

Comparación de la característica dinámica de los sistemas complejos de los mercados financieros para la Criptomoneda Bitcoin y el patrón Oro

Andrés Felipe Bermúdez Mendoza

anfbermudezme@unal.edu.co

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Introducción a la Econofísica, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

5 de agosto de 2021

Resumen

En este trabajo se estudia el comportamiento de los precios del Oro y del Bitcoin ajustándolos por medio de mapas de Taylor, construyendo bases de datos utilizando las plataformas Yahoo Financial e Investing, para con un script utilizando Python y la librería Pandas obtener las series de tiempo del Bitcoin dividiéndolo en tres periodos. Inicios (Low), etapa intermedia (High) y épocas recientes (Post). En el caso del oro comprar la base de datos en Macrotrends.net y por medio de un script en Python extraer los datos del precio real del oro desde 1915, de tal manera que el Bitcoin tenga el doble de datos que el oro. Una vez construidas las bases de datos, se procede a desarrollar analíticamente el método computacional propuesto por Alves, Duarte y Mota, llegando a la forma matricial utilizada para la obtención de los coeficientes de mapas de Taylor. Posteriormente, se utilizó dicho método computacional y se construyó un programa en Maple17 utilizando la rutina LinMapTS para construir de manera computacional los mapas que ajusten el comportamiento del Bitcoin y del Oro. Por último, se calculó la desviación y el R^2 para cada uno de los mapas de Taylor obtenidos computacionalmente, tanto para el Bitcoin, como para el oro. Así, luego se analizó cada uno de los resultados para los tres periodos distintos Low, High y Post, además de las series de tiempo obtenidas para el Bitcoin y para el Oro, concluyendo diferentes relaciones entre los dos precios y brindando diferentes perspectivas como objeto de estudio.

Palabras clave: Bitcoin, Patrón Oro, Criptomonedas, Mercados Financieros, Econofísica, Sistemas Dinámicos, Caos, Series de tiempo, Teorema de Takens, Magnitudes Estadísticas, Mapas de Taylor.

1. Introducción

El mercado de las criptomonedas en particular el Bitcoin, es un tema de auge, el cuál, está llamando la atención para realizar estudios serios en varias ramas del conocimiento, como por ejemplo la legalidad o el punto de vista económico, permitiendo que la economía financiera proporcione un campo abierto para áreas de investigación intensa como la econofísica, la teoría del caos, la estadística y la informática. [1]

Uno de los problemas más importantes para los economistas es la detección de un componente de la burbuja especulativa. La física ha generado métodos, que han sido utilizados para encontrar dicha componente en los

precios del Bitcoin [2][3][4][5][6][7]. Los métodos consisten en el análisis de series de tiempo para observar la característica dinámica de los precios del Bitcoin, considerando que los sistemas complejos financieros son aceptados por la microeconomía y la macroeconomía. [2][3][8]

El patrón oro es un sistema monetario que consiste en establecer el valor de la moneda de un país en relación a la cantidad de oro que posea. Este sistema fue adoptado por gran parte del mundo funcionando desde el siglo XIX hasta finales del siglo XX, cuando Nixxon decidió en 1971 no seguir utilizando este sistema. Actualmente el mundo presenta diferentes crisis económicas a nivel mundial, por ello cabe como objeto de estudio posibles sistemas monetarios emergentes como lo es el Bitcoin,

ya que muchas personas predicen que podemos estar a la puerta de un sistema patrón del Bitcoin.

Para hallar dichas relaciones se presenta brevemente la teoría del caos, pues los mercados financieros son sistemas complejos, cuya caracterización puede estar basada en modelos físicos. Los métodos utilizados son los presentados por P.Alves, L.Duarte, L. da Mota en sus artículos [2][3][8]. Dicho método se basa en construir un vector de los precios históricos, para luego definir la generación de devoluciones y así encontrar la volatilidad del mercado financiero donde se construye un espacio de fase. Luego haciendo uso de un teorema conocido como teorema de Takens se tiene construye un vector de series de tiempo con retraso, esto para que aumentando el número de retrasos el movimiento en el espacio sea más predecible. Luego se realiza un ajuste global utilizando los mapas de Taylor. [2][3][8]. Por último se determinan computacionalmente magnitudes estadísticas para así poder comparar de manera correcta el ajuste global. [2][3][8]

El Bitcoin genera una posibilidad de intercambio descentralizado, sin la necesidad de contar con la regulación de un país específico como Estados Unidos, donde su moneda es el patrón de intercambio internacional. El artículo [11] brinda una metodología para ajustar y caracterizar el comportamiento de la criptomoneda Bitcoin y el artículo [3] brinda un posible desarrollo teórico. En este proyecto se utiliza lo planteado en estos dos artículos de partida, estudiando la criptomoneda Bitcoin, para luego comparar su ajuste, magnitudes estadísticas y comportamiento con el patrón oro. Se encuentran similitudes y diferencias en el comportamiento, teniendo en cuenta los factores económicos que se conocen. Uno de ellos es que la cantidad de oro en el mundo aún hoy en día es demasiado alta, además de la posible caída de las criptomonedas debido a los recursos energéticos que estas demandan. Se ve una perspectiva de si el patrón Bitcoin es viable como algunas personas alrededor del mundo lo plantean.[12]

La principal motivación es evidenciar posibles panoramas de inversión y de estudio para el Bitcoin. Se tiene como objetivo general Comparar y determinar posibles relaciones de comportamiento entre dos mercados financieros considerados como sistemas complejos. Primero el patrón oro desde 1915 hasta 1971 y la criptomoneda Bitcoin desde su publicación en 2009 hasta épocas recientes, para así tener información acerca de la posibilidad de un patrón Bitcoin en relación con el patrón oro. Para ello se plantean 6 objetivos específicos a desarrollar a lo largo de 4 semanas. Se plantea entonces una metodología consistente con los objetivos específicos para así obtener los resultados esperados utilizando los recursos disponibles. [2][3][8][4][5][6][7]

Para la realización del objetivo general se construyen bases de datos utilizando las plataformas Yahoo Financiera e Investing, para con un script utilizando Python y la librería Pandas obtener las series de tiempo del Bitcoin dividiéndolo en tres periodos. Inicios, etapa intermedia y épocas recientes. Luego, se utiliza el método computacional brindado por P.Alves, L.Duarte y L. da Mota [2][3][8][18] y construir un programa en Maple17 utilizando LinMapTS y TimeS [2][3][8] para construir de manera computacional los mapas que ajusten el comportamiento del Bitcoin y entonces calcular las desviaciones para cada uno de los mapas utilizando la rutina LinMapTS en Maple17 para el Bitcoin.[2][3][8].

2. Marco Teórico

2.1. Mercados financieros

Las finanzas se definen como un área de la economía que estudia la manera en que un agente financiero asigna recursos limitados a través del tiempo y dicha asignación se presenta a través de decisiones financieras, las cuales se caracterizan por los costos y beneficios que se distribuyen a lo largo del tiempo y en que los agentes no pueden conocer con certeza la relación costo-beneficio. Luego se define como sistema financiero al conjunto de

mercados organizados y otras instituciones mediante las cuales se realizan los contratos financieros y el intercambio de activos y riesgos, incluyendo mercado de acciones, mercado de bonos entre otros. [13][14]

La teoría financiera esta constituida por un conjunto de conceptos que ayudan al agente financiero a organizar las ideas sobre cómo asignar recursos en el tiempo y de un grupo de modelos cuantitativos que permiten evaluar alternativas para adoptar decisiones y realizarlas. [13][14]

Una vez definidas las decisiones financieras se tiene que dependen de la maximización de las utilidades y la información disponible. El arbitraje es un proceso por el cual se compra y se vende inmediatamente los activos a fin de ganar una utilidad segura a partir de la diferencia de sus precios. Un ejemplo de este proceso son los índices de acciones como US Dow Jones Industrial Average, SP 500, entre otros. [2][3][8]

2.2. Mercado de las Criptomonedas

Las criptomonedas se definen como medio digital de intercambio que utiliza la criptografía fuerte a los registros de transacciones seguras, para controlar la creación de monedas adicionales y para verificar la transferencia de la propiedad de la moneda. El valor agregado de las criptomonedas y el inminente éxito que han tenido en estos últimos años se debe a la descentralización del mercado, es decir normalmente no son emitidas por una autoridad central. [2][3][8]

2.2.1. Bitcoin

La primera criptomoneda implementada en el mundo fue el Bitcoin en 2009, lanzada como software de código abierto. El bitcoin es una moneda digital descentralizada, sin un banco central o administrador único, que se puede enviar de un agente a otro utilizando peer to peer sin la necesidad de intermediarios, se verifican las transacciones mediante criptografía y se registran en un libro

mayor distribuido.^{el} cual consiste en llegar al consenso de datos digitales replicados, compartidos y sincronizados distribuidos geográficamente en múltiples sitios, a este libro mayor distribuido se le conoce como Blockchain. [2][3][8] [12]

2.3. Patrón Oro

El patrón oro es un sistema monetario que, básicamente, consiste en establecer el valor de la moneda de un país en relación a la cantidad de oro que se posea. De una manera más coloquial, el poseedor de un billete cuenta con el derecho de intercambiar ese billete por una cantidad proporcional de oro, dada la tasa de cambio que cada país establezca. [15]

En 1819 en Inglaterra se tomo la primera medida formal que establecía que el oro como institución legal, es decir que el el papel moneda fuera intercambiable por una cantidad de oro definida. Con el empuje de la libra esterlina debido a esta medida, otras potencias adoptaron el mismo sistema durante el siglo *XIX* y en 1879 Estados Unidos decidió seguir el mismo esquema, siendo en 1900 la formalización oficial del intercambio *ORO – USD*. [15]

2.3.1. Crisis del patrón Oro

Con la primera guerra mundial, los países que participaron necesitaban muchos recursos económicos que se traducían en oro, llevando a imprimir más dinero papel del que podían sustentar, ocasionando una hiperinflación en algunos países como Alemania. [15]

Al término de la guerra el patrón oro no pudo ser retomado, generando que Estados Unidos tomará la delantera, creciendo exponencialmente y la moneda de referencia mundial se volvió el dolar durante el siglo *XX*. Dicho sistema sigue vigente hasta el día de hoy. En 1917, Nixon como presidente de Estados Unidos toma la decisión de seguir utilizando el patrón oro. [15]

2.4. Teoría del Caos

La teoría del caos es una rama de las matemáticas, física y otras ciencias, la cuál , trabaja con sistemas complejos y sistemas dinámicos no lineales que son sensibles a las variaciones de las condiciones iniciales. [4][5][6][7]

El caos esta construido a partir de una serie de fenómenos encontrados en la teoría de sistemas dinámicos, ecuaciones diferenciales y la mecánica clásica, dando lugar a trayectorias asociadas a la evolución temporal, es decir el casos se compone de tres conceptos, los cuales son: Sensibilidad a las condiciones iniciales, en donde, cualquier cambio por mínimo que sea en dichas condiciones acaban dando comportamientos diferentes pasado un tiempo significativo. Topológicamente transitivos, es decir en un mapa $f : X \rightarrow X$, si para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Densidad de órbitas periódicas, lo cuál significa que cada punto del espacio se aproxima de forma arbitraria y cercana mediante órbitas periódicas cumpliendo con el teorema de Sharkovskii. [4][5][6][7].

