplicar el módulo por 3 y girar  $\frac{\pi}{4}$  en sentido horario.
- (d) multiplicar el módulo por 6 y girar  $\pi$  en sentido antihorario.
- (e) Ninguna.

**Problema 2.26.** Determine cuál opción es correcta y justifique por qué las demás son incorrectas.

El subconjunto de números complejos sombreado en la gráfica es:

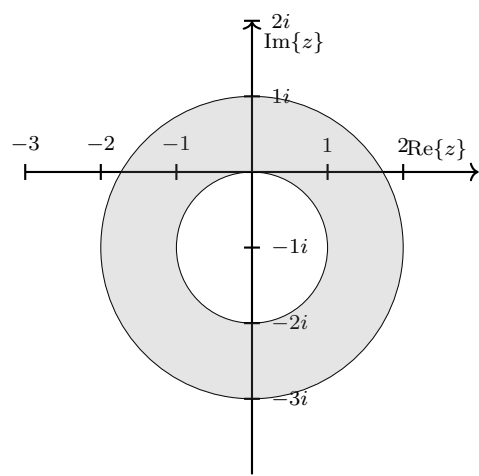


Figura 2.4: Figura del problema 2.26

- (a)  $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z - i| \leq 2\}$

(b)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - (-i)| \leq 2\}$
- (c)  $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z - (-i)| \leq 2\}$

(d)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2\}$

**Problema 2.27.** En el plano complejo, represente el conjunto de números complejos  $z$  tales que:

$$\frac{4\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{6} \text{ y } |z| < 3$$

**Problema 2.28** (Examen 1 - Preliminares, semestre 2019 - 2). En el plano complejo se han dibujado los números complejos  $z$  y  $w$  como se muestra en la figura. Indique en la misma figura dónde quedarían aproximadamente los números:

- a)  $\frac{1}{z}$
- b)  $(1 + i)z$
- c)  $\overline{w}$
- d)  $-z$
- e)  $w^2$

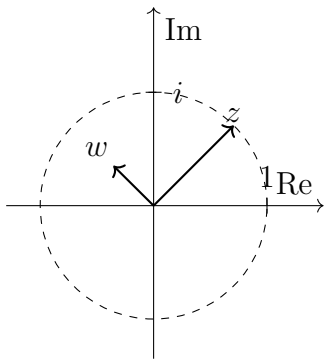


Figura 2.5: Figura del problema 2.28

**Problema 2.29** (Examen 1 - Preliminares, semestre 2019 - 2). La ecuación  $2z^4 + 2z^2 + 1 = 0$  tiene una raíz compleja  $z$  con argumento entre  $\pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$ . Determine el argumento de  $z$ .

**Problema 2.30** (Examen 1 - Preliminares, semestre 2022 - 2). Use la fórmula de De Moivre para encontrar todas las raíces complejas del polinomio  $z^6 - 11(i + 1)z^3 + 121i = 0$ .

**Problema 2.31.** Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones donde  $z, w \in \mathbb{C}$ . Si son verdaderas demuéstrelas; si son falsas, muestre un contraejemplo.

- a)  $|z| = |iz|$
- b) Si  $z$  y  $w$  son imaginarios puros, entonces  $zw$  es imaginario puro.
- c) Si  $z \neq 0$ , entonces  $\left| \frac{z}{|z|} \right| = 1$
- d) Si  $re^{i\theta}$  es la forma polar de  $z$ , entonces  $\text{Im}(z) = r \sin \theta$
- e)  $\arg(z) = -\arg(\overline{z})$

f) Si  $z$  y  $\bar{z}$  son raíces de  $ax^2 + bx + c = 0$ , entonces  $b^2 - 4ac < 0$

g) Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Si  $|w| < 1$  y  $|z| \leq 1$ , entonces  $\left| \frac{z+w}{1+\bar{w}z} \right| = 1$

h) Si  $z$  y  $w$  son imaginarios puros, entonces  $zw \in \mathbb{R}$

i)  $z = \bar{z}$  si y solo si  $z$  es real

j) Si  $z$  es imaginario puro, entonces  $z^{-1} = -z$

k) Si  $\bar{z} = -z$ , entonces  $z$  es imaginario puro

l) Si  $z = a + bi$  con  $a = b$ , entonces  $|z| = |a|\sqrt{2}$

m) Si  $z = bi$  con  $b \neq 0$ , entonces  $iz$  es real

**Problema 2.32.** ([Andreescu and Andrica, 2014], p. 19, Problema 9) Encuentre los números reales  $x, y$  en cada caso:

a)  $(1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i$

b)  $(4 - 3i)x^2 + (3 + 2i)xy = 4y^2 - \frac{1}{2}x^2 + (3xy - 2y^2)i$

**Problema 2.33.** ([Andreescu and Andrica, 2014], p. 21, Problema 31) Sean  $z_1, z_2, z_3$  números complejos tales que  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  y  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ . Demuestre que  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ .

**Problema 2.34.** Encuentre la forma polar de los siguientes números complejos. ¿Cuál es el efecto geométrico de multiplicar y dividir por cada uno? Justifique su respuesta.

a)  $z = 3 + i$

b)  $z = 5 - i$

c)  $z = 8$

**Problema 2.35.** ([Andreescu and Andrica, 2014], p. 55, Problema 5) Use la fórmula de De Moivre para encontrar las raíces cuartas de:

a)  $z = -27$

b)  $z = -7 + 24i$

**Problema 2.36.** ([Andreescu and Andrica, 2014], p. 55, Problema 7) Use la fórmula de De Moivre para encontrar todas las raíces complejas de:

a)  $z^4 + 16 = 0$

d)  $(2 - 3i)z^6 + 1 + 5i = 0$

b)  $z^3 - 27i = 0$

e)  $z^{10} + (-2 + i)z^5 - 2i = 0$

c)  $z^5 - 1 - i = 0$

**Problema 2.37.** Demuestre que  $z$  es imaginario puro si y solo si  $z = -\bar{z}$ .



# Capítulo

## 3

### Espacio euclídeo $n$ -dimensional

Los vectores son objetos matemáticos fundamentales que representan magnitudes con dirección y sentido. Se utilizan para describir desplazamientos, fuerzas, velocidades y campos tanto en física como en geometría. Los vectores permiten modelar cantidades como aceleración, momento angular y fuerza, además de visualizar segmentos dirigidos en el espacio. Este capítulo explora estos objetos y muestra cómo su estudio permite resolver problemas de la vida real.

#### 3.1

#### Propiedades básicas

Los vectores tienen dos representaciones equivalentes: como flechas en el espacio y como listas ordenadas de números ( $n$ -tuplas). La perspectiva geométrica revela propiedades importantes que pueden observarse en el video *Vectores, ¿qué son? / Esencia del álgebra lineal, capítulo 1* del canal 3Blue1Brown en YouTube ([https://youtu.be/wiuEEkP\\_XuM?feature=shared](https://youtu.be/wiuEEkP_XuM?feature=shared)).

**Definición 3.1** (Suma y producto por escalar de vectores de manera geométrica). Geométricamente, un vector  $\mathbf{v}$  es una flecha en el espacio caracterizada por tres propiedades: **magnitud** (longitud, tamaño o norma), **dirección** y **sentido**.

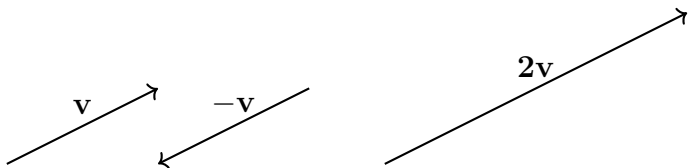


Figura 3.1: Representación de un vector geométrico

Para sumar dos vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ , se utiliza la regla del paralelogramo:

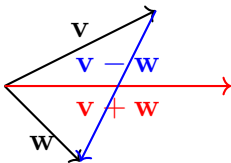


Figura 3.2: La regla del paralelogramo

Para calcular  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ , se coloca el punto inicial de  $\mathbf{v}$  en el punto final de  $\mathbf{u}$ . El vector suma (en rojo) va desde el origen hasta el punto final resultante. La resta  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  (en azul) equivale a la suma  $\mathbf{v} + (-\mathbf{w})$ .

**Definición 3.2** (Vectores en términos de coordenadas). Un vector se representa en un sistema de coordenadas con su punto inicial en el origen y su punto final determinado por sus componentes.

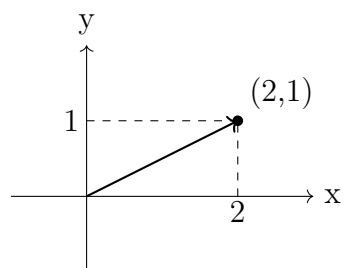


Figura 3.3: Vector  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  en el plano

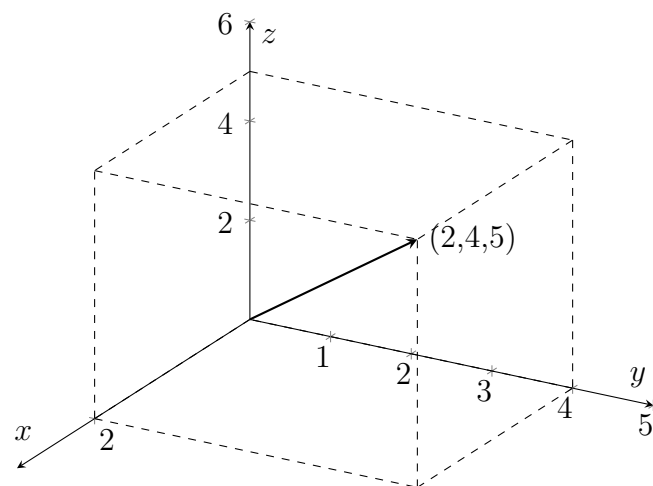


Figura 3.4: Vector  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  en el espacio

Los vectores tridimensionales se grafican usando la regla de la mano derecha.

**Definición 3.3** (Operaciones con vectores usando coordenadas). Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  vectores de  $n$  componentes. Las operaciones básicas son:

1. **Suma:**  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$
2. **Resta:**  $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)$
3. **Multiplicación por escalar:**  $c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$ , donde  $c$  es un número real.

Estos conceptos son fundamentales en álgebra lineal avanzada (ver Definición 6.1).

**Ejemplo 3.4** (Operaciones de vectores con coordenadas). Calcule las siguientes operaciones:

**Solución:**

1. Sean  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$  y  $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ :  
 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1 + 2, 2 - 1, 1 + 3) = (3, 1, 4)$
2. Sean  $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$  y  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ :  
 $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (3 - 1, 2 - 1, 1 - 1) = (2, 1, 0)$

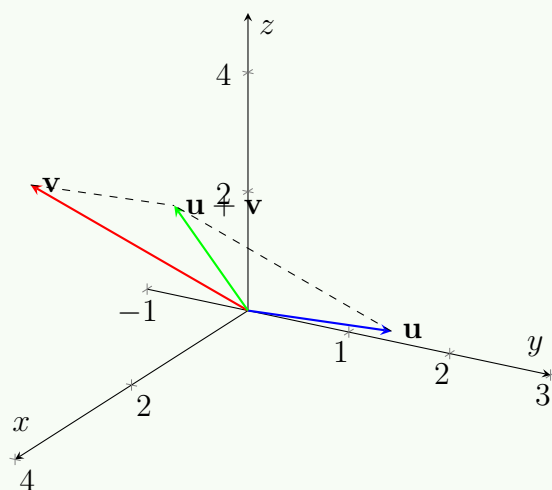


Figura 3.5: Suma de vectores  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

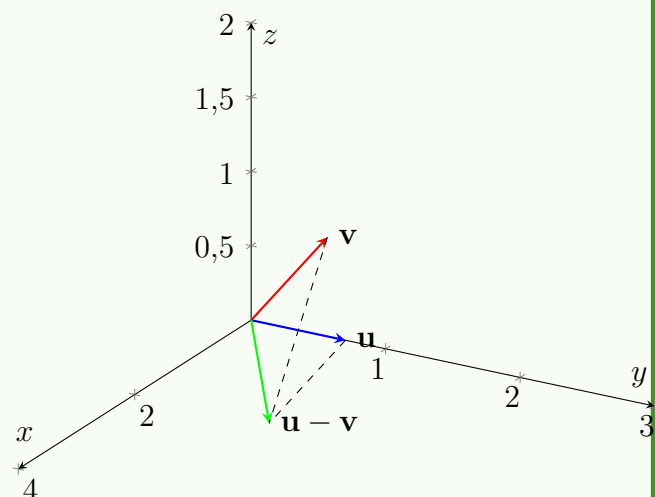
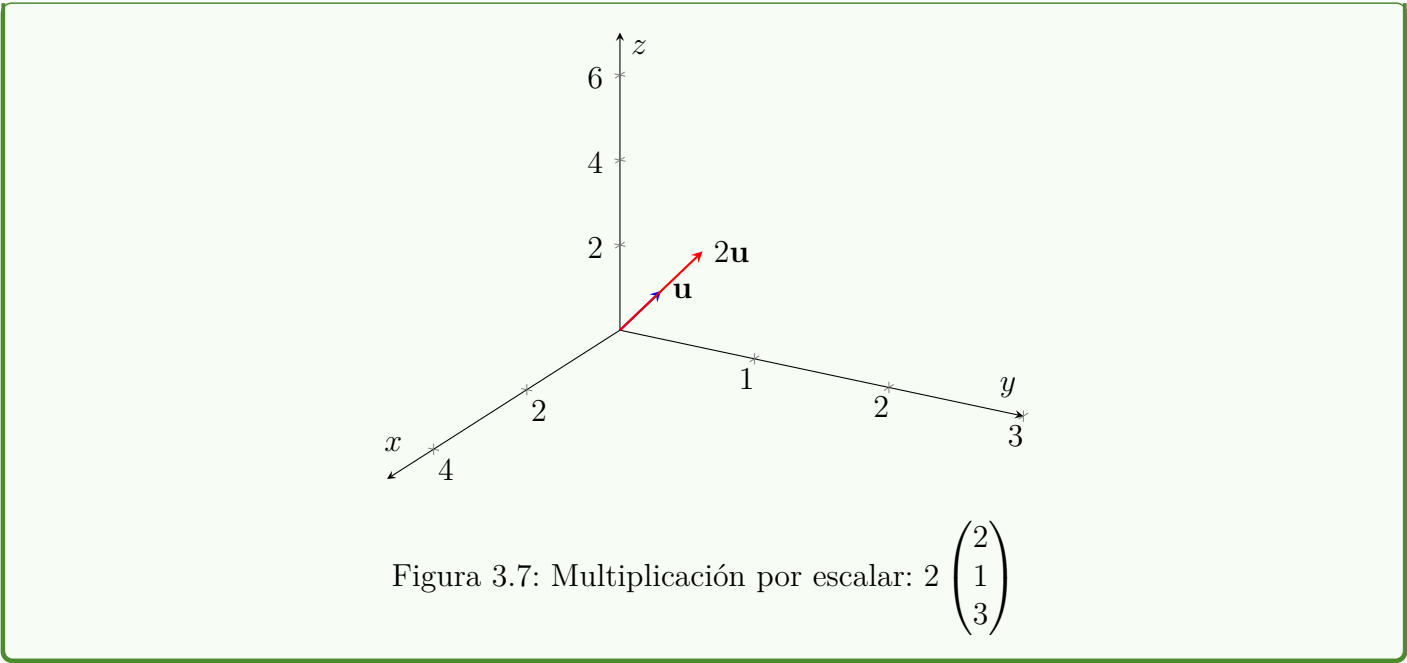
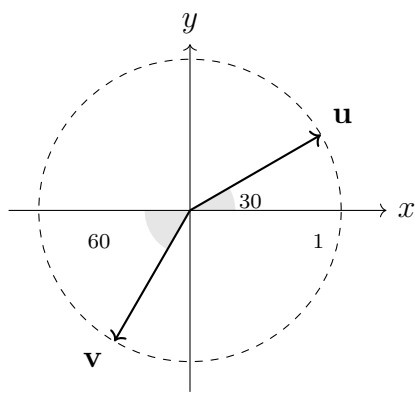


Figura 3.6: Resta de vectores  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Sea  $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$  y  $c = 2$ :  
 $c\mathbf{u} = 2 \cdot (2, 1, 3) = (4, 2, 6)$



**Problema 3.5.** La figura muestra los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Calcule las coordenadas de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  y  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ .



**Solución:** Usando trigonometría:

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathbf{i} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathbf{i} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

Figura 3.8: Vectores del problema 3.5

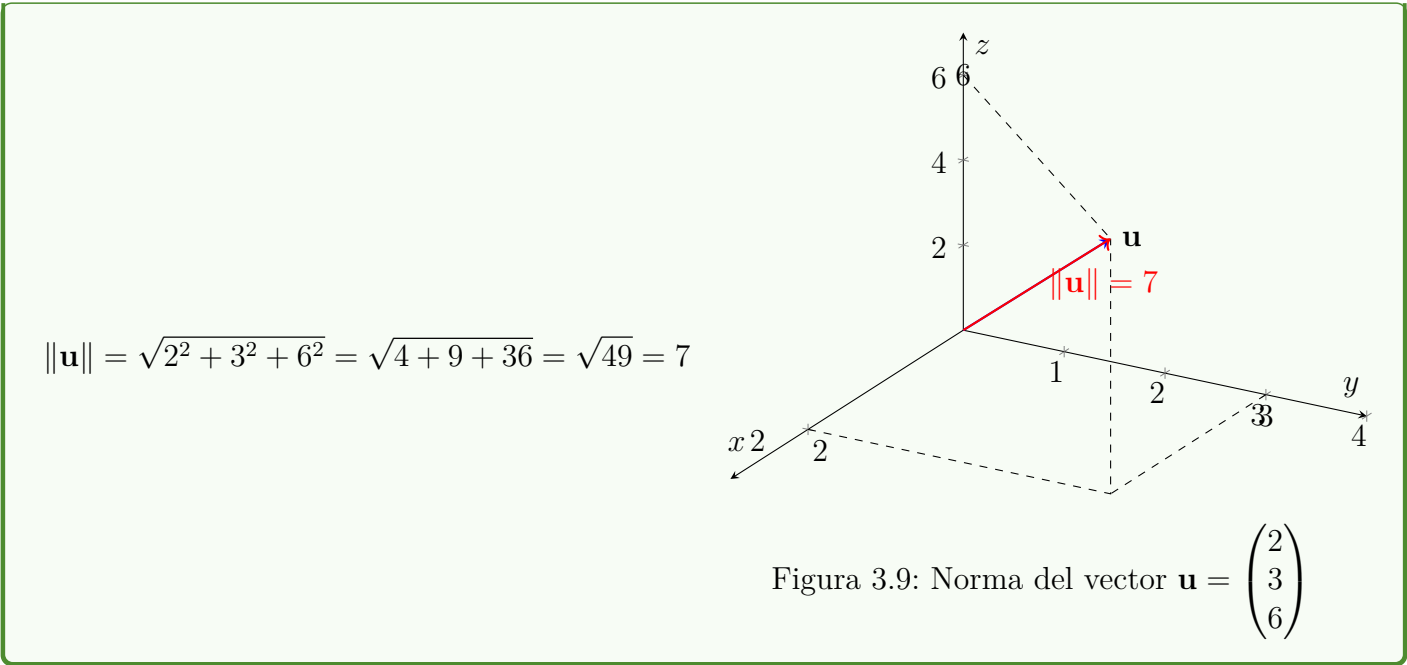
Los problemas de geometría analítica clásica se resuelven eficientemente usando vectores. El principio fundamental es que el vector que une el punto  $A$  con el punto  $B$  se calcula como  $\overrightarrow{AB} = B - A$ .

**Ejemplo:** El vector que une  $A(5, 7, 2)$  y  $B(9, 2, 1)$  es:  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9-5 \\ 2-7 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**Definición 3.6** (Norma de un vector). La **norma** de un vector  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  es:  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$ .

**Ejemplo 3.7.** Calcular la norma del vector  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ :

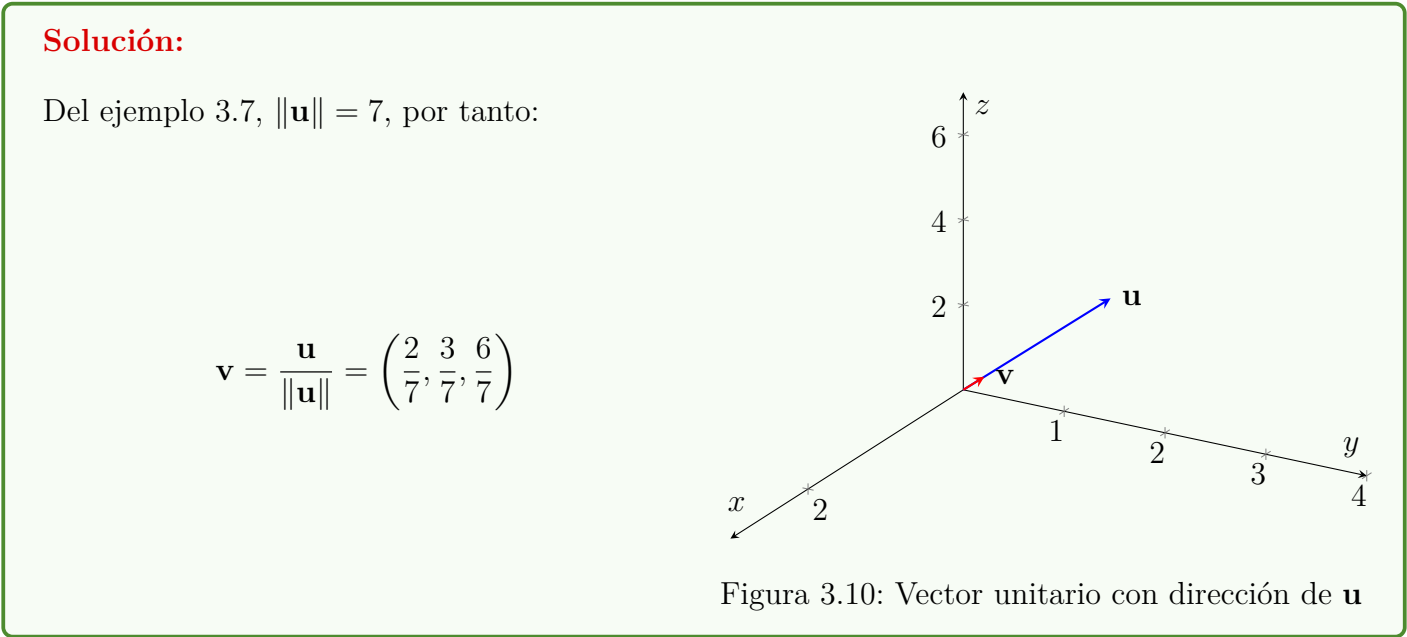
**Solución:**



**Definición 3.8** (Vector unitario). Un **vector unitario** tiene norma igual a 1. Cualquier vector  $\mathbf{v}$  se convierte en unitario mediante:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

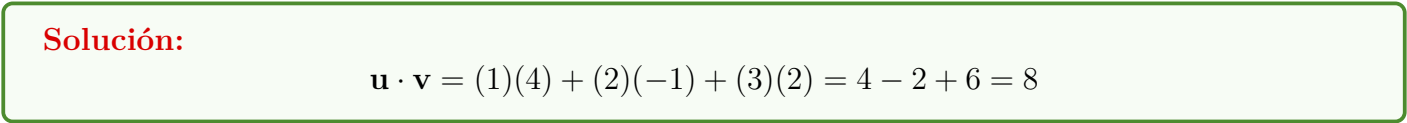
**Ejemplo 3.9.** Calcular el vector unitario con la misma dirección que  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ :



**Definición 3.10** (Producto punto). El **producto punto** de vectores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  es:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

**Ejemplo 3.11.** Calcular  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  para  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ :



**Observación 3.12.** El ángulo entre vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  es siempre menor que  $\pi$  radianes.

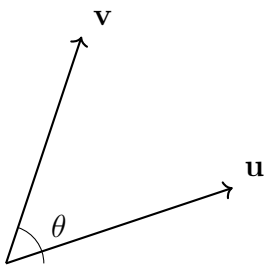


Figura 3.11: Ángulo entre vectores

**Definición 3.13** (Ángulo entre vectores). El ángulo  $\theta$  entre vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  está dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$
$$\theta = \arccos \left( \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right)$$

El **sentido** del vector está determinado por la dirección de su flecha.

**Definición 3.14** (Producto cruz). El **producto cruz** (o *producto vectorial*) es una operación **exclusiva** de  $\mathbb{R}^3$  que toma dos vectores  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  y devuelve un nuevo vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  perpendicular al plano que forman  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Su magnitud es igual al área del paralelogramo generado por ambos vectores. Se calcula de la siguiente manera:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1).$$

**Ejemplo 3.15.** Sean los vectores  $\vec{a} = (1, 2, 0)$  y  $\vec{b} = (3, 4, 0)$ . Entonces:  $\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{i}(2 \cdot 0 - 0 \cdot 4) - \mathbf{j}(1 \cdot 0 - 0 \cdot 3) + \mathbf{k}(1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) = \mathbf{i}(0) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(4 - 6) = (0, 0, -2)$ .

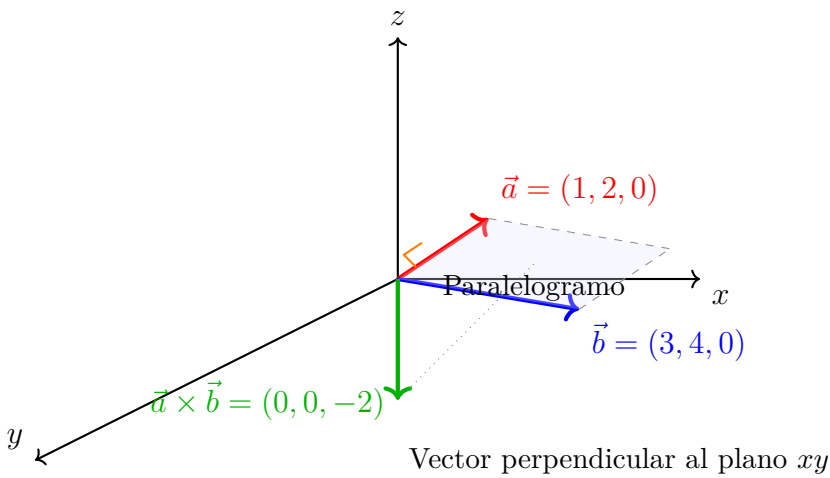


Figura 3.12: Producto cruz entre los vectores  $(1, 2, 0)$  y  $(3, 4, 0)$ . El resultado es un vector perpendicular al plano  $xy$  con dirección hacia el eje  $z$  negativo.

**Definición 3.16** (Plano en el espacio). Un **plano** en el espacio tridimensional es el conjunto de todos los puntos  $(x, y, z)$  que satisfacen la ecuación  $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$  donde  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  es un punto conocido del plano,  $\vec{n} = (a, b, c)$  es el vector normal (perpendicular) al plano y  $\vec{r} = (x, y, z)$  es cualquier punto del plano. Desarrollando el producto punto, obtenemos la **ecuación general del plano**

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

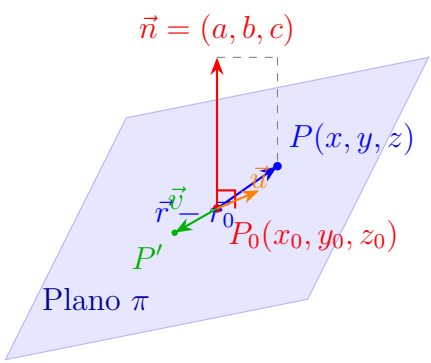


Figura 3.13: Representación geométrica de un plano: El vector normal  $\vec{n}$  es perpendicular a cualquier vector contenido en el plano.

**Ejemplo 3.17.** Determine la ecuación del plano que contiene al punto  $P_0(2, -1, 3)$  y tiene vector normal  $\vec{n} = (4, -2, 5)$ .

**Solución:** Usando la forma vectorial:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \implies (4, -2, 5) \cdot (x - 2, y + 1, z - 3) = 0$$

Desarrollando el producto punto:

$$4(x - 2) - 2(y + 1) + 5(z - 3) = 0$$
$$4x - 8 - 2y - 2 + 5z - 15 = 0$$
$$4x - 2y + 5z - 25 = 0$$

**Problema 3.18.** Dados los puntos  $A = (3, 0, 2)$ ,  $B = (4, 3, 0)$  y  $C = (8, 1, -1)$ , calcular:

- (a) El perímetro del triángulo  $ABC$
- (b) Los ángulos internos del triángulo  $ABC$ .
- (c) El área del triángulo  $ABC$ .
- (d) Un vector perpendicular al plano que contiene  $A$ ,  $B$  y  $C$
- (e) La ecuación del plano  $\Pi$  que contiene  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
- (f) Las ecuaciones simétricas de la recta perpendicular a  $\Pi$  que pasa por el origen.
- (g) La distancia del punto  $(3, 1, -2)$  al plano  $\Pi$ .

**Solución:**

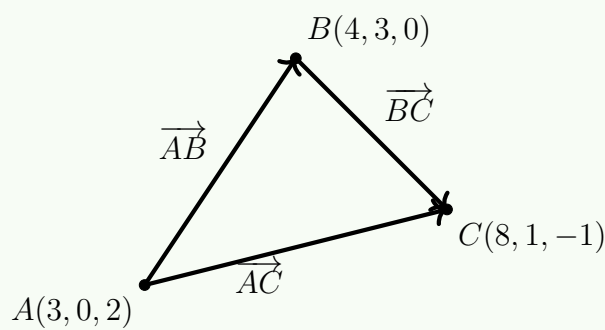


Figura 3.14: Triángulo del problema 3.18

Calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (5, 1, -3)$$

$$\overrightarrow{BC} = (4, -2, -1)$$

(a) Normas de los vectores:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

$$\text{Perímetro: } \sqrt{14} + \sqrt{35} + \sqrt{21} \approx 14,240$$

(b) Ángulos internos:

Para el ángulo en A (entre  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ ):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$$

$$\cos(\theta_A) = \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\theta_A = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$

Para el ángulo en B (entre  $\overrightarrow{BA}$  y  $\overrightarrow{BC}$ ):

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\theta_B = \frac{\pi}{2}$$

Para el ángulo en C (entre  $\overrightarrow{CA}$  y  $\overrightarrow{CB}$ ):

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 21$$

$$\cos(\theta_C) = \frac{21}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{21}} = \frac{21}{\sqrt{735}}$$

$$\theta_C = \arccos\left(\frac{21}{\sqrt{735}}\right)$$

(c) Área usando el producto cruz:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-7, -7, -14)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{49 + 49 + 196} = \frac{7\sqrt{6}}{2} \approx 8,573$$

(d) Vector normal al plano:  $\mathbf{n} = (-7, -7, -14)$

(e) Ecuación del plano usando el punto A(3, 0, 2) y vector normal:

$$-7(x - 3) - 7(y - 0) - 14(z - 2) = 0$$

$$-7x - 7y - 14z = -49$$

(f) Ecuaciones simétricas de la recta perpendicular a  $\Pi$  por el origen:

$$\frac{x}{-7} = \frac{y}{-7} = \frac{z}{-14}$$

(g) Distancia del punto (3, 1, -2) al plano:

$$d = \frac{|-7(3) - 7(1) - 14(-2) + 49|}{\sqrt{49 + 49 + 196}} = \frac{49}{7\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6} \approx 2,858.$$

**Problema 3.19.** Dados los vectores  $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$  y  $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ , calcular:

- (a)  $\mathbf{u} + 5\mathbf{v} - \mathbf{w}$

(b)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{w}\|$

(c)  $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{w}\|$

(d) Vector unitario con dirección de  $\mathbf{u}$

(e) Vector  $\mathbf{x}$  que satisface  $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 4\mathbf{x} + \mathbf{w}$

(f)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  y  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- (g)  $\cos(\theta)$  donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$

(h) Vector ortogonal a  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$

(i) Proyección de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$

(j) Valor de  $\alpha$  tal que  $\mathbf{s} = \mathbf{i} - \alpha\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  sea ortogonal a  $\mathbf{v}$

(k) Valor de  $\alpha$  tal que  $\mathbf{s} = \mathbf{i} - \alpha\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  sea paralelo a  $\mathbf{v}$

**Solución:** Reescribiendo en coordenadas:  $\mathbf{u} = (3, -3, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (-2, 1, -6)$ ,  $\mathbf{w} = (-1, 0, 5)$

(a)  $\mathbf{u} + 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = (3, -3, 1) + 5(-2, 1, -6) - (-1, 0, 5) = (-6, 2, -34)$

(b)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{w}\| = \|(2, -3, 6)\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$

(c)  $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{w}\| = \sqrt{19} + \sqrt{26}$

(d)  $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{(3, -3, 1)}{\sqrt{19}} = \left(\frac{3}{\sqrt{19}}, -\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}\right)$

(e) De  $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 4\mathbf{x} + \mathbf{w}$ :
$$3\mathbf{x} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}$$
$$\mathbf{x} = \frac{1}{3}(9, -7, -3) = \left(3, -\frac{7}{3}, -1\right)$$

(f)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-2) + (-3)(1) + 1(-6) = -15$ 
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (17, 16, -3)$$

(g)  $\cos(\theta) = \frac{-15}{\sqrt{19}\sqrt{41}}, \theta = \arccos\left(\frac{-15}{\sqrt{19}\sqrt{41}}\right) \approx 2,138 \text{ rad}$

(h)  $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = (-15, -16, -3)$

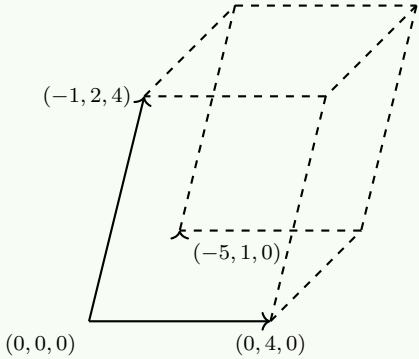
(i)  $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{-15}{41}(-2, 1, -6) = \left(\frac{30}{41}, -\frac{15}{41}, \frac{90}{41}\right)$

(j)  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow -2 - \alpha - 18 = 0 \Rightarrow \alpha = -20$

(k) Para paralelismo:  $\mathbf{s} = k\mathbf{v}$ . Comparando componentes:  $\alpha = \frac{1}{2}$

**Problema 3.20.** Calcule el volumen del paralelepípedo de la figura

**Solución:**



El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo definen.

Sean  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Calculamos  $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ :

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ 9 \end{pmatrix}$$
$$V = \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} = -80$$

Por tanto, el volumen del paralelepípedo es 80 unidades cúbicas.

**Problema 3.21.** Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

- (a) Si  $k$  es escalar, entonces  $\mathbf{u}$  y  $k\mathbf{u}$  son paralelos si y solo si  $k \geq 0$
- (b) Si  $\|\mathbf{u}\| = 2$ ,  $\|\mathbf{v}\| = 1$  y  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$ , entonces el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  es  $\pi/3$  radianes
- (c) Para todo vector en  $\mathbb{R}^n$ :  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (d) Las expresiones  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$  y  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$  tienen sentido y dan el mismo resultado

**Solución:**

(a) **Falso.** Contraejemplo:  $\mathbf{u} = (1, 0)$  y  $k = -1$ . Entonces  $k\mathbf{u} = (-1, 0)$  es paralelo a  $\mathbf{u}$  pero  $k < 0$ .



(b) **Verdadero.**  $\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$  Por tanto,  $\theta = \arccos(1/2) = \pi/3$ .

(c) **Falso.** Contraejemplo:  $\mathbf{u} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{w} = (0, 0)$ .  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|(0, 0)\| = 0$   
 $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| = 1 + 1 + 0 = 2$

(d) **Falso.**  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$  es un escalar, no puede sumarse con el vector  $\mathbf{w}$ . En cambio,  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$  es válido.

**Definición 3.22** (Proyección ortogonal). La **proyección ortogonal** del vector  $\mathbf{u}$  sobre el vector  $\mathbf{v}$  (denotada como  $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ ) es el vector que resulta de proyectar  $\mathbf{u}$  perpendicularmente sobre la recta que contiene a  $\mathbf{v}$ . Matemáticamente, la proyección ortogonal se define como:  $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$  donde  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  es el producto punto entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  mientras que  $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  es el cuadrado de la norma de  $\mathbf{v}$ . Su representación geométrica se da por:

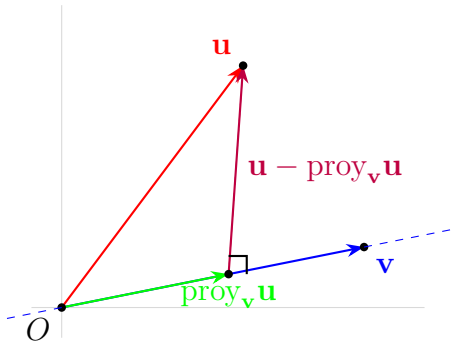


Figura 3.15: Proyección ortogonal del vector  $\mathbf{u}$  sobre el vector  $\mathbf{v}$ .

**Ejemplo 3.23.** Consideremos los vectores  $\mathbf{u} = (3, 4)$  y  $\mathbf{v} = (5, 1)$ . Calculando  $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$  se tiene que:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(5) + (4)(1) = 15 + 4 = 19$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (5)^2 + (1)^2 = 25 + 1 = 26$ . Así,  $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{19}{26}\mathbf{v} = \frac{19}{26}(5, 1) = \left(\frac{95}{26}, \frac{19}{26}\right)$ .

**Teorema 3.24** (Propiedades de la proyección ortogonal). *Dados dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  se cumple que:*

1. La proyección  $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$  es paralela a  $\mathbf{v}$
2. El vector  $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$
3.  $\|\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|}$

**Definición 3.25** (Recta en el espacio). Una **recta en el espacio tridimensional** es el conjunto de puntos que siguen una dirección constante (vector director) desde un punto dado (punto de apoyo). Se define vectorialmente como  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{d}$  con  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  es el vector posición de un punto conocido y  $\vec{d} = (a, b, c)$  es el vector director.

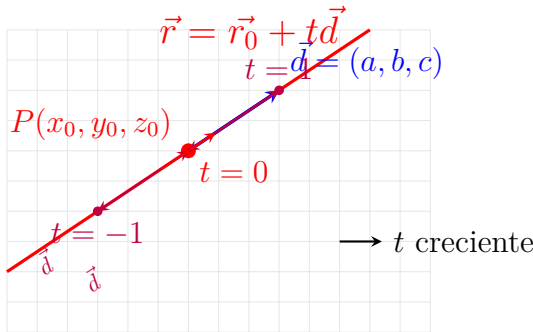


Figura 3.16: Representación bidimensional de una recta en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . El punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  es el punto de apoyo,  $\vec{d} = (a, b, c)$  es el vector director, y el parámetro  $t \in \mathbb{R}$  determina todos los puntos de la recta.

Se describen en términos de sus **ecuaciones paramétricas**

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases}$$

o sus **ecuaciones simétricas**, las cuales son el resultado de despejar el parámetro  $t$  (cuando  $abc \neq 0$ ):

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

. Si alguna componente del vector director es 0, no se incluye la fracción en la recta.

**Ejemplo 3.26.** Considere la recta que pasa por  $P(1, -2, 3)$  con vector director  $\vec{d} = (2, -1, 4)$ . Calcule las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas.

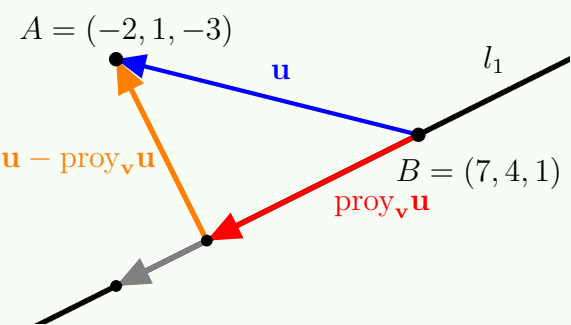
**Solución:** Ecuación vectorial:  $\vec{r} = (1, -2, 3) + t(2, -1, 4)$ .

Ecuaciones paramétricas:  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

Ecuaciones simétricas:  $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z - 3}{4}$ .

**Problema 3.27.** Halle las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto  $(-2, 1, -3)$  y es perpendicular a la recta  $l_1 = \{(7, 4, 1) + t(2, 0, -4)\}$ .

**Solución:**



Para construir la recta necesitamos un vector director y un punto. El punto dado es  $A = (-2, 1, -3)$ . Sea  $B = (7, 4, 1)$  un punto en  $l_1$  y  $\mathbf{v} = (2, 0, -4)$  su vector director. El vector director de la recta perpendicular será  $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ , donde  $\mathbf{u}$  es el vector de  $B$  a  $A$ .

Calculamos:

$$\mathbf{u} = (-2, 1, -3) - (7, 4, 1) = (-9, -3, -4)$$
$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{-18 + 0 + 16}{4 + 0 + 16} (2, 0, -4) = \frac{-1}{10} (2, 0, -4)$$
$$\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (-9, -3, -4) - \frac{-1}{10} (2, 0, -4) = \left(-\frac{44}{5}, -3, -\frac{22}{5}\right)$$

Multiplicando por 5, las ecuaciones simétricas son  $\frac{x + 2}{-44} = \frac{y - 1}{-15} = \frac{z + 3}{-22}$ .

**Problema 3.28.** El plano mediatriz del segmento  $\overline{AB}$  es el plano que pasa por el punto medio de  $\overline{AB}$  y es perpendicular a  $\overline{AB}$ . Considere los puntos  $A(2, 3, 0)$  y  $B(-2, 1, -4)$ .

- a) Determine los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  tal que  $ax + by + cz = -2$  sea la ecuación del plano mediatriz  $\Pi$  del segmento  $\overline{AB}$ .
- b) Calcule la ecuación de la recta  $L$  perpendicular al plano  $\Pi$  que pasa por el origen.
- c) Si el punto  $S = (s_1, s_2, s_3)$  es el simétrico de  $P(0, 1, 4)$  respecto a la recta  $L$ , calcule los valores de  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$ .
- d) Calcule la distancia del punto  $(4, 2, 0)$  al plano  $\Pi$ .

**Solución:**

a) El vector  $\overrightarrow{AB} = (-4, -2, -4)$  es normal al plano mediatriz. El punto medio del segmento es  $(0, 2, -2)$ .

La ecuación del plano es:

$$-4(x - 0) - 2(y - 2) - 4(z + 2) = 0 \Rightarrow -4x - 2y - 4z = 4$$

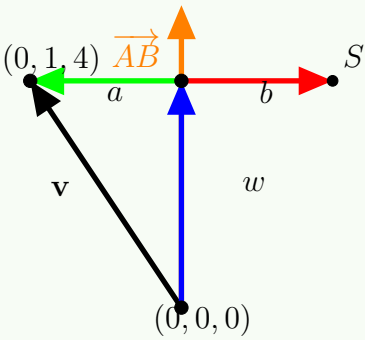
Dividiendo entre  $-2$ :  $2x + y + 2z = -2$

Por tanto,  $a = 2$ ,  $b = 1$  y  $c = 2$ .

b) El vector  $\overrightarrow{AB} = (-4, -2, -4)$  es perpendicular al plano, así que las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el origen son:

(3.1)  $\frac{x}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-4}$

c)



Sea  $\mathbf{v} = (0, 1, 4)$  el vector del origen a  $P$ .

La proyección de  $\mathbf{v}$  sobre  $\overrightarrow{AB}$  es:

$$\text{proy}_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{v} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{v}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2} \overrightarrow{AB} = \frac{-18}{36} (-4, -2, -4) = (2, 1, 2)$$

El vector perpendicular es:

$$\mathbf{v} - \text{proy}_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{v} = (-2, 0, 2)$$

El punto simétrico es:

$$S = \text{proy}_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \text{proy}_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{v}) = (2, 1, 2) - (-2, 0, 2) = (4, 1, 0)$$

d) Usando la fórmula de distancia punto-plano con  $-4x - 2y - 4z = 4$  y el punto  $(4, 2, 0)$ :

$$d = \frac{|-4(4) - 2(2) - 4(0) - 4|}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = \frac{|-24|}{\sqrt{36}} = 4$$

**Problema 3.29.** Dados los vértices de un triángulo  $A(3, -1, -1)$ ,  $B(1, 2, -7)$ ,  $C(-5, 14, -3)$ , halle las ecuaciones simétricas de la recta bisectriz del ángulo interno del vértice  $B$ .

**Solución:**

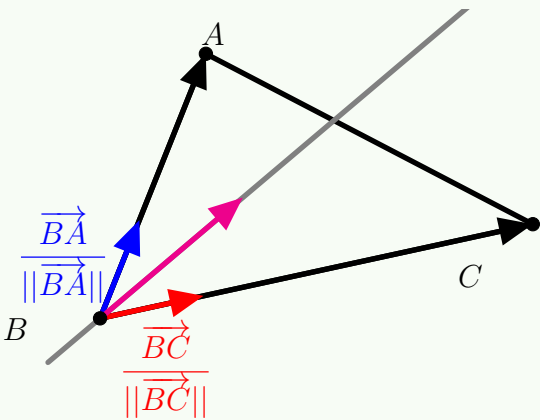
La bisectriz del ángulo en  $B$  tiene vector director  $\mathbf{w} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|} + \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|}$ .

Calculamos:  $\overrightarrow{BA} = (2, -3, 6)$  con  $\|\overrightarrow{BA}\| = 7$   
 $\overrightarrow{BC} = (-6, 12, 4)$  con  $\|\overrightarrow{BC}\| = 14$   
Por tanto:

$$\mathbf{w} = \frac{(2, -3, 6)}{7} + \frac{(-6, 12, 4)}{14} = \left(\frac{-1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{8}{7}\right)$$

Multiplicando por 7, la ecuación de la recta es:

$$(3.2) \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{8}$$



**Problema 3.30.** Halle la ecuación de la recta que intercepta perpendicularmente a las rectas  $l_1 = \{(7, 2, 4) + t(2, 5, 1)\}$  y  $l_2 = \{(4, 4, 2) + s(-1, 3, 0)\}$ .

**Solución:**

Sean  $\mathbf{u} = (2, 5, 1)$  y  $\mathbf{v} = (-1, 3, 0)$  los vectores directores de  $l_1$  y  $l_2$  respectivamente.  
El vector director de la recta perpendicular es:

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3, -1, 11)$$

Para encontrar un punto, construimos un plano que contenga  $l_1$  y sea paralelo a  $\mathbf{p}$ . El vector normal del plano es:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & 11 \end{vmatrix} = (56, -25, 13)$$

El plano que pasa por  $(7, 2, 4)$  con normal  $(56, -25, 13)$  tiene ecuación:

$$56(x - 7) - 25(y - 2) + 13(z - 4) = 0 \Rightarrow 56x - 25y + 13z = 394$$

Para encontrar la intersección con  $l_2$ , sustituimos las ecuaciones paramétricas de  $l_2$ :

$$\begin{aligned} 56(4 - s) - 25(4 + 3s) + 13(2) &= 394 \\ 224 - 56s - 100 - 75s + 26 &= 394 \\ -131s &= -244 \Rightarrow s = \frac{244}{131} \end{aligned}$$

El punto de intersección es:

$$\left(4 - \frac{244}{131}, 4 + \frac{3 \cdot 244}{131}, 2\right) = \left(\frac{280}{131}, \frac{1256}{131}, 2\right)$$

Por tanto, la recta tiene ecuación:

$$\left(\frac{280}{131}, \frac{1256}{131}, 2\right) + t(-3, -1, 11)$$

**Problema 3.31.** Tres vectores son coplanares si están sobre el mismo plano. Demuestre que si  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  pasan por el origen, entonces son coplanares si y solo si  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ .

**Solución:**

Si  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ , entonces:  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

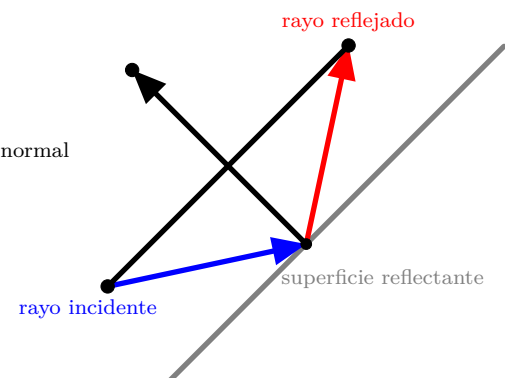
( $\Rightarrow$ ) Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son coplanares, entonces uno puede escribirse como combinación lineal de los otros dos. Sin pérdida de generalidad, sea  $\mathbf{w} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$  para algunos escalares  $k_1, k_2$ .

Entonces:  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ k_1u_1 + k_2v_1 & k_1u_2 + k_2v_2 & k_1u_3 + k_2v_3 \end{vmatrix}$

Como la última fila es combinación lineal de las dos primeras, el determinante es cero.

( $\Leftarrow$ ) Si  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ , entonces el determinante es cero, lo que implica que las filas son linealmente dependientes. Por tanto, uno de los vectores puede escribirse como combinación lineal de los otros dos, es decir, son coplanares.

**Problema 3.32** (Examen 3 - Vectores, semestre 2022 - 2). ([Espinoza Ramos, 2006], p. 87, Problema 78) Un rayo de luz viaja por la recta  $l = \{(2, 0, 1) + t(-1, -1, 0)\}$ . Al chocar con el plano  $2x - y + z + 2 = 0$  se refleja. Hallar la recta  $l_1$  que contiene el rayo reflejado.



**Solución:** Para hallar la ecuación de la recta reflejada necesitamos un punto y un vector director.

**Paso 1:** Encontrar el punto de intersección. La recta tiene ecuaciones paramétricas:  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$

Sustituyendo en el plano  $2x - y + z + 2 = 0$ :

$$2(2 - t) - (-t) + 1 + 2 = 0 \Rightarrow 4 - 2t + t + 3 = 0 \Rightarrow t = 7$$

El punto de intersección es  $(-5, -7, 1)$ .

**Paso 2:** Sea  $\mathbf{u}$  el vector director de la recta en sentido contrario,  $\mathbf{n}$  el vector normal al plano y  $\mathbf{v}$  el vector director del rayo reflejado. Entonces

(3.3)  $\mathbf{v} = \text{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{u} - (\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{u})$ .

Este diagrama muestra la construcción vectorial para encontrar el vector director reflejado. Se representa un plano como una línea. Un vector negro  $\mathbf{n}$  es normal al plano. Un vector azul  $\mathbf{u}$  apunta hacia el plano. Su proyección sobre el plano,  $\text{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{u}$ , está representada por un vector naranja. El vector reflejado  $\mathbf{v}$  (rojo) se obtiene sumando el vector naranja y el vector verde  $-(\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{u})$ , que es la reflexión de la componente normal de  $\mathbf{u}$ .

Haciendo los cálculos:

$$\text{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{u} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

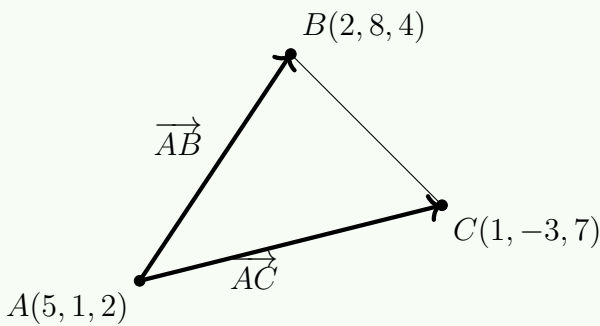
$$\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 7/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}.$$

Así,  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ -7/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ . Por lo cual, la recta por la cual está reflejado el rayo es  $\boxed{(-5, -7, 1) + t(-1/3, -4/3, 1/3)}.$

**Problema 3.33** (Examen 3 - Vectores, semestre 2022 - 2). Sean  $A = (5, 1, 2)$ ,  $B = (2, 8, 4)$  y  $C = (1, -3, 7)$  los vértices de un triángulo.

- a) Calcular el área del triángulo  $\triangle ABC$ .
- b) Hallar las ecuaciones paramétricas de la mediana  $\overrightarrow{AD}$ , donde  $D$  es el punto medio de  $\overline{BC}$ .
- c) Hallar las ecuaciones paramétricas de la mediana  $\overrightarrow{BE}$ , donde  $E$  es el punto medio de  $\overline{AC}$ .
- d) Calcular el baricentro (intersección de las medianas anteriores).
- e) Calcular el área del triángulo  $\triangle ADC$  y relacionarla con el área de  $\triangle ABC$ .
- f) Hallar las ecuaciones paramétricas de la altura desde  $B$  al lado opuesto.
- g) Hallar las ecuaciones paramétricas de la altura desde  $A$  al lado opuesto.
- h) Calcular el ortocentro (intersección de las alturas anteriores).
- i) Hallar las ecuaciones simétricas de la recta de Euler que une el baricentro y el ortocentro.

**Solución:**



Los vectores son:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-3, 7, 2) \\ \overrightarrow{AC} &= (-4, -4, 5) \\ \overrightarrow{BC} &= (-1, -11, 3)\end{aligned}$$

a) El área se calcula como  $\text{Área} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$

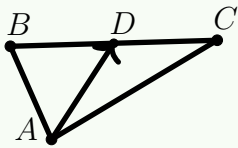
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (43, 7, 40)$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{43^2 + 7^2 + 40^2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3498}}{2} \approx 29,57}$$

b) El punto medio es  $D = \frac{B + C}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right).$

El vector director es  $\overrightarrow{AD} = \left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ .

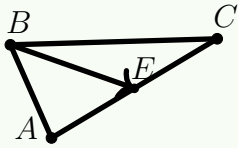
Ecuaciones paramétricas: 
$$\begin{cases} x = 5 - \frac{7}{2}t \\ y = 1 + \frac{3}{2}t \\ z = 2 + \frac{7}{2}t \end{cases}$$



c) El punto medio es  $E = \frac{A+C}{2} = \left(3, -1, \frac{9}{2}\right)$ .

El vector director es  $\overrightarrow{BE} = \left(1, -9, \frac{1}{2}\right)$ .

Ecuaciones paramétricas: 
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 8 - 9t \\ z = 4 + \frac{1}{2}t \end{cases}$$



d) Para hallar la intersección, igualamos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} 5 - \frac{7}{2}t_1 = 2 + t_2 \\ 1 + \frac{3}{2}t_1 = 8 - 9t_2 \\ 2 + \frac{7}{2}t_1 = 4 + \frac{1}{2}t_2 \end{cases}$$

Resolviendo:  $t_1 = t_2 = \frac{2}{3}$ .

El baricentro es:  $G = \left(\frac{8}{3}, 2, \frac{13}{3}\right)$

e) Para  $\triangle ADC$ , calculamos  $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} = \left(\frac{43}{2}, \frac{7}{2}, \frac{40}{2}\right)$$

$$\text{Área}(\triangle ADC) = \frac{\sqrt{3498}}{4} = \frac{1}{2} \text{Área}(\triangle ABC)$$

f) Para la altura desde  $B$ , necesitamos un vector perpendicular a  $\overrightarrow{AC}$ .  
Calculamos la componente perpendicular:

$$\mathbf{h} = \overrightarrow{AB} - \text{proy}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}$$

$$\text{proy}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{(-3, 7, 2) \cdot (-4, -4, 5)}{57} (-4, -4, 5) = \frac{-6}{57} (-4, -4, 5) = \left(\frac{8}{19}, \frac{8}{19}, -\frac{10}{19}\right)$$

$$\mathbf{h} = (-3, 7, 2) - \left(\frac{8}{19}, \frac{8}{19}, -\frac{10}{19}\right) = \left(-\frac{65}{19}, \frac{125}{19}, \frac{48}{19}\right)$$

Ecuaciones paramétricas: 
$$\begin{cases} x = 2 - \frac{65}{19}t \\ y = 8 + \frac{125}{19}t \\ z = 4 + \frac{48}{19}t \end{cases}$$

g) Para la altura desde  $A$ , necesitamos un vector perpendicular a  $\overrightarrow{BC}$ .

$$\mathbf{h} = \overrightarrow{AC} - \text{proy}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{AC}$$

$$\text{proy}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{AC} = \frac{(-4, -4, 5) \cdot (-1, -11, 3)}{131} (-1, -11, 3) = \frac{63}{131} (-1, -11, 3)$$

$$\mathbf{h} = \left( \frac{461}{131}, -\frac{169}{131}, -\frac{466}{131} \right)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 5 + \frac{461}{131}t \\ y = 1 - \frac{169}{131}t \\ z = 2 - \frac{466}{131}t \end{cases}$$

h) Resolviendo el sistema de las dos alturas:

$$t_1 = -\frac{646}{583}, \quad t_2 = \frac{131}{583}$$

El ortocentro es:  $H = \left( \frac{3376}{583}, \frac{414}{583}, \frac{700}{583} \right)$

i) La recta de Euler pasa por  $G$  y  $H$  con vector director:

$$\overrightarrow{GH} = \left( \frac{5464}{1749}, -\frac{752}{583}, -\frac{5479}{1749} \right)$$

Ecuación simétrica:

$$\frac{x - \frac{8}{3}}{\frac{5464}{1749}} = \frac{y - 2}{-\frac{752}{583}} = \frac{z - \frac{13}{3}}{-\frac{5479}{1749}}$$

3.2

Problemas propuestos

**Problema 3.34.** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Recuerde que debe proporcionar una demostración si es verdadera o un contraejemplo si es falsa. Aquí  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  son vectores,  $\mathbf{0}$  es el vector cero del espacio correspondiente y los símbolos  $\|\mathbf{u}\|$  y  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  representan la norma de  $\mathbf{u}$  y el producto punto entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , respectivamente.

- a) En  $\mathbb{R}^2$ , si  $\mathbf{u}$  está en el primer cuadrante y  $\mathbf{v}$  está en el tercer cuadrante, entonces  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  no puede ser positivo.
- b) Si  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ , entonces existe un escalar  $k$  tal que  $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$  o  $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$ .
- c) Dada la ecuación vectorial  $3(2\mathbf{v} - \mathbf{x}) = 5\mathbf{x} - 4\mathbf{w} + \mathbf{v}$ , donde  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores dados, determine si es posible resolverla para  $\mathbf{x}$ .
- d) En  $\mathbb{R}^2$ , los vectores que tienen norma 5 y cuyo punto inicial está en el origen tienen su punto final sobre la circunferencia de radio 5 centrada en el origen.
- e) Si  $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$  para vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

**Problema 3.35.** ([Espinoza Ramos, 2006], p. 85, Problema 64) Determine la ecuación de un plano que cumple las siguientes condiciones: pasa por el punto  $(3, 1, -1)$ , es perpendicular al plano  $2x - 2y + z + 4 = 0$



y su intersección con el eje  $z$  es el punto  $(0, 0, -3)$ .

**Solución:**  $5x + y - 8z = 24$ .

**Problema 3.36.** ([Espinoza Ramos, 2006], p. 86, Problema 76) Halle la ecuación del plano que contiene al punto  $(5, 0, -4)$  y a la recta  $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+2}{1}$ .

**Solución:**  $x + z = 1$ .

**Problema 3.37.** ([Espinoza Ramos, 2006], p. 76, Problema 2) Una recta pasa por los puntos  $A(-6, 6, 5)$  y  $B(15, -6, 1)$ . Determine los puntos de intersección de esta recta con los planos coordenados  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $z = 0$ .

**Solución:** Los puntos de intersección son  $(0, 2, -3)$ ,  $(3, 0, -2)$  y  $(9, -4, 0)$ , respectivamente.

**Problema 3.38.** ([Espinoza Ramos, 2006], p. 78, Problema 20) Un escalador observa que existe una rama recta de un árbol que pasa por los puntos  $A(3, 5, 3)$  y  $B(8, 3, 1)$ . Si lanza una cuerda desde el punto  $P(8, 6, 5)$  hasta la rama, ¿cuál es la longitud mínima que debe tener la cuerda?

