IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels II (OML2)

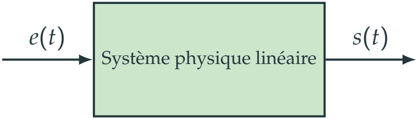
Transformée de Laplace

Andrés F. López-Lopera
Département de Mathématiques pour l'Ingénieur (DMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Motivation

· La transformée de Laplace est un outil permettant le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel

Lien avec l'automatique :



· Si le système physique est donné par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, en utilisant la transformée de Laplace :

$$S(p) = H(p)E(p), \quad \text{avec } H \text{ une } \textit{fonction de transfert}$$

· La transformée de Laplace a pour objectif de simplifier l'étude de la réaction d'un système à l'application d'un signal d'entrée e

Thèmes

1. Fonctions remarquables
2. Transformée de Laplace
3. Propriétés
4. Transformées de Laplace inverse

Fonctions remarquables

Fonction causale

· Une *fonction causale* (ou *signaux causaux*) est une fonction temporelle définie sur l'ensemble des réels, mais bornée à gauche :

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

· Les fonctions causales les plus utilisées dans le domaine technique sont les fonctions définies sur l'ensemble des réels positifs ou nuls

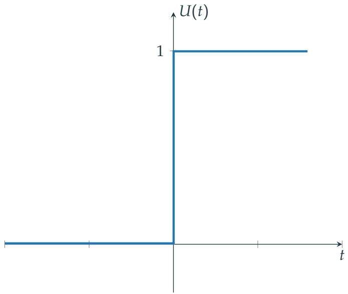
Conditions initiales

· Les conditions initiales d'une fonction causale $f(x) \in \mathbb{R}^+$ sont les valeurs déterminées de cette fonction et de ses dérivées successives à l'instant $t = 0$

Échelon unitaire

· La fonction *échelon unitaire*, communément appelée *échelon de Heaviside* $U(t)$ ainsi défini :

$$U(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Remarque. Une fonction causale f peut être récrite en utilisant l'échelon unitaire :

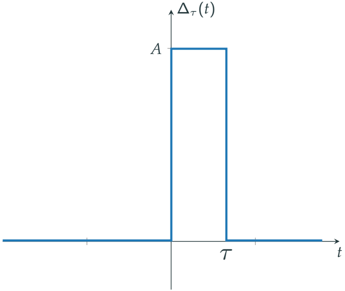
$$f(t) = f(t)U(t)$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Impulsion

· L'*impulsion* d'amplitude A et de durée τ est définie par :

$$\Delta_\tau(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Remarque. L'impulsion Δ_τ peut être récrite en utilisant l'échelon unitaire :

$$\Delta_\tau(t) = A[U(t) - U(t-\tau)]$$

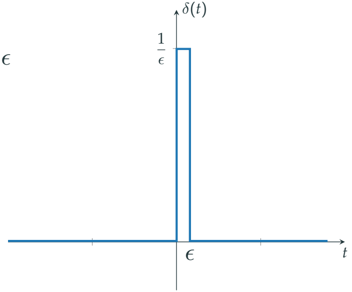
CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Impulsion unitaire de Dirac

· L'*impulsion unitaire de Dirac* d'amplitude $A = \infty$, de durée nulle $\tau = 0$ et d'aire 1, est notée par :

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \Delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \delta(t)dt = 1$$



Remarque. L'impulsion de Dirac δ peut être récrite en utilisant l'échelon unitaire :

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[U(t) - U(t-\epsilon)]$$

· Une autre interprétation de l'impulsion Dirac est obtenue en définissant une *mesure de Dirac* dans un ensemble $\mathcal{A}$:

$$\delta(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases},$$

d'où on obtient que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

Exemple.