Los casos caóticos de mayor interés surgen cuando el comportamiento tiene lugar en un atractor, lo cuál, se define como un conjunto de valores numéricos hacia los cuales un sistema tiende a evolucionar, para una amplia variedad de condiciones iniciales del sistema [4][5][6][7].

2.5. Series de tiempo no lineales

El sistema de Lorenz es un conjunto de ecuaciones diferenciales donde se pretende describir la dinámica de la atmósfera terrestre. [16]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1x_3 + Rx_1 \\ \dot{z} &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Donde σ es el número de Prandtl (Viscosidad/ conductividad térmica), R el número de Rayleigh y b es la razón entre la longitud y altura del sistema.[16]

Podemos tomar la solución correspondiente a algunas condiciones iniciales para x_i en $t = 0$ como la expansión ($i = 1, 2, 3$) [16]

$$x_i(t) = x_i(0) + \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_0 t + \left. \frac{d^2x_i}{dt^2} \right|_0 \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (2)$$

Dado que el sistema está definido en general por las ecuaciones [16]

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x(t)) \quad (3)$$

Lo que implica

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{df_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} f_j \quad (4)$$

Así teniendo hasta el segundo orden

$$x_i(t) = x_i(0) + f_i(x(0))t + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} f_j \right)_0 \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (5)$$

En este proceso aumentará el grado de los polinomios que forme el mapa por una unidad en cada orden. [16]

Dada una serie de tiempo producida por mediciones de una variable relacionada con algún fenómeno, que en principio puede ser descrito por un sistema dinámico S_0 por un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas. [16]

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

El sistema dinámico comienza con un punto cualquiera P_0 correspondiendo a la variable $x_{(P_0)}$; se genera un mapa M que toma un punto en alguna solución a la ecuación diferencial a otro punto por lo cual el tiempo aumenta en intervalos δt . [16]

$$x_{i(P+1)} = F_i(x_{(P)}, \delta t) \quad (7)$$

Generando un conjunto de funciones $F_i(x, t)$ las cuales están relacionadas con el conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas $f_i(x) = \left. \frac{\partial F_i}{\partial t} \right|_{t=0}$. De acuerdo con la teoría de Lie [9] y [10], dicho mapa puede tomarse como una ley de relaciones entre puntos con las propiedades de un

grupo. Esto quiere decir el grupo de transformaciones relacionados a (6). Las soluciones del sistema dinámico original se puede obtener a partir de la exponencial del grupo generador definido por el operador $X = \sum_{j=i}^n f \frac{\partial}{\partial x_j}$. Usando esto las funciones estarán determinadas por: [16]

$$F_i(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k [x_i] \quad (8)$$

Ahora tomando el intervalo de tiempo t , para el caso ideal: [16]

$$x_{i(p+1)} = F_i(x_{(p)}, \delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta t)^k}{k!} X^k [x_{i(p)}] \quad (9)$$

Para el caso real se trunca la serie de tiempo en orden N. [16]

$$\bar{X}_{i(p+1)} = \bar{F}_i(x_{(p)}, \delta t) = \sum_{k=0}^N \frac{(\delta t)^k}{k!} X^k [x_{i(p)}] \quad (10)$$

Los mapas que se obtienen en este proyecto corresponden al predictor con coordenadas X_1, X_2, X_3 , esto es para primer grado

$$F(X_1, X_2, X_3) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \quad (11)$$

Y para segundo grado

$$F(X_1, X_2, X_3) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_1^2 + a_5 X_1 X_2 + a_6 X_1 X_3 + a_7 X_2^2 + a_8 X_2 X_3 + a_9 X_3^2 \quad (12)$$

Donde se toma φ_i como funciones asociadas al predictor relacionándose como en la tabla (12):

| | | | | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| φ_1 | φ_2 | φ_3 | φ_4 | φ_5 | φ_6 | φ_7 | φ_8 | φ_9 |
| X_1 | X_2 | X_3 | X_1^2 | $X_1 X_2$ | $X_1 X_3$ | X_2^2 | $X_2 X_3$ | X_3^2 |

Tabla 1: Funciones asociadas al predictor.

Entonces se tiene que

$$\sum_{i=1}^l a_i \left(\sum_{j=1}^{P-1} \varphi(\vec{x}_j) \varphi_1(\vec{x}_j) \right) = \sum_{j=1}^{P-1} x_{1(j+1)} \varphi_1(\vec{x}_j) \quad (13)$$

La solución del sistema formado por l ecuaciones lineales para determinar los parámetros $(a_1, a_2, \dots, a_l) = \vec{a}$, estará dada por la representación matricial:

$$\begin{aligned} \alpha_{pq} &= \sum_{j=1}^{P-1} \varphi_p(\vec{x}_j) \varphi_q(\vec{x}_j) \\ \beta &= \sum_{j=1}^{P-1} x_{1(j+1)} \varphi(\vec{x}_j) \end{aligned} \quad (14)$$

El sistema tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{l1} & \alpha_{l2} & \cdots & \alpha_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_l \end{bmatrix} \quad (15)$$

La solución computacional de la ecuación matricial obtenida determina el vector \vec{a}

2.6. Métodos

Los desarrollos matemáticos que se plantean en la presente sección son dados por los artículos [2],[3] y [8], los cuales han sido usados para determinar la dinámica y comportamiento para dos sistemas diferentes. El primero escogido para el desarrollo del proyecto usa los precios del Bitcoin y el segundo primeramente realizado, por los autores P.Alves, L.Duarte, L. da Mota usa precios del petróleo e índices bursátiles. [2][3][8]

Para determinar la serie de tiempo, primero se define el conjunto de precios históricos como:

$$PH = \{X_1, X_2, \dots, X_N\} \quad (16)$$

Se construyen los vectores de estado, con los observables de la serie de tiempo, $\{X(0), X(\Delta\theta), \dots, X((\varsigma - 1)\Delta\theta)\}$. Donde, $\Delta\theta$ es el intervalo de tiempo entre dos observables y ς cuenta los elementos del conjunto.

2.6.1. Teorema de Takens's

Se seleccionan los componentes del vector construido con un tiempo de retardo T . [2][3][8][18]

$$|X(t)\rangle = \begin{bmatrix} X(d_E T \Delta\theta) \\ \vdots \\ X(2T \Delta\theta) \\ X(T \Delta\theta) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Este es un espacio euclidiano con dimensión d_E . si $d_E \geq 2m + 1$ se puede hacer una inserción de un colector con dimensión m en el espacio, cumpliendo que a a medida que aumenta el número de retrasos, el movimiento en el espacio retrasado se volverá cada vez más predecible.[18]

2.6.2. Ajuste global para observar la dinámica de mercados

Consiste en determinar coeficientes por el método de mínimos cuadrados. Dado un observable $X(t + \tau \Delta\theta)$ se determina un predictor $\mathcal{P}(|X(t)\rangle)$. [2][3][8][18]

$$X(t + \tau \Delta\theta) \cong \mathcal{P}(|X(t)\rangle) \quad (18)$$

Donde el parámetro τ es un entero en el tiempo de predicción τ . Se toman dos sistemas dinámicos para este proyecto, primero siguiendo se toman los precios de las acciones de Dow Jones, junto con los precios de las criptomonedas y el segundo se toma un modelo de Lorenz como modelo de referencia. Para estos modelos dinámicos se toman dos predictores, el primero para el antes y el después de los periodos, el cuál, esta en un espacio euclidiano de tres dimensiones. Dado el desarrollo computacional brindado por el manuscrito [17], usando método de mínimos cuadrados, se tiene: [2][3][8][18]

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{LP}(|X(t)\rangle) = & a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \\ & + a_4 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \cos(X_1) \right) + a_5 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \cos(X_2) \right) \\ & + a_6 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \cos(X_3) \right) + a_7 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \sin(X_1) \right) \\ & + a_8 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \sin(X_2) \right) + a_9 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \sin(X_3) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Y el segundo se denomina período 'Alto' el cual requiere vectores en 4 dimensiones, entonces siguiendo se tiene

que el predictor es: [2][3][8][18]

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_H(|X(t)\rangle) = & a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 \\ & + a_5 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \cos(X_1) \right) + a_6 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \cos(X_2) \right) \\ & + a_7 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \cos(X_3) \right) + a_8 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \cos(X_4) \right) \\ & + a_9 \ln \left(1 + \frac{1}{10} \sin(X_1) \right) + a_{10} \ln \left(1 + \frac{1}{10} \sin(X_2) \right) \\ & + a_{11} \ln \left(1 + \frac{1}{10} \sin(X_3) \right) + a_{12} \ln \left(1 + \frac{1}{10} \sin(X_4) \right) \end{aligned} \quad (20)$$

2.6.3. Magnitudes estadísticas

Se calcula entonces la desviación para el mapa obtenido por el ajuste global [26][2][3][8]

$$\sigma_\tau = \left\{ \frac{\sum_{r=1}^N (X_{1r} - \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i (|X_{r-\tau}\rangle))^2}{N-1} \right\}^{1/2} \quad (21)$$

Donde N es el número de vectores construidos en el ajuste global y el término $a_i \alpha_i (|X_{r-\tau}\rangle)$ establece que solo los modelos lineales en los parámetros de ajuste ($a_i \alpha_i$) participan en el método, para entender cómo calcular la anterior desviación a profundidad, se trabaja en [26][2][3][8][18].