**Solución:**  $\sqrt{\frac{629}{33}}$ .

**Problema 3.39.** ([Espinoza Ramos, 2006], p. 85, Problema 65) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$  y es perpendicular al plano  $2x + y + z + 4 = 0$ .

**Solución:**  $2y - z = 0$ .

**Problema 3.40.** ([Espinoza Ramos, 2006], p. 88, Problema 86) Halle la ecuación del plano que pasa por los puntos  $A(1, 2, -4)$ ,  $B(4, -3, 2)$  y  $C(-4, 5, 10)$ .

**Solución:**  $11x + 9y + 2z - 21 = 0$ .

**Problema 3.41.** ([Espinoza Ramos, 2006], p. 80, Problema 31) Los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  forman un paralelogramo en ese orden. Si las coordenadas de los tres primeros puntos son  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(0, -1, 4)$  y  $C(-1, 2, 6)$ , determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $C$  y  $D$ .

**Solución:**  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-6}{1}$ .

**Problema 3.42.** ([Espinoza Ramos, 2006], p. 81, Problema 41) Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(1, 2, 3)$  y que es perpendicular al segmento que une los puntos  $(2, 3, 4)$  y  $(-3, 2, 5)$ , intersecándolo en algún punto.

**Problema 3.43.** ([Espinoza Ramos, 2006], p. 76, Problema 3) La mediana de un triángulo es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Dado el triángulo con vértices  $A(3, 6, -7)$ ,  $B(-5, 2, 7)$  y  $C(4, -7, -2)$ , determine las ecuaciones simétricas de la mediana trazada desde el vértice  $C$ .

**Solución:**  $\frac{x-4}{-5} = \frac{y+7}{11} = \frac{z+2}{2}$ .

**Problema 3.44.** ([Espinoza Ramos, 2006], p. 77, Problema 15) La altura de un triángulo es el segmento que une un vértice con un punto del lado opuesto (o su prolongación) de manera perpendicular a dicho lado. Dado el triángulo con vértices  $A(1, -2, -4)$ ,  $B(3, 1, -3)$  y  $C(5, 1, -7)$ , determine las ecuaciones simétricas de la altura trazada desde el vértice  $B$  hacia el lado  $\overline{AC}$ .

**Solución:**  $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{15} = \frac{z+3}{19}$ .

**Problema 3.45.** La mediatriz de un segmento es la recta que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a él. Dado el triángulo con vértices  $A(3, -1, -1)$ ,  $B(1, 2, -7)$  y  $C(-5, 14, -3)$ , determine las ecuaciones simétricas de la mediatriz del segmento  $\overline{CA}$ .

**Solución:**  $\frac{x+1}{-4} = \frac{y-\frac{13}{2}}{-15} = \frac{z+2}{-2}$ .



# Capítulo

## 4

## Matrices y determinantes

Las matrices son objetos fundamentales en matemáticas aplicadas, utilizadas en sistemas de ecuaciones, transformaciones lineales, criptografía y análisis de datos. Este capítulo explora sus propiedades básicas y operaciones.

### 4.1

### Propiedades básicas

**Definición 4.1** (Matriz). Una **matriz** es un arreglo rectangular de números (reales o complejos) organizados en  $m$  filas y  $n$  columnas, denotado como  $A = (a_{ij})$ . Se llama **cuadrada** si  $m = n$ .

**Ejemplo 4.2.**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$  es  $3 \times 2$ , donde  $a_{22} = 2$ .

**Definición 4.3** (Suma de matrices). Dadas dos matrices  $A$  y  $B$  de tamaño  $m \times n$ , la suma se define como  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ .

**Ejemplo 4.4.**  $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Definición 4.5** (Multiplicación por escalar). Dado  $k \in \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ,  $kA = (k \cdot a_{ij})$ .

**Ejemplo 4.6.**  $5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 45 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 15 & 0 \\ 10 & 25 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ .

**Definición 4.7** (Multiplicación de matrices). Para  $A$  de tamaño  $m \times n$  y  $B$  de tamaño  $n \times p$ , el producto  $AB$  tiene tamaño  $m \times p$  y  $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ .

**Ejemplo 4.8.** Calcule la multiplicación de las siguientes matrices  $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 1 \\ -1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \\ -8 & 0,5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ :

**Solución:** Realizando cada cálculo detalladamente:

$$c_{11} = 5 \cdot 5 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot (-8) + 1 \cdot 4 = 25 + 8 - 72 + 4 = -35.$$

$$c_{12} = 5 \cdot 6 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot (0,5) + 1 \cdot 5 = 30 + 16 + 4,5 + 5 = 55,5.$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot (-8) + 2 \cdot 4 = -5 + 4 - 48 + 8 = -41.$$

$$c_{22} = (-1) \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot (0,5) + 2 \cdot 5 = -6 + 8 + 3 + 10 = 15.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 1 \\ -1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \\ -8 & 0,5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 55,5 \\ -41 & 15 \end{pmatrix}$$

**Definición 4.9** (Matriz transpuesta). Para  $A = (a_{ij})$  de tamaño  $m \times n$ , su transpuesta  $A^T = (a_{ji})$  es de tamaño  $n \times m$ .

**Ejemplo 4.10.**  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & -4 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 9 \\ 6 & -4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

**Problema 4.11.** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , calcule las siguientes operaciones (si son posibles):

- (a)  $AB$

(b)  $BA$
- (c)  $CB$

(d)  $CA$
- (e)  $A + B$

(f)  $A - B$
- (g)  $5C - 4D$

(h)  $DC$
- (i)  $CD$

(j)  $BA^T$
- (k)  $A^T B^T$

(l)  $B^T A^T$
- (m)  $AC$

(n)  $CA$

**Solución:**

(a)  $AB = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 6 & 15 \\ 5 & -2 & 8 & 9 \\ 24 & 41 & 43 & 80 \end{pmatrix}$

(b)  $BA$ : No definida ( $2 \times 4$  y  $3 \times 2$ )

(c)  $CB$ : No definida ( $4 \times 4$  y  $2 \times 4$ )

(d)  $CA$ : No definida ( $4 \times 4$  y  $3 \times 2$ )

(e)  $A + B$ : No definida (tamaños diferentes)

(f)  $A - B$ : No definida (tamaños diferentes)

(g)  $5C - 4D = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 10 & -16 \\ 1 & 20 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(h)  $DC = \begin{pmatrix} 20 & 53 & 9 & 29 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \\ 7 & 17 & 9 & 1 \\ 15 & 23 & 13 & 22 \end{pmatrix}$

(i)  $CD = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 6 & 30 \\ 6 & 7 & 1 & 16 \\ 7 & 17 & 9 & 1 \\ 15 & 23 & 13 & 22 \end{pmatrix}$

(j)  $BA^T = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 39 \\ 8 & 13 & 62 \end{pmatrix}$

(k)  $A^T B^T = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 9 & 13 \\ 39 & 62 \end{pmatrix}$

(l)  $B^T A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 24 \\ 12 & -2 & 41 \\ 6 & 8 & 43 \\ 15 & 9 & 80 \end{pmatrix}$

(m)  $AC$ : No definida ( $3 \times 2$  y  $4 \times 4$ )

(n)  $CA$ : No definida ( $4 \times 4$  y  $3 \times 2$ )

**Definición 4.12** (Grafo dirigido). Un grafo dirigido  $G = (V, E)$  consiste en un conjunto de vértices  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y un conjunto de aristas  $E \subseteq V \times V$ . Su matriz de adyacencia  $A = (a_{ij})$  es una matriz  $n \times n$  donde:  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

La diagonal principal representa bucles (aristas de un vértice a sí mismo).

**Ejemplo 4.13.** Construya el grafo con  $V = \{1, 2, 3\}$  y  $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 1)\}$ .

**Solución:** La matriz de adyacencia es:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y el grafo es

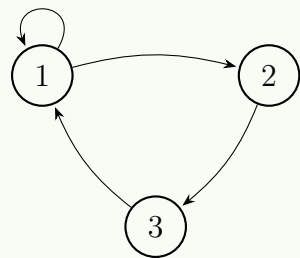


Figura 4.1: Grafo del ejemplo 4.13

**Ejemplo 4.14.** Construya el grafo con  $V = \{A, B, C\}$  y  $E = \{(A, B), (B, A), (B, B), (C, C)\}$ .

**Solución:** La matriz de adyacencia es  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y el dibujo del grafo es:

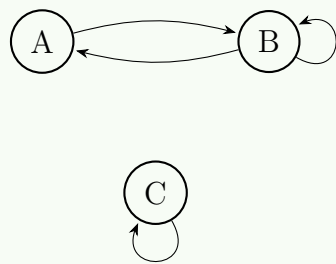
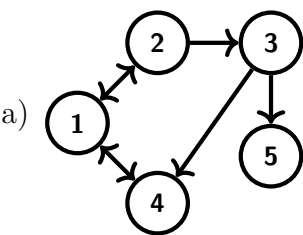


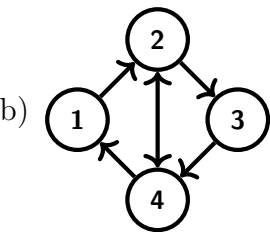
Figura 4.2: Grafo del ejemplo 4.14

**Problema 4.15.** Determine la matriz de adyacencia asociada a los siguientes grafos. Use  $A^3$  para determinar cuántos caminos de longitud 3 van del vértice 3 al vértice 2.

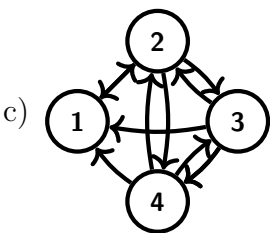


**Solución:** La matriz de adyacencia es  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , calculando  $A^3$  se tiene que

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . El elemento  $(3,2)$  de  $A^3 = 1$ , por lo cual existe 1 camino de longitud 3 de 3 a 2:  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ .



**Solución:** La matriz de adyacencia es  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , donde  $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Así la posición  $(3, 2)$  de  $B^3$  es 1 y el camino de longitud 3 de 3 a 2 es  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ .



**Solución:** La matriz de adyacencia es  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , donde  $C^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  por lo cual  $C^3_{3,2} = 5$ . Así, existen 5 caminos de longitud 3 de 3 a 2:

1.  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$
2.  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$
3.  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$
4.  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$
5.  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

**Problema 4.16.** Dibuje el grafo para cada matriz de adyacencia:

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Solución:** Grafo con 4 vértices  $\{1, 2, 3, 4\}$ :

- Bucles:  $1 \rightarrow 1$  (2 veces),  $2 \rightarrow 2$  (4 veces),  $3 \rightarrow 3$  (3 veces),  $4 \rightarrow 4$  (3 veces)
- Aristas múltiples:
  - $1 \rightarrow 3$  (2 aristas)
  - $1 \rightarrow 4$  (4 aristas)
  - $2 \rightarrow 1$  (1 arista)
  - $2 \rightarrow 4$  (1 arista)
  - $3 \rightarrow 2$  (1 arista)
  - $4 \rightarrow 1$  (2 aristas)
  - $4 \rightarrow 2$  (5 aristas)
  - $4 \rightarrow 3$  (1 arista)

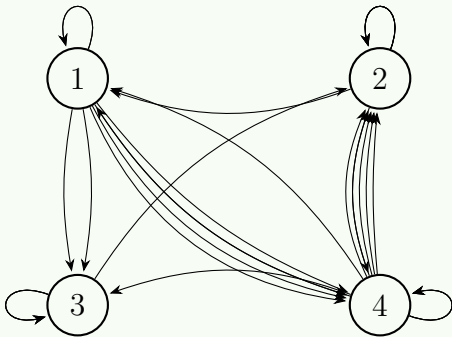


Figura 4.3: Grafo del problema (a)

b) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Solución:** Grafo con 4 vértices {1, 2, 3, 4}:

- Bucles: 3 → 3 (3 veces), 4 → 4 (3 veces)
- Aristas múltiples:
  - 1 → 3 (2 aristas)
  - 2 → 1 (1 arista)
  - 2 → 4 (1 arista)
  - 3 → 2 (1 arista)
  - 4 → 1 (2 aristas)
  - 4 → 2 (5 aristas)
  - 4 → 3 (1 arista)

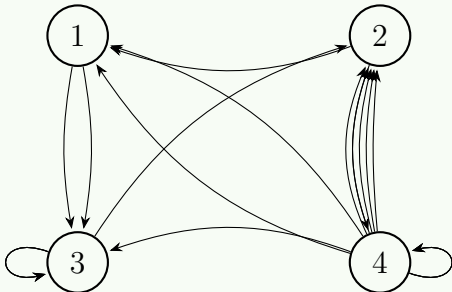


Figura 4.4: Grafo del problema (b)

c) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Solución:** Grafo con 4 vértices {1, 2, 3, 4}:

- Bucles: 1 → 1 (1 vez), 3 → 3 (3 veces), 4 → 4 (2 veces)
- Aristas múltiples:
  - 1 → 3 (2 aristas)
  - 2 → 1 (1 arista)
  - 2 → 3 (2 aristas)
  - 2 → 4 (1 arista)
  - 3 → 2 (1 arista)
  - 4 → 1 (2 aristas)
  - 4 → 2 (5 aristas)
  - 4 → 3 (1 arista)

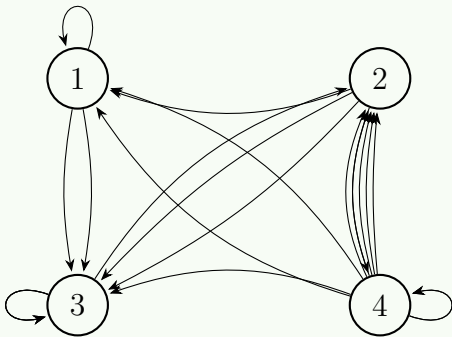


Figura 4.5: Grafo del problema (c)

**Problema 4.17.** Una aerolínea ofrece vuelos directos entre múltiples ciudades de América Latina. Las ciudades son: Buenos Aires (BA), Sao Paulo (SP), Lima, Bogotá (Bog), Santiago (Stgo), Caracas (Carc) y Ciudad de México (CDMX). Las rutas bidireccionales son:

- Buenos Aires - Sao Paulo
- Buenos Aires - Santiago
- Sao Paulo - Lima
- Lima - Bogotá
- Santiago - Lima
- Bogotá - Caracas
- Caracas - Ciudad de México

Si se representa cada ciudad como un nodo en un grafo y cada vuelo directo como una arista entre dos nodos:

- I. ¿Cuál es el número mínimo de conexiones necesarias para viajar de una ciudad a otra?
- II. ¿Cuál es el número mínimo de conexiones necesarias para viajar desde Buenos Aires a Ciudad de México?
- III. ¿Cuál es el número mínimo de conexiones necesarias para viajar desde Bogotá a Sao Paulo?

**Solución:** Grafo no dirigido (todas las rutas son bidireccionales):

Figura 4.6: Red de vuelos de la aerolínea

- I. **Distancia máxima (diámetro):** La ruta más larga es  $BA \rightarrow Stgo \rightarrow Lima \rightarrow Bog \rightarrow Carc \rightarrow CDMX$  (4 conexiones). El diámetro del grafo es 4.
- II. **BA a CDMX:** Camino mínimo:  $BA \rightarrow SP \rightarrow Lima \rightarrow Bog \rightarrow Carc \rightarrow CDMX$  (4 conexiones)  
Otra ruta:  $BA \rightarrow Stgo \rightarrow Lima \rightarrow Bog \rightarrow Carc \rightarrow CDMX$  (4 conexiones)  
Mínimo: 4 conexiones
- III. **Bogotá a Sao Paulo:** Camino mínimo:  $Bog \rightarrow Lima \rightarrow SP$  (2 conexiones)
  - **Distancia máxima (diámetro):** 5 conexiones (ej: Stgo a CDMX)



- **BA a CDMX:** Mínimo 5 conexiones:  $BA \rightarrow SP \rightarrow Lima \rightarrow Bog \rightarrow Carc \rightarrow CDMX$
- **Bogotá a SP:** Mínimo 2 conexiones:  $Bog \rightarrow Lima \rightarrow SP$

Ruta	Conexiones	Ciudades intermedias
$BA \rightarrow CDMX$	5	BA-SP-Lima-Bog-Carc-CDMX
$Stgo \rightarrow CDMX$	4	Stgo-Lima-Bog-Carc-CDMX
$Bog \rightarrow SP$	2	Bog-Lima-SP
$BA \rightarrow Carc$	4	BA-SP-Lima-Bog-Carc

Cuadro 4.1: Rutas mínimas entre ciudades

**Problema 4.18.** Una tienda de computadores vende tres tipos de productos: procesadores (\$750.000), tarjetas gráficas (\$950.000) y gabinetes (\$200.000). La tabla muestra las ventas de los primeros cuatro meses:

	Procesadores	Tarjetas gráficas	Gabinetes
Enero	3	4	3
Febrero	5	6	0
Marzo	2	9	4
Abril	1	1	7

Escriba una matriz que represente la cantidad total de dinero obtenido cada mes.

**Solución:** Sea  $P = \begin{pmatrix} 750000 \\ 950000 \\ 200000 \end{pmatrix}$  el vector de precios unitarios. La matriz de ventas  $V = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \\ 2 & 9 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  representa las unidades vendidas por mes (filas = meses, columnas = productos).

De esta manera la matriz de ingresos totales por mes se obtiene multiplicando  $V$  por  $P$ . Calculando detalladamente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \\ 2 & 9 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 750000 \\ 950000 \\ 200000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 750000 + 4 \cdot 950000 + 3 \cdot 200000 \\ 5 \cdot 750000 + 6 \cdot 950000 + 0 \cdot 200000 \\ 2 \cdot 750000 + 9 \cdot 950000 + 4 \cdot 200000 \\ 1 \cdot 750000 + 1 \cdot 950000 + 7 \cdot 200000 \end{pmatrix}$$

Enero:  $3(750000) + 4(950000) + 3(200000) = 2\,250\,000 + 3\,800\,000 + 600\,000 = 6\,650\,000$   
Febrero:  $5(750000) + 6(950000) + 0(200000) = 3\,750\,000 + 5\,700\,000 = 9\,450\,000$   
Marzo:  $2(750000) + 9(950000) + 4(200000) = 1\,500\,000 + 8\,550\,000 + 800\,000 = 10\,850\,000$   
Abril:  $1(750000) + 1(950000) + 7(200000) = 750\,000 + 950\,000 + 1\,400\,000 = 3\,100\,000$

La matriz de ingresos totales por mes es  $\begin{pmatrix} 6\,650\,000 \\ 9\,450\,000 \\ 10\,850\,000 \\ 3\,100\,000 \end{pmatrix}$

**Problema 4.19.** Un restaurante ofrece tres tipos de platos: vegetarianos (\$5000), carne (\$13000) y mariscos (\$20000). La tabla muestra las ventas mensuales:

Tipo de plato	Cant. vendida
Vegetariano	200
Carne	150
Mariscos	100

Si los costos de producción por plato son: Vegetariano \$3000, Carne \$9000 y Mariscos \$15000, calcule:

- (a) Matriz de costo de producción unitario
- (b) Matriz de ingresos por tipo de plato
- (c) Costo total de producción mensual
- (d) Ingreso total mensual
- (e) Ganancias mensuales

**Solución:**

(a) Matriz de costo unitario (vector columna):

$$C_{\text{unit}} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 9000 \\ 15000 \end{pmatrix}$$

(b) Matriz de ingresos por tipo (precio unitario  $\times$  cantidad):

$$I_{\text{tipo}} = \begin{pmatrix} 5000 \times 200 \\ 13000 \times 150 \\ 20000 \times 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,000\,000 \\ 1\,950\,000 \\ 2\,000\,000 \end{pmatrix}$$

(c) Costo total de producción (suma de costos unitarios  $\times$  cantidad):

$$\begin{aligned} &(3000 \times 200) + (9000 \times 150) + (15000 \times 100) \\ &= 600\,000 + 1\,350\,000 + 1\,500\,000 = \boxed{3\,450\,000} \end{aligned}$$

(d) Ingreso total (suma de ingresos por tipo):

$$1\,000\,000 + 1\,950\,000 + 2\,000\,000 = \boxed{4\,950\,000}$$

(e) Ganancias (ingreso total - costo total):

$$4\,950\,000 - 3\,450\,000 = \boxed{1\,500\,000}$$

**Problema 4.20.** Un vendedor de frutas tiene tres puestos: Plaza Satélite, Plaza Central y San Francisco. Se registraron las ventas de manzanas, naranjas y plátanos en dos períodos de la misma semana:

	Manzanas	Naranjas	Plátanos
Plaza Satélite	40	25	30
Plaza Central	15	50	20
San Francisco	20	30	25

Cuadro 4.2: Ventas de fruta en los primeros 3 días

	Manzanas	Naranjas	Plátanos
Plaza Satélite	25	30	20
Plaza Central	35	15	30
San Francisco	45	20	25

Cuadro 4.3: Ventas de fruta en los últimos 4 días

Calcule:

- (a) El número de manzanas, naranjas y plátanos vendidos en Plaza Central durante la semana.
- (b) Puesto donde se vendieron más más plátanos durante cada periodo de la semana.

- (c) Puesto donde se vendió más fruta en toda la semana.
- (d) La matriz que representa la venta total de frutas durante toda la semana.
- (e) Suponga que el vendedor cobra \$2000 por cada manzana, \$300 por cada naranja y \$400 por cada plátano. Encuentre la matriz que representa el ingreso semanal por puesto de venta.
- (f) ¿Cuál fue el ingreso total por la venta de frutas en toda la semana?

**Solución:** Defina las matrices de ventas  $V_1 = \begin{pmatrix} 40 & 25 & 30 \\ 15 & 50 & 20 \\ 20 & 30 & 25 \end{pmatrix}$ ,  $V_2 = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 20 \\ 35 & 15 & 30 \\ 45 & 20 & 25 \end{pmatrix}$ , donde

las filas representan los puestos (Satélite, Central, San Francisco) y las columnas la cantidad de frutas (manzanas, naranjas, plátanos). Haciendo los cálculos:

(a) Las ventas en la Plaza Central están en la fila 2

$$\text{Total} = \begin{pmatrix} 15 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 65 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Se vendieron 50 manzanas, 65 naranjas, 50 plátanos.

(b) Los plátanos están en la columna 3, así en el primer período:  $\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$  se tiene un máximo

en Plaza Satélite, mientras que en el segundo período:  $\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix}$  se tiene un máximo en Plaza Central (30).

(c) La matriz de venta de fruta en total es  $\text{Total por puesto} = (V_1 + V_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 65 & 55 & 50 \\ 50 & 65 & 50 \\ 65 & 50 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 165 \\ 165 \end{pmatrix} \text{ por lo que se vendió más fruta en la Plaza Satélite (170 frutas).}$$

(d) La matriz de venta total es:

$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} 65 & 55 & 50 \\ 50 & 65 & 50 \\ 65 & 50 & 50 \end{pmatrix}$$

(e) La matriz de ingresos por puesto se calcula según el vector de precios:  $P = \begin{pmatrix} 2000 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}$

$$\text{Ingresos} = V_{\text{total}} \cdot P = \begin{pmatrix} 65 & 55 & 50 \\ 50 & 65 & 50 \\ 65 & 50 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \cdot 2000 + 55 \cdot 300 + 50 \cdot 400 \\ 50 \cdot 2000 + 65 \cdot 300 + 50 \cdot 400 \\ 65 \cdot 2000 + 50 \cdot 300 + 50 \cdot 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 166\,500 \\ 139\,500 \\ 165\,000 \end{pmatrix}$$

(f) **Ingreso total semanal:**

$$166\,500 + 139\,500 + 165\,000 = \boxed{471\,000}$$

4.2

Matrices invertibles

**Definición 4.21** (Matriz invertible). Una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n \times n$  se dice **invertible** (o **no singular**) si existe una matriz  $B$  de orden  $n \times n$  tal que:

$$AB = BA = I_n$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ . La matriz  $B$  se llama la **inversa** de  $A$  y se denota por  $A^{-1}$ .

**Ejemplo 4.22.** Considere la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , esta matriz es invertible pues  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ , ya que  $AA^{-1} = I_2$ , detalladamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 & -2 + 2 \\ 6 - 6 & -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 4.23.** Los dos métodos fundamentales para calcular la matriz inversa son:

- 1. **Eliminación de Gauss-Jordan, Lema 4.53:** Mediante operaciones elementales de fila, transforma la matriz aumentada  $[A|I]$  en  $[I|A^{-1}]$ .
- 2. **Matriz adjunta, Teorema 4.78:** Emplea la fórmula  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$ , requiriendo el cálculo de determinantes y cofactores.

Ambos requieren una fundamentación teórica sólida, esencial en álgebra lineal, que desarrollaremos a continuación. Todo se basa en el texto [de Araújo, 2014].

4.2.1

Matrices invertibles: Método de eliminación gaussiana

**Definición 4.24** (Operaciones elementales de fila). Son transformaciones reversibles sobre las filas definidas así:

- 1. **Combinación lineal:**  $kf_i + f_j \rightarrow f_j$   
(Multiplicar la fila  $i$  por  $k$  y sumar a la fila  $j$  para cambiar  $f_j$ )
- 2. **Escalamiento:**  $k \cdot f_i \rightarrow f_i \quad (k \neq 0)$   
(Multiplicar la fila  $i$  por  $k$ )
- 3. **Intercambio:**  $f_i \leftrightarrow f_j$   
(Intercambiar filas  $i$  y  $j$ )

**Ejemplo 4.25.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ , algunas operaciones elementales de fila son:

Solución:

- 1. Multiplicar por -3 la fila 1 y sumar a la fila 2 para cambiar la fila 2,  $(-3)f_1 + f_2 \rightarrow f_2$ :  
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$
- 2. Multiplicar la fila 2 por 0.5,  $0,5 \cdot f_2 \rightarrow f_2$ :  
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
- 3. Intercambiar la fila 1 con la fila 3,  $f_1 \leftrightarrow f_3$ :  
 $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

**Observación 4.26.** *Cada operación tiene inversa:*

- $kf_i + f_j \rightarrow f_j \Rightarrow -kf_i + f_j \rightarrow f_j$ .
- $k \cdot f_i \rightarrow f_i \Rightarrow \frac{1}{k} \cdot f_i \rightarrow f_i$ .
- $f_i \leftrightarrow f_j \Rightarrow f_i \leftrightarrow f_j$  (misma operación).

**Definición 4.27** (Matriz elemental). Una matriz elemental  $E$  de orden  $n \times n$  es la matriz obtenida al aplicar **una operación elemental de fila** a la matriz identidad  $I_n$ . Existen tres tipos:

1. **Combinación:** Resultado de  $kf_i + f_j \rightarrow f_j$  en  $I_n$ .
2. **Escalamiento:** Resultado de  $k \cdot f_i \rightarrow f_i$  en  $I_n$ .
3. **Intercambio:** Resultado de  $f_i \leftrightarrow f_j$  en  $I_n$ .

**Ejemplo 4.28.** Algunas matrices elementales son:

1.  $kf_1 + f_2 \rightarrow f_2$  en  $I_2$ :  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$
2.  $k \cdot f_2 \rightarrow f_2$  en  $I_3$ :  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.  $f_1 \leftrightarrow f_2$  en  $I_3$ :  $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Teorema 4.29.** *Las propiedades fundamentales de las matrices elementales son*

1. *Cada operación elemental  $kf_i + f_j \rightarrow f_j$  aplicada a  $A$  equivale a  $E \cdot A$*
2. *La inversa de una matriz elemental corresponde a la operación inversa, es decir:*

- $E_{comb}^{-1}: -kf_i + f_j \rightarrow f_j$
- $E_{esc}^{-1}: \frac{1}{k} \cdot f_i \rightarrow f_i$
- $E_{int}^{-1}: f_i \leftrightarrow f_j$

**Definición 4.30** (Matrices equivalentes por filas). Dos matrices  $A$  y  $B$  son equivalentes por filas

$$A \sim_f B$$

si  $B$  se obtiene de  $A$  mediante una secuencia finita de operaciones elementales de fila:  $A \xrightarrow{\text{op}_1} A_1 \xrightarrow{\text{op}_2} \dots \xrightarrow{\text{op}_k} B$  o equivalentemente  $B = E_k \dots E_1 A$  donde cada operación  $\text{op}_i$  es de la forma  $kf_p + f_q \rightarrow f_q$ ,  $k \cdot f_r \rightarrow f_r$ , o  $f_s \leftrightarrow f_t$ .

**Ejemplo 4.31.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Verifique que es equivalente a la matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Aplicando  $(-2)f_1 + f_2 \rightarrow f_2$  se tiene que  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 - 2(1) & 4 - 2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = B$ , por lo cual la matriz elemental correspondiente es  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Entonces  $EA = B$  y  $A \sim_f B$ .

**Ejemplo 4.32.** Determine la secuencia de operaciones para que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  sea equivalente a  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Solución:**

1.  $f_1 \leftrightarrow f_2$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.  $\frac{1}{2} \cdot f_2 \rightarrow f_2$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$

Operaciones:  $B = E_2 E_1 A$  donde  $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (intercambio),  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$  (escalamiento).

**Definición 4.33** (Matriz diagonal). Una matriz cuadrada  $D = (d_{ij})$  es **diagonal** si  $d_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ . Es decir, todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.

**Ejemplo 4.34.** Las matrices  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  son diagonales.

**Definición 4.35** (Matriz triangular). Una matriz cuadrada es:

- **Triangular superior:** Elementos bajo la diagonal principal son cero ( $a_{ij} = 0$  si  $i > j$ )
- **Triangular inferior:** Elementos sobre la diagonal principal son cero ( $a_{ij} = 0$  si  $i < j$ )

**Ejemplo 4.36.**  $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  es una matriz triangular superior y una matriz triangular inferior es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Definición 4.37** (Matriz simétrica). Una matriz cuadrada  $A$  es **simétrica** si  $A^T = A$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ). Los elementos son simétricos respecto a la diagonal principal.

**Ejemplo 4.38.** La matriz  $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  es simétrica.

**Definición 4.39** (Matriz antisimétrica). Una matriz cuadrada  $A$  es **antisimétrica** si  $A^T = -A$  ( $a_{ij} = -a_{ji}$ ). Los elementos diagonales son cero.

**Ejemplo 4.40.** Las matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$  son antisimétricas.

**Definición 4.41** (Traza de una matriz). La traza de una matriz cuadrada  $A$  es la suma de sus elementos diagonales, es decir,  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

**Ejemplo 4.42.** Para  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , su traza es  $\text{tr}(B) = 2 + 3 = 5$ .

**Teorema 4.43** (Algunas propiedades de la traza, las matrices simétricas y antisimétricas). *Dada una matriz cuadrada  $A$ , su traza tiene las siguientes propiedades:*

1. **Traza de antisimétrica:** Si  $A$  es antisimétrica, entonces  $\text{tr}(A) = 0$
2. **Descomposición simétrica-antisimétrica:** Toda matriz cuadrada  $A$  puede expresarse como:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

donde  $\frac{A + A^T}{2}$  es simétrica y  $\frac{A - A^T}{2}$  es antisimétrica.

3. **Linealidad de traza:** Para matrices  $n \times n$  y escalares  $\alpha, \beta$ :

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B)$$

4. **Traza de producto:**  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

*Demostración.* Demostración de (1): Si  $A$  es antisimétrica,  $a_{ii} = -a_{ii}$  implica  $2a_{ii} = 0$ , luego  $a_{ii} = 0$ . Por tanto  $\text{tr}(A) = \sum a_{ii} = 0$ .

Demostración de (2): Sea  $S = \frac{A + A^T}{2}$ , entonces  $S^T = \frac{A^T + A}{2} = S$  (simétrica).

Sea  $K = \frac{A - A^T}{2}$ , entonces  $K^T = \frac{A^T - A}{2} = -K$  (antisimétrica).

Además  $S + K = \frac{A + A^T + A - A^T}{2} = A$ . □

**Ejemplo 4.44.** Descompanga la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  de la forma simétrica-antisimétrica.

**Solución:**

Simétrica:  $\frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Antisimétrica:  $\frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Suma:  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

**Definición 4.45** (Forma escalonada). Una matriz está en **forma escalonada** si cumple:

- 1. Todas las filas nulas están en la parte inferior.
- 2. Cada fila no nula tiene pivote (primer elemento  $\neq 0$ ).
- 3. Los pivotes están desplazados a la derecha en filas inferiores.
- 4. Hay ceros debajo de cada pivote.

**Ejemplo 4.46.** Verifique si la siguiente matriz está en forma escalonada:  $\begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{5} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Note que la fila nula (cuarta fila) está en la parte inferior y los pivotes de las filas no nulas son:

- Fila 1: pivote  $\boxed{3}$  (columna 1)
- Fila 2: pivote  $\boxed{5}$  (columna 2)
- Fila 3: pivote  $\boxed{2}$  (columna 4)

Además, los pivotes están desplazados a la derecha:

- Fila 1: pivote en columna 1
- Fila 2: pivote en columna 2 ( $> 1$ )
- Fila 3: pivote en columna 4 ( $> 2$ )

y debajo de cada pivote hay ceros:

- Debajo de  $\boxed{3}$ :  $a_{21} = 0, a_{31} = 0, a_{41} = 0$
- Debajo de  $\boxed{5}$ :  $a_{32} = 0, a_{42} = 0$
- Debajo de  $\boxed{2}$ :  $a_{43} = 0$  (aunque  $a_{44} = 0$  es redundante)

por lo cual la matriz está en la forma escalonada.

Note que la siguiente matriz **no** está en forma escalonada:  $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{4} & 1 \\ \boxed{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  pues aunque la fila nula está abajo el pivote  $\boxed{2}$  (fila 2, col 1) está a la izquierda de pivote  $\boxed{4}$  (fila 1, col 2) y esto implica que debajo de  $\boxed{4}$  hay 0 (correcto) pero debajo de  $\boxed{2}$  no aplica por la violación previa.

**Definición 4.47** (Forma escalonada reducida). Una matriz está en **forma escalonada reducida** si cumple:

1. Está en forma escalonada (cumple la definición 4.45)

2. **Pivotes unitarios:** Cada pivote es 1.

3. **Ceros sobre pivotes:** En cada columna con pivote, todos los elementos sobre él son cero.

**Ejemplo 4.48.** Verifique si las matrices  $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  están en la forma escalonada reducida:

**Solución:** Note que los pivotes son 1, además que hay ceros encima y debajo de cada pivote.

**Ejemplo 4.49.** Las siguientes matrices **No** son forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

**Observación 4.50.** La construcción de matrices escalonadas y escalonadas reducidas conduce a dos algoritmos fundamentales del álgebra lineal:

- El **algoritmo de eliminación gaussiana** (Lema 4.51), que transforma cualquier matriz en forma escalonada mediante operaciones elementales de fila.

▪ El **algoritmo de Gauss-Jordan** (Lema 4.53), que extiende este proceso para obtener la forma escalonada reducida única.

Estos algoritmos, desarrollados por Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan, revolucionaron el álgebra lineal por su:

- **Eficiencia computacional:** Complejidad  $O(n^3)$  para matrices  $n \times n$

▪ **Versatilidad:** Resuelven sistemas lineales, calculan rangos, inversas y determinantes

▪ **Estabilidad numérica:** Con pivoteo, minimizan errores de redondeo

Su implementación sistemática se muestra en los Lemas 4.51 y 4.53.

**Lema 4.51** (Algoritmo de Eliminación Gaussiana). Cualquier matriz se puede convertir en forma escalonada usando las tres operaciones elementales de fila. El proceso funciona así:

1. **Empezar:** Comenzar con la primera fila y la primera columna.

2. **Buscar un número distinto de cero:** En la columna actual, buscar hacia abajo una entrada que no sea cero para usarla como pivote. Si toda la columna tiene ceros, pasar a la siguiente columna.

3. **Poner el pivote arriba:** Si el número encontrado no está en la fila que toca, intercambiar esas dos filas.

4. **Hacer ceros abajo:** Para cada fila que está debajo del pivote, sumarle un múltiplo adecuado de la fila del pivote para que quede cero en esa posición.

5. **Continuar:** Pasar a la siguiente fila y columna, y repetir todo el proceso hasta terminar la matriz.

Matemáticamente, en el paso 4 se calcula  $m_{jk} = \frac{a_{jp}}{a_{kp}}$  y se realiza la operación  $-m_{jk} \cdot f_k + f_j \rightarrow f_j$  para cada fila  $j$  debajo de la fila pivote  $k$ .

**Ejemplo 4.52.** Reducir  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  a forma escalonada:



Solución:

1. Intercambiar  $f_1 \leftrightarrow f_2$ :  $\begin{pmatrix} \boxed{3} & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

2. Eliminar debajo:  $(-\frac{2}{3})f_1 + f_3 \rightarrow f_3$ :  $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Forma escalonada:  $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Lema 4.53** (Algoritmo de Gauss-Jordan). *Este método mejora la eliminación gaussiana para obtener una matriz donde cada pivote vale 1 y tiene ceros tanto arriba como abajo de cada pivote:*

- 1. **Hacer la forma escalonada:** Primero aplicar eliminación gaussiana (Lema 4.51) para obtener la forma escalonada.
- 2. **Convertir pivotes en unos:** Para cada pivote  $a_{kp}$  que no sea 1, dividir toda su fila entre ese número usando la operación  $\frac{1}{a_{kp}}f_k \rightarrow f_k$ .
- 3. **Limpiar hacia arriba:** Para cada pivote que ya vale 1 y está en la posición  $(k,p)$ , eliminar todos los números que están arriba de él. Para cada fila  $i$  que está por encima (desde  $i = 1$  hasta  $k - 1$ ), realizar:  $-a_{ip} \cdot f_k + f_i \rightarrow f_i$  donde  $a_{ip}$  es el número que queremos convertir en cero.

Al final se obtiene la forma escalonada reducida, donde cada columna pivote tiene un 1 en la posición del pivote y ceros en todas las demás posiciones.

**Ejemplo 4.54.** Continuando con  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ :

Solución:

1.  $\frac{1}{3}f_1 \rightarrow f_1$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.  $\frac{1}{2}f_2 \rightarrow f_2$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.  $(-2)f_2 + f_1 \rightarrow f_1$ :  $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Forma escalonada reducida:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Teorema 4.55** (Unicidad de la forma escalonada reducida). *Toda matriz es equivalente por filas a una única matriz en forma escalonada reducida.*

*Demostración.* Se demuestra mediante el algoritmo de Gauss-Jordan, que aplica operaciones elementales de forma sistemática para alcanzar una matriz única. □

**Definición 4.56** (Rango de una matriz). Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . El **rango** de  $A$ , denotado  $\text{rango}(A)$  o  $\text{rank}(A)$ , es:

- El número de filas no nulas en su **forma escalonada** (Definición 4.45)
- El número de pivotes en su **forma escalonada reducida** (Definición 4.47)

**Teorema 4.57** (Propiedades fundamentales del rango). *Para cualquier matriz  $A$ :*

1.  $0 \leq \text{rango}(A) \leq \min\{m, n\}$

2.  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^T)$

3.  $\text{rango}(AB) \leq \min\{\text{rango}(A), \text{rango}(B)\}$

4. Si  $P$  y  $Q$  invertibles:  $\text{rango}(PAQ) = \text{rango}(A)$
- Ejemplo 4.58** (Cálculo por eliminación gaussiana). Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ , y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  calcule su rango.

**Solución:**

1. Para  $A$  :

a)  $(-2)f_1 + f_2 \rightarrow f_2$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

b)  $(-3)f_1 + f_3 \rightarrow f_3$ :  $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Forma escalonada tiene 1 fila no nula  $\Rightarrow \text{rango}(A) = 1$ .

2. Para  $B$  :

a)  $(-4)f_1 + f_3 \rightarrow f_3$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

b) Escalonada:  $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix}$

Tres pivotes  $\Rightarrow \text{rango}(B) = 3 = \min\{3, 3\}$ .

**Teorema 4.59** (Caracterización de matrices invertibles, version 1). Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $A$  es invertible.

2. La forma escalonada reducida de  $A$  es la matriz identidad  $I_n$ .

3.  $A$  se puede escribir como producto de matrices elementales.

4.  $A$  tiene rango máximo ( $\text{rango}(A) = n$ ).

*Demostración.* Demostraremos las equivalencias siguiendo el ciclo  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$ .

**(1)  $\Rightarrow$  (2):** Supongamos que  $A$  es invertible.

Sea  $R$  la forma escalonada reducida de  $A$ . Por definición del algoritmo de Gauss-Jordan, existen matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tales que:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = R$$

Como cada matriz elemental es invertible y el producto de matrices invertibles es invertible, la matriz  $P = E_k E_{k-1} \cdots E_1$  es invertible. Por tanto,  $R = PA$  donde  $P$  es invertible.

Dado que  $A$  es invertible por hipótesis, el producto  $R = PA$  también es invertible (producto de matrices invertibles).

Ahora,  $R$  es una matriz en forma escalonada reducida e invertible. Veamos que esto implica  $R = I_n$ :

- Si  $R$  tuviera una fila de ceros, entonces  $\det(R) = 0$ , lo que contradice que  $R$  sea invertible.

■ Como  $R$  está en forma escalonada reducida, tiene exactamente  $n$  pivotes (uno por fila).

■ Cada pivote vale 1 y está en una columna diferente.

- Como no hay filas nulas, los pivotes deben estar en las posiciones  $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$ .
- Por la estructura de la forma escalonada reducida, esto significa  $R = I_n$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Si la forma escalonada reducida de  $A$  es  $I_n$ , entonces:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I_n$$

Multiplicando ambos lados por la izquierda por  $(E_k E_{k-1} \cdots E_1)^{-1}$ :

$$A = (E_k E_{k-1} \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

Como la inversa de una matriz elemental es también una matriz elemental,  $A$  es producto de matrices elementales.

(3)  $\Rightarrow$  (4): Si  $A$  es producto de matrices elementales, digamos  $A = F_1 F_2 \cdots F_m$ , entonces:

Las operaciones elementales de fila no cambian el rango de una matriz. Como cada  $F_i$  corresponde a una operación elemental, tenemos:

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(F_1 F_2 \cdots F_m I_n) = \text{rango}(I_n) = n$$

(4)  $\Rightarrow$  (1): Si  $\text{rango}(A) = n$ , entonces la forma escalonada reducida de  $A$  tiene  $n$  pivotes, uno en cada fila. Como la matriz es  $n \times n$ , debe tener la forma  $I_n$ .

Por el argumento de (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1), si la forma escalonada reducida es  $I_n$ , entonces  $A$  es producto de matrices elementales, y por tanto invertible.  $\square$

**Ejemplo 4.60.** Verificar que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  es invertible mediante su forma escalonada reducida.

**Solución:** **Paso 1:** Eliminación gaussiana Operación:  $(-3)f_1 + f_2 \rightarrow f_2$   $A \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$   
**Paso 2:** Escalonamiento reducido a)  $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f_2 \rightarrow f_2$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  b)  $(-2)f_2 + f_1 \rightarrow f_1$ :  $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = I_2$   
Como se obtuvo  $I_2$ ,  $A$  es invertible. Además:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{E_2^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_3^{-1}}$$

donde  $E_1, E_2, E_3$  corresponden a las operaciones aplicadas.

**Ejemplo 4.61.** Matriz no invertible:  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  Operaciones:  $(-2)f_1 + f_2 \rightarrow f_2$ :  $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  Forma escalonada reducida:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$  Luego  $B$  no es invertible.

**Problema 4.62.** Use el Algoritmo de eliminación gaussiana (Lema 4.53) para calcular la inversa de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** **Paso 1:** Formar matriz aumentada  $[A|I_3]$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**Paso 2:** Hacer ceros debajo de  $a_{11}$  (pivote=1):

Operación:  $(-2)f_1 + f_2 \rightarrow f_2$   
Operación:  $(-1)f_1 + f_3 \rightarrow f_3$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**Paso 3:** Hacer ceros debajo/encima de  $a_{22}$  (pivote=1):

Operación:  $(2)f_2 + f_3 \rightarrow f_3$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

**Paso 4:** Normalizar fila 3 (pivote= -1):

Operación:  $(-1) \cdot f_3 \rightarrow f_3$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

**Paso 5:** Hacer ceros encima de  $a_{33}$ :

Operación:  $(3)f_3 + f_2 \rightarrow f_2$   
Operación:  $(-3)f_3 + f_1 \rightarrow f_1$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

**Paso 6:** Hacer ceros encima de  $a_{22}$ :

Operación:  $(-2)f_2 + f_1 \rightarrow f_1$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

**Resultado:**  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

4.2.2

Matrices invertibles: determinantes

Hasta este momento hemos visto que una matriz cuadrada  $A$  es invertible si su rango equivale al número de filas y columnas. Existe una función llamada *determinante* (denotada como  $\det(A)$ ) que asocia cada matriz cuadrada a un número y satisface una propiedad fundamental:  $\det(A) = 0$  si y solo si la matriz no es invertible [de Araújo, 2014]. Esta función proporciona así un criterio numérico decisivo para determinar la invertibilidad de matrices cuadradas.

**Definición 4.63** (Determinante de una matriz  $2 \times 2$ . [de Araújo, 2014]). Para una matriz cuadrada de

orden 2:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  el **determinante** de  $A$  se define como  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

**Observación 4.64** (Fundamentación). *El determinante se deduce analizando las condiciones para que  $A$  tenga rango completo (invertibilidad). Consideremos las formas escalonadas posibles:*

**Caso 1:** Cuando  $a_{11} \neq 0$

Forma escalonada:  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}$

Condición de rango 2:  $a_{11} \neq 0$  y  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

**Caso 2:** Cuando  $a_{11} = 0$

Forma escalonada:  $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix}$

Condición de rango 2:  $a_{12}a_{21} \neq 0$

Observemos que en ambos casos, la condición necesaria y suficiente para invertibilidad se reduce a  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  pues cuando  $a_{11} = 0$ , la expresión se convierte en  $-a_{12}a_{21} \neq 0$ , equivalente a  $a_{12}a_{21} \neq 0$ . Por tanto, la función:  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  caracteriza perfectamente la invertibilidad de la matriz.

**Definición 4.65** (Determinante para matrices  $3 \times 3$  [de Araújo, 2014]). Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El **determinante** de  $A$  es un escalar que puede calcularse mediante:

1. **Fórmula explícita:**

(4.1)  $\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

2. **Expansión por cofactores** (primera fila):

(4.2)  $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

donde:

- $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$  es el *cofactor* de  $a_{ij}$
- $M_{ij}$  es la *submatriz menor* obtenida eliminando la fila  $i$  y columna  $j$  de  $A$

**Observación 4.66** (Fundamentación: De eliminación gaussiana a determinante). *La definición de  $\det(A)$  surge del análisis de invertibilidad mediante eliminación gaussiana. Consideremos el caso cuando  $a_{11} \neq 0$ :*

1. **Eliminación inicial:** Tras operaciones elementales en filas 2 y 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

2. **Submatriz crítica:** La submatriz inferior derecha corresponde al menor  $M_{11}$ :

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3. **Condición de pivotes:** Para tres pivotes no nulos se requiere:

$$a_{11} \neq 0 \quad y \quad \det(M_{11}) \neq 0$$

donde  $\det(M_{11}) = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$  (determinante  $2 \times 2$ ).

4. **Primer término del determinante:**

$$a_{11} \det(M_{11}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$

5. **Generalización:** Cuando  $a_{11} = 0$ , se requieren términos adicionales ( $a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$ ) que cubren todas las posibilidades de permutación de filas, completando la fórmula de seis términos.

La expansión por cofactores sintetiza este análisis:

$$\det(A) = a_{11} \underbrace{(-1)^{1+1} \det(M_{11})}_{C_{11}} + a_{12} \underbrace{(-1)^{1+2} \det(M_{12})}_{C_{12}} + a_{13} \underbrace{(-1)^{1+3} \det(M_{13})}_{C_{13}}$$

**Definición 4.67** (Menor de una matriz [de Araújo, 2014]). Dada una matriz  $A$  de tamaño  $n \times n$ , el **menor**  $M_{ij}$  es la submatriz de tamaño  $(n - 1) \times (n - 1)$  obtenida al eliminar:

- La fila que contiene  $a_{ij}$  (fila  $i$ )
- La columna que contiene  $a_{ij}$  (columna  $j$ )

El determinante  $\det(M_{ij})$  se llama *menor del elemento*  $a_{ij}$ .

**Ejemplo 4.68** (Menores en matriz  $3 \times 3$ ). Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Menor**  $M_{11}$ : Eliminar fila 1 y columna 1

$$M_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ \cancel{7} & \boxed{8} & \boxed{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Menor**  $M_{12}$ : Eliminar fila 1 y columna 2

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \boxed{4} & \cancel{5} & \boxed{6} \\ \boxed{7} & \cancel{8} & \boxed{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Menor**  $M_{13}$ : Eliminar fila 1 y columna 3

$$M_{13} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \cancel{6} \\ \boxed{7} & \boxed{8} & \cancel{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 4.69** (Cálculo de determinante por expansión de cofactores). Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

expandiendo por la primera fila.

**Solución:** El determinante se calcula como:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

1. **Menores y cofactores:**

- Menor  $M_{11}$  (eliminar fila 1, columna 1):

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \det(M_{11}) = (5)(9) - (6)(8) = 45 - 48 = -3$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}(-3) = -3$$

- Menor  $M_{12}$  (eliminar fila 1, columna 2):

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad \det(M_{12}) = (4)(9) - (6)(7) = 36 - 42 = -6$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}(-6) = -(-6) = 6$$

- Menor  $M_{13}$  (eliminar fila 1, columna 3):

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \det(M_{13}) = (4)(8) - (5)(7) = 32 - 35 = -3$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}(-3) = -3$$

2. **Combinación lineal:**

$$\begin{aligned} \det(A) &= (1)(C_{11}) + (2)(C_{12}) + (3)(C_{13}) \\ &= (1)(-3) + (2)(6) + (3)(-3) \\ &= -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

**Conclusión:**  $\det(A) = 0$ , lo que indica que  $A$  es singular (no invertible).

**Teorema 4.70** (Invariancia del determinante en la expansión por cofactores). *El valor del determinante de una matriz cuadrada es independiente de la fila o columna seleccionada para su cálculo mediante expansión por cofactores. Formalmente, para cualquier matriz  $A_{n \times n}$  y cualquier elección de  $1 \leq i, j \leq n$ :*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^n a_{ik}C_{ik} \quad (\text{expansión por fila } i) \\ \det(A) &= \sum_{k=1}^n a_{kj}C_{kj} \quad (\text{expansión por columna } j) \end{aligned}$$

donde  $C_{ik}$  y  $C_{kj}$  son los cofactores correspondientes. Este resultado se demuestra en el Teorema 4.5 de [de Araújo, 2014], y el siguiente ejemplo lo verifica numéricamente.

**Ejemplo 4.71** (Expansión por cofactores en columna 2). Calcular el determinante de la matriz  $A =$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ usando expansión por la segunda columna.}$$

**Solución:** La expansión por la columna  $j = 2$  es:

$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

donde:

- $a_{12} = -1$
- $a_{22} = 1$
- $a_{32} = 4$

y  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ .

1. Calculamos menores y cofactores:

- Menor  $M_{12}$  (eliminar fila 1, columna 2):

$$M_{12} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det(M_{12}) = (-2)(5) - (3)(1) = -10 - 3 = -13$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}(-13) = (-1)(-13) = 13$$

- Menor  $M_{22}$  (eliminar fila 2, columna 2):

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det(M_{22}) = (3)(5) - (1)(1) = 15 - 1 = 14$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}(14) = (1)(14) = 14$$

- Menor  $M_{32}$  (eliminar fila 3, columna 2):

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(M_{32}) = (3)(3) - (1)(-2) = 9 + 2 = 11$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}(11) = (-1)(11) = -11$$

2. Combinación de resultados:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1) \cdot (13) + (1) \cdot (14) + (4) \cdot (-11) \\ &= -13 + 14 - 44 \\ &= -43 \end{aligned}$$

Conclusión:  $\det(A) = -43$ .

**Teorema 4.72** (Regla de Sarrus para matrices  $3 \times 3$ ). *El determinante de una matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  se calcula mediante:*

1. Método de diagonales extendidas:

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

2. Método gráfico (extensión de columnas):

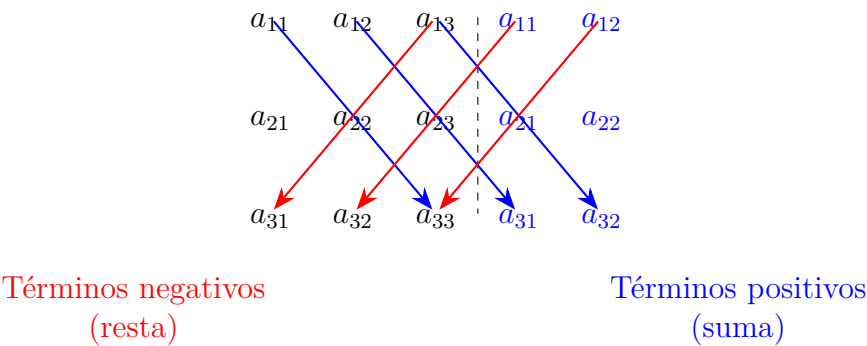


Figura 4.7: Regla de Sarrus, método de extender columnas

3. Método alternativo (extensión de filas):



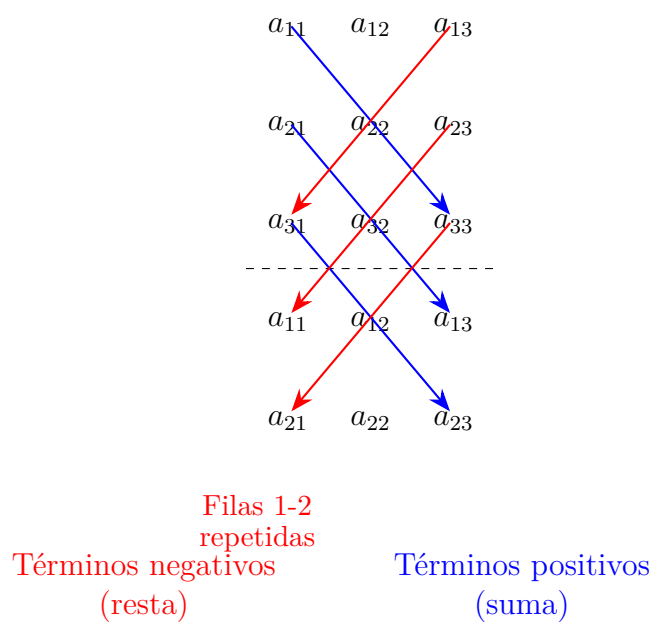


Figura 4.8: Regla de Sarrus, método de extender las filas

4. Interpretación visual:

- Primer método: Se agregan las dos primeras columnas a la derecha
- Segundo método: Se agregan las dos primeras filas abajo
- Las flechas azules representan productos que se suman
- Las flechas rojas representan productos que se restan

**Ejemplo 4.73** (Cálculo usando la Regla de Sarrus). Calcular el determinante de la matriz  $A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$  usando la Regla de Sarrus extendiendo las primeras dos columnas.

**Solución:** Aplicamos el método gráfico extendiendo las dos primeras columnas:

Términos positivos (suma)

Términos negativos (resta)

Calculamos los productos:

Términos positivos (azules):

Diagonal 1:  $3 \times 1 \times 5 = 15$

Diagonal 2:  $(-1) \times 3 \times 1 = -3$

Diagonal 3:  $1 \times (-2) \times 4 = -8$

Suma positiva:  $15 + (-3) + (-8) = 4$

**Términos negativos (rojos):**

Diagonal 4:  $1 \times 1 \times 1 = 1$

Diagonal 5:  $3 \times 3 \times 4 = 36$

Diagonal 6:  $(-1) \times (-2) \times 5 = 10$

Suma negativa:  $1 + 36 + 10 = 47$

**Resultado final:**

$\det(A) = 4 - 47 = -43$

**Conclusión:**  $\det(A) = -43$ . Como ejercicio resuelva extendiendo las filas.

**Ejemplo 4.74** (Cálculo para matriz  $4 \times 4$ ). Calcular  $\det(A)$  con  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

**Solución:** Expandimos por la columna 2 (contiene dos ceros):

$$\det(A) = \sum_{i=1}^4 a_{i2}C_{i2} = 0 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{22} + (-1) \cdot C_{32} + 0 \cdot C_{42} = C_{22} - C_{32}$$

■ **Cofactor  $C_{22}$ :**  $M_{22} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $C_{22} = (-1)^{2+2} \det(M_{22}) = \det(M_{22})$

Expandimos  $M_{22}$  por la fila 2:

$$\begin{aligned} \det(M_{22}) &= 3(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 5(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(-1)[(-1)(4) - (3)(1)] + 5(-1)[(2)(1) - (-1)(-2)] \\ &= -3[-4 - 3] - 5[2 - 2] = -3(-7) - 5(0) = 21 \end{aligned}$$

■ **Cofactor  $C_{32}$ :**  $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $C_{32} = (-1)^{3+2} \det(M_{32}) = -\det(M_{32})$

Expandimos  $M_{32}$  por la columna 1:

$$\begin{aligned} \det(M_{32}) &= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 + (-2)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2(1)[(4)(4) - (-2)(1)] + (-2)(1)[(-1)(-2) - (3)(4)] \\ &= 2[16 + 2] - 2[2 - 12] = 2(18) - 2(-10) = 36 + 20 = 56 \end{aligned}$$

$\therefore C_{32} = -56$

Resultado final:

$\det(A) = C_{22} - C_{32} = 21 - (-56) = \boxed{77}$

**Teorema 4.75** (Propiedades del determinante). Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ . Entonces:

1. **Matriz identidad:**  $\det(I_n) = 1$ .
2. **Matrices triangulares:** Si  $A$  es triangular superior, triangular inferior o diagonal, entonces el determinante se calcula multiplicando los elementos de la diagonal, es decir

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

3. **Intercambio de filas:** Si  $B$  se obtiene de  $A$  intercambiando dos filas distintas, entonces  $\det(B) = -\det(A)$ .
4. **Escalamiento de fila:** Si  $B$  se obtiene de  $A$  multiplicando una fila por el escalar  $k \neq 0$ , entonces  $\det(B) = k \cdot \det(A)$ .
5. **Operaciones elementales de fila:** Si  $B$  se obtiene de  $A$  sumando a una fila un múltiplo escalar de otra fila distinta, entonces  $\det(B) = \det(A)$ .
6. **Filas linealmente dependientes:** Si  $A$  tiene dos filas idénticas, o una fila es múltiplo escalar de otra, o contiene una fila nula, entonces  $\det(A) = 0$ .
7. **Producto de matrices:** Si  $B$  es una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ , entonces  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
8. **Transpuesta:**  $\det(A^T) = \det(A)$ .
9. **Matriz nula:**  $\det(\mathbf{0}_n) = 0$ .

**Problema 4.76.** Calcule  $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  mediante reducción a forma diagonal con operaciones elementales de fila.

**Solución:** **Paso 1:** Con el pivote  $a_{11} = 2$  se efectúan las operaciones  $f_3 - \frac{1}{2}f_1 \rightarrow f_3$  y  $f_5 - \frac{3}{2}f_1 \rightarrow f_5$ , y no cambian el determinante  $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{9}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

**Paso 2:** Con el pivote  $a_{22} = 1$  se efectúan las operaciones  $f_3 + \frac{3}{2}f_2 \rightarrow f_3$ ,  $f_4 - 2f_2 \rightarrow f_4$  y  $f_5 + \frac{9}{2}f_2 \rightarrow f_5$ , el determinante no cambia  $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & \frac{1}{2} & 9 \end{pmatrix}$ .

**Paso 3:** Con el pivote  $a_{33} = 9$  se efectúan las operaciones  $f_4 + \frac{8}{9}f_3 \rightarrow f_4$  y  $f_5 - 2f_3 \rightarrow f_5$ . El determinante no cambia  $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$ .