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-pt}dt = e^{-p\times 0} = 1$$

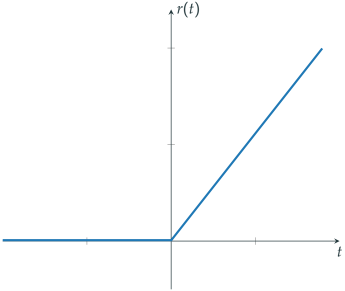
Remarque. Avec cette définition, on note que la fonction δ est la dérivée de l'échelon unitaire :

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}U(t)$$

Fonction rampe

· La fonction *rampe* de pente a est définie par :

$$r(t) = \begin{cases} at, & t \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



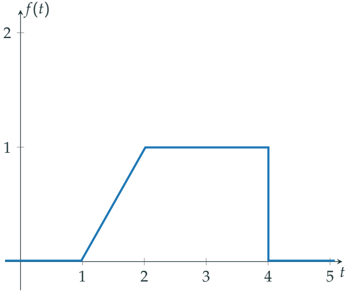
Remarque. L'impulsion Δ_τ peut être récrite en utilisant l'échelon unitaire :

$$r(t) = atU(t)$$

Note. La rampe de pente 1 est une primitive de l'échelon unitaire :

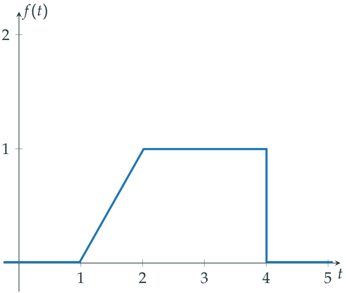
$$r_{a=1}(t) = \int_0^t U(\tau)d\tau$$

Exemple. Exprimer $f(t)$ en termes des fonctions remarquables précédentes.

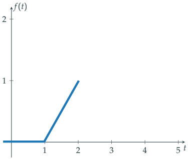


Fonctions remarquables

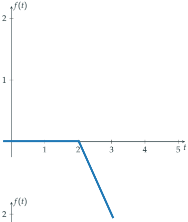
Solution.



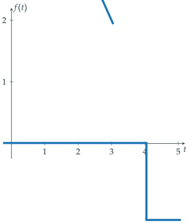
$$
\begin{aligned}
f(t) &= g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) \\
&= r(t-1) - r(t-2) - u(t-4)
\end{aligned}
$$



$g_1(t) = r(t-1)$



$g_2(t) = -r(t-2)$



$g_3(t) = -U(t-4)$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Transformée de Laplace

· Soit une fonction causale $f(t)$

· On appelle *transformée de Laplace* de $f(t)$, la fonction de la variable complexe p (ou s pour les anglo-saxons) ainsi définie :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

· Cette transformation permet d'associer à toute fonction temporelle sa transformée de Laplace

Exercices. Calculer la transformée de Laplace de :

1. $f(t) = \delta(t)$
2. $f(t) = e^{-at}$

Exercices. Calculer la transformée de Laplace de :

1. $f(t) = \delta(t)$
2. $f(t) = e^{-at}$

Solution.

1.

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{-at}) &= \int_0^{\infty} e^{-(a+p)t} dt \\
&= \left[-\frac{e^{-(a+p)t}}{a+p} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{p+a}
\end{aligned}$$

Transformées usuelles

$f(t)$	$F(p)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Échelon de Heaviside $U(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe $r(t)$	$\frac{1}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{\omega^2+p^2}$

Exercices. Démontrer les relations précédentes

[lien]

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Propriétés

Linéarité

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t))$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \int_0^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-pt} dt \\
&= \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt \\
&= \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t))
\end{aligned}$$

Propriétés

Dilatation

· Il s'agit de dilater l'échelle temporelle, autrement dit d'étudier un autre signal et sa transformée de Laplace à partir de la transformée de Laplace original

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

Démonstration.

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \int_0^{\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt$$

· En faisant le changement de variable $\alpha = \lambda t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(\alpha)) &= \int_0^{\infty} f(\alpha) e^{-p\frac{\alpha}{\lambda}} \frac{d\alpha}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} f(\alpha) e^{-\frac{p}{\lambda}\alpha} d\alpha \\
&= \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Théorème du retard

· Un signal peut être retardé d'un temps τ. Il s'agit alors de déterminer sa transformée de Laplace par la relation :

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-p\tau}F(p)$$

Démonstration.