3. Estado del arte

La Criptomoneda Bitcoin nació en el 2008 por una entidad conocida como Satoshi Nakamoto. En 2009 se decidió hacer de su actividad pública, Hasta el día de hoy ha tenido un crecimiento significativo como se puede evidenciar en diferentes bases de datos.[19]

Multinacionales como MicroStrategy, Time Inc. Dis Network, Virgin y Reddit 'permiten el pago con Bitcoin, además de empresas medianas y pequeñas aceptan Bitcoin ofreciendo servicios de todo tipo. El Bitcoin es una

moneda descentralizada sujeta a la legislación de cada país, pudiendo ser legal o no. Por lo general, cuando no existe un marco regulador, se asume su alegalidad en función del principio de legalidad del Derecho. [1]

La hipótesis del mercado eficiente tiene implicaciones de gran alcance para el comercio financiero y la estabilidad del mercado. Las criptomonedas son eficientes desde el punto de vista de la información y ha sido objeto de intensa investigación. [22]

El Bitcoin apareció como una moneda, pero se trata para algunos autores de un producto especulativo debido a la volatilidad que esta tiene. En este proyecto se pretende observar relaciones con el patrón oro y determinar si las magnitudes estadísticas son similares. [23][24]

El patrón oro dejó de funcionar en 1971 cuando Richard Nixon tomó la decisión de no seguirlo utilizando. [15] Esto generó un impacto en la economía mundial brindando muchos beneficios a Estados Unidos, debido a que las guerras dejaron bastante afectadas a diferentes potencias mundiales como Alemania que llegó a tener una hiperinflación. Desde entonces la economía ha tomado un rumbo diferente, dando la libertad a cada país de generar sus propios recursos. [15]. Una vez tomada la decisión de Nixon, el intercambio de oro a *USD* no era posible ocasionando que muchas personas alrededor del mundo vendieran su oro, debido a que la economía en general estaba dolarizada y todos los productos y servicios se miden en dólares.

El Bitcoin genera una posibilidad de intercambio descentralizado, sin la necesidad de contar con las regulaciones de un país específico como lo es Estados Unidos, aunque dado esto se pueden generar consecuencias, sobre todo en países de orden escaso como los países de tercer mundo.

Los mercados financieros son considerados sistemas com-

plejos, por tanto se puede llegar a una caracterización de la dinámica usando modelos físicos como por ejemplo la teoría del caos. [4][5][6][7] Se puede obtener información relevante una vez caracterizada la dinámica, usando esto se puede comparar las dos dinámicas tanto para el patrón oro, como para el Bitcoin para tres periodos diferentes.

4. Problema

Actualmente el mercado de las criptomonedas está siendo muy exitoso, más específicamente el Bitcoin, permitiendo diferentes perspectivas como la descentralización de las monedas, entre otras cosas. El Oro ha sido muy relevante a lo largo de la historia para las economías. Se plantea observar las posibles relaciones entre los dos precios bitcoin-oro comparando su precio en dólares. Así determinar si su comportamiento dinámico es similar o no, ya que los dos son tipos de minería uno completamente virtual de datos y otro manual, como se ha venido observando.

En 1971 se observa como el oro cae considerablemente debido a una decisión política por parte de Nixon, pero a lo largo de los años ha vuelto a levantarse, también se observa comportamientos de bajada por las guerras y en general decisiones que ha venido tomando la humanidad a lo largo de los años. En cuanto al bitcoin al ser una moneda completamente descentralizada se tiene que la confianza de las personas determina su comportamiento, además de otros muchos factores, como los sistemas blockchain basados en la regla de la mayoría.

Al obtener relaciones de comportamiento dinámico se pueden brindar diferentes perspectivas como objeto de estudio que permitan luego predecir futuros comportamientos dadas ciertas condiciones iniciales, característica fundamental de los sistemas caóticos.

5. Motivación y justificación

Las criptomonedas han tenido un gran auge en los últimos años donde se ha evidenciado un crecimiento significativo en su valor. Muchas personas especulan acerca del destino que puedan llegar a tener, pero se ha evidenciado que cada vez son mayormente adoptadas, como por ejemplo este año, El Salvador decidió utilizar el bitcoin como moneda oficial.

Algo interesante por observar es que en países de tercer mundo este modelo basado en Blockchain puede tener falencias debido a los negocios ilícitos que generalmente se manejan en dichos países, generando la incógnita de ¿Qué tan viable es tener un sistema económico totalmente descentralizado?, pues no hay legislación que pueda controlarlo, generando problemáticas.

Al haber una regularización y se pueda llegar al caso de que exista el patrón Bitcoin, se debe tener en cuenta también el consumo energético que conlleva generar un Bitcoin, por ende es necesario también pensar en energías renovables para que el modelo funcione. Se evidenció el pasado 19 de mayo de 2021 la caída de un 30 % sobre su valor del Bitcoin debido a que muchas personas alrededor del mundo se quejan del impacto ambiental que se está generando.

Dicho eso y dadas todas las condiciones se puede modelar la dinámica que tiene el Bitcoin porque hace parte de los mercados financieros y por ende es un sistema complejo, que puede ser estudiado. Como perspectiva se espera que una vez se estudie su comportamiento dado los mapas de Taylor, se pueden pensar en modelos de predicción y determinar si realmente es posible un sistema económico basado en criptomonedas para así ver posibles panoramas de inversión y estudio.

6. Objetivo General

Comparar el comportamiento del precio del oro y el Bitcoin, ajustando curvas obtenidas de series de

tiempo por medio de mapas de Taylor observando el grado y los diferentes coeficientes obtenidos, describiendo también como se obtienen analíticamente, para luego usando métodos computacionales obtener dichos mapas en tres periodos distintos, Inicio (Low), intermedio (High) y reciente (Post) observando la calidad del ajuste por medio de la hipótesis nula, el R^2 y la desviación global de la serie de tiempo para cada uno de los periodos.

7. Objetivos Específicos

1. Construir bases de datos utilizando las plataformas Yahoo Financial e Investing, para con un script utilizando Python y la librería Pandas obtener las series de tiempo del Bitcoin dividiéndolo en tres periodos. Inicios, etapa intermedia y épocas recientes. En el caso del oro comprar la base de datos de Macrotrends [21] y por medio de un script en Python extraer los datos del precio real del oro desde 1915.
2. Mostrar cómo analíticamente se obtienen los coeficientes asociados a los mapas de Taylor también denominados predictores (19) y (20) [11] usados para la predicción no lineal de series de tiempo caóticas y describir las propiedades obtenidas de dicho desarrollo. [2][3][8][18].
3. Utilizar el método computacional brindado por P. Alves, L. Duarte y L. da Mota [2][3][8][18] y construir un programa en Maple17 utilizando LinMapTS y TimeS [2][3][8] para construir de manera computacional los mapas que ajusten el comportamiento del Bitcoin y del Oro.
4. Calcular la desviación y el R^2 (21) para cada uno de los mapas obtenidos computacionalmente, tanto para el Bitcoin, como para el oro, utilizando la rutina LinMapTS en Maple17. [2][3][8]

5. Por medio de tablas organizadas, analizar los mapas obtenidos con su correspondiente grado y coeficientes para concluir las relaciones de las series de tiempo para el patrón oro y el Bitcoin, además de la hipótesis nula, R^2 y la desviación global de la serie de tiempo para observar si el ajuste es aceptado o no.

8. Metodología

1. Utilizando el lenguaje de programación Python, en específico la librería pandas se extraerán y se organizarán las diferentes tablas de datos para los tres periodos requeridos para el Bitcoin y el oro. [2][3][8]
2. Se partirá de lo expuesto en el marco teórico para con el teorema de Takens para obtener una expresión que determine cada valor de los denominados predictores o mapas de Taylor (19) y (20) y así observar propiedades. [2][3][8]
3. Utilizando las rutinas creadas por P.Alves, L.Duarte y L. da Mota en el lenguaje de programación Maple, se encontrarán los predictores para cada una de las series de tiempo. [2][3][8]
4. Utilizando las rutinas creadas por P.Alves, L.Duarte y L. da Mota en el lenguaje de programación Maple, en específico la rutina LinMapTS se determinará la desviación y el R^2 obtenido del ajuste de las series de tiempo. [2][3][8]
5. Se analizará cuidadosamente la información organizada en las tablas y se encontraran posibles relaciones entre el patrón oro y la criptomoneda Bitcoin, no obstante, cabe agregar que también se puede concluir la no relación en absoluto entre el comportamiento de los mercados financieros.

9. Resultados esperados

Se espera por medio del desarrollo analítico del algoritmo desarrollado por P.R.L. Alves en [11], tener mayor entendimiento de las propiedades de los mapas de Taylor obtenidos para el ajuste de curvas para cada una de las series de tiempo. Se obtendrán los mapas de Taylor de las series de tiempo para los tres periodos escogidos *Low*, *High* y *Post* tanto para el patrón oro como para el Bitcoin. Primero se observarán los valores de los coeficientes de los mapas obtenidos para el patrón oro y el Bitcoin y luego la calidad del ajuste por medio de la hipótesis nula y el R^2 . Se espera obtener una similitud en los coeficientes de los mapas para cada uno de los periodos para el patrón oro y para el Bitcoin.

También se desarrollarán habilidades de programación, tanto en el manejo de datos, como en la programación procedimental, en los lenguajes Python, específicamente la librería InvestPy y Pandas y también Maple17, lenguaje utilizado por los autores del artículo principal escogido para este proyecto. [2][3][8]

10. Cronograma

Se ajustará el cronograma dado los objetivos específicos.

| # de objetivo específico | # de semanas |
|--------------------------|--------------|
| 1 | 1/2 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1/2 |
| 5 | 1 |

Tabla 2: Cronograma para el desarrollo de proyecto.

11. Recursos Disponibles

- Bases de datos Investing, Yahoo Financial, Google Financial

- Computador personal para el procesamiento de datos con características
(GPU:Nvidia 980ti, CPU:AMD Ryzen 3800XT 8-core Processor, RAM:32 GB)
- Recurso computacional Maple
- Recurso computacional Python
- Recurso computacional Mathematica
- Base de datos para el oro en Macrotrends.net
- Curso Introducción a la econofísica 2021-1
- Bibliografía expuesta en este proyecto

| | |
|-------------|----------------------------------|
| Low | <i>Enero 1915 → Marzo 1973</i> |
| High | <i>Marzo 1973 → Marzo 1998</i> |
| Post | <i>Marzo 1998 → Octubre 2020</i> |

Tabla 4: Fechas de para la contrucción de series de tiempo para cada uno de los periodos escogidos para el Oro.

