Problemario de Cálculo

Andrés Fabián Leal Archila
anfalear@correo.uis.edu.co
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
aleal214@unab.edu.co
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Autónoma de Bucaramanga

Última actualización: 11 de febrero de 2026

"Si he visto más, es poniéndome sobre los hombros de Gigantes"
Isaac Newton.

Prefacio a la primera edición

Este documento proporciona preparación para exámenes, talleres y quices de Cálculo I, II y III, presentando problemas prácticos y sus soluciones extraídas de diversas fuentes bibliográficas.

El documento inicia con las políticas del curso, contenidos, evaluación y contacto. Cada capítulo incluye secciones con resumen teórico, problemas resueltos y ejercicios de práctica. Al final se proponen rutinas de programación en Python 3.x, Wolfram Alpha, `www.matrixcalc.org/es` y GeoGebra.

Este material está en construcción continua, por lo que algunos ejercicios pueden carecer de solución o presentar errores que se corregirán progresivamente.

Espero que este documento contribuya a su proceso de aprendizaje.

Cordialmente,

Andrés Fabián Leal Archila
Docente Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Correo: `anfalear@correo.uis.edu.co`
Docente Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Autónoma de Bucaramanga
Correo: `aleal214@unab.edu.co`

Contenido

Glosario

Índice de figuras

Capítulo 1
Políticas del curso

La información aquí presentada no se modificará por ninguna de las partes a menos que haya un consenso entre estas, el cual debe ser oportunamente informado y reportado por escrito en este documento. Ante cualquier instancia, este documento será soporte para las acciones a las que se de lugar, por lo cual, tanto el profesor como el estudiante lo aceptan y se someten a lo que esté aquí escrito.

Esta política se rige de acuerdo a lo dispuesto en los Reglamentos Académicos de Pregrado de cada institución (R.A.P.) disponibles en las web institucionales.

Los cursos de Álgebra Lineal tendrán su Aula Virtual, donde se informarán horarios de atención, distribución de exámenes, demás aspectos particulares, calificaciones y distribuciones de porcentajes. La nota mínima de aprobación es 3.0.

1.1 Contenido del curso

La cobertura total del contenido dependerá del progreso del semestre; es responsabilidad del estudiante mantenerse al día. Los temas evaluados en cada corte se proporcionarán oportunamente. Los temas marcados con asterisco (*) son opcionales según el progreso del semestre.

1. **Funciones**
    a) Concepto y representación de funciones.
    b) Clasificación y gráficas de funciones:
        - Algebraicas: polinómicas, racionales e irracionales.
        - Trascendentes: exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, trigonométricas inversas e hiperbólicas.
        - Otras funciones: valor absoluto y parte entera.
    c) Operaciones con funciones:
        - Álgebra de funciones.
        - Composición de funciones.
        - Función inversa.
    d) Representación de funciones como modelos matemáticos.
2. **Límites y continuidad de funciones**
    a) Concepto de límite de una función.

   b) Límites laterales, infinitos y especiales.
   c) Teoremas de límites y cálculo de límites utilizando teoremas.
   d) Límites de funciones trigonométricas.
   e) Continuidad de funciones.

3. **Derivada**
   a) Interpretación geométrica de la derivada.
   b) Velocidad promedio y velocidad instantánea.
   c) Concepto y reglas para el cálculo de la derivada (incluyendo la regla de la cadena).
   d) Derivadas de:
      - Funciones algebraicas (teoremas y cálculo).
      - Funciones trigonométricas e inversas.
      - Funciones exponenciales y logarítmicas.
      - Funciones hiperbólicas.
   e) Derivadas de orden superior.
   f) Derivación implícita y función inversa.

4. **Aplicaciones de la derivada**
   a) Tasas de cambio relacionadas.
   b) Diferenciales y aproximaciones.
   c) Regla de L'hôpital.
   d) Trazado de gráficas:
      - Máximos y mínimos.
      - Crecimiento, decrecimiento y concavidades.
      - Puntos de inflexión y asíntotas.
   e) Teorema del valor medio.
   f) Problemas de optimización.

5. **Introducción a las integrales**
   a) Concepto de antiderivadas o integración indefinida.
   b) Técnicas de integración:
      - Sustitución simple.
      - Por partes.
      - De funciones racionales mediante completación de cuadrados o fracciones parciales.
      - Con productos y potencias de funciones trigonométricas.
      - Sustitución trigonométrica.
   c) Integrales impropias.

6. **La integral definida**
   a) Concepto y propiedades de la integral definida.
   b) El teorema fundamental del cálculo.
   c) Cálculo de integrales definidas.

   d) Integración numérica.

7. **Aplicaciones de la integral**
   a) Cálculo de áreas de regiones planas.
   b) Volumen de sólidos de revolución (capas, discos, arandelas y cascarones).
   c) Longitud de arco.
   d) Áreas de superficies de revolución.
   e) Centro de masa, centro de inercia y trabajo.

8. **Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares**
   a) Representación paramétrica de curvas en el plano.
   b) Sistema de coordenadas polares.
   c) Gráfica de ecuaciones polares.
   d) Cálculo de áreas y longitud en coordenadas polares.

Notas aclaratorias:

- No hay número específico de quices o trabajos; si son varios se promedian.
- Las calificaciones se publican en la plataforma universitaria con notificación por correo. Si el estudiante no puede visualizar su nota, debe manifestarlo por correo al profesor.
- El profesor acordará con los estudiantes la forma de revisar trabajos y exámenes.

1.2 Políticas de clase

- Los instrumentos electrónicos requieren aprobación del profesor.
- Quices y exámenes sin apuntes, libros ni aparatos electrónicos (salvo flexibilización informada). El estudiante debe leer las reglas de cada evaluación.
- El trabajo debe ser autónomo o en grupo designado. **Ofrecer** o **aceptar** soluciones ajenas constituye **plagio**, penalizado según el R.A.P. Incluye omisión de fuentes e uso no citado de IA.
- **No se reciben trabajos fuera de fecha**, excepto con excusa según R.A.P.
- **Asistencia obligatoria** con control por parte del profesor.
- En exámenes escritos se esperan 15 minutos tras el inicio para ingresar; después se requiere supletorio según R.A.P.
- **Casos de emergencia:** El profesor informará evacuaciones necesarias. No se responsabiliza por decisiones estudiantiles post-evacuación.

Capítulo 2
Preliminares

En esta sección introductoria se abordarán algunas propiedades fundamentales de los números reales, cuyo estudio resulta esencial para la comprensión rigurosa de los principios del cálculo. A partir del análisis del concepto de número real, del plano cartesiano y de otras nociones preliminares, se pretende establecer una base conceptual sólida que facilite la transición hacia el estudio formal del cálculo diferencial e integral, estructurado desde la noción de función.

2.1 Números reales

Uno de los conceptos más fundamentales en las matemáticas es el de número, cuya noción se remonta a la antigüedad y cuya generalización se ha desarrollado a lo largo de la historia. La estructura numérica básica se origina en el conjunto de los *números naturales*, que posteriormente se amplió al incorporar los números negativos, dando lugar a los *números enteros*. Más adelante, al considerar la posibilidad de expresar un número como una fracción de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros con $b \neq 0$, surge el conjunto de los *números racionales*, los cuales pueden representarse mediante expresiones decimales finitas o periódicas infinitas.

Desde la época de los pitagóricos, se reconoce la existencia de los *números irracionales*, aquellos que no pueden expresarse como cociente de dos números enteros; un ejemplo clásico es $\sqrt{2}$. La unión de los números racionales e irracionales da origen al conjunto de los **números reales**, que constituirá el objeto principal de estudio en esta sección.

El descubrimiento de los números irracionales, atribuido a la escuela pitagórica en la antigua Grecia (siglo V a. C.), representó una crisis intelectual para la concepción aritmética de la época, pues reveló la existencia de magnitudes inconmensurables. Este hallazgo marcó un punto de inflexión en el pensamiento matemático, impulsando el desarrollo posterior de la teoría de los números y la formalización del concepto de continuidad numérica.

A continuación se presentan algunas propiedades fundamentales de los números reales, cuya comprensión resulta esencial para el estudio riguroso del análisis matemático.

2.1.1 Propiedades de los números reales

Teorema 2.1 (Propiedad de tricotomía). *El conjunto de los números reales forma un cuerpo ordenado. En particular, dados x y y números reales, existe una y solo una de las siguientes relaciones: $x < y$,*

$x = y$ o $x > y$.