**Paso 4:** Con el pivote  $a_{44} = \frac{5}{9}$  se efectúa la operación  $f_5 - \frac{27}{10}f_4 \rightarrow f_5$ . El determinante no cambia

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{39}{10} \end{pmatrix}$$

**Paso 5:** El determinante de esta última matriz será la multiplicación de la diagonal  $\det(A_4) = 2 \times 1 \times 9 \times \frac{5}{9} \times \frac{39}{10} = 39$ , el cual es equivalente al determinante de  $A$ .

**Observación 4.77.** El propósito principal de estudiar los determinantes es tener una herramienta práctica para determinar si una matriz es invertible. El teorema 4.79 nos confirma que calcular  $\det(A)$  y verificar si es diferente de cero es equivalente a todas las demás caracterizaciones de invertibilidad que hemos visto. Esto convierte al determinante en un criterio computacional eficiente: en lugar de reducir la matriz a su forma escalonada o intentar expresarla como producto de matrices elementales, simplemente calculamos un número y verificamos si es cero o no.

**Teorema 4.78** (Propiedad fundamental de la matriz adjunta). Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ . Definimos:

1. **Matriz de cofactores**  $C = (c_{ij})$  donde:
- $$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

siendo  $M_{ij}$  la submatriz de  $(n - 1) \times (n - 1)$  obtenida al eliminar la fila  $i$  y columna  $j$  de  $A$ .
2. **Matriz adjunta**  $\operatorname{adj}(A)$ : la transpuesta de la matriz de cofactores:
- $$\operatorname{adj}(A) = C^T = (c_{ji})$$

Entonces se cumple la propiedad fundamental:

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$

*Demostración.* Demostraremos que  $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$ . La demostración para  $\operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$  es análoga.

La entrada  $(i, j)$  del producto  $A \cdot \operatorname{adj}(A)$  es:

$$[A \cdot \operatorname{adj}(A)]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot [\operatorname{adj}(A)]_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot c_{jk}$$

Consideramos dos casos:

**Caso 1:**  $i = j$  (elementos diagonales)

La suma  $\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot c_{ik}$  es precisamente la expansión por cofactores del determinante de  $A$  a lo largo de la fila  $i$ :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot c_{ik} = \det(A)$$

**Caso 2:**  $i \neq j$  (elementos fuera de la diagonal)

La suma  $\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot c_{jk}$  puede interpretarse como el determinante de una matriz  $B$  que se obtiene de  $A$  reemplazando la fila  $j$  con la fila  $i$ . Esta matriz  $B$  tiene dos filas idénticas (las filas  $i$  y  $j$ ), por lo que:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot c_{jk} = \det(B) = 0$$

Por tanto:

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_n$$

□

**Teorema 4.79** (Caracterización de matrices invertibles - Versión 2). *Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $A$  es invertible.
2. La forma escalonada reducida de  $A$  es la matriz identidad  $I_n$ .
3.  $A$  se puede escribir como producto de matrices elementales.
4.  $A$  tiene rango máximo ( $\text{rango}(A) = n$ ).
5.  $\det(A) \neq 0$ .

*Demostración.* Demostraremos únicamente la equivalencia (5)  $\Leftrightarrow$  (1) que conecta el determinante con la invertibilidad. Las demás equivalencias se demostraron en el Teorema 4.59.

(5)  $\Rightarrow$  (1): Supongamos que  $\det(A) \neq 0$ .

Construiremos explícitamente la matriz inversa de  $A$  usando la matriz adjunta descrita en el teorema 4.78. Sea  $\text{adj}(A)$  la matriz adjunta de  $A$ , donde cada entrada  $(i, j)$  está dada por:

$$[\text{adj}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$$

siendo  $M_{ji}$  el menor  $(j, i)$  de  $A$  (determinante de la submatriz que se obtiene eliminando la fila  $j$  y columna  $i$ ).

Definimos la matriz candidata a inversa como:

$$B = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Esta definición tiene sentido porque  $\det(A) \neq 0$  por hipótesis.

Ahora verificamos que  $B$  es efectivamente la inversa de  $A$ . Por la propiedad fundamental de la matriz adjunta:

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$$

Por tanto:

$$AB = A \cdot \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \cdot A \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A) \cdot I_n = I_n$$

Similarmente:

$$BA = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \cdot A = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) \cdot A = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A) \cdot I_n = I_n$$

Como  $AB = BA = I_n$ , concluimos que  $A$  es invertible con  $A^{-1} = B$ .

(1)  $\Rightarrow$  (5): Supongamos que  $A$  es invertible.

Si  $A$  es invertible, entonces existe  $A^{-1}$  tal que  $AA^{-1} = I_n$ . Aplicando determinante a ambos lados:

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n)$$

Por la propiedad multiplicativa del determinante (Teorema 4.75):

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

Como este producto es igual a 1, necesariamente  $\det(A) \neq 0$ . En efecto, si fuera  $\det(A) = 0$ , entonces el lado izquierdo sería cero, lo cual es imposible. □

**Ejemplo 4.80.** Calcule la inversa para  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  usando la matriz adjunta.

**Solución:** Paso 1: Matriz de cofactores

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-1)^{1+1} \det(|4|) = 4 \\ c_{12} &= (-1)^{1+2} \det(|3|) = -3 \\ c_{21} &= (-1)^{2+1} \det(|1|) = -1 \\ c_{22} &= (-1)^{2+2} \det(|2|) = 2 \\ C &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Paso 2: Matriz adjunta

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Determinante e inversa

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5, \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

**Verificación:**  $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Observación 4.81.** Este método es eficiente para matrices  $2 \times 2$  y  $3 \times 3$ . Para órdenes mayores, dada la complejidad del método  $O(n!)$  versus la complejidad  $O(n^3)$  de Gauss-Jordan se recomienda este último.

**Problema 4.82.** Calcule de inversa de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$  usando la matriz adjunta. Verifique su resultado con el del problema 4.62.

**Solución:** Recuerde que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Paso 1: Cálculo del determinante

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1)(1)(40) + (2)(-1)(13) + (3)(1)(-5) = 40 - 26 - 15 = \boxed{-1} \end{aligned}$$

Paso 2: Matriz de cofactores  $C = (c_{ij})$

Cofactor	Signo	Menor	Valor
$c_{11}$	$(+1)$	$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$	40
$c_{12}$	$(-1)$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$	-13
$c_{13}$	$(+1)$	$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	-5
$c_{21}$	$(-1)$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$	-16
$c_{22}$	$(+1)$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$	5
$c_{23}$	$(-1)$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	2
$c_{31}$	$(+1)$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$	-9
$c_{32}$	$(-1)$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$	3
$c_{33}$	$(+1)$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$	1

Cuadro 4.4: Cálculo de cofactores

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Paso 3: Matriz adjunta (transpuesta de cofactores)

$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Paso 4: Inversa (adjunta dividida por determinante)

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$

Verificación:  $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Problema 4.83.** Determine si las siguientes matrices son invertibles, si lo son calcule su inversa

a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

**Solución:** Como  $\det(A) = -2 \neq 0$ , la matriz es invertible.

Paso	Matriz	Paso	Matriz
Inicial	$\left(\begin{array}{cccc cccc}0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\2 & 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$	$f_2 \leftrightarrow f_1$	$\left(\begin{array}{cccc cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\2 & 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$
$f_4 - 2f_1 \rightarrow f_4$	$\left(\begin{array}{cccc cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\0 & 5 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$	$f_3 \leftrightarrow f_2$	$\left(\begin{array}{cccc cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\0 & 5 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$
$-f_2 \rightarrow f_2$	$\left(\begin{array}{cccc cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\0 & 5 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$	$f_4 - 5f_2 \rightarrow f_4$	$\left(\begin{array}{cccc cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\0 & 0 & 16 & 1 & 0 & -2 & 5 & 1\end{array}\right)$
$\frac{1}{2}f_3 \rightarrow f_3$	$\left(\begin{array}{cccc cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\0 & 0 & 16 & 1 & 0 & -2 & 5 & 1\end{array}\right)$	$f_4 - 16f_3 \rightarrow f_4$	$\left(\begin{array}{cccc cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -2 & 5 & 1\end{array}\right)$
$f_2 + 3f_3 \rightarrow f_2$	$\left(\begin{array}{cccc cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -1 & 0 \\0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -2 & 5 & 1\end{array}\right)$	$f_1 - f_4 \rightarrow f_1$	$\left(\begin{array}{cccc cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 3 & -5 & -1 \\0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -1 & 0 \\0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -2 & 5 & 1\end{array}\right)$

Cuadro 4.5: Proceso de eliminación de Gauss-Jordan con intercambios de filas

Por lo tanto:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -5 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

**Solución:**  $\det(A) = 2 \cdot 8 - (-4) \cdot (-4) = 16 - 16 = 0$ . Como  $\det(A) = 0$ , la matriz no es invertible.

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{pmatrix}$

**Solución:**  
 $\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ k & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix} = 1(2 - 18) - 2(6 - 6k) + 4(9 - k) = -16 - 12 + 12k + 36 - 4k = 8 + 8k = 8(1 + k)$ . La matriz es invertible si y solo si  $k \neq -1$ .  
Para  $k \neq -1$ , calculando la inversa usando matriz adjunta:



Cofactor	Signo	Menor	Valor
$C_{11}$	+	$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$	$-16$
$C_{12}$	-	$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ k & 2 \end{vmatrix}$	$6k - 6$
$C_{13}$	+	$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix}$	$9 - k$

Cuadro 4.6: Cofactores de la primera fila

Cofactor	Signo	Menor	Valor
$C_{31}$	+	$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$	$8$
$C_{32}$	-	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$	$6$
$C_{33}$	+	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$	$-5$

Cuadro 4.8: Cofactores de la tercera fila

Cofactor	Signo	Menor	Valor
$C_{21}$	-	$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$	$8$
$C_{22}$	+	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ k & 2 \end{vmatrix}$	$2 - 4k$
$C_{23}$	-	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 3 \end{vmatrix}$	$2k - 3$

Cuadro 4.7: Cofactores de la segunda fila

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) &= \begin{pmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 6k - 6 & 2 - 4k & 6 \\ 9 - k & 2k - 3 & -5 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{1}{8(1 + k)} \begin{pmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 6k - 6 & 2 - 4k & 6 \\ 9 - k & 2k - 3 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Problema 4.84.** Una matriz cuadrada  $A$  es llamada idempotente si  $A = A^2$ .

- (a) Demuestre que si  $A$  es idempotente entonces  $I_n - A$  es idempotente.
- (b) Demuestre que si  $A$  es idempotente entonces  $2A - I_n$  es invertible y es su propia inversa.
- (c) Si  $A$  es idempotente, ¿cuáles son los posibles valores para  $\det A$ ?

**Solución:**

(a) Calculamos  $(I_n - A)^2$ :

$$\begin{aligned} (I_n - A)^2 &= (I_n - A)(I_n - A) \\ &= I_n^2 - I_n A - A I_n + A^2 \\ &= I_n - A - A + A^2 \\ &= I_n - 2A + A^2 \end{aligned}$$

Como  $A$  es idempotente,  $A^2 = A$ , por lo tanto:

$$(I_n - A)^2 = I_n - 2A + A = I_n - A$$

Esto demuestra que  $I_n - A$  es idempotente.

(b) Para demostrar que  $2A - I_n$  es su propia inversa, calculamos  $(2A - I_n)^2$ :

$$\begin{aligned} (2A - I_n)^2 &= (2A - I_n)(2A - I_n) \\ &= 4A^2 - 2A I_n - 2I_n A + I_n^2 \\ &= 4A^2 - 4A + I_n \end{aligned}$$

Como  $A$  es idempotente,  $A^2 = A$ , entonces:

$$(2A - I_n)^2 = 4A - 4A + I_n = I_n$$

Por lo tanto,  $2A - I_n$  es invertible y  $(2A - I_n)^{-1} = 2A - I_n$ .

(c) Si  $A$  es idempotente, entonces  $A^2 = A$ . Aplicando el determinante a ambos lados:

$$\det(A^2) = \det(A)$$

Por la propiedad multiplicativa del determinante:

$$\det(A) \cdot \det(A) = \det(A)$$

$$(\det A)^2 = \det A$$

$$(\det A)^2 - \det A = 0$$

$$\det A(\det A - 1) = 0$$

Por lo tanto,  $\det A = 0$  o  $\det A = 1$ .

**Problema 4.85.** En cada ítem encuentre la matriz  $X$  para que se cumpla la igualdad

a)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

b)  $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$

**Solución:** Despejando la matriz  $X$  de la ecuación  $AX = B$ , se tiene que  $X = A^{-1}B$ . Así, para cada ecuación:

(a) Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ , entonces  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ . Por lo cual,

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{pmatrix}.$$

(b) Si  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ , entonces  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{9}{1} & \frac{-7}{9} & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{-1} & \frac{9}{-2} & \frac{9}{-2} \end{pmatrix}$ . Por lo cual,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-5}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{9}{1} & \frac{-7}{9} & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{-1} & \frac{9}{-2} & \frac{9}{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{-25}{9} & \frac{-25}{9} & \frac{-23}{9} \\ -4 & \frac{-40}{9} & \frac{-40}{9} & \frac{-44}{9} \\ -2 & \frac{-23}{9} & \frac{-32}{9} & \frac{-37}{9} \end{pmatrix}.$$

**Problema 4.86.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 2 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$

(a) Construya la matriz  $\lambda I_3 - A$ , donde  $I_3$  es la matriz identidad de orden  $3 \times 3$ .

(b) Calcule  $\det(\lambda I_3 - A)$ .

(c) Halle los valores propios de  $A$ , es decir, los valores de  $\lambda$  tales que  $\det(\lambda I_3 - A) = 0$ .

**Solución:** Note que la matriz  $\lambda I_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , por lo cual,

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda - 7 & 0 \\ -2 & 7 & \lambda - 5 \end{pmatrix}.$$

Calculando el determinante se tiene que

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda - 7 & 0 \\ -2 & 7 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 71\lambda - 105.$$

Factorizando,  $\lambda^3 - 15\lambda^2 + 71\lambda - 105 = (\lambda - 3)(\lambda - 7)(\lambda - 5)$ , por lo que los valores tales que  $\det(\lambda I_3 - A) = 0$  son  $\lambda = 5$ ,  $\lambda = 7$ , y  $\lambda = 3$ .

**Problema 4.87.** Demuestre que si  $A$  es una matriz antisimétrica de tamaño  $3 \times 3$  se tiene que  $\det A = 0$ . ¿Se puede generalizar este hecho para toda matriz  $n \times n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ?

**Solución:** Sea  $A$  una matriz antisimétrica de tamaño  $n \times n$ . Por definición,  $A^T = -A$ . Por propiedades del determinante, sabemos que  $\det A = \det A^T$ . Como  $A$  es antisimétrica, entonces  $A^T = -A$ , lo cual nos permite plantear la siguiente ecuación

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

De la ecuación anterior obtenemos:

$$\det A = (-1)^n \det A$$

Esto nos lleva a:

$$\begin{aligned} \det A - (-1)^n \det A &= 0 \\ \det A(1 - (-1)^n) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora analizamos dos casos:

**Caso 1:** Si  $n$  es par, entonces  $(-1)^n = 1$ , por lo que  $1 - (-1)^n = 1 - 1 = 0$ . En este caso, la ecuación  $\det A \cdot 0 = 0$  se satisface para cualquier valor de  $\det A$ , por lo que el determinante puede ser no nulo.

**Caso 2:** Si  $n$  es impar, entonces  $(-1)^n = -1$ , por lo que  $1 - (-1)^n = 1 - (-1) = 2 \neq 0$ . En este caso, para que se cumpla  $\det A \cdot 2 = 0$ , necesariamente debe ser  $\det A = 0$ .

**Conclusión:** Para el caso particular  $n = 3$  (que es impar), se tiene que  $\det A = 0$ . En general, toda matriz antisimétrica de orden impar tiene determinante nulo, mientras que las matrices antisimétricas de orden par pueden tener determinante no nulo.

**Problema 4.88** ([Andreescu, 2014], Problema 12, p.44). Sea  $A$  una matriz cuadrada tal que  $A^2 = \mu A$ , donde  $\mu$  es un número real con  $\mu \neq -1$ . Demuestre que

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{\mu + 1}A.$$

**Solución:** Para demostrar que  $(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{\mu + 1}A$ , debemos verificar que estas matrices son inversas una de la otra. Por definición, esto significa que su producto debe ser la matriz identidad  $I_n$ .

Calculemos el producto  $(I_n + A) \left( I_n - \frac{1}{\mu + 1}A \right)$ :

$$\begin{aligned} (I_n + A) \left( I_n - \frac{1}{\mu + 1}A \right) &= I_n^2 - \frac{1}{\mu + 1}I_nA + AI_n - \frac{1}{\mu + 1}A^2 \\ &= I_n - \frac{A}{\mu + 1} + A - \frac{A^2}{\mu + 1} \end{aligned}$$

Ahora utilizamos la condición dada  $A^2 = \mu A$  para sustituir  $A^2$ :

$$\begin{aligned} &= I_n - \frac{A}{\mu + 1} + A - \frac{\mu A}{\mu + 1} \\ &= I_n + A - \frac{A}{\mu + 1} - \frac{\mu A}{\mu + 1} \\ &= I_n + A - \frac{A + \mu A}{\mu + 1} \\ &= I_n + A - \frac{A(1 + \mu)}{\mu + 1} \\ &= I_n + A - \frac{A(\mu + 1)}{\mu + 1} \\ &= I_n + A - A \\ &= I_n \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(I_n + A) \left( I_n - \frac{1}{\mu + 1} A \right) = I_n$ .

De manera similar, se puede verificar que  $\left( I_n - \frac{1}{\mu + 1} A \right) (I_n + A) = I_n$ .

Esto demuestra que  $I_n - \frac{1}{\mu + 1} A$  es efectivamente la matriz inversa de  $I_n + A$ .

**Nota:** La condición  $\mu \neq -1$  es esencial para que la expresión  $\frac{1}{\mu + 1}$  esté bien definida.

**Problema 4.89.** Rellene los valores  $\times$  para que la matriz  $A$  sea simétrica

a)  $\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times \\ 3 & 1 & \times & \times \\ 7 & -8 & 0 & \times \\ 2 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ .

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 2 \\ \times & 4 & 6 & 5 \\ \times & \times & 2 & 1 \\ \times & \times & \times & -5 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Una matriz  $A$  es simétrica si y solo si  $A = A^T$ , es decir, si  $a_{ij} = a_{ji}$  para todos los índices  $i, j$ .

a) Para la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times \\ 3 & 1 & \times & \times \\ 7 & -8 & 0 & \times \\ 2 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ :

Aplicando la condición de simetría  $a_{ij} = a_{ji}$ :

- $a_{12} = a_{21} \Rightarrow \times = 3$
- $a_{13} = a_{31} \Rightarrow \times = 7$
- $a_{14} = a_{41} \Rightarrow \times = 2$
- $a_{23} = a_{32} \Rightarrow \times = -8$
- $a_{24} = a_{42} \Rightarrow \times = 3$
- $a_{34} = a_{43} \Rightarrow \times = 9$

Por lo tanto, la matriz simétrica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & -8 & 3 \\ 7 & -8 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Para la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 2 \\ \times & 4 & 6 & 5 \\ \times & \times & 2 & 1 \\ \times & \times & \times & -5 \end{pmatrix}$ :

Aplicando la condición de simetría  $a_{ij} = a_{ji}$ :

- $a_{21} = a_{12} \Rightarrow \times = 7$

- $a_{31} = a_{13} \Rightarrow x = -3$
- $a_{32} = a_{23} \Rightarrow x = 6$
- $a_{41} = a_{14} \Rightarrow x = 2$
- $a_{42} = a_{24} \Rightarrow x = 5$
- $a_{43} = a_{34} \Rightarrow x = 1$

Por lo tanto, la matriz simétrica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & 5 \\ -3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

**Problema 4.90.** Encuentre los valores de  $a, b, c, d$  tales que

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ -1 & a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & d - 2c \\ d + 2c & -2 \end{pmatrix}$$

**Solución:** Para que dos matrices sean iguales, sus elementos correspondientes deben ser iguales. Comparando posición por posición:

**Elemento (1,1):**  $a = 4$

**Elemento (1,2):**  $3 = d - 2c$ .

**Elemento (2,1):**  $-1 = d + 2c$ .

**Elemento (2,2):**  $a + b = -2$ .

Resolviendo las ecuaciones, de la primera comparación:  $a = 4$ , sustituyendo en la ecuación  $a + b = -2$ , se cumple que:

$$4 + b = -2$$

$$b = -2 - 4 = -6.$$

Para encontrar  $c$  y  $d$ , se resuelve el sistema formado por las ecuaciones  $3 = d - 2c$  y  $-1 = d + 2c$ . Sumando las dos ecuaciones

$$3 + (-1) = (d - 2c) + (d + 2c)$$

$$2 = 2d$$

$$d = 1$$

Sustituyendo  $d = 1$  en la primera ecuación

$$3 = 1 - 2c$$

$$2 = -2c$$

$$c = -1$$

Por lo cual los valores son  $a = 4, b = -6, c = -1$  y  $d = 1$ .

**Problema 4.91.** Si  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -8$ , ¿cuál será el valor de los siguientes determinantes?

(a)  $\begin{vmatrix} -5a & -5b & -5c \\ d & e & f \\ g - 7d & h - 7e & i - 7f \end{vmatrix}$       (b)  $\begin{vmatrix} a + 2d & b + 2e & c + 2f \\ d + 3g & e + 3h & f + 3i \\ g + 4a & h + 4b & i + 4c \end{vmatrix}$       (c)  $\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ -4g & -4h & -4i \\ -3d & -3e & -3f \end{vmatrix}$

**Solución:** (a) Primero, factorizamos  $-5$  de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} -5a & -5b & -5c \\ d & e & f \\ g - 7d & h - 7e & i - 7f \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g - 7d & h - 7e & i - 7f \end{vmatrix}$$

Ahora, la tercera fila se puede escribir como  $(g - 7d, h - 7e, i - 7f) = (g, h, i) - 7(d, e, f)$ . Usando la propiedad de que sumar un múltiplo de una fila a otra no cambia el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g - 7d & h - 7e & i - 7f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -8$$

Por lo tanto:  $\begin{vmatrix} -5a & -5b & -5c \\ d & e & f \\ g - 7d & h - 7e & i - 7f \end{vmatrix} = -5 \cdot (-8) = 40$

(b) Consideremos la matriz original con filas:  $f_1 = (a, b, c)$ ,  $f_2 = (d, e, f)$ ,  $f_3 = (g, h, i)$ . Así, la nueva matriz tiene las filas:

Fila 1:  $(a + 2d, b + 2e, c + 2f) = f_1 + 2f_2$

Fila 2:  $(d + 3g, e + 3h, f + 3i) = f_2 + 3f_3$

Fila 3:  $(g + 4a, h + 4b, i + 4c) = f_3 + 4f_1$

Esta transformación corresponde a la matriz de coeficientes  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  donde la nueva matriz es  $C \cdot M$  y su determinante es  $\det(C) \cdot \det(M)$ . Calculamos  $\det(C) = 25$  por lo que  $\det(C) \cdot \det(M) = 25 \cdot (-8) = -200$ .

(c) Factorizando los escalares de cada fila:

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ -4g & -4h & -4i \\ -3d & -3e & -3f \end{vmatrix} = (-2)(-4)(-3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = -24 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Comparando con el determinante original, vemos que las filas 2 y 3 están intercambiadas, por lo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -(-8) = 8$$

Por lo tanto:  $\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ -4g & -4h & -4i \\ -3d & -3e & -3f \end{vmatrix} = -24 \cdot 8 = -192$

**Problema 4.92.** Con el fin de calcular el determinante de una matriz  $A$ , se aplicaron las siguientes operaciones elementales de fila:

- multiplicar la fila 1 por  $-4$ .
- restar dos veces la fila 3 a la fila 2.
- intercambiar la fila 2 y la fila 3.
- multiplicar la fila 3 por  $\frac{-1}{4}$ .

hasta obtener la matriz  $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ . ¿Cuál es el determinante de la matriz  $A$ ?

**Solución:** Como la matriz resultante después de las operaciones  $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$  es triangular superior, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, así  $\det(B) = (-1) \times (-8) \times (-8) = -64$ .

Las operaciones elementales afectan el determinante de la siguiente manera:

- Multiplicar la fila 1 por  $-4$ : multiplica el determinante por  $-4$ .
- Restar dos veces la fila 3 a la fila 2 (sumar  $-2$  veces la fila 3 a la fila 2): no cambia el determinante (factor 1).
- Intercambiar la fila 2 y la fila 3: multiplica el determinante por  $-1$ .
- Multiplicar la fila 3 por  $-\frac{1}{4}$ : multiplica el determinante por  $-\frac{1}{4}$ .

El factor total por el que se multiplica el determinante es:  $(-4) \times 1 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$ . Por lo tanto, la relación entre  $\det(A)$  y  $\det(B)$  es:  $\det(B) = -1 \times \det(A)$ . Así  $\det(A) = 64$ .

**Problema 4.93.** Determine los valores de  $x$  tales que  $\det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** El determinante de la matriz  $2 \times 2$  es  $\det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{pmatrix} = x(1-x) - (-1)(3) = x - x^2 + 3 = -x^2 + x + 3$ , mientras que el determinante de la matriz  $3 \times 3$  es  $x^2 - 2x$ . Igualando los determinantes  $-x^2 + x + 3 = x^2 - 2x$  y reorganizando  $2x^2 - 3x - 3 = 0$ . Usando fórmula cuadrática:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-3)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Por lo tanto, los valores son  $x = \frac{3 + \sqrt{33}}{4}$  y  $x = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}$ .

**Problema 4.94** ([Andreescu, 2014], Problema 4, p.56). Sea  $A$  una matriz cuadrada, se define la traza de  $A$  como la suma de los elementos de la diagonal principal de  $A$ , y se denota por  $\text{tr}(A)$  (recuerde 4.41). Demuestre que si  $A$  es una matriz cuadrada  $2 \times 2$ , entonces

$$\det(A) = \frac{(\text{tr}(A))^2 - \text{tr}(A^2)}{2}.$$

**Solución:** Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  una matriz  $2 \times 2$  arbitraria. Note que la traza de  $A$ ,  $\text{tr}(A) = a + d$ . y el determinante de  $A$  es  $\det(A) = ad - bc$ . Calculando  $A^2$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

y la traza de  $A^2$  es  $\text{tr}(A^2) = (a^2 + bc) + (bc + d^2) = a^2 + 2bc + d^2$ . Evaluando la expresión del lado derecho de la igualdad:

$$[\text{tr}(A)]^2 = (a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2,$$

$$[\text{tr}(A)]^2 - \text{tr}(A^2) = (a^2 + 2ad + d^2) - (a^2 + 2bc + d^2) = 2ad - 2bc.$$

Dividiendo por 2  $\frac{2ad - 2bc}{2} = ad - bc$ . Como  $\det(A) = ad - bc$ , hemos demostrado que:

$$\det(A) = \frac{[\text{tr}(A)]^2 - \text{tr}(A^2)}{2}.$$

**Problema 4.95.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Demuestre que  $A^2 = 3I_4 + 2A$ . Úselo para calcular  $A^{-1}$ .

**Solución:** Se demostrará inicialmente que  $A^2 = 3I_4 + 2A$ .

Calculando  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

De la misma manera  $3I_4 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  y se

verifica que  $A^2 = 3I_4 + 2A$ .

Ahora, reorganizando la ecuación  $A^2 = 3I_4 + 2A$ , se cumple que

$$A^2 - 2A = 3I_4$$

$$A(A - 2I_4) = 3I_4$$

$$A \cdot \left(\frac{1}{3}(A - 2I_4)\right) = I_4$$

Por lo tanto  $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I_4)$ .

Calculamos  $A - 2I_4$ :

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:  $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

**Problema 4.96.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ \frac{1}{a} & x & x^2 \end{pmatrix}$  y suponga que  $a, b, c$  son constantes con  $a \neq 0$ . Encuentre los valores de  $x$  para los cuales  $A$  es invertible.

**Solución:** Para que  $A$  sea invertible, su determinante debe ser distinto de cero. Calculamos  $\det(A)$  expandiendo por la primera fila:

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} a & -b \\ x & x^2 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -b \\ \frac{1}{a} & x^2 \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & a \\ \frac{1}{a} & x \end{pmatrix}$$

Calculamos cada determinante:

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ x & x^2 \end{pmatrix} = a \cdot x^2 - (-b) \cdot x = ax^2 + bx$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a \\ \frac{1}{a} & x \end{pmatrix} = 0 \cdot x - a \cdot \frac{1}{a} = -1$$

Sustituyendo (notando que el segundo término es cero):

$$\det(A) = 1 \cdot (ax^2 + bx) + c \cdot (-1) = ax^2 + bx - c$$

La matriz  $A$  es invertible si y solo si  $\det(A) \neq 0$ , es decir:

$$ax^2 + bx - c \neq 0$$



Por lo tanto,  $A$  es invertible para todos los valores de  $x$  que no sean raíces de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx - c = 0$ . Las raíces de esta ecuación son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

pero la condición fundamental es simplemente que el polinomio cuadrático no se anule.

$ax^2 + bx - c \neq 0$

**Problema 4.97.** Una matriz cuadrada es llamada **ortogonal** si su transpuesta es igual a su inversa, es decir,  $A^{-1} = A^T$  o de manera equivalente  $AA^T = I_n$ . De acuerdo a esta información resuelva los siguientes ítem:

- (a) Verifique que la matriz  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  es ortogonal.
- (b) Demuestre que  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  es una matriz ortogonal. Calcule  $A^{-1}$ .
- (c) Demuestre que la matriz  $A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  es ortogonal. Calcule  $A^{-1}$ .
- (d) Sea  $\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{pmatrix}$ . ¿Qué condiciones deben cumplir  $a$  y  $b$  para que la matriz sea ortogonal?
- (e) Demuestre que si  $A$  es una matriz ortogonal, entonces  $\det A = 1$  o  $\det A = -1$ .

**Solución:** (a) Para verificar que  $A$  es ortogonal, debemos comprobar que  $AA^T = I_2$ . Calculando  $A^T$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos  $AA^T$ :

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Por lo tanto,  $A$  es ortogonal.

(b) Calculamos  $A^T$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Calculamos  $AA^T$ :

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $A$  es ortogonal y  $A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . (c) Calculamos  $A^T$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos  $AA^T$ :

$$AA^T = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el elemento (1, 1):  $\cos^2 x + \sin^2 x + 0 = 1$

Para el elemento (1, 2):  $-\cos x \sin x + \sin x \cos x + 0 = 0$

Para el elemento (1, 3):  $0 + 0 + 0 = 0$

Para el elemento (2, 1):  $-\sin x \cos x + \cos x \sin x + 0 = 0$

Para el elemento (2, 2):  $\sin^2 x + \cos^2 x + 0 = 1$

Para el elemento (2, 3):  $0 + 0 + 0 = 0$

Para el elemento (3, 1):  $0 + 0 + 0 = 0$

Para el elemento (3, 2):  $0 + 0 + 0 = 0$

Para el elemento (3, 3):  $0 + 0 + 1 = 1$

Por lo tanto,  $AA^T = I_3$ , así que  $A$  es ortogonal y  $A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(d) Para que  $B$  sea ortogonal, debe cumplirse  $BB^T = I_2$ .

Calculamos  $B^T$ :

$$B^T = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ b-a & b+a \end{pmatrix}$$

Calculamos  $BB^T$ :

$$BB^T = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ b-a & b+a \end{pmatrix}$$

Para el elemento (1, 1):  $(a+b)^2 + (b-a)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + b^2 - 2ab + a^2 = 2a^2 + 2b^2$

Para el elemento (1, 2):  $(a+b)(a-b) + (b-a)(b+a) = a^2 - b^2 - (a^2 - b^2) = 0$

Para el elemento (2, 1):  $(a-b)(a+b) + (b+a)(b-a) = a^2 - b^2 - (a^2 - b^2) = 0$

Para el elemento (2, 2):  $(a-b)^2 + (b+a)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 + 2ab + a^2 = 2a^2 + 2b^2$

Para que  $BB^T = I_2$ , necesitamos:

$$2a^2 + 2b^2 = 1$$

Por lo tanto, la condición es:  $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ .

(e) Sea  $A$  una matriz ortogonal, entonces  $AA^T = I_n$ . Aplicando el determinante a ambos lados  $\det(AA^T) = \det(I_n)$ . Usando la propiedad  $\det(XY) = \det(X)\det(Y)$  y  $\det(A^T) = \det(A)$ :

$$\det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) = (\det A)^2 = 1$$

Por lo tanto,  $\det A = \pm 1$ .

# Capítulo

## 5

# Sistemas de ecuaciones lineales

En el capítulo anterior se estudiaron las matrices como arreglos ordenados de números y múltiples operaciones respecto a ellas junto a múltiples aplicaciones. En este capítulo se estudiarán los **sistemas de ecuaciones lineales**, una parte fundamental del álgebra lineal y de su fundamento básico: los espacios vectoriales.

En el capítulo 3 se estudiaron los vectores como unidades con magnitud, dirección y sentido que son usados en múltiples ramas de la ciencia como física e ingenierías. Allí también se les dio sentido como vectores en coordenadas (Definición 3.2), por lo que podríamos pensar en vectores como una matriz fila

$\mathbf{u} = (4, 2, 3)$  o como una matriz columna  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Piense ahora en el siguiente problema: dada una matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$  de tamaño  $m \times n$ ,

si la multiplicamos por un vector  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ , obtenemos el vector

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Este vector  $A\mathbf{x}$  será un vector que llamaremos combinación lineal de las columnas de  $A$ , cuyos coeficientes son las coordenadas de  $\mathbf{x}$ . Aunque en la Definición 6.22 se explicará este concepto de manera general, aquí podremos decir que para  $\mathbb{R}^n$ :

**Definición 5.1** (Combinación lineal de vectores en  $\mathbb{R}^n$ ). Una **combinación lineal** de los vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  de  $\mathbb{R}^n$  es un vector de la forma  $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_k\mathbf{v}_k$ , donde  $m_1, m_2, \dots, m_k$  son escalares.

**Ejemplo 5.2.**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 10 + 15 \\ 0 + 5 + 9 \\ 4 + 25 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 14 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Por otro lado, observe que si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son incógnitas, la ecuación  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$  es una ecuación lineal, pues las incógnitas tienen grado 1. Esto nos lleva a definir un sistema de ecuaciones lineales:

**Definición 5.3** (Sistema de ecuaciones lineales). Un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas es un arreglo expresado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{cases}$$

que puede ser representado en forma matricial por  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  siendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

respectivamente, la matriz de coeficientes, el vector de incógnitas y el vector de términos independientes.

**Definición 5.4** (Tipos de soluciones de un sistema lineal). Encontrar la **solución** o el conjunto-solución o, aún, la solución general de un sistema de ecuaciones significa hallar todos los valores de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  que resuelven simultáneamente las ecuaciones. En el caso de sistemas lineales con coeficientes reales, las posibilidades son tres:

1. El sistema posee una única solución.
2. El sistema posee infinitas soluciones.
3. El sistema no posee solución.

En los dos primeros casos, el sistema es **consistente** o **compatible**; en el último, es **inconsistente** o **incompatible**.

Se demostrará que un sistema de ecuaciones lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $n$  incógnitas posee soluciones si y solo si el rango de la matriz aumentada  $[A|\mathbf{b}]$  es igual al rango de la matriz de coeficientes  $A$  (recuerde la Definición 4.56). Si además  $\text{rank}(A) = n$ , entonces la solución es única. En caso contrario, existen infinitas soluciones reales (o complejas).

Los sistemas de ecuaciones lineales se dividen básicamente en dos tipos, homogéneos y no homogéneos. Se proporciona la definición a continuación:

**Definición 5.5** (Sistema de ecuaciones lineales homogéneo). Un **sistema de ecuaciones lineales homogéneo** es un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{cases}$$

donde todos los términos independientes son iguales a cero.

En forma matricial, se expresa como  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , donde  $A$  es la matriz de coeficientes de tamaño  $m \times n$ ,  $\mathbf{x}$  es el vector de incógnitas y  $\mathbf{0}$  es el vector nulo de  $\mathbb{R}^m$ .

En general, se demostrará en el Teorema 6.19 que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es solución y si se multiplica una solución por un escalar también lo es.

Encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones es un trabajo que se ha venido resolviendo desde el bachillerato; tal vez recuerde los métodos de sustitución, reducción o igualación, o tal vez también la regla de Cramer. Nuestra idea aquí no es reducirnos a sistemas  $2 \times 2$  o  $3 \times 3$ , sino más bien generar métodos para miles de incógnitas y ecuaciones. El método que usaremos más a menudo será el **método de eliminación gaussiana**, creado por el príncipe de las matemáticas Carl Friedrich Gauss. Nosotros ya estamos habituados a él (Lema 4.51) o en su versión del método de Gauss-Jordan (Lema 4.53).

**Ejemplo 5.6** (Sistema  $2 \times 2$  - Intersección de rectas). Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales: 
$$\begin{cases} 2x + 3y &= 7 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

**Solución:** Resolviendo por el método de Gauss-Jordan (Lema 4.53), la matriz aumentada del sistema es:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

**Paso 1:**  $f_1 \leftrightarrow f_2$  (pivote más conveniente)  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right),$

**Paso 2:**  $f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2 \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{array} \right),$

**Paso 3:**  $\frac{1}{5}f_2 \rightarrow f_2: \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right),$

**Paso 4:**  $f_1 + f_2 \rightarrow f_1: \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$

Por lo tanto:  $x = 2$  e  $y = 1$ , es decir, la solución es  $(2, 1)$ .

**Interpretación geométrica:** Cada ecuación lineal en dos variables representa una recta en el plano cartesiano, por lo cual las ecuaciones  $2x + 3y = 7$  y  $x - y = 1$  son rectas y  $(2, 1)$  corresponde a su **punto de intersección**. Este es el único punto que satisface simultáneamente ambas ecuaciones.

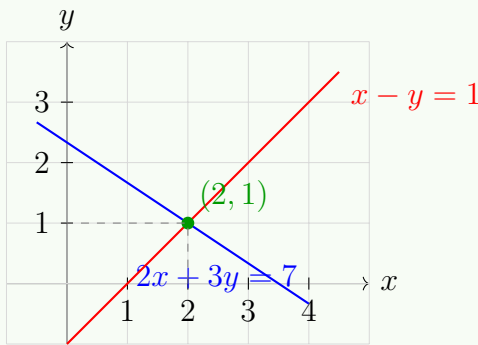


Figura 5.1: Intersección de las rectas  $2x + 3y = 7$  y  $x - y = 1$ . La solución del sistema corresponde al punto donde ambas rectas se cruzan.

**Observación 5.7.** Es importante notar que los planos son la **generalización tridimensional** de las rectas. Mientras que una ecuación lineal con dos incógnitas  $ax + by = c$  representa una recta en el plano, una ecuación lineal con tres incógnitas  $ax + by + cz = d$  representa un plano en el espacio.

**Ejemplo 5.8** (Sistema  $3 \times 3$  - Intersección de planos). Calcule la solución del siguiente sistema de

ecuaciones lineales  $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ :

**Solución:** La matriz aumentada del sistema es:  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$ . Usaremos el método de Gauss-Jordan (Lema 4.53).

**Paso 1:**  $f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2$  y  $f_3 - f_1 \rightarrow f_3: \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{array} \right)$

**Paso 2:**  $-\frac{1}{5}f_2 \rightarrow f_2: \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{array} \right)$

**Paso 3:**  $f_3 + f_2 \rightarrow f_3: \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right)$

Paso 4:  $-\frac{1}{2}f_3 \rightarrow f_3$ : 
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Paso 5:  $f_1 - f_3 \rightarrow f_1$ : 
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Paso 6:  $f_1 - 2f_2 \rightarrow f_1$ : 
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto:  $x = 2$ ,  $y = 2$  y  $z = 3$ , es decir, la solución es  $(2, 2, 3)$ .

**Interpretación geométrica:** Cada ecuación lineal en tres variables representa un **plano** en el espacio tridimensional, por lo que la solución del sistema  $(2, 2, 3)$  corresponde al **punto de intersección común** de estos tres planos. Este es el único punto en el espacio que pertenece simultáneamente a los tres planos, es decir, que satisface las tres ecuaciones al mismo tiempo.

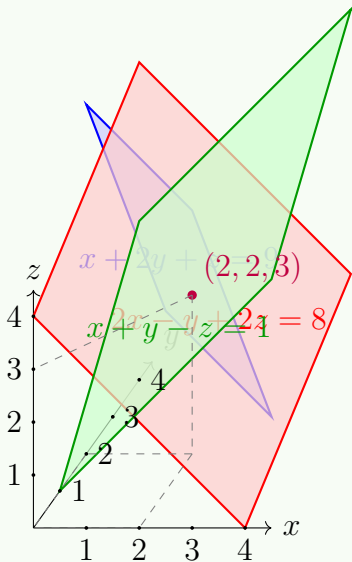


Figura 5.2: Intersección de tres planos en el espacio. Cada ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano, y la solución del sistema corresponde al punto donde los tres planos se intersectan.

**Observación 5.9.** En general, un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas que tiene solución única corresponde geoméricamente a la intersección de  $n$  hiperplanos en  $\mathbb{R}^n$ . Para  $n = 2$  tenemos rectas (hiperplanos de dimensión 1 en  $\mathbb{R}^2$ ), para  $n = 3$  tenemos planos (hiperplanos de dimensión 2 en  $\mathbb{R}^3$ ), y así sucesivamente. Para **sistemas**  $2 \times 2$ :

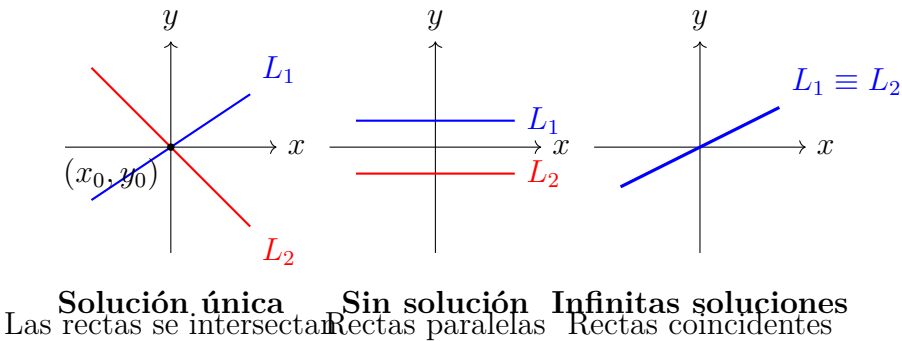


Figura 5.3: Interpretación geométrica de sistemas  $2 \times 2$

**Casos para sistemas  $3 \times 3$ :**

De manera análoga, para sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, tenemos tres planos en  $\mathbb{R}^3$ :

- **Solución única:** Los tres planos se intersectan en un único punto.

- **Sin solución:** Los planos no tienen intersección común (por ejemplo, tres planos paralelos distintos, o dos planos paralelos y un tercero que los corta).
- **Infinitas soluciones:** Los tres planos se intersectan en una recta (intersección común es una línea) o los tres planos son coincidentes (intersección común es todo el plano).

En general, para un sistema  $n \times n$ :

- La **solución única** corresponde a que los  $n$  hiperplanos se intersecten en exactamente un punto de  $\mathbb{R}^n$ .
- **Sin solución** ocurre cuando no existe intersección común de todos los hiperplanos.
- **Infinitas soluciones** se presenta cuando la intersección común tiene más de un punto (puede ser una línea, un plano, etc., dependiendo de la dimensión).

**Observación 5.10.** Al aplicar el método de eliminación gaussiana a un sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ , el comportamiento del sistema puede determinarse mediante el análisis de la matriz aumentada  $(A|b)$  en su forma escalonada:

- **Sistema inconsistente (sin solución):** El sistema no tiene solución si y solo si existe una fila en la forma escalonada de  $(A|b)$  de la forma  $(0, 0, \dots, 0|c)$  donde  $c \neq 0$ . Esto corresponde a una ecuación de la forma  $0 = c$  con  $c \neq 0$ , la cual es imposible de satisfacer.
- **Sistema con infinitas soluciones:** Si el sistema es consistente y el número de filas no nulas en la forma escalonada de la matriz de coeficientes  $A$  es menor que el número de incógnitas, entonces el sistema tiene infinitas soluciones. En este caso, aparecerán filas de la forma  $(0, 0, \dots, 0|0)$  en la matriz aumentada, y habrá variables libres que pueden tomar cualquier valor real.
- **Sistema con solución única:** Si el sistema es consistente y el número de filas no nulas en la forma escalonada de  $A$  es igual al número de incógnitas, entonces el sistema tiene una única solución.

**Definición 5.11** (Variables básicas y libres). En el contexto de un sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ , consideremos la forma escalonada obtenida mediante eliminación gaussiana. Las variables del sistema se clasifican en dos categorías:

- **Variables básicas:** Son aquellas variables que corresponden a las columnas que contienen los elementos pivote en la forma escalonada de la matriz aumentada del sistema.
- **Variables libres (o parámetros):** Son las variables restantes, es decir, aquellas que corresponden a columnas sin elemento pivote en la forma escalonada.

Esta clasificación es fundamental para expresar la solución general del sistema en forma paramétrica, donde las variables libres actúan como parámetros independientes que determinan el conjunto completo de soluciones.

**Ejemplo 5.12.** Dado el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Use el método de eliminación gaussiana para calcular sus soluciones. Determine las variables libres correspondientes y encuentre las ecuaciones paramétricas de la solución:

**Solución:** La matriz aumentada del sistema es  $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ . Aplicando eliminación gaussiana:

**Paso 1:**  $f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2$  y  $f_3 - f_1 \rightarrow f_3$ :  $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

**Paso 2:** Como la segunda columna no tiene pivote, se busca pivote en la tercera columna. Se

toma  $-2$  como pivote en la fila 3.  $f_3 - 2f_2 \rightarrow f_3$   $\left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \end{array} \right)$

De esta matriz se tiene que  $x_1, x_3, x_4$  son columnas con pivotes  $1, -2, 2$  (variables básicas) y  $x_2$  es la variable libre (columna sin pivote).

La **Solución paramétrica** se toma a partir de la forma escalonada en el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 & (1) \\ -x_3 - x_4 &= 0 & (2) \\ 2x_4 &= 0 & (3) \end{aligned}$$

Resolviendo por sustitución hacia atrás:

- De la ecuación (3):  $x_4 = 0$
- De la ecuación (2):  $-x_3 - 0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$
- De la ecuación (1):  $x_1 + x_2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

Sea  $x_2 = t$  donde  $t \in \mathbb{R}$  es el parámetro libre.

Entonces la solución paramétrica es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es una recta que pasa por el origen en la dirección del vector  $(-1, 1, 0, 0)$ .

**Teorema 5.13** (Teorema de Rouché-Frobenius). *Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  y  $b$  un vector de  $\mathbb{R}^m$ . Consideremos el sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ . Sea  $\tilde{A} = [A|b]$  la matriz ampliada del sistema. Entonces:*

1. *El sistema  $Ax = b$  tiene solución si y solo si  $\text{rango}(A) = \text{rango}(\tilde{A})$ .*
2. *Si el sistema tiene solución, entonces:*
  - *Si  $\text{rango}(A) = n$ , la solución es única.*
  - *Si  $\text{rango}(A) < n$ , el sistema tiene infinitas soluciones que dependen de  $n - \text{rango}(A)$  parámetros libres.*

*Demostración.* Demostraremos cada parte del teorema usando eliminación gaussiana.

**Parte 1:** El sistema  $Ax = b$  tiene solución si y solo si  $\text{rango}(A) = \text{rango}(\tilde{A})$ . Mediante operaciones elementales de fila, podemos transformar la matriz ampliada  $\tilde{A} = [A|b]$  a su forma escalonada reducida. Las operaciones elementales de fila no cambian el conjunto de soluciones del sistema.

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que el sistema  $Ax = b$  tiene solución. Al aplicar eliminación gaussiana a  $\tilde{A}$ , nunca obtendremos una fila de la forma  $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ | \ c]$  con  $c \neq 0$ , pues esto correspondería a la ecuación  $0 = c$ , que es una contradicción. Por tanto, el número de filas no nulas en la forma escalonada de  $A$  es igual al número de filas no nulas en la forma escalonada de  $\tilde{A}$ , es decir,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(\tilde{A})$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\text{rango}(A) = \text{rango}(\tilde{A})$ . Esto significa que al reducir  $\tilde{A}$  por filas, no aparece ninguna fila de la forma  $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ | \ c]$  con  $c \neq 0$ . Por tanto, el sistema escalonado equivalente es consistente y tiene al menos una solución.

**Parte 2:** Si el sistema tiene solución, sea  $r = \text{rango}(A)$  el número de filas no nulas en la forma escalonada de  $A$ .

Si  $r = n$ , entonces en la forma escalonada reducida tenemos  $n$  variables pivote (una en cada columna de  $A$ ). Esto significa que cada variable está determinada de manera única, por lo que la solución es única.

Si  $r < n$ , entonces hay  $r$  variables pivote y  $n - r$  variables libres. Las variables libres pueden tomar cualquier valor, y las variables pivote se expresan en términos de estas variables libres. Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones que dependen de  $n - r$  parámetros libres.  $\square$



**Ejemplo 5.14.** Consideremos el sistema de ecuaciones lineales: 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \end{cases}$$

Aplicaremos el teorema de Rouché-Frobenius para determinar si el sistema tiene solución y, en caso afirmativo, clasificar el tipo de solución.

**Solución:** Primero, escribimos la matriz de coeficientes  $A$  y la matriz ampliada  $\tilde{A}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de  $A$  mediante eliminación gaussiana:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 - f_1 \rightarrow f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $\text{rango}(A) = 2$ .

$$\text{Ahora calculamos el rango de } \tilde{A}: \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 - f_1 \rightarrow f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $\text{rango}(\tilde{A}) = 3$ .

**Conclusión:** Como  $\text{rango}(A) = 2 \neq 3 = \text{rango}(\tilde{A})$ , el teorema de Rouché-Frobenius nos dice que el sistema **no tiene solución**. La última fila de la matriz ampliada escalonada corresponde a la ecuación  $0 = 1$ , que es una contradicción, confirmando que el sistema es inconsistente.

**Observación 5.15.** Un sistema de ecuaciones lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  puede tener solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Para solución única es necesario (pero no suficiente) que  $A$  sea cuadrada. Cuando  $A$  es cuadrada e invertible, se garantiza existencia y unicidad de la solución para cualquier  $\mathbf{b}$ , lo que permite extender el teorema de caracterización de matrices invertibles con propiedades de sistemas lineales.

**Teorema 5.16** (Caracterización de matrices invertibles - Versión 3). Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $A$  es invertible.
2. La forma escalonada reducida de  $A$  es la matriz identidad  $I_n$ .
3.  $A$  se puede escribir como producto de matrices elementales.
4.  $A$  tiene rango máximo ( $\text{rango}(A) = n$ ).
5.  $\det(A) \neq 0$ .
6.  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene únicamente la solución nula.
7.  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es consistente para cualquier vector  $\mathbf{b}$ .
8.  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución única para cualquier vector  $\mathbf{b}$ .

*Demostración.* Ya hemos demostrado la equivalencia de las afirmaciones (1)-(5) en versiones anteriores de este teorema. Procederemos a demostrar que estas son equivalentes a las afirmaciones (6)-(8).

(1)  $\Rightarrow$  (6): Supongamos que  $A$  es invertible y sea  $\mathbf{x}$  una solución de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Multiplicando ambos lados por  $A^{-1}$  a la izquierda:

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}(A^{-1}A)\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ I_n\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la única solución del sistema homogéneo es la solución nula.

(6)  $\Rightarrow$  (4): Supongamos que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene únicamente la solución nula. Consideremos la forma escalonada reducida de  $A$ , llamémosla  $R$ . Sabemos que existe una matriz invertible  $P$  (producto de matrices elementales) tal que  $PA = R$ .

El sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es equivalente al sistema  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (tienen las mismas soluciones). Como  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene únicamente la solución nula, entonces  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  también tiene únicamente la solución nula.

Si  $R$  tuviera una fila de ceros, digamos la fila  $k$ , entonces las variables correspondientes a las columnas sin pivote serían variables libres, lo que implicaría que el sistema  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tendría infinitas soluciones (contradicción). Por lo tanto,  $R$  no puede tener filas de ceros.

Como  $R$  es una matriz  $n \times n$  en forma escalonada reducida sin filas de ceros, debe tener  $n$  pivotes, uno en cada fila. Esto significa que  $\text{rango}(A) = \text{rango}(R) = n$ .

(1)  $\Rightarrow$  (7): Supongamos que  $A$  es invertible. Para cualquier vector  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , consideremos el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Como  $A$  es invertible, podemos definir  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ . Verificamos que esta es efectivamente una solución:

$$A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I_n\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Por lo tanto, el sistema es consistente para cualquier  $\mathbf{b}$ .

(7)  $\Rightarrow$  (4): Supongamos que  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es consistente para cualquier vector  $\mathbf{b}$ . En particular, debe ser consistente para cada uno de los vectores canónicos  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ .

Consideremos la forma escalonada reducida de la matriz aumentada  $(A|\mathbf{e}_i)$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Como cada sistema es consistente, ninguna de estas matrices aumentadas puede tener una fila de la forma  $(0\ 0\ \dots\ 0\ | \ 1)$ .

Esto significa que cuando reducimos la matriz  $A$  a su forma escalonada, no puede aparecer una fila de ceros, pues de lo contrario algún sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$  sería inconsistente. Por lo tanto, la forma escalonada reducida de  $A$  tiene  $n$  pivotes, lo que implica que  $\text{rango}(A) = n$ .

(1)  $\Rightarrow$  (8): Supongamos que  $A$  es invertible. Por la demostración anterior, sabemos que para cualquier  $\mathbf{b}$ , el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene al menos una solución  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ . Para demostrar unicidad, supongamos que  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  son dos soluciones del sistema. Entonces:

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} \quad \text{y} \quad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$$

Restando estas ecuaciones:  $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$ . Por la afirmación (6), esto implica que  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ , es decir,  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ . Por lo tanto, la solución es única.

(8)  $\Rightarrow$  (6): Supongamos que  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución única para cualquier vector  $\mathbf{b}$ . En particular, para  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene solución única. Como sabemos que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es siempre una solución del sistema homogéneo, esta debe ser la única solución.

Hemos demostrado el ciclo de implicaciones:

$$\begin{aligned}(1) &\Rightarrow (6) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1) \\ (1) &\Rightarrow (7) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1) \\ (1) &\Rightarrow (8) \Rightarrow (6) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)\end{aligned}$$

Como ya habíamos establecido que (1)-(5) son equivalentes (Teorema 4.79), concluimos que todas las afirmaciones (1)-(8) son equivalentes.  $\square$

**Teorema 5.17** (Propiedades de los sistemas homogéneos). *Dado un sistema de ecuaciones lineales homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  se cumple:*

1. Todo sistema homogéneo es **consistente**, pues siempre admite al menos la **solución trivial**  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
2. Si el sistema homogéneo tiene una solución no trivial, entonces tiene infinitas soluciones.
3. Un sistema homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  con  $n$  incógnitas tiene solución única (la trivial) si y solo si  $\text{rank}(A) = n$ .
4. Si  $\text{rank}(A) < n$ , entonces el sistema tiene infinitas soluciones no triviales.

**Demostración. Propiedad 1:** Sea  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  un sistema homogéneo. Sustituyendo  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$  y esta igualdad es siempre verdadera, independientemente de la matriz  $A$ . Por tanto,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es siempre una solución, y el sistema es consistente.

**Propiedad 2:** Supongamos que  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$  es una solución no trivial de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , es decir,  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ .

Para cualquier escalar  $k \in \mathbb{R}$ , consideremos  $\mathbf{x} = k\mathbf{x}_0$ :

$$A(k\mathbf{x}_0) = k(A\mathbf{x}_0) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Por tanto,  $k\mathbf{x}_0$  es solución para todo  $k \in \mathbb{R}$ . Como hay infinitos valores de  $k$ , existen infinitas soluciones.

**Propiedad 3:** Distinguimos dos casos según si  $A$  es cuadrada o no.

**Caso 1:** Si  $A$  es una matriz cuadrada  $n \times n$ :

Por el Teorema de Caracterización de Matrices Invertibles (equivalencias 4 y 6):

$$\text{rank}(A) = n \iff A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ tiene únicamente la solución nula}$$

**Caso 2:** Si  $A$  es una matriz  $m \times n$  con  $m \neq n$ :

El rango de  $A$  satisface  $\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$ .

Utilizaremos el teorema del rango-nulidad: para cualquier matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$ ,  $\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$  donde  $\text{nullity}(A) = \dim(\text{Nul}(A))$  es la dimensión del espacio nulo de  $A$ .

- Si  $\text{rank}(A) = n$ , entonces  $\text{nullity}(A) = n - n = 0$ . Esto significa que  $\dim(\text{Nul}(A)) = 0$ , por lo que el espacio nulo contiene únicamente el vector cero. Por tanto,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene únicamente la solución trivial  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- Si  $\text{rank}(A) < n$ , entonces  $\text{nullity}(A) = n - \text{rank}(A) > 0$ . Esto significa que  $\dim(\text{Nul}(A)) > 0$ , por lo que el espacio nulo contiene vectores no nulos. Por tanto, el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene soluciones no triviales.

**Propiedad 4:** Si  $\text{rank}(A) < n$ , entonces por la Propiedad 3, el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  no tiene solución única. Como sabemos por la Propiedad 1 que siempre tiene al menos la solución trivial, debe tener más de una solución.

Si existe una solución no trivial  $\mathbf{x}_0$ , entonces por la Propiedad 2, existen infinitas soluciones.

Para mostrar que efectivamente existe una solución no trivial, consideremos la forma escalonada reducida  $R$  de la matriz  $A$ . Como  $\text{rank}(A) < n$ , la matriz  $R$  tiene menos de  $n$  pivotes, digamos  $r = \text{rank}(A) < n$ .

Esto significa que hay  $n - r > 0$  variables libres en el sistema  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Podemos construir una solución no trivial asignando el valor 1 a una de las variables libres y 0 a las demás variables libres. Las variables básicas quedan determinadas por los valores de las variables libres a través de las ecuaciones del sistema.

Como al menos una variable (la variable libre elegida) tiene valor 1, la solución obtenida es no trivial.  $\square$

**Teorema 5.18** (Regla de Cramer). Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n \times n$  con  $\det(A) \neq 0$ , y sea  $\mathbf{b}$  un vector en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces el sistema de ecuaciones lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene una única solución dada por:  $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  donde  $A_i$  es la matriz obtenida al reemplazar la  $i$ -ésima columna de  $A$  por el vector  $\mathbf{b}$ .

*Demostración.* Como  $\det(A) \neq 0$ , la matriz  $A$  es invertible por el teorema de caracterización de matrices invertibles (Teorema 5.16). Por lo tanto, el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene una única solución  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ .

Recordemos que la matriz inversa puede expresarse como:  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$  donde  $\text{adj}(A)$  es la matriz adjunta (o adjunta clásica) de  $A$ , cuyas entradas son:  $[\text{adj}(A)]_{ij} = (-1)^{j+i}M_{ji}$  siendo  $M_{ji}$  el menor obtenido al eliminar la fila  $j$  y la columna  $i$  de  $A$ .

La solución del sistema es:  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)\mathbf{b}$

Para encontrar la  $i$ -ésima componente  $x_i$  de la solución, calculamos el producto de la  $i$ -ésima fila de  $\text{adj}(A)$  con el vector  $\mathbf{b}$ :  $x_i = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n [\text{adj}(A)]_{ij} b_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} M_{ji} b_j$

Ahora, consideremos la matriz  $A_i$  obtenida al reemplazar la  $i$ -ésima columna de  $A$  por el vector  $\mathbf{b}$ :

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Al expandir  $\det(A_i)$  por la  $i$ -ésima columna (que contiene los elementos de  $\mathbf{b}$ ), obtenemos:  $\det(A_i) = \sum_{j=1}^n b_j \cdot (-1)^{j+i} \cdot M'_{ji}$

donde  $M'_{ji}$  es el menor obtenido al eliminar la fila  $j$  y la columna  $i$  de  $A_i$ .