Los datos fueron escogidos a conveniencia donde se observan gráficamente relaciones en las series de tiempo. Se observa también que la evolución del Bitcoin es mucho más rápida, por lo cual se toma el doble de datos que en el oro, esto es debido a que la serie de tiempo para el oro esta dada en meses y para el Bitcoin está dada por días. Esto se escogió ya que es fácil observar que el Bitcoin ha tenido una evolución y crecimiento muy rápido desde su nacimiento e 2010, mientras que para el oro se toma una serie de tiempo desde un año ya muy lejano, el cual es 1915.

12. Desarrollo de Objetivos Específicos

12.1. Desarrollo del objetivo específico número 1

Para la obtención de la base de datos del Bitcoin se realizó un pequeño script usando Python descrito en el anexo A de este documento. Se obtuvieron un total de 2560 datos comprendiendo un periodo desde 24/04/2013 hasta 02/10/2020. Se dividieron los periodos como se muestra en la tabla (3)

| | |
|-------------|-------------------------|
| Low | 24/04/2013 → 21/02/2017 |
| High | 21/02/2017 → 23/03/2019 |
| Post | 23/03/2019 → 02/10/2020 |

Tabla 3: Fechas de para la contrucción de series de tiempo para cada uno de los periodos escogidos para el Bitcoin.

Para la obtención de la base de datos del Oro se compró primeramente la base de datos en macrotrends.net [21] obteniendo un total de 1280 datos, luego con un Script en Python se organizaron y se extrajeron los datos reales de la base, los cuales están ajustados de acuerdo con la inflación. Los periodos escogidos se muestran en la tabla (4)

12.2. Desarrollo del objetivo específico número 2

El análisis de la predictibilidad de las series de tiempo es de interés en varios campos del conocimiento como la astronomía, física, medicina, meteorología, entre otros. Para este proyecto se emplea la reconstrucción del espacio de fase como una técnica para extraer información sobre la dinámica de un sistema que no se puede conocer en aquellos casos de interés. Para el método, se construye un espacio euclidiano con datos almacenados en series de tiempo. Primeramente se supone que es posible adquirir conocimientos sobre el sistema y la evolución temporal de una sola variable, como un sistema dinámico de un observable tal y como se describe en el marco teórico presentado en este documento. Los valores del observable están ordenados en el tiempo t como un conjunto, que constituye una serie de tiempo X_{TS} que contiene cantidades escalares S separadas por intervalo Δt . [17]

$$X_{TS} = \{X(0\Delta t), X(1\Delta t), X(2\Delta t), \dots, X((S-1)\Delta t)\}$$

Takens, probó que los pares formados por el m dimensional sistema dinámico φ en una variedad M con posición $x \in M$ y el observable y pertenece a un espacio \mathbb{R}^{2m+1} donde el mapa $\phi_{(\varphi,y)} : \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ es definido como: [17]

$$\phi_{(\varphi,y)}(x) = (y(x), y(\varphi(x)), \dots, y(\varphi^{2m}(x)))$$

En esta técnica se reconstruye un N dimensional espacio de fase con retrasos de tiempo T . Para ello se utiliza una elección de datos $X((N-k)T\Delta t)$ con $k \in \mathbb{N}$ disponibles en la serie de tiempo para poder generar el vector: [17]

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} X((N-1)T\Delta t) \\ \vdots \\ X(T\Delta t) \\ X(0) \end{bmatrix} \quad (22)$$

El modelo consiste, para la evolución temporal de la señal o dato obtenido entre dos instantes a través de una preseleccionada función $F(\vec{x}(t))$ llamada predictor. Se toma primeramente el ejemplo de un predictor de grado 2, el cual es usado para este proyecto. La función en una reconstrucción espacio con coordenadas (X_1, X_2, X_3) : [17]

$$F(X_1, X_2, X_3) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_1^2 + a_5 X_1 X_2 + a_6 X_1 X_3 + a_7 X_2^2 + a_8 X_2 X_3 + a_9 X_3^2$$

Los coeficientes son determinados por una función de costo $f(\vec{a})$. Para el ajuste de datos, los parámetros que se deben ajustar son las componentes del vector \vec{a} . Para ello se definen la función de error $\rho(\vec{a})$ y la función de costo $f(\vec{a})$: [17]

$$\rho(\vec{a}) = x_{1(j+1)} - F(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{Nj})$$

$$f(\vec{a}) = \sum_{j=1}^{P-1} (\rho_j(\vec{a}))^2$$

Se toma la función $F(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{Nj})$ como $\sum_{i=1}^l a_i \varphi_i(\vec{x}_j)$, entonces la función de costo es: [17]

$$f(\vec{a}) = \sum_{j=1}^{P-1} \left(x_{1(j+1)} - \sum_{i=1}^l a_i \varphi_i(\vec{x}_j) \right)^2$$

En la tabla (12) del marco teórico se exhibe la relación de las funciones φ_i con el predictor. Se toma por ejemplo el primer parámetro de ajuste, donde se cumple que la derivada parcial con respecto a a_1 es cero: [17]

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial a_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial a_1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{j=1}^{P-1} \left[\left(x_{1(j+1)} - \sum_{i=1}^l a_i \varphi_i(\vec{x}_j) \right) (\varphi_1(\vec{x}_j)) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{P-1} \left(x_{1(j+1)} - \sum_{i=1}^l a_i \varphi_i(\vec{x}_j) \right) \varphi_1(\vec{x}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{P-1} x_{1(j+1)} \varphi_1(\vec{x}_j) - \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{i=1}^l a_i \varphi_i(\vec{x}_j) \varphi_1(\vec{x}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{P-1} x_{1(j+1)} \varphi_1(\vec{x}_j) - \sum_{j=1}^{P-1} a_i \sum_{i=1}^l \varphi_i(\vec{x}_j) \varphi_1(\vec{x}_j) \\ &= \sum_{i=1}^l a_i \left(\sum_{j=1}^{P-1} \varphi_i(\vec{x}_j) \varphi_1(\vec{x}_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{P-1} x_{1(j+1)} \varphi_1(\vec{x}_j) \end{aligned}$$

Tomando de nuevo a función $F(X_1, X_2, X_3)$ correspondiente al predictor de grado 2, se tiene que el anterior desarrollo puede escribirse como: [17]

$$\begin{aligned} &a_1 \sum_{j=1}^{P-1} X_{1j} X_{1j} + a_2 \sum_{j=1}^{P-1} X_{2j} X_{1j} + a_3 \sum_{j=1}^{P-1} X_{3j} X_{1j} + \\ &a_4 \sum_{j=1}^{P-1} X_{1j}^2 X_{1j} + a_5 \sum_{j=1}^{P-1} X_{1j} X_{2j} X_{1j} + \\ &a_6 \sum_{j=1}^{P-1} X_{1j} X_{3j} X_{1j} + a_7 \sum_{j=1}^{P-1} X_{2j}^2 X_{1j} + \\ &a_8 \sum_{j=1}^{P-1} X_{2j} X_{3j} X_{1j} + a_9 \sum_{j=1}^{P-1} X_{3j}^2 X_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{P-1} X_{1(j+1)} X_{1j} \end{aligned}$$

La solución del sistema formado por las l ecuaciones lineales, determina los parámetros $(a_1, a_2, \dots, a_l) = \vec{a}$. [17]

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^l a_i \left(\sum_{j=1}^{P-1} \varphi_i(\vec{x}_j) \varphi_1(\vec{x}_j) \right) = \sum_{j=1}^{P-1} x_{1(j+1)} \varphi_1(\vec{x}_j) \\ \sum_{i=1}^l a_i \left(\sum_{j=1}^{P-1} \varphi_i(\vec{x}_j) \varphi_2(\vec{x}_j) \right) = \sum_{j=1}^{P-1} x_{1(j+1)} \varphi_2(\vec{x}_j) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^l a_i \left(\sum_{j=1}^{P-1} \varphi_i(\vec{x}_j) \varphi_l(\vec{x}_j) \right) = \sum_{j=1}^{P-1} x_{1(j+1)} \varphi_l(\vec{x}_j) \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones mostrado anteriormente puede ser escrito matricialmente de la forma: [17]

$$\alpha_{pq} = \sum_{j=1}^{P-1} \varphi_p(\vec{x}_j) \varphi_q(\vec{x}_j)$$

$$\beta_p = \sum_{j=1}^{P-1} x_{1(j+1)} \varphi_p(\vec{x}_j)$$

Luego, como se muestra en el marco teórico de este proyecto, el sistema asume la forma deseada: [17]

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{l1} & \alpha_{l2} & \cdots & \alpha_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_l \end{bmatrix} \quad (23)$$

Como se puede observar, luego del desarrollo analítico completo se llega a la forma matricial deseada para la obtención de los coeficientes $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_l)$, los cuales son los calculados por las rutinas LinMapTS explicada en el anexo B de este documento, para encontrar el mapeo de Taylor que ajusta las curvas obtenidas para el Bitcoin y el oro. [17]

Para determinar el error del ajuste realizado utilizando el método descrito analíticamente anteriormente, se emplea la medida de error comúnmente conocida como raíz cuadrada media. Dada la ecuación 21 presentada en el marco teórico el mejor estimador para error σ esta basado en la varianza de la muestra y se calcula de la forma: [17]

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{P-1} \left(x_{1(j+1)} - \sum_{i=1}^l a_i \varphi_i(\vec{x}_j) \right)^2}{(P-1) - 1}}$$

12.3. Desarrollo del objetivo específico número 3

Para el desarrollo de los objetivos específicos (3) y (4) se utilizaron los métodos computacionales descritos en los anexos de este documento, utilizando el programa Maple17 el cuál es el utilizado por los artículos de partida para este proyecto. [11][3]. Una vez se muestra como los coeficientes se obtienen analíticamente, se procede a utilizar el código ya descrito en los anexos, y se muestran los correspondientes resultados por medio de tablas para cada uno de los coeficientes. Para el periodo Low, cabe recalcar que se encontró el mapa de Taylor para grado debido a que se utilizó una mayor cantidad de datos, a diferencia de los periodos High y Post como se exhibe en el desarrollo del objetivo específico número 1. Esto se debe a que el autor de [11] recomiendan aumentar el grado del mapeo según convenga cuando aumente la cantidad de datos. Dado a que se encontraron relaciones gráficas al escoger de los datos se decide tomar la cantidad de datos por conveniencia para la generación de las series de tiempo.