Los números reales pueden representarse sobre la **recta numérica infinita** (o *eje real*) de acuerdo con la siguiente convención (figura 2.1.1): se define un punto O, denominado *origen*, que representa al número 0; una flecha orientada hacia la derecha indica la dirección positiva, mientras que una flecha orientada hacia la izquierda representa los valores negativos.

Por ejemplo, si un número x_1 es positivo, se ubica en la recta como un punto a la derecha del origen, a una distancia proporcional a su valor. De manera análoga, si un número x_2 es negativo, se representa como un punto a la izquierda del origen, también a una distancia proporcional a $|x_2|$.

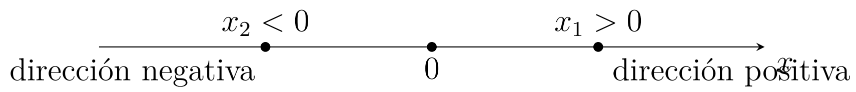

Figura 2.1: Recta numérica o eje real

Existe así una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta numérica: a cada número real le corresponde un punto único, y a cada punto, un número real. Además, debido a una propiedad denominada **completitud de los números reales** —cuyo tratamiento formal excede los alcances de este curso—, se cumple que entre dos números reales cualesquiera siempre es posible encontrar otros números, sean racionales o irracionales. Esta idea se resume en el siguiente teorema clásico.

Teorema 2.2. *Para todo número irracional α, existen infinitos números racionales que lo aproximan con cualquier grado deseado de precisión.*

Demostración. Sea $\alpha > 0$ un número irracional. Queremos calcular una aproximación con un error menor que $\frac{1}{n}$. Note que, para cualquier α, existe un número entero N tal que $N < \alpha < N + 1$. Si se divide el segmento comprendido entre N y $N + 1$ en n partes iguales, entonces α se encontrará entre $N + \frac{m}{n}$ y $N + \frac{m+1}{n}$ para algún entero m. La diferencia entre ambos extremos es $\frac{1}{n}$, de modo que se puede alcanzar cualquier precisión deseada disminuyendo el valor de $\frac{1}{n}$. $\square$

Ejemplo 2.3. El número irracional $\sqrt{2}$ puede aproximarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1{,}4 &< \sqrt{2} < 1{,}5, \\ 1{,}41 &< \sqrt{2} < 1{,}42, \\ 1{,}414 &< \sqrt{2} < 1{,}415, \end{aligned}$$

según precisiones de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{1000}$, respectivamente.

2.1.2 Valor absoluto de los números reales

Definición 2.4 (Valor absoluto)**.** El **valor absoluto** (o módulo) de un número real x, denotado por $|x|$, se define como:

$$\begin{aligned} |x| &= x && \text{si } x \geq 0, \\ |x| &= -x && \text{si } x < 0. \end{aligned}$$

Por esta definición, $|x|$ representa siempre un número real no negativo ($|x| \geq 0$) y mide la distancia de x al origen en la recta numérica.

Ejemplo 2.5. Para $x = 2$, se tiene $|2| = 2 \geq 0$. Para $x = -3$, se verifica $|-3| = 3 > 0$. En ambos casos, el valor absoluto produce un número no negativo.

A continuación se enuncian las propiedades fundamentales del valor absoluto:

Teorema 2.6 (Propiedades del valor absoluto)**.** *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Desigualdad triangular).*
2. $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$ *(Segunda desigualdad triangular).*
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.
4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ *siempre que* $y \neq 0$.

Demostración.

1. **Caso 1:** $x + y \geq 0$. Entonces $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$, pues $|x| \geq x$ y $|y| \geq y$.

   Caso 2: $x + y < 0$. Entonces $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$, ya que $|x| \geq -x$ y $|y| \geq -y$.

2. Sea $z = x - y$. Entonces $x = y + z$, y por la desigualdad triangular:

   $$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |y| + |x - y|.$$

   Restando $|y|$ de ambos lados: $|x| - |y| \leq |x - y|$.

   Dado que la desigualdad es simétrica, también se tiene $|y| - |x| \leq |x - y|$, lo que equivale a:

   $$|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|.$$

   Las propiedades 3 y 4 se siguen directamente de la definición del valor absoluto.

□

2.1.3 Magnitudes variables y constantes e intervalos de variación

Las **magnitudes variables**, tales como el tiempo, longitud, área, volumen, masa, velocidad y temperatura, obtienen sus valores mediante el hábito de la medición y se presentan en sucesión constante. Para el caso del movimiento uniforme, podemos observar el desplazamiento de un punto a lo largo del tiempo.

Por contraste, las **magnitudes constantes** son aquellas que no sufren variación; una magnitud variable cuyo valor permanece invariable se denomina constante. La distinción entre magnitudes variables y constantes resulta fundamental en el análisis matemático. De esto, por ejemplo $\pi \approx 3{,}14159$ es una constante mientras t vista como el tiempo es variable.

Una magnitud variable puede tomar diferentes valores numéricos. Se considera el problema de la temperatura del agua al calentarla en condiciones normales, variará desde 15°C hasta el punto de ebullición: 100°C.

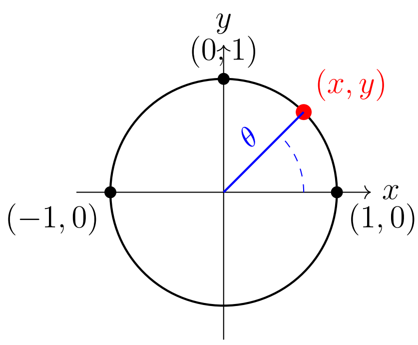

Figura 2.2: Representación trigonométrica en el círculo unitario: $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, donde (x, y) satisface $x^2 + y^2 = 1$

La variable $z = \cos\theta$ puede tomar todos los valores comprendidos entre -1 y $+1$. El conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable independiente θ se denomina **campo de variación** de la variable independiente, el cual determina el conjunto de valores posibles de la función dependiente.

Por ejemplo, en la función $z = \cos\theta$, el **campo de variación** de z es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Posteriormente, este concepto se denominará formalmente *rango* (o *imagen*) de una función.

Observe que hemos introducido la notación de intervalo $[-1, 1]$. Esta notación se define de la siguiente manera:

Definición 2.7 (Intervalos)**.** Un **intervalo** es el conjunto de valores numéricos $x \in \mathbb{R}$ comprendidos entre dos números reales dados a y b ($a < b$). Los intervalos se clasifican según los extremos incluidos:

- **Intervalo abierto**: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. *No se incluyen los extremos a ni b.*
- **Intervalo cerrado**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. *Se incluyen ambos extremos.*
- **Intervalos semicerrados (o semiabiertos)**:
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
  - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- **Intervalos infinitos**:
  - $(-\infty, c) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}$
  - $(c, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > c\}$
  - $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Existen combinaciones adicionales de estas definiciones, como por ejemplo $(-\infty, b]$, que se interpretan de manera análoga.

Ejemplo 2.8. Ejemplos de intervalos: $(-1, 1)$, $[-2, 3)$, $(0, +\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Las definiciones de intervalos abiertos y cerrados se utilizan para múltiples aspectos de las funciones. Gráficamente se considera el concepto de vecindad, que está representada por un centro y un radio, el cual resulta ser un intervalo:

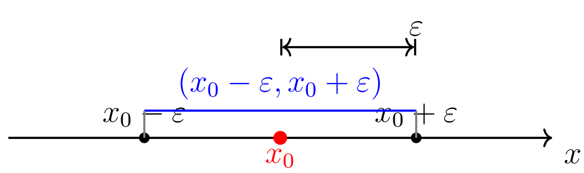

Figura 2.3: Intervalo abierto $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ representado como línea centrada en x_0 de radio ε en el eje real.

Definición 2.9 (Vecindad)**.** Dados un número real $x_0 \in \mathbb{R}$ y un número positivo $\varepsilon > 0$, el conjunto $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ se denomina **vecindad** de x_0 de **radio** ε, o simplemente vecindad de radio ε centrada en x_0. En este caso, el punto x_0 se llama **centro** de la vecindad, y la magnitud $\frac{\varepsilon}{2}$ denomina **radio de la vecindad**. La Figura 2.3 representa la vecindad $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ del punto x_0, cuyo radio es ε.

2.1.4 Problemas propuestos

Siga estos pasos ordenados para resolver los problemas algebraicos. Estos pasos son útiles tanto para su resolución manual como para generar prompts efectivos con inteligencia artificial.