Observemos que este menor  $M'_{ji}$  es exactamente igual al menor  $M_{ji}$  de la matriz original  $A$ , ya que al eliminar la fila  $j$  y la columna  $i$  de  $A_i$ , eliminamos precisamente la fila  $j$  y la columna  $i$  que contenía el elemento  $b_j$ , quedando la misma submatriz que se obtiene al eliminar la fila  $j$  y la columna  $i$  de  $A$ .

Por lo tanto:  $\det(A_i) = \sum_{j=1}^n b_j \cdot (-1)^{j+i} \cdot M_{ji} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} M_{ji} b_j$

Comparando con la expresión que obtuvimos para  $x_i$ :  $x_i = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} M_{ji} b_j = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$

Esto completa la demostración de la Regla de Cramer. □

**Problema 5.19.** Tres especies de ardillas han sido llevadas a una isla con una población inicial total de 2.000. Después de 10 años, la especie I ha duplicado su población y la especie II ha incrementado su población en un 50 %, mientras que la especie III se ha extinguido. Si el incremento en la población de la especie I es igual que el de la especie II y si la población total se ha incrementado en 500, determine la población inicial de las tres especies.

**Solución:** Definamos  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  como las poblaciones iniciales de las tres especies de ardillas.

De las condiciones del problema:

- Población inicial total:  $x_1 + x_2 + x_3 = 2000$
- Población final total:  $2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 0 = 2500$  (ya que la especie III se extinguió)
- El incremento de la especie I es igual al incremento de la especie II, así el Incremento de I es  $2x_1 - x_1 = x_1$  mientras que el Incremento de II es  $\frac{3}{2}x_2 - x_2 = \frac{1}{2}x_2$ . Por tanto:  $x_1 = \frac{1}{2}x_2$ .

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2000 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 2500 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases}$$

Usando la regla de Cramer. La matriz de coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \det A = -\frac{5}{2}.$$

Para encontrar  $x_1$ :  $A_1 = \begin{pmatrix} 2000 & 1 & 1 \\ 2500 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ , así  $\det A_1 = -1250$ .

Para encontrar  $x_2$ :  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2000 & 1 \\ 2 & 2500 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , así  $\det A_2 = -2500$

Para encontrar  $x_3$ :  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2000 \\ 2 & \frac{3}{2} & 2500 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$  y  $\det A_3 = -1250$

De esta manera: 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-1250}{-\frac{5}{2}} = \frac{1250 \cdot 2}{5} = 500 \\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-2500}{-\frac{5}{2}} = \frac{2500 \cdot 2}{5} = 1000 \\ x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-1250}{-\frac{5}{2}} = \frac{1250 \cdot 2}{5} = 500 \end{cases}$$

Por tanto, las poblaciones iniciales son: 500 ardillas de la especie I, 1000 ardillas de la especie II y 500 ardillas de la especie III.

**Problema 5.20.** Utilice eliminación gaussiana o de Gauss-Jordan para resolver los sistemas de ecuaciones lineales. Si existe solución única, indíquela; si hay infinitas soluciones, identifique las variables libres y exprese el conjunto solución en forma paramétrica; si no hay solución, explique claramente la razón mediante la forma escalonada o inconsistencia detectada.

a) 
$$\begin{cases} 2x - y + 2z &= -4 \\ 6x - 3y + 6z &= -12 \\ -4x + 2y - 4z &= 8 \end{cases}$$

**Solución:** Matriz aumentada y operaciones:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 6 & -12 \\ -4 & 2 & -4 & 8 \end{array} \right)$$

$$f_2 - 3f_1 \rightarrow f_2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 8 \end{array} \right)$$

$$f_3 + 2f_1 \rightarrow f_3 :$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

**Análisis:**

- Sistema equivalente:  $2x - y + 2z = -4$ .
- Variables libres:  $y$  y  $z$ .

**Solución paramétrica:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} - z - 2 \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

b)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{cases}$

**Solución:** Matriz aumentada y operaciones:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{array} \right)$$

$f_2 - 3f_1 \rightarrow f_2 :$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

$-\frac{1}{2}f_2 \rightarrow f_2 :$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right)$$

$f_1 - 2f_2 \rightarrow f_1 :$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right)$$

**Solución paramétrica:**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

c)  $\begin{cases} x + 2y - 2z &= b_1 \\ 2x + 5y - 4z &= b_2 \\ 4x + 9y - 8z &= b_3 \end{cases}$

**Solución:** Matriz aumentada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & b_1 \\ 2 & 5 & -4 & b_2 \\ 4 & 9 & -8 & b_3 \end{array} \right)$$

**Forma escalonada:**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - 2b_1 \end{array} \right)$$

**Análisis:**

- Si  $b_3 - b_2 - 2b_1 \neq 0$ : sistema inconsistente.
- Si  $b_3 - b_2 - 2b_1 = 0$ : infinitas soluciones con variable libre  $z$ .

**Solución paramétrica (cuando existe):**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ b_2 - 2b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

$$d) \begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 & = 1 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 & = 0 \end{cases}$$

**Solución:** Matriz aumentada (reordenada):

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

**Forma escalonada reducida:**

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -\frac{7}{2} \end{array} \right)$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} x_5 &= -\frac{7}{18} \\ x_4 &= -1 - 4\left(-\frac{7}{18}\right) = \frac{5}{9} \\ 2x_2 + x_3 &= 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \quad (\text{variable libre } x_3) \\ x_1 &= \frac{1}{2} - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = -\frac{1}{9} - x_3 \end{aligned}$$

**Solución paramétrica:**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ 0 \\ \frac{5}{9} \\ -\frac{7}{18} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

**Problema 5.21.** Determine los valores del parámetro  $t$  para los cuales el siguiente sistema tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Justifique mediante análisis de rango y consistencia.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ x_3 & = 2 \\ (t^2 - 4)x_3 & = t + 2 \end{cases}$$

**Solución:** Aplicamos eliminación gaussiana a la matriz aumentada:  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t^2 - 4 & t + 2 \end{array} \right)$

$$f_3 - (t^2 - 4) \cdot f_2 \rightarrow f_3: \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2t^2 + t + 10 \end{array} \right).$$

■ **Rango y consistencia:**

- $\text{rango}(A) = 2$  (dos filas no nulas en forma escalonada)
- $\text{rango}(\tilde{A}) = 2$  si  $-2t^2 + t + 10 = 0$ , y 3 en otro caso.

■ **Solución única:** Imposible. La segunda columna no tiene pivote, lo que implica una variable libre ( $x_2$ ) si el sistema es consistente.

- **Infinitas soluciones:** Ocurre cuando  $\text{rango}(A) = \text{rango}(\tilde{A}) = 2$ . Esto requiere:

$$-2t^2 + t + 10 = 0 \implies t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{4} = \frac{1 \pm 9}{4}$$

Así,  $t = \frac{5}{2}$  o  $t = -2$ . En estos casos,  $x_2$  es variable libre y las soluciones son de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x_2 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Ninguna solución:** Ocurre cuando  $\text{rango}(A) = 2 \neq 3 = \text{rango}(\tilde{A})$ , es decir, para  $t \neq \frac{5}{2}$  y  $t \neq -2$ . La última ecuación sería  $0 = -2t^2 + t + 10 \neq 0$ , una inconsistencia.

**Problema 5.22.** Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -4 \\ 6x - y + 6z = -12 \end{cases}$$

- a) Añada una tercera ecuación para que el sistema tenga solución única.
- b) Añada una tercera ecuación para que el sistema tenga soluciones infinitas.
- c) Añada una tercera ecuación para que no tenga solución.

**Solución:** En general este problema puede tener múltiples soluciones, se muestran algunas posibilidades.

**Solución del sistema original:** Aplicamos eliminación gaussiana:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 6 & -1 & 6 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - 3f_1 \rightarrow f_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -4 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación:  $y = 0$ . Sustituyendo en la primera:  $2x + 2z = -4 \implies x + z = -2$ . La solución general es:

$$(x, y, z) = (-2 - z, 0, z) \quad \text{con } z \in \mathbb{R}.$$

- a) **Solución única:** Añadir  $z = 0$ .  
Justificación: Fija el valor de la variable libre ( $z$ ). El sistema ampliado:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -4 \\ 6x - y + 6z = -12 \\ z = 0 \end{cases}$$

tiene solución única  $(x, y, z) = (-2, 0, 0)$ .

- b) **Infinitas soluciones:** Añadir  $x + z = -2$ .  
Justificación: Es consistente con la solución general (es combinación lineal de las ecuaciones originales). El sistema ampliado:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -4 \\ 6x - y + 6z = -12 \\ x + z = -2 \end{cases}$$

mantiene la solución general con  $z$  libre.



c) **Ninguna solución:** Añadir  $y = 1$ .

Justificación: Contradice  $y = 0$  de la solución general. El sistema ampliado:

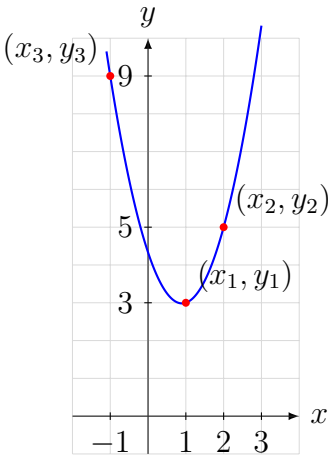
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -4 \\ 6x - y + 6z = -12 \\ y = 1 \end{cases}$$

es inconsistente (la tercera ecuación fuerza  $y = 1$ , pero las primeras implican  $y = 0$ ).

**Problema 5.23.** La curva  $y = ax^2 + bx + c$  que se observa en la figura 5.4 pasa por los puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ .

a) Demuestre que los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  son soluciones del sistema cuya matriz aumentada es

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array} \right)$$



b) Use lo anterior para calcular el polinomio que pasa por los puntos  $(1, 3)$ ,  $(2, 5)$  y  $(-1, 9)$ .

Figura 5.4: Parábola de interpolación

**Solución:**

a) Si la curva  $y = ax^2 + bx + c$  pasa por los puntos dados, entonces al sustituir las coordenadas de cada punto en la ecuación de la parábola, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

para  $a$ ,  $b$  y  $c$ :

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

Reordenando en forma matricial, este sistema corresponde exactamente a la matriz aumentada del enunciado.

b) Para los puntos específicos  $(1, 3)$ ,  $(2, 5)$  y  $(-1, 9)$ , construimos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a(1)^2 + b(1) + c = 3 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 5 \\ a(-1)^2 + b(-1) + c = 9 \end{cases} \text{ el cual es equivalente a } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ a - b + c = 9 \end{cases}$$

La matriz aumentada correspondiente es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

La matriz de coeficientes es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\det A = -6$ .

Para encontrar  $a$ :  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\det A_1 = -10$ .

Para encontrar  $b$ :  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\det A_2 = 18$ .

Para encontrar  $c$ :  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$  y  $\det A_3 = -26$ .

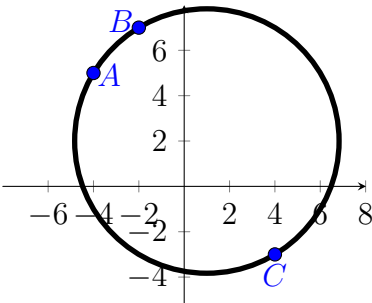
Por tanto:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3} \\ b &= \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{18}{-6} = -3 \\ c &= \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-26}{-6} = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

El polinomio que interpola los puntos dados es:

$$p(x) = \frac{5}{3}x^2 - 3x + \frac{13}{3}$$

**Problema 5.24.** Dados los puntos  $A = (-4, 5)$ ,  $B = (-2, 7)$  y  $C = (4, -3)$  encuentre los coeficientes  $a, b, c$  y  $d$  tales que la circunferencia mostrada en la figura 5.5 tenga ecuación  $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ .



*Sugerencia:* Divida la ecuación por  $a$ .

Figura 5.5: Circunferencia del problema

**Solución:** La circunferencia debe cumplir la ecuación  $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ . Dividiendo por  $a$  toda la ecuación, esta se convierte en  $x^2 + y^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}y + \frac{d}{a} = 0$ . Como los puntos  $A, B$  y  $C$  están sobre la circunferencia, cada uno debe satisfacer la ecuación. Sustituyendo las coordenadas de cada punto:

**Para el punto  $A = (-4, 5)$ :**

$$(-4)^2 + (5)^2 + \frac{b}{a}(-4) + \frac{c}{a}(5) + \frac{d}{a} = 0$$

$$16 + 25 - 4\frac{b}{a} + 5\frac{c}{a} + \frac{d}{a} = 0$$

$$41 - 4\frac{b}{a} + 5\frac{c}{a} + \frac{d}{a} = 0$$

**Para el punto  $B = (-2, 7)$ :**

$$(-2)^2 + (7)^2 + \frac{b}{a}(-2) + \frac{c}{a}(7) + \frac{d}{a} = 0$$

$$4 + 49 - 2\frac{b}{a} + 7\frac{c}{a} + \frac{d}{a} = 0$$

$$53 - 2\frac{b}{a} + 7\frac{c}{a} + \frac{d}{a} = 0$$

**Para el punto  $C = (4, -3)$ :**

$$(4)^2 + (-3)^2 + \frac{b}{a}(4) + \frac{c}{a}(-3) + \frac{d}{a} = 0$$

$$16 + 9 + 4\frac{b}{a} - 3\frac{c}{a} + \frac{d}{a} = 0$$

$$25 + 4\frac{b}{a} - 3\frac{c}{a} + \frac{d}{a} = 0$$

Reescribiendo  $\frac{b}{a} = x_1$ ,  $\frac{c}{a} = x_2$ ,  $\frac{d}{a} = x_3$ , el sistema de ecuaciones lineales es:

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + x_3 = -41 \\ -2x_1 + 7x_2 + x_3 = -53 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$$

Aplicando eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 & -41 \\ -2 & 7 & 1 & -53 \\ 4 & -3 & 1 & -25 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 + f_1 \rightarrow f_3]{f_2 - \frac{1}{2}f_1 \rightarrow f_2} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 & -41 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -32,5 \\ 0 & 2 & 2 & -66 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 - \frac{4}{9}f_2 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 & -41 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -32,5 \\ 0 & 0 & \frac{16}{9} & -\frac{464}{9} \end{pmatrix}$$

Resolviendo por sustitución hacia atrás:

$$\begin{cases} \frac{16}{9}x_3 = -\frac{464}{9} \Rightarrow x_3 = -29 \\ \frac{9}{2}x_2 + \frac{1}{2}(-29) = -32,5 \Rightarrow x_2 = -4 \\ -4x_1 + 5(-4) + (-29) = -41 \Rightarrow x_1 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto:  $\frac{b}{a} = -2$ ,  $\frac{c}{a} = -4$ ,  $\frac{d}{a} = -29$ .

Si tomamos  $a = 1$ , entonces  $b = -2$ ,  $c = -4$ ,  $d = -29$ .

La ecuación de la circunferencia es  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 29 = 0$ , la cual puede reescribirse completando cuadrados como  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 34$ .

Esta es una circunferencia con centro en  $(1, 2)$  y radio  $\sqrt{34}$ .

**Problema 5.25.** Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \\ ex + fy = m \end{cases}$$

Determine los valores para  $a, b, c, d, e, f, k, l, m$  tal que el sistema tenga

a) Ninguna solución

**Solución:** Para que el sistema tenga ninguna solución, debe ser inconsistente. Esto ocurre cuando el rango de la matriz de coeficientes es menor que el rango de la matriz aumentada. Consideremos un ejemplo específico:  $a = 1, b = 2, c = 2, d = 4, e = 3, f = 6, k = 1, l = 3, m = 4$ .

La matriz de coeficientes es:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

Observamos que la segunda fila es el doble de la primera, y la tercera fila es el triple de la primera. Por tanto,  $\text{rango}(A) = 1$ .

La matriz aumentada es:  $[A|b] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ .

Aplicando operaciones elementales:  $f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2: (0, 0, 1)$  y  $f_3 - 3f_1 \rightarrow f_3: (0, 0, 1)$ .

Como obtenemos filas de la forma  $(0, 0, \text{número no cero})$ , el sistema es inconsistente. Por tanto,  $\text{rango}([A|b]) = 2 > \text{rango}(A) = 1$ .

b) Única solución

**Solución:** Para que el sistema tenga única solución, necesitamos que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al número de incógnitas y que el sistema sea consistente. Como tenemos 2 incógnitas  $(x, y)$ , necesitamos  $\text{rango}(A) = 2$ . Consideremos el ejemplo:  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1, e = 1, f = 1, k = 2, l = 3, m = 5$ .

El sistema queda: 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Claramente  $\text{rango}(A) = 2$  (las dos primeras filas son linealmente independientes). Por tanto,  $\text{rango}(A) = \text{rango}([A|b]) = 2 = \text{número de incógnitas}$ , lo que garantiza una única solución.

c) Infinitas soluciones

**Solución:** Para que el sistema tenga infinitas soluciones, debe ser consistente y el rango de la matriz de coeficientes debe ser menor que el número de incógnitas. Como tenemos 2 incógnitas, necesitamos  $\text{rango}(A) < 2$ , es decir,  $\text{rango}(A) = 1$ . Consideremos el ejemplo:  $a = 1, b = 2, c = 2, d = 4, e = -1, f = -2, k = 3, l = 6, m = -3$ .

El sistema queda: 
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Observamos que: La segunda fila es el doble de la primera y la tercera fila es el negativo de la primera, por tanto,  $\text{rango}(A) = 1$ .

La matriz aumentada es:  $[A|b] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ .

Aplicando operaciones elementales:  $f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2: (0, 0, 0)$  y  $f_3 + f_1 \rightarrow f_3: (0, 0, 0)$

Como no obtenemos inconsistencias,  $\text{rango}([A|b]) = 1 = \text{rango}(A)$ .

Dado que  $\text{rango}(A) = 1 < 2$  (número de incógnitas), el sistema tiene infinitas soluciones. La solución general es:  $x = 3 - 2t, y = t$  donde  $t \in \mathbb{R}$ .

**Problema 5.26.** Encuentre tres números reales tales que su suma sea 12, la suma de dos veces el primero más el segundo más el tercero sea 5 y que el tercer número es uno más que el primero.

**Solución:** Sean  $x, y, z$  los tres números reales que buscamos. Según las condiciones del problema, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

De "su suma sea 12":  $x + y + z = 12$  (1)

De "la suma de dos veces el primero más el segundo más el tercero sea 5":  $2x + y + z = 5$  (2)

De "el tercer número es uno más que el primero":  $z = x + 1 \Rightarrow x - z = -1$  (3)

Reescribimos el sistema en forma matricial: 
$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + y + z = 5 \\ x + 0y - z = -1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Aplicando la Regla de Cramer:**

Primero calculamos el determinante de  $A$ :  $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$

Como  $\det(A) = 1 \neq 0$ , el sistema tiene solución única.

Para encontrar  $x$ , calculamos  $\det(A_1)$  reemplazando la primera columna por el vector de términos

independientes:  $A_1 = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $\det(A_1) = -7$ .

Por tanto:  $x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-7}{1} = -7$

Para encontrar  $y$ , calculamos  $\det(A_2)$ :  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $\det(A_y) = 25$ .

Por tanto:  $y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{25}{1} = 25$

Para encontrar  $z$ , calculamos  $\det(A_3)$ :  $A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $\det(A_z) = -6$ .

Por tanto:  $z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-6}{1} = -6$

Los tres números reales son:  $x = -7, \quad y = 25, \quad z = -6$ .

**Problema 5.27.** Una artesana teje tres tipos de abrigos. El primer tipo de abrigo requiere 6 metros de hilo rojo, 2 metros de hilo negro y 8 metros de hilo blanco. Los tipos segundo y tercero requieren 4, 3, 7 y 8, 2, 10 metros respectivamente. Si en cada pedido de materiales la artesana dispone de 400 metros de hilo rojo, 150 metros de hilo negro y 550 metros de hilo blanco:

- (a) Calcule el número de todos los diferentes tipos de abrigos que podrá tejer si usa todos los materiales de que dispone. De sentido a la soluciones del sistema de acuerdo al contexto y exprese las soluciones en forma paramétrica.
- (b) La artesana observó que el tercer tipo de abrigo se vende mejor, si prioriza la producción de este tipo de abrigo, ¿cuántos abrigos de cada tipo podrá tejer usando todo el material?

**Solución:** Note que la información disponible es posible organizarla en la siguiente tabla:

Tipo de abrigo	Hilo rojo	Hilo negro	Hilo blanco
A	6	2	8
B	4	3	7
C	8	2	10

Cuadro 5.1: Cantidad de hilo (m) de acuerdo a cada tipo de abrigo

Esta información permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 6A + 4B + 8C &= 400 \\ 2A + 3B + 2C &= 150 \\ 8A + 7B + 10C &= 550 \end{cases}$$

Se usará el método de eliminación gaussiana para resolverlo:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 & | & 400 \\ 2 & 3 & 2 & | & 150 \\ 8 & 7 & 10 & | & 550 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -\frac{1}{3}f_1 + f_2 \rightarrow f_2 \\ -\frac{2}{3}f_1 + f_3 \rightarrow f_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 & | & 400 \\ 0 & 5/3 & -2/3 & | & 50/3 \\ 0 & 5/3 & -2/3 & | & 50/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2 + f_3 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} \boxed{6} & 4 & 8 & | & 400 \\ 0 & \boxed{5/3} & -2/3 & | & 50/3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

**Parte (a): Solución general del sistema**  
Del sistema escalonado obtenemos:

- De la segunda fila:  $\frac{5}{3}B - \frac{2}{3}C = \frac{50}{3}$
- Despejando  $B$ :  $B = 10 + \frac{2}{5}C$
- De la primera fila:  $6A + 4B + 8C = 400$
- Sustituyendo  $B$ :  $6A + 4(10 + \frac{2}{5}C) + 8C = 400$
- Simplificando:  $6A + 40 + \frac{8}{5}C + 8C = 400$
- $6A + 40 + \frac{48}{5}C = 400$
- Despejando  $A$ :  $A = 60 - \frac{8}{5}C$

Las soluciones paramétricas del sistema son:  $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 - \frac{8}{5}C \\ 10 + \frac{2}{5}C \\ C \end{pmatrix}$  donde  $C$  es el parámetro libre.

**Restricciones del contexto:**

Como se trata de cantidades de abrigo, todas las variables deben ser enteras no negativas, así:

- $A \geq 0 \Rightarrow 60 - \frac{8}{5}C \geq 0 \Rightarrow C \leq 37,5$
- $B \geq 0 \Rightarrow 10 + \frac{2}{5}C \geq 0$  (siempre se cumple para  $C \geq 0$ )
- $C \geq 0$

Además, para que  $A$  y  $B$  sean enteros, necesitamos que  $\frac{8}{5}C$  y  $\frac{2}{5}C$  sean enteros, lo que requiere que  $C$  sea múltiplo de 5. Por tanto,  $C \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$ .

Las posibles combinaciones son:

- $C = 0$ :  $(A, B, C) = (60, 10, 0)$
- $C = 5$ :  $(A, B, C) = (52, 12, 5)$
- $C = 10$ :  $(A, B, C) = (44, 14, 10)$
- $C = 15$ :  $(A, B, C) = (36, 16, 15)$
- $C = 20$ :  $(A, B, C) = (28, 18, 20)$
- $C = 25$ :  $(A, B, C) = (20, 20, 25)$
- $C = 30$ :  $(A, B, C) = (12, 22, 30)$
- $C = 35$ :  $(A, B, C) = (4, 24, 35)$

**Parte (b): Maximizando la producción del tipo C**

Si se prioriza el tercer tipo de abrigo, se debe maximizar  $C$ . El valor máximo posible es  $C = 35$ .

Para  $C = 35$ : se tiene que  $A = 60 - \frac{8}{5}(35) = 60 - 56 = 4$ ,  $B = 10 + \frac{2}{5}(35) = 10 + 14 = 24$  y  $C = 35$ . Por tanto, si la artesana prioriza el tercer tipo de abrigo, podrá tejer: 4 abrigos del tipo A, 24 abrigos del tipo B y 35 abrigos del tipo C.

**Problema 5.28.** Según mediciones meteorológicas realizadas en el Aeropuerto Internacional Palonegro en Bucaramanga, durante los días 1 de abril, 11 de abril y 21 de abril de 2023, el sol salió a las 5:50 a.m., 5:46 a.m. y 5:41 a.m., respectivamente.

Para modelar estos datos, se utiliza un sistema de coordenadas donde el eje  $x$  representa el día del año y el eje  $y$  representa los minutos transcurridos desde la medianoche hasta la salida del sol. Considerando que:

- El 1 de abril corresponde al día 91 del año 2023
- El 11 de abril corresponde al día 101 del año 2023
- El 21 de abril corresponde al día 111 del año 2023

Los datos se pueden representar como los puntos  $(91, 350)$ ,  $(101, 346)$  y  $(111, 341)$ .

Una técnica estadística para determinar valores futuros consiste en interpolar estos puntos mediante un polinomio de grado apropiado. Calcule el polinomio que interpola los puntos dados y determine una estimación para la hora en la que saldrá el sol el 1 de mayo de 2023 (día 121 del año).

**Solución:** Primero, verifiquemos la correspondencia entre los datos y los puntos:

- 1 de abril de 2023: Día 91 del año, sol sale a las 5:50 a.m. Los minutos desde medianoche son  $5 \times 60 + 50 = 350$  y así el punto  $(91, 350)$ .
- 11 de abril de 2023: Día 101 del año, sol sale a las 5:46 a.m. Los minutos desde medianoche son  $5 \times 60 + 46 = 346$  minutos y así el punto  $(101, 346)$ .
- 21 de abril de 2023: Día 111 del año, sol sale a las 5:41 a.m. Los minutos desde medianoche son  $5 \times 60 + 41 = 341$  minutos y el punto es  $(111, 341)$ .

**Interpolación polinomial:**

Para tres puntos, buscamos un polinomio de grado 2:  $P(x) = ax^2 + bx + c$

Sustituyendo los puntos en el polinomio:

$$\begin{cases} P(91) = a(91)^2 + b(91) + c = 350 & (1) \\ P(101) = a(101)^2 + b(101) + c = 346 & (2) \\ P(111) = a(111)^2 + b(111) + c = 341 & (3) \end{cases} = \begin{cases} 8281a + 91b + c = 350 \\ 10201a + 101b + c = 346 \\ 12321a + 111b + c = 341 \end{cases}.$$

**Solución usando regla de Cramer:** La matriz de coeficientes es  $A = \begin{pmatrix} 8281 & 91 & 1 \\ 10201 & 101 & 1 \\ 12321 & 111 & 1 \end{pmatrix}$  mientras

que el vector de términos independientes es  $B = \begin{pmatrix} 350 \\ 346 \\ 341 \end{pmatrix}$ .

**Paso 1:** Calcular  $\det(A) = -2000$ .

**Paso 2:**  $A_1 = \begin{pmatrix} 350 & 91 & 1 \\ 346 & 101 & 1 \\ 341 & 111 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\det(A_1) = 10$ .

**Paso 3:**  $A_2 = \begin{pmatrix} 8281 & 350 & 1 \\ 10201 & 346 & 1 \\ 12321 & 341 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\det(A_2) = -1120$ .

**Paso 4:**  $A_3 = \begin{pmatrix} 8281 & 91 & 350 \\ 10201 & 101 & 346 \\ 12321 & 111 & 341 \end{pmatrix}$  y  $\det(A_3) = -680890$

**Solución:**

$$\begin{aligned} a &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{10}{-2000} = -\frac{1}{200} \\ b &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-1120}{-2000} = \frac{14}{25} \\ c &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-680890}{-2000} = \frac{68089}{200} \end{aligned}$$

Polinomio interpolador:

$$P(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{14}{25}x + \frac{68089}{200}$$

**Estimación para el 1 de mayo de 2023:** El 1 de mayo de 2023 es el día 121 del año.

$$P(121) = 335 \text{ minutos} = 5 \text{ horas } 35 \text{ minutos}$$

**Conclusión:** El polinomio interpolador es  $P(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{14}{25}x + \frac{68089}{200}$ , y según este modelo, el sol saldrá el 1 de mayo de 2023 a las **5:35 a.m.**

**Problema 5.29.** Encuentre la matriz  $X$  tal que la igualdad se cumpla  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Sea  $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$  la matriz incógnita.

Sustituyendo en la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos cada producto matricial:

$$\begin{pmatrix} 3x_{11} + x_{21} & 3x_{12} + x_{22} \\ -x_{11} + 2x_{21} & -x_{12} + 2x_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & 4x_{11} \\ x_{21} + 2x_{22} & 4x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Realizando la resta:

$$\begin{pmatrix} 2x_{11} - x_{21} & 3x_{12} + x_{22} - 4x_{11} \\ -x_{11} + x_{21} - 2x_{22} & -x_{12} + 2x_{22} - 4x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Simplificando:

$$\begin{pmatrix} 2x_{11} - x_{21} & -4x_{11} + 3x_{12} + x_{22} \\ -x_{11} + x_{21} - 2x_{22} & -x_{12} - 4x_{21} + 2x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Esto nos da el sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_{11} - x_{21} & = 2 \\ -4x_{11} + 3x_{12} + x_{22} & = -2 \\ -x_{11} + x_{21} - 2x_{22} & = 5 \\ -x_{12} - 4x_{21} + 2x_{22} & = 4 \end{cases}$$

Resolvemos usando eliminación gaussiana. La matriz aumentada es:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

**Paso 1:**  $f_1 \leftrightarrow f_3$  (para simplificar):

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

**Paso 2:**  $-4f_1 + f_2 \rightarrow f_2$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & 9 & -22 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

**Paso 3:**  $2f_1 + f_3 \rightarrow f_3$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & 9 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

**Paso 4:**  $\frac{1}{3}f_2 + f_4 \rightarrow f_4$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & 9 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} & 5 & -\frac{10}{3} \end{array} \right).$$

**Paso 5:**  $\frac{16}{3}f_3 + f_4 \rightarrow f_4$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & 9 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{3} & \frac{154}{3} \end{array} \right).$$

**Paso 6:** Sustitución hacia atrás:

De la cuarta fila:  $-\frac{49}{3}x_{22} = \frac{154}{3} \Rightarrow x_{22} = -\frac{154}{49} = -\frac{22}{7}$

De la tercera fila:  $x_{21} - 4x_{22} = 12 \Rightarrow x_{21} = 12 + 4(-\frac{22}{7}) = 12 - \frac{88}{7} = \frac{84 - 88}{7} = -\frac{4}{7}$

De la segunda fila:  $3x_{12} - 4x_{21} + 9x_{22} = -22 \Rightarrow 3x_{12} + \frac{16}{7} - \frac{198}{7} = -22$ .



$$3x_{12} = -22 + \frac{182}{7} = -22 + 26 = 4 \Rightarrow x_{12} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{De la primera fila: } -x_{11} + x_{21} - 2x_{22} = 5 \Rightarrow -x_{11} + \left(-\frac{4}{7}\right) - 2\left(-\frac{22}{7}\right) = 5.$$

$$-x_{11} + \frac{40}{7} = 5 \Rightarrow x_{11} = \frac{40}{7} - 5 = \frac{40 - 35}{7} = \frac{5}{7}.$$

$$\text{Por lo tanto: } X = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{7} & \frac{22}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

**Problema 5.30.** Suponga que una cierta dieta requiere 7 unidades de grasa, 9 unidades de proteína y 16 unidades de carbohidratos para la comida principal, y que una persona tiene tres alimentos posibles para elegir y cumplir con estos requisitos:

*Alimento 1:* Cada onza contiene 2 unidades de grasa, 2 de proteína y 4 de carbohidratos.

*Alimento 2:* Cada onza contiene 3 unidades de grasa, 1 de proteína y 2 de carbohidratos.

*Alimento 3:* Cada onza contiene 1 unidad de grasa, 3 de proteína y 5 de carbohidratos.

Sean  $x$ ,  $y$  y  $z$  las cantidades en onzas del primer, segundo y tercer alimento que la persona consumirá en la comida principal. Determine un sistema de ecuaciones lineales en términos de  $x$ ,  $y$  y  $z$  cuya solución indique cuántas onzas de cada alimento deben consumirse para cumplir con los requisitos de la dieta.

**Solución:** Para establecer el sistema de ecuaciones, consideramos que:

- $x$  = onzas del alimento 1
- $y$  = onzas del alimento 2
- $z$  = onzas del alimento 3

Analizando los requisitos nutricionales:

**Grasa:** El alimento 1 aporta 2 unidades por onza, el alimento 2 aporta 3 unidades por onza, y el alimento 3 aporta 1 unidad por onza. Para obtener 7 unidades totales:  $2x + 3y + z = 7$ .

**Proteína:** El alimento 1 aporta 2 unidades por onza, el alimento 2 aporta 1 unidad por onza, y el alimento 3 aporta 3 unidades por onza. Para obtener 9 unidades totales:  $2x + y + 3z = 9$ .

**Carbohidratos:** El alimento 1 aporta 4 unidades por onza, el alimento 2 aporta 2 unidades por onza, y el alimento 3 aporta 5 unidades por onza. Para obtener 16 unidades totales:  $4x + 2y + 5z = 16$ .

$$\text{El sistema de ecuaciones lineales es: } \begin{cases} 2x + 3y + z &= 7 \\ 2x + y + 3z &= 9 \\ 4x + 2y + 5z &= 16 \end{cases}$$

$$\text{Resolvemos usando eliminación gaussiana. La matriz aumentada es: } \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 5 & 16 \end{array} \right)$$

$$\text{Paso 1: } -f_1 + f_2 \rightarrow f_2 : \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 16 \end{array} \right)$$

$$\text{Paso 2: } -2f_1 + f_3 \rightarrow f_3 : \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{Paso 3: } -2f_2 + f_3 \rightarrow f_3 : \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

**Paso 4:** Sustitución hacia atrás:

De la tercera fila:  $-z = -2 \Rightarrow z = 2$ .

De la segunda fila:  $-2y + 2z = 2 \Rightarrow y = 1$ .

De la primera fila:  $2x + 3y + z = 7 \Rightarrow x = 1$ .

Por lo tanto, la solución es: 
$$\begin{cases} x &= 1 \text{ onza del alimento 1} \\ y &= 1 \text{ onza del alimento 2} \\ z &= 2 \text{ onzas del alimento 3} \end{cases}$$

La persona debe consumir 1 onza del alimento 1, 1 onza del alimento 2, y 2 onzas del alimento 3 para cumplir exactamente con los requisitos de la dieta.

**Problema 5.31.** Una alcancía tiene monedas de tres denominaciones diferentes. Con 8 monedas de la primera denominación más 23 monedas de la segunda denominación, más 17 monedas de la tercera denominación se completarían \$23.300. Además, tener 10 monedas de la primera denominación, más 10 monedas de la segunda denominación sería lo mismo que tener 6 monedas de la tercera denominación, mientras que tener 10 monedas de la segunda denominación más 5 monedas de la tercera denominación sería lo mismo que tener 12 monedas de la primera denominación. ¿Cuáles son las denominaciones de las monedas que contiene la alcancía?

**Solución:** Sean  $x$ ,  $y$ , y  $z$  las denominaciones de la primera, segunda y tercera moneda respectivamente, expresadas en pesos. Del enunciado del problema, podemos establecer el siguiente sistema

de ecuaciones: 
$$\begin{cases} 8x + 23y + 17z &= 23300 \\ 10x + 10y - 6z &= 0 \\ -12x + 10y + 5z &= 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema usando eliminación gaussiana. La matriz aumentada es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 23 & 17 & 23300 \\ 10 & 10 & -6 & 0 \\ -12 & 10 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$f_1 \leftrightarrow f_2 :$  
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & -6 & 0 \\ 8 & 23 & 17 & 23300 \\ -12 & 10 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$-\frac{4}{5}f_1 + f_2 \rightarrow f_2 :$  
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & -6 & 0 \\ 0 & 15 & \frac{109}{5} & 23300 \\ -12 & 10 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$\frac{6}{5}f_1 + f_3 \rightarrow f_3 :$  
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & -6 & 0 \\ 0 & 15 & \frac{109}{5} & 23300 \\ 0 & 22 & -\frac{11}{5} & 0 \end{array} \right)$$

$-\frac{22}{15}f_2 + f_3 \rightarrow f_3 :$  
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & -6 & 0 \\ 0 & 15 & \frac{109}{5} & 23300 \\ 0 & 0 & -\frac{233}{5} & -\frac{116500}{3} \end{array} \right)$$

**Paso 5:** Sustitución hacia atrás:

De la tercera fila:  $-\frac{233}{5}z = -\frac{116500}{3} \implies z = \frac{116500}{3} \cdot \frac{5}{233} = \frac{116500 \cdot 5}{3 \cdot 233} = \frac{500 \cdot 5}{3} \cdot 3 = 1000$

De la segunda fila:  $15y + \frac{109}{5}z = 23300 \implies 15y + \frac{109}{5}(1000) = 23300 \implies 15y + 21800 = 23300 \implies 15y = 1500 \implies y = 100$

De la primera fila:  $10x + 10y - 6z = 0 \implies 10x + 10(100) - 6(1000) = 0 \implies 10x + 1000 - 6000 = 0 \implies 10x = 5000 \implies x = 500$

Por lo tanto: 
$$\begin{cases} x &= 500 \text{ pesos} \\ y &= 100 \text{ pesos} \\ z &= 1000 \text{ pesos} \end{cases}$$

Por tanto, las denominaciones de las monedas son \$500, \$100 y \$1000.

**Problema 5.32.** Un número de dos dígitos tiene dos propiedades: la suma de los dígitos es 11 y si el número se escribe con sus dígitos al revés y se restan del número original, el resultado es 45. Encuentre el número. *Sugerencia:* Recuerde que si un número es de dos dígitos  $AB$ , puede escribirse como  $10A + B$ , por ejemplo,  $53 = 5(10) + 3$ .

**Solución:** Sea el número de dos dígitos  $AB$ , donde  $A$  representa el dígito de las decenas y  $B$  representa el dígito de las unidades.

Según la sugerencia, el número puede escribirse como  $10A + B$ .

El número con los dígitos al revés es  $BA$ , que puede escribirse como  $10B + A$ .

De las condiciones del problema, establecemos las siguientes ecuaciones:

**Condición 1:** La suma de los dígitos es 11:  $A + B = 11$ .

**Condición 2:** Si restamos el número invertido del número original, el resultado es 45:  $(10A + B) - (10B + A) = 45$ . Simplificando la segunda ecuación:  $A - B = 5$ .

Ahora tenemos el sistema de ecuaciones lineales: 
$$\begin{cases} A + B = 11 \\ A - B = 5 \end{cases}$$

Resolvemos usando eliminación gaussiana. La matriz aumentada es: 
$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 5 \end{array} \right).$$

**Paso 1:**  $-f_1 + f_2 \rightarrow f_2 : \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 11 \\ 0 & -2 & -6 \end{array} \right).$

**Paso 2:** Sustitución hacia atrás:

De la segunda fila:  $-2B = -6 \Rightarrow B = 3$ .

De la primera fila:  $A + B = 11 \Rightarrow A = 8$ .

Por lo tanto el número de dos dígitos es  $AB = 83$ .

**Problema 5.33.** Encuentre  $a, b, c, d$  para que la matriz 
$$\begin{pmatrix} 0 & 2a - 3b + c & 3a - 5b + 5c \\ -2 & 0 & 5a - 8b + c \\ -3 & -5 & d \end{pmatrix}$$
 sea antisimétrica

**Solución:** Una matriz  $M$  es antisimétrica si  $M^T = -M$ , es decir,  $m_{ij} = -m_{ji}$  para todos los índices  $i, j$ .

Para la matriz dada aplicando la condición de antisimetría:

$m_{12} = -m_{21}$ :  $2a - 3b + c = -(-2) = 2$ ,

$m_{13} = -m_{31}$ :  $3a - 5b + 5c = -(-3) = 3$ ,

$m_{23} = -m_{32}$ :  $5a - 8b + c = -(-5) = 5$ ,

$m_{33} = -m_{33}$ :  $d = -d$ , por lo tanto  $d = 0$ .

Resolvemos el sistema usando eliminación gaussiana: 
$$\begin{cases} 2a - 3b + c = 2 \\ 3a - 5b + 5c = 3 \\ 5a - 8b + c = 5 \end{cases}$$

Matriz aumentada: 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 5 & 3 \\ 5 & -8 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$-\frac{3}{2}f_1 + f_2 \rightarrow f_2$ : 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 5 & -8 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

$-\frac{5}{2}f_1 + f_3 \rightarrow f_3$ : 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right).$$

$-f_2 + f_3 \rightarrow f_3$ : 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right).$$

Sustitución hacia atrás:  $c = 0, b = 0, a = 1$

Por tanto:  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$ .

**Problema 5.34.** ¿Cuáles deben ser los coeficientes  $a, b, c$  para que el sistema 
$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + cz = -1 \\ ax + 3y - cz = -3 \end{cases}$$

tenga soluciones  $x = 1, y = -1$  y  $z = 2$ ?

**Solución:** Sustituimos  $x = 1, y = -1, z = 2$  en cada ecuación:

Ecuación 1:  $a(1) + b(-1) - 3(2) = -3 \Rightarrow a - b = 3.$

Ecuación 2:  $-2(1) - b(-1) + c(2) = -1 \Rightarrow b + 2c = 1.$

Ecuación 3:  $a(1) + 3(-1) - c(2) = -3 \Rightarrow a - 2c = 0.$

Sistema de ecuaciones: 
$$\begin{cases} a - b &= 3 \\ b + 2c &= 1 \\ a - 2c &= 0 \end{cases}$$

Matriz aumentada: 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$-f_1 + f_3 \rightarrow f_3$ : 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

$-f_2 + f_3 \rightarrow f_3$ : 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

Sustitución hacia atrás:  $c = 1, b = -1, a = 2$

Por tanto:  $a = 2, b = -1, c = 1.$

**Problema 5.35.** Sea  $A$  la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales  $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= -1. \end{cases}$

- a) Resuelva el sistema calculando la matriz inversa  $A^{-1}$ .
- b) Si  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  es la solución del sistema obtenida en la parte a) calcule y simplifique  $A^{2017}\mathbf{x}$ .

**Solución:** a) La matriz de coeficientes es:  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Para encontrar  $A^{-1}$ , usamos la matriz aumentada  $(A|I)$ :  $\left( \begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right).$

$2f_1 + f_2 \rightarrow f_2$ :  $\left( \begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right).$

$-2f_2 + f_1 \rightarrow f_1$ :  $\left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$

$-f_1 \rightarrow f_1$  y  $-f_2 \rightarrow f_2$ :  $\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$

Por tanto:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

La solución del sistema es:  $\mathbf{x} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Como  $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , tenemos:  $A^{2017}\mathbf{x} = A^{2016}(A\mathbf{x}) = A^{2016} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Continuando este proceso:  $A^{2017}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Por tanto:  $A^{2017}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

**Problema 5.36.** Dado el sistema de ecuaciones lineales  $\begin{cases} x + y + \alpha z &= 0 \\ x + y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + z &= 0 \end{cases}$  use la matriz de coeficientes del sistema para justificar por qué tiene soluciones infinitas si  $\alpha = \beta$ .

**Solución:** La matriz de coeficientes es:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix}$ .

Cuando  $\alpha = \beta$ , la matriz se convierte en:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ .

Aplicando eliminación gaussiana,  $-f_1 + f_2 \rightarrow f_2$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ .

$-\alpha f_1 + f_3 \rightarrow f_3$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha^2 \end{pmatrix}$ .

Si  $\alpha \neq \pm 1$ , entonces  $1 - \alpha^2 \neq 0$  y el rango de  $A$  es 2. Si  $\alpha = \pm 1$ , entonces el rango de  $A$  es 1.

En ambos casos, el rango de  $A$  es menor que 3 (número de variables), por lo que el sistema homogéneo tiene soluciones no triviales infinitas cuando  $\alpha = \beta$ .

**Problema 5.37.** Considere el triángulo en la figura 5.6

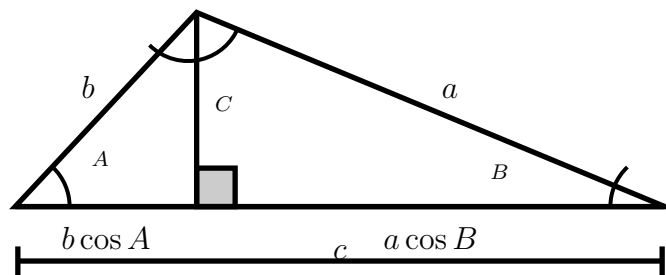


Figura 5.6: Triángulo del problema

- (a) Demuestre usando trigonometría elemental que 
$$\begin{cases} c \cos A + a \cos C = b \\ b \cos A + a \cos B = c \\ c \cos B + b \cos C = a \end{cases}$$
- (b) Si se piensa que el sistema del inciso (a) es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,  $\cos A$ ,  $\cos B$  y  $\cos C$ , demuestre que el determinante del sistema es diferente de cero.
- (c) Use la regla de Cramer para despejar  $\cos C$ .
- (d) Utilice el inciso (c) para probar la **ley de cosenos**:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .

**Solución:** (a) Para cada lado del triángulo, podemos expresarlo como la suma de las proyecciones de los otros dos lados sobre él.

**Primera ecuación:**  $c \cos A + a \cos C = b$ ,

El lado  $b$  (lado  $AC$ ) puede descomponerse considerando las proyecciones del lado  $c$  sobre  $b$  la cual es  $c \cos A$  y la proyección del lado  $a$  sobre  $b$ , que es  $a \cos C$ . Por tanto:  $b = c \cos A + a \cos C$ .

**Segunda ecuación:**  $b \cos A + a \cos B = c$ .

El lado  $c$  (lado  $AB$ ) puede descomponerse considerando las proyecciones del lado  $b$  sobre  $c$  que es  $b \cos A$  y la proyección del lado  $a$  sobre  $c$  que es  $a \cos B$ . Por tanto:  $c = b \cos A + a \cos B$ .

**Tercera ecuación:**  $c \cos B + b \cos C = a$ .

El lado  $a$  (lado  $BC$ ) puede descomponerse considerando las proyecciones del lado  $c$  sobre  $a$  que es  $c \cos B$  y la proyección del lado  $b$  sobre  $a$  que es  $b \cos C$ . Por tanto:  $a = c \cos B + b \cos C$

(b) El sistema se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} c & 0 & a \\ b & a & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos A \\ \cos B \\ \cos C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} c & 0 & a \\ b & a & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix} &= c \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} - 0 + a \det \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= c(ab - 0) + a(bc - 0) \\ &= abc + abc \\ &= 2abc\end{aligned}$$

Como  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son las longitudes de los lados de un triángulo, son todas positivas, por lo que  $2abc > 0$ . Por tanto, el determinante es diferente de cero.

(c) Aplicación de la regla de Cramer para despejar  $\cos C$ :

Por la regla de Cramer:  $\cos C = \frac{\det A_3}{\det A}$ , donde  $A_3$  es la matriz obtenida reemplazando la tercera

columna por el vector de términos independientes:  $A_3 = \begin{pmatrix} c & 0 & b \\ b & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$

Calculamos  $\det A_3$ :

$$\begin{aligned}\det A_3 &= c \det \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix} - 0 + b \det \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= c(a^2 - c^2) + b(bc - 0) \\ &= c(a^2 - c^2) + b^2c \\ &= ca^2 - c^3 + b^2c \\ &= c(a^2 + b^2 - c^2)\end{aligned}$$

Por tanto:  $\cos C = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ .

(d) Demostración de la ley de cosenos:

Del inciso (c) tenemos:  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ .

Multiplicando ambos lados por  $2ab$ :  $2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$ .

Reordenando términos:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ . Esta es precisamente la **ley de cosenos**.

**Problema 5.38.** La tabla 5.2 muestra la fuerza necesaria para levantar el ala de un avión medida usando la velocidad de despegue en un túnel del viento. Construya un polinomio de grado cinco que interpole los datos y estime la fuerza a los 2000 ft/s.

Velocidad (100 ft/s)	1	2	4	8	16	32
Fuerza de despegue (100 lb)	0	3,12	15,86	33,7	81,5	123,0

Cuadro 5.2: Fuerza para levantar el ala de un avión

**Solución:** Sea  $P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  el polinomio interpolador.

Los puntos de interpolación son:  $(1, 0)$ ,  $(2, 3,12)$ ,  $(4, 15,86)$ ,  $(8, 33,7)$ ,  $(16, 81,5)$ ,  $(32, 123,0)$ .

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 1048576 & 65536 & 4096 & 256 & 16 & 1 \\ 33554432 & 1048576 & 32768 & 1024 & 32 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3,12 \\ 15,86 \\ 33,7 \\ 81,5 \\ 123,0 \end{pmatrix}$$

**Matriz aumentada inicial:** 
$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 3,12 \\ 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 & 15,86 \\ 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 & 33,7 \\ 1048576 & 65536 & 4096 & 256 & 16 & 1 & 81,5 \\ 33554432 & 1048576 & 32768 & 1024 & 32 & 1 & 123,0 \end{array} \right)$$

Aplicando eliminación gaussiana completa, la **matriz final en forma escalonada reducida** es:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,000245 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0234 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,891 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -16,85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 153,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -137,4 \end{array} \right)$$

De esta matriz final obtenemos:

$$P(x) = 0,000245x^5 - 0,0234x^4 + 0,891x^3 - 16,85x^2 + 153,2x - 137,4$$

Para estimar la fuerza a  $2000 \text{ ft/s} = 20 \times 100 \text{ ft/s}$ :

$$\begin{aligned} P(20) &= 0,000245(20)^5 - 0,0234(20)^4 + 0,891(20)^3 - 16,85(20)^2 + 153,2(20) - 137,4 \\ &= 78,4 - 374,4 + 7128 - 6740 + 3064 - 137,4 = 3018,6 \end{aligned}$$

Por tanto, la fuerza estimada es aproximadamente 301,860 lb.

**Problema 5.39.** Calcule una ecuación que represente la familia de todos los polinomios de grado 2 que pasen por los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 2)$ . Esto generará un sistema de ecuaciones que tiene infinitas soluciones, determine una forma paramétrica de esta solución y grafique 4 curvas que cumplan esta condición.

**Solución:** Sea  $P(x) = ax^2 + bx + c$  un polinomio de grado 2. Las condiciones son:  $P(0) = 1 \Rightarrow c = 1$  y  $P(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$ .

Sustituyendo  $c = 1$  en la segunda ecuación:  $a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1$ .

El sistema de ecuaciones es: 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando eliminación gaussiana a la matriz aumentada: 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

$$f_1 \leftrightarrow f_2: \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$f_1 - f_2 \rightarrow f_1: \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

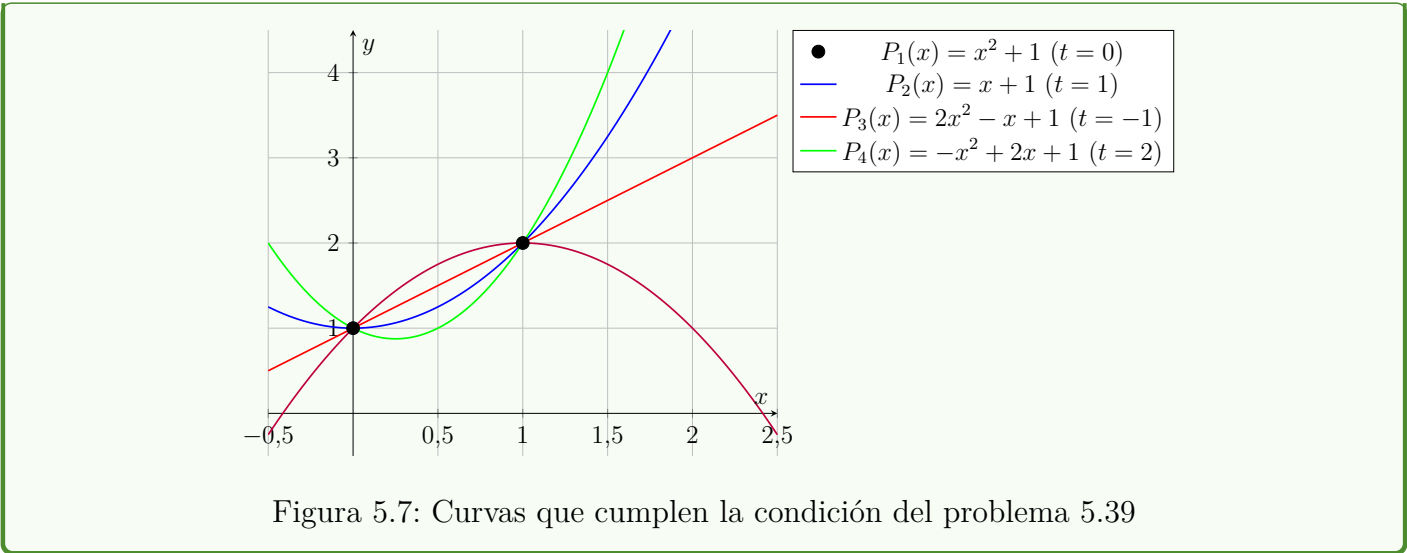
De la forma escalonada reducida obtenemos:  $a + b = 1$  y  $c = 1$ .

Tomando  $b = t$  como parámetro libre, la solución paramétrica es: 
$$\begin{cases} a = 1 - t \\ b = t \\ c = 1 \end{cases}$$

Por tanto, la familia de polinomios es:  $P(x) = (1 - t)x^2 + tx + 1, \quad t \in \mathbb{R}.$

Cuatro ejemplos específicos:

- $t = 0: P_1(x) = x^2 + 1$
- $t = 1: P_2(x) = x + 1$
- $t = -1: P_3(x) = 2x^2 - x + 1$
- $t = 2: P_4(x) = -x^2 + 2x + 1$



**Problema 5.40.** Encuentre los valores de  $A, B, C$  y  $D$  para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x + 1}$$

**Solución:** Primero, note que  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ , por lo que la ecuación se convierte en:

$$\frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x + 1}$$

Para encontrar los valores de  $A, B, C$  y  $D$ , multiplicamos ambos lados por el denominador común  $(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$ :

$$3x^3 + 4x^2 - 6x = (Ax + B)(x - 1)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 2)(x + 1) + D(x^2 + 2x + 2)(x - 1)$$

Expandamos cada término del lado derecho:  
**Primer término:**  $(Ax + B)(x - 1)(x + 1) = (Ax + B)(x^2 - 1) = Ax^3 - Ax + Bx^2 - B$   
**Segundo término:**  $C(x^2 + 2x + 2)(x + 1) = C(x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 2x + 2) = C(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)$   
**Tercer término:**  $D(x^2 + 2x + 2)(x - 1) = D(x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + 2x - 2) = D(x^3 + x^2 - 2)$   
Combinando todos los términos:

$$\begin{aligned} 3x^3 + 4x^2 - 6x &= Ax^3 - Ax + Bx^2 - B + C(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) + D(x^3 + x^2 - 2) \\ &= Ax^3 + Bx^2 - Ax - B + Cx^3 + 3Cx^2 + 4Cx + 2C + Dx^3 + Dx^2 - 2D \end{aligned}$$

Agrupando por potencias de  $x$ :

$$3x^3 + 4x^2 - 6x = (A + C + D)x^3 + (B + 3C + D)x^2 + (-A + 4C)x + (-B + 2C - 2D)$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de } x^3 : \quad & A + C + D = 3 \quad (1) \\ \text{Coeficiente de } x^2 : \quad & B + 3C + D = 4 \quad (2) \\ \text{Coeficiente de } x^1 : \quad & -A + 4C = -6 \quad (3) \\ \text{Término constante :} \quad & -B + 2C - 2D = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Resolvamos este sistema de ecuaciones usando eliminación gaussiana:

Reordenemos el sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} A + 0B + C + D &= 3 & (1) \\ 0A + B + 3C + D &= 4 & (2) \\ -A + 0B + 4C + 0D &= -6 & (3) \\ 0A - B + 2C - 2D &= 0 & (4) \end{cases}$$



Matriz aumentada inicial:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Paso 1:  $f_1 + f_3 \rightarrow f_3$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Paso 2:  $f_2 + f_4 \rightarrow f_4$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

Paso 3:  $f_3 - f_4 \rightarrow f_4$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7 \end{array} \right)$$

Sustitución hacia atrás:

- De la fila 4:  $2D = -7 \Rightarrow D = -\frac{7}{2}$
- De la fila 3:  $5C + D = -3 \Rightarrow 5C + \left(-\frac{7}{2}\right) = -3 \Rightarrow 5C = -3 + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{10}$
- De la fila 2:  $B + 3C + D = 4 \Rightarrow B + 3 \cdot \frac{1}{10} + \left(-\frac{7}{2}\right) = 4 \Rightarrow B = 4 - \frac{3}{10} + \frac{7}{2} = \frac{36}{5}$
- De la fila 1:  $A + C + D = 3 \Rightarrow A + \frac{1}{10} + \left(-\frac{7}{2}\right) = 3 \Rightarrow A = 3 - \frac{1}{10} + \frac{7}{2} = \frac{32}{5}$

Por tanto, los valores son:

$$A = \frac{32}{5}, \quad B = \frac{36}{5}, \quad C = \frac{1}{10}, \quad D = -\frac{7}{2}$$

**Problema 5.41.** La figura 5.8 muestra algunos flujos (en litros por minuto) conocidos en una refinería de petróleo

- (a) Construya un sistema de ecuaciones lineales que permita encontrar los flujos desconocidos en litros por minuto.
- (b) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales para los flujos desconocidos
- (c) ¿Qué ocurre con los flujos y su dirección si  $x_4 = 50$  l/min y  $x_6 = 0$  l/min?

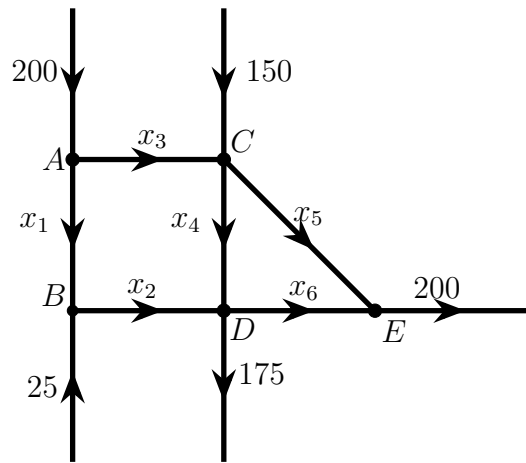


Figura 5.8: Flujos en una refinería de petróleo

**Solución:** (a) Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones lineales para hallar los flujos desconocidos. En cada nodo, todo lo que entra debe salir.