12.3.1. Gráficas y resultados correspondientes al ajuste obtenido para el periodo Low

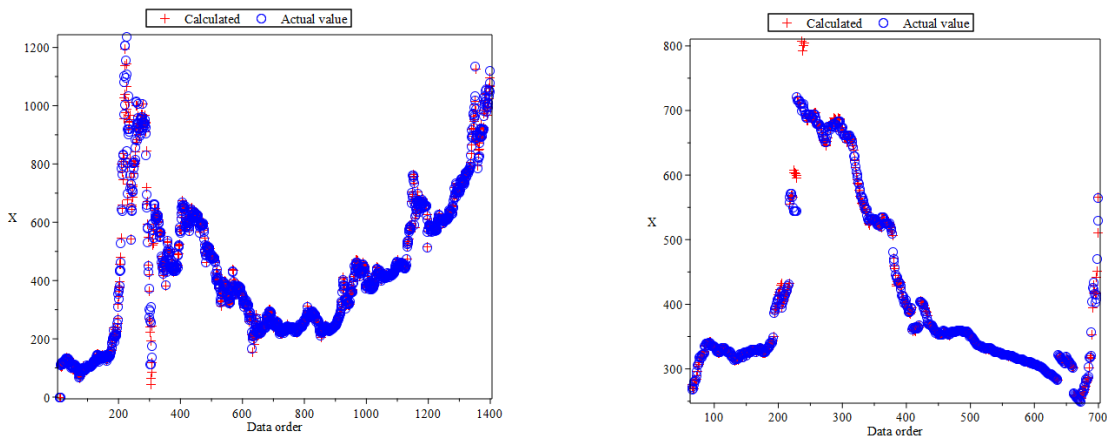


Figura 1: Mapas obtenidos computacionalmente para el periodo Low. A la izquierda se encuentra la gráfica para el Bitcoin observando un buen ajuste de los datos reales con respecto de los datos mapeados, se ve una tendencia primero de subida luego de bajada y luego nuevamente de subida, el mapeo realizado se presenta en la tabla (5). Al lado derecho se encuentra la gráfica correspondiente al Oro observando también una tendencia de subida, bajada y por último subida, aunque se observa que la tendencia de bajada es mucho más pronunciada que la del bitcoin. A pesar de notar diferencias a grandes rasgos se encuentran también similitudes de comportamiento que se determinan con los coeficientes obtenidos en al tabla (5), donde cabe recalcar que el mapa de Taylor encontrado fue de grado 2.

El mapa de Taylor para esta serie de tiempo es de orden 2.

$$F(X_1, X_2, X_3) = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_1^2 + a_5X_1X_2 + a_6X_1X_3 + a_7X_2^2 + a_8X_2X_3 + a_9X_3^2$$

| Coeficientes | a ₁ | a ₂ | a ₃ | a ₄ | a ₅ | a ₆ | a ₇ | a ₈ | a ₉ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Bitcoin | 1.07106 | 0.28794 | -0.35980 | -0.000059 | -0.000098 | 0.000109 | -0.000509 | 0.00065 | -0.00009 |
| Gold | 0.84016 | -0.04243 | 0.19801 | -0.00096 | 0.00330 | -0.00076 | 0.00014 | -0.00353 | 0.00182 |

Tabla 5: Tabla correspondiente a los coeficientes obtenidos para el mapa de grado dos correspondiente al periodo Low tanto para el Bitcoin, como para el Oro. Se observa que hay discrepancia en los mapeos, centrándose en el coeficiente a_1 que es el coeficiente que se utiliza en la derivada parcial del desarrollo analítico del objetivo específico (2), se tiene que de igual manera hay una discrepancia entre los valores.

12.3.2. Gráficas y resultados correspondientes al ajuste obtenido para el periodo High

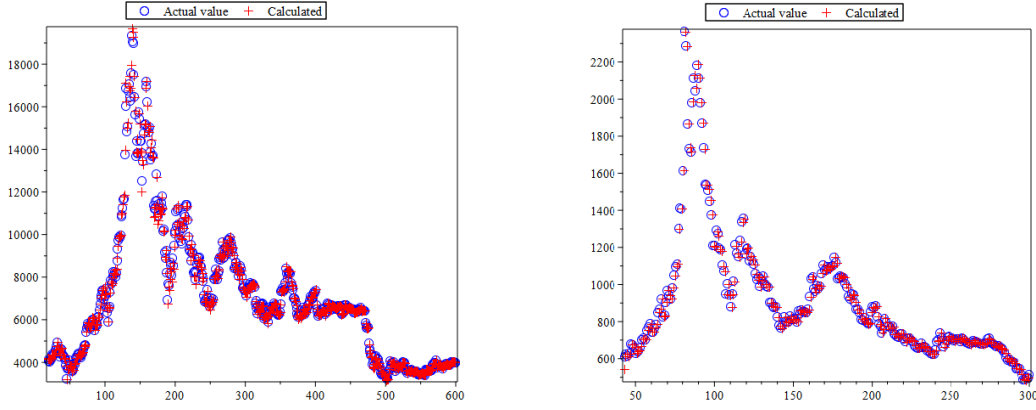


Figura 2: Mapas obtenidos computacionalmente para el periodo High. A la izquierda se encuentra la gráfica para el Bitcoin observando un buen ajuste de los datos reales con respecto de los datos mapeados, se ve una tendencia primero de subida luego de bajada, el mapeo realizado se presenta en la tabla (6). Al lado derecho se encuentra la gráfica correspondiente al Oro observando también una tendencia de subida y luego de bajada. Para este periodo en específico se encuentran a grandes rasgos unas similitudes de comportamiento muy notorias que se determinan con los coeficientes obtenidos en la tabla (6), donde cabe recalcar que el mapa de Taylor encontrado fue de grado 1. Para este periodo se observa que la tendencia es muy similar.

El mapa de Taylor para esta serie de tiempo es de orden 1.

$$F(X_1, X_2, X_3) = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$$

| Coeficientes | a ₁ | a ₂ | a ₃ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Bitcoin | 1.01765 | 0.07041 | -0.09177 |
| Gold | 0.99509 | 0.01687 | -0.01425 |

Tabla 6: Tabla correspondiente a los coeficientes obtenidos para el mapa de grado uno correspondiente al periodo High tanto para el Bitcoin, como para el Oro. Se observa que para este caso hay unas similitudes muy relevantes en los coeficientes. Se observa primero que hay una consistencia en los signos de los diferentes coeficientes y centrándose en el coeficiente a_1 se tienen valores muy cercanos entre sí.

12.3.3. Gráficas y resultados correspondientes al ajuste obtenido para el periodo Post

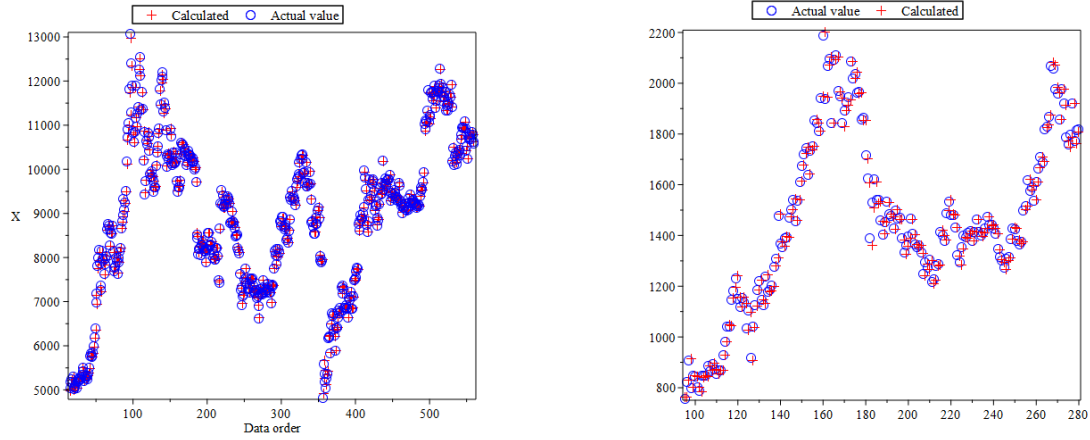


Figura 3: Mapas obtenidos computacionalmente para el periodo Post. A la izquierda se encuentra la gráfica para el Bitcoin observando un buen ajuste de los datos reales con respecto de los datos mapeados, se ve una tendencia primero de subida luego de bajada y de nuevo de subida, el mapeo realizado se presenta en la tabla (??). Al lado derecho se encuentra la gráfica correspondiente al Oro observando también una tendencia de subida, bajada y luego de subida nuevamente. Para este periodo en específico se encuentran similitudes de comportamiento que se determinan con los coeficientes obtenidos en la tabla (7), donde cabe recalcar que el mapa de Taylor encontrado fue de grado 1.

El mapa de Taylor para esta serie de tiempo es de orden 1.

$$F(X_1, X_2, X_3) = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$$

| Coeficientes | a_1 | a_2 | a_3 |
|----------------|---------|----------|---------|
| Bitcoin | 0.97625 | 0.00475 | 0.01892 |
| Gold | 1.03812 | -0.04423 | 0.00479 |

Tabla 7: Tabla correspondiente a los coeficientes obtenidos para el mapa de grado uno correspondiente al periodo Post tanto para el Bitcoin, como para el Oro. Se observa que para todos los coeficientes no hay una buena similitud en signos, fijándose más específicamente en el coeficiente a_2 . Para el coeficiente a_3 se tiene una discrepancia significativa, pero para el coeficiente a_1 se tiene una buena similitud pudiendo ser este una buena comparación de comportamiento, aunque no tanto como lo fue para el periodo High.