PROCESO SISTEMÁTICO DE RESOLUCIÓN

1. **ANÁLISIS INICIAL**
   - Lea todo el problema cuidadosamente.
   - Identifique: ¿Qué datos se dan? ¿Qué se pide?
   - Clasifique el problema: ecuación, desigualdad, simplificación, o aplicado.
2. **PLAN DE SOLUCIÓN**
   - Liste las técnicas necesarias: factorización, valor absoluto, despeje, etc.
   - Si es aplicado, asigne variables a las incógnitas.
3. **EJECUCIÓN ALGEBRAICA**
   - Organice la ecuación/desigualdad claramente.
   - Identifique simplificaciones: fracciones, factorización, radicales.
   - Realice operaciones paso a paso, explicando cada acción:
     - “Multiplico por $x - 2 \neq 0$ para eliminar denominador”
     - “Factorizo numerador: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$”
4. **VALIDACIÓN DE SOLUCIONES**
   - Verifique soluciones extraviadas (raíces, valor absoluto).
   - Determine dominio: denominadores 0, radicales 0.
   - Sustituya en la expresión original.
5. **PRESENTACIÓN FINAL**
   - Expresión simplificada o intervalo solución.
   - Dominio completo.
   - Contexto físico (si aplica).

Problema 2.10. Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$ que resuelven las siguientes ecuaciones o desigualdades. Expresa las soluciones en notación de intervalo cuando corresponda y represente gráficamente cada conjunto solución como vecindad abierta en el eje real (incluya la figura con centro y radio ε apropiados).

1. $\dfrac{3x+1}{5x+7} = \dfrac{6x+11}{10x-3}$
2. $2 - \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{3}{x}$
3. $\dfrac{2}{x+5} = \dfrac{3}{2x+1} - \dfrac{5}{6x+3}$
4. $\dfrac{4}{x-5} - \dfrac{2}{x+4} = \dfrac{3}{2x-4}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 3 - \dfrac{1-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
6. $2x^2 + 7x - 15 = 0$
7. $(x-2)(x+1) - 6 = 0$

8. $4x^2 - 37x^2 + 75 = 0$
9. $x^2 - 2x - 15 = 0$
10. $20x^2 + 8x^2 - 55x - 22 = 0$
11. $\dfrac{6xy^2}{7} \times \dfrac{21x^2}{y} \div \dfrac{32xy^2}{91}$
12. $\dfrac{12p^2q^2}{5} \times \dfrac{15}{4pq} \div 3$
13. $\dfrac{3}{pq} \times \dfrac{4p}{p+1}$
14. $\dfrac{x^2 - x - 6}{2xy} \times \dfrac{2x^2y}{x^2 - 9}$
15. $\dfrac{4}{\sqrt{2} - 1} + \dfrac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 3}$
16. $3x - 2 > 12$
17. $2x + 5 \leq 8$
18. $-2 - 3x \geq 2$
19. $3 - 5x < 11$
20. $2x + 5 < 6x - 7$
21. $|4x - 1| = 7$
22. $|2x + 1| + 1 = 15$
23. $\left|\dfrac{2 - 3x}{5}\right| = 2$
24. $\left|\dfrac{2x + 5}{3}\right| < 1$
25. $\dfrac{3}{|5 - 2x|} < 2$
26. $\dfrac{x^2(x+2)}{x + 2(x+1)} \leq 0$
27. $\dfrac{(x^2+1)(x-3)}{x^2 - 9} \geq 0$
28. $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \leq 0$
29. $\dfrac{(x+3)(2-x)}{(x+4)(x^2-4)} \leq 0$
30. $\dfrac{x - 2}{3x - 10} \geq 0$

Capítulo 3

Funciones

La función es, tal vez, uno de los conceptos más importantes en matemáticas, pues gran parte de los demás conceptos matemáticos se basan en el conocimiento de las funciones y sus propiedades. Aunque existen muchos tipos de funciones —por ejemplo, el área de un círculo que depende de su radio, el costo de un envío que depende de su peso, o la velocidad que depende del tiempo t transcurrido—, las funciones no siempre dependen de una sola variable. Por ejemplo, el volumen de un cilindro depende tanto de su altura como de su radio.

En esta sección nos enfocaremos inicialmente en las funciones de una variable real y desarrollaremos con detalle este concepto fundamental.

3.1 Propiedades básicas

Definición 3.1 (Función)**.** Una función f es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x de un conjunto denominado **dominio**, un único valor $f(x)$ en otro conjunto, llamado **codominio**.

El conjunto de todos los valores $f(x)$ obtenidos se denomina **rango** o **imagen** de f. Es común decir que x es la variable independiente y $f(x)$ es la variable dependiente además de usar la notación $y = f(x)$ de manera indistinta.

Problema 3.2. Calcule el dominio de las siguientes funciones

1. $f(x) = x^2 - 8x + 5$.
2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. $f(x) = \sqrt{3 + x} + \sqrt[4]{7 - x}$.
4. $f(x) = \dfrac{x+5}{x-3}$

Solución:

1. La función es un polinomio de grado 2. Los polinomios están definidos para todo $x \in \mathbb{R}$, sin restricciones. Por tanto, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. La raíz cuadrada requiere $1 - x^2 \geq 0$. Factorizamos:

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) \geq 0.$$

Intervalo	$1+x$	$1-x$	$(1-x)(1+x)$
$(-\infty,-1)$	$-$	$+$	$-$
$(-1,1)$	$+$	$+$	$+$
$(1,+\infty)$	$+$	$-$	$-$

Cuadro 3.1: Tabla de signos para el problema 3.2

3. Analizamos cada radical por separado. Para $\sqrt{3+x}$ se cumple que $3+x \geq 0 \iff x \geq -3$ y para $\sqrt[4]{7-x}$ se tiene que las raíces de índice par requieren radicando ≥ 0. Así, $7-x \geq 0 \iff x \leq 7$. Finalmente la suma está definida cuando ambas lo están, por tanto $\mathrm{Dom}(f) = [-3, 7]$.
4. La función está definida para todo número real excepto donde el denominador sea 0. De esta manera, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Observación 3.3 (Formas de representar una función)**.** *Existen básicamente cuatro formas de representar una función: verbalmente, describiendo en palabras la relación entre variables; numéricamente, mediante una tabla de valores; visualmente, a través de una gráfica; y algebraicamente, por medio de una fórmula explícita. Aclararemos estas formas en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 3.4. Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de $10\,\mathrm{m}^3$. La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado y el material para los lados cuesta \$6 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales como una función del ancho de la base. Dé una representación verbal, numérica, visual y algebraica.

Solución: Primero introducimos las variables geométricas del problema. Sea x el ancho de la base (en metros), $2x$ la longitud de la base (en metros) y h la altura del contenedor (en metros). Como el contenedor no tiene tapa, solo hay base y cuatro lados.
La condición de volumen se escribe como

$$V = (\text{ancho}) \cdot (\text{longitud}) \cdot (\text{altura}) = x \cdot 2x \cdot h = 2x^2 h = 10.$$

Despejamos la altura en función del ancho:

$$h = \frac{10}{2x^2} = \frac{5}{x^2}.$$

Ahora calculamos el área de cada parte para expresar el costo total. El área de la base es

$$A_{\text{base}} = x \cdot 2x = 2x^2,$$

y su costo es

$$C_{\text{base}} = 10 \cdot A_{\text{base}} = 10 \cdot 2x^2 = 20x^2.$$

El contenedor tiene cuatro lados rectangulares: dos lados de dimensiones $x \times h$ y dos de dimensiones $2x \times h$. El área total de los lados es

$$A_{\text{lados}} = 2(xh) + 2(2xh) = 2xh + 4xh = 6xh.$$

Sustituimos $h = \dfrac{5}{x^2}$:

$$A_{\text{lados}} = 6x \cdot \frac{5}{x^2} = \frac{30}{x}.$$

El costo de los lados es entonces

$$C_{\text{lados}} = 6 \cdot A_{\text{lados}} = 6 \cdot \frac{30}{x} = \frac{180}{x}.$$

Sumando ambos aportes obtenemos el costo total como función del ancho x:

$$C(x) = C_{\text{base}} + C_{\text{lados}} = 20x^2 + \frac{180}{x}.$$

Podemos ahora presentar las cuatro representaciones de la función costo:
Representación verbal: A cada valor positivo del ancho x se le asigna el costo total de construir el contenedor, sumando el costo de la base y el de los cuatro lados, donde la longitud es $2x$ y la altura se ajusta para que el volumen sea $10\,\mathrm{m}^3$.
Representación algebraica: La función costo en términos del ancho x está dada por

$$C(x) = 20x^2 + \frac{180}{x}, \quad x > 0.$$

Representación numérica: Podemos elaborar una tabla de valores, eligiendo algunos anchos x (en metros) y calculando el costo $C(x)$ (en dólares). Por ejemplo:

x	$C(x)$
1	$20(1)^2 + \frac{180}{1} = 200$
1,5	$20(1{,}5)^2 + \frac{180}{1{,}5} = 20 \cdot 2{,}25 + 120 = 165$
2	$20(2)^2 + \frac{180}{2} = 80 + 90 = 170$
2,5	$20(2{,}5)^2 + \frac{180}{2{,}5} = 20 \cdot 6{,}25 + 72 = 197$

Representación visual: La representación gráfica consiste en dibujar la curva de la función

$$y = C(x) = 20x^2 + \frac{180}{x}, \quad x > 0,$$

en el plano xy, donde el eje horizontal representa el ancho x y el eje vertical representa el costo $C(x)$. Esta gráfica muestra cómo varía el costo total según el ancho de la base.