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt$$

· En faisant le changement de variable $\alpha = t - \tau$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(\alpha)) &= \int_{-\tau}^{\infty} f(\alpha)e^{-p(\alpha+\tau)}d\alpha \\ &= e^{-p\tau}\int_0^{\infty} f(\alpha)e^{-p\alpha}d\alpha \\ &= e^{-p\tau}F(p)\end{aligned}$$

Exemple. En sachant que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t)), \\
\mathcal{L}(f(t-\tau)) &= e^{-p\tau} F(p), \\
\mathcal{L}(U(t)) &= \frac{1}{p}, \\
\mathcal{L}(r(t)) &= \frac{1}{p^2},
\end{aligned}$$

alors la transformée de Laplace de $f(t) = r(t-1) - r(t-2) - u(t-4)$ est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) &= \mathcal{L}(r(t-1)) - \mathcal{L}(r(t-2)) - \mathcal{L}(U(t-4)) \\
&= \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2} - \frac{e^{-4p}}{p}
\end{aligned}$$

Propriétés

Transformée des dérivées successives

· Soit f une fonction causale définie sur $\mathbb{R}^+$

· Soient $f(0^+), f'(0^+), \ldots, f^{(n)}(0^+)$ les conditions initiales

· On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t)) &= pF(p) - f(0^+) \\
\mathcal{L}(f''(t)) &= p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) \\
&\vdots \\
\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)
\end{aligned}$$

· Si les conditions initiales sont nulles, chaque dérivation correspond à une multiplication par p dans le domaine de Laplace

Démonstration.

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt$$

· On effectuant une intégration par partie :

$$\begin{aligned} u &= e^{-pt} & dv &= f'(t)dt, \\ du &= -pe^{-pt}dt & v &= f(t), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t)) &= [uv]_0^\infty - \int_0^\infty vdu \\ &= [e^{-pt}f(t)]_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \\ &= -f(0^+) + pF(p) \end{aligned}$$

Propriétés

Transformée d'une primitive

· A l'inverse de la dérivation, l'intégration correspond à une division par p dans le domaine de Laplace :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(p)}{p}$$

Démonstration

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] e^{-pt}dt$$

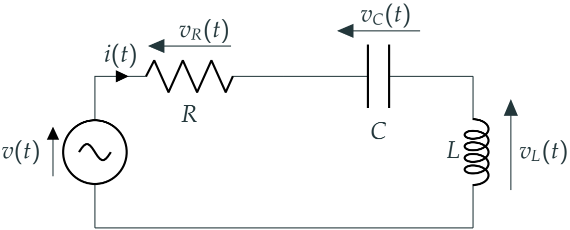
· On effectuant une intégration par partie :

$$\begin{array}{ll} u = \int_0^t f(\tau)d\tau & dv = e^{-pt}dt \\ du = f(t)dt & v = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{array}$$

d'où on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t)) &= [uv]_0^\infty - \int_0^\infty v du \\ &= -\frac{1}{p}\cancelto{0}{\left[e^{-pt}\int_0^t f(\tau)d\tau\right]_0^\infty} + \frac{1}{p}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \frac{1}{p}F(p) \end{aligned}$$

Exemple.



· Grâce au principe de la conservation de l'énergie, on sait :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) + v_C(0) \\ &= Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_C(0) \end{aligned}$$

· En supposant $v_C(0) = 0$, la transformée de Laplace est donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v(t)) &= \mathcal{L}\left(Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau\right) \\ &= R\mathcal{L}(i(t)) + L\mathcal{L}(i'(t)) + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left(\int_0^t i(\tau)d\tau\right) \end{aligned}$$

Exemple (continuation).

· On dénote $V(p) = \mathcal{L}(v(t))(p)$ et $I(p) = \mathcal{L}(i(t))(p)$

$$\begin{aligned} V(p) &= RI(p) + pLI(p) - LI(0^+) + \frac{1}{C}\frac{I(p)}{p} \\ &= \left[R + Lp + \frac{1}{Cp}\right] I(p) - LI(0^+) \\ &= \left[\frac{LCp^2 + RCp + 1}{Cp}\right] I(p) - LI(0^+) \end{aligned}$$

· D'où on obtient :

$$I(p) = \underbrace{\left[\frac{pC}{LCp^2 + RCp + 1}\right]}_{H(p)} [V(p) + LI(0^+)],$$

avec $H(p) = \dfrac{pC}{LCp^2 + RCp + 1}$ la fonction de transfert du circuit RLC série