12.3.4. Gráficas y resultados correspondientes al ajuste obtenido para la totalidad de las series de tiempo

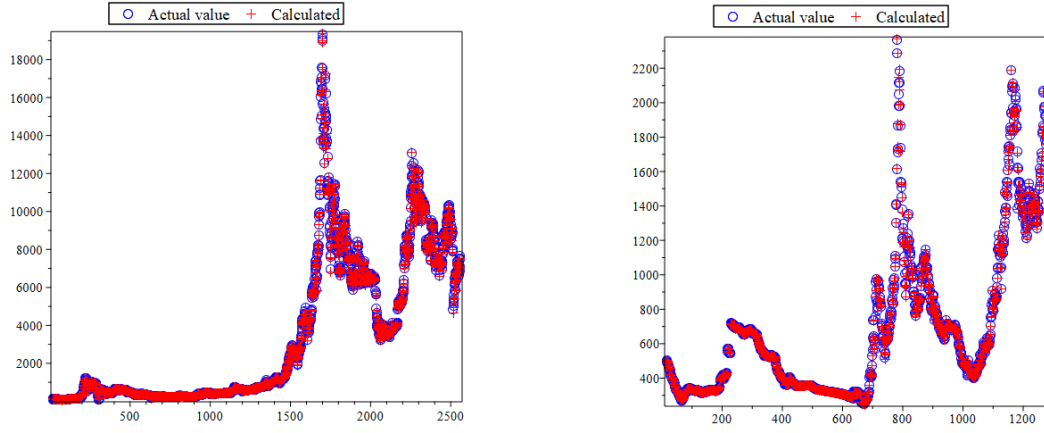


Figura 4: Mapas obtenidos computacionalmente para la totalidad de las series de tiempo tanto para el Bitcoin, como para el Oro. A la izquierda se encuentra la gráfica para el Bitcoin observando un buen ajuste de los datos reales con respecto de los datos mapeados. Al lado derecho se encuentra la gráfica correspondiente al Oro. Para la totalidad de las series de tiempo se encuentran similitudes de comportamiento pero también diferencias, que se determinan con los coeficientes obtenidos en la tabla (7), donde cabe recalcar que el mapa de Taylor encontrado fue de grado 1.

El mapa de Taylor para esta serie de tiempo es de orden 1.

$$F(X_1, X_2, X_3) = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$$

| Coeficientes | a_1 | a_2 | a_3 |
|----------------|---------|----------|----------|
| Bitcoin | 1.03442 | -0.05311 | 0.01466 |
| Gold | 1.0017 | 0.02793 | -0.03432 |

Tabla 8: Tabla correspondiente a los coeficientes obtenidos para el mapa de grado uno correspondiente a la totalidad de las series tiempo tanto para el Bitcoin, como para el Oro. Para la serie de tiempo completa se tiene que los coeficientes a_2 y a_3 no coinciden en signos, pero el coeficiente importante a_1 determina una buena similitud entre los comportamientos de las series, pudiendo decir que si se puede comparar comportamientos.

12.4. Desarrollo del objetivo específico número 4

| Desviación global por periodo | Low σ_1 | High σ_2 | Post σ_3 |
|-------------------------------|----------------|-----------------|-----------------|
| Bitcoin | 23.3356 | 120.8281 | 165.4276 |
| Gold | 10.0538 | 22.2302 | 58.8367 |

Tabla 9: Tabla correspondiente a la desviación obtenida para cada uno de los periodos de tiempo tanto para el bitcoin como para el oro observándose que para el bitcoin hay una mayor desviación, esto puede ser debido primero a que se tomó una mayor cantidad de datos debido a que la velocidad de evolución es mucho mayor a la del oro y por otra parte también relacionada se puede pensar que el bitcoin es mucho más volátil que la serie temporal del oro, aunque para concluir esto se debe hacer un tratamiento estadístico mucho más profundo. También se observa que a medida que aumenta el periodo aumenta también la desviación, esto se debe a que la tendencia es de crecimiento, entonces aumenta debido a que los precios son mucho más elevados en el periodo Post, que el periodo low.

| Desviación global periodo completo | σ_1 |
|------------------------------------|------------|
| Bitcoin | 255.7017 |
| Gold | 57.8183 |

Tabla 10: Tabla correspondiente a la totalidad de las series de tiempo para el Bitcoin y para el Oro, donde se observa que la desviación es más grande para el Bitcoin. Al igual que para los periodos se puede deber a la volatilidad de la serie del Bitcoin aunque no se puede concluir esto sin hacer un tratamiento más profundo. también puede deberse a que el crecimiento del Bitcoin, es decir el precio es mucho mayor que el del Oro.

| R^2 por periodo | Low | High | Post |
|-------------------|---------|---------|---------|
| Bitcoin | 0.98362 | 0.98146 | 0.95902 |
| Gold | 0.98834 | 0.95045 | 0.94616 |

Tabla 11: Tabla correspondiente al R^2 por periodo, donde se observa que para cada uno de los mapas el ajuste es bueno, aunque cabe recalcar que fue mucho mejor para el Bitcoin que para el oro, esto pudiendo ser por la cantidad de datos brindada. También se observa que a medida que aumenta el periodo el R^2 es menor, esto pudiendo ser debido a que los precios a medida que aumentan, aumenta su varianza como lo observamos en la tabla (9).

| R^2 periodo completo | Series de tiempo completas |
|------------------------|----------------------------|
| Bitcoin | 0.99556 |
| Gold | 0.98850 |

Tabla 12: Tabla correspondiente al R^2 para la totalidad de las series de tiempo, donde se observa que hay un mejor ajuste que dividiendo la serie de tiempo, aunque se tiene al igual que por periodos hay un mayor ajuste para el Bitcoin que para el oro, siendo esto por la cantidad de datos y también porque el precio del Bitcoin es mucho más elevado que el oro, teniendo un mayor desviación.

13. Análisis de resultados y desarrollo del objetivo número 5

Con respecto al desarrollo del objetivo específico número 1 se tiene que los periodos de tiempo escogidos Low, High y Post fueron escogidos para presentar a detalle el mapeo realizó a cada una de las series de tiempo. Para el Bitcoin se escogió por días, siendo esto por la cantidad de datos requerida y además porque se observa fácilmente que la evolución del Bitcoin ha sido muy rápida con respecto a la del Oro. Para el desarrollo de este proyecto se tomó una cantidad doble de datos para el Bitcoin, pero cabe la pena recalcar que se puede realizar una mejor obtención de las bases de datos mucho más específicas donde se obtenga una mayor cantidad de datos por ejemplo usándolo por horas y así determinar cual es la relación real de crecimiento del Bitcoin con respecto del oro, ya que acá solo se está tomando el doble de datos. Para la obtención de datos del oro se tomó en cuenta que es difícil encontrar datos antes de 1971. Esto debido a la decisión tomada por Nixon en dicho año. La base de datos encontrada se encontraba de periodos mes a mes brindando un total de 1280 datos, siendo este el parámetro fundamental para la obtención de datos de este proyecto.

En cuanto al desarrollo del objetivo específico número 2 se tiene que para encontrar la forma deseada del sistema es necesario reconstruir la teoría desde la definición de la función de error y costo. Luego usando la función denominada predictor para 3 observables, la cual se construye con las propiedades del teorema de Takens construyendo el espacio de fase para construir un vector $\vec{x}(t)$ correspondiente a los observables. Se llega a la representación más simple de toda la teoría la cual corresponde a una forma matricial, determinada a partir de la derivada parcial con respecto al coeficiente a_1 , la cual, es usada por los métodos computacionales para determinar los coeficientes.

Para el desarrollo de los objetivos específicos 3 y 4, se obtienen varias relaciones, de acuerdo con el análisis realizado en el objetivo número 2 se tiene que el coeficiente más relevante de comparación es el a_1 , brindando resultados buenos. Para el periodo Low es donde se tiene mayor discrepancia en los resultados siento para el coeficiente a_1 para el bitcoin 1,07106 y para el oro 0,84016 teniendo una diferencia de 0,2309, para el periodo High es donde se obtiene una similitud asombrosa siendo el coeficiente a_1 para el bitcoin 1,01765 y para el oro 0,99509 teniendo una discrepancia tan solo 0,02256, además de la correspondencia e los signos en los otros dos coeficientes encontrados, para el periodo post se tiene que el coeficiente a_1 es 0,97625 para el bitcoin y para el oro 1,03812 teniendo una diferencia de 0,06187. Para el periodo donde se toma la serie de tiempo completa se tiene una buena relación teniendo un coeficiente a_1 para el bitcoin 1,03442 y para el oro 1,0017 con una diferencia de 0,03272, observando una buena similitud de comportamiento.

En cuanto a la desviación se obtiene que para el bitcoin hay una mayor desviación, esto puede ser debido primero a que se tomó una mayor cantidad de datos debido a que la velocidad de evolución es mucho mayor a la del oro y por otra parte también relacionada se puede pensar que el bitcoin es mucho más volátil que la serie temporal del oro, aunque para concluir esto se debe hacer un tratamiento estadístico mucho más profundo. También se observa que a medida que aumenta el periodo aumenta también la desviación, esto se debe a que la tendencia es de crecimiento, entonces aumenta debido a que los precios son mucho más elevados en el periodo Post, que el periodo low. La desviación para la serie de tiempo completase tiene que al igual que para los periodos se puede deber a la volatilidad de la serie del Bitcoin aunque no se puede concluir esto sin hacer un tratamiento más profundo. también puede deberse a que el crecimiento el Bitcoin, es decir el precio es mucho mayor que el del Oro.

para el R^2 lo más relevante en los periodos es que se observa que a medida que aumenta el periodo el R^2 es menor, esto pudiendo ser debido a que los precios a medida que aumentan, aumenta su varianza como lo observamos en la tabla (9) y para la serie de tiempo completa se tiene que hay un mayor ajuste para el Bitcoin que para el oro, siendo esto por la cantidad de datos y también porque el precio del Bitcoin es mucho más elevado que el oro, teniendo un mayor desviación.

14. Conclusiones, perspectivas y desarrollo del objetivo número 5

para la obtención de datos se tiene que se tiene que las limitaciones estuvieron en la obtención de una ase de datos para el oro, sobre todo porque es bastante difícil obtenerlos antes de 1971. esto es ya que justo en ese año Nixon prohíbe el intercambio Oro - Dolar obligando al mundo prácticamente a olvidar el patrón oro. Se tiene también que a mayor cantidad de daos el modelo funciona mejor, no obstante las magnitudes estadísticas expuestas en este proyecto no estuvieron muy en desacuerdo con los modelos presentados. El desarrollo analítico nos permite observar como funciona el método computacionalmente para determinar los coeficientes asociados a los mapas de Taylor obtenidos.

Cuando se analiza cada periodo de tiempo por separado, Low, High y Post se observa que si hay similitudes que recalcar en el comportamiento de cada serie de tiempo, sobre todo observando el coeficiente a_1 el cual es el que se toma como referencia para la construcción de la forma matricial. Cabe recalcar que observando los datos el bitcoin ha tenido un crecimiento mucho más rápido que el oro, aunque su comportamiento dinámico ha sido similar, brindando temas de interés de porque esto sucede y se pueden generar diferentes preguntas acerca de la diferencia de la minería tradicional y la minería de datos, ya que los modelos de trabajo son diferentes, quizá la minería de datos al ser computacional es por ello que

avanza más rápido pero con una dinámica similar a la del oro.