Nodo	Entrada	Salida
A	200	$x_1 + x_3$
B	$25 + x_1$	$x_2$
C	$x_3 + 150$	$x_4 + x_5$
D	$x_4 + x_2$	$x_6 + 175$
E	$x_5 + x_6$	200

Sistema de ecuaciones lineales asociado:

$$\begin{cases} 200 &= x_1 + x_3 \\ 25 + x_1 &= x_2 \\ x_3 + 150 &= x_4 + x_5 \\ x_4 + x_2 &= x_6 + 175 \\ x_5 + x_6 &= 200 \end{cases}$$

Cuadro 5.3: Flujos en cada nodo

(b) Reescribiendo el sistema en forma estándar:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 200 \\ x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= -25 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 0x_6 &= -150 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 - x_6 &= 175 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + x_6 &= 200 \end{cases}$$

La matriz aumentada inicial es:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 175 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array} \right)$$

Aplicando eliminación gaussiana:

$$f_2 - f_1 \rightarrow f_2: \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -225 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 175 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array} \right)$$

$$-f_2 \rightarrow f_2: \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 225 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 175 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array} \right)$$

$$f_4 - f_2 \rightarrow f_4: \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 225 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array} \right)$$

$$f_4 + f_3 \rightarrow f_4: \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 225 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array} \right)$$

$$f_5 + f_4 \rightarrow f_5: \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 225 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$-f_4 \rightarrow f_4: \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 225 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De la forma escalonada, las variables libres son  $x_4$  y  $x_6$ . Resolviendo:

De la ecuación 4:  $x_5 = 200 - x_6$

De la ecuación 3:  $x_3 = x_4 + x_5 - 150 = x_4 + (200 - x_6) - 150 = x_4 - x_6 + 50$

De la ecuación 2:  $x_2 = 225 - x_3 = 225 - (x_4 - x_6 + 50) = 175 - x_4 + x_6$

De la ecuación 1:  $x_1 = 200 - x_3 = 200 - (x_4 - x_6 + 50) = 150 - x_4 + x_6$

La solución paramétrica es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 - x_4 + x_6 \\ 175 - x_4 + x_6 \\ x_4 - x_6 + 50 \\ x_4 \\ 200 - x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

(c) Si  $x_4 = 50$  l/min y  $x_6 = 0$  l/min, entonces:

$$\begin{cases} x_1 = 150 - 50 + 0 = 100 \text{ l/min} \\ x_2 = 175 - 50 + 0 = 125 \text{ l/min} \\ x_3 = 50 - 0 + 50 = 100 \text{ l/min} \\ x_4 = 50 \text{ l/min} \\ x_5 = 200 - 0 = 200 \text{ l/min} \\ x_6 = 0 \text{ l/min} \end{cases}$$

Todos los flujos son positivos, por lo que conservan su dirección original mostrada en el diagrama.

5.1

Problemas propuestos para el capítulo

**Problema 5.42.** Encuentre los coeficientes  $a, b, c$  y  $d$  para que la curva  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  pase por los puntos  $(0, 10), (1, 7), (3, -11), (4, -14)$ .

**Problema 5.43.** Una compañía de construcción ofrece tres tipos de casa. El primer tipo de casa requiere 3 unidades de concreto, 2 unidades de madera para cancelería y 8 unidades de madera para estructuras. Los tipos segundo y tercero requieren 2, 3, 7 y 4, 2, 10 unidades respectivamente. Si cada mes la compañía dispone de 200 unidades de concreto, 150 de madera para cancelería y 550 unidades de madera para estructuras, calcule el número de diferentes tipos de casas que la compañía podrá construir al mes si usa todos los materiales de que dispone.

**Problema 5.44.** Utilice eliminación gaussiana o de Gauss-Jordan para resolver los sistemas de ecuaciones lineales. Si existe solución única, indíquela; si hay infinitas soluciones, identifique las variables libres y exprese el conjunto solución en forma paramétrica; si no hay solución, explique claramente la razón mediante la forma escalonada o inconsistencia detectada.

a)  $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_3 - 4x_4 = 11 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

f)  $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

g)  $\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + 10x_4 = 16 \\ -5x_1 - 20x_2 + x_3 - 17x_4 = -26 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

h)  $\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_5 = 1 \\ x_2 + 3x_3 - x_5 = 2 \\ 2x_1 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

**Problema 5.45.** Determine los valores del parámetro  $t$  para los cuales los siguientes sistemas de ecuaciones tienen solución única, infinitas soluciones, o ninguna solución, justificando cada caso mediante análisis de consistencia y rango.

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 12 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 14 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 &= 10 \\ tx_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 16 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + (t^2 - 14)x_3 &= t + 2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - (t^2 - 3)x_3 &= t \end{cases}$$

d)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & 4 & t \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

e)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & t & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 7 & 4 \end{array} \right)$$

f)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & t & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

**Problema 5.46.** Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones, si la afirmación es verdadera, proporcione una demostración, en caso contrario, proporcione un contraejemplo.

- a) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es consistente.
- b) Sin importar el valor de  $k$ , el siguiente sistema de ecuaciones  $\begin{cases} 5x - 5y = 3 \\ 7x - 7y = k \end{cases}$  no puede tener solución única.
- c) Si cada ecuación de un sistema de ecuaciones lineales consistente se multiplica por una constante  $C$  no nula, entonces todas las soluciones del nuevo sistema pueden obtenerse multiplicando las soluciones originales por  $C$ .
- d) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene matriz aumentada  $\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$  es consistente
- e) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más ecuaciones que incógnitas, tiene infinitas soluciones.

**Problema 5.47.** Demuestre que si  $ad - bc \neq 0$ , entonces la forma reducida escalonada de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Use este resultado para demostrar que si  $ad - bc \neq 0$  entonces  $\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \end{cases}$  tiene solución única.

**Problema 5.48.** La figura 5.9 muestra el plan de tráfico proyectado alrededor del parque principal de un pueblo turístico en las direcciones indicadas. Los flujos se proyectan de acuerdo a los valores promedio de vehículos por hora.

- a) Construya un sistema de ecuaciones lineales cuya solución determine los flujos vehiculares desconocidos.
- b) Resuelva el sistema y determine los valores buscados.
- c) La construcción se iniciará en la dirección de  $x_4$ . ¿Cuál es el flujo mínimo en esta calle de manera que el tráfico fluya normalmente en las demás calles?

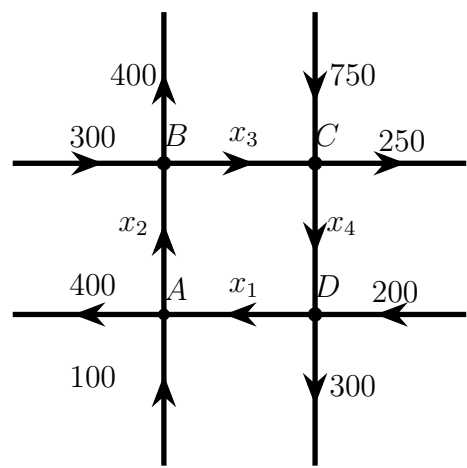


Figura 5.9: Tráfico proyectado en el parque principal



# Capítulo

## 6

## Espacios vectoriales

En este capítulo se exploran los conceptos relacionados con los fundamentos teóricos de los espacios vectoriales. En primer lugar se presenta su definición y luego se explica cómo todos los vectores pueden describirse de manera única como combinación lineal de un subconjunto llamado base. Se estudian los algoritmos que permiten calcular estas bases y realizar operaciones entre ellas. Finalmente se estudian los espacios fundamentales de una matriz, los cuales permiten identificar cuándo un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única y establecer algunas propiedades útiles durante el desarrollo del curso.

### 6.1

### Espacios vectoriales

El concepto central del álgebra lineal son los espacios vectoriales. A continuación se presenta su definición:

**Definición 6.1** (Espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{F}$ ). Un conjunto  $V$  no vacío es llamado **espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{F}$**  si para sus objetos, llamados vectores, se han definido dos operaciones: la suma de vectores y el producto de un vector por un elemento de  $\mathbb{F}$ , llamado producto por un escalar, que están sujetas a los siguientes diez axiomas. A continuación,  $u$ ,  $v$  y  $w$  son vectores, y  $k$ ,  $m$  son escalares del campo  $\mathbb{F}$ :

1. **Cerradura bajo la suma:**  $u + v \in V$ .
2. **Conmutatividad de la suma:**  $u + v = v + u$ .
3. **Asociatividad de la suma:**  $u + (v + w) = (u + v) + w$ .
4. **Existencia del vector nulo:**  $\exists \mathbf{0} \in V$  tal que  $u + \mathbf{0} = u$ .
5. **Existencia del inverso aditivo:**  $\forall u \in V$ ,  $\exists -u$  tal que  $u + (-u) = \mathbf{0}$ .
6. **Cerradura bajo la multiplicación por un escalar:**  $ku \in V$ .
7. **Asociatividad de la multiplicación por un escalar:**  $(km)u = k(mu)$ .
8. **Distributividad de la multiplicación por un escalar respecto a la suma de vectores:**

$$k(u + v) = ku + kv.$$

9. **Distributividad de la multiplicación por un escalar respecto a la suma de escalares:**

$$(k + m)u = ku + mu.$$

10. **Identidad multiplicativa:**  $1u = u$ .

**Observación 6.2.** Si el campo de escalares son los números reales, se dirá que  $V$  es un espacio vectorial real. Análogamente, un espacio vectorial complejo toma los escalares de  $\mathbb{C}$ .

Los siguientes conjuntos son ejemplos de espacios vectoriales. Se invita al lector a verificar los diez axiomas para cada conjunto.

**Ejemplo 6.3** ( $\mathbb{R}^n$ , los vectores  $n$ -dimensionales reales). Si  $n$  es un número entero positivo, defina un vector  $n$ -dimensional real como una  $n$ -tupla ordenada  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  donde cada elemento es un número real. Las operaciones se definen como:

- **Suma:**  $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ .
- **Producto por un escalar:**  $k(x_1, x_2, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$ .

**Ejemplo 6.4** ( $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , las matrices  $m \times n$  con entradas en  $\mathbb{R}$ ). Sean  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$  matrices de tamaño  $m \times n$ . Estas forman un espacio vectorial con las operaciones:

- **Suma:**  $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ .
- **Producto por un escalar:**  $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$ .

**Ejemplo 6.5** ( $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ , los polinomios de grado menor o igual a  $n$ ). Dados los polinomios con coeficientes reales  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  y  $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$  de grado menor o igual a  $n$ , se definen las operaciones:

- **Suma:**  $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$ .
- **Producto por un escalar:**  $kp(x) = (ka_0) + (ka_1)x + \dots + (ka_n)x^n$ .

**Ejemplo 6.6** ( $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , las funciones de una variable real). Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones de una variable real. Se definen las operaciones:

- **Suma:**  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .
- **Producto por un escalar:**  $(kf)(x) = kf(x)$ .

**Ejemplo 6.7** ( $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ , las funciones continuas de una variable real). Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones continuas de una variable real. Se definen las operaciones:

- **Suma:**  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .
- **Producto por un escalar:**  $(kf)(x) = kf(x)$ .

**Ejemplo 6.8.** Determine si los siguientes conjuntos junto con las operaciones dadas son un espacio vectorial:

(a) ([Anton and Rorres, 2014], p. 190, Problema 1) El conjunto  $V = \mathbb{R}^3$ , tomando los escalares en  $\mathbb{R}$  junto con las operaciones

- **Suma:**  $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ .
- **Producto por un escalar:**  $k(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

(b) ([Anton and Rorres, 2014], p. 190, Problema 2) El conjunto  $V = \mathbb{R}^2$ , tomando los escalares en  $\mathbb{R}$  junto con las operaciones

- **Suma:**  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 2, y_1 + y_2 + 2)$ .
- **Producto por un escalar:**  $k(x, y) = (kx, ky)$ .

(c) ([Anton and Rorres, 2014], p. 190, Problema 11) Defina  $V$  como el conjunto de parejas de la forma  $(1, x)$  donde  $x \in \mathbb{R}$ , junto con las operaciones

- **Suma:**  $(1, y_1) + (1, y_2) = (1, y_1 + y_2)$ .
- **Producto por un escalar:**  $k(1, y) = (1, ky)$ .

**Solución:** Para los conjuntos dados, debe verificarse si se cumplen todos los axiomas de espacio vectorial descritos en la Definición 6.1. Observe que para cada conjunto:

(a) El conjunto no es un espacio vectorial. Observe que si  $u = (1, 1, 1)$ , entonces  $1(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \neq (1, 1, 1)$ , por lo cual no se cumple el axioma 10.



(b) Sean  $u = (1, 1)$ ,  $v = (3, 2)$  y  $k = 3$ . Observe que

$$\begin{aligned} u + v &= (1, 1) + (3, 2) = (1 + 3 + 2, 1 + 2 + 2) = (6, 5), \\ 3(1, 1) &= (3, 3) \quad \text{y} \quad 3(3, 2) = (9, 6). \end{aligned}$$

Pero,

$$3((1, 1) + (3, 2)) = 3(6, 5) = (18, 15).$$

Así, el conjunto no es un espacio vectorial, pues el axioma 8 no se cumple.

(c) Verificando los 10 axiomas:

1. **Cerradura bajo la suma:** Para cualquier par de vectores  $(1, x_1)$  y  $(1, x_2)$  en el conjunto, su suma es  $(1, x_1) + (1, x_2) = (1, x_1 + x_2)$ . Como  $x_1 + x_2$  es un número real, también está en el conjunto.

2. **Conmutatividad de la suma:** Dados  $(1, x_1)$  y  $(1, x_2)$  en el conjunto,

$$(1, x_1) + (1, x_2) = (1, x_1 + x_2) = (1, x_2 + x_1) = (1, x_2) + (1, x_1).$$

3. **Asociatividad de la suma:** Dados los vectores  $(1, x_1)$ ,  $(1, x_2)$  y  $(1, x_3)$  en el conjunto, note que

$$\begin{aligned} (1, x_1) + ((1, x_2) + (1, x_3)) &= (1, x_1) + (1, (x_2 + x_3)) \\ &= (1, x_1 + x_2 + x_3) \\ &= (1, (x_1 + x_2) + x_3) \\ &= (1, x_1 + x_2) + (1, x_3) \\ &= ((1, x_1) + (1, x_2)) + (1, x_3). \end{aligned}$$

4. **Existencia del vector cero:** Observe que  $(1, 0)$  tiene la siguiente propiedad:

$$(1, 0) + (1, x) = (1, 0 + x) = (1, x),$$

por lo cual existe un vector en el conjunto, llamado el vector cero, que al sumarlo con cualquier otro vector del conjunto da como resultado ese mismo vector.

5. **Existencia del inverso aditivo:** Note que para cada vector  $(1, x)$  en el conjunto, existe un vector  $(1, -x)$  en el conjunto tal que

$$(1, x) + (1, -x) = (1, 0),$$

donde  $(1, 0)$  es el vector cero.

6. **Cerradura bajo la multiplicación por un escalar:** Sea  $k$  un número real. Observe que para  $(1, x)$  se cumple que  $k(1, x) = (1, kx)$ . Como  $kx \in \mathbb{R}$ , el producto también está en el conjunto.

7. **Asociatividad de la multiplicación por un escalar:** Dados  $k_1$ ,  $k_2$  y un vector  $(1, x)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} (k_1 k_2)(1, x) &= (1, (k_1 k_2)x) \\ &= (1, k_1(k_2 x)) = k_1(1, k_2 x) \\ &= k_1(k_2(1, x)). \end{aligned}$$

8. **Distributividad de la multiplicación por un escalar sobre la suma de vectores:** Dados  $k \in \mathbb{R}$  y cualquier par de vectores  $(1, x_1)$  y  $(1, x_2)$  en el conjunto,

$$\begin{aligned} k((1, x_1) + (1, x_2)) &= k(1, (x_1 + x_2)) \\ &= (1, k(x_1 + x_2)) = (1, kx_1 + kx_2) \\ &= (1, kx_1) + (1, kx_2) = k(1, x_1) + k(1, x_2). \end{aligned}$$

9. **Distributividad de la multiplicación por un escalar sobre la suma de escalares:** Dados  $k_1$ ,  $k_2$  y un vector  $(1, x)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)(1, x) &= (1, (k_1 + k_2)x) \\ &= (1, k_1 x + k_2 x) = (1, k_1 x) + (1, k_2 x) \\ &= k_1(1, x) + k_2(1, x). \end{aligned}$$

10. **Identidad multiplicativa:** Para cualquier vector  $(1, x)$  en el conjunto,

$$1(1, x) = (1, x).$$

Como los 10 axiomas se cumplen, el conjunto dado es un espacio vectorial real.

6.2

Subespacios vectoriales

En  $\mathbb{R}^3$ , se puede demostrar que las rectas y planos que pasan por el origen son espacios vectoriales con las mismas operaciones. Algunos de los axiomas se "heredan" del espacio "huésped", lo que nos permite identificar más fácilmente espacios vectoriales como subconjuntos de uno más grande. El objetivo de esta sección es identificar los subconjuntos que cumplen esta condición.

**Definición 6.9** (Subespacio vectorial). Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{F}$ . Un subconjunto no vacío  $W$  de  $V$  es llamado **subespacio vectorial** de  $V$  si es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma vectorial y producto por un escalar definidas en  $V$ .

**Observación 6.10.** A partir de ahora, cuando se hable de subespacio, se hará referencia a un subespacio vectorial.

**Teorema 6.11** (Test del subespacio). Sea  $V$  un espacio vectorial y  $W$  un subconjunto de  $V$ .  $W$  es subespacio vectorial de  $V$  si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) El vector nulo de  $V$  está en  $W$ , i.e.,  $\mathbf{0} \in W$ .
- b) Si los vectores  $u, v \in W$  entonces  $u + v \in W$ .
- c) Si  $u \in W$  y  $k \in \mathbb{F}$  entonces  $ku \in W$ .

*Demostración.* El teorema es una doble implicación, por lo cual se deben probar dos afirmaciones:

- I. Si  $W$  es un subespacio vectorial, entonces las afirmaciones a), b) y c) se cumplen.
- II. Si las afirmaciones a), b) y c) se cumplen, entonces  $W$  es un subespacio vectorial.

Para *i*, asuma que  $W$  es un subespacio vectorial de  $V$ . Por la definición 6.9,  $W$  es un espacio vectorial que cumple todos los axiomas de espacio vectorial, en particular los tres dados.

Para *ii*, suponga que se cumplen las tres condiciones dadas; se debe demostrar que  $W$  es un subespacio vectorial de  $V$ . Para esto es necesario verificar los diez axiomas de espacio vectorial. La condición b) es el axioma de cerradura bajo la suma, del cual se pueden heredar los axiomas de conmutatividad y asociatividad de la suma, pues si no se cumplieran en  $W$ , serían un contraejemplo en el espacio vectorial  $V$ .

Por otro lado, c) es el axioma de cerradura bajo el producto por escalar, lo cual permite heredar los axiomas de distributividad del producto por escalar respecto a la suma de vectores y escalares, asociatividad mixta, y la propiedad del elemento neutro multiplicativo. Esto reduce la verificación a demostrar los axiomas del elemento neutro aditivo e inverso aditivo. El axioma del elemento neutro aditivo se cumple por la condición a). Para el inverso aditivo, por la condición c), para todo  $u \in W$ , tenemos que  $(-1)u = -u \in W$ , y por las propiedades heredadas de  $V$ ,  $u + (-u) = \mathbf{0}$ . Así,  $W$  es un subconjunto de  $V$  que es un espacio vectorial. □

También es posible usar una versión compacta del teorema 6.11, la cual unifica las afirmaciones b) y c) anteriores:

**Corolario 6.12** (Test del subespacio, versión compacta). Sea  $V$  un espacio vectorial y  $W$  un subconjunto de  $V$ .  $W$  es subespacio vectorial de  $V$  si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) El vector nulo de  $V$  está en  $W$ , i.e.,  $\mathbf{0} \in W$ .
- b) Dados  $u, v \in W$  y  $k, m \in \mathbb{F}$  entonces  $ku + mv \in W$ .

**Observación 6.13.** El conjunto cuyo único elemento es el vector nulo es un subespacio de  $V$ .

**Ejemplo 6.14.** Determine si  $W$  es subespacio de  $\mathbb{R}^3$ :

- (a)  $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + 1 = c\}$ .
- (b)  $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ . **Notación:**  $\mathbb{Q}$  denota el conjunto de los números racionales.
- (c)  $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 2b = 3c\}$ .

**Solución:**

- (a) No es un subespacio vectorial. Note que el vector nulo  $(0, 0, 0)$  no cumple la condición  $0+0+1 = 0$ .
- (b) No es subespacio. Sea  $k = \sqrt{2}$ , si  $(a, b, c) \in W$  entonces  $(\sqrt{2}a, \sqrt{2}b, \sqrt{2}c) \notin W$  pues  $\sqrt{2}a, \sqrt{2}b, \sqrt{2}c$  no son racionales cuando  $a, b, c$  son racionales no nulos.
- (c) Reescribiendo el conjunto usando las condiciones  $a = 2b$  y  $a = 3c$ , obtenemos  $2b = 3c$ , es decir,  $b = \frac{3c}{2}$  y  $a = 3c$ . Así, los vectores de  $W$  tienen la forma  $(3c, \frac{3c}{2}, c) = c(3, \frac{3}{2}, 1)$ . Si  $c = 0$  entonces  $(0, 0, 0)$  pertenece al conjunto. Sean  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  vectores que pertenecen a  $W$  y  $k, m$  escalares. Entonces existen parámetros  $c_1$  y  $c_2$  tales que  $(x_1, y_1, z_1) = c_1(3, \frac{3}{2}, 1)$  y  $(x_2, y_2, z_2) = c_2(3, \frac{3}{2}, 1)$ . Note que:

$$\begin{aligned} k(x_1, y_1, z_1) + m(x_2, y_2, z_2) &= k \left( c_1(3, \frac{3}{2}, 1) \right) + m \left( c_2(3, \frac{3}{2}, 1) \right) \\ &= (kc_1 + mc_2) (3, \frac{3}{2}, 1) \end{aligned}$$

Por el Corolario 6.12, el conjunto es subespacio vectorial.

**Observación 6.15** (Los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ). Los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  son: el conjunto  $\{\mathbf{0}\}$ , las rectas que pasan por el origen, y todo  $\mathbb{R}^2$ . Los subespacios de  $\mathbb{R}^3$  son: el conjunto  $\{\mathbf{0}\}$ , las rectas que pasan por el origen, los planos que pasan por el origen, y todo  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejemplo 6.16.** Determine si  $W$  es subespacio de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

- (a)  $W = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\}$
- (b)  $W = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$

**Solución:**

- (a) Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Note que  $\det(A) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0$  y  $\det(B) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$ , pero  $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $\det(A + B) = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0$ , por lo cual no cumple la condición (b) del Teorema 6.11.
- (b) Una matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$  si y solo si  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ , lo cual implica que  $a = -a$ ,  $c = -c$ ,  $b = -b$ ,  $d = -d$ . De aquí obtenemos  $a = 0$ ,  $c = 0$ , y  $b = -b$ . Entonces  $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; estas matrices son llamadas antisimétricas. La matriz nula  $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  es antisimétrica. Sean

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}$  y  $k, m$  escalares. Observe que

$$\begin{aligned} kA_1 + mA_2 &= k \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ -ka_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ma_2 \\ -ma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 + ma_2 \\ -(ka_1 + ma_2) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la cual es una matriz antisimétrica. Por el Corolario 6.12,  $W$  es subespacio.

**Ejemplo 6.17.** Determine si  $W$  es subespacio de  $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ .

- (a)  $W = \{p \in \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \mid p'(0) = 0\}$ , es decir, los polinomios cuya derivada evaluada en 0 es igual a 0.
- (b)  $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 = 0\}$ .
- (c)  $W = \{p \in \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \mid p(1) \text{ es un número racional}\}$

**Solución:**

- (a) La derivada del polinomio nulo es el polinomio nulo, por lo tanto al evaluarla en 0 se obtiene 0. Sean  $p_1(x)$  y  $p_2(x)$  polinomios de  $W$  y  $k, m$  escalares. Por propiedades de la derivada:

$$(kp_1(x) + mp_2(x))'(0) = kp_1'(0) + mp_2'(0) = k \cdot 0 + m \cdot 0 = 0.$$

Así,  $W$  es subespacio por el Corolario 6.12.

- (b) Sea  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ . Por la condición establecida,  $a_0 = 0$ , de esta manera, los polinomios que pertenecen a  $W$  tienen la forma

$$p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Si  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  entonces  $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = 0 \in W$ .

Definamos  $p_1(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  y  $p_2(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ , con  $k, m$  escalares. Note que:

$$\begin{aligned} &kp_1(x) + mp_2(x) \\ &= k(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + m(b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) \\ &= (ka_1 + mb_1)x + (ka_2 + mb_2)x^2 + (ka_3 + mb_3)x^3. \end{aligned}$$

Este es un polinomio de  $W$  pues su término constante es 0. Por el Corolario 6.12,  $W$  es subespacio.

- (c)  $W$  no es subespacio. Si  $p(x) \in W$  entonces  $p(1)$  es racional, pero si tomamos  $k = \sqrt{3}$  (que es irracional), entonces  $(kp)(1) = k \cdot p(1) = \sqrt{3} \cdot p(1)$  no es racional cuando  $p(1) \neq 0$  es racional. Por tanto,  $W$  no es cerrado bajo el producto por escalares.

**Teorema 6.18** (La intersección finita de subespacios es subespacio). Sean  $W_1, W_2, \dots, W_n$  subespacios de  $V$ . Entonces  $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_n = \bigcap_{i=1}^n W_i$  es subespacio de  $V$ .

*Demostración.* Debe probarse que  $\bigcap_{i=1}^n W_i$  cumple las condiciones del Teorema 6.11. Como cada  $W_i$  es un subespacio de  $V$ , entonces cada uno contiene al vector cero, por lo tanto, el vector cero está en su intersección. Sean  $u, v \in \bigcap_{i=1}^n W_i$ , entonces  $u, v \in W_i$  para cada  $i$ . Como cada  $W_i$  es un subespacio,  $u + v \in W_i$  para cada  $i$ , y así  $u + v \in \bigcap_{i=1}^n W_i$ . Finalmente, si  $u \in \bigcap_{i=1}^n W_i$  y  $k$  es un escalar, entonces  $u \in W_i$

para cada  $i$ , por lo cual  $ku \in W_i$  para cada  $i$ , y así  $ku \in \bigcap_{i=1}^n W_i$ . □

**Ejemplo 6.19** (La solución de un S.E.L. homogéneo es subespacio). Dado un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, su conjunto solución es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .

**Solución:** En general, un sistema de ecuaciones lineales homogéneo puede escribirse como  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  donde  $A$  es la matriz de coeficientes de tamaño  $m \times n$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es un vector de incógnitas. Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo siempre tiene la solución trivial  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , por lo cual el vector nulo de  $\mathbb{R}^n$  está en el espacio solución. Sean  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  soluciones del sistema y  $k, m$  escalares. Dado que  $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$  y  $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ , entonces:

$$\begin{aligned} A(k\mathbf{x}_1 + m\mathbf{x}_2) &= A(k\mathbf{x}_1) + A(m\mathbf{x}_2) \\ &= kA(\mathbf{x}_1) + mA(\mathbf{x}_2) \\ &= k\mathbf{0} + m\mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Así, por el Corolario 6.12, el conjunto solución es subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .

**Observación 6.20.** Los sistemas de ecuaciones lineales de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas que no sean homogéneos no tienen conjuntos solución que sean subespacios de  $\mathbb{R}^n$ , pues  $\mathbf{0}$  no es solución de tal sistema.

**Ejemplo 6.21.** Calcule el espacio solución asociado al siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

**Solución:** Se usará el método de eliminación gaussiana. Reduciendo la matriz aumentada del sistema se tiene:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2f_1 + f_2 \rightarrow f_2 \\ -f_1 + f_3 \rightarrow f_3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-2f_2 + f_3 \rightarrow f_3} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Las entradas resaltadas son los pivotes de la matriz reducida, y las columnas sin pivotes representan las variables libres del sistema. De la segunda ecuación:  $-x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ .  
De la primera ecuación:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$ .  
Así, el espacio solución está determinado por  $x_2 = t$  (parámetro libre), con lo cual las soluciones tienen la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que el espacio solución es una recta con vector director  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  que pasa por el origen.

6.3

Combinaciones lineales y generados

Las combinaciones lineales permitirán describir un vector en términos de otros vectores del espacio. Se introducen su definición y el concepto de generado:

**Definición 6.22** (Combinación lineal). Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$ . Se dice que un vector  $w \in V$  es **combinación lineal** de los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  si existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$  tales que  $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ . Los escalares  $\alpha_i$  se denominan **coeficientes de la combinación lineal**.

**Teorema 6.23.** *El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  es un subespacio de  $V$ , y además es el subespacio más pequeño de  $V$  que los contiene.*

*Demostración.* Claramente, el vector nulo  $\mathbf{0}$  es combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , pues

$$\mathbf{0} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n,$$

donde cada coeficiente es  $0 \in \mathbb{F}$ .

Sean  $u_1$  y  $u_2$  combinaciones lineales de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Entonces existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  y  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  en  $\mathbb{F}$  tales que  $u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  y  $u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$ .

Sean  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$  escalares arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda u_1 + \mu u_2 &= \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) + \mu(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)v_1 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)v_2 + \dots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)v_n, \end{aligned}$$

lo cual es una combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Por el Corolario 6.12, el conjunto de todas las combinaciones lineales es subespacio de  $V$ .

Para demostrar que es el subespacio más pequeño que contiene a  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , sea  $W$  cualquier subespacio de  $V$  que contiene estos vectores. Como  $W$  es subespacio, es cerrado bajo combinaciones lineales. En particular, para cualquier elección de escalares  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{F}$ :

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n \in W.$$

Por lo tanto,  $\text{gen}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq W$ . Además,  $\text{gen}\{v_1, \dots, v_n\}$  contiene a cada  $v_i$  (tomando  $\gamma_i = 1$  y  $\gamma_j = 0$  para  $j \neq i$ ). Así, es el subespacio más pequeño que contiene a  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .  $\square$

**Definición 6.24** (Subespacio generado). El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  se denomina **subespacio generado** por estos vectores. Se denota  $\text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  o  $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

**Ejemplo 6.25.** Determine si el polinomio  $q(x) = -9 - 7x - 15x^2$  pertenece a  $\text{span}\{p_1, p_2, p_3\}$  donde  $p_1(x) = 2 + x + 4x^2$ ,  $p_2(x) = 1 - x + 3x^2$ , y  $p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$  en  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

**Solución:** Buscamos escalares  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$  tales que:  $k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 = q(x)$ . Igualando coeficientes, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 + 3k_3 = -9 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 = -7 \\ 4k_1 + 3k_2 + 5k_3 = -15 \end{cases}$$

La matriz aumentada asociada es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & 5 & -15 \end{array} \right)$$

Aplicando eliminación gaussiana:

$$\xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & -9 \\ 4 & 3 & 5 & -15 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 - 4f_1 \rightarrow f_3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -3 & 13 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow{f_3 - \frac{7}{3}f_2 \rightarrow f_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array} \right)$$

El sistema es consistente (no hay filas contradictorias), por lo que existen soluciones. Resolviendo:

$$-\frac{2}{3}k_3 = -\frac{4}{3} \Rightarrow k_3 = 2$$

$$3k_2 - (2) = 5 \Rightarrow 3k_2 = 7 \Rightarrow k_2 = \frac{7}{3}$$

$$k_1 - \frac{7}{3} + 2(2) = -7 \Rightarrow k_1 = -7 + \frac{7}{3} - 4 = -\frac{28}{3}$$

Como existe solución  $k_1 = -\frac{28}{3}$ ,  $k_2 = \frac{7}{3}$ ,  $k_3 = 2$ , entonces  $q(x) \in \text{span}\{p_1, p_2, p_3\}$ .

**Teorema 6.26.** Sean  $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  y  $S_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  subconjuntos de un espacio vectorial  $V$ . Entonces  $\text{gen}(S_1) = \text{gen}(S_2)$  si y solo si:

1. Cada  $v_i \in S_1$  es combinación lineal de los vectores en  $S_2$
2. Cada  $w_j \in S_2$  es combinación lineal de los vectores en  $S_1$

*Demostración.* Demostramos la doble implicación:

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\text{gen}(S_1) = \text{gen}(S_2)$ .

1. Para cada  $v_i \in S_1$ , como  $v_i \in \text{gen}(S_1)$  y  $\text{gen}(S_1) = \text{gen}(S_2)$ , entonces  $v_i \in \text{gen}(S_2)$ . Por definición de generado,  $v_i$  es combinación lineal de los vectores en  $S_2$ .
2. Para cada  $w_j \in S_2$ , como  $w_j \in \text{gen}(S_2)$  y  $\text{gen}(S_2) = \text{gen}(S_1)$ , entonces  $w_j \in \text{gen}(S_1)$ . Por definición de generado,  $w_j$  es combinación lineal de los vectores en  $S_1$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que se cumplen ambas condiciones. Demostremos la igualdad de conjuntos:

$\subseteq$ ) Sea  $u \in \text{gen}(S_1)$ . Entonces existen escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  tales que:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r$$

Como cada  $v_i$  es combinación lineal de  $S_2$  (por hipótesis), existen escalares  $\beta_{ij}$  tales que para cada  $i$ :

$$v_i = \beta_{i1} w_1 + \beta_{i2} w_2 + \dots + \beta_{im} w_m$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1(\beta_{11} w_1 + \dots + \beta_{1m} w_m) + \alpha_2(\beta_{21} w_1 + \dots + \beta_{2m} w_m) + \dots \\ &= (\alpha_1 \beta_{11} + \alpha_2 \beta_{21} + \dots + \alpha_r \beta_{r1}) w_1 + \dots + (\alpha_1 \beta_{1m} + \dots + \alpha_r \beta_{rm}) w_m \end{aligned}$$

Lo cual es combinación lineal de los vectores en  $S_2$ . Por tanto,  $u \in \text{gen}(S_2)$ .

$\supseteq$ ) Sea  $u \in \text{gen}(S_2)$ . Entonces existen escalares  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  tales que:

$$u = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_m w_m$$

Como cada  $w_j$  es combinación lineal de  $S_1$  (por hipótesis), existen escalares  $\delta_{ji}$  tales que para cada  $j$ :

$$w_j = \delta_{j1} v_1 + \delta_{j2} v_2 + \dots + \delta_{jr} v_r$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} u &= \gamma_1(\delta_{11} v_1 + \dots + \delta_{1r} v_r) + \gamma_2(\delta_{21} v_1 + \dots + \delta_{2r} v_r) + \dots \\ &= (\gamma_1 \delta_{11} + \gamma_2 \delta_{21} + \dots + \gamma_m \delta_{m1}) v_1 + \dots + (\gamma_1 \delta_{1r} + \dots + \gamma_m \delta_{mr}) v_r \end{aligned}$$

Lo cual es combinación lineal de los vectores en  $S_1$ . Por tanto,  $u \in \text{gen}(S_1)$ .

Como hemos demostrado  $\text{gen}(S_1) \subseteq \text{gen}(S_2)$  y  $\text{gen}(S_2) \subseteq \text{gen}(S_1)$ , concluimos que  $\text{gen}(S_1) = \text{gen}(S_2)$ .  $\square$



## 6.4

## Independencia lineal

**Definición 6.27** (Independencia lineal). Sea  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  un conjunto de vectores en un espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$ . Diremos que  $S$  es **linealmente independiente** (abreviado *l.i.*) si la única combinación lineal que produce el vector nulo es la trivial, es decir, si:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = \mathbf{0} \quad \text{implica} \quad k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0.$$

Si  $S$  no es linealmente independiente, se dirá que es **linealmente dependiente** (abreviado *l.d.*).

**Teorema 6.28** (Test de independencia lineal). *Un conjunto  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es linealmente independiente si y solo si la única solución de la ecuación:*

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = \mathbf{0}$$

*es la solución trivial  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $S$  es l.i. Si existiera una combinación lineal no trivial igual a cero, algún  $k_j \neq 0$ . Sin pérdida de generalidad, sea  $k_1 \neq 0$ . Entonces:

$$v_1 = -\frac{k_2}{k_1}v_2 - \dots - \frac{k_n}{k_1}v_n$$

lo que muestra que  $v_1$  es combinación lineal de los demás, contradiciendo la independencia lineal.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que la única solución es la trivial. Si  $S$  fuera l.d., algún vector sería combinación lineal de los otros, digamos  $v_1 = \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_nv_n$ . Entonces:

$$v_1 - \alpha_2v_2 - \dots - \alpha_nv_n = \mathbf{0}$$

es una combinación lineal no trivial igual a cero, contradiciendo la hipótesis. □

**Corolario 6.29.** *Sea  $V$  un espacio vectorial:*

1. *Un conjunto que contiene al vector nulo es l.d.*
2. *Un conjunto con un solo vector  $v$  es l.i. si y solo si  $v \neq \mathbf{0}$ .*
3. *Dos vectores  $\{u, v\}$  son l.i. si y solo si no son paralelos ( $u \notin \text{span}\{v\}$ ).*
4. *En  $\mathbb{R}^n$ , todo conjunto con más de  $n$  vectores es l.d.*

**Definición 6.30** (Wronskiano). Para funciones  $f_1, \dots, f_n$   $(n-1)$ -veces diferenciables en  $(-\infty, \infty)$ , el **Wronskiano** es:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

**Teorema 6.31** (Criterio del Wronskiano). *Si  $W(x) \neq 0$  en  $(-\infty, \infty)$ , entonces  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es l.i. en  $\mathcal{C}^{n-1}(-\infty, \infty)$ .*

**Problema 6.32.** Determine cuáles conjuntos son l.i. en el espacio dado:

- (a)  $\{(3, -1), (4, 5), (-4, 7)\}$  en  $\mathbb{R}^2$
- (b)  $\{3 - 2x + x^2, 6 - 4x + 2x^2\}$  en  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
- (c)  $\{2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2\}$  en  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$



- (d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right\}$  en  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
- (e)  $\{\cos x, \sin x\}$  en  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$
- (f)  $\{\cos^2 x, \sin^2 x, 1\}$  en  $\mathcal{C}[-1, 1]$
- (g)  $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$  en  $\mathcal{C}[-1, 1]$  (use Wronskiano)

**Solución:** (a) En  $\mathbb{R}^2$ , todo conjunto con más de dos vectores es l.d.  
(b)  $6 - 4x + 2x^2 = 2(3 - 2x + x^2)$  por lo cual es l.d.

(c) Resolvemos  $a(2 - x + 4x^2) + b(3 + 6x + 2x^2) + c(2 + 10x - 4x^2) = 0$ : 
$$\begin{cases} 2a + 3b + 2c = 0 \\ -a + 6b + 10c = 0 \\ 4a + 2b - 4c = 0 \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz asociada es distinto de cero ( $\det = -32$ ) el sistema tiene la solución trivial, por tanto, el conjunto es l.i.

(d) Resolvemos  $a \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} 3b + 4c = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ a + 4b + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow \text{l.i.}$$

- (e) Si  $a \cos x + b \sin x = 0 \ \forall x$ , se tiene que evaluando en  $x = 0$ :  $a = 0$ ; y en  $x = \pi/2$ :  $b = 0 \Rightarrow$  l.i.  
(f)  $\cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0$  la cual es una combinación lineal no trivial, por tanto es un conjunto l.d.  
(g) Wronskiano:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0 \Rightarrow \text{l.i.}$$

**Problema 6.33.** ¿Para qué  $\lambda$  los vectores  $v_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $v_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2})$ ,  $v_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$  son l.d.?

**Solución:** Son l.d. si  $\det(A) = 0$  donde  $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & \lambda & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & \lambda \end{pmatrix}$ . Calculamos:

$$\det(A) = \lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(4\lambda^3 - 3\lambda - 1).$$

Factorizando el polinomio  $(4\lambda^3 - 3\lambda - 1) = (\lambda - 1)(2\lambda + 1)^2 = 0$ , por tanto el conjunto es l.d. para los valores  $\lambda = 1$  o  $\lambda = -\frac{1}{2}$ .

**Problema 6.34.** Sean  $v_1, v_2, v_3 \neq \mathbf{0}$  en  $V$ . Demuestre que si  $\{v_1, v_2\}$  es l.i. y  $v_3 \notin \text{gen}\{v_1, v_2\}$ , entonces  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es l.i.

**Solución:** Supongamos  $av_1 + bv_2 + cv_3 = \mathbf{0}$ . Si  $c \neq 0$ , entonces  $v_3 = -\frac{a}{c}v_1 - \frac{b}{c}v_2 \in \text{gen}\{v_1, v_2\}$ , la cual es una contradicción. Luego  $c = 0$ . Entonces  $av_1 + bv_2 = \mathbf{0}$ . Como  $\{v_1, v_2\}$  es l.i.,  $a = b = 0$ . Por tanto, el conjunto debe ser l.i.

**Problema 6.35.** Demuestre que si  $u, v, w$  son l.i., entonces  $\{u + v + w, u + v, u\}$  es l.i.

**Solución:** Supongamos  $a(u + v + w) + b(u + v) + cu = \mathbf{0}$ . Reordenando:

$$(a + b + c)u + (a + b)v + aw = \mathbf{0}$$

Como  $\{u, v, w\}$  es l.i.:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = 0, c = 0$$

Por tanto, el conjunto es l.i.

6.5

Bases y dimensión

Esta sección aborda uno de los conceptos fundamentales en álgebra lineal: la capacidad de representar cualquier vector mediante un conjunto específico de vectores conocido como **base**. Una base en un espacio vectorial permite generar cualquier vector mediante combinaciones lineales, determinar la dimensión del espacio, y estudiar propiedades fundamentales.

**Definición 6.36** (Espacio vectorial de dimensión finita). Un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  es de **dimensión finita** si existe un conjunto finito que genera  $V$ . En caso contrario, es de **dimensión infinita**.

**Definición 6.37** (Base). Un conjunto  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  es **base** de  $V$  si:

- 1.  $S$  genera  $V$  ( $\text{span}(S) = V$ )
- 2.  $S$  es linealmente independiente

**Ejemplo 6.38** (Base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ). Los vectores  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  forman la base canónica.

**Solución:** Cualquier vector  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ae_1 + be_2 + ce_3$ , por lo que  $S$  genera  $\mathbb{R}^3$ . Para verificar independencia lineal, consideremos  $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \mathbf{0}$ , lo que implica  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Por tanto,  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , y  $S$  es linealmente independiente.

**Ejemplo 6.39.** Demuestre que las matrices no forman base para  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Solución:** Resolvemos la combinación lineal nula:

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema equivalente: 
$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ -2k_2 - k_3 - k_4 = 0 \\ k_1 + 3k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + k_4 = 0 \end{cases}$$
 Resolviendo por eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema tiene soluciones no triviales (por ejemplo:  $k_4 = 1, k_1 = -2, k_2 = -1, k_3 = 1$ ), por lo que las matrices son linealmente dependientes y no forman base.

**Teorema 6.40** (Unicidad de la representación). *Si  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ , entonces todo  $u \in V$  tiene representación única  $u = \sum_{i=1}^n k_i v_i$ .*

*Demostración.* Supongamos dos representaciones  $u = \sum_{i=1}^n k_i v_i = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ . Entonces:

$$\mathbf{0} = u - u = \sum_{i=1}^n (k_i - c_i) v_i$$

Como  $S$  es linealmente independiente, necesariamente  $k_i - c_i = 0$  para todo  $i$ , luego  $k_i = c_i$  para todo  $i$ . □

**Definición 6.41** (Vector de coordenadas). Para una base *ordenada*  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $u = \sum_{i=1}^n k_i v_i$ , el **vector de coordenadas** es  $[u]_S = (k_1, \dots, k_n)^T$ .

**Teorema 6.42** (Invariancia del número de elementos en una base). *Todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de vectores.*

*Demostración.* Sean  $B_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$  y  $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$  dos bases de  $V$ . Como  $B_1$  es linealmente independiente y  $B_2$  genera  $V$ , por el lema de intercambio tenemos  $m \leq n$ . Análogamente, como  $B_2$  es linealmente independiente y  $B_1$  genera  $V$ , tenemos  $n \leq m$ . Por tanto,  $m = n$ . □

**Definición 6.43** (Dimensión). La **dimensión** de  $V$  ( $\dim V$ ) es el número de vectores en cualquier base de  $V$ . Por convención,  $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$ .

**Teorema 6.44** (Propiedades dimensionales). *Si  $\dim V = n$ , entonces:*

1. *Cualquier conjunto con más de  $n$  vectores es linealmente dependiente.*
2. *Cualquier conjunto con menos de  $n$  vectores no genera  $V$ .*
3. *Un conjunto de exactamente  $n$  vectores es base si y solo si es linealmente independiente o genera  $V$ .*

*Demostración.* **(1)** Si  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  con  $k > n$  fuera linealmente independiente, podríamos extenderlo a una base con al menos  $k > n$  elementos, contradiciendo que  $\dim V = n$ .

**(2)** Si  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  con  $k < n$  generara  $V$ , podríamos extraer una base con a lo más  $k < n$  elementos, contradiciendo que  $\dim V = n$ .

**(3)** Si  $|S| = n$  y  $S$  es linealmente independiente, entonces  $S$  no puede extenderse (pues cualquier conjunto con  $n + 1$  vectores es linealmente dependiente), por lo que  $S$  genera  $V$ . Si  $S$  genera  $V$ , entonces podemos extraer una base que, por tener  $n$  elementos, debe ser todo  $S$ . □

**Teorema 6.45** (Teorema de la base incompleta). *Sea  $V$  con  $\dim V = n$ :*

1. *Si  $S$  genera  $V$  pero es linealmente dependiente, se pueden eliminar vectores para obtener una base.*
2. *Si  $S$  es linealmente independiente pero no genera  $V$ , se pueden añadir vectores para obtener una base.*

*Demostración.* (1) Si  $S$  genera  $V$  y es linealmente dependiente, existe un vector que es combinación lineal de los otros. Eliminándolo, el conjunto resultante sigue generando  $V$ . Repetimos hasta obtener un conjunto linealmente independiente que genere  $V$ .

(2) Si  $S$  es linealmente independiente con  $|S| < n$ , entonces  $S$  no genera  $V$ . Existe  $v \in V$  tal que  $v \notin \text{span}(S)$ . El conjunto  $S \cup \{v\}$  es linealmente independiente. Repetimos hasta obtener  $n$  vectores.  $\square$

**Teorema 6.46** (Dimensión de subespacios). Si  $W \subseteq V$  es subespacio y  $\dim V < \infty$ , entonces:

1.  $\dim W \leq \dim V$
2.  $W$  tiene dimensión finita
3.  $W = V \iff \dim W = \dim V$

*Demostración.* (1) y (2) Cualquier conjunto linealmente independiente en  $W$  también lo es en  $V$ , por lo que no puede tener más de  $\dim V$  elementos. Por tanto,  $W$  tiene una base finita.

(3) Si  $W = V$ , entonces  $\dim W = \dim V$ . Recíprocamente, si  $\dim W = \dim V = n$  y  $B$  es base de  $W$ , entonces  $B$  tiene  $n$  elementos linealmente independientes en  $V$ , por lo que  $B$  es base de  $V$  y  $W = \text{span}(B) = V$ .  $\square$

**Definición 6.47** (Matriz de cambio de base). Dadas bases  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$  de  $V$ , la **matriz de cambio de base** de  $B$  a  $B'$  es  $P_{B \rightarrow B'} = ([v_1]_{B'} \mid \dots \mid [v_n]_{B'})$ , donde  $[v_i]_{B'}$  es el vector de coordenadas de  $v_i$  respecto a  $B'$ . Esta matriz satisface  $[u]_{B'} = P_{B \rightarrow B'}[u]_B$  para todo  $u \in V$ .

**Problema 6.48.** Determine cuáles conjuntos son base del espacio dado:

- (a)  $S = \{(-1, 3, 2), (6, 1, 1)\}$  en  $\mathbb{R}^3$
- (b)  $S = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$  en  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$
- (c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$  en  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
- (d)  $S = \{(0, 0, 2), (2, 0, 2), (4, 4, 4)\}$  en  $\mathbb{R}^3$
- (e)  $S = \{(22, 11), (-6, -4)\}$  en  $\mathbb{R}^2$

**Solución:** (a)  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  y  $|S| = 2 < 3$ , por lo que  $S$  no puede generar  $\mathbb{R}^3$  y no es base.

(b)  $\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = 5$  y  $|S| = 4 < 5$ , por lo que  $S$  no puede generar  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$  y no es base.

(c)  $\dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$  y  $|S| = 4$ . Verificamos independencia lineal resolviendo  $\sum k_i A_i = \mathbf{0}$ . El sistema homogéneo asociado tiene matriz de coeficientes con determinante cero, por lo que existe solución no trivial. Luego  $S$  es linealmente dependiente y no es base.

(d)  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  y  $|S| = 3$ . Calculamos:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2(-8) = 16 \neq 0$$

Por tanto,  $S$  es linealmente independiente y es base.

(e)  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$  y  $|S| = 2$ . Calculamos:

$$\det \begin{pmatrix} 22 & -6 \\ 11 & -4 \end{pmatrix} = 22(-4) - (-6)(11) = -88 + 66 = -22 \neq 0$$

Por tanto,  $S$  es linealmente independiente y es base.

**Problema 6.49.** Determine bases para:

- (a) Plano  $3x + 2y - 5z = 0$  en  $\mathbb{R}^3$
- (b) Recta  $x = 2t, y = -t, z = 4t$  en  $\mathbb{R}^3$

(c) Vectores  $(a, b, c)$  con  $a = b = c$  en  $\mathbb{R}^3$

**Solución:** (a) El plano  $3x + 2y - 5z = 0$  es el núcleo de la transformación lineal  $(x, y, z) \mapsto 3x + 2y - 5z$ . Para encontrar una base, resolvemos el sistema homogéneo. Tomando  $y$  y  $z$  como variables libres:  $x = -\frac{2y + 5z}{3}$ . Los vectores del plano son de la forma  $\begin{pmatrix} -\frac{2s + 5t}{3} \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Una base es  $\{(-2, 3, 0), (-5, 0, 3)\}$ .

(b) La recta está generada por el vector director  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Una base es  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ .

(c) Los vectores con  $a = b = c$  son de la forma  $\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Una base es  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

**Problema 6.50.** Extienda  $S = \{(1, -4, 2, -3), (-3, 8, -2, 5)\}$  a una base de  $\mathbb{R}^4$ .

**Solución:** Primero verificamos que  $S$  es linealmente independiente. Los vectores no son múltiplos escalares entre sí, por lo que son linealmente independientes. Como  $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ , necesitamos añadir dos vectores más.

Consideremos los vectores canónicos  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$  y  $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ . Verificamos que  $\{(1, -4, 2, -3), (-3, 8, -2, 5), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$  es linealmente independiente calculando:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \neq 0.$$

Por tanto, una base extendida es  $\{(1, -4, 2, -3), (-3, 8, -2, 5), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ .

**Problema 6.51.** Para qué valores de  $t \in \mathbb{R}$  el conjunto es base de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & t \end{pmatrix} \right\}$$

**Solución:** Como  $\dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$  y tenemos 4 matrices, el conjunto es base si y solo si es linealmente independiente. Esto ocurre cuando el sistema homogéneo  $\sum k_i A_i = \mathbf{0}$  tiene únicamente la solución trivial.

Planteando el sistema:  $k_1 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Obtenemos el sistema: 
$$\begin{cases} 3k_1 + 2k_2 + 6k_3 + 5k_4 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + 5k_3 + 4k_4 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + 4k_3 + 4k_4 = 0 \\ k_1 + 0k_2 + 2k_3 + tk_4 = 0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & t \end{pmatrix}$

Calculando el determinante por cofactores de la segunda columna:

$$\det(A) = -2 \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix}$$

Después de los cálculos, obtenemos  $\det(A) = 2t - 3$ .

El conjunto es base cuando  $\det(A) \neq 0$ , es decir, cuando  $t \neq \frac{3}{2}$ .

**Problema 6.52.** Encuentre la matriz de cambio de base de  $B$  a  $B'$  en  $\mathbb{R}^3$ :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, B' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

**Solución:** La matriz de cambio de base es  $P_{B \rightarrow B'} = [B']^{-1}[B]$ , donde  $[B]$  y  $[B']$  son las matrices que tienen como columnas los vectores de las respectivas bases.

$$[B] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [B'] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos  $[B']^{-1}$  usando la fórmula  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ :

$$\det([B']) = 3(2 - 0) - 1(2 - 0) + (-1)(-3 + 5) = 6 - 2 - 2 = 2$$

La matriz adjunta es:

$$\text{adj}([B']) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:  $[B']^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Finalmente:

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 2 \\ -1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

**Problema 6.53.** Encuentre la matriz de cambio de la base canónica  $B$  a la base  $B'$  que representa la reflexión sobre la recta  $y = x$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Solución:** La base canónica es  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

La reflexión sobre la recta  $y = x$  intercambia las coordenadas:  $(x, y) \mapsto (y, x)$ .

Por tanto:  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

La matriz de la transformación (que es también la matriz de cambio de base) es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificación:  $P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ , que es efectivamente la reflexión sobre  $y = x$ .

6.6

Espacios fundamentales de una matriz

Los espacios fundamentales de una matriz proporcionan una comprensión profunda de la estructura algebraica y geométrica de las transformaciones lineales. Estos espacios están íntimamente relacionados con la resolución de sistemas lineales y las propiedades de rango de matrices.

**Definición 6.54** (Espacios fundamentales). Para  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ :

- **Espacio fila:**  $\mathcal{R}(A) = \text{span}\{\text{filas de } A\}$

- **Espacio columna:**  $\mathcal{C}(A) = \text{span}\{\text{columnas de } A\}$
- **Espacio nulo:**  $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
- **Espacio nulo izquierdo:**  $\mathcal{N}(A^T) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}\}$

**Ejemplo 6.55.** Para  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ :

**Solución:** Aplicando operaciones elementales de fila:  $A \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & -8 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & -9/2 & -11/2 \end{pmatrix}$

- $\mathcal{R}(A) = \text{span}\{(2, 5, 8, 3), (0, -8, -15, -5), (0, 0, -9/2, -11/2)\}$
- $\mathcal{C}(A)$ : Las columnas pivote son 1, 2, 3, por lo que  $\mathcal{C}(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ .
- $\mathcal{N}(A)$ : Del sistema homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ : 
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 0 \\ -8x_2 - 15x_3 - 5x_4 = 0 \\ -\frac{9}{2}x_3 - \frac{11}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$
Con  $x_4$  como variable libre:  $x_3 = -\frac{11}{9}x_4$ ,  $x_2 = \frac{5}{8}x_4$ ,  $x_1 = -\frac{79}{72}x_4$ .  $\mathcal{N}(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -79/72 \\ 5/8 \\ -11/9 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ .

**Teorema 6.56** (Caracterización de consistencia). *El sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es consistente si y solo si  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , entonces  $\mathbf{b} = A\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^n x_{0i}\mathbf{a}_i$ , donde  $\mathbf{a}_i$  son las columnas de  $A$ . Por tanto,  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$ , entonces  $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{a}_i$  para algunos escalares  $c_i$ . Tomando  $\mathbf{x} = (c_1, \dots, c_n)^T$ , tenemos  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . □

**Teorema 6.57** (Invariancia bajo operaciones fila). *Si  $B$  se obtiene de  $A$  por operaciones elementales de fila, entonces:*

- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$
- $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$

*Demostración.* Las operaciones elementales de fila corresponden a multiplicar por matrices invertibles por la izquierda. Si  $B = PA$  donde  $P$  es invertible, entonces:

- $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff PA\mathbf{x} = P\mathbf{0} = \mathbf{0} \iff B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , luego  $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$ .
- Las filas de  $B$  son combinaciones lineales de las filas de  $A$ , y viceversa (pues  $P$  es invertible), por lo que generan el mismo espacio. □

**Teorema 6.58** (Base del espacio columna). *Las columnas de  $A$  correspondientes a las columnas pivote en su forma escalonada reducida forman una base para  $\mathcal{C}(A)$ .*

*Demostración.* Sea  $R$  la forma escalonada reducida de  $A$ , y sean  $j_1, \dots, j_r$  las posiciones de las columnas pivote. Las columnas  $\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_r}$  de  $A$  son linealmente independientes porque las columnas correspondientes de  $R$  lo son (forman parte de la base canónica). Además, cualquier columna de  $A$  es combinación

lineal de estas columnas pivote, pues las operaciones fila preservan las relaciones de dependencia lineal entre columnas. □

**Teorema 6.59** (Teorema del rango-nulidad). *Para  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ :  $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n$ .*

*Demostración.* Sea  $r = \text{rango}(A) = \dim \mathcal{R}(A)$ . En la forma escalonada reducida de  $A$ , hay  $r$  columnas pivote y  $n - r$  columnas no pivote. El sistema homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene  $n - r$  variables libres, cada una correspondiente a una columna no pivote. Por tanto,  $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$ , y se cumple  $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = (n - r) + r = n$ . □

**Teorema 6.60** (Teorema fundamental de los espacios fundamentales). *Para  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ :*

- 1.  $\mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A^T)$  en  $\mathbb{R}^n$
- 2.  $\mathcal{N}(A^T) \perp \mathcal{C}(A)$  en  $\mathbb{R}^m$
- 3.  $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^T)$  y  $\mathcal{N}(A^T)^\perp = \mathcal{C}(A)$

*Demostración.* (1) Si  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A)$  y  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(A^T)$ , entonces  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{y} = A^T\mathbf{z}$  para algún  $\mathbf{z}$ . Luego:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^T\mathbf{z}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{z} = 0$$

(2) Similar al anterior, usando que  $\mathcal{C}(A) = \mathcal{R}(A^T)$ .

(3) Por el teorema del rango-nulidad y propiedades de complementos ortogonales en espacios de dimensión finita. □

**Problema 6.61.** Encuentre bases para  $\mathcal{N}(A)$ ,  $\mathcal{R}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A)$ :

(a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & -8 & 9 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

**Solución:** (a) Aplicando operaciones elementales de fila a  $A$ :

$$F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_3 + F_1 \rightarrow F_3 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -4 \\ 0 & 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_3 + F_2 \rightarrow F_3 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma escalonada reducida:  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 1 & 1 & 4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- $\mathcal{R}(A)$ : Base  $\{(1, 0, 1, 2/7), (0, 1, 1, 4/7)\}$
- $\mathcal{C}(A)$ : Columnas pivote 1 y 2:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$



- $\mathcal{N}(A)$ : Del sistema homogéneo con variables libres  $x_3$  y  $x_4$ :

$$\mathcal{N}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/7 \\ -4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) La forma escalonada reducida de  $A$  es:  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 114 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -48 \end{pmatrix}$

- $\mathcal{R}(A)$ : Base  $\{(1, 0, 0, 0, 114), (0, 1, 0, 0, 51), (0, 0, 1, 0, 3), (0, 0, 0, 1, -48)\}$

- $\mathcal{C}(A)$ : Columnas pivote 1,2,3,4:  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

- $\mathcal{N}(A)$ : Con  $x_5$  como variable libre:  $\mathcal{N}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -114 \\ -51 \\ -3 \\ 48 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

**Problema 6.62.** Encuentre bases para los espacios generados por:

- (a)  $\{(1, 0, 1, 1), (-3, -3, 7, 1), (-1, -3, 9, 3), (-5, 3, 5, 1)\}$
- (b)  $\{(1, -1, 5, 2), (-2, 3, 1, 0), (4, -5, 9, 4), (1, 4, -2, 3), (7, 18, -2, 8)\}$

**Solución:** (a) Matriz con vectores como filas y reducción:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 7 & 1 \\ -1 & -3 & 9 & 3 \\ -5 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -10/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Base:  $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -10/3, -4/3)\}$

(b) Reducción de la matriz:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 7 & 18 & -2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Base:  $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$

**Problema 6.63.** Para  $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & 17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ :

- (a) Encuentre bases para  $\mathcal{N}(A)$  y  $\mathcal{N}(A^T)$

**Solución:** (a) Reducción de  $A$  a su forma escalonada reducida:  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Del sistema homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  con variable libre  $x_3 = t : \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Por tanto:  $\mathcal{N}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

Para  $A^T$ , calculando su forma escalonada reducida:  $A^T \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Como  $A^T$  tiene rango 4 (matriz  $5 \times 4$  con 4 columnas pivote):  $\mathcal{N}(A^T) = \{\mathbf{0}\}$ .

**Problema 6.64.** Construya una matriz  $A$  tal que  $\mathcal{N}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

**Solución:** Como  $\dim \mathcal{N}(A) = 2$  y  $A$  es  $m \times 4$ , por el teorema del rango-nulidad:  $\text{rango}(A) = 4 - 2 = 2$ .

Las filas de  $A$  deben ser ortogonales a los vectores del núcleo. Si  $\mathbf{r}$  es una fila de  $A$ , entonces:

$$\mathbf{r} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{r} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Esto equivale a resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{r}^T = \mathbf{0}$$

Encontrando el espacio nulo de esta matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son:  $\mathbf{r} = s(2, 4, 1, 0) + t(4, 5, 0, 1)$  para escalares  $s, t$ .