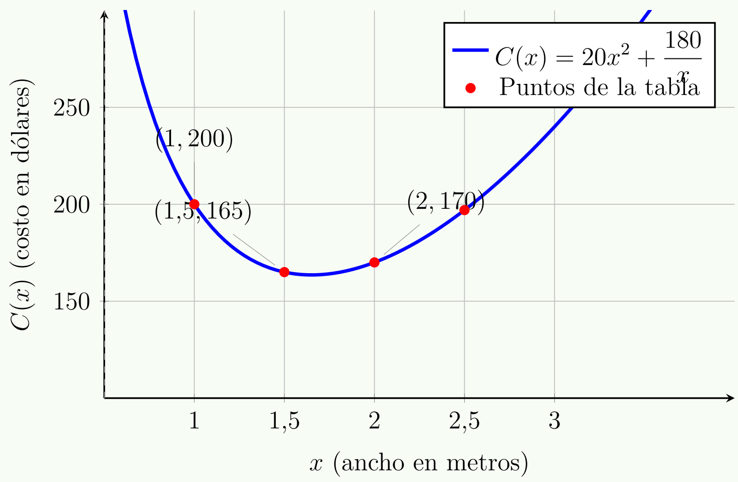

Figura 3.1: Figura del ejemplo 3.4

Con esto hemos descrito el costo como función del ancho en sus cuatro formas: verbal, numérica, visual y algebraica.

Aunque conocer las cuatro representaciones de una función (verbal, numérica, algebraica y gráfica) es fundamental, en ocasiones una resulta más conveniente que las demás según el contexto. Por ello, es esencial seleccionar la representación más adecuada para cada situación particular. La siguiente es una propiedad clave para identificar gráficas de funciones:

Observación 3.5 (Prueba de la recta vertical)**.** *Una curva en el plano XY es la gráfica de una función $y = f(x)$ si y solo si ninguna recta vertical se interseca con la curva en más de un punto.*

Por ejemplo, la circunferencia de radio 1 centrada en el origen, dada por $x^2 + y^2 = 1$, no representa una función de x, ya que una recta vertical como $x = 0{,}5$ la interseca dos veces.

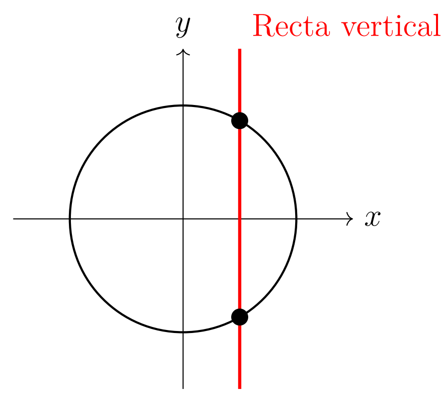

Figura 3.2: Circunferencia unitaria fallando la prueba de la recta vertical.

Definición 3.6 (Funciones crecientes y decrecientes)**.** Una función f se denomina **creciente** sobre un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ para todo $x \in I$. De manera análoga, f se denomina **decreciente** sobre un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2 \in I$.

Ejemplo 3.7. Determine los intervalos donde la función $f(x) = x^2$ es creciente o decreciente.

Solución: Hagamos inicialmente un bosquejo de la función

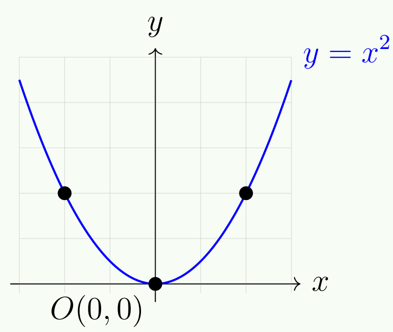

Figura 3.3: Bosquejo de $y = x^2$.

Visualmente se observa que la función tiene forma de parábola y vértice en $x = 0$, sugiriendo comportamiento diferente a cada lado. Analizamos por casos.
Caso 1: $x \geq 0$ **(intervalo** $[0, +\infty)$**).** Sean $x_1, x_2 \geq 0$ con $x_1 < x_2$. Entonces $x_2 - x_1 > 0$.
Calculamos:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Como $x_2 - x_1 > 0$ y $x_2 + x_1 \geq x_1 + x_1 = 2x_1 \geq 0$, se tiene $f(x_2) - f(x_1) > 0 \iff f(x_2) > f(x_1)$.
Por tanto, f es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.
Caso 2: $x \leq 0$ **(intervalo** $(-\infty, 0]$**).** Sean $x_1, x_2 \leq 0$ con $x_1 < x_2 \leq 0$. Entonces $x_2 - x_1 > 0$.
Ahora:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Como $x_2 - x_1 > 0$ pero $x_2 + x_1 \leq x_2 + x_2 = 2x_2 \leq 0$, se tiene $f(x_2) - f(x_1) < 0 \iff f(x_2) < f(x_1)$.
Por tanto, f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$.

El ejemplo anterior se resolverá con mayor facilidad más adelante, luego de estudiar la derivada. Mientras tanto, observe que hay algunas formas adicionales de representar funciones:

Ejemplo 3.8 (Función definida por partes)**.** A veces las funciones se describen mediante diferentes fórmulas o expresiones en distintas partes de sus dominios. Trace la gráfica de la siguiente función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \dfrac{1}{2}x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución: El dominio de la función es $\mathbb{R}$. Graficamos cada pieza por separado: Para $x < 2$: $y = 3 - \frac{1}{2}x$ es recta decreciente con pendiente $-\frac{1}{2}$, círculo **abierto** en $x = 2$ ($y = 2$) y para $x \geq 2$: $y = 2x - 5$ es recta creciente con pendiente 2, círculo **lleno** en $x = 2$ ($y = -1$).

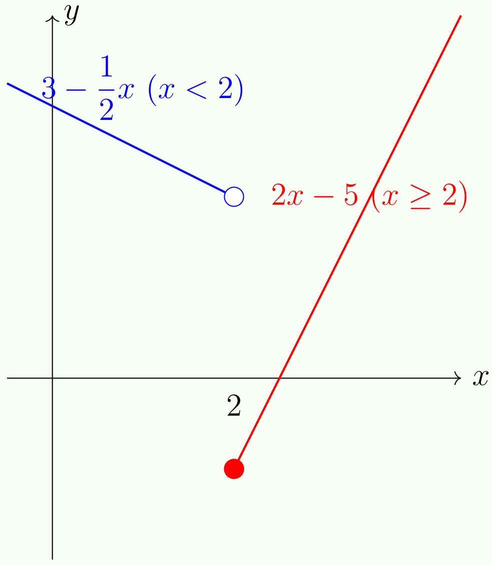

Figura 3.4: Gráfica de la función $f(x)$ definida por partes.

Definición 3.9 (Funciones pares e impares)**.** Una función $f : D \to \mathbb{R}$ se clasifica como **par** si satisface la simetría respecto al eje y:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D \cap (-D),$$

donde $D \cap (-D) \neq \emptyset$ asegura que el dominio contenga pares simétricos respecto al origen.

Análogamente, se clasifica como **impar** si exhibe simetría puntual respecto al origen:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D \cap (-D).$$

Ejemplo 3.10. La función $f(x) = x^2$ es par, ya que:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Asimismo, la función $f(x) = x^3$ es impar, pues:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Estas identidades algebraicas verifican las respectivas simetrías geométricas en sus gráficas.

En la sección subsiguiente se presentará un catálogo más completo de funciones elementales, permitiendo explorar sistemáticamente estas propiedades simétricas y otras características relevantes del análisis funcional.

