Universidad Industrial de Santander **Lane-Emden**
Profesor: Héctor Hernández **Matemática Aplicada II**
2018- II **Fecha: 16 de diciembre de 2018**

Nombre: Andrés Felipe Jerez Ariza **Código:** 2188136

1. Introducción

La ecuación de Lane-Emden es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden que permite describir la estructura de una esfera de gas politrópico en equilibrio bajo su propia gravitación. Esta ecuación es importante en astrofísica, debido que, los valores del índice politrópico $n \in [0,5]$ se aproxima a una precisión razonable de las estructuras de una variedad de modelos estelares realistas. Sin embargo, las soluciones analíticas a la ecuación de Lane-Emden en forma cerrada solo son posibles para los valores del índice politrópico de $n = \{0, 1, 5\}$.
Específicamente, para otros valores de n solo se encuentran disponibles en la literatura soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden. En estudios analíticos de los problemas de estructura estelar, estabilidad estelar y oscilaciones estelares esto representa una desventaja debido a la utilización práctica de esta ecuación.
Adicionalmente, en 1977 se desarrollaron soluciones para la ecuación de Lane-Emden a través de las series de potencia que se originan en el centro. No obstante, estas soluciones de la serie de potencia deben ser convergentes no solo en la proximidad del centro, sino también en una parte sustancial de la esfera. De modo que, en 1980 se buscaron soluciones de series de potencia convergente para la ecuación de Lane-Emden, que permiten representar analíticamente las soluciones numéricas de Lane-Emden en todo el interior de un modelo politrópico.
Matemáticamente, la ecuación de Lane-Emden se describe como

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + [y(x)]^n = 0, x > 0. \tag{1}$$

2. Antecedentes

Originalmente el problema fue propuesto por el astrófisico Robert Emden a principios de la década de 1900, y consistía en encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + y(x) = 0, \tag{2}$$

bajo condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.
Eq. (2) se puede reescribir como

$$xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0. \tag{3}$$

Ahora, se aplica la transforamda de Laplace para resolver (3)

$$\mathcal{L}\left\{xy''\right\} + 2\mathcal{L}\left\{y'\right\} + \mathcal{L}\left\{xy\right\} = 0 \tag{4}$$

Propiedades de la transformada de Laplace

$$x^n f(x), n = \{1, 2, 3, ...\} \to (-1)^n F^{(n)}(s) \tag{5}$$

$$f^{(n)}(x) \to s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0) \tag{6}$$

Aquí, se aplican las propiedades de la transformada de Laplace a cada término de Eq. (3)

$$\mathcal{L}\left\{xy''\right\} = -2sY(s) - s^2 Y'(s) + 1 \tag{7}$$

$$2\mathcal{L}\left\{y'\right\} = 2sY(s) - 2 \tag{8}$$

$$\mathcal{L}\left\{xy\right\} = -Y'(s) \tag{9}$$

Posterioremente, se sustituyen los resultados obtenidos al aplicar las respectivas transformadas de Laplace en la ecuación diferencial Eq. (3)

$$-2sY(s) - s^2 Y'(s) + 1 + 2sY(s) - 2 - Y'(s) = 0 \tag{10}$$

Se simplifica esta expresión como

$$Y'(s)(s^2 + 1) + 1 = 0 \to Y'(s) = \frac{-1}{s^2 + 1} \tag{11}$$

Ahora, se aplica la transforamda inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y'(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s^2 + 1}\right\} \to y_1(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{12}$$

Por otra parte, en astrofísica, el potencial gravitacional de una esfera auto-gravitante con simetría esférica en equilibrio hidrostático y descrita por una ecuación de estado del tipo polítropo se representa por la ecuación

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + [y(x)]^n = 0. \tag{13}$$

Esta ecuación tiene soluciones analíticas para $n \in \{0, 1, 5\}$. Note que la solución analítica para $n = 1$ se encuentra dada por Eq. (12). De modo que, se consideran los casos $n = 0$ y $n = 5$.
En el caso $n = 0$, Eq. (13) se describe como

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + 1 = 0. \tag{14}$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$xy''(x) + 2y'(x) + x = 0 \tag{15}$$

Ahora, se aplica la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{xy''\right\} + 2\mathcal{L}\left\{y'\right\} + \mathcal{L}\left\{x\right\} = 0 \tag{16}$$

Con base en el análisis desarrollado anteriormente, la transformación de Laplace de esta ecuación se puede expresar como

$$-2sY(s) - s^2 Y'(s) + 1 + 2sY(s) - 2 + \frac{1}{s^2} = 0 \tag{17}$$

Se simplifica esta expresión como

$$-s^2 Y'(s) - 1 + \frac{1}{s^2} = 0 \rightarrow Y'(s) = \frac{1}{s^4} - \frac{1}{s^2} \tag{18}$$

Ahora, se aplica la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y'(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4} - \frac{1}{s^2}\right\} \rightarrow y_0(x) = 1 - \frac{x^2}{6} \tag{19}$$

En el caso $n = 5$, Eq. (13) se describe como

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + [y(x)]^5 = 0. \tag{20}$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$xy''(x) + 2y'(x) + xy^5 = 0 \tag{21}$$

Aquí, la solución de Eq. (21) se encuentra dada como

$$y_5(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}} \tag{22}$$

Cabe señalar que la ecuación de Lane-Emden presenta dos dificultades. En primer lugar, es una ecuación diferencial con coeficientes variables, y en segundo lugar, la ecuación tiene un punto singlular en $x = 0$. Por lo tanto, resolviendo por series Eq. (13), su solución se expresa como

$$y(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}, \tag{23}$$

donde

$$a_k + 1 = \frac{1}{k(k+1)(2k+3)} \sum_{i=1}^{k} (in + i - k)(k - i + 1)(3 + 2k - 2i)a_i a_{k-i+1} \tag{24}$$