Por tanto, una matriz posible es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Problema 6.65.** Determine el rango de  $A$  en función del parámetro  $t$ :

(a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{pmatrix}$

**Solución:** (a) Calculamos  $\det(A) = 1(t - 1) - 1(1 - t) + t(1 - t^2) = t - 1 - 1 + t + t - t^3 = 3t - 2 - t^3 = -t^3 + 3t - 2$   
Factorizando:  $\det(A) = -(t - 1)^2(t + 2)$

- Si  $t \neq 1$  y  $t \neq -2$ :  $\det(A) \neq 0$ , luego  $\text{rango}(A) = 3$
- Si  $t = 1$ :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , todas las filas son iguales,  $\text{rango}(A) = 1$
- Si  $t = -2$ :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , reduciendo se obtiene  $\text{rango}(A) = 2$

(b)  $\det(A) = t(6t + 6) - 3(-3t + 2) + (-1)(-9 + 6) = 6t^2 + 6t + 9t - 6 - 3 = 6t^2 + 15t - 9$   
Factorizando:  $\det(A) = 3(2t^2 + 5t - 3) = 3(2t - 1)(t + 3)$

- Si  $t \neq 1/2$  y  $t \neq -3$ :  $\text{rango}(A) = 3$
- Si  $t = 1/2$  o  $t = -3$ :  $\text{rango}(A) < 3$ , determinando por reducción se obtiene  $\text{rango}(A) = 2$

**Teorema 6.66** (Caracterización de matrices invertibles - Versión 4). *Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $A$  es invertible.
2. La forma escalonada reducida de  $A$  es la matriz identidad  $I_n$ .
3.  $A$  se puede escribir como producto de matrices elementales.
4.  $A$  tiene rango máximo ( $\text{rango}(A) = n$ ).
5.  $\det(A) \neq 0$ .
6.  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene únicamente la solución nula.
7.  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es consistente para cualquier vector  $\mathbf{b}$ .
8.  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución única para cualquier vector  $\mathbf{b}$ .
9. Los vectores columna de  $A$  son linealmente independientes.
10. Los vectores fila de  $A$  son linealmente independientes.
11.  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n$ .
12.  $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$ .
13.  $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$ .
14.  $\mathcal{N}(A^T) = \{\mathbf{0}\}$ .
15.  $\dim(\mathcal{C}(A)) = n$ .
16.  $\dim(\mathcal{R}(A)) = n$ .
17.  $\dim(\mathcal{N}(A)) = 0$ .

*Demostración.* Ya hemos demostrado la equivalencia de las afirmaciones (1)-(8) en el teorema 5.16. Procederemos a demostrar que las demás afirmaciones son equivalentes.

- (1)  $\Leftrightarrow$  (9):  $A$  es invertible si y solo si sus columnas forman una base de  $\mathbb{R}^n$ , lo cual ocurre si y solo si son linealmente independientes (ya que son  $n$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ ).
- (1)  $\Leftrightarrow$  (10): Análogamente,  $A$  es invertible si y solo si sus filas son linealmente independientes.
- (4)  $\Leftrightarrow$  (11):  $\text{rango}(A) = n \Leftrightarrow \dim(\mathcal{C}(A)) = n \Leftrightarrow \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n$ .
- (4)  $\Leftrightarrow$  (12):  $\text{rango}(A) = n \Leftrightarrow \dim(\mathcal{R}(A)) = n \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$ .
- (6)  $\Leftrightarrow$  (13):  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene únicamente la solución nula si y solo si  $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$ .

(4)  $\Leftrightarrow$  (14): Por el teorema del rango-nulidad:  $\dim(\mathcal{N}(A)) + \text{rango}(A) = n$ . Por tanto,  $\text{rango}(A) = n \Leftrightarrow \dim(\mathcal{N}(A)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$ .

Como  $A^T$  también es  $n \times n$ , el mismo argumento muestra que  $A^T$  es invertible si y solo si  $\mathcal{N}(A^T) = \{\mathbf{0}\}$ . Pero  $A$  es invertible si y solo si  $A^T$  es invertible.

(11)  $\Leftrightarrow$  (15):  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim(\mathcal{C}(A)) = n$ .

(12)  $\Leftrightarrow$  (16):  $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim(\mathcal{R}(A)) = n$ .

(13)  $\Leftrightarrow$  (17):  $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim(\mathcal{N}(A)) = 0$ .

Por tanto, todas las afirmaciones son equivalentes. □

6.7

Problemas propuestos para el capítulo

**Problema 6.67.** Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Si la afirmación es verdadera, justifique adecuadamente; en caso contrario, muestre un contraejemplo.

- I. Un espacio vectorial siempre debe contener al menos dos vectores.
- II. Si  $\mathbf{u}$  es un vector y  $k$  un escalar, entonces  $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$  implica que  $k = 0$ .
- III. Todo subespacio de un espacio vectorial es un espacio vectorial.
- IV. Todo subconjunto de un espacio vectorial que contenga a  $\mathbf{0}$  es un espacio vectorial.
- V. El generado por cualquier conjunto finito de vectores en un espacio vectorial es cerrado bajo suma de vectores y multiplicación por escalar.
- VI. La intersección y la unión de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.
- VII. Los polinomios  $(x - 1)$ ,  $(x - 1)^2$  y  $(x - 1)^3$  generan  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ .
- VIII. Un conjunto con un único vector es linealmente independiente.
- IX. El conjunto  $\{\mathbf{v}, k\mathbf{v}\}$  es linealmente dependiente para cualquier  $k \neq 0$ .
- X. Si el conjunto  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es linealmente independiente, entonces el conjunto  $\{kv_1, kv_2, kv_3\}$  es linealmente independiente para cualquier  $k \neq 0$ .
- XI. Si  $V = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , entonces  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ .
- XII. Todo subconjunto linealmente independiente de  $V$  es una base para  $V$ .
- XIII. Toda base de  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$  contiene al menos un polinomio de grado 3.
- XIV. Existe un conjunto de 17 vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^{17}$ .
- XV. Todo conjunto linealmente independiente de  $\mathbb{R}^5$  con 5 vectores genera  $\mathbb{R}^5$ .
- XVI. Todo conjunto de 6 vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^6$  es base de  $\mathbb{R}^6$ .

**Problema 6.68.** Determine si los siguientes conjuntos junto con las operaciones dadas forman un espacio vectorial:

(a) Sea  $V = \mathbb{R}^2$  con escalares en  $\mathbb{R}$  y las operaciones:

- **Suma:**  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- **Multiplicación por escalar:**  $k(x, y) = (2kx, 0)$

(b) Sea  $V = \mathbb{R}^+$  (números reales positivos) con las operaciones:

- **Suma:**  $x \oplus y = xy$
- **Multiplicación por escalar:**  $k \odot x = x^k$

**Problema 6.69.** Determine si  $W$  es subespacio de  $\mathbb{R}^3$ :

- (a)  $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 7b + c = 0\}$
- (b)  $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 1 = b + 2 = c + 3\}$
- (c)  $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 0\}$
- (d)  $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc = 0\}$

**Problema 6.70.** Determine si  $W$  es subespacio de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ :

- (a)  $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b + c + d = 0 \right\}$
- (b)  $W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid A \text{ es simétrica} \right\}$
- (c)  $W = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$  (matrices ortogonales)
- (d)  $W = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\}$

**Problema 6.71.** Determine si  $W$  es subespacio de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ :

- (a)  $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$
- (b)  $W = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$
- (c)  $W = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p'(0) = 0\}$

**Problema 6.72.** Sea  $\mathcal{C}[-2, 2]$  el espacio de funciones continuas en  $[-2, 2]$ . Determine si  $W$  es subespacio:

- (a)  $W = \{f \in \mathcal{C}[-2, 2] \mid f(-1) \cdot f(1) = 0\}$
- (b)  $W = \{f \in \mathcal{C}[-2, 2] \mid f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in [-2, 2]\}$
- (c)  $W = \{f \in \mathcal{C}[-2, 2] \mid f(-x) = f(x) \text{ para todo } x \in [-2, 2]\}$  (funciones pares)

**Problema 6.73.** Sea  $\mathcal{F}[0, 1]$  el espacio de todas las funciones de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ . Determine si  $W$  es subespacio:

- (a)  $W = \{f \in \mathcal{F}[0, 1] \mid f(0) = f(1)\}$
- (b)  $W = \{f \in \mathcal{F}[0, 1] \mid f(0) = f(1) + 3\}$
- (c)  $W = \{f \in \mathcal{F}[0, 1] \mid f(x) = f(1 - x) \text{ para todo } x \in [0, 1]\}$

**Problema 6.74.** En el espacio  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  de todas las funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , sea:

$$W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid \text{existe } k \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| \leq k \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

Demuestre que  $W$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

**Problema 6.75.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Si  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios de  $V$ , demuestre que:

- (a)  $W_1 \cap W_2$  es subespacio de  $V$
- (b)  $W_1 + W_2 := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in W_1, \mathbf{y} \in W_2\}$  es subespacio de  $V$
- (c)  $W_1 \cup W_2$  es subespacio de  $V$  si y solo si  $W_1 \subseteq W_2$  o  $W_2 \subseteq W_1$

**Problema 6.76.** Determine cuáles de los siguientes polinomios pertenecen al subespacio generado por  $p_1 = 2 + x + 4x^2$ ,  $p_2 = 1 - x + 3x^2$  y  $p_3 = 3 + 2x + 5x^2$ :

- (a)  $-9 - 7x - 15x^2$
- (b)  $6 + 11x + 6x^2$
- (c)  $7 - 8x + 9x^2$

**Problema 6.77.** Sean  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ . Determine cuáles de las siguientes matrices están en  $\text{span}\{A, B, C\}$ :

(a)  $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

**Problema 6.78.** Para cada conjunto de vectores, determine si generan  $\mathbb{R}^3$ :

(a)  $v_1 = (2, 2, 2)$ ,  $v_2 = (3, 5, 8)$ ,  $v_3 = (11, 19, 23)$

(b)  $v_1 = (1, 2, 6)$ ,  $v_2 = (2, 4, 12)$ ,  $v_3 = (7, 9, 15)$

(c)  $v_1 = (3, 4, 1)$ ,  $v_2 = (9, 12, 3)$ ,  $v_3 = (7, 9, 13)$ ,  $v_4 = (3, 3, 1)$

**Problema 6.79.** Demuestre que si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores linealmente independientes, entonces el conjunto  $\{\mathbf{w} - \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{u} - \mathbf{w}\}$  es linealmente independiente.

**Problema 6.80.** Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:

(a)  $\{(1, 2, 3), (2, 1, 0), (0, 3, 6)\}$  en  $\mathbb{R}^3$

(b)  $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$  en  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  en  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

**Problema 6.81.** Sean  $W_1$  y  $W_2$  los siguientes subconjuntos de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ :

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+c & b+c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -y & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Demuestre que  $W_1$  es subespacio vectorial.

(b) Encuentre una base para  $W_1$  y determine su dimensión.

(c) Demuestre que  $W_2$  es subespacio vectorial.

(d) Encuentre una base para  $W_2$  y determine su dimensión.

(e) Determine  $W_1 \cap W_2$  y encuentre una base para esta intersección.

(f) Use la fórmula  $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$  para calcular  $\dim(W_1 + W_2)$ .

**Problema 6.82.** Sean  $W_1$  y  $W_2$  los siguientes subconjuntos de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ :

$$W_1 = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$$

$$W_2 = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(-1) = 0\}$$

(a) Demuestre que  $W_1$  es subespacio vectorial.

(b) Encuentre una base para  $W_1$  y determine su dimensión.

(c) Demuestre que  $W_2$  es subespacio vectorial.

(d) Encuentre una base para  $W_2$  y determine su dimensión.

(e) Determine  $W_1 \cap W_2$  y encuentre una base para esta intersección.

(f) Use la fórmula  $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$  para calcular  $\dim(W_1 + W_2)$ .

**Problema 6.83.** Encuentre una base y la dimensión de los siguientes subespacios:

- (a)  $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, z - w = 0\}$
- (b)  $W = \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$  (matrices simétricas)
- (c)  $W = \{p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1) = 0\}$

**Problema 6.84.** En  $\mathbb{R}^3$ , considere las bases:  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  y  $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- (a) Encuentre las coordenadas del vector  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  respecto a la base  $B$ .
- (b) Encuentre la matriz de cambio de base de  $B$  a  $B'$ .
- (c) Use la matriz de cambio de base para encontrar  $[\mathbf{v}]_{B'}$  a partir de  $[\mathbf{v}]_B$ .

**Problema 6.85.** Para la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ :

- (a) Encuentre bases para  $\mathcal{C}(A)$ ,  $\mathcal{R}(A)$  y  $\mathcal{N}(A)$ .
- (b) Verifique el teorema del rango-nulidad.
- (c) Determine si el vector  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  pertenece a  $\mathcal{C}(A)$ .

**Problema 6.86.** Construya una matriz  $A$  de tamaño  $3 \times 4$  tal que:

$$\mathcal{N}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Problema 6.87.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y sean  $W_1, W_2, W_3$  subespacios de  $V$ . Calcule y demuestre una fórmula para  $\dim(W_1 + W_2 + W_3)$ .





# Capítulo

## 7

# Espacios vectoriales con producto interno

Algunos espacios vectoriales poseen una propiedad particular llamada producto interno. La ventaja de esta propiedad es que nos permite medir longitudes y ángulos. Cuando un espacio vectorial posee producto interno, se facilitan considerablemente estas operaciones geométricas. En este capítulo definiremos el concepto de producto interno y estableceremos propiedades interesantes respecto a estos espacios vectoriales especiales.

**Definición 7.1** (Espacio vectorial con producto interno). Sea  $V$  un espacio vectorial real (Definición 6.1). Un **producto interno** es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface:

1.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$  (Simetría)
2.  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$  (Linealidad en primera variable)
3.  $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  para todo  $k \in \mathbb{R}$  (Homogeneidad)
4.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$  y  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$  si y solo si  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  (Positividad definida)

**Ejemplo 7.2** (Producto punto usual en  $\mathbb{R}^2$ ). Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , el producto

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$$

es un producto interno.

*Demostración.* Verifiquemos los axiomas:

- I.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
- II. Para  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ :  
 $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 = u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- III.  $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 = k(u_1v_1 + u_2v_2) = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
- IV.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = u_1^2 + u_2^2 \geq 0$  y  $u_1^2 + u_2^2 = 0$  si y solo si  $u_1 = u_2 = 0$

La generalización para  $\mathbb{R}^n$  es  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$  con  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . □

**Ejemplo 7.3** (Producto interno no usual). En  $\mathbb{R}^2$ , la función  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$  para  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  define un producto interno. La verificación de axiomas es análoga al ejemplo anterior.

**Definición 7.4** (Norma inducida). Dado  $V$  con producto interno, la **norma inducida** de  $\mathbf{u} \in V$  está dada por  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ .

**Definición 7.5** (Bola unitaria). La **bola unitaria** de  $V$  es el conjunto  $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{x} \in V : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ .

- Con producto usual en  $\mathbb{R}^2$ :  $\|\mathbf{u}\| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$  (circunferencia)
- Con producto  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$ :  $\|\mathbf{u}\| = 1 \Rightarrow 2x^2 + 3y^2 = 1$  (elipse)

**Observación 7.6** (Ejemplos de productos internos). 1. En  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$

$$2. \text{ En } \mathbb{P}_n(\mathbb{R}): \langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k \text{ donde } p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$$

$$3. \text{ En } \mathcal{C}[a, b]: \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

**Definición 7.7** (Producto interno en espacios vectoriales complejos). Sea  $V$  un espacio vectorial complejo. Un *producto interno* es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  que satisface:

1.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (Simetría conjugada)
2.  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$  (Aditividad)
3.  $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  para todo  $k \in \mathbb{C}$  (Homogeneidad en primera variable)
4.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$  y  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$  si y solo si  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  (Positividad definida)

**Teorema 7.8** (Propiedades del producto interno en espacios vectoriales complejos). Sea  $V$  un espacio vectorial complejo con producto interno. Para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  y  $k \in \mathbb{C}$  se cumple que  $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = \overline{k}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  (Conjugación en la segunda variable)

*Demostración.* Usando los axiomas del producto interno complejo:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle &= \overline{\langle k\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} && \text{(Simetría conjugada)} \\ &= \overline{k\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} && \text{(Homogeneidad en 1ra variable)} \\ &= \overline{k} \cdot \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} && \text{(Propiedad del conjugado)} \\ &= \overline{k} \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle && \text{(Simetría conjugada)} \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 7.9** (Producto interno canónico en  $\mathbb{C}^n$ ). Para  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  en  $\mathbb{C}^n$ , la función:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}$  es un producto interno válido. Verifiquemos los axiomas:

**Solución:**

1. **Simetría conjugada:**  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \sum v_k \overline{u_k} = \overline{\sum \overline{v_k} u_k} = \overline{\sum u_k \overline{v_k}} = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$
2. **Aditividad:**  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum (u_k + v_k) \overline{w_k} = \sum u_k \overline{w_k} + \sum v_k \overline{w_k} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. **Homogeneidad en 1ra variable:**  $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum (ku_k) \overline{v_k} = k \sum u_k \overline{v_k} = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. **Positividad definida:**  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum |u_k|^2 \geq 0$  y  $= 0 \iff u_k = 0 \forall k$

**Definición 7.10** (Ortogonalidad y ángulo). Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno real, entonces

- $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son *ortogonales* ( $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ ) si  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$
- El *ángulo* entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  es  $\theta \in [0, \pi]$  donde  $\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$

**Ejemplo 7.11.** Calcule  $\langle \cos x, \sin x \rangle$  en  $\mathcal{C}[0, \pi]$  con  $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$ :

**Solución:**  $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi \sin x \cos x dx = \left[ \frac{\sin^2 x}{2} \right]_0^\pi = 0 - 0 = 0$ . Por tanto,  $f \perp g$ .

**Problema 7.12.** Un rombo es un paralelogramo cuyos lados son de igual longitud. Demuestre que si se construye un rombo en un espacio vectorial con producto interno real sus diagonales son ortogonales.

**Solución:** Sea  $V$  un espacio vectorial real con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sea  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  dos vectores no nulos y linealmente independientes que forman dos lados adyacentes de un rombo, es decir,  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$ . Las diagonales del rombo son:  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

Calculamos el producto interno de las diagonales:

$$\langle \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \rangle = \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$$

Como el producto interno es simétrico ( $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ ):

$$= \|\mathbf{a}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$$

Como  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$ , entonces  $\|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2 = 0$ . Por lo tanto,  $\langle \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \rangle = 0$  lo que prueba que las diagonales del rombo son ortogonales.

**Problema 7.13.** Demuestre que si las diagonales de un paralelogramo tienen igual norma, entonces los vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  son ortogonales.

**Solución:** Las diagonales son  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  y  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ . Si tienen igual norma:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

Desarrollando:

$$\|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \implies \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

**Teorema 7.14** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno real y sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Entonces:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

Además, la igualdad se cumple si y solo si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son linealmente dependientes.

*Demostración.* Consideramos dos casos:

1. Si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ : Ambos lados son cero y la desigualdad se cumple trivialmente.
2. Si  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ : Para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ , definimos

$$q(t) = \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0.$$

Esta función cuadrática en  $t$  es no negativa para todo  $t$ , por lo que su discriminante debe ser no positivo:

$$(2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 \leq 0$$

Simplificando:

$$4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq 4\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$$

Dividiendo por 4 y tomando raíz cuadrada:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

La igualdad se cumple cuando el discriminante es cero, lo que ocurre si y solo si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son linealmente dependientes.  $\square$

**Teorema 7.15** (Consecuencias de Cauchy-Schwarz). En un espacio vectorial real con producto interno:

1. **Desigualdad triangular:**  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

*Demostración.* Usando Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\
 &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\
 &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
 &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
 &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2
 \end{aligned}$$

Tomando raíces cuadradas se obtiene el resultado.  $\square$

2. Si se define la distancia entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  como  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ , entonces se cumple la **desigualdad triangular para distancia**:  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \\
 &= \|(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + (\mathbf{w} - \mathbf{v})\| \\
 &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| \\
 &= d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})
 \end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue de la desigualdad triangular para normas.  $\square$

**Teorema 7.16** (Teorema de Pitágoras). Si  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$  en un espacio vectorial con producto interno real, entonces  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .

*Demostración.* Desarrollamos la norma al cuadrado:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
 &= \|\mathbf{u}\|^2 + 0 + 0 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (\text{por ortogonalidad}) \\
 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2
 \end{aligned}$$

$\square$

**Problema 7.17.** Sea  $V$  un espacio vectorial real con producto interno. Demuestre la **identidad del paralelogramo**, es decir, si  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son dos vectores en  $V$  entonces

$$2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$

**Solución:** Desarrollamos los términos:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

Sumando:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$$

**Problema 7.18.** Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  vectores en un espacio vectorial real con producto interno  $V$ . Demuestre que se cumple la ley del coseno:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

**Solución:** Por definición de ángulo:

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Desarrollamos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \end{aligned}$$

**Definición 7.19** (Complemento ortogonal). Sea  $W$  un subespacio de un espacio vectorial  $V$  con producto interno. El **complemento ortogonal** de  $W$ , denotado  $W^\perp$ , es el conjunto:

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W\}$$

**Teorema 7.20** (Propiedades del complemento ortogonal). Sea  $W$  un subespacio vectorial de  $V$  (espacio vectorial con producto interno real). Entonces:

1.  $W^\perp$  es subespacio vectorial de  $V$
2.  $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$
3.  $(W^\perp)^\perp = W$  (en dimensión finita)
4.  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$  (en dimensión finita)

*Demostración.* Para cada propiedad:

1.  **$W^\perp$  es subespacio:** El elemento nulo  $\mathbf{0} \in W^\perp$  pues  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W$ . Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^\perp$ . Para cualquier  $\mathbf{w} \in W$ :  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 + 0 = 0$ . Así,  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W^\perp$ .

Sea  $\mathbf{u} \in W^\perp$  y  $k \in \mathbb{R}$ . Para cualquier  $\mathbf{w} \in W$ :  $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = k \cdot 0 = 0$ . Así,  $k\mathbf{u} \in W^\perp$ .

2. **Intersección trivial:** Si  $\mathbf{v} \in W \cap W^\perp$ , entonces  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  (porque  $\mathbf{v} \in W^\perp$  y  $\mathbf{v} \in W$ ). Por positividad del producto interno,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

3. **Doble complemento:** Por definición,  $(W^\perp)^\perp$  es el conjunto de vectores ortogonales a todo vector en  $W^\perp$ . Claramente  $W \subseteq (W^\perp)^\perp$  porque si  $\mathbf{w} \in W$ , entonces  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$  para todo  $\mathbf{v} \in W^\perp$ .

Para la inclusión inversa, sea  $\mathbf{u} \in (W^\perp)^\perp$ . Como  $V = W \oplus W^\perp$  (por la propiedad 4), podemos escribir  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$  con  $\mathbf{w} \in W$  y  $\mathbf{w}' \in W^\perp$ . Entonces:

$$0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle + \langle \mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle = 0 + \langle \mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle = \|\mathbf{w}'\|^2$$

Así,  $\mathbf{w}' = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{u} = \mathbf{w} \in W$ .

4. **Dimensión:** Sea  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$  base de  $W$  y  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  base de  $V$ . Construimos la matriz  $A$  cuyas entradas son:  $a_{ij} = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle$  ( $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$ ). Consideremos el sistema homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Un vector  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  satisface:

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^n x_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0.$$

Por linealidad del producto interno, esto equivale a:

$$\left\langle \mathbf{w}_i, \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j \right\rangle = 0 \quad \forall i$$

Como los  $\mathbf{w}_i$  generan  $W$ , tenemos que  $\sum x_j \mathbf{v}_j \in W^\perp$ . La dimensión del espacio solución de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es  $n - \text{rango}(A)$ . Pero:

$$\begin{aligned} \text{rango}(A) &= \dim\{\text{combinaciones lineales de filas de } A\} \\ &= \dim\{\langle \mathbf{w}_i, \cdot \rangle|_V : 1 \leq i \leq k\} \\ &= \dim W \quad (\text{pues los funcionales son LI}) \end{aligned}$$

Por tanto,  $\dim W^\perp = n - \dim W$ .

□

**Teorema 7.21** (Relaciones fundamentales para una matriz). *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  con entradas reales. Entonces:*

- 1.  $\mathcal{N}(A) = (\mathcal{R}(A))^\perp$  en  $\mathbb{R}^n$
- 2.  $\mathcal{N}(A^T) = (\mathcal{C}(A))^\perp$  en  $\mathbb{R}^m$

*Demostración.* Demostramos cada parte:

- 1. Sea  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A)$ . Entonces  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Esto implica que cada fila de  $A$  multiplicada por  $\mathbf{x}$  es cero. Pero las filas de  $A$  generan  $\mathcal{R}(A)$ , así que  $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x} \rangle = 0$  para cada fila  $\mathbf{r}_i$ . Por tanto,  $\mathbf{x} \in (\mathcal{R}(A))^\perp$ .  
Recíprocamente, si  $\mathbf{x} \in (\mathcal{R}(A))^\perp$ , entonces  $\mathbf{x}$  es ortogonal a cada fila de  $A$ , así que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , luego  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A)$ .
- 2. Similarmente,  $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(A^T)$  sii  $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , lo que equivale a  $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$ . Esto significa que  $\mathbf{y}$  es ortogonal a cada columna de  $A$ , es decir, a  $\mathcal{C}(A)$ . Por tanto,  $\mathcal{N}(A^T) = (\mathcal{C}(A))^\perp$ .

□

**Ejemplo 7.22.** Sea  $W = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Hallar  $W^\perp$  en  $\mathbb{R}^4$  con producto punto usual.

**Solución:** Un vector  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W^\perp$  si:  $\begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle = x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Resolvemos el sistema:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$  Solución general:  $\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} +$

$t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$

Base de  $W^\perp$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 7/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

**Definición 7.23** (Conjunto ortogonal y ortonormal). Un conjunto  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  en  $V$  (con producto interno) es **ortogonal** si  $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$  y es **ortonormal** si es ortogonal y  $\|\mathbf{v}_i\| = 1$  para todo  $i$ .

**Teorema 7.24.** *Todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.*

*Demostración.* Sea  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  ortogonal con  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ . Supongamos  $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ . Para cada  $j$ , tomamos producto interno con  $\mathbf{v}_j$ :  $\left\langle \sum_{i=1}^k c_i\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ .

Por ortogonalidad:  $c_j\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle = c_j\|\mathbf{v}_j\|^2 = 0$ . Como  $\|\mathbf{v}_j\|^2 > 0$  (pues  $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$ ), entonces  $c_j = 0$ . Esto para cada  $j$ , luego  $S$  es l.i. □

**Definición 7.25** (Proyección ortogonal). Sea  $V$  espacio vectorial con producto interno real y  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  con  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . La **proyección ortogonal** de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$  es:  $\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$

**Teorema 7.26** (Expansión en base ortogonal). Sea  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una base ortogonal de  $V$  (espacio vectorial con producto interno real). Para todo  $\mathbf{u} \in V$   $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \text{proy}_{\mathbf{v}_i} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i$

*Demostración.* Como  $S$  es base, existen escalares  $k_1, \dots, k_n$  tales que:  $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n k_j \mathbf{v}_j$

Para cada  $i$ , calculamos el producto interno con  $\mathbf{v}_i$ :  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n k_j \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n k_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle$

Por ortogonalidad ( $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$  para  $j \neq i$ ):  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = k_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = k_i \|\mathbf{v}_i\|^2$

Despejando  $k_i$ :  $k_i = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2}$

Sustituyendo en la combinación lineal:  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \text{proy}_{\mathbf{v}_i} \mathbf{u} \quad \square$

**Teorema 7.27** (Descomposición ortogonal). Sea  $W$  subespacio de dimensión finita de  $V$  (espacio vectorial con producto interno real). Para todo  $\mathbf{u} \in V$ , existen únicos  $\mathbf{w} \in W$  y  $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$  tales que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$$

Además,  $\mathbf{w} = \text{proy}_W \mathbf{u}$  es la proyección ortogonal sobre  $W$ .

*Demostración.* Sea  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  base ortogonal de  $W$ . Definimos:  $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \text{proy}_{\mathbf{v}_i} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i$  y  $\mathbf{w}^\perp = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ . Veamos que  $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$ . Para cada  $\mathbf{v}_j$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}^\perp, \mathbf{v}_j \rangle &= \langle \mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^k \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

Como los  $\mathbf{v}_j$  generan  $W$ ,  $\mathbf{w}^\perp$  es ortogonal a todo  $W$ . La unicidad se sigue de que  $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$ .  $\square$

**Teorema 7.28.** Sea  $W$  subespacio de  $V$  con base ortogonal  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ . Para todo  $\mathbf{u} \in V$ , la proyección ortogonal sobre  $W$  es:  $\text{proy}_W \mathbf{u} = \sum_{i=1}^r \text{proy}_{\mathbf{v}_i} \mathbf{u}$

*Demostración.* Por el teorema de descomposición ortogonal,  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$  con  $\mathbf{w} \in W$  y  $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$ . Entonces:

$$\text{proy}_W \mathbf{u} = \mathbf{w} = \sum_{i=1}^r \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i$$

Pero  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u} - \mathbf{w}^\perp, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle$  pues  $\mathbf{w}^\perp \perp \mathbf{v}_i$ . Así:  $\text{proy}_W \mathbf{u} = \sum_{i=1}^r \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^r \text{proy}_{\mathbf{v}_i} \mathbf{u} \quad \square$

**Teorema 7.29** (Proceso de Gram-Schmidt). Todo espacio vectorial de dimensión finita con producto interno posee una base ortogonal.

*Demostración.* Sea  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  base cualquiera de  $V$ . Construimos una base ortogonal  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  recursivamente:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proy}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proy}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_3 - \text{proy}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{u}_3$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proy}_{\mathbf{v}_j} \mathbf{u}_k$$

Cada  $\mathbf{v}_k$  es ortogonal a  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$  por construcción, y el conjunto resultante es base ortogonal. Para obtener una base ortonormal se normaliza cada vector  $\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$ . □

**Problema 7.30.** Use el proceso de Gram-Schmidt para calcular una base ortogonal para el subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  generado por  $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 3)$  y  $\mathbf{w}_2 = (2, -1, 0)$ .

**Solución:** Datos:  $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 3)$ ,  $\mathbf{w}_2 = (2, -1, 0)$

**Paso 1:**  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Paso 2:** Proyección de  $\mathbf{w}_2$  sobre  $\mathbf{v}_1$ :
$$\text{proy}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \frac{2}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 - \text{proy}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Base ortogonal:
$$\boxed{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

**Problema 7.31.** Calcule una base ortogonal para  $\mathbb{R}^3$  que contenga al vector  $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 1)$ .

**Solución:** Dado:  $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 1)$

Base inicial:  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  con  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$

**Paso 1:**  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Paso 2:** Proyección de  $\mathbf{e}_1$  sobre  $\mathbf{u}_1$ :
$$\text{proy}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{e}_1 = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 - \text{proy}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$



**Paso 3:** Proyección de  $\mathbf{e}_2$  sobre  $\mathbf{u}_1$ :

$$\text{proy}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{e}_2 = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Proyección de  $\mathbf{e}_2$  sobre  $\mathbf{u}_2$ :

$$\text{proy}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 = -\frac{4}{5} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{16}{45} \\ \frac{8}{45} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_2 - \text{proy}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{e}_2 - \text{proy}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{16}{45} \\ \frac{8}{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

**Base ortogonal:**

$$\boxed{\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}}$$

**Problema 7.32.** Calcule una base ortogonal para  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  que contenga al vector  $p(x) = x^2 + 2x + 1$  usando el producto interno de las funciones continuas en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Solución:** Dado:  $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$

**Base inicial:**  $\{p_1, p_2, p_3\}$  con  $p_2(x) = 1$ ,  $p_3(x) = x$

**Producto interno:**  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

**Paso 1:**  $u_1(x) = p_1(x) = x^2 + 2x + 1$

**Paso 2:**  $\langle p_2, u_1 \rangle = \int_0^1 (1)(x^2 + 2x + 1)dx = \frac{7}{3}$

$$\langle u_1, u_1 \rangle = \int_0^1 (x^2 + 2x + 1)^2 dx = \frac{31}{5}$$

$$\text{proy}_{u_1} p_2 = \frac{7/3}{31/5} (x^2 + 2x + 1) = \frac{35}{93} (x^2 + 2x + 1)$$

$$u_2(x) = p_2(x) - \text{proy}_{u_1} p_2 = 1 - \frac{35}{93} (x^2 + 2x + 1) = -\frac{35}{93} x^2 - \frac{70}{93} x + \frac{58}{93}$$

**Paso 3:**  $\langle p_3, u_1 \rangle = \int_0^1 x(x^2 + 2x + 1)dx = \frac{17}{12}$

$$\langle p_3, u_2 \rangle = \int_0^1 x \left( -\frac{35}{93} x^2 - \frac{70}{93} x + \frac{58}{93} \right) dx = -\frac{425}{1116}$$

$$\langle u_2, u_2 \rangle = \int_0^1 \left( -\frac{35}{93} x^2 - \frac{70}{93} x + \frac{58}{93} \right)^2 dx = \frac{1385}{25947}$$

$$\text{proy}_{u_1} p_3 = \frac{17/12}{31/5} u_1(x) = \frac{85}{372} (x^2 + 2x + 1)$$

$$\text{proy}_{u_2} p_3 = \frac{-425/1116}{1385/25947} u_2(x) = -\frac{45}{136} u_2(x)$$

$$u_3(x) = p_3(x) - \text{proy}_{u_1} p_3 - \text{proy}_{u_2} p_3 = x - \frac{85}{372} (x^2 + 2x + 1) + \frac{45}{136} \left( \frac{35}{93} x^2 + \frac{70}{93} x - \frac{58}{93} \right)$$

$$u_3(x) = -\frac{45}{136} x^2 + \frac{23}{68} x - \frac{1}{17}$$

Base ortogonal:

$$u_1(x) = x^2 + 2x + 1, \quad u_2(x) = -\frac{35}{93}x^2 - \frac{70}{93}x + \frac{58}{93}, \quad u_3(x) = -\frac{45}{136}x^2 + \frac{23}{68}x - \frac{1}{17}$$

**Ejemplo 7.33.** Sea  $W = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ . Hallar base ortonormal para  $W$ .

**Solución:** Aplicamos Gram-Schmidt a los vectores  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, 0, -1)^T$ ,  $\mathbf{u}_3 = (2, 0, 3)^T$ :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-1)}{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \\ 0 - \frac{5}{3} + 0 \\ 3 - \frac{5}{3} - (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{11}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Base ortogonal:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/6 \\ -5/3 \\ 11/6 \end{pmatrix} \right\}$

Para obtener una base ortonormal, normalizamos cada vector:

$$\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$$

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2} \Rightarrow \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{11}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{100}{36} + \frac{121}{36}} = \frac{\sqrt{246}}{6} \Rightarrow \mathbf{q}_3 = \frac{\sqrt{246}}{6} \begin{pmatrix} 5/6 \\ -5/3 \\ 11/6 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 7.34.** Sea  $B = \{1 + x, x^2, x - x^2\}$ , halle una base ortogonal para  $B$  usando el producto interno  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ .

**Solución:** Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt:

$$\mathbf{v}_1 = 1 + x$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= x^2 - \frac{\langle x^2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 \\ &= x^2 - \frac{\int_0^1 x^2(1+x)dx}{\int_0^1 (1+x)^2 dx} (1+x) \\ &= x^2 - \frac{\left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1}{\left[ x + x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1} (1+x) \\ &= x^2 - \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 + 1 + \frac{1}{3}} (1+x) \\ &= x^2 - \frac{7/12}{7/3} (1+x) \\ &= x^2 - \frac{1}{4} (1+x) \\ &= \boxed{x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= (x - x^2) - \frac{\langle x - x^2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle x - x^2, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \mathbf{v}_2 \\ &= (x - x^2) - \frac{\int_0^1 (x - x^2)(1+x)dx}{7/3} (1+x) - \frac{\int_0^1 (x - x^2)(x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4})dx}{\int_0^1 (x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4})^2 dx} \left( x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right) \\ &= (x - x^2) - \frac{1/4}{7/3} (1+x) - \frac{-1/80}{13/240} \left( x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right) \\ &= (x - x^2) - \frac{3}{28} (1+x) + \frac{3}{13} \left( x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right) \\ &= x - x^2 - \frac{3}{28} - \frac{3}{28}x + \frac{3}{13}x^2 - \frac{3}{52}x - \frac{3}{52} \\ &= \left( -x^2 + \frac{3}{13}x^2 \right) + \left( x - \frac{3}{28}x - \frac{3}{52}x \right) + \left( -\frac{3}{28} - \frac{3}{52} \right) \\ &= -\frac{10}{13}x^2 + \frac{76}{91}x - \frac{15}{91}\end{aligned}$$

**Definición 7.35** (Aproximación por mínimos cuadrados). Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Si el sistema  $Ax = b$  no tiene solución exacta (es decir,  $b \notin \mathcal{C}(A)$ ), se busca  $x$  tal que  $Ax$  sea el vector más cercano posible a  $b$ , minimizando el error cuadrático:  $\min_x \|b - Ax\|$ . La mejor aproximación es el vector  $Ax$  tal que  $Ax = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$ .

**Ejemplo 7.36.** Resuelve por mínimos cuadrados el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 9z = 1 \\ 7x + 8y + 4z = 1 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

**Solución:** La matriz del sistema y vector independiente son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución por ecuaciones normales:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b = \left( \frac{10}{23}, -\frac{65}{23}, \frac{12}{23} \right)$$

**Teorema 7.37** (Mejor aproximación). Sea  $W$  subespacio de  $V$  (espacio vectorial con producto interno real, dimensión finita) y  $b \in V$ . La proyección ortogonal  $\text{proy}_W(b)$  es el único vector en  $W$  que minimiza la distancia a  $b$ :

$$\|b - \text{proy}_W(b)\| \leq \|b - w\| \quad \forall w \in W$$

*Demostración.* Por descomposición ortogonal,  $b = \text{proy}_W(b) + r$  con  $r \perp W$ . Para cualquier  $w \in W$ :

$$b - w = (b - \text{proy}_W(b)) + (\text{proy}_W(b) - w)$$

Como  $r \perp (\text{proy}_W(b) - w)$ :

$$\|b - w\|^2 = \|r\|^2 + \|\text{proy}_W(b) - w\|^2 \geq \|r\|^2$$

La igualdad se da solo cuando  $w = \text{proy}_W(b)$ . □

**Teorema 7.38** (Ecuaciones normales). Dado  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ , el vector  $x$  que minimiza  $\|b - Ax\|$  satisface:

$$A^T Ax = A^T b$$

*Demostración.* El residuo  $r = b - Ax$  debe ser ortogonal a  $\mathcal{C}(A)$ , es decir:

$$A^T r = 0 \implies A^T (b - Ax) = 0 \implies A^T Ax = A^T b$$

□

**Ejemplo 7.39.** Resuelve por mínimos cuadrados:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 9z = 1 \\ 7x + 8y + 4z = 1 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

**Solución:** Matriz del sistema y vector independiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Paso 1: Cálculo de  $A^T A$**

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 71 & 56 \\ 71 & 89 & 77 \\ 56 & 77 & 98 \end{pmatrix}$$

**Paso 2: Cálculo de  $A^T b$**

$$A^T b = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$$

**Paso 3: Resolución del sistema**

$$\begin{pmatrix} 59 & 71 & 56 \\ 71 & 89 & 77 \\ 56 & 77 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Solución exacta (el sistema es consistente):

$$x = \left( \frac{205}{63}, -\frac{65}{21}, \frac{47}{63} \right)$$

**Verificación:**

$$\begin{aligned} 3 \left( \frac{205}{63} \right) + 5 \left( -\frac{65}{21} \right) + 9 \left( \frac{47}{63} \right) &= 1 \\ 7 \left( \frac{205}{63} \right) + 8 \left( -\frac{65}{21} \right) + 4 \left( \frac{47}{63} \right) &= 1 \\ \frac{205}{63} + \frac{47}{63} &= 4 \end{aligned}$$

Residuo:  $\|b - Ax\| = 0$

**Ejemplo 7.40.** Resuelve:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Solución:** Cálculos:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 15 & -1 & 5 \\ -1 & 22 & 30 \\ 5 & 30 & 45 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$x = \left( -\frac{31}{91}, -\frac{4}{7}, \frac{46}{65} \right)$$

**Error residual:**

$$\|b - Ax\| = \sqrt{\frac{7969}{5915}} \approx 1,162$$

**Teorema 7.41** (Solución única). *Si las columnas de  $A$  son linealmente independientes, entonces:*

1.  $A^T A$  es invertible
2. La solución única es  $x = (A^T A)^{-1} A^T b$
3. Con descomposición  $QR$   $A = QR$ ,  $x = R^{-1} Q^T b$

**Ejemplo 7.42.** Resuelve por mínimos cuadrados:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Solución:** Cálculos:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 15 & -1 & 5 \\ -1 & 22 & 30 \\ 5 & 30 & 45 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \left(-\frac{31}{41}, -\frac{4}{7}, \frac{46}{65}\right)$$

Error residual:  $\|b - Ax\| = \frac{27\sqrt{455}}{455} \approx 1,2658$

**Problema 7.43.** La ley de Hooke en física determina que la longitud  $x$  en un resorte uniforme es una función lineal de la fuerza  $y$  aplicada. Si se expresa esta relación como  $y = mx + b$ , entonces el coeficiente  $m$  es llamado la constante del resorte.

Peso (y) kg	1.5	2.7	4.9	6.7
Longitud (x) m	6.1	7.6	8.7	10.4

Cuadro 7.1: Datos de estiramiento del resorte

- (a) Encuentre la recta de ajuste por mínimos cuadrados de los siguientes datos y úselos para estimar la constante del resorte involucrado.
- (b) Grafique la recta los puntos.

**Solución:** (a) Recta de ajuste por mínimos cuadrados usando método matricial:

Definimos: - Vector de observaciones:  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,7 \\ 4,9 \\ 6,7 \end{pmatrix}$  - Matriz de diseño:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6,1 \\ 1 & 7,6 \\ 1 & 8,7 \\ 1 & 10,4 \end{pmatrix}$  - Vector de

parámetros:  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}$

Resolvemos  $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ :

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6,1 & 7,6 & 8,7 & 10,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6,1 \\ 1 & 7,6 \\ 1 & 8,7 \\ 1 & 10,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 32,8 \\ 32,8 & 278,82 \end{pmatrix}$$

$$A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6,1 & 7,6 & 8,7 & 10,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,7 \\ 4,9 \\ 6,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,8 \\ 141,98 \end{pmatrix}$$

Sistema a resolver:

$$\begin{pmatrix} 4 & 32,8 \\ 32,8 & 278,82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,8 \\ 141,98 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\det(A^T A) = (4)(278,82) - (32,8)(32,8) = 1115,28 - 1075,84 = 39,44$$

Solución:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 15,8 & 32,8 \\ 141,98 & 278,82 \end{vmatrix}}{\det(A^T A)} = \frac{(15,8)(278,82) - (32,8)(141,98)}{39,44} = \frac{4405,356 - 4657,344}{39,44} = \frac{-251,988}{39,44} \approx -6,389$$

$$m = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 15,8 \\ 32,8 & 141,98 \end{vmatrix}}{\det(A^T A)} = \frac{(4)(141,98) - (32,8)(15,8)}{39,44} = \frac{567,92 - 518,24}{39,44} = \frac{49,68}{39,44} \approx 1,2597$$

Ecuación de la recta:

$$y = 1,2597x - 6,389$$

La constante del resorte es  $m \approx 1,2597 \text{ kg/m}$ .

(b) **Gráfico de la recta y puntos:**

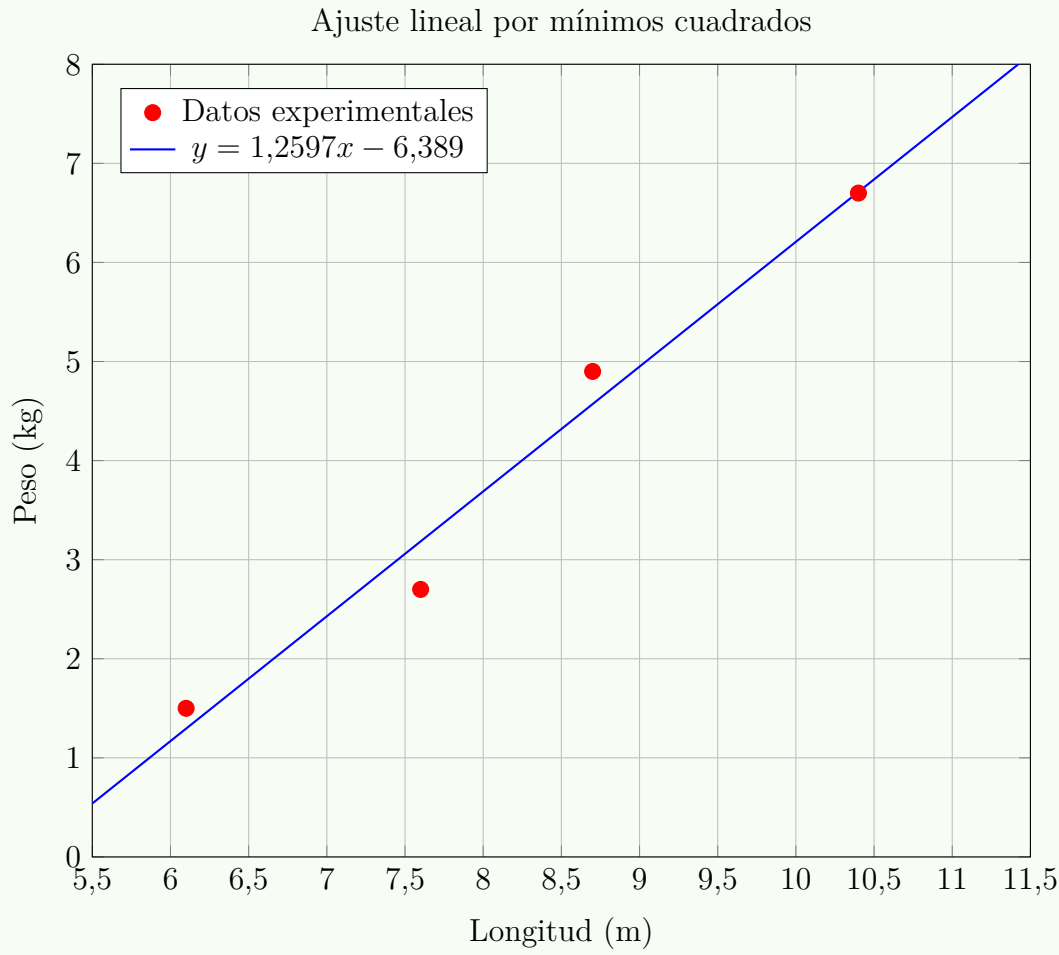


Figura 7.1: Recta de mínimos cuadrados para los datos del resorte

**Problema 7.44** (Regresión polinómica). Para ajustar puntos  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$  al polinomio  $y = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ , construimos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Solución por mínimos cuadrados:

$$V = (M^T M)^{-1} M^T Y$$

**Definición 7.45** (Serie de Fourier). Para  $f$  periódica en  $[0, 2\pi]$ , con producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ :

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned}$$

**Lema 7.46** (Polinomio de Taylor). *Si  $f$  es analítica en  $x = a$ :*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x - a)^j$$

*Demostración.* Desarrollo en serie de potencias alrededor de  $x = a$  con coeficientes  $a_j = f^{(j)}(a)/j!$ . □

**Teorema 7.47** (Fórmula de Euler). *Para  $\theta \in \mathbb{R}$ :*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

*Demostración.* Por series de Taylor:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Se verifica  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . □

**Problema 7.48.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Encuentre una base ortonormal para el espacio fila de  $A$ .
- Encuentre el rango y la nulidad de  $A$ .
- Encuentre una base para el complemento ortogonal del espacio fila de  $A$ .

**Solución:** **a)** Las filas de  $A$  son  $\mathbf{r}_1 = (1, 0, 1)$  y  $\mathbf{r}_2 = (0, 1, 0)$ . Son ortogonales:  $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle = 0$ . Normas:  $\|\mathbf{r}_1\| = \sqrt{2}$ ,  $\|\mathbf{r}_2\| = 1$ . Base ortonormal:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad \mathbf{q}_2 = (0, 1, 0).$$

**b)** Rango: Las filas son linealmente independientes, así que  $\text{rango}(A) = 2$ . Nulidad: Por teorema de rango-nulidad,  $\text{nulidad}(A) = 3 - 2 = 1$ .

**c)** El complemento ortogonal del espacio fila es el espacio nulo de  $A$ . Resolviendo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \implies \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Base:  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .



**Problema 7.49.** Calcule la serie de Fourier correspondiente para las siguientes funciones en el intervalo  $[0, 2\pi]$  :

1.  $f(x) = x$ .
2.  $f(x) = 8$ .
3.  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ .

**Solución:** a) Coeficientes para  $f(x) = x$ : -  $a_0 = \pi$ . -  $a_k = 0$ . -  $b_k = -\frac{2}{k}$ . Serie:

$$f(x) \sim \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

b) Coeficientes para  $f(x) = 8$ : -  $a_0 = 8$ . -  $a_k = b_k = 0$ . Serie:

$$f(x) \sim 8$$

c) Coeficientes para  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ : -  $a_0 = \frac{4\pi^2}{3} + 2\pi + 1$ . -  $a_k = \frac{4(-1)^k}{k^2}$ . -  $b_k = -\frac{4(-1)^k}{k} - \frac{4\pi}{k}$ .  
Serie:

$$f(x) \sim \left( \frac{4\pi^2}{3} + 2\pi + 1 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos(kx) + \left( -\frac{4(-1)^k}{k} - \frac{4\pi}{k} \right) \sin(kx) \right]$$

**Problema 7.50.** Una altura de un triángulo es cada uno de los segmentos que une un vértice con un punto de su lado opuesto o de su prolongación y es perpendicular a dicho lado.

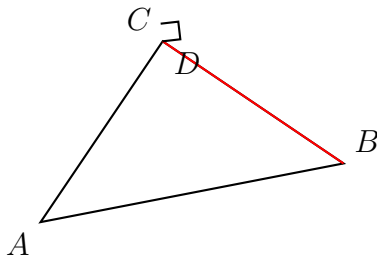


Figura 7.2: Altura de un triángulo

1. Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno. Suponga que  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , y  $\mathbf{w}$  son vectores en  $V$  que forman un triángulo como se muestra en la figura 7.2. Calcule en términos de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  la altura  $\mathbf{h}$  bajada desde  $B$  al lado opuesto.
2. Dado el triángulo con vértices  $A = (8, 7, 11)$ ,  $B = (11, 17, 22)$  y  $C = (5, 3, 11)$  use el producto interno usual de  $\mathbb{R}^3$  para calcular las ecuaciones simétricas de la altura bajada desde el vértice  $B$  al lado opuesto.

**Solución:** a) Sean  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{v}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{w}$ . La proyección ortogonal de  $\overrightarrow{AB}$  sobre  $\overrightarrow{AC}$  es:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}.$$

La altura es:

$$\mathbf{h} = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$$

b) Vectores: -  $\overrightarrow{BA} = (-3, -10, -11)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-6, -14, -11)$ . -  $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC} = (-6, -14, -11)$ . -

$\mathbf{u} = \overrightarrow{BA} = (-3, -10, -11)$ . Proyección:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{279}{353}(-6, -14, -11).$$

Altura:

$$\mathbf{h} = (-3, -10, -11) - \frac{279}{353}(-6, -14, -11).$$

Ecuaciones simétricas:

$$\boxed{\frac{x - 11}{-3} = \frac{y - 17}{-10} = \frac{z - 22}{-11}}$$

**Problema 7.51.** Calcule la serie de Fourier para la función  $f(x) = 9x^2 + 4x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

**Solución:** Coeficientes: -  $a_0 = 12\pi^2 + 4\pi$ . -  $a_k = \frac{36(-1)^k}{k^2}$ . -  $b_k = -\frac{72(-1)^k}{k^3} - \frac{8(-1)^k}{k}$ . Serie:

$$\boxed{f(x) \sim (12\pi^2 + 4\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{36(-1)^k}{k^2} \cos(kx) + \left( -\frac{72(-1)^k}{k^3} - \frac{8(-1)^k}{k} \right) \sin(kx) \right]}$$

**Problema 7.52.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Encuentre una base ortonormal para el espacio fila de  $A$ . Determine el rango y la nulidad de  $A$ .

2. Encuentre una base para el complemento ortogonal del espacio fila de  $A$ .

**Solución:** a) Filas de  $A$ :  $\mathbf{r}_1 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (0, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{r}_3 = (0, 1, 0, 1)$ . Aplicamos Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal. Base ortonormal (simplificada):

$$\boxed{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Rango: 2 (filas independientes), nulidad:  $4 - 2 = 2$ .

b) Complemento ortogonal: Resolver  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Solución:

$$\boxed{\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

**Problema 7.53.** Sea  $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Dados dos vectores  $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$  y  $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$  defina el producto interno en  $V$  como  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ .

Si  $H = \text{gen}\{\mathbf{p}_1 = 1 + 2x^2, \mathbf{p}_2 = 2 + x + x^2\}$

1. Calcule una base para  $H^\perp$ .

2. Calcule una base ortogonal para  $H$ .

3. Sea  $\mathbf{q} = 2 + 5x + 9x^2$ . Calcule  $\text{proy}_H \mathbf{q}$ .

4. Calcule la distancia mínima de  $\mathbf{q}$  al subespacio  $H$ .

**Solución:** a)  $H^\perp = \{p \in V : \langle p, h \rangle = 0 \ \forall h \in H\}$ . Resolviendo:

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, 1 + 2x^2 \rangle = a_0 + 2a_2 = 0$$

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, 2 + x + x^2 \rangle = 2a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

Solución:  $\mathbf{p} = a(1 - 2x + x^2)$ . Base:

$$\{1 - 2x + x^2\}$$

b) Gram-Schmidt a  $h_1 = 1 + 2x^2$ ,  $h_2 = 2 + x + x^2$ : Base ortogonal:

$$1 + 2x^2, \quad \frac{4}{5} + x - \frac{7}{5}x^2$$

c) Proyección de  $\mathbf{q} = 2 + 5x + 9x^2$  sobre  $H$ :

$$\text{proy}_H \mathbf{q} = \frac{1}{5}(14 + 5x + 18x^2)$$

d) Distancia mínima:

$$\|\mathbf{q} - \text{proy}_H \mathbf{q}\| = \sqrt{10}$$

**Problema 7.54.** Calcule la serie de Fourier para la función  $f(x) = 9x + 7$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

**Solución:** Coeficientes: -  $a_0 = 9\pi + 7$  -  $a_k = 0$  -  $b_k = -\frac{18}{k}$  Serie:

$$f(x) \sim (9\pi + 7) - 18 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

**Problema 7.55.** Defina  $W$  como el subespacio de  $\mathbb{R}^4$  definido por el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

1. Calcule una base ortogonal para  $W$ .
2. Calcule una base ortogonal para  $W^\perp$ .
3. Calcule la proyección ortogonal de  $\mathbf{u} = (5, 6, 7, 2)$  sobre  $W$ .
4. Calcule  $\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}$ .
5. Calcule  $\|\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}\|$ .

**Solución:** a) Base de  $W$ : Resolviendo el sistema:

$$\mathbf{w}_1 = (1, -1, 0, 1), \quad \mathbf{w}_2 = (1, 0, -1, 1)$$

Gram-Schmidt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Base de  $W^\perp$ :  $(1, 1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 1, -2)$ .

c) Proyección de  $\mathbf{u}$  sobre  $W$ :  $(2, 3, 4, 1)$ .

- d)  $\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u} = (3, 3, 3, 1)$ .
- e) Distancia mínima:  $\sqrt{28}$ .

**Problema 7.56.** Sea  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$  un subconjunto ortonormal en un espacio vectorial con producto interno de dimensión  $n$  y suponga que  $m \leq n$ . Calcule el valor de  $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_m\|$ .

**Solución:**

$$\left\| \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = m$$

$$\left\| \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i \right\| = \sqrt{m}$$

**Problema 7.57.** Sea  $f(x) = 5x + 7$ . Calcule la serie de Fourier en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

**Solución:** Coeficientes: -  $a_0 = 5\pi + 7$  -  $a_k = 0$  -  $b_k = -\frac{10}{k}$  Serie:

$$f(x) \sim (5\pi + 7) - 10 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

**Problema 7.58.** En  $\mathbb{R}^4$  defina  $W$  el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{cases}$$

1. Calcule una base ortogonal para  $W$ .
2. Calcule una base ortogonal para  $W^\perp$ .
3. Calcule la proyección ortogonal de  $\mathbf{u} = (9, 4, 5, 2)$  sobre  $W^\perp$ .
4. Calcule  $\|\mathbf{u} - \text{proy}_{W^\perp} \mathbf{u}\|$ .

- Solución:**
- a) Base de  $W$ :  $(1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)$ .
  - b) Base de  $W^\perp$ :  $(1, -1, 1, 1), (2, 1, -1, 1), (4, -1, 1, 3)$ .
  - c) Proyección de  $\mathbf{u}$  sobre  $W^\perp$ :  $(8, 3, 6, 1)$ .
  - d) Distancia mínima:  $\|(1, 1, -1, 1)\| = 2$ .

**Problema 7.59.** Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Si la afirmación es falsa, dé un contraejemplo; en caso contrario, proporcione una demostración. Suponga que  $V$  es un espacio vectorial con producto interno:

1. Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v} \in V$  son ortogonales, entonces  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ .
2. Sea  $W$  un subespacio de  $V$ . Si  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  y  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  y son ortogonales, entonces  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W^\perp$ .
3. El vector  $\text{proy}_W \mathbf{u}$  es ortogonal a todo vector de  $W$ .
4. Dado un espacio vectorial con producto interno de dimensión  $n$ . Si  $n \geq k$  entonces todo conjunto  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  linealmente independiente es un conjunto ortogonal.

**Solución:**

- a) Falso. Si  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ , entonces  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , pero  $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$  puede ser no cero.
- b) Verdadero si ambos están en  $W^\perp$ ; de lo contrario, falso.
- c) Falso.  $\text{proy}_W \mathbf{u}$  está en  $W$ , pero no necesariamente ortogonal a  $W$ .
- d) Falso. Contraejemplo:  $\{(1, 0), (1, 1)\}$  en  $\mathbb{R}^2$  es linealmente independiente pero no ortogonal.

**Problema 7.60.** Calcule la serie de Fourier de la función  $f(x) = 7x + 2$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

**Solución:** Coeficientes: -  $a_0 = 7\pi + 2$  -  $a_k = 0$  -  $b_k = -\frac{14}{k}$  Serie:

$$f(x) \sim (7\pi + 2) - 14 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

**Problema 7.61.** Defina el subespacio  $H = \left\{ (x, y, z) : \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{4} \right\}$ .

1. Calcule una base ortogonal para  $H^\perp$ .
2. Dado  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ , describa el vector  $\mathbf{u} = \mathbf{h} + \mathbf{p}$  donde  $\mathbf{h} \in H$  y  $\mathbf{p} \in H^\perp$ .
3. Calcule  $\mathbf{u} - \text{proy}_H \mathbf{u}$ .
4. Calcule  $\|\mathbf{u} - \text{proy}_H \mathbf{u}\|$ .