3.2 Funciones elementales fundamentales

Existe un catálogo básico de funciones elementales fundamentales —conocidas también como *modelos matemáticos esenciales*—, que incluye la función potencia, la exponencial, la logarítmica, las trigonométricas y las trigonométricas inversas. Estas constituyen la base para la construcción de modelos matemáticos más complejos, y en este capítulo se analizarán detalladamente sus dominios, rangos y gráficas.

Definición 3.11 (Función potencia)**.** Sea $r \in \mathbb{Q}$ un número racional escrito en su forma reducida $r = \dfrac{p}{q}$, donde $p \in \mathbb{Z}$ es un entero y $q \in \mathbb{N}^+$ es un entero positivo con $\gcd(p, q) = 1$. La función potencia $f(x) = x^r = \sqrt[q]{x^p}$ tiene dominio que depende de la paridad del denominador q y la señal de r:

- Si q es **impar**, la raíz q-ésima está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Si q es **par**, la raíz q-ésima de números negativos no está definida en reales, requiriendo $x^p \geq 0$. Para p impar esto equivale a $x \geq 0$, dando $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$.
- Si $r < 0$, la expresión involucra división por x^{-r}, requiriendo excluir $x = 0$: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (o $(0, +\infty)$ si q par).

Como casos particulares, para enteros positivos $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ es un polinomio definido en todo $\mathbb{R}$. Para enteros negativos $n < 0$, $f(x) = x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ está definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Estas reglas garantizan que x^r produzca valores reales para todo x en su dominio respectivo.

Ejemplo 3.12 (Ejemplos de funciones potencia elementales)**.** Listamos algunos ejemplos representativos

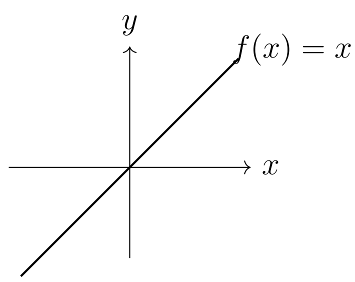

Figura 3.5: $f(x) = x$: $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$.

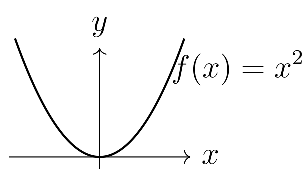

Figura 3.6: Función cuadrática $f(x) = x^2$: $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$.

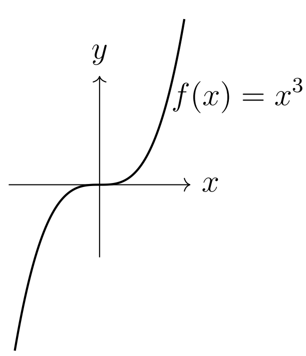

Figura 3.7: Función cúbica $f(x) = x^3$: $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$.

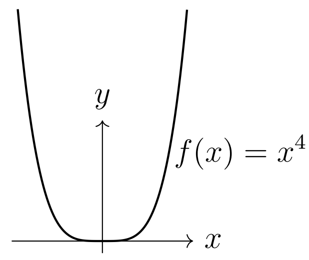

Figura 3.8: Función $f(x) = x^4$: Dom $= \mathbb{R}$, par.

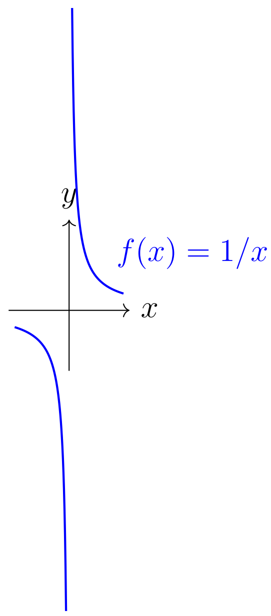

Figura 3.9: Función recíproca $f(x) = 1/x$: Dom $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

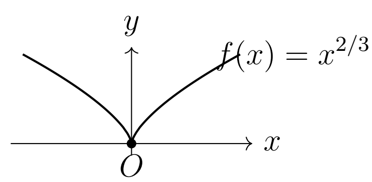

Figura 3.10: Función $x^{2/3}$: Dom $= \mathbb{R}$.

Definición 3.13 (Función exponencial)**.** Sea a un número real tal que $a > 0$ y $a \neq 1$. Se define la función exponencial como $f(x) = a^x$. El dominio serán todos los números reales.

Ejemplo 3.14 (Ejemplos de funciones exponenciales)**.** Los siguientes son ejemplos de funciones exponenciales:

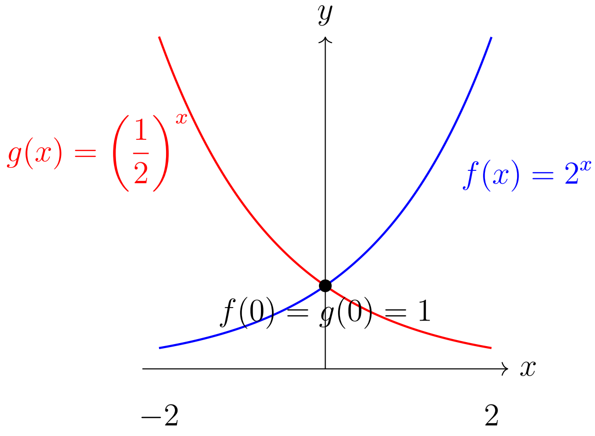

Figura 3.11: Exponenciales: $f(x) = 2^x$ (Dom $= \mathbb{R}, y > 0$), $g(x) = (1/2)^x$ (asíntota $y = 0$).

Definición 3.15 (Función logarítmica)**.** Sea $a > 0$, $a \neq 1$ una base válida. La **función logarítmica** $f(x) = \log_a x$ se define como la función inversa de la exponencial a^x, satisfaciendo la propiedad fundamental:

$$a^{\log_a x} = x = \log_a(a^x) \quad \forall x > 0.$$

Su dominio natural es $(0, +\infty)$ y su rango es $\mathbb{R}$, siendo estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.

Ejemplo 3.16 (Funciones logarítmicas elementales)**.** Consideremos dos casos representativos:

a) $f(x) = \log_2 x$ (base > 1, creciente):

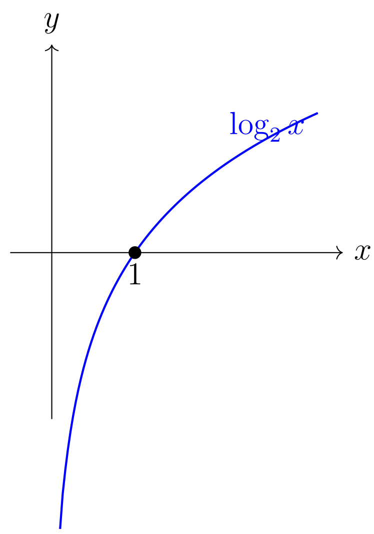

Figura 3.12: $\log_2 x$: Dom $= (0, +\infty)$, pasa por $(1, 0)$, creciente.

Antes de seguir con el siguiente tipo de funciones, es necesaria la siguiente definición

Definición 3.17 (Función periódica)**.** Una función $f : D \to \mathbb{R}$ se denomina **periódica** si existe un número real positivo $T > 0$, llamado **período** de f, tal que:

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in D \text{ con } x + T \in D.$$

El menor número positivo T que satisface esta condición se conoce como **período fundamental**. Equivalentemente, $f(x + nT) = f(x)$ para todo entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x + nT \in D$.

Observación 3.18. *Las funciones periódicas presentan la propiedad geométrica de que su gráfica se compone de copias trasladas del segmento básico correspondiente a un período. Ejemplos clásicos incluyen las funciones trigonométricas, donde* $\sin x$ *y* $\cos x$ *tienen período fundamental* 2π*, mientras que* $\tan x$ *tiene período* π*.*

Definición 3.19 (Funciones trigonométricas fundamentales)**.** Las **funciones trigonométricas fundamentales** se definen para $x \in \mathbb{R}$ medido en radianes, originadas en las razones trigonométricas de un ángulo en el círculo unitario. Se distinguen seis funciones periódicas con período fundamental 2π (excepto las secantes y cosecantes), cuyos dominios, rangos y comportamientos se detallan a continuación:

- $\sin x$: Dom $= \mathbb{R}$, Rango $= [-1, 1]$, paridad impar.
- $\cos x$: Dom $= \mathbb{R}$, Rango $= [-1, 1]$, paridad par.
- $\tan x$: Dom $= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, Rango $= \mathbb{R}$, período π, paridad impar.
- $\cot x$: Dom $= \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, Rango $= \mathbb{R}$, período π, paridad impar.
- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$: Dom $= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, Rango $= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
- $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$: Dom $= \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, Rango $= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Ejemplo 3.20 (Gráficas de las funciones trigonométricas fundamentales)**.** Se presentan a continuación las gráficas de las funciones trigonométricas fundamentales:

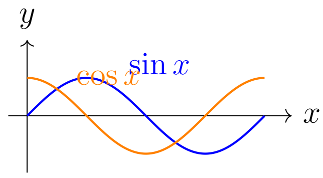

Figura 3.13: $\sin x$, $\cos x$: período 2π, rango $[-1, 1]$.