Otra perspectiva que se encuentra al desarrollo de este proyecto es generar modelos de predicción tomando factores como por ejemplo que el oro en el mundo es abundante hoy en día, permitiendo una estabilidad, mientras que las criptomonedas están en un punto crítico donde si no se encuentran energías renovables su precio seguirá decayendo, siendo esto a diferencia de lo que pasó con el oro en 1971 decisiones ambientales y no políticas.

Cabe recalcar que los artículos de partida tienen una patente BR 51 2017 001226-1 registrada en Brasil, donde se encuentra una rutina llamada DynCharTS, la cual caracteriza completamente la dinámica caótica de las series de tiempo, brindando mucha más información del sistema, contribuyendo así a posibles modelos de predicción, ya que al ser un sistema caótico permite la entrada de muchas condiciones iniciales y aún así poder determinar el comportamiento de la dinámica.

15. Anexos

A. Script Utilizando Python utilizando la librería InvestPy para la extracción de datos del Bitcoin

Para la importación de librerías

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import pandas as pd
import investpy
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.colors as mcolors
```

Extracción de datos para la fecha escogida como se describe en el desarrollo del objetivo número 1. Para este punto del código de utiliza la librería InvestPy.

```
total_data.Bitcoin = investpy.get_crypto_historical_data
(crypto='bitcoin', from_date='24/04/2013', to_date='02/10/2020')
data_Low = investpy.get_crypto_historical_data(crypto='bitcoin',
from_date='24/04/2013', to_date='21/02/2017')
data_High = investpy.get_crypto_historical_data(crypto='bitcoin',
from_date='01/08/2017', to_date='23/03/2019')
data_Post = investpy.get_crypto_historical_data(crypto='bitcoin',
from_date='23/03/2019', to_date='02/10/2020')
```

Construcción de los vectores con los precios de cierre para cada día para el caso del Bitcoin utilizando la librería Pandas.

```
data_total = total_data.Bitcoin['Close']
data_close_Low = data_Low['Close']
data_close_High = data_High['Close']
data_close_Post = data_Post['Close']
```

Crear los respectivos arrays utilizando la librería Numpy para así luego poder guardar los archivos en .txt.

```
total_data_array = data_total.to_numpy()

data_array_Low = data_close_Low.to_numpy()
data_array_High = data_close_High.to_numpy()
data_array_Post = data_close_Post.to_numpy()
```

Se construye un dataframe usando Pandas para luego obtener una gráfica que permita comparar los comportamientos de los datos a grandes rasgos.

```
df = pd.DataFrame(total_data_array)
df1 = pd.DataFrame(data_array_Low)
df2 = pd.DataFrame(data_array_High)
df3 = pd.DataFrame(data_array_Post)
```

Para guardar los datos en un archivo de texto (.txt)

```
np.savetxt('Total.Bitcoin.txt', total_data_array, fmt = '%g')
```

```
np.savetxt('Low.Bitcoin.txt', data_array_Low, fmt = '%g')
np.savetxt('High.Bitcoin.txt', data_array_High, fmt = '%g')
np.savetxt('Post.Bitcoin.txt', data_array_Post, fmt = '%g')
```

Las siguientes gráficas fueron realizadas con el objetivo de observar a grandes rasgos el comportamiento de los datos de las series de tiempo para los tres periodos Low, High, Post y por último la serie de tiempo completa, todo esto usando la librería matplotlib.

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df, 'kx', label = "Data")
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
plt.grid()
```

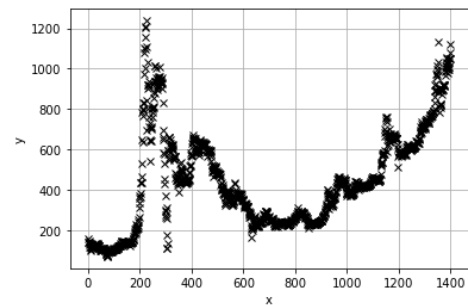


Figura 5: Gráfica a grandes rasgos para el periodo Low del Bitcoin.

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df1, 'kx', label = "Data")
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
plt.grid()
```

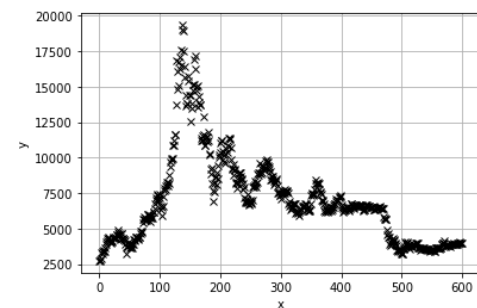


Figura 6: Gráfica a grandes rasgos para el periodo High del Bitcoin.

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df2,'kx', label = "Data")
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
plt.grid()
```

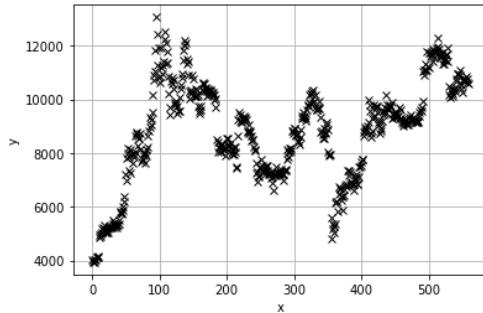


Figura 7: Gráfica a grandes rasgos para el periodo Post del Bitcoin.

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df3,'kx', label = "Data")
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
plt.grid()
```

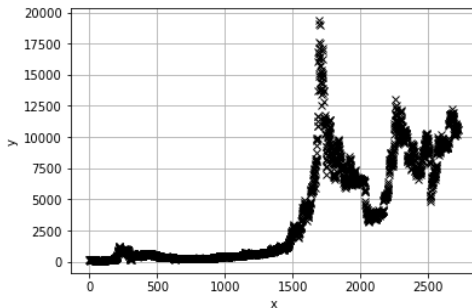


Figura 8: Gráfica a grandes rasgos para el periodo total del Bitcoin.

B. Script Utilizando Python usado para la base de datos comprada en macrotrends.net para la extracción de datos para en oro

Se importan las librerías correspondientes, para este caso se agrega el lector de CSV debido a que macrotrends.net

ofrece los datos en este formato.

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import pandas as pd
import investpy
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.colors as mcolors
import csv, operator
```

Se lee el archivo CSV.

```
datagold = pd.read_csv('GOLDDATA.csv')
```

Se organizan los datos por periodo por medio de Slides.

```
data_close = datagold['real']
LowGold = data_close[0:700]
HighGold = data_close[700:1000]
PostGold = data_close[1000:1280]
```

Crear los respectivos arrays utilizando la librería Numpy para así luego poder guardar los archivos en .txt.

```
total_array_gold = data_close.to_numpy()
data_array_Low = LowGold.to_numpy()
data_array_High = HighGold.to_numpy()
data_array_Post = PostGold.to_numpy()
```

Para guardar los datos en un archivo de texto (.txt)

```
np.savetxt('Total_Gold.txt', total_array_gold, fmt = '%g')
np.savetxt('Low_Gold.txt', data_array_Low, fmt = '%g')
np.savetxt('High_Gold.txt', data_array_High, fmt = '%g')
np.savetxt('Post_Gold.txt', data_array_Post, fmt = '%g')
```

Se construye un dataframe usando Pandas para luego obtener una gráfica que permita comparar los compor-

tamientos de los datos a grandes rasgos.

```
df = pd.DataFrame(total_array_gold)
df1 = pd.DataFrame(data_array_Low)
df2 = pd.DataFrame(data_array_High)
df3 = pd.DataFrame(data_array_Post)
```

Las siguientes gráficas fueron realizadas con el objetivo

de observar a grandes rasgos el comportamiento de los datos de las series de tiempo para los tres periodos Low, High, Post y por último la serie de tiempo completa, todo esto usando la librería matplotlib.

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df,'kx', label = "Data")
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
plt.grid()
```

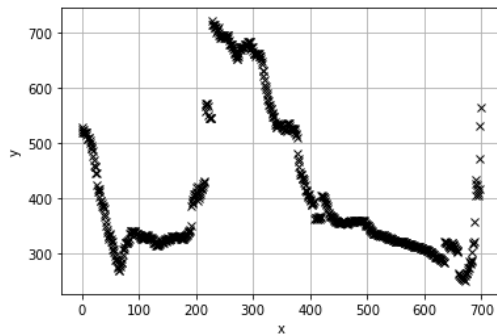


Figura 9: Gráfica a grandes rasgos para el periodo Low del Oro.

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df1,'kx', label = "Data")
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
plt.grid()
```

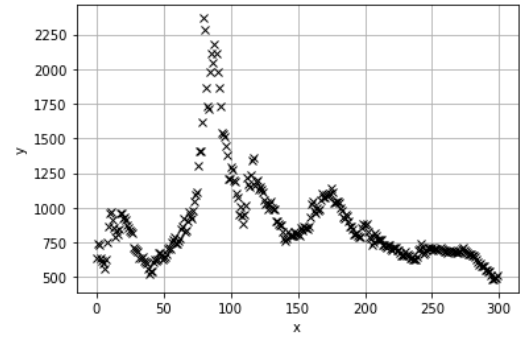


Figura 10: Gráfica a grandes rasgos para el periodo High del Oro.

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df2,'kx', label = "Data")
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
plt.grid()
```

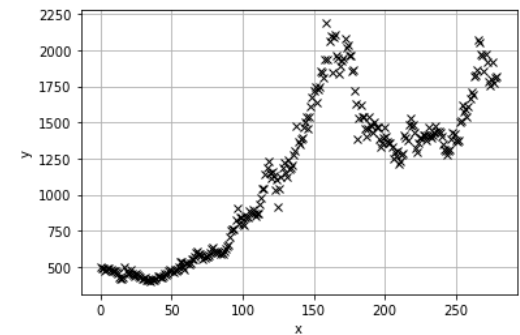


Figura 11: Gráfica a grandes rasgos para el periodo Post del Oro.

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df3,'kx', label = "Data")
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
plt.grid()
```

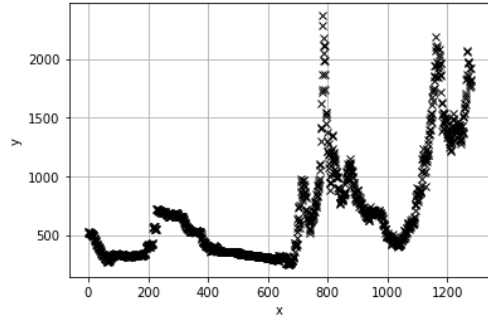


Figura 12: Gráfica a grandes rasgos para el periodo total del Oro.