**Solución:** a)  $H$  es generado por  $(2, -3, 4)$ .  $H^\perp$  es el plano  $2x - 3y + 4z = 0$ . Una base:  $(3, 2, 0)$  y  $(0, 4, 3)$ .

b) Proyección de  $\mathbf{u}$  sobre  $H$ :

$$\text{proy}_H \mathbf{u} = \frac{17}{29}(2, -3, 4)$$

Entonces:

$$\mathbf{h} = \text{proy}_H \mathbf{u}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{u} - \mathbf{h}$$

c)  $\mathbf{u} - \text{proy}_H \mathbf{u} = \left( 9 - \frac{34}{29}, 7 + \frac{51}{29}, 5 - \frac{68}{29} \right)$

d) Distancia mínima:  $\|\mathbf{u} - \text{proy}_H \mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}$



# Capítulo

## 8

### Valores y vectores propios

**Definición 8.1** (Valores y vectores propios). Sea  $A$  una matriz cuadrada  $n \times n$ . Un vector no nulo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  es llamado **vector propio** (también conocido como **autovector** o **eigenvector**) de la matriz  $A$  asociado al **valor propio**  $\lambda \in \mathbb{R}$  (también llamado **autovalor** o **eigenvalor**) si satisface la ecuación:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Reescribiendo esta ecuación, obtenemos:  $\mathbf{0} = A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = (A - \lambda I_n)\mathbf{v}$ .

Para que existan vectores propios no nulos  $\mathbf{v}$ , la matriz  $(A - \lambda I_n)$  debe ser singular, es decir:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Esta ecuación es conocida como la **ecuación característica de la matriz  $A$** . Sus soluciones  $\lambda$  son los valores propios de  $A$ .

Para cada valor propio  $\lambda_i$ , los vectores propios correspondientes forman el espacio nulo de la matriz  $(A - \lambda_i I_n)$ , es decir:  $E_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I_n) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ .

**Ejemplo 8.2.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Calcule sus valores propios.

**Solución:**  $\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) - (-2)(-3) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ .  
Así,  $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$ . Por lo tanto, los valores propios de  $A$  son  $-1$  y  $4$ .

Según el teorema fundamental del álgebra (Teorema 2.22), todo polinomio no constante de grado  $n$  con coeficientes complejos tiene exactamente  $n$  raíces complejas contando multiplicidades. En el contexto del álgebra lineal, los valores  $\lambda$  que son raíces del polinomio característico de  $A$  se denominan **valores propios** de  $A$ .

**Definición 8.3** (Multiplicidad algebraica y geométrica). Para cada valor propio  $\lambda$  de una matriz  $A$ , se definen:

- **Multiplicidad algebraica:** Número de veces que  $\lambda$  aparece como raíz del polinomio característico  $\det(\lambda I - A) = 0$ .
- **Multiplicidad geométrica:** Dimensión del espacio propio asociado a  $\lambda$ , es decir:  $\dim \ker(\lambda I - A)$ .

**Observación 8.4.** En el ejemplo 8.2 con  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , ambos valores propios ( $\lambda = -1$  y  $\lambda = 4$ ) tienen multiplicidad algebraica 1 y geométrica 1.

Considere ahora la matriz  $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . Su polinomio característico es

$$\det(\lambda I - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2$$

, la única raíz es  $\lambda = a$  con multiplicidad algebraica 2 y su multiplicidad geométrica también es 2, pues  $\ker(aI - B) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$  que tiene dimensión 2.

**Teorema 8.5** (Caracterización de valores propios). Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ .
- (2)  $\lambda$  es solución de la ecuación característica  $\det(\lambda I - A) = 0$ .
- (3) Existe un vector no nulo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .

*Demostración.* Demostramos las equivalencias:

(1)  $\Rightarrow$  ((3)): Por definición de valor propio, existe  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  tal que  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .

(3)  $\Rightarrow$  ((2)): Si  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , entonces  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Como  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , la matriz  $\lambda I - A$  es singular, luego  $\det(\lambda I - A) = 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Si  $\det(\lambda I - A) = 0$ , entonces  $\lambda I - A$  es singular y existe  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  tal que  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , es decir,  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .  $\square$

**Corolario 8.6** (Valores propios de matrices triangulares). Si  $A$  es una matriz triangular, sus valores propios son los elementos de su diagonal principal.

*Demostración.* Para una matriz triangular  $A = (a_{ij})$ , el polinomio característico es:

$$\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_{ii})$$

Las raíces son  $\lambda_i = a_{ii}$  para  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

*Demostración.* Por el Teorema 8.5:

$$\det(A) = 0 \iff \det(0 \cdot I - A) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ es valor propio}$$

Como  $A$  es invertible si y solo si  $\det(A) \neq 0$ , el resultado sigue.  $\square$

**Teorema 8.7** (Potencia de valores propios). Si  $\lambda$  es valor propio de  $A \in M_n(\mathbb{R})$  con vector propio asociado  $\mathbf{x}$ , entonces para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\lambda^k$  es valor propio de  $A^k$  con el mismo vector propio  $\mathbf{x}$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $k$ :

**Caso base** ( $k = 1$ ): Por hipótesis,  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .

**Paso inductivo:** Supongamos  $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$ . Entonces:

$$A^{k+1}\mathbf{x} = A(A^k\mathbf{x}) = A(\lambda^k\mathbf{x}) = \lambda^k(A\mathbf{x}) = \lambda^k(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^{k+1}\mathbf{x}$$

Por inducción, el resultado vale para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ .  $\square$

**Ejemplo 8.8.** Sea  $A$  una matriz con valor propio  $\lambda_1 = 3$  y vector propio asociado  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Por el

Teorema 8.7,  $A^5$  tiene valor propio  $\lambda_1^5 = 3^5 = 243$  con el mismo vector propio  $\mathbf{x}$ .

**Problema 8.9.** Dadas las siguientes matrices calcule sus valores y vectores propios, determine las multiplicidades algebraicas y geométricas correspondientes a cada valor propio.

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .



**Solución:** Cálculo del polinomio característico:  $\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$

Aplicamos operaciones elementales:

$$\xrightarrow{f_3 + f_1 \rightarrow f_3} \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ \lambda & -4 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 - \lambda f_2 \rightarrow f_3} \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -4 + \lambda(2 - \lambda) & \lambda - 4 + \lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando por cofactores:

$$= (\lambda - 1) [(\lambda - 2)^2 - 2] + 2[0 + 1] - 2[0 - (\lambda - 2)] = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

Raíces:  $\lambda = 1$  (multiplicidad algebraica 1),  $\lambda = 2$  (multiplicidad algebraica 2).

**Eigenvalor**  $\lambda = 1$ :

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{forma escalonada}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (multiplicidad geométrica 1).

**Eigenvalor**  $\lambda = 2$ :

$$(2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_1 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (multiplicidad geométrica 2).

b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

**Solución:** Matriz triangular superior, eigenvalores en diagonal:  $\lambda_1 = 1$  (mult. alg. 1),  $\lambda_2 = 2$  (mult. alg. 1),  $\lambda_3 = 5$  (mult. alg. 1).

**Eigenvalor**  $\lambda = 1$ :

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{forma escalonada}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (mult. geom. 1).

**Eigenvalor**  $\lambda = 2$ :

$$(2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (mult. geom. 1).

**Eigenvalor**  $\lambda = 5$ :

$$(5I - A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2/3 \rightarrow f_2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $v_3 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (mult. geom. 1).

c)  $A = \begin{pmatrix} -10 & -71 & -19 \\ 3 & 34 & 9 \\ -1 & -61 & -16 \end{pmatrix}$

**Solución:** Polinomio característico:  $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 = 0$ .  
Raíces:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 4$  (mult. alg. 1 cada una).

**Eigenvalor**  $\lambda = 1$ :

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 11 & 71 & 19 \\ -3 & -33 & -9 \\ 1 & 61 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reducción}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{25} \\ 0 & 1 & \frac{7}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

Solución:  $v_1 = \begin{pmatrix} 2/25 \\ -7/25 \\ 1 \end{pmatrix}$  (mult. geom. 1).

**Eigenvalor**  $\lambda = 3$ :

$$(3I - A) = \begin{pmatrix} 13 & 71 & 19 \\ -3 & -31 & -9 \\ 1 & 61 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reducción}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/19 \\ 0 & 1 & -6/19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $v_2 = \begin{pmatrix} 5/19 \\ -6/19 \\ 1 \end{pmatrix}$  (mult. geom. 1).

**Eigenvalor**  $\lambda = 4$ :

$$(4I - A) = \begin{pmatrix} 14 & 71 & 19 \\ -3 & -30 & -9 \\ 1 & 61 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reducción}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $v_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$  (mult. geom. 1).

d)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

**Solución:** Polinomio característico:  $(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)(\lambda - 6) = 0$ .  
Eigenvalores:  $\lambda_1 = 2$  (mult. alg. 2),  $\lambda_2 = 4$  (mult. alg. 1),  $\lambda_3 = 6$  (mult. alg. 1).

**Eigenvalor**  $\lambda = 2$ :

$$(2I - A) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reducción}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (mult. geom. 2).

**Eigenvalor**  $\lambda = 4$ :

$$(4I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reducción}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (mult. geom. 1).

**Eigenvalor**  $\lambda = 6$ :

$$(6I - A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reducción}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (mult. geom. 1).

**Observación 8.10** (¿Qué ocurre si los valores propios  $\lambda$  son complejos?). Consideremos el ejemplo  $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ . El polinomio característico es

$$\det(\lambda I - K) = (\lambda - 2)^2 + 9 = 0,$$

cuyas soluciones son  $\lambda_1 = 2 + 3i$  y  $\lambda_2 = 2 - 3i$ .

De acuerdo con los conceptos de números complejos (véase la referencia correspondiente), el módulo de cada valor propio es

$$|\lambda| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

y su argumento es

$$\arg(\lambda) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right).$$

Estos valores propios complejos permiten interpretar la acción de la matriz como una combinación de rotación y dilatación en el plano, lo cual es fundamental en el estudio de transformaciones lineales y sistemas dinámicos.

**Definición 8.11** (Matriz diagonalizable). Una matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  es **diagonalizable** si existe una matriz invertible  $P$  y una matriz diagonal  $D$  tales que:  $A = PDP^{-1}$ .

**Teorema 8.12** (Condición de diagonalización). Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) *A es diagonalizable.*
- (2) *Para cada valor propio  $\lambda$  de A, la multiplicidad geométrica coincide con la multiplicidad algebraica.*
- (3) *A tiene n vectores propios linealmente independientes.*
- (4) *La suma de las multiplicidades geométricas de todos los valores propios es n.*

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Si A es diagonalizable, existe P invertible y D diagonal tal que  $A = PDP^{-1}$ . Las columnas de P son vectores propios que forman una base de  $\mathbb{R}^n$ . Para cada valor propio  $\lambda_i$  con multiplicidad algebraica  $m_i$ , la matriz D contiene  $m_i$  entradas  $\lambda_i$ . Como los vectores propios son l.i., la dimensión del espacio propio es  $m_i$ , luego la multiplicidad geométrica es  $m_i$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Si para cada valor propio  $\lambda_i$  la multiplicidad geométrica ( $d_i$ ) iguala a la algebraica ( $m_i$ ), entonces  $\sum d_i = \sum m_i = n$ . Los espacios propios generan  $\mathbb{R}^n$  y podemos construir una base de  $\mathbb{R}^n$  con n vectores propios l.i.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  son vectores propios l.i. asociados a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (no necesariamente distintos), sea P la matriz con columnas  $v_i$  y  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Entonces  $AP = PD$ , y como P es invertible,  $A = PDP^{-1}$ .

(2)  $\Leftrightarrow$  (4): Como  $\sum m_i = n$  siempre, entonces  $\sum d_i = n$  si y solo si  $d_i = m_i$  para todo i. □

**Teorema 8.13.** *Si A tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.*

*Demostración.* Si A tiene n valores propios distintos, cada multiplicidad algebraica es 1. Como  $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ , entonces  $d_i = 1$  para todo i, luego A es diagonalizable. Los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes. □

**Ejemplo 8.14.** Diagonalice la matriz  $A = \begin{pmatrix} -10 & -71 & -19 \\ 3 & 34 & 9 \\ -1 & -61 & -16 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Ya se calcularon los valores y vectores propios en el problema 8.9, obteniendo:  
Polinomio característico:  $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 = 0$  y sus raíces:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$  (todas de multiplicidad algebraica 1).  
Los vectores propios asociados son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{25} \\ -\frac{7}{25} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{19} \\ -\frac{6}{19} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Construimos la matriz P con estos vectores propios como columnas:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{25} & \frac{5}{19} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{25} & -\frac{6}{19} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonal D contiene los valores propios en la diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la diagonalización de A es:

$$A = PDP^{-1}$$

donde P es invertible y D es diagonal.

**Verificación:** Calculamos la inversa de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -25 & -100 & -25 \\ 76 & 361 & 95 \\ -51 & -261 & -69 \end{pmatrix}$$

y así se puede verificar que  $A = PDP^{-1}$ :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -71 & -19 \\ 3 & 34 & 9 \\ -1 & -61 & -16 \end{pmatrix} = A$$

**Observación 8.15** (Cálculo de potencias de una matriz). Sea  $A$  una matriz diagonalizable, es decir, existe una matriz invertible  $P$  y una matriz diagonal  $D$  tal que  $A = PDP^{-1}$ . Entonces, para cualquier entero positivo  $k$ , se cumple:

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$$

Esto se debe a que, al multiplicar  $A$  por sí misma  $k$  veces, las matrices  $P^{-1}P$  se simplifican sucesivamente, resultando en la expresión compacta:

$$A^k = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})}_{k \text{ veces}} = PD^kP^{-1}$$

**Ejemplo 8.16.** Suponga que  $(1, 1)$  es un vector propio de la matriz  $A$  correspondiente al valor propio 3 y que  $(2, 1)$  es un vector propio correspondiente al valor propio  $-2$ . Calcula  $A^6 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Aplicando el resultado sobre potencias de matrices diagonalizables (ver Observación 8.15), como

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

tenemos:

$$A^6 = (PDP^{-1})^6 = PD^6P^{-1}$$

Calculamos  $D^6$ :

$$D^6 = \begin{pmatrix} 3^6 & 0 \\ 0 & (-2)^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 729 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

La inversa de  $P$  es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A^6 &= PD^6P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 729 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -601 & 1330 \\ -665 & 1394 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$A^6 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -601 & 1330 \\ -665 & 1394 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1586 \\ 1522 \end{pmatrix}$$

**Problema 8.17** (Solución de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes). Una ecuación diferencial (E.D.) es una igualdad que involucra derivadas y cuya solución consiste en encontrar una función que satisfaga dicha relación. Por ejemplo, para la ecuación  $y' = 5y$ , la solución se obtiene así:

$$\frac{dy}{dx} = 5y \implies \int \frac{1}{y} dy = \int 5 dx \implies \ln |y| = 5x + c \implies y = Ce^{5x}$$

**Nota:** El valor de  $C$  se determina si se impone una condición inicial (problema de valor inicial, P.V.I.), lo que selecciona una función particular dentro de la familia de soluciones. En general, la solución de  $y' = ay$  es  $y = Ce^{ax}$ .

Por ejemplo, para  $y' = 5y$  con  $y(0) = 2$ , se tiene  $y = Ce^{5x}$  y al sustituir  $x = 0$ :

$$2 = Ce^0 \implies C = 2$$

Por lo tanto, la solución particular es  $y = 2e^{5x}$ .

Este método se puede generalizar a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

o, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde  $A$  es la matriz de coeficientes. Si  $A$  es diagonalizable, es posible resolver el sistema utilizando los métodos vistos de valores y vectores propios. A continuación se muestra el procedimiento con un ejemplo.

**Ejemplo 8.18.** Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

**Solución:** Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Buscamos diagonalizar la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Calculamos el polinomio característico:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

Las raíces son  $\lambda_1 = 5$  y  $\lambda_2 = -1$ .

Ahora, hallamos los vectores propios:

- Para  $\lambda = -1$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \implies x = -2y \implies \text{vector propio } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Para  $\lambda = 5$ :

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \implies x = y \implies \text{vector propio } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formamos las matrices:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos el cambio de variable  $y = Pu$ , entonces  $y' = Pu' = APu = PDu$ , así que  $u' = Du$ . Esto nos da dos ecuaciones desacopladas:

$$u_1' = 5u_1 \implies u_1 = c_1 e^{5x}, \quad u_2' = -u_2 \implies u_2 = c_2 e^{-x}$$

Regresando a las variables originales:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{5x} \\ c_2 e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{5x} - 2c_2 e^{-x} \\ c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{5x} - 2c_2 e^{-x} \\ y_2 = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} \end{cases}$$

**Teorema 8.19.** Si la matriz de coeficientes  $A$  de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales es diagonalizable, la solución general del sistema

$$y' = Ay$$

es

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} v_n$$

donde  $\lambda_i$  y  $v_i$  son los valores y vectores propios de  $A$ .

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es diagonalizable, es decir, existe una matriz invertible  $P$  y una matriz diagonal  $D$  tal que  $A = PDP^{-1}$ , donde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Consideremos el cambio de variable  $y = Pu$ , donde  $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ . Entonces,

$$y' = Pu'$$

pero también,

$$y' = Ay = PDP^{-1}y = PDP^{-1}(Pu) = PDu$$

Por lo tanto,

$$Pu' = PDu \implies u' = Du$$

Como  $D$  es diagonal, el sistema  $u' = Du$  se desacopla en  $n$  ecuaciones independientes:

$$u_i' = \lambda_i u_i \implies u_i(x) = c_i e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, \dots, n$$

Volviendo a la variable original:

$$y(x) = Pu(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} v_n$$

donde  $v_i$  es la  $i$ -ésima columna de  $P$ , es decir, el vector propio asociado a  $\lambda_i$ .

Esto muestra que toda solución es combinación lineal de exponentes de los valores propios multiplicados por sus vectores propios asociados, como se quería demostrar.  $\square$

**Ejemplo 8.20.** Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

**Solución:** En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 5) - 12 = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda - 7)(\lambda + 1)$$

Por lo tanto, los valores propios son  $\lambda_1 = 7$  y  $\lambda_2 = -1$ .

Vectores propios:

■ Para  $\lambda = 7$ :

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{2}y \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

■ Para  $\lambda = -1$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El cambio de variable  $y = Pu$  lleva a  $u' = Du$ , cuyas soluciones son  $u_1 = C_1 e^{7x}$ ,  $u_2 = C_2 e^{-x}$ .

Regresando a las variables originales:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} C_1 e^{7x} \\ C_2 e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}C_1 e^{7x} - \frac{3}{2}C_2 e^{-x} \\ C_1 e^{7x} + C_2 e^{-x} \end{pmatrix}$$

Usando las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 = 2 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$C_2 = 1 - C_1 \Rightarrow \frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}(1 - C_1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}C_1 = 2 \Rightarrow 2C_1 = 2 + \frac{3}{2} \Rightarrow 2C_1 = \frac{7}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{7}{4}$$

$$C_2 = 1 - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$\begin{cases} y_1(x) = \frac{7}{8}e^{7x} + \frac{9}{8}e^{-x} \\ y_2(x) = \frac{7}{4}e^{7x} - \frac{3}{4}e^{-x} \end{cases}$$

**Teorema 8.21** (Cayley-Hamilton). Sea  $A \in M_n(F)$  una matriz cuadrada de orden  $n$  sobre un cuerpo  $F$ . Sea  $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  el polinomio característico de  $A$ . Entonces,

$$p_A(A) = 0$$

es decir, toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica.

**Solución:** Sea  $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$  el polinomio característico de  $A$ . Queremos demostrar que

$$p_A(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1A + c_0I = 0.$$



Consideremos la matriz  $B = \lambda I - A$  y su adjunta  $\text{adj}(B)$ , que cumple:

$$B \cdot \text{adj}(B) = \det(B)I = p_A(\lambda)I.$$

Sustituyendo  $\lambda = A$  (es decir, evaluando el polinomio en la matriz  $A$ ), se obtiene:

$$(AI - A) \cdot \text{adj}(AI - A) = p_A(A)I.$$

Pero  $AI - A = 0$ , así que el lado izquierdo es la matriz nula:

$$0 \cdot \text{adj}(0) = 0 = p_A(A)I.$$

Por lo tanto,

$$p_A(A) = 0,$$

lo que prueba el teorema de Cayley-Hamilton: toda matriz cuadrada anula su propio polinomio característico.

**Problema 8.22.** Dada una matriz  $A$  de tamaño  $n \times n$ , se denomina ecuación característica de  $A$  a la ecuación

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0.$$

El teorema de Cayley-Hamilton afirma que toda matriz cuadrada  $n \times n$  satisface su ecuación característica, es decir, si la ecuación característica de  $A$  es  $\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_0 = 0$ , entonces  $A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_0I = 0$ . En el caso  $2 \times 2$ , si la ecuación característica es  $c_0 + c_1\lambda + \lambda^2 = 0$ , entonces  $c_0I + c_1A + A^2 = 0$ .

a) **Verifique el teorema de Cayley-Hamilton para la matriz**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Calculamos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -6 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda$$

Por lo tanto,  $c_1 = -5$  y  $c_0 = 0$ .

El teorema de Cayley-Hamilton afirma que:

$$A^2 - 5A = 0 \implies A^2 = 5A$$

Verificamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 & 3 \cdot 6 + 6 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 6 & 18 + 12 \\ 3 + 2 & 6 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$5A = 5 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,  $A^2 = 5A$ , lo que verifica el teorema de Cayley-Hamilton para esta matriz.

b) **Use diagonalización para calcular**  $A^3$ .

**Solución:** Los valores propios de  $A$  son las raíces de  $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$ , es decir,  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 0$ .

Los vectores propios asociados (normalizados) son:

$$\text{Para } \lambda = 5: (A - 5I)x = 0 \implies \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \implies x_1 = 3x_2, \text{ elijo } x_2 = 1 \implies v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para  $\lambda = 0$  :  $(A - 0I)x = 0 \implies \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies x_1 = -2x_2$ , elijo  $x_2 = 1 \implies v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Formamos  $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Entonces,

$$A^3 = PD^3P^{-1}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 150 \\ 25 & 50 \end{pmatrix}$$

Esto coincide con el resultado obtenido por diagonalización en los cálculos numéricos[2].

c) **El teorema de Cayley-Hamilton provee una forma de calcular potencias de una matriz. Demuestre que  $A^3 = -c_1A^2 - c_0A$ .**

**Solución:** Por el teorema de Cayley-Hamilton,  $A^2 + c_1A + c_0I = 0$ , así que  $A^2 = -c_1A - c_0I$ . Multiplicando ambos lados por  $A$ :

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(-c_1A - c_0I) = -c_1A^2 - c_0A$$

Esto demuestra la relación.

d) **Use el ítem anterior para calcular  $A^3$  con la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Compare con el resultado obtenido por diagonalización.**

**Solución:** Para esta matriz,  $c_1 = -5$ ,  $c_0 = 0$ , así que:

$$A^3 = -(-5)A^2 - 0 \cdot A = 5A^2$$

Ya calculamos  $A^2 = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ , así que:

$$A^3 = 5 \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 150 \\ 25 & 50 \end{pmatrix}$$

Esto coincide exactamente con el resultado obtenido por diagonalización.

**Teorema 8.23** (Caracterización de matrices invertibles - Versión 5). *Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $A$  es invertible.
2. La forma escalonada reducida de  $A$  es la matriz identidad  $I_n$ .
3.  $A$  se puede escribir como producto de matrices elementales.
4.  $A$  tiene rango máximo ( $\text{rango}(A) = n$ ).
5.  $\det(A) \neq 0$ .
6.  $Ax = 0$  tiene únicamente la solución nula.
7.  $Ax = b$  es consistente para cualquier vector  $b$ .

8.  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución única para cualquier vector  $\mathbf{b}$ .
9. Los vectores columna de  $A$  son linealmente independientes.
10. Los vectores fila de  $A$  son linealmente independientes.
11.  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n$ .
12.  $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$ .
13.  $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$ .
14.  $\mathcal{N}(A^T) = \{\mathbf{0}\}$ .
15.  $\dim(\mathcal{C}(A)) = n$ .
16.  $\dim(\mathcal{R}(A)) = n$ .
17.  $\dim(\mathcal{N}(A)) = 0$ .
18.  $\lambda = 0$  no es un valor propio de  $A$ .

*Demostración.* Por definición,  $A$  es invertible si y solo si  $\det(A) \neq 0$ . Pero  $\lambda = 0$  es valor propio si y solo si  $\det(0 \cdot I - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = 0$ , es decir, si y solo si  $\det(A) = 0$ . Por lo tanto,  $A$  es invertible si y solo si  $\lambda = 0$  no es valor propio.  $\square$

**Problema 8.24.** Suponga que  $A$  es una matriz invertible con valor propio  $\lambda$  y su vector propio correspondiente  $\mathbf{v}$ . ¿Es  $\mathbf{v}$  un vector propio de  $A^{-1}$ ? Haga una demostración o muestre un contraejemplo.

**Solución:** Si  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  y  $A$  es invertible, entonces:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \implies \mathbf{v} = \lambda^{-1}A\mathbf{v} \implies A^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}$$

Por lo tanto,  $\mathbf{v}$  es vector propio de  $A^{-1}$  con valor propio  $\lambda^{-1}$  (si  $\lambda \neq 0$ ).

**Problema 8.25.** Suponga que  $A$  es una matriz invertible y  $\mathbf{v}$  es uno de sus vectores propios. ¿Es  $3\mathbf{v}$  un vector propio de  $A^{-1}$ ? ¿Cuál será su valor propio correspondiente? Haga una demostración o muestre un contraejemplo.

**Solución:** Sí, porque si  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , entonces  $A^{-1}(3\mathbf{v}) = 3A^{-1}\mathbf{v} = 3\lambda^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}(3\mathbf{v})$ . Así,  $3\mathbf{v}$  es también vector propio de  $A^{-1}$  con el mismo valor propio  $\lambda^{-1}$ .

**Problema 8.26.** Dadas las siguientes matrices calcule sus valores y vectores propios, determine las multiplicidades algebraicas y geométricas correspondientes a cada valor propio. Si la matriz es diagonalizable, calcule su matriz diagonal  $D$  asociada.

a)  $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

**Solución:** Polinomio característico:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2$$

Valor propio:  $\lambda = -3$  (multiplicidad algebraica 2).

Vectores propios:

$$(A + 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies 2y = 0 \implies y = 0$$

Así, cualquier vector de la forma  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  es propio, con  $x \neq 0$ .

Multiplicidad geométrica: 1 (solo un vector propio linealmente independiente).

No es diagonalizable porque la multiplicidad geométrica es menor que la algebraica.

$$b) A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

**Solución:** Polinomio característico:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & b \\ -b & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2 + b^2$$

Raíces:

$$\lambda = a \pm ib$$

Ambos valores propios son complejos conjugados (si  $b \neq 0$ ), de multiplicidad algebraica 1 cada uno.

Para  $\lambda_1 = a + ib$ :

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = 0 \implies \begin{pmatrix} a - (a + ib) & -b \\ b & a - (a + ib) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib & -b \\ b & -ib \end{pmatrix}$$

El vector propio asociado es  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  (o cualquier múltiplo).

Multiplicidad geométrica: 1 para cada valor propio.

La matriz es diagonalizable sobre  $\mathbb{C}$ , y la matriz diagonal asociada es  $D = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix}$ .

$$c) A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

**Solución:** Polinomio característico:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \lambda - \cos \theta \end{vmatrix} = (\lambda - \cos \theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta = \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1$$

Raíces:

$$\lambda = \cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta = e^{\pm i\theta}$$

Ambos valores propios son complejos conjugados (salvo  $\theta = 0, \pi$ ).

Vectores propios: para  $\lambda_1 = e^{i\theta}$ , vector propio  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ .

Multiplicidad algebraica y geométrica: 1 cada una.

La matriz es diagonalizable sobre  $\mathbb{C}$ , y la matriz diagonal asociada es  $D = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ .

**Problema 8.27.** Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  una matriz de  $2 \times 2$  y suponga que  $b \neq 0$ . Sea  $m$  una raíz (real o compleja) de la ecuación  $bm^2 + (a - d)m - c = 0$ . Demuestre que  $a + bm$  es un valor propio de  $A$  cuyo vector propio asociado es  $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Sea  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ . Calculamos:

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bm \\ c + dm \end{pmatrix}$$

Queremos que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , es decir,

$$\begin{cases} a + bm = \lambda \\ c + dm = \lambda m \end{cases}$$

De la primera ecuación,  $\lambda = a + bm$ . Sustituyendo en la segunda:

$$c + dm = (a + bm)m \implies c + dm = am + bm^2 \implies bm^2 + (a - d)m - c = 0$$

Por hipótesis,  $m$  es raíz de esta ecuación, por lo tanto, existe un valor propio  $\lambda = a + bm$  con vector propio  $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ .

**Problema 8.28.** Suponga que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  es un vector propio de la matriz  $A$  correspondiente al valor propio 3 y que  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  es un vector propio correspondiente al valor propio  $-2$ . Calcule  $A^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Los vectores propios forman la base de diagonalización. Sea  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

Descomponemos  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  en la base de vectores propios:

$$P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha + 2\beta = 4 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \implies \beta = 1, \alpha = 2$$

Por lo tanto,

$$A^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = PD^2P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = PD^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 \\ 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 + 8 \\ 18 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,  $A^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \end{pmatrix}$ .

**Problema 8.29.** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ , ya se demostró por inducción sobre  $n$  que si  $\lambda$  es un valor propio de una matriz  $A$  y  $\mathbf{v}$  es su correspondiente vector propio, entonces  $A^n\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$ .

a) Suponga que  $A = \begin{pmatrix} 1 & -14 & 4 \\ -1 & 6 & -2 \\ -2 & 24 & -7 \end{pmatrix}$ . Calcule los valores y vectores propios de  $A$ .

**Solución:** Calculamos el polinomio característico:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 14 & -4 \\ 1 & \lambda - 6 & 2 \\ 2 & -24 & \lambda + 7 \end{vmatrix}$$

Este determinante (por expansión o software) tiene raíces  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = -5$ .

Calculamos los vectores propios asociados (por sustitución directa): - Para  $\lambda = 2$ : vector propio

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{Para } \lambda = 3: \text{ vector propio } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{Para } \lambda = -5: \text{ vector propio } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Sea  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ . Use el ítem anterior para calcular  $A^{20}\mathbf{u}$ .

**Solución:** Expresamos  $\mathbf{u}$  como combinación lineal de los vectores propios:

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por métodos estándar (o software), obtenemos los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .  
Luego,

$$A^{20}\mathbf{u} = \alpha_1 2^{20} \mathbf{v}_1 + \alpha_2 3^{20} \mathbf{v}_2 + \alpha_3 (-5)^{20} \mathbf{v}_3$$

**Problema 8.30.** Sea  $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  donde  $a \in \mathbb{R}$  y suponga que 3 es un valor propio de  $A$ .

a) Calcule el valor de  $a$ .

**Solución:** El polinomio característico es:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a)(\lambda - 4) + 1 = \lambda^2 - (a + 4)\lambda + (4a + 1)$$

Sustituyendo  $\lambda = 3$ :

$$3^2 - (a + 4)3 + (4a + 1) = 0 \implies 9 - 3a - 12 + 4a + 1 = 0 \implies (4a - 3a) + (9 - 12 + 1) = 0 \implies a - 2 = 0 \implies a = 2$$

b) ¿La matriz  $A$  tiene valores propios distintos a 3?

**Solución:** Sustituyendo  $a = 2$  en el polinomio característico:

$$\lambda^2 - 6\lambda + (8 + 1) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

Por lo tanto, 3 es un valor propio de multiplicidad 2 y no hay otros valores propios.

**Problema 8.31.** Suponga que  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$  donde  $a \in \mathbb{R}$ . Encuentre los valores de  $a$  de manera que 0, 3, -3 sean valores propios de  $A$ . Calcule los vectores propios asociados a cada valor propio.

**Solución:** El polinomio característico es:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Si los valores propios son 0, 3, -3, el polinomio característico debe ser  $\lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = \lambda^3 - 9\lambda$ . Igualando los coeficientes del polinomio característico de  $A$  con  $\lambda^3 - 9\lambda$  (desarrollar el determinante y comparar), se obtiene el valor de  $a$ .  
Luego, para cada valor propio, se resuelve  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$  para encontrar los vectores propios asociados.

**Problema 8.32.** Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales usando diagonalización

(a)  $\begin{cases} y_1' &= y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$  con las condiciones iniciales  $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$ .

**Solución:** La matriz de coeficientes es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

Polinomio característico:  $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \implies \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$

Vectores propios: para  $\lambda = 5$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; para  $\lambda = -1$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Solución general:

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Condiciones iniciales:  $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0 \implies c_1 = 0, c_2 = 0$ .

Solución:  $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2 \end{cases}$  con las condiciones iniciales  $y_1(0) = 2, y_2(0) = 1$ .

**Solución:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

Polinomio característico:  $\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0 \implies \lambda_1 = 7, \lambda_2 = -1$

Vectores propios: para  $\lambda = 7$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; para  $\lambda = -1$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Solución general:

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{7x} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Condiciones iniciales:  $y_1(0) = 2, y_2(0) = 1$

Sistema para  $c_1, c_2$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}c_1 - \frac{3}{2}c_2 = 2 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \implies c_1 = \frac{7}{5}, c_2 = -\frac{2}{5}$$

Solución:

$$y_1(x) = \frac{7}{10}e^{7x} + \frac{3}{5}e^{-x}, \quad y_2(x) = \frac{7}{5}e^{7x} - \frac{2}{5}e^{-x}$$

(c)  $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_3 \\ y_2' = -2y_1 + y_2 \\ y_3' = -2y_1 + y_3 \end{cases}$  con las condiciones iniciales  $y_1(0) = -1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$ .

**Solución:** La matriz es  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Polinomio característico:  $(\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0$

Valores propios:  $\lambda = 1$  (multiplicidad 2),  $\lambda = 5$  (multiplicidad 1).

Vectores propios: para  $\lambda = 5$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; para  $\lambda = 1$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

Expresamos el vector inicial como combinación lineal de los vectores propios y resolvemos para los coeficientes.

Solución general:

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

**Problema 8.33.** En ocasiones es posible resolver una ecuación diferencial de un grado superior con coeficientes constantes expresándola como un sistema de ecuaciones diferenciales de grado uno. Dada la ecuación diferencial  $y'' - y' - 6y = 0$  demuestre que con las sustituciones  $y_1 = y$  y  $y_2 = y'$  se puede construir el sistema

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 6y_1 + y_2 \end{cases}$$

Resuelva este sistema y use sus resultados para resolver la ecuación diferencial original. Realice un procedimiento similar para las ecuaciones  $y'' + y' - 12y = 0$  y  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ .

**Solución:** Para  $y'' - y' - 6y = 0$ , definimos  $y_1 = y$ ,  $y_2 = y'$ . Entonces  $y_1' = y_2$ ,  $y_2' = y'' = y' + 6y = y_2 + 6y_1$ .  
El sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es  $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \implies \lambda = 3, -2$ .

Solución general:  $y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ .

Repetir el procedimiento para las otras ecuaciones: -  $y'' + y' - 12y = 0$ : sistema  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$ , raíces  $\lambda = 3, -4$ . -  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ : sistema de  $3 \times 3$ , polinomio característico  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$  (raíces  $\lambda = 1, 2, 3$ ).

Solución general: combinación lineal de exponentes con las raíces encontradas.

**Problema 8.34.** En la figura se muestra un circuito LRC en paralelo, el cual contiene una resistencia en ohms ( $\Omega$ ), un inductor con inductancia en henries ( $H$ ) y un capacitor con capacitancia en faradios ( $F$ ). Es posible demostrar en teoría de circuitos que en un tiempo  $t$  la corriente  $i_L$  a través del inductor y el voltaje  $v_C$  dado por el capacitor son solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{pmatrix} i_L'(t) \\ v_C'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -1 & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{pmatrix}$$

(a) Calcule la solución general del sistema cuando  $R = 1 \, \Omega$ ,  $L = 1 \, H$ , y  $C = 0,5 \, F$ .

**Solución:** La matriz es  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Polinomio característico:  $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \implies \lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ .

Solución general:

$$\begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} = e^{-t/2} \left[ \mathbf{A} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \mathbf{B} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right]$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se determinan por condiciones iniciales.

(b) Calcule  $i_L$  y  $v_C$  cuando  $i_L(0) = 2$  amperios y  $v_C(0) = 1$  voltio.

**Solución:** Sustituya los valores iniciales en la solución general y resuelva para las constantes.

(c) ¿Qué ocurre con la corriente y el voltaje si  $t \rightarrow \infty$ ?

**Solución:** Como la parte exponencial es  $e^{-t/2}$ , ambos tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Algunas aplicaciones adicionales de los valores y vectores propios se enuncian a continuación:



8.1

Algunas aplicaciones adicionales

**Definición 8.35.** Una **cadena de Markov** es un proceso estocástico con un número finito de estados, en el cual la probabilidad de transición al siguiente estado depende únicamente del estado actual, y no de los anteriores. Las probabilidades de transición permanecen constantes en el tiempo.

**Teorema 8.36.** Sea  $P$  la matriz de transición de una cadena de Markov y  $x_0$  el vector de probabilidades inicial. Entonces, el vector de probabilidades después de  $k$  pasos es

$$x_k = P^k x_0.$$

**Definición 8.37.** Un **vector estacionario**  $x$  es un vector de probabilidad tal que  $Px = x$ , es decir, es un vector propio de  $P$  asociado al valor propio 1, cuyas entradas son no negativas y suman 1.

**Ejemplo 8.38.** Supón tres ciudades: Boston, Chicago y Los Ángeles. La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

y el vector inicial es  $x_0 = (100, 200, 300)^T$ . La distribución después de un mes es  $x_1 = Px_0$ , y después de dos meses  $x_2 = P^2x_0$ .

**Definición 8.39.** Una **forma cuadrática** en  $\mathbb{R}^n$  es una función  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma

$$Q(x) = x^T Ax$$

donde  $A$  es una matriz cuadrada simétrica de orden  $n$ .

**Teorema 8.40.** Sea  $Q(x) = x^T Ax$  una forma cuadrática y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los valores propios de  $A$ :

- $Q$  es **definida positiva** si todos los  $\lambda_i > 0$ .
- $Q$  es **definida negativa** si todos los  $\lambda_i < 0$ .
- $Q$  es **indefinida** si existen  $\lambda_i > 0$  y  $\lambda_j < 0$ .

**Ejemplo 8.41.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Entonces,

$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 3y^2$$

Como ambos valores propios son positivos,  $Q$  es definida positiva.

**Definición 8.42.** Un **sistema dinámico** es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo según una regla de evolución. Formalmente, es una tupla  $(T, X, \Phi)$  donde  $T$  es el conjunto de tiempos,  $X$  es el espacio de estados y  $\Phi : U \subseteq (T \times X) \rightarrow X$  es la función de evolución que cumple:

$$\begin{aligned} \Phi(0, x) &= x \\ \Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) &= \Phi(t_2 + t_1, x) \end{aligned}$$

para los valores de  $t_1, t_2$  y  $x$  donde esté definida.

**Ejemplo 8.43. Sistema dinámico discreto:** La ecuación logística discreta

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$$

modela la evolución de una población con efecto de saturación.

**Ejemplo 8.44. Sistema dinámico continuo:** La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x)$$

describe el crecimiento poblacional continuo con límite superior.

**Teorema 8.45. (*Principio de superposición para sistemas lineales*)**

*Si  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son soluciones de un sistema dinámico lineal homogéneo, entonces cualquier combinación lineal  $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  también es solución.*

# Capítulo

## 9

# Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales constituyen una herramienta esencial en numerosos campos, como la generación de efectos visuales realistas, el procesamiento de imágenes digitales, el cifrado de información, la compresión eficiente de datos, el análisis de patrones y estructuras en conjuntos de datos, así como en el modelado y la predicción de fenómenos complejos. Particularmente en el plano y en el espacio, las transformaciones lineales permiten realizar operaciones fundamentales como rotaciones, escalados y traslaciones de objetos.

Son especialmente relevantes en áreas como las gráficas computacionales y el *machine learning*. En gráficas computacionales, permiten modelar y manipular objetos mediante rotaciones, escalados y traslaciones, facilitando la animación y renderización de escenas tridimensionales. En *machine learning*, las transformaciones lineales intervienen en la normalización y reducción de dimensionalidad de datos (por ejemplo, mediante PCA), así como en la estructura interna de modelos como las redes neuronales, donde las operaciones principales se basan en multiplicaciones de matrices y vectores.

En este capítulo se estudiarán las propiedades fundamentales de las transformaciones lineales entre espacios vectoriales. Se mostrará cómo estas funciones permiten describir cualquier espacio vectorial de dimensión finita  $n$  como un espacio estándar, tal como  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ , utilizando conceptos clave como la linealidad, la composición de transformaciones, la invertibilidad y las propiedades asociadas de las transformaciones lineales. Además, se retomará el concepto de cambio de base, lo cual permitirá comprender cómo representar y analizar las transformaciones en distintos sistemas de coordenadas.

## 9.1

# Transformaciones lineales

**Definición 9.1** (Transformación lineal). Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre el mismo campo  $\mathbb{F}$ . Una **transformación lineal**  $T : V \rightarrow W$  es una función de  $V$  en  $W$  que satisface, para todo par de vectores  $v_1, v_2 \in V$  y todo escalar  $k \in \mathbb{F}$ , las siguientes propiedades:

1. **Propiedad aditiva:**  $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ .
2. **Propiedad homogénea:**  $T(kv_1) = kT(v_1)$ .

De manera equivalente, para cualesquiera  $u, v \in V$  y  $k, m \in \mathbb{F}$ , se cumple que  $T(ku + mv) = kT(u) + mT(v)$ . Finalmente, si  $T : V \rightarrow V$ , diremos que  $T$  es un **operador lineal**.

**Ejemplo 9.2.** Verifique si las siguientes funciones son transformaciones lineales:

1.  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x + y \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Verificamos la propiedad general de linealidad: para cualesquiera  $u, v \in \mathbb{R}^2$  y  $k, m \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T(ku + mv) &= T\left(k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} ku_1 + mv_1 \\ ku_2 + mv_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2(ku_1 + mv_1) \\ 3(ku_1 + mv_1) + ku_2 + mv_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2ku_1 + 2mv_1 \\ 3ku_1 + 3mv_1 + ku_2 + mv_2 \end{pmatrix} \\ &= k \begin{pmatrix} 2u_1 \\ 3u_1 + u_2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 3v_1 + v_2 \end{pmatrix} \\ &= kT\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) + mT\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $T$  es una transformación lineal.

2.  $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , definida por  $T(p(x)) = p'(x)$ .

**Solución:** Sean  $u(x) = \sum_{i=0}^3 a_i x^i$  y  $v(x) = \sum_{i=0}^3 b_i x^i$ , entonces  $u'(x) = \sum_{i=1}^3 i a_i x^{i-1}$  y  $v'(x) = \sum_{i=1}^3 i b_i x^{i-1}$ . Para  $k, m \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T(ku + mv) &= (ku + mv)' = (ku)' + (mv)' = ku'(x) + mv'(x) \\ &= kT(u) + mT(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $T$  es una transformación lineal.

3.  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Consideremos  $u, v \in \mathbb{R}^2$  y  $k, m \in \mathbb{R}$ ,

$$T(ku + mv) = T\left(\begin{pmatrix} ku_1 + mv_1 \\ ku_2 + mv_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (ku_1 + mv_1)^2 \\ ku_2 + mv_2 \end{pmatrix}.$$

El primer componente,  $(ku_1 + mv_1)^2$ , no es lineal en  $u_1$  y  $v_1$ . Por lo tanto,  $T$  no es una transformación lineal.

**Observación 9.3.** El operador derivada puede extenderse al espacio  $\mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$ . Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , es posible analizar la función en términos de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por ejemplo, considere  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = z^2$ , donde  $z = x + yi$ .

Observamos que

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

donde  $u(x, y) = x^2 - y^2$  es la parte real y  $v(x, y) = 2xy$  es la parte imaginaria.

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann requieren que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Calculando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Por lo tanto, ambas condiciones se cumplen para toda  $z \in \mathbb{C}$ .

**Ejemplo 9.4** (Operador integral). Considere  $T : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$  definido por

$$T(f)(x) = \int f(x) dx.$$

Este operador es lineal, ya que para cualesquiera  $p(x), q(x) \in \mathcal{C}[a, b]$  y  $k, m \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T(kp(x) + mq(x)) &= \int (kp(x) + mq(x)) dx \\ &= k \int p(x) dx + m \int q(x) dx \\ &= kT(p(x)) + mT(q(x)), \end{aligned}$$

lo que demuestra la linealidad del operador integral.

**Teorema 9.5.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo  $\mathbb{F}$  y  $W$  un espacio vectorial sobre el mismo campo. Si  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ , entonces para cualquier transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  y cualquier  $u \in V$  expresado como  $u = \sum_{i=1}^n k_i v_i$  con  $k_i \in \mathbb{F}$ , se cumple:

$$T(u) = \sum_{i=1}^n k_i T(v_i).$$

*Demostración.* Dado que  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ , todo vector  $u \in V$  puede escribirse de forma única como  $u = \sum_{i=1}^n k_i v_i$  con  $k_i \in \mathbb{F}$ . Por linealidad de  $T$ , se tiene:

$$T(u) = T\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i T(v_i).$$

□

**Ejemplo 9.6.** 1. Para el vector nulo  $0 \in V$ , se tiene:

$$0 = \sum_{i=1}^n 0 \cdot v_i,$$

por lo que

$$T(0) = T\left(\sum_{i=1}^n 0 \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot T(v_i) = 0,$$

es decir, toda transformación lineal envía el vector cero del dominio al vector cero del codominio.

2. Para cualquier  $u, v \in V$ , se cumple:

$$T(u - v) = T(u) + T(-v) = T(u) - T(v).$$

**Definición 9.7** (Kernel e imagen de una transformación lineal). Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal entre espacios vectoriales sobre un campo  $\mathbb{F}$ . Se definen:

■ **Kernel o núcleo** de  $T$ :

$$\ker(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0\}$$

Es el conjunto de todos los vectores de  $V$  que se transforman en el vector cero de  $W$  bajo  $T$ .

■ **Imagen de  $T$ :**

$$\text{Im}(T) = \{ w \in W \mid \exists u \in V \text{ tal que } T(u) = w \}$$

Es el conjunto de todos los vectores de  $W$  que son imagen de algún vector de  $V$  bajo la transformación  $T$ .

**Teorema 9.8.** *Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal entre espacios vectoriales sobre un campo  $\mathbb{F}$ . Entonces, el núcleo  $\ker(T)$  es un subespacio vectorial de  $V$  y la imagen  $\text{Im}(T)$  es un subespacio vectorial de  $W$ .*

*Demostración.* I. **El núcleo es un subespacio de  $V$ :**

Por definición,  $\ker(T) = \{ u \in V \mid T(u) = 0 \}$ .

- El vector cero de  $V$  pertenece al núcleo, ya que  $T(0) = 0$ .
- Si  $u, v \in \ker(T)$ , entonces  $T(u) = 0$  y  $T(v) = 0$ . Por linealidad,

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0,$$

por lo tanto  $u + v \in \ker(T)$ .

- Si  $u \in \ker(T)$  y  $k \in \mathbb{F}$ , entonces  $T(u) = 0$ , así que

$$T(ku) = kT(u) = k \cdot 0 = 0,$$

por lo tanto  $ku \in \ker(T)$ .

Así,  $\ker(T)$  es un subespacio vectorial de  $V$ .

II. **La imagen es un subespacio de  $W$ :**

Por definición,  $\text{Im}(T) = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ tal que } T(v) = w \}$ .

- El vector cero de  $W$  pertenece a la imagen, ya que  $T(0) = 0$ .
- Si  $w_1, w_2 \in \text{Im}(T)$ , existen  $v_1, v_2 \in V$  tales que  $T(v_1) = w_1$  y  $T(v_2) = w_2$ . Por linealidad,

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2,$$

por lo tanto  $w_1 + w_2 \in \text{Im}(T)$ .

- Si  $w_1 \in \text{Im}(T)$  y  $k \in \mathbb{F}$ , existe  $v_1 \in V$  tal que  $T(v_1) = w_1$ . Entonces,

$$T(kv_1) = kT(v_1) = kw_1,$$

por lo tanto  $kw_1 \in \text{Im}(T)$ .

Así,  $\text{Im}(T)$  es un subespacio vectorial de  $W$ .

□

**Definición 9.9** (Rango y nulidad). Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal entre espacios vectoriales. Se definen:

- El **rango** de  $T$ , denotado por  $\text{rang}(T)$  o  $\text{rank}(T)$ , es la dimensión de la imagen de  $T$ :

$$\text{rang}(T) = \dim(\text{Im}(T)).$$

- La **nulidad** de  $T$ , denotada por  $\text{nul}(T)$ , es la dimensión del núcleo de  $T$ :

$$\text{nul}(T) = \dim(\ker(T)).$$

**Teorema 9.10** (Teorema de la dimensión). *Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal entre espacios vectoriales sobre un campo  $\mathbb{F}$ , con  $\dim(V)$  y  $\dim(W)$  finitos. Entonces,*

$$\text{rang}(T) + \text{nul}(T) = \dim(V).$$

*Demostración.* Supongamos que  $\dim(V) = n$  y que  $\text{nul}(T) = r$ , es decir,  $\dim(\ker(T)) = r$ . Sea  $\{v_1, \dots, v_r\}$  una base de  $\ker(T)$ . Como  $\dim(V) = n$ , es posible completar esta base a una base de  $V$ :  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ .

Demostraremos que  $\{T(v_{r+1}), \dots, T(v_n)\}$  es una base de  $\text{Im}(T)$ .

Sea  $w \in \text{Im}(T)$ . Entonces, existe  $v \in V$  tal que  $T(v) = w$ . Como  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ , existen escalares  $k_1, \dots, k_n$  tales que

$$v = \sum_{i=1}^n k_i v_i = \sum_{i=1}^r k_i v_i + \sum_{i=r+1}^n k_i v_i.$$

Aplicando  $T$  y usando la linealidad,

$$w = T(v) = \sum_{i=1}^r k_i T(v_i) + \sum_{i=r+1}^n k_i T(v_i).$$

Como  $v_1, \dots, v_r \in \ker(T)$ , se tiene  $T(v_1) = \dots = T(v_r) = 0$ , por lo que

$$w = \sum_{i=r+1}^n k_i T(v_i).$$

Esto muestra que  $\{T(v_{r+1}), \dots, T(v_n)\}$  genera  $\text{Im}(T)$ .

Veamos que este conjunto es linealmente independiente. Supongamos que

$$\sum_{i=r+1}^n c_i T(v_i) = 0.$$

Entonces,

$$T\left(\sum_{i=r+1}^n c_i v_i\right) = 0,$$

por lo que  $\sum_{i=r+1}^n c_i v_i \in \ker(T)$ . Como  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ , la única forma de escribir el vector cero es con todos los coeficientes nulos. Así,  $c_{r+1} = \dots = c_n = 0$ . Por lo tanto,  $\{T(v_{r+1}), \dots, T(v_n)\}$  es linealmente independiente y, por lo tanto, es una base de  $\text{Im}(T)$ .

Como hay  $n - r$  vectores en este conjunto,  $\dim(\text{Im}(T)) = n - r$ . Finalmente,

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = (n - r) + r = n = \dim(V).$$

□

**Definición 9.11** (Transformación lineal inyectiva). Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal entre espacios vectoriales. Se dice que  $T$  es **inyectiva** si para cualesquiera  $u, v \in V$ , se cumple que

$$T(u) = T(v) \implies u = v.$$

**Definición 9.12** (Transformación lineal sobreyectiva). Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Se dice que  $T$  es **sobreyectiva** si para todo  $w \in W$  existe  $v \in V$  tal que  $T(v) = w$ , es decir,

$$\text{Im}(T) = W.$$

**Teorema 9.13.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal entre espacios vectoriales. Son equivalentes:

- I.  $T$  es inyectiva.
- II.  $\ker(T) = \{0\}$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$  *ii.* Supongamos que  $T$  es inyectiva. Si existiera  $u \neq 0$  tal que  $T(u) = 0$ , entonces también  $T(0) = 0$ , lo que contradice la inyectividad de  $T$ . Por lo tanto,  $\ker(T) = \{0\}$ .

*ii.  $\Rightarrow$  i.* Supongamos que  $\ker(T) = \{0\}$ . Sean  $u, v \in V$  y supongamos que  $T(u) = T(v)$ . Entonces,

$$T(u) - T(v) = 0 \Rightarrow T(u - v) = 0 \Rightarrow u - v \in \ker(T).$$

Como  $\ker(T) = \{0\}$ , se sigue que  $u - v = 0$ , es decir,  $u = v$ . Por lo tanto,  $T$  es inyectiva. □

**Teorema 9.14** (Versión finita). *Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, con  $\dim(V) = \dim(W)$ . Entonces, son equivalentes:*

- I.  $T$  es inyectiva.
- II.  $\ker(T) = \{0\}$ .
- III.  $T$  es sobreyectiva, es decir,  $\text{Im}(T) = W$ .

*Demostración.* Ya se demostró que  $i. \iff ii.$  en el teorema anterior. Probemos las demás implicaciones:

*ii.  $\Rightarrow$  iii.* Si  $\ker(T) = \{0\}$ , entonces  $\text{nul}(T) = 0$ . Por el teorema de la dimensión,

$$\dim(V) = \text{rang}(T) + \text{nul}(T) = \text{rang}(T).$$

Como  $\dim(V) = \dim(W)$ , se sigue que  $\text{rang}(T) = \dim(W)$ . Por lo tanto,  $\text{Im}(T)$  es un subespacio de  $W$  con la misma dimensión, lo que implica que  $\text{Im}(T) = W$ , es decir,  $T$  es sobreyectiva.

*iii.  $\Rightarrow$  ii.* Supongamos que  $T$  es sobreyectiva, es decir,  $\text{Im}(T) = W$ . Si  $\ker(T) \neq \{0\}$ , entonces  $\text{nul}(T) > 0$ . Por el teorema de la dimensión,

$$\dim(V) = \text{rang}(T) + \text{nul}(T) > \text{rang}(T).$$

Pero como  $\text{Im}(T) = W$ ,  $\text{rang}(T) = \dim(W) = \dim(V)$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $\ker(T) = \{0\}$ . □

**Definición 9.15** (Composición de transformaciones lineales). Sean  $U, V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre el mismo campo  $\mathbb{F}$ , y sean  $T_1 : U \rightarrow V$  y  $T_2 : V \rightarrow W$  transformaciones lineales. Se define la composición  $T_2 \circ T_1 : U \rightarrow W$  por

$$(T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)), \quad \text{para todo } u \in U.$$

**Teorema 9.16.** *Si  $T_1 : U \rightarrow V$  y  $T_2 : V \rightarrow W$  son transformaciones lineales, entonces la composición  $T_2 \circ T_1 : U \rightarrow W$  también es una transformación lineal.*

*Demostración.* Sea  $u_1, u_2 \in U$  y  $k, m \in \mathbb{F}$ . Consideremos la combinación lineal  $ku_1 + mu_2$ . Entonces,

$$(T_2 \circ T_1)(ku_1 + mu_2) = T_2(T_1(ku_1 + mu_2)).$$

Como  $T_1$  es lineal,

$$T_1(ku_1 + mu_2) = kT_1(u_1) + mT_1(u_2).$$

Aplicando  $T_2$ , que también es lineal,

$$T_2(kT_1(u_1) + mT_1(u_2)) = kT_2(T_1(u_1)) + mT_2(T_1(u_2)).$$

Por lo tanto,

$$(T_2 \circ T_1)(ku_1 + mu_2) = k(T_2 \circ T_1)(u_1) + m(T_2 \circ T_1)(u_2).$$

Esto prueba que  $T_2 \circ T_1$  es una transformación lineal. □



**Definición 9.17** (Inversa de una transformación lineal). Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Se dice que  $T$  es invertible si existe una transformación lineal  $T^{-1} : W \rightarrow V$  tal que

$$T^{-1}(T(v)) = v \quad \text{para todo } v \in V, \quad \text{y} \quad T(T^{-1}(w)) = w \quad \text{para todo } w \in W.$$

En ese caso,  $T^{-1}$  se llama la transformación inversa de  $T$ .

**Teorema 9.18.** Sean  $T_1 : U \rightarrow V$  y  $T_2 : V \rightarrow W$  transformaciones lineales inyectivas. Entonces, la composición  $T_2 \circ T_1 : U \rightarrow W$  es inyectiva y además

$$(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}.$$

*Demostración.* **1. Inyectividad de la composición:**

Supongamos que  $(T_2 \circ T_1)(u_1) = (T_2 \circ T_1)(u_2)$  para  $u_1, u_2 \in U$ . Entonces,

$$T_2(T_1(u_1)) = T_2(T_1(u_2)).$$

Como  $T_2$  es inyectiva, se deduce que  $T_1(u_1) = T_1(u_2)$ . Como  $T_1$  también es inyectiva, entonces  $u_1 = u_2$ . Por lo tanto,  $T_2 \circ T_1$  es inyectiva.

**2. Inversa de la composición:**

Supongamos ahora que  $T_1$  y  $T_2$  son invertibles (es decir, biyectivas). Queremos demostrar que  $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$ .

Para todo  $u \in U$  y  $w \in W$ :

$$(T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) \circ (T_2 \circ T_1)(u) = T_1^{-1}(T_2^{-1}(T_2(T_1(u)))) = T_1^{-1}(T_1(u)) = u,$$

y

$$(T_2 \circ T_1) \circ (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(w) = T_2(T_1(T_1^{-1}(T_2^{-1}(w)))) = T_2(T_2^{-1}(w)) = w.$$

Por lo tanto,  $T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$  es la inversa de  $T_2 \circ T_1$ . □

**Definición 9.19** (Isomorfismo). Sean  $U$  y  $V$  espacios vectoriales sobre el mismo campo  $\mathbb{F}$ . Una transformación lineal  $T : U \rightarrow V$  se llama **isomorfismo** si es inyectiva y sobreyectiva, es decir, si existe una transformación lineal biyectiva entre  $U$  y  $V$ . En tal caso, se dice que  $U$  y  $V$  son **isomorfos** y se denota  $U \cong V$ .

**Teorema 9.20** (Isomorfismo con  $\mathbb{R}^n$ ). Todo espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{R}$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con  $\dim(V) = n$ . Entonces existe una base  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$ . Para cada  $v \in V$ , existen escalares únicos  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

Definimos la función  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$T(v) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

es decir,  $T(v)$  es el vector de coordenadas de  $v$  respecto a la base  $B$ .

**Linealidad:** Dados  $u, v \in V$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$T(\alpha u + \beta v) = [\alpha u + \beta v]_B = \alpha[u]_B + \beta[v]_B = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Por lo tanto,  $T$  es una transformación lineal.

**Inyectividad:** Si  $T(v) = 0$ , entonces todas las coordenadas de  $v$  son cero, por lo que  $v = 0$ . Así, el núcleo de  $T$  es trivial y  $T$  es inyectiva.

**Sobreyectividad:** Dado cualquier  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , el vector  $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V$  satisface  $T(v) = a$ . Por lo tanto,  $T$  es sobreyectiva.

Como  $T$  es lineal, inyectiva y sobreyectiva, es un isomorfismo. Por lo tanto,  $V \cong \mathbb{R}^n$ . □

**Ejemplo 9.21.** Algunos ejemplos de funciones que **son** y **no son** isomorfismos:

■ **Isomorfismos:**

- La función  $T : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por

$$T\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

es un isomorfismo, ya que asocia a cada polinomio su vector de coeficientes y es lineal, inyectiva y sobreyectiva.

- La función  $T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  definida por

$$T(A) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$$

(es decir, tomar todos los elementos de la matriz  $A$  y colocarlos en un vector) es también un isomorfismo, pues es lineal y biyectiva entre espacios de igual dimensión.