A partir de esta representación en series de potencia alrededor de $x = 0$, la solución para $y_n(x)$ se describe como

$$y_n(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{n}{120}x^4 - \frac{n(8n-5)}{15120}x^6 + \frac{n(122n^2 - 183n + 70)}{3265920}x^8 + \cdots \tag{25}$$

3. Modelos estelares: Estrellas politrópicas

Los polítropos pueden proporcionar soluciones simples para describir la estructura interna de una estella. En Fig. 1 se ilustra las soluciones analíticas y numéricas de la ecuación de Lan-Emden con índices $n \in \{0, 1, 5\}$, se puede observar que el ajuste experimental presenta algunos errores a medida que aumenta la variable x. Además, en Fig. 2 se presenta solo las soluciones numéricas de la ecuación de Lan-Emden con índices $n \in \{1.5, 2, 3, 4\}$, debido que, en estos índices politrópicos no se cuenta con una solución analítica.

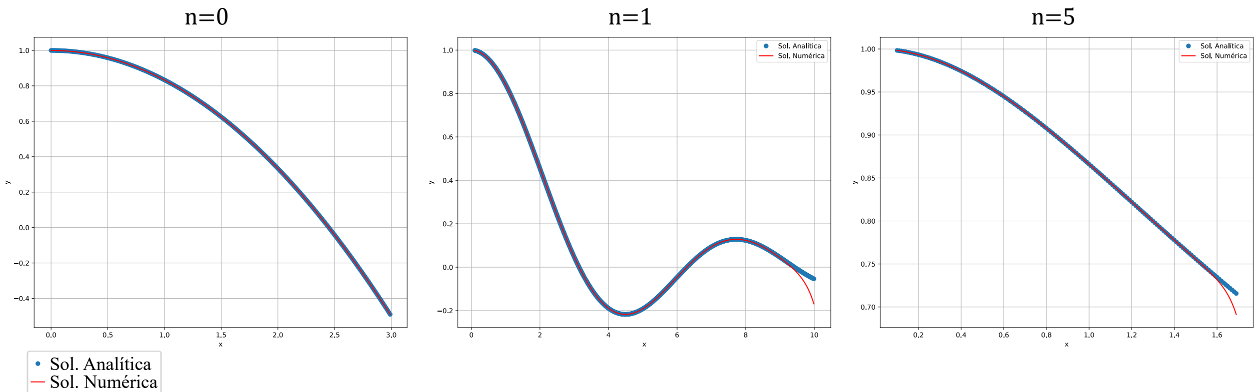

Figura 1: Representación gráfica de las soluciones analíticas y numéricas de la ecuación de Lane-Emden con índices $n \in \{0, 1, 5\}$

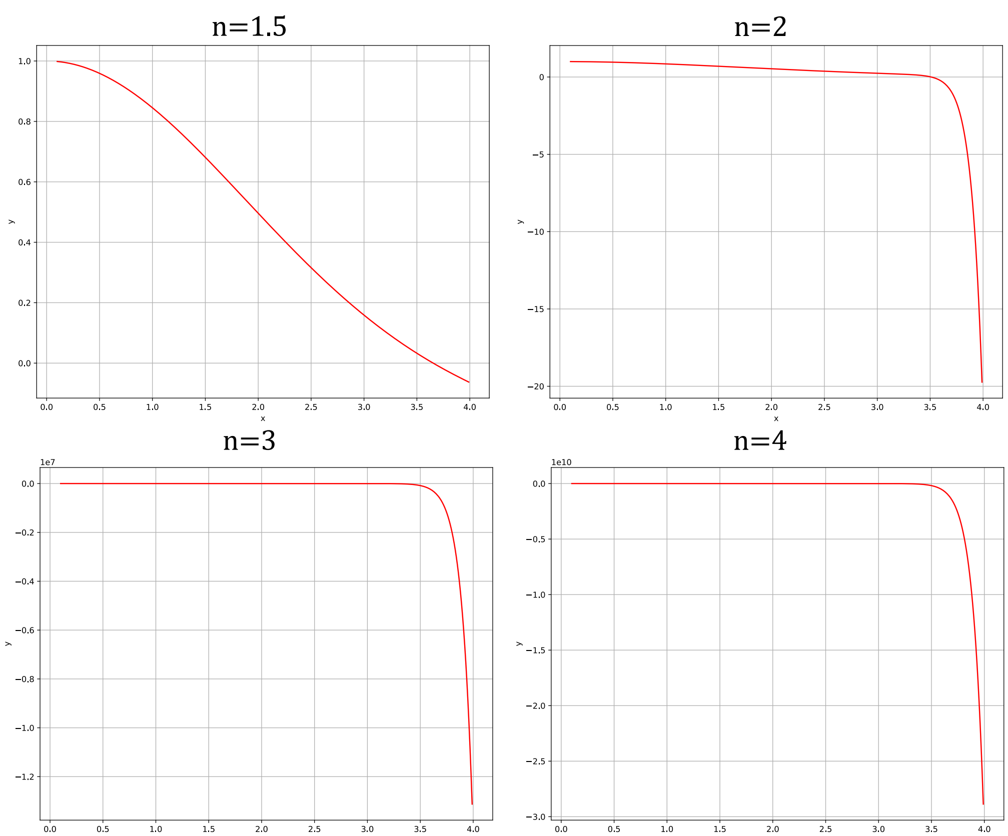

Figura 2: Representación gráfica de las soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden con índices $n \in \{1.5, 2, 3, 4\}$