Propriétés

Multiplication par une exponentielle

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(p+a)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(a+p)t}dt \\
&= F(a+p)
\end{aligned}$$

Multiplication par t

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(p)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
F'(p) &= \frac{d}{dp}\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{\infty} f(t)\left[\frac{\partial}{\partial p}e^{-pt}\right]dt \\
&= -\int_0^{\infty} [tf(t)]e^{-pt}dt \\
&= -\mathcal{L}(tf(t))
\end{aligned}$$

Transformées de Laplace inverse

· Soit une fonction $f(t)$ de transformée de Laplace $F(p)$. Alors, $f(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $f(p)$:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$$

Linéarité

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(p) + \beta G(p)) &= \mathcal{L}^{-1}(\alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t))) \\ &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) \\ &= \alpha f(t) + \beta g(t)\end{aligned}$$

D'autres propriétés

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(\frac{p}{\lambda}\right)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\lambda\mathcal{L}(f(\lambda t))\right) = \lambda f(\lambda t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}(F(p+a)) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(e^{-at}f(t))) = e^{-at}f(t)$$

Laplace inverse d'un produit

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)G(p)) = f(t) \otimes g(t),$$

où

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

est le produit de convolution de deux fonctions

Exercice.

En supposant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, trouver la solution générale de l'équation différentielle :

1. $y'(t) - 2y(t) = 6e^{-t}$
2. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-3t}$

Solution.

1. $y'(t) - 2y(t) = 6e^{-t}$ où $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

· On calcule d'abord la transformée de Laplace de l'équation différentielle :

$$\mathcal{L}(y'(t)) - 2\mathcal{L}(y(t)) = 6\mathcal{L}(e^{-t}),$$

d'où

$$\mathcal{L}(y(t)) = Y(p), \quad \mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1, \quad \mathcal{L}(e^{-3t}) = \frac{1}{p+1}.$$

· En reportant les expression précédentes dans la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient :

$$pY(p) - 1 - 2Y(p) = \frac{6}{p+1},$$

d'où on trouve :

$$(p-2)Y(p) = \frac{6}{p+1} + 1 = \frac{p+7}{p+1}.$$

Transformées de Laplace inverse

· La transformée de Laplace de y est alors :

$$Y(p) = \frac{p+7}{(p+1)(p-2)}.$$

· Ensuite, il faut calculer la transformée de Laplace inverse de Y pour de calculer y. En appliquant une décomposition en éléments simples, on a :

$$Y(p) = \frac{p+7}{(p+1)(p-2)} = -\frac{2}{p+1} + \frac{3}{p-2}.$$

· En calculant la transformée de Laplace inverse, on obtient finalement :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{p-2}\right) = -2e^{-t} + 3e^{2t}.$$

Solution (continuation).

2. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-3t}$ où $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

· La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$\mathcal{L}(y''(t)) + 3\mathcal{L}(y'(t)) + 2\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(e^{-3t}),$$

d'où

$$\mathcal{L}(y(t)) = Y(p), \quad \mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1,$$
$$\mathcal{L}(y''(t)) = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p, \quad \mathcal{L}(e^{-3t}) = \frac{1}{p+3}.$$

· En reportant les expression précédentes dans la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient :

$$(p^2 + 3p + 2)Y(p) = \frac{p^2 + 6p + 10}{p+3}.$$

Solution (continuation).

· Ensuite, la transformée de Laplace de y est :

$$Y(p) = \frac{p^2 + 6p + 10}{(p^2 + 3p + 2)(p + 3)} = \frac{p^2 + 6p + 10}{(p + 1)(p + 2)(p + 3)}.$$

· En appliquant une décomposition en éléments simples, on a :

$$Y(p) = \frac{p^2 + 6p + 10}{(p + 1)(p + 2)(p + 3)} = \frac{5}{2}\frac{1}{p + 1} - 2\frac{1}{p + 2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p + 3}.$$

· En calculant la transformée de Laplace inverse, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) \\ &= \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p + 1}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p + 2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p + 3}\right) \\ &= \frac{5}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}. \end{aligned}$$