■ **No isomorfismos:**

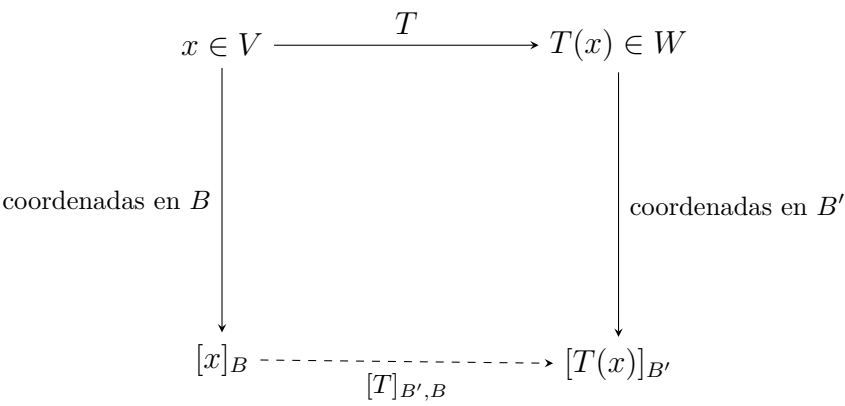
- La derivada  $T : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$ ,  $f(x) \mapsto f'(x)$ , no es isomorfismo porque no es sobreyectiva: no toda función continua es derivada de otra función continua.
- La derivada  $T : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ,  $p(x) \mapsto p'(x)$ , tampoco es isomorfismo: no es inyectiva (el núcleo son los polinomios constantes) ni sobreyectiva (la imagen está en  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ ).

**Definición 9.22** (Matriz asociada a una transformación lineal). Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un campo  $\mathbb{F}$ , con  $\dim(V) = n$  y  $\dim(W) = m$ . Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Sean  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y  $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$  una base de  $W$ .

La **matriz asociada a  $T$  respecto de las bases  $B$  y  $B'$** , denotada por  $[T]_{B',B}$ , es la matriz  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  tal que, para todo  $x \in V$ ,

$$[T(x)]_{B'} = A \cdot [x]_B,$$

donde  $[x]_B$  es el vector de coordenadas de  $x$  en la base  $B$ , y  $[T(x)]_{B'}$  es el vector de coordenadas de  $T(x)$  en la base  $B'$ .



**Ejemplo 9.23.** Sea  $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_2, \quad x_2 + x_3 + x_4, \quad x_4 + x_5).$$

Calcule la matriz asociada a las bases canónicas:

**Solución:** Verifiquemos que  $T$  es una transformación lineal. Sean  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$  y  $v =$

$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  en  $\mathbb{R}^5$ , y  $k, m$  escalares:

$$\begin{aligned} T(ku + mv) &= T(ku_1 + mv_1, ku_2 + mv_2, ku_3 + mv_3, ku_4 + mv_4, ku_5 + mv_5) \\ &= (ku_1 + mv_1 + ku_2 + mv_2, ku_2 + mv_2 + ku_3 + mv_3 + ku_4 + mv_4, \\ &\quad ku_4 + mv_4 + ku_5 + mv_5) \\ &= k(u_1 + u_2, u_2 + u_3 + u_4, u_4 + u_5) + m(v_1 + v_2, v_2 + v_3 + v_4, v_4 + v_5) \\ &= kT(u) + mT(v) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $T$  es una transformación lineal. Ahora, consideremos la base canónica de  $\mathbb{R}^5$ :

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0, 0), \quad e_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \quad e_5 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Calculamos la imagen de cada vector base:

$$T(e_1) = (1, 0, 0)$$

$$T(e_2) = (1, 1, 0)$$

$$T(e_3) = (0, 1, 0)$$

$$T(e_4) = (0, 1, 1)$$

$$T(e_5) = (0, 0, 1)$$

Por lo tanto, la matriz asociada a  $T$  respecto de las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Observación 9.24.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal, y sean  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y  $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$  una base de  $W$ . La **matriz asociada** a  $T$  respecto de las bases  $B$  y  $B'$  se construye colocando como columnas las coordenadas de  $T(v_i)$  en la base  $B'$ :

$$A = ([T(v_1)]_{B'} \quad [T(v_2)]_{B'} \quad \cdots \quad [T(v_n)]_{B'})$$

Esto permite calcular la imagen de cualquier vector de  $V$  bajo  $T$  a través de la multiplicación de matrices y vectores de coordenadas.

**Ejemplo 9.25.** Sea  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$$

con la base estándar  $B = \{1, x, x^2\}$ . Calculamos las imágenes de los vectores base:

$$T(1) = 1 \mapsto (1, 0, 0)$$

$$T(x) = x + 1 \mapsto (1, 1, 0)$$

$$T(x^2) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \mapsto (1, 2, 1)$$

Por lo tanto, la matriz asociada a  $T$  en la base  $B$  es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definición 9.26** (Kernel e imagen de una transformación lineal bajo su matriz). Sea  $A$  la matriz de representación de la transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  respecto de bases dadas. El **kernel** (o **núcleo**) de  $A$ , denotado  $\ker(A)$ , es el conjunto de todos los vectores  $x \in V$  tales que  $Ax = 0$ . Este conjunto es un subespacio de  $V$  y corresponde al kernel de  $T$ :

$$\ker(A) = \{x \in V \mid Ax = 0\}$$

Por otro lado, el **espacio columna** de  $A$  (o **imagen** de  $A$ ), denotado  $\text{Im}(A)$ , es el subespacio de  $W$  generado por las columnas de  $A$ , y coincide con la imagen de  $T$ :

$$\text{Im}(A) = \{Ax \mid x \in V\}$$

**Ejemplo 9.27.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , calculamos:

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como  $\det(A) = -11 \neq 0$ , la matriz es invertible, lo que implica que  $\ker(A) = \{0\}$  y  $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^3$  (es decir, el núcleo es trivial y la imagen es todo el codominio).

**Teorema 9.28.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales con la misma dimensión finita  $n$  y  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $T$  es inyectiva.
2.  $\ker(T) = \{0\}$ .
3.  $T$  es sobreyectiva ( $\text{Im}(T) = W$ ).
4.  $A$  será una matriz  $n \times n$  invertible.
5.  $\det(A) \neq 0$ .
6.  $A^{-1}$  representa la transformación lineal inversa de  $T$ , es decir,  $T^{-1} : W \rightarrow V$ .

**Demostración.**  $1 \iff 2$ :  $T$  es inyectiva si y solo si  $\ker(T) = \{0\}$ . Si  $T$  es inyectiva, la única solución de  $T(v) = 0$  es  $v = 0$ . Si  $\ker(T) = \{0\}$  y  $T(u) = T(v)$ , entonces  $T(u - v) = 0$ , así  $u - v = 0$  y  $u = v$ .

$2 \iff 3$ : Si  $T$  es inyectiva, entonces  $\dim(\ker(T)) = 0$ . Por el teorema de la dimensión,  $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 0 + \dim(\text{Im}(T))$ , así que  $\dim(\text{Im}(T)) = n = \dim(W)$ , por lo que  $\text{Im}(T) = W$ , es decir,  $T$  es sobreyectiva. El argumento recíproco es análogo.

$1 \iff 4$ :  $T$  es inyectiva si y solo si la matriz asociada  $A$  es invertible. Si  $A$  no es invertible, existe  $x \neq 0$  tal que  $Ax = 0$ , es decir,  $\ker(T) \neq \{0\}$ . Si  $A$  es invertible, la única solución de  $Ax = 0$  es  $x = 0$ .

$4 \iff 5$ : Una matriz cuadrada  $A$  es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero ( $\det(A) \neq 0$ ).

$4 \iff 6$ : Si  $A$  es invertible, entonces existe  $A^{-1}$  tal que  $A^{-1}A = I_n$ , y  $A^{-1}$  es la matriz asociada a la transformación inversa  $T^{-1} : W \rightarrow V$ .

Por lo tanto, todas las afirmaciones son equivalentes. □

**Ejemplo 9.29.** Defina la función  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  como

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

a. Calcule  $T(x^2 + 5x + 6)$ :

**Solución:**

$$T(x^2 + 5x + 6) = \begin{pmatrix} (-1)^2 + 5(-1) + 6 \\ 0^2 + 5 \cdot 0 + 6 \\ 1^2 + 5 \cdot 1 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

b. Demuestre que  $T$  es una transformación lineal.

**Solución:** Sean  $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y  $k, m \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T(kp_1(x) + mp_2(x)) &= \begin{pmatrix} kp_1(-1) + mp_2(-1) \\ kp_1(0) + mp_2(0) \\ kp_1(1) + mp_2(1) \end{pmatrix} \\ &= k \begin{pmatrix} p_1(-1) \\ p_1(0) \\ p_1(1) \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} p_2(-1) \\ p_2(0) \\ p_2(1) \end{pmatrix} \\ &= kT(p_1(x)) + mT(p_2(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $T$  es una transformación lineal.

c. Calcule la matriz asociada a  $T$  usando la base canónica  $B = \{1, x, x^2\}$  de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ :

**Solución:**

$$\begin{aligned} T(1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ T(x) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ T(x^2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Calcule  $\ker(T)$ .

**Solución:** Como  $\det(A) = 2 \neq 0$ , la matriz es invertible, así que  $\ker(T) = \{0\}$ .

e. Calcule  $T^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Como  $A$  es invertible,  $T^{-1}(X) = A^{-1}X$ . Se tiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es decir, el polinomio buscado en la base  $B = \{1, x, x^2\}$  es  $3 - 3x^2$ .

**Ejemplo 9.30** (Transformaciones lineales clásicas en  $\mathbb{R}^2$ ). A continuación se presentan algunos ejemplos clásicos de transformaciones lineales en el plano  $\mathbb{R}^2$ , con sus matrices de representación respecto a la base canónica y las gráficas correspondientes.

a) **Reflexión respecto a la recta  $y = x$ :**

La transformación  $T$  que refleja un punto respecto a la recta  $y = x$  cumple que

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y para cualquier  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

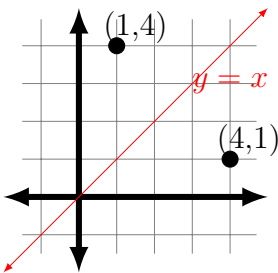


Figura 9.1: Reflexión respecto a la recta  $y = x$ .

b) **Rotación de un ángulo  $\theta$  respecto al origen:**

La matriz de rotación de un ángulo  $\theta$  es

$$T_{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, para rotar el punto  $(1, 4)$  un ángulo  $\frac{\pi}{4}$  radianes:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

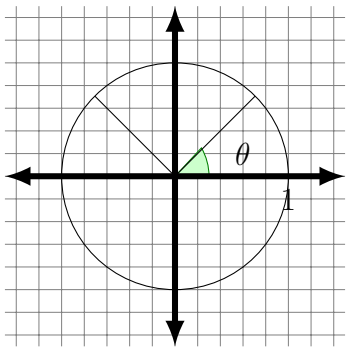


Figura 9.2: Rotación de un punto respecto al origen.

c) **Amplificación (escalado) de regiones:**

Suponga que se desea ampliar una figura en el plano un 150 % en el eje  $x$  y un 200 % en el eje  $y$ . Si la transformación lleva el punto  $(4, 0)$  a  $(6, 0)$  y  $(0, 3)$  a  $(0, 6)$ , entonces la matriz de transformación es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

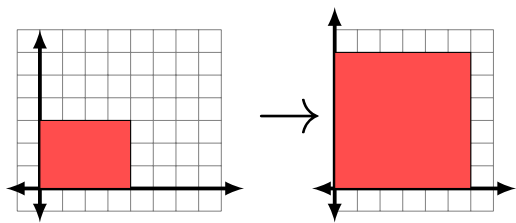


Figura 9.3: Escalado de una región en el plano.

**Ejemplo 9.31** (Transformaciones lineales: la casita y sus imágenes). Consideremos una figura en el plano (la casita”) representada por los vértices y segmentos en la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . A continuación se muestran algunos ejemplos de transformaciones lineales aplicadas a esta figura, junto con sus matrices y gráficas.

(a) **Reflexión respecto al eje  $y$ :**

La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta transformación invierte la coordenada  $x$  y deja inalterada la coordenada  $y$ .

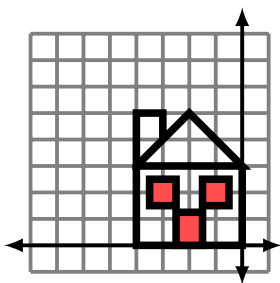


Figura 9.4: Reflexión de la casita respecto al eje  $y$ .

(b) **Dilatación (ampliación) al doble:**

La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta transformación multiplica por 2 cada coordenada, ampliando la figura al doble de su tamaño.

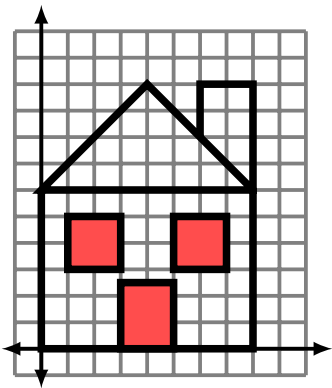


Figura 9.5: La casita ampliada al doble.

(c) **Reflexión respecto al eje  $x$ :**

La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta transformación invierte la coordenada  $y$  y deja inalterada la coordenada  $x$ .

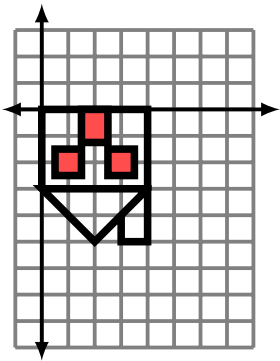


Figura 9.6: Reflexión de la casita respecto al eje  $x$ .

**Problema 9.32.** Sea  $S = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  la base que resulta al evaluar los vectores de  $S$  en la transformación lineal

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Calcule la matriz de cambio de base de la base canónica a la base  $B$ .

**Solución:** Para obtener la base  $B$ , aplicamos la transformación  $T$  a cada vector de la base canónica  $S$ :

$$v_1 = T(e_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 + 0 \\ 0 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$v_2 = T(e_2) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1 \\ 2 \cdot 0 - 1 + 0 \\ 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$v_3 = T(e_3) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0 \\ 2 \cdot 0 - 0 + 1 \\ 0 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



La matriz de cambio de base de la base canónica  $S$  a la base  $B$  está formada por las columnas que son los vectores  $v_1, v_2, v_3$  expresados en la base canónica:

$$P_{S \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Problema 9.33.** Determine si las siguientes funciones son una transformación lineal. Si lo son, use la matriz de representación en las bases canónicas para calcular una base para el kernel y la imagen. Determine el rango y la nulidad de la transformación.

a)  $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donde  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ x_4 + x_5 \end{pmatrix}.$

**Solución:**  $T$  es una transformación lineal porque cada componente es una combinación lineal de las variables.  
La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el kernel, resolvemos  $A\vec{x} = 0$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

De aquí:  $x_1 = -x_2$ ,  $x_4 = -x_5$ ,  $x_3 = -x_2 - x_4 = -x_2 + x_5$ .  
El kernel es:

$$\ker(T) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nulidad = 2.  
Para la imagen, el rango de  $A$  es 3 (las filas son linealmente independientes). Una base para la imagen son las columnas 1, 2 y 4:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Rango = 3.

b)  $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  donde  $T(A) = A^2$ .

**Solución:** No es una transformación lineal. En general,

$$T(A + B) = (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2 = T(A) + T(B)$$

Por lo tanto,  $T$  no es lineal.

c)  $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  donde  $T(A) = \mathbf{O}_{2 \times 2}$ .

**Solución:** Sí es lineal porque  $T(A + B) = \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{O} = T(A) + T(B)$  y  $T(kA) = \mathbf{O} = k\mathbf{O} = kT(A)$ .

La matriz asociada es la matriz nula de  $4 \times 4$ . El kernel es todo  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , con base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nulidad = 4. Imagen =  $\{\mathbf{O}\}$ , rango = 0.

d)  $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 3a - 4b + c + d$ .

**Solución:**  $T$  es lineal, pues es una combinación lineal de las entradas.

La matriz asociada en la base canónica es el vector fila:

$$A = (3 \quad -4 \quad 1 \quad 1)$$

El kernel es el subespacio de matrices  $A$  tales que  $3a - 4b + c + d = 0$ . Una base se puede obtener resolviendo la ecuación para tres variables libres, por ejemplo:

$$a = \frac{4}{3}b - \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}d$$

Así, una base del kernel es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Nulidad = 3.

La imagen es  $\mathbb{R}$ , rango = 1.

e)  $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$  donde  $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 2d \\ 2b - d & -3c \\ 2b - c & -3a \end{pmatrix}$ .

**Solución:**  $T$  es lineal, ya que cada entrada es una combinación lineal de  $a, b, c, d$ .

Si escribimos la matriz como un vector columna:

$$T \left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a + b \\ 2d \\ 2b - d \\ -3c \\ 2b - c \\ -3a \end{pmatrix}$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de  $A$  es 4 (por reducción por filas). La nulidad es 0 (ya que hay 4 columnas y 4 pivotes). El kernel es  $\{0\}$  y la imagen es un subespacio de dimensión 4 en  $\mathbb{R}^6$ .

f)  $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  donde  $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2a + (b - d)x - (a + c)x^2 + (a + b - c - d)x^3$ .

**Solución:**  $T$  es lineal, pues cada coeficiente es una combinación lineal de  $a, b, c, d$ . La matriz asociada en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El rango es 4 (matriz cuadrada e invertible), nulidad = 0. El kernel es  $\{0\}$ , la imagen es todo  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ .

g)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  donde  $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$ .

**Solución:**  $T$  es lineal, pues es una combinación lineal de los coeficientes. Calculando la imagen de la base estándar:

$$T(1) = 1, \quad T(x) = x + 1, \quad T(x^2) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Expresando en la base  $\{1, x, x^2\}$ :

$$T(1) = (1, 0, 0), \quad T(x) = (1, 1, 0), \quad T(x^2) = (1, 2, 1)$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1 \neq 0$  así que  $A$  es invertible, el kernel es  $\{0\}$ , la imagen es todo  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , rango = 3, nulidad = 0.

h)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  donde  $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + (a_1 + 1)x + (a_2 + 1)x^2$ .

**Solución:** No es lineal, pues  $T(0) = 1 + 1x + 1x^2 \neq 0$  y tampoco se cumple la aditividad ni la homogeneidad.

i)  $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  donde  $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 5a_0 - 7a_3x^2$ .

**Solución:**  $T$  es lineal. La matriz asociada en bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

El kernel es el subespacio generado por  $x$  y  $x^2$ , es decir,  $\text{span}\{x, x^2\}$ . Nulidad = 2. La imagen es  $\text{span}\{1, x^2\}$ , rango = 2.

j)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  donde  $T(p(x)) = xp(x)$ .

**Solución:**  $T$  es lineal. En la base  $\{1, x, x^2\}$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  y  $\{1, x, x^2, x^3\}$  de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ :

$$T(1) = x, \quad T(x) = x^2, \quad T(x^2) = x^3$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El kernel es  $\{0\}$ , rango = 3, nulidad = 0. La imagen es  $\text{span}\{x, x^2, x^3\}$ .

k)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  donde  $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$ .

**Solución:**  $T$  es lineal. En la base estándar:

$$T(1) = 1, \quad T(x) = 1 - 2x, \quad T(x^2) = -3x$$

Matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Rango = 2, nulidad = 1. El kernel es generado por  $(1, -1, 1)$ , es decir,  $1 - x + x^2$ .

l)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  donde  $T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = x(c_0 + c_1(x - 3) + c_2(x - 3)^2)$ .

**Solución:**  $T$  es lineal. Expandiendo:

$$\begin{aligned} T(c_0 + c_1x + c_2x^2) &= x [c_0 + c_1(x - 3) + c_2(x^2 - 6x + 9)] \\ &= x[c_0 + c_1x - 3c_1 + c_2x^2 - 6c_2x + 9c_2] \\ &= c_0x + c_1x^2 - 3c_1x + c_2x^3 - 6c_2x^2 + 9c_2x \\ &= (c_0 - 3c_1 + 9c_2)x + (c_1 - 6c_2)x^2 + c_2x^3 \end{aligned}$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_0 - 3c_1 + 9c_2 & c_1 - 6c_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Expresando los coeficientes en la base estándar, se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango es 3, nulidad = 0. El kernel es  $\{0\}$ .

**Problema 9.34.** Sea  $D : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  el operador derivada  $D(p(x)) = p'(x)$ . Encuentre la matriz  $D$  relativa a la base  $B = \{1, x, x^2\}$ . Use  $D$  para calcular  $D(6 - 6x + 24x^2)$ .

**Solución:** Para encontrar la matriz de  $D$  relativa a la base  $B = \{1, x, x^2\}$ , derivamos cada elemento de la base y expresamos el resultado en términos de  $B$ :

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ D(x) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ D(x^2) &= 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz asociada es:

$$[D]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular  $D(6 - 6x + 24x^2)$ , primero escribimos el vector de coordenadas respecto a  $B$ :

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por la matriz  $[D]_B$ :

$$[D]_B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 + 1 \cdot (-6) + 0 \cdot 24 \\ 0 \cdot 6 + 0 \cdot (-6) + 2 \cdot 24 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$D(6 - 6x + 24x^2) = -6 + 48x$$

**Problema 9.35.** Defina  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  como

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule la matriz de representación de la transformación lineal donde  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  es la base del espacio de salida y  $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  es base del espacio de llegada. Calcule una base para el kernel y la imagen de  $T$ .

**Solución:** Matriz de representación en las bases dadas:

Primero, escribimos los vectores de la base  $B$  del dominio:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus imágenes por  $T$ :

$$T(v_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(v_2) = T \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2 \cdot 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, expresamos  $T(v_1)$  y  $T(v_2)$  en la base  $B'$  del codominio. Buscamos escalares  $a_1, a_2, a_3$  tales que:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esto da el sistema:

$$\begin{cases} 7 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ -1 = a_1 + 2a_2 \\ 0 = a_1 \end{cases} \implies a_1 = 0, -1 = 2a_2 \implies a_2 = -\frac{1}{2}, 7 = 2(-\frac{1}{2}) + 3a_3 \implies 7 = -1 + 3a_3 \implies a_3 = \frac{8}{3}$$

Por lo tanto,

$$[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

De igual modo, para  $T(v_2)$ :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} 6 = b_1 + 2b_2 + 3b_3 \\ 2 = b_1 + 2b_2 \\ 0 = b_1 \end{cases} \implies b_1 = 0, 2 = 2b_2 \implies b_2 = 1, 6 = 2(1) + 3b_3 \implies 6 = 2 + 3b_3 \implies b_3 = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto,

$$[T(v_2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz de representación de  $T$  en las bases  $B$  y  $B'$  es:

$$[T]_{B',B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

**Base para el kernel y la imagen de  $T$ :**

La matriz de  $T$  en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies x_1 = 0, 2x_2 = 0 \implies x_2 = 0$$

Por lo tanto,  $\ker(T) = \{0\}$ .

La imagen de  $T$  es el subespacio generado por las columnas de  $A$ :

$$\text{Im}(T) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Estas dos columnas son linealmente independientes, así que una base para la imagen de  $T$  es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

**Problema 9.36.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$  la matriz de representación de una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en las bases canónicas. Sea

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

una base del dominio y

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

una base del codominio. Calcule  $T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right)$  y exprese el resultado en coordenadas respecto a la base  $B'$ .

**Solución:** Primero, calculamos  $T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right)$  en la base canónica:

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -3x_1 + 7x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Para expresar este vector en la base  $B'$ , buscamos los escalares  $c_1, c_2, c_3$  tales que:

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esto equivale a resolver el sistema lineal  $B' \cdot \vec{c} = T(x)$ , donde  $B'$  es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base  $B'$ .  
Calculando explícitamente:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (B')^{-1} \cdot T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right)$$

El resultado es:

$$\begin{pmatrix} -\frac{43}{112}x_1 - \frac{1}{14}x_2 + \frac{13}{14}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \\ -\frac{24}{7}x_1 - \frac{10}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right)_{B'} = \begin{pmatrix} -\frac{43}{112}x_1 - \frac{1}{14}x_2 + \frac{13}{14}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \\ -\frac{24}{7}x_1 - \frac{10}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}_{B'}$$

**Problema 9.37.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Demuestre que, en relación al espacio con coordenadas  $XYZ$ , el espacio nulo de  $A$  consiste en todos los puntos del plano  $Z$  y que el espacio columna consiste en todos los puntos del plano  $XY$ .

**Solución:** El **espacio nulo** (o kernel) de  $A$  es el conjunto de vectores  $v = (x, y, z)^T$  tales que  $Av = 0$ :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica  $x = 0$  y  $y = 0$ , pero  $z$  es libre. Por lo tanto,

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Esto corresponde exactamente al eje  $Z$ , es decir, a todos los puntos del plano  $Z$  (el subespacio generado por el vector  $(0, 0, 1)$ ).

El **espacio columna** de  $A$  es el subespacio generado por sus columnas:

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Las dos primeras columnas son linealmente independientes y generan el plano  $XY$ , es decir,

$$\text{Col}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Por lo tanto, el espacio columna de  $A$  consiste en todos los puntos del plano  $XY$ . Esto coincide con los resultados computacionales: el núcleo es generado por  $(0, 0, 1)$  y el espacio columna por  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ .

**Problema 9.38.** Encuentre una matriz  $3 \times 3$  cuyo espacio nulo sea el eje  $X$  y cuyo espacio columna sea el plano  $YZ$ .

**Solución:** Queremos que el espacio nulo (kernel) sea el eje  $X$ , es decir, todos los vectores de la forma  $(x, 0, 0)^T$ . Esto implica que la matriz  $A$  debe anular cualquier vector cuya única componente no nula sea la primera.

Además, queremos que el espacio columna (imagen) de  $A$  sea el plano  $YZ$ , es decir, todos los vectores de la forma  $(0, y, z)^T$ . Esto significa que las columnas de  $A$  deben generar el subespacio  $YZ$  y, por lo tanto, su primera fila debe ser toda cero.

Una matriz que cumple estas condiciones es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificación:

- **Espacio nulo:**  $A \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  para cualquier  $x$ . Si  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ , entonces  $y = 0$  y  $z = 0$ , así que el núcleo es exactamente el eje  $X$ .



■ **Espacio columna:** Las columnas de  $A$  son  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , que generan el plano  $YZ$ .

**Problema 9.39.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $m$ . Demuestre que si  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal inyectiva y  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  con  $k \leq m$  es un conjunto linealmente independiente en  $V$ , entonces  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  es un conjunto linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ .

**Solución:** Sea  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal inyectiva y sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  un conjunto linealmente independiente en  $V$  con  $k \leq m = \dim(V)$ . Supongamos que existen escalares  $a_1, a_2, \dots, a_k$  tales que

$$a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \dots + a_kT(v_k) = 0.$$

Por la linealidad de  $T$ , esto implica

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k) = 0.$$

Como  $T$  es inyectiva, su núcleo es trivial, es decir,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0.$$

Dado que  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  es linealmente independiente, se concluye que

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Por lo tanto,  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  es un conjunto linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ .

**Problema 9.40.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $m$ . Demuestre que si  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal y  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  con  $k \leq m$  es un conjunto linealmente dependiente en  $V$ , entonces  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  es un conjunto linealmente dependiente en  $\mathbb{R}^n$ .

**Solución:** Sea  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal y sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  un conjunto linealmente dependiente en  $V$  con  $k \leq m = \dim(V)$ . Por definición de dependencia lineal, existen escalares no todos cero  $a_1, a_2, \dots, a_k$  tales que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0.$$

Aplicando la transformación lineal  $T$  y usando su linealidad, se tiene

$$a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \dots + a_kT(v_k) = T(0) = 0.$$

Por lo tanto,  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  es un conjunto linealmente dependiente en  $\mathbb{R}^n$ .

**Problema 9.41.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Demuestre que si  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  y  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  es una base de  $\ker(T)$ , entonces

$$\{T(v_{k+1}), T(v_{k+2}), \dots, T(v_n)\}$$

es una base de  $\text{Im}(T)$ .

**Solución:** Como  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ , todo vector  $v \in V$  se puede escribir de forma única como

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i.$$

Aplicando  $T$ , obtenemos

$$T(v) = \sum_{i=1}^n a_i T(v_i) = \sum_{i=k+1}^n a_i T(v_i),$$

ya que para  $1 \leq i \leq k$ ,  $v_i \in \ker(T)$  implica que  $T(v_i) = 0$ .

Por lo tanto,  $\text{Im}(T)$  está generado por  $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ .

Para demostrar que este conjunto es linealmente independiente, supongamos que existen escalares  $c_{k+1}, \dots, c_n$  tales que

$$\sum_{i=k+1}^n c_i T(v_i) = 0.$$

Esto implica que

$$T\left(\sum_{i=k+1}^n c_i v_i\right) = 0,$$

es decir,  $\sum_{i=k+1}^n c_i v_i \in \ker(T)$ .

Pero como  $\{v_1, \dots, v_k\}$  es base de  $\ker(T)$  y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ , la expresión

$$\sum_{i=k+1}^n c_i v_i = \sum_{j=1}^k d_j v_j$$

para algunos escalares  $d_j$ .

Reordenando,

$$\sum_{j=1}^k (-d_j) v_j + \sum_{i=k+1}^n c_i v_i = 0.$$

Dado que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es base, todos los coeficientes deben ser cero, por lo que

$$c_i = 0 \quad \text{para } i = k + 1, \dots, n.$$

Por lo tanto,  $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$  es linealmente independiente y, junto con la generación demostrada, es base de  $\text{Im}(T)$ .

**Problema 9.42.** Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Demuestre el teorema de la dimensión para matrices, es decir, demuestre que  $\text{nulidad}(A) + \text{rango}(A) = n$ .

**Solución:** El teorema de la dimensión para matrices, también conocido como teorema rango-nulidad, afirma que para cualquier matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$ :

$$\text{nulidad}(A) + \text{rango}(A) = n,$$

donde  $\text{rango}(A)$  es la dimensión del espacio columna de  $A$  (el número de columnas linealmente independientes) y  $\text{nulidad}(A)$  es la dimensión del espacio nulo de  $A$  (el conjunto de soluciones de  $A\vec{x} = 0$ ).

**Demostración:**

Al reducir  $A$  a su forma escalonada por filas, el número de columnas con pivote (unos principales) es igual al rango  $r$  de  $A$ . Las variables asociadas a columnas sin pivote son variables libres, y su número es  $n - r$ .

Cada variable libre corresponde a un vector linealmente independiente en el espacio nulo, por lo

que la nulidad de  $A$  es precisamente el número de variables libres:

$$\text{nulidad}(A) = n - \text{rango}(A).$$

Reordenando,

$$\text{nulidad}(A) + \text{rango}(A) = n.$$

De manera formal, si  $A$  define una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , entonces el teorema rango-nulidad se deduce del hecho de que la dimensión del dominio es igual a la suma de la dimensión del núcleo y la dimensión de la imagen:

$$\dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T) = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Por lo tanto, para cualquier matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$ ,

$$\text{nulidad}(A) + \text{rango}(A) = n.$$

**Problema 9.43.** Defina  $W = \text{span}\{1, \sin x, \cos x\}$  como subespacio de  $\mathcal{C}[0, 2\pi]$  y sea  $T : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal  $T(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$ . Calcule:

a)  $T(1 + \sin x + \cos x)$ .

**Solución:** Por la definición de  $T$ , para cualquier  $f(x) \in W$ ,  $T(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$ , independientemente de  $f(x)$ . Por lo tanto,

$$T(1 + \sin x + \cos x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}.$$

b) La matriz de representación de  $T$  respecto a la base  $\{1, \sin x, \cos x\}$  de  $W$ .

**Solución:** La base de  $W$  es  $\{1, \sin x, \cos x\}$ . Calculamos la imagen de cada vector base:

$$T(1) = T(\sin x) = T(\cos x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & \pi & \pi \\ 2\pi & 2\pi & 2\pi \end{pmatrix}$$

c) Una base para el kernel de  $T$ .

**Solución:** El kernel de  $T$  es el conjunto de  $f(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 \sin x + a_3 \cos x$  tal que  $T(f(x)) = 0$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{pmatrix} = 0 \implies \pi = 0, 2\pi = 0,$$

lo cual nunca ocurre para valores reales de  $\pi$ . Sin embargo, dado que la imagen de cualquier

$f(x)$  es siempre el vector fijo, el kernel es el subespacio de  $W$  formado por todos los  $f(x)$  tales que  $T(f(x)) = 0$ , pero como  $T$  nunca es cero salvo para el vector nulo, el kernel es  $\{0\}$ . Por lo tanto, una base para el kernel es  $\emptyset$  o  $\{0\}$ .

d) Una base para la imagen de  $T$ .

**Solución:** La imagen de  $T$  es el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  generado por el vector  $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$ . Por lo tanto, una base para la imagen es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{pmatrix} \right\}$$

**Problema 9.44.** Defina  $W := \{f \in \mathcal{C}[-1, 1] \mid f(0) = 0\}$  y  $T : \mathcal{C}[-1, 1] \rightarrow W$  como  $T(f(x)) = f(x) - f(0)$ . Determine si  $T$  es una transformación lineal y, si lo es, calcule una base para el kernel y la imagen de  $T$ .

**Solución: Linealidad:** Sea  $f, g \in \mathcal{C}[-1, 1]$  y  $k \in \mathbb{R}$ .

$$T(f+g)(x) = (f+g)(x) - (f+g)(0) = f(x) + g(x) - f(0) - g(0) = (f(x) - f(0)) + (g(x) - g(0)) = T(f)(x) + T(g)(x)$$
$$T(kf)(x) = (kf)(x) - (kf)(0) = kf(x) - kf(0) = k(f(x) - f(0)) = kT(f)(x)$$

Por lo tanto,  $T$  es una transformación lineal.

**Kernel de  $T$ :** Buscamos todas las  $f$  tales que  $T(f) = 0$ , es decir,

$$f(x) - f(0) = 0 \implies f(x) = f(0) \quad \forall x$$

Por lo tanto, el kernel está formado por todas las funciones constantes. Una base para el kernel es la función constante 1.

**Imagen de  $T$ :** Para cualquier  $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$ ,  $T(f)(0) = f(0) - f(0) = 0$ . Por lo tanto, la imagen de  $T$  es el subespacio  $W = \{g \in \mathcal{C}[-1, 1] \mid g(0) = 0\}$ , es decir, el conjunto de funciones continuas que se anulan en 0. Este subespacio es de dimensión infinita y no admite una base finita, pero puede describirse simplemente como  $W$ .

**Problema 9.45.** Defina  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal tal que

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule la matriz de representación de  $T$  respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  y determine el rango y la nulidad de  $T$ .

**Solución:** Sea  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . Queremos encontrar  $T(e_1)$  y  $T(e_2)$ . Expresamos los vectores dados en términos de  $e_1$  y  $e_2$ :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3e_1 + 2e_2, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4e_1 + 3e_2.$$

Sea  $T(e_1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  y  $T(e_2) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ . Entonces:

$$3T(e_1) + 2T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$4T(e_1) + 3T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esto nos da, para cada componente  $i$ :

$$\begin{cases} 3a_i + 2b_i = u_i \\ 4a_i + 3b_i = v_i \end{cases}$$

donde  $u = (1, 2, 3)^T$ ,  $v = (0, -5, 1)^T$ .

Resolviendo para cada componente:

**Primera componente:**

$$\begin{cases} 3a_1 + 2b_1 = 1 \\ 4a_1 + 3b_1 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por  $-2$  y sumamos:

$$9a_1 + 6b_1 = 3 \qquad -8a_1 - 6b_1 = 0 \qquad a_1 = 3$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3(3) + 2b_1 = 1 \implies 9 + 2b_1 = 1 \implies 2b_1 = -8 \implies b_1 = -4$$

**Segunda componente:**

$$\begin{cases} 3a_2 + 2b_2 = 2 \\ 4a_2 + 3b_2 = -5 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera por 3 y la segunda por  $-2$ :

$$9a_2 + 6b_2 = 6 \qquad -8a_2 - 6b_2 = 10 \qquad a_2 = 16$$

Sustituyendo:

$$3(16) + 2b_2 = 2 \implies 48 + 2b_2 = 2 \implies 2b_2 = -46 \implies b_2 = -23$$

**Tercera componente:**

$$\begin{cases} 3a_3 + 2b_3 = 3 \\ 4a_3 + 3b_3 = 1 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera por 3 y la segunda por  $-2$ :

$$9a_3 + 6b_3 = 9 \qquad -8a_3 - 6b_3 = -2 \qquad a_3 = 7$$

Sustituyendo:

$$3(7) + 2b_3 = 3 \implies 21 + 2b_3 = 3 \implies 2b_3 = -18 \implies b_3 = -9$$

Por lo tanto,

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -23 \\ -9 \end{pmatrix}$$

La matriz de representación de  $T$  en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 16 & -23 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

**Rango y nulidad:**

Las dos columnas de  $A$  son linealmente independientes (no son múltiplos una de la otra), así que el rango de  $T$  es 2. Como el dominio es de dimensión 2, la nulidad es  $2 - 2 = 0$ .

**Problema 9.46.** Defina  $T : \mathcal{C}[0, 3] \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  como  $T(f(x)) = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + f(3)x^3$ . Determine si  $T$  es una transformación lineal. Si lo es, calcule el kernel y la imagen de  $T$ .

**Solución:** **Linealidad:** Sea  $f, g \in \mathcal{C}[0, 3]$  y  $k \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} T(f+g) &= (f+g)(0) + (f+g)(1)x + (f+g)(2)x^2 + (f+g)(3)x^3 = [f(0)+g(0)] + [f(1)+g(1)]x + [f(2)+g(2)]x^2 + [f(3)+g(3)]x^3 \\ &= T(f) + T(g) \\ T(kf) &= kf(0) + kf(1)x + kf(2)x^2 + kf(3)x^3 = kT(f) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $T$  es una transformación lineal[4][5].

**Kernel:**  $T(f) = 0$  si y sólo si  $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0$ . Por lo tanto, el kernel es el conjunto de funciones continuas en  $[0, 3]$  que se anulan en 0, 1, 2, 3. Una base del núcleo (en el sentido de subespacio infinito dimensional) es  $\{(x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 3)\}$  y todos sus múltiplos y sumas con funciones que sean cero en esos puntos.

**Imagen:** Para cualquier  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ , la función  $f$  definida por  $f(0) = a_0$ ,  $f(1) = a_1$ ,  $f(2) = a_2$ ,  $f(3) = a_3$  y arbitraria en el resto, cumple  $T(f) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ . Por lo tanto, la imagen de  $T$  es todo  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ .

**Problema 9.47.** Considere  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ , y defina

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre una fórmula para  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  y calcule  $T \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**Solución:** Primero, expresamos cualquier vector  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  como combinación lineal de la base  $B$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sumando:

$$= (a + b + c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (a + b) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero de hecho, resolviendo el sistema:

$$x_1 = a + b + c, \quad x_2 = a + b, \quad x_3 = a$$

De aquí:

$$a = x_3, \quad b = x_2 - x_3, \quad c = x_1 - x_2$$

Por linealidad:

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= aT \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + bT \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + cT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + (x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_3 + 3(x_2 - x_3) - (x_1 - x_2) \\ -x_3 + 0(x_2 - x_3) + 5(x_1 - x_2) \\ 4x_3 + (x_2 - x_3) + (x_1 - x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_3 + 3x_2 - 3x_3 - x_1 + x_2 \\ -x_3 + 5x_1 - 5x_2 \\ 4x_3 + x_2 - x_3 + x_1 - x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 - x_3 \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, para  $T \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ :

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -1$$

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 16 - (-1) \\ 10 - 20 - (-1) \\ 2 + 3(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 16 + 1 \\ 10 - 20 + 1 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Problema 9.48.** De condiciones para cuando una matriz cuadrada sea un isomorfismo entre espacios vectoriales. Use esto para verificar si las siguientes matrices representan un isomorfismo:

a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Solución:** Una matriz cuadrada representa un isomorfismo entre espacios vectoriales si y solo si es invertible, lo cual ocurre exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Calculamos el determinante de cada matriz:

a) Para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene  $\det(A) = -3 \neq 0$ , por lo que  $A$  es invertible y representa un isomorfismo.

b) Para

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene  $\det(B) = 0$ , por lo que  $B$  no es invertible y no representa un isomorfismo.

c) Para

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene  $\det(C) \neq 0$ , por lo que  $C$  es invertible y representa un isomorfismo.

**Problema 9.49.** Demuestre que la transformación lineal  $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida como

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ a + b \\ a + b + c \\ a + b + c + d \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo.

**Solución: Linealidad:** La transformación  $T$  es lineal porque cada componente de la imagen es una combinación lineal de las entradas  $a, b, c, d$  de la matriz.

**Matriz asociada:** Si identificamos  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  con  $\mathbb{R}^4$  en el orden  $(a, b, c, d)$ , la matriz de  $T$  en las bases canónicas es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Injectividad:**  $T$  es inyectiva si y sólo si  $\ker(T) = \{0\}$ . Si  $T(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ , entonces:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \implies a = 0, \, b = 0, \, c = 0, \, d = 0$$

Por lo tanto, el núcleo es trivial.

**Sobreyectividad:** Como la matriz asociada  $A_T$  es cuadrada ( $4 \times 4$ ) y su determinante es  $1 \neq 0$  (es invertible),  $T$  es sobreyectiva: para cualquier vector en  $\mathbb{R}^4$  existe una preimagen.

**Conclusión:**  $T$  es lineal, inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto es un isomorfismo entre  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  y  $\mathbb{R}^4$ .



**Problema 9.50.** Sea  $A$  una matriz  $2 \times 2$ . ¿Es la transformación lineal  $T(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} A - A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$  un isomorfismo?

**Solución:** La transformación  $T$  está definida por  $T(A) = MA - AM$ , donde  $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ . Esta transformación se llama conmutador con  $M$ .

**Linealidad:**  $T$  es lineal porque la multiplicación de matrices y la resta preservan la linealidad.

**Inyectividad:**  $T$  es inyectiva si y sólo si  $T(A) = 0$  implica  $A = 0$ . Supongamos  $T(A) = 0$ , es decir,  $MA = AM$ . Esto significa que  $A$  conmuta con  $M$ .

Sin embargo,  $M$  es una matriz  $2 \times 2$  con dos valores propios distintos (su polinomio característico es  $\lambda^2 - 9\lambda - 1 = 0$ ), por lo que  $M$  es diagonalizable y el conjunto de matrices que conmutan con  $M$  es el conjunto de todos los polinomios en  $M$ , es decir, matrices de la forma  $aI + bM$ .

Esto implica que **existen matrices no nulas**  $A$  tales que  $MA = AM$ , por ejemplo, la identidad  $I$  o el propio  $M$ . Por lo tanto, el núcleo de  $T$  no es trivial y  $T$  no es inyectiva.

**Conclusión:**  $T$  no es un isomorfismo porque no es inyectiva (ni sobreyectiva).

**Problema 9.51.** Dada la siguiente figura, determine el efecto geométrico que efectúan sobre ella las transformaciones lineales representadas por las siguientes matrices. Para cada caso, calcule el kernel, la imagen, el rango y la nulidad.

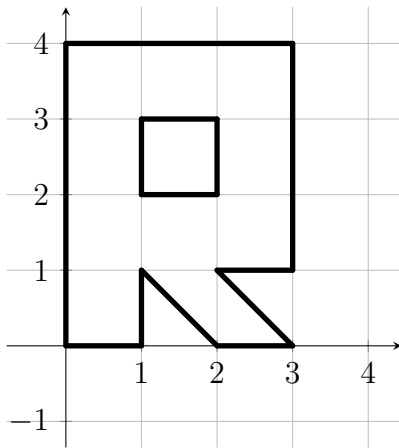


Figura 9.7: Figura original en el plano

a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Solución:** **Efecto geométrico:** Reflexión respecto a la recta  $y = x$ .

**Kernel:** Sólo el vector cero, ya que la matriz es invertible.

**Imagen:** Todo  $\mathbb{R}^2$ .

**Rango:** 2.

**Nulidad:** 0.

**Gráfica:**

Figura 9.8: Reflexión respecto a la recta  $y = x$ .

b)  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Solución:** **Efecto geométrico:** Estiramiento por 2 y reflexión respecto al eje  $y$  en el eje  $x$ ; el eje  $y$  se mantiene igual.  
**Kernel:** Sólo el vector cero, ya que la matriz es invertible.  
**Imagen:** Todo  $\mathbb{R}^2$ .  
**Rango:** 2.  
**Nulidad:** 0.  
**Gráfica:**

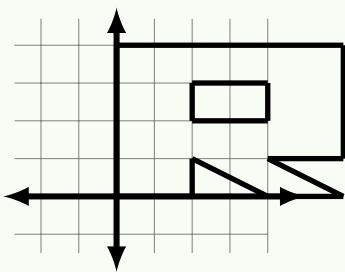


Figura 9.9: Estiramiento y reflexión respecto al eje  $y$ .

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Solución:** **Efecto geométrico:** Proyección ortogonal sobre el eje  $x$ .  
**Kernel:** Todos los vectores del eje  $y$  ( $\{(0, y)\}$ ).  
**Imagen:** El eje  $x$ .  
**Rango:** 1.  
**Nulidad:** 1.  
**Gráfica:**



Figura 9.10: Proyección sobre el eje  $x$ .

d)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Solución:** **Efecto geométrico:** Proyección ortogonal sobre el eje  $y$ .  
**Kernel:** Todos los vectores del eje  $x$  ( $\{(x, 0)\}$ ).  
**Imagen:** El eje  $y$ .  
**Rango:** 1.  
**Nulidad:** 1.  
**Gráfica:**

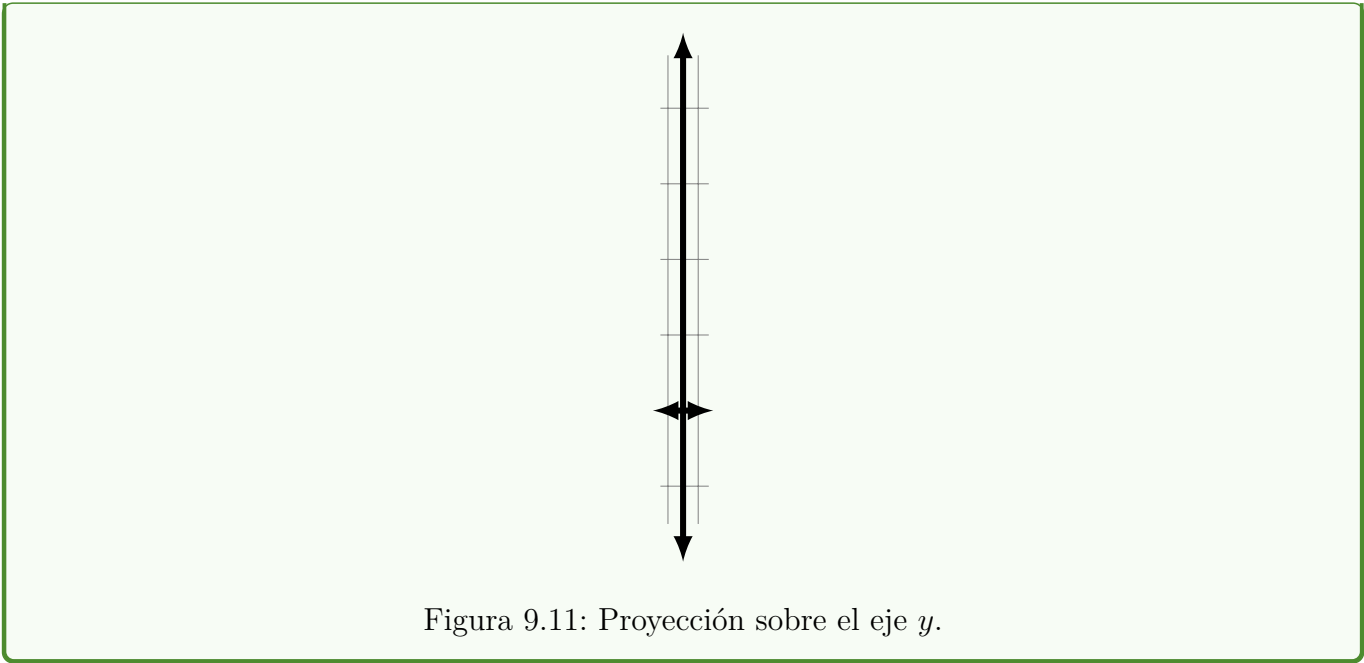


Figura 9.11: Proyección sobre el eje  $y$ .

e)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

**Solución:** **Efecto geométrico:** Transformación lineal general: estiramiento, cizalladura y rotación.  
**Kernel:** Sólo el vector cero, ya que el determinante es  $2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5 \neq 0$ .  
**Imagen:** Todo  $\mathbb{R}^2$ .  
**Rango:** 2.  
**Nulidad:** 0.  
**Gráfica:**

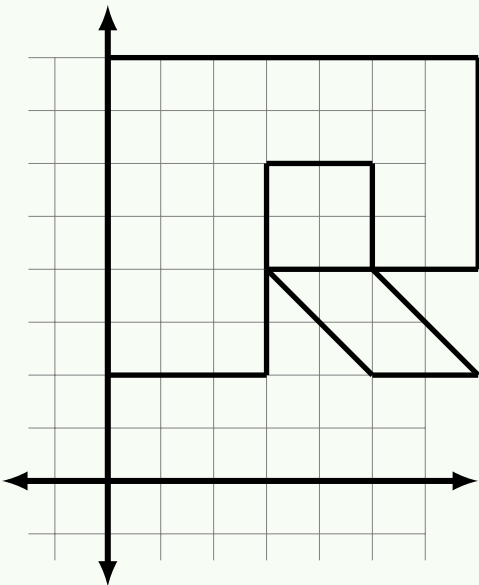


Figura 9.12: Transformación general invertible.

f)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

**Solución:** **Efecto geométrico:** Escalado: estiramiento por 2 en el eje  $x$  y por 3 en el eje  $y$ .  
**Kernel:** Sólo el vector cero, ya que la matriz es invertible.  
**Imagen:** Todo  $\mathbb{R}^2$ .  
**Rango:** 2.  
**Nulidad:** 0.  
**Gráfica:**

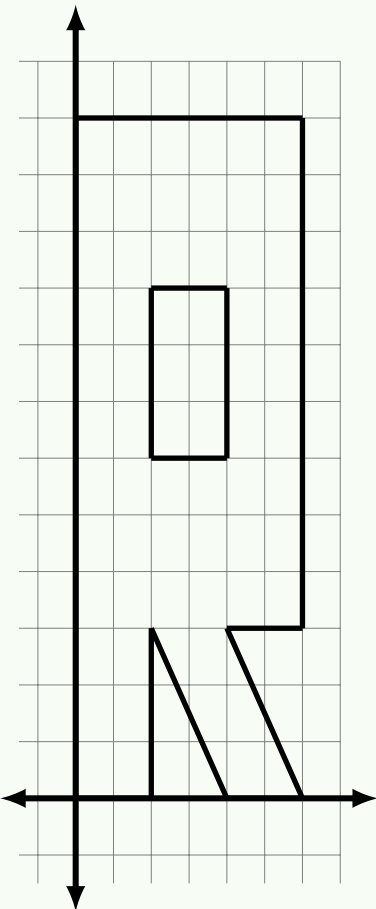


Figura 9.13: Escalado anisotrópico.

g)  $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}$

**Solución:** **Efecto geométrico:** Rotación antihoraria de  $\frac{\pi}{6}$  radianes ( $30^\circ$ ) respecto al origen.  
**Kernel:** Sólo el vector cero, ya que la matriz de rotación es invertible.  
**Imagen:** Todo  $\mathbb{R}^2$ .  
**Rango:** 2.  
**Nulidad:** 0.  
**Gráfica:**

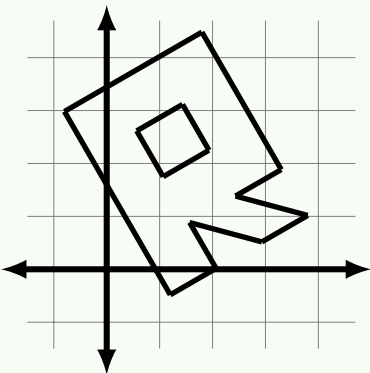


Figura 9.14: Rotación de  $30^\circ$  respecto al origen.

**Problema 9.52.** Dada la siguiente figura tridimensional, determine el efecto geométrico que efectúan sobre ella las transformaciones lineales representadas por las siguientes matrices. Calcule el kernel, la imagen, la nulidad y el rango. Represente gráficamente las transformaciones.

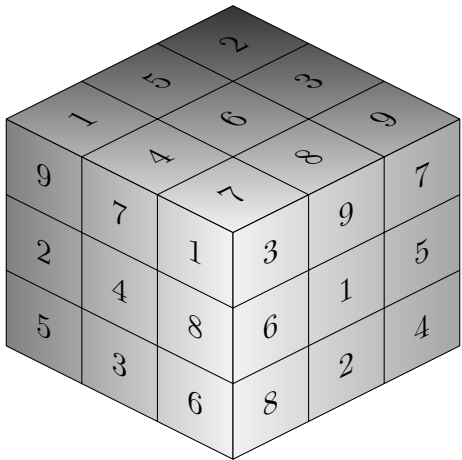


Figura 9.15: Figura original (Sudoku 3D cube, <https://texample.net/tikz/examples/sudoku-3d-cube>)

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Solución:** **Descripción:** Reflexión respecto al plano  $XY$  (cambia el signo de la coordenada  $z$ ).  
**Kernel:** Sólo el vector cero, pues la matriz es invertible.  
**Imagen:** Todo  $\mathbb{R}^3$ .  
**Rango:** 3.  
**Nulidad:** 0.  
**Gráfica:**

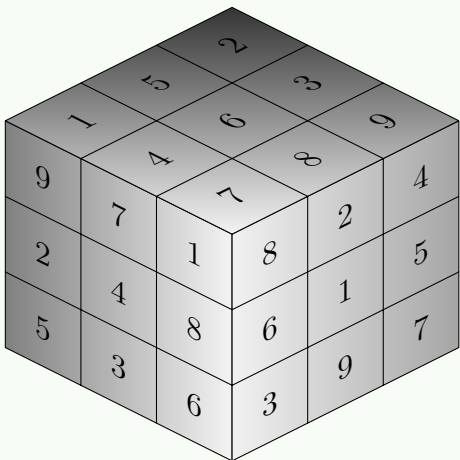


Figura 9.16: Reflexión respecto al plano  $XY$  (inversión de  $z$ ).

b)  $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

**Solución:** **Descripción:** Escalado anisotrópico: multiplica  $x$  por  $-5$  (refleja respecto al plano  $YZ$  y estira por 5), deja  $y$  igual y multiplica  $z$  por 3 (estiramiento en  $z$ ).  
**Kernel:** Sólo el vector cero, ya que la matriz es invertible.  
**Imagen:** Todo  $\mathbb{R}^3$ .  
**Rango:** 3.  
**Nulidad:** 0.  
**Gráfica:**

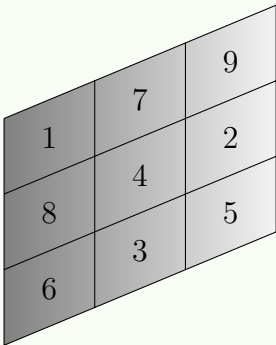


Figura 9.17: Reflejo y estiramiento en  $x$ , estiramiento en  $z$ .

c)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Solución:** **Descripción:** Proyección sobre el plano  $YZ$  con combinación lineal: la coordenada  $x$  se hace cero,  $y$  se convierte en  $x + z$ ,  $z$  se mantiene.  
**Kernel:** Todos los vectores de la forma  $(a, 0, 0)$ , es decir, el eje  $x$ .  
**Imagen:** El plano  $YZ$ .  
**Rango:** 2.  
**Nulidad:** 1.  
**Gráfica:**



Figura 9.18: Proyección sobre el plano  $YZ$ .

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}$

**Solución:** **Descripción:** Rotación de  $30^\circ$  en el plano  $YZ$  alrededor del eje  $x$ .  
**Kernel:** Sólo el vector cero, ya que la matriz de rotación es invertible.  
**Imagen:** Todo  $\mathbb{R}^3$ .  
**Rango:** 3.  
**Nulidad:** 0.  
**Gráfica:**

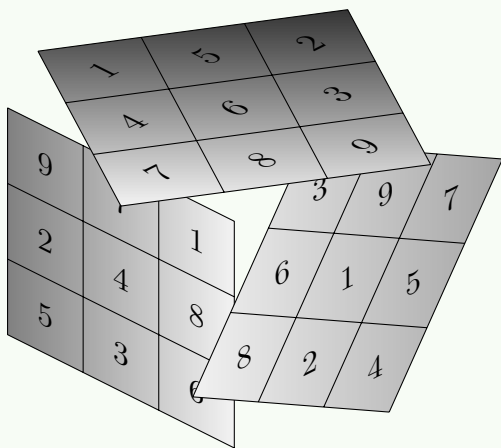


Figura 9.19: Rotación de 30° en el plano YZ alrededor del eje x.

**Problema 9.53.** Sea  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación lineal definida por  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre una base para  $\ker(T)$  y  $\text{Im}(T)$ .

**Solución:** Para encontrar una base del núcleo (kernel), resolvemos  $A\mathbf{x} = 0$ :

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

El cálculo computacional muestra que una base de  $\ker(T)$  es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para la imagen (columna espacio), una base está dada por las columnas linealmente independientes de  $A$ . El cálculo computacional muestra que una base de  $\text{Im}(T)$  es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Verifique el teorema del rango-nulidad para  $T$ .

**Solución:** El teorema del rango-nulidad establece que:

$$\text{nulidad}(T) + \text{rango}(T) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

Del inciso anterior, la nulidad es 2 (dos vectores en la base del núcleo) y el rango es 2 (dos vectores en la base de la imagen). Por lo tanto:

$$2 + 2 = 4$$

El teorema se cumple.

(c) Determine si  $T$  es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

**Solución:**  $T$  es **inyectiva** si y sólo si el núcleo es trivial, es decir, sólo contiene el vector cero. Como la nulidad es 2,  $T$  **no es inyectiva**.  
 $T$  es **sobreyectiva** si su imagen es todo  $\mathbb{R}^3$ , es decir, si el rango es 3. Como el rango es 2,  $T$  **no es sobreyectiva**.  
 $T$  es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva. Por lo anterior,  $T$  **no es biyectiva**.



## Bibliografía

- [Andreescu, 2014] Andreescu, T. (2014). *Essential Linear Algebra with Applications*. Springer.
- [Andreescu and Andrica, 2014] Andreescu, T. and Andrica, D. (2014). *Complex numbers from a to ... Z*. Birkhäuser Boston.
- [Anton and Rorres, 2014] Anton, H. and Rorres, C. (2014). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons, 11 edition.
- [Anton et al., 2019] Anton, H., Rorres, C., and Kaul, A. (2019). *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. Wiley, 12 edition.
- [Axler, 2015] Axler, S. (2015). *Linear Algebra Done Right*. Springer, 3 edition.
- [de Araújo, 2014] de Araújo, T. P. (2014). *Álgebra Linear: Teoria e Aplicação*. Coleção Textos Universitários. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil. Copyright © 2014. Direitos reservados pela SBM.
- [Espinoza Ramos, 2006] Espinoza Ramos, E. (2006). *Álgebra lineal para estudiantes de ciencias e ingenierías*. Editorial Eduardo Espinoza Ramos, 2 edition.
- [Grossman and Flores Godoy, 2012] Grossman, S. and Flores Godoy, J. J. (2012). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill, México, 7 edition.
- [Hoffman and Kunze, 1973] Hoffman, K. and Kunze, R. (1973). *Álgebra Lineal*. Prentice Hall Hispanoamericana, 1 edition.
- [Isaacs and Sabogal, 2005] Isaacs, R. and Sabogal, S. (2005). *Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico*. Ediciones UIS.
- [Lay et al., 2021] Lay, D. C., Lay, S. R., and McDonald, J. J. (2021). *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson, 6 edition.
- [Poole, 2015] Poole, D. (2015). *Linear Algebra and Its Applications*. Cengage Learning, 4 edition.
- [Tsumura, ] Tsumura, Y. Problems in mathematics. <https://yutsumura.com/>. Accedido el 28 de enero de 2023.