C. Código para la obtención de los mapas de taylor usando Maple17 para el Bitcoin

Se importa la librería 'LinMapTS.txt' creada por los autores del artículo principal escogido para este proyecto [11].

```
restart;
read 'LinMapTS.txt';
```

Construcción de los vectores para cada uno de los datasets, siendo V_1 para Low, V_2 para High y V_3 para Post.

```
V1 := VecTS(DataFile = 'Low.Bitcoin.txt');
V2 := VecTS(DataFile = 'High.Bitcoin.txt');
V3 := VecTS(DataFile = 'Post.Bitcoin.txt');
```

Se definen la cantidad de datos por periodo siendo $final1$ para Low, $final2$ para High y $final3$ para Post.

```
final1 := 1400;
final2 := 600;
final3 := 560;
```

Construcción y gráfica de los mapas de Taylor para cada serie de tiempo, siendo Map[1] para Low, Map[2] para High y Map [3] para Post. La rutina LinGfiTS calcula directamente la hipótesis nula, parámetros estadísticos

y también el R^2 .

```
Map[1] := LinGfiTS(V1, final1, Degree = 2, Level = 77, Analysis
= 1)
Map[2] := LinGfiTS(V2, final2, Degree = 1, Level = 32, Analysis
= 1)
Map[3] := LinGfiTS(V3, final3, Degree = 1, Level = 30, Analysis
= 1);
```

Calculo de la desviación para cada serie de tiempo siguiendo el desarrollo analítico realizado en el objeto específico número (2). sigma[1] corresponde al periodo Low, sigma[2] corresponde al periodo High y sigma[3] al periodo Post.

```
sigma[1] := ConfiTS(Map[1], V1, final1)
sigma[2] := ConfiTS(Map[2], V2, final2)
sigma[3] := ConfiTS(Map[3], V3, final3)
```

D. Código para la obtención de los mapas de taylor usando Maple17 para el Oro

Se importa la librería 'LinMapTS.txt' creada por los autores del artículo principal escogido para este proyecto [11].

```
restart;
read 'LinMapTS.txt';
```

Construcción de los vectores para cada uno de los datasets, siendo V_1 para Low, V_2 para High y V_3 para Post.

```
V1 := VecTS(DataFile = 'Low.Gold.txt');
V2 := VecTS(DataFile = 'High.Gold.txt');
V3 := VecTS(DataFile = 'Post.Gold.txt');
```

Se definen la cantidad de datos por periodo siendo $final1$ para Low, $final2$ para High y $final3$ para Post.

```
final1 := 700;
final2 := 300;
final3 := 280;
```

Construcción y gráfica de los mapas de Taylor para cada serie de tiempo, siendo Map[1] para Low, Map[2] para High y Map [3] para Post. La rutina LinGifTS calcula directamente la hipótesis nula, parámetros estadísticos y también el R^2 .

```
Map[1] := LinGfiTS(V1, final1, Degree = 2, Level = 77, Analysis
= 1)
Map[2] := LinGfiTS(V2, final2, Degree = 1, Level = 32, Analysis
= 1)
Map[3] := LinGfiTS(V3, final3, Degree = 1, Level = 30, Analysis
= 1);
```

Calculo de la desviación para cada serie de tiempo siguiendo el desarrollo analítico realizado en el objeto específico número (2). sigma[1] corresponde al periodo Low, sigma[2] corresponde al periodo High y sigma[3] al periodo Post.

```
sigma[1] := ConfiTS(Map[1], V1, final1)
sigma[2] := ConfiTS(Map[2], V2, final2)
sigma[3] := ConfiTS(Map[3], V3, final3)
```

E. Código para la obtención de los mapas de taylor usando Maple17 para las series de tiempo completas tanto para el bitcoin como para el oro

Se importa la librería 'LinMapTS.txt' creada por los autores del artículo principal escogido para este proyecto [11].

```
restart;
read 'LinMapTS.txt';
```

Construcción de los vectores para cada uno de los datasets, siendo V_1 para el bitcoin y V_2 para el oro.

```
V1 := VecTS(DataFile = 'Total_Bitcoin.txt');
V2 := VecTS(DataFile = 'Total_Gold.txt');
```

Se definen la cantidad de datos por periodo siendo *final1* para el bitcoin y *final2* para el oro..

```
final1 := 2560;
final2 := 1280;
```

Construcción y gráfica de los mapas de Taylor para cada serie de tiempo, siendo Map[1] para el bitcoin y Map[2] para el oro. La rutina LinGifTS calcula directamente la hipótesis nula, parámetros estadísticos y también el R^2 .

```
Map[1] := LinGfiTS(V1, final1, Degree = 2, Level = 140, Analysis
= 1)
Map[2] := LinGfiTS(V2, final2, Degree = 1, Level = 70, Analysis
= 1)
```

Calculo de la desviación para cada serie de tiempo siguiendo el desarrollo analítico realizado en el objeto específico número (2). sigma[1] corresponde a la serie de tiempo completa del Bitcoin y sigma[2] corresponde a la serie de tiempo completa del Oro.

```
sigma[1] := ConfiTS(Map[1], V1, final1)
sigma[2] := ConfiTS(Map[2], V2, final2)
```

Referencias

- [1] Chohan, Usman W., Assessing the Differences in Bitcoin Other Cryptocurrency Legality Across National Jurisdictions (September 20, 2017). Availa-

- ble at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3042248> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3042248>
- [2] P.R.L. Alves (2020) Chaos in historical prices and volatilities with five-dimensional euclidean spaces <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109692>
- [3] Markus Vogl, Peter Rötzel (2020) Chaoticity Versus Stochasticity in Financial Markets: Are Daily SP 500 Return Dynamics Chaotic? <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3802753>
- [4] "The Definitive Glossary of Higher Mathematical Jargon — Chaos". Math Vault. 2019-08-01. Retrieved 2019-11-24
- [5] chaos theory — Definition Facts". Encyclopedia Britannica. Retrieved 2019-11-24.
- [6] Hasselblatt, Boris; Anatole Katok (2003). A First Course in Dynamics: With a Panorama of Recent Developments. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-58750-1.
- [7] Streliaoff, Christopher; et., al. (2006). "Medium-Term Prediction of Chaos". Phys. Rev. Lett. 96 (4): 044101. Bibcode:2006PhRvL..96d4101S. doi:10.1103/PhysRevLett.96.044101. PMID 16486826
- [8] P.R.L.Alves, L.G.S.Duarte, L.A.C.P.da Mota (2018) Detecting chaos and predicting in Dow Jones Index <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.03.034>
- [9] V.I. Arnold, Ordinary Differential Equations, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1973.
- [10] G.W. Bluman, S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, in: Applied Mathematical Sciences, vol. 81, Springer-Verlag, 1989.
- [11] P.R.L. Alves, (2020) Dynamic characteristic of Bitcoin cryptocurrency in the reconstruction scheme, Chaos, Solitons Fractals, Volume 134, <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109692>.
- [12] Andy Greenberg (20 April 2011). "Crypto Currency". Forbes. Archived from the original on 31 August 2014. Retrieved 8 August 2014.
- [13] C. Quimbay (2021) Notas de Clase, Capítulo (3), Distribuciones de dinero desde la Econofísica, Curso de Introducción a la Econofísica 2021-1
- [14] C. Quimbay (2021) Notas de Clase, Capítulo (4), Distribuciones de dinero desde la Econofísica, Curso de Introducción a la Econofísica 2021-1
- [15] William O. Scroggs. "What Is Left of the Gold Standard?". foreignaffairs.com. Retrieved 28 January 2015.
- [16] H. Carli, L.G.S. Duarte, L.A.C.P. da Mota (2013) A Maple package for improved global mapping forecast <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.05.011>
- [17] P.R.L. Alves, L.G.S. Duarte, L.A.C.P. da Mota (2016) Manuscript, Improvement in global forecast for chaotic time series. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.05.011>
- [18] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. In: Y L Rand D, editor. Lecture Notes in Mathematics, 898. Berlin, Heidelberg, Warwick: Springer; 1980. p. 366–81 . <https://link.springer.com/chapter/10.1007>
- [19] Investpy library (2021) <https://pypi.org/project/investpy/>
- [20] Girón Castro, L. (2020). BITCOIN. Realidad Empresarial, (10), 14-18. <https://doi.org/10.5377/reuca.v0i10.10572>
- [21] Gold Prices - 100 Year Historical Chart <https://www.macrotrends.net/1333/historical-gold-prices-100-year-chart>
- [22] Sigaki, H.Y.D., Perc, M. Ribeiro, H.V. Clustering patterns in efficiency and the coming-of-age of the cryptocurrency market. Sci Rep 9, 1440 (2019). <https://doi.org/10.1038/s41598-018-37773-3>

- [23] WenFang, Shaolin Tian, Jun Wang (2018) Multiscale fluctuations and complexity synchronization of Bitcoin in China and US markets <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.08.051>
- [24] Böhme, Rainer, Nicolas Christin, Benjamin Edelman, and Tyler Moore. 2015. "Bitcoin: Economics, Technology, and Governance." *Journal of Economic Perspectives*, 29 (2): 213-38.
- [25] Bergé, Pierre; Pomeau, Yves; Vidal, Christian (1984). *Order within Chaos: Towards a Deterministic Approach to Turbulence*. New York: John Wiley Sons. ISBN 978-0-471-84967-4
- [26] P.R.L. Alves, L.G.S. Duarte, L.A.C.P. da Mota (2017) Alternative predictors in chaotic time series <http://dx.doi.org/10.17632/pnhy9zymrp.1>
- [27] Royston P. Approximating the Shapiro–Wilk W-test for non-normality. *Stat Comput* 1992;2(3):117–19. doi:10.1007/BF01891203
- [28] Alves P, Duarte L, Mota Ld. A new characterization of chaos from a time series. *Chaos, Solitons and Fractals* 2017;104:323–6. doi:10.1016/j.chaos.2017.08.033. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096007791730365X>