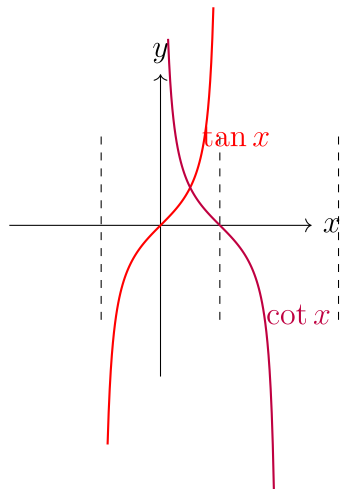

Figura 3.14: $\tan x$, $\cot x$: período π, rango $\mathbb{R}$, asíntotas verticales en $\pi/2$.

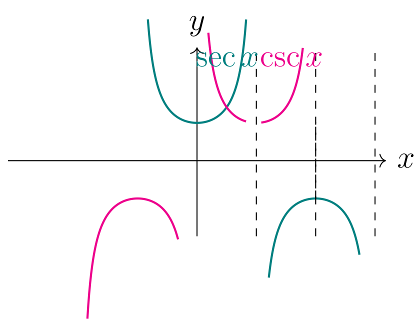

Figura 3.15: $\sec x = 1/\cos x$, $\csc x = 1/\sin x$: rango $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, asíntotas verticales.

Definición 3.21 (Función compuesta)**.** Sean f y g dos funciones tales que g está definida en un conjunto D_g y f está definida en un conjunto D_f. Si para todo $x \in D_g$ se tiene que $g(x) \in D_f$, se puede definir la **función compuesta** de f con g como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de la función compuesta $f \circ g$ está formado por todos aquellos $x \in D_g$ tales que la imagen $g(x)$ pertenece al dominio de f, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{\, x \in D_g : g(x) \in D_f \,\}.$$

Ejemplo 3.22. La función $y = \sqrt{1 - x^2}$ puede interpretarse como una función compuesta de la siguiente manera:

$$f(u) = \sqrt{u}, \qquad u = g(x) = 1 - x^2.$$

Aquí, la función interior es $g(x) = 1 - x^2$ y la función exterior es $f(u) = \sqrt{u}$.

El dominio de g es todo $\mathbb{R}$, mientras que el dominio de f es $[0, +\infty)$, pues la raíz cuadrada sólo está definida para argumentos no negativos. Para que la función compuesta $f(g(x)) = \sqrt{1-x^2}$ esté definida, se requiere que

$$g(x) = 1 - x^2 \geq 0.$$

Resolvemos la desigualdad:

$$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = [-1, 1].$$

En conclusión, $y = \sqrt{1-x^2}$ es una función compuesta de $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = 1 - x^2$, cuyo dominio está dado por el intervalo cerrado $[-1, 1]$.

Observación 3.23 (Composiciones múltiples)**.** *Es posible componer una función múltiples veces formando cadenas de funciones. Por ejemplo, la función*

$$f(x) = \ln(\sin(x^2 + 1))$$

puede descomponerse en la composición sucesiva de tres funciones elementales:

$$f(x) = \ln \circ \sin \circ p(x),$$

donde:

- $p(x) = x^2 + 1$ *(función potencia desplazada),*
- $u = \sin(v)$ *con* $v = p(x)$*,*
- $y = \ln(u)$ *con* $u = \sin(p(x))$*.*

Para determinar su dominio, se analizan las restricciones de cada función desde la exterior hacia la interior:

1. $\ln(u)$ *requiere* $u > 0$*,*
2. $\sin(v) \in [-1, 1]$*, pero debe satisfacer* $\sin(v) > 0$*,*
3. $v = x^2 + 1 \geq 1 > 0$ *(siempre definido).*

Así, $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x^2 + 1) > 0\}$*, equivalente a los intervalos donde el seno es positivo.*

Definición 3.24 (Función elemental)**.** Una función $f : D \to \mathbb{R}$ se denomina **elemental** si puede obtenerse a partir de funciones elementales básicas (potencias, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus inversas) y constantes reales, mediante un número *finito* de las siguientes operaciones:

- Suma, resta, multiplicación y división entre funciones,
- Composición de funciones.

Formalmente, el conjunto de funciones elementales $\mathcal{E}$ se define recursivamente como el menor conjunto que contiene:

- Las funciones potencia $x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$),
- Las exponenciales $x \mapsto a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$),
- Las logarítmicas $x \mapsto \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$),
- Las funciones trigonométricas $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc.,
- Las constantes $x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$),
- Y está cerrado bajo suma, producto, cociente y composición.

Las expresiones analíticas usuales en cálculo (polinomios, racionales, exponenciales-trigonométricas, etc.) son funciones elementales.

Un tipo particular de funciones elementales son las **funciones algebraicas**, que se obtienen únicamente mediante operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división y raíces) sobre la variable independiente x. Se definen detalladamente a continuación:

Definición 3.25 (Función algebraica)**.** Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es **algebraica** si puede expresarse mediante una expresión finita que involucre únicamente la variable x, números reales y las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces n-ésimas (con $n \in \mathbb{N}^+$). Equivalentemente, satisface una ecuación polinómica con coeficientes reales:

$$P(x, f(x)) = 0,$$

donde P es un polinomio en dos variables.

Definición 3.26 (Función lineal)**.** Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **lineal** si tiene la forma

$$f(x) = mx + b,$$

donde $m, b \in \mathbb{R}$ son constantes. Aquí m es la **pendiente** y b el **intercepto** con el eje y. Su dominio y rango son $\mathbb{R}$, y es inyectiva si $m \neq 0$.

Definición 3.27 (Función polinómica)**.** Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **polinómica** si se expresa como

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es el **grado**, $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$. Su dominio es $\mathbb{R}$. Cuando $n \geq 2$, se clasifican según su grado (cuadrática $n = 2$, cúbica $n = 3$, etc.).

Definición 3.28 (Función racional)**.** Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es **racional** si es un cociente de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P, Q son polinomios con $Q \not\equiv 0$. Su dominio es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}.$$

Las asíntotas y discontinuidades se determinan por los ceros del denominador.

Definición 3.29 (Función irracional)**.** Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es **irracional** (o radical) si en su expresión analítica aparece al menos una raíz n-ésima con $n \geq 2$. El dominio se restringe por las condiciones de definición de las raíces:

$$\sqrt[n]{P(x)} \quad \text{requiere } P(x) \geq 0 \text{ si } n \text{ par.}$$

Ejemplos: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

Las funciones que no son algebraicas se denominan **trascendentes**. Ejemplos incluyen las funciones trigonométricas ($y = \cos x$), exponenciales ($y = 10^x$) y logarítmicas ($y = \ln x$), cuya definición trasciende las operaciones algebraicas elementales.

3.3 Transformaciones de funciones

A partir de las funciones básicas estudiadas previamente, las combinaciones de funciones se producen de manera natural: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, y $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$. Ahora, es posible generar nuevas funciones mediante **transformaciones geométricas** de sus gráficas: traslaciones, dilataciones, compresiones y reflexiones. Estas operaciones preservan las propiedades fundamentales de la función original, modificando únicamente su posición y escala.

Dados $h, k \in \mathbb{R}$ y $y = f(x)$, las siguientes transformaciones desplazan la gráfica de f:

- $y = f(x-h)$: **Traslación horizontal** de h unidades ($h > 0$ hacia la derecha, $h < 0$ hacia la izquierda).
- $y = f(x) + k$: **Traslación vertical** de k unidades ($k > 0$ hacia arriba, $k < 0$ hacia abajo).
- $y = f(x-h) + k$: **Traslación combinada** (horizontal h, vertical k).

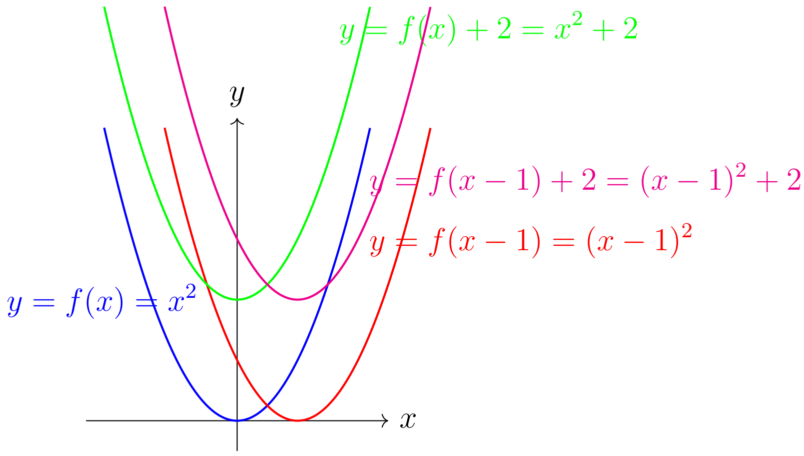

Figura 3.16: Traslaciones de $y = x^2$: vértice se desplaza de $(0,0)$ a $(h,k) = (1,2)$.

Suponga que $c > 0$, $c \neq 1$. Las siguientes transformaciones modifican la escala y orientación:

- $y = c \cdot f(x)$ ($c > 1$): **Dilatación vertical** por factor c.
- $y = \dfrac{1}{c} \cdot f(x)$ ($c > 1$): **Compresión vertical** por factor c.
- $y = f(c \cdot x)$ ($c > 1$): **Compresión horizontal** por factor c.
- $y = f\left(\dfrac{x}{c}\right)$ ($c > 1$): **Dilatación horizontal** por factor c.
- $y = -f(x)$: **Reflexión respecto al eje** x.
- $y = f(-x)$: **Reflexión respecto al eje** y (preserva paridad).

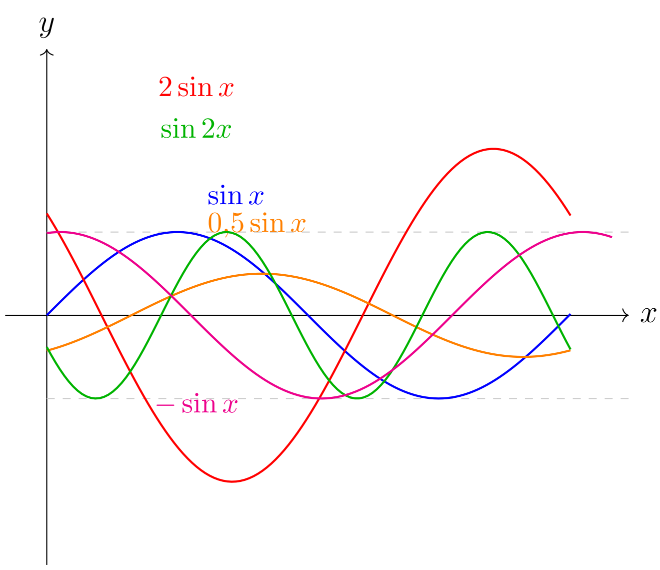

Figura 3.17: Transformaciones superpuestas de $y = \sin x$: amplitud, compresiones y reflexión.

Estas transformaciones permiten sistematizar el análisis gráfico de funciones complejas a partir de funciones básicas conocidas. Para las funciones trigonométricas periódicas $\sin x$ y $\cos x$, cuya forma canónica tiene amplitud 1, línea media $y = 0$ y período 2π, la forma generalizada es $y = C + A\sin\big[a(t+b)\big]$ o $y = C + A\cos\big[a(t+b)\big]$, donde los parámetros tienen interpretación geométrica precisa:

- **Amplitud** $|A|$: distancia máxima desde la línea central hasta los valores extremos.

- **Período fundamental** $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$: longitud del ciclo completo ($a > 0$ implica compresión, $0 < a < 1$ dilatación horizontal).
- **Línea central (desfase vertical)** C: valor medio alrededor del cual oscila la función.
- **Desfase horizontal** $-b$: desplazamiento lateral del ciclo básico ($\phi = -b$ comúnmente denotado).

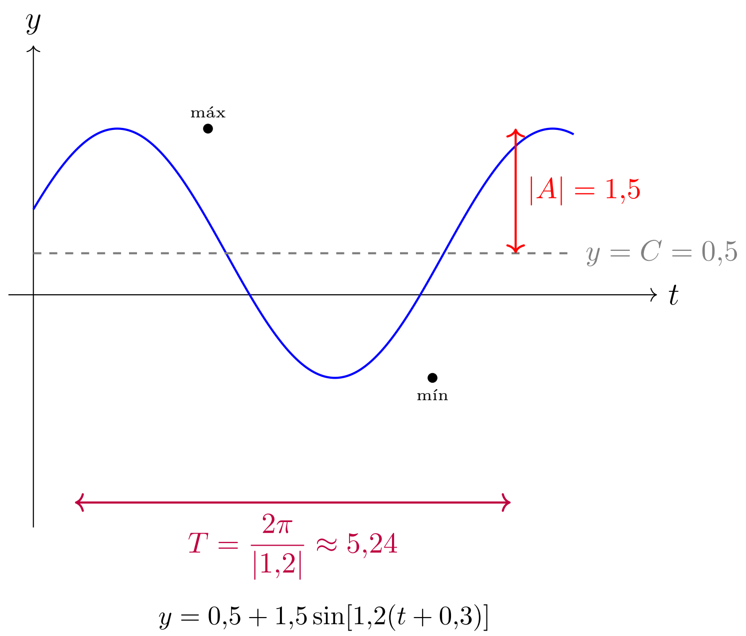

Figura 3.18: Componentes de la forma amplitud-fase.

Esta parametrización es fundamental para modelar fenómenos oscilatorios (resortes, ondas, circuitos AC) donde la amplitud, frecuencia y fase determinan el comportamiento físico observado.

3.4 Funciones inversas

Muchos fenómenos físicos y matemáticos admiten dos perspectivas complementarias. Considere, por ejemplo, el proceso productivo de una planta de muebles: dada una cantidad de tiempo t, podemos determinar la cantidad de muebles producidos $f(t)$; alternativamente, dada una cantidad específica de muebles y, podríamos determinar el tiempo necesario para producirlos $t = f^{-1}(y)$.

En este contexto, si $y = f(t)$ describe la producción acumulada en función del tiempo, la función inversa f^{-1} responde a la pregunta "¿en cuánto tiempo se producen y muebles?". Para que esta operación inversa sea bien definida matemáticamente, es necesario garantizar que cada valor y en el rango de f corresponda a un único x en el dominio, condición que formalizamos mediante el concepto de inyectividad.

Definición 3.30 (Función inyectiva)**.** Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es **inyectiva** si para todo par de elementos distintos $x_1, x_2 \in D$ se cumple:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Equivalentemente, $f(a) = f(b)$ implica $a = b$ para todo $a, b \in D$.

Observación 3.31 (Prueba de la recta horizontal)**.** *Una función f es inyectiva si y solo si ninguna recta horizontal $y = k$ (con $k \in \mathbb{R}$) interseca su gráfica en más de un punto. Esta condición geométrica es equivalente a la definición algebraica anterior y proporciona un criterio visual directo para verificar la inyectividad.*

La inyectividad garantiza que cada valor en el rango de f proviene de exactamente un elemento del dominio, condición necesaria y suficiente para que exista una función inversa bien definida $f^{-1} : \mathrm{Ran}(f) \to D$ tal que: $f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$.

Este contexto nos permite introducir rigurosamente el concepto de función inversa.

Definición 3.32 (Función inversa)**.** Sea $f : D \to R$ una función inyectiva, con dominio D y rango (imagen) $R = f(D)$. La **función inversa** de f, denotada por $f^{-1} : R \to D$, se define mediante la relación

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y,$$

para todo $y \in R$ y el único $x \in D$ que satisface dicha igualdad. En otras palabras, f^{-1} "deshace" la acción de f.

Observación 3.33. *En general,* $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$*: la notación* f^{-1} *no denota recíproco, sino* función inversa*. Además, cuando* f *es inyectiva se satisfacen las identidades de composición*

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \textit{para todo } x \in D,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \textit{para todo } y \in R.$$

Estas igualdades permiten calcular analíticamente la función inversa: dada la ecuación $y = f(x)$*, se despeja* x *en términos de* y *y, finalmente, se intercambian los roles de las variables (*y *se renombra como* x*).*

Ejemplo 3.34. Determine una fórmula para la inversa de las funciones $y = \dfrac{4x-1}{2x+3}$ y $y = 2x - 3$.

Solución: **1. Inversa de** $y = \dfrac{4x-1}{2x+3}$.

Partimos de la ecuación

$$y = \frac{4x-1}{2x+3}.$$

Paso 1: Intercambiamos x e y para reflejar la inversión:

$$x = \frac{4y-1}{2y+3}.$$

Paso 2: Despejamos y en términos de x. Multiplicamos ambos lados por $2y+3$:

$$x(2y+3) = 4y - 1.$$

Distribuimos:

$$2xy + 3x = 4y - 1.$$

Paso 3: Reagrupamos los términos que contienen y en un lado:

$$2xy - 4y = -1 - 3x.$$

Factorizamos y:

$$y(2x-4) = -1 - 3x.$$

Paso 4: Despejamos y:

$$y = \frac{-1-3x}{2x-4}.$$

Podemos multiplicar numerador y denominador por -1 para simplificar:

$$y = \frac{3x+1}{4-2x}.$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{4-2x}.$$

2. Inversa de $y = 2x - 3$.
Partimos de

$$y = 2x - 3.$$

Paso 1: Intercambiamos x e y:

$$x = 2y - 3.$$

Paso 2: Despejamos y en términos de x:

$$x + 3 = 2y \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{x+3}{2}.$$

Por tanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}.$$

En ambos casos, puede verificarse la corrección comprobando que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ en los dominios correspondientes.

Después del contexto establecido sobre funciones inversas, las funciones trigonométricas básicas ($\sin x$, $\cos x$, etc.) no son globalmente inyectivas debido a su periodicidad. Para definir sus inversas, se restringen a intervalos *principales* donde cada una es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva) sobre su rango. Estas funciones trigonométricas inversas se definen a continuación:

Definición 3.35 (Funciones trigonométricas inversas)**.** Las seis funciones trigonométricas inversas fundamentales se definen con dominios y rangos específicos que garantizan su inyectividad:

Función	**Dominio (principal)**	**Rango**
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\operatorname{arcsec} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$
$\operatorname{arccsc} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$

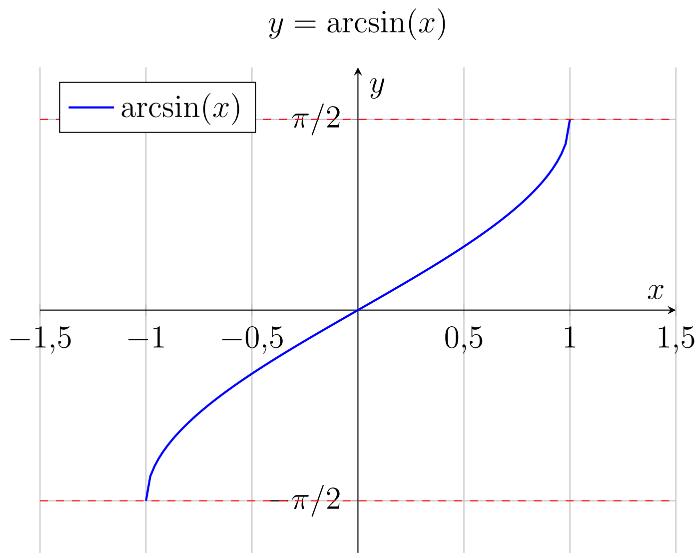

Figura 3.19: Función arcoseno: dominio $[-1, 1]$, rango $[-\pi/2, \pi/2]$

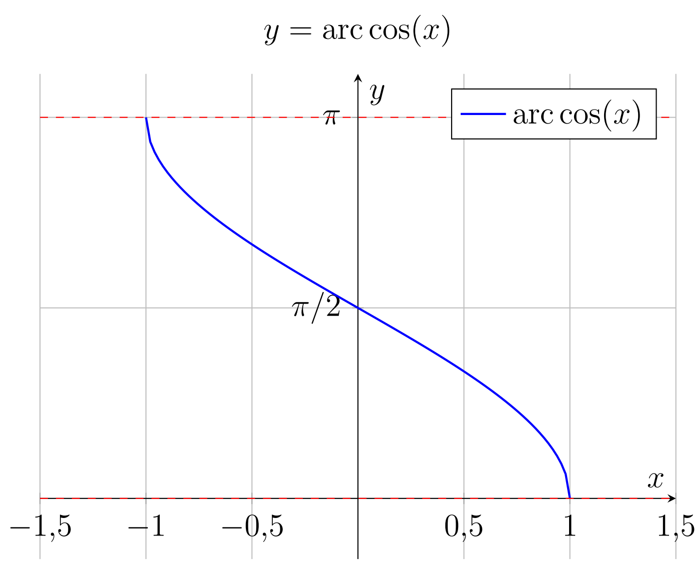

Figura 3.20: Función arcocoseno: dominio $[-1, 1]$, rango $[0, \pi]$

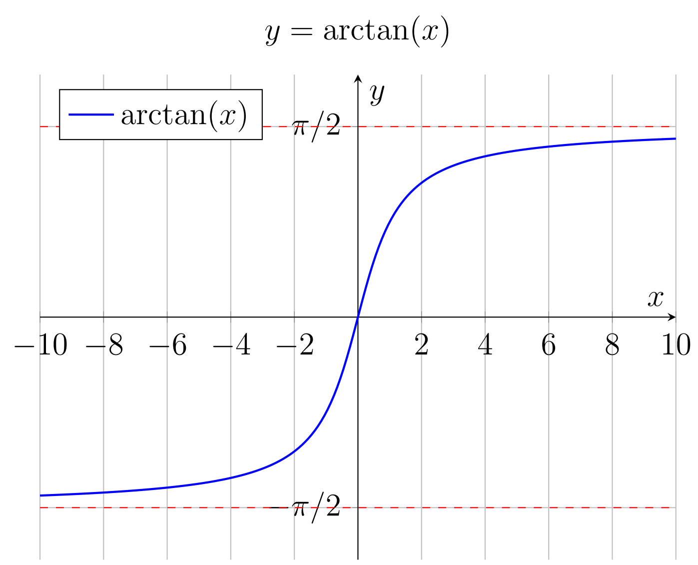

Figura 3.21: Función arcotangente: dominio $(-\infty, \infty)$, rango $(-\pi/2, \pi/2)$

3.5
Operaciones con logaritmos y exponenciales naturales

Concluimos este capítulo presentando las propiedades fundamentales de las funciones exponenciales y logarítmicas, esenciales para el desarrollo del cálculo diferencial. En particular, se destaca el número $e \approx 2{,}71828$, cuya función asociada $y = e^x$ tiene pendiente igual a 1 en el punto $(0, 1)$. Esta característica se demostrará formalmente en el capítulo de límites. Por ahora, estudiaremos las leyes algebraicas que gobiernan las operaciones con potencias, exponentes y logaritmos.

Teorema 3.36 (Leyes de los exponentes)**.** *Sean $a, b > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $b^{x+y} = b^x\, b^y$
2. $b^{x-y} = \dfrac{b^x}{b^y}$
3. $(b^x)^y = b^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x\, b^x$

Teorema 3.37 (Leyes de los logaritmos)**.** *Sea $b > 0$ con $b \neq 1$, y sean $x, y > 0$ y $r \in \mathbb{R}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
3. $\log_b(x^r) = r\, \log_b x$

Además, la definición de logaritmo establece la equivalencia $\log_b x = y \iff b^y = x$.

Definición 3.38 (Función logaritmo natural)**.** El logaritmo natural $\ln x$ es el logaritmo de base e, es decir $\ln x = \log_e x$. Para todo $x > 0$ y $y \in \mathbb{R}$ se cumple $\ln x = y \iff e^y = x$, $\ln(e^x) = x$, y $e^{\ln x} = x$. En particular, en $x = 1$, se obtiene $\ln e = 1$.

Teorema 3.39 (Cambio de base a logaritmos naturales)**.** *Sea $b > 0$ y $b \neq 1$. Se cumple que* $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b}$.

Demostración. Sea $y = \log_b x$. Por definición, $b^y = x$. Al aplicar logaritmos naturales a ambos lados $y \ln b = \ln x$. Despejando y, se obtiene $y = \dfrac{\ln x}{\ln b}$, lo que establece la fórmula de cambio de base. □

3.6
Ejercicios del capítulo