

IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels (OML1)

Fonctions numériques à variable réelle et usuelles du GEII (partie II)

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)
2021 – 2022

1. Dérivée d'une fonction

Définition

Dérivées usuelles

Règles de dérivation

Dérivées de quelques fonctions composées

Dérivée seconde et dérivée d'ordre n

2. Tableau de variation

3. Fonctions usuelles

Fonction exponentielle et fonction logarithme népérien

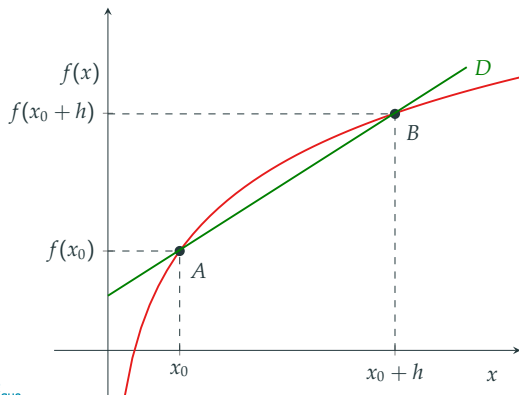
Fonctions trigonométriques réciproques

Dérivée d'une fonction

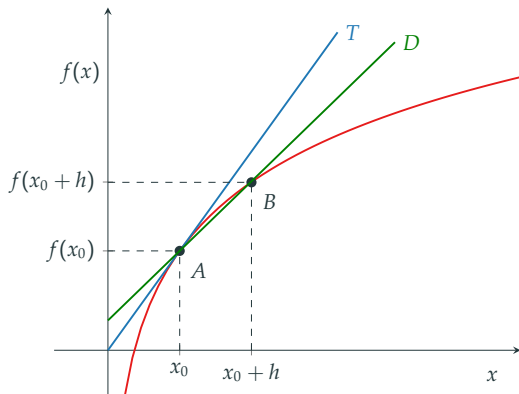
Définition

- Soit une fonction $f(x)$ monotone sur un intervalle I
- Sur cet intervalle, on définit entre les points d'abscisses x_0 et $x_1 = x_0 + h$ le taux de variation par le quotient :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Définition



[animation]

- Si $h \rightarrow 0$, d'où $x_0 + h \rightarrow x_0$ et la droite D tend vers la tangente T à la courbe
- Dans ce cas-là, le taux de variation tend vers le coefficient directeur de la tangente T à la courbe

- On appelle dérivée en un point A , la valeur que prend le taux de variation quand $h \rightarrow 0$. On note cette dérivée :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- On dit qu'une fonction est dérivable en un point donné x_0 si $f'(x_0)$ est finie
- En utilisant l'expression précédente du taux de variation pour toute valeur de $x_0 \in I$, on détermine la dérivée de toute fonction :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

- On notera la dérivée de f par rapport à x comme : $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

Exemples.

1. $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\&= 2x\end{aligned}$$

Exemples. (continuation)

2. $f(x) = x^n \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^n} + a_1 h x^{n-1} + a_2 h^2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} h^{n-1} x + h^n - \cancel{x^n}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(a_1 x^{n-1} + a_2 h x^{n-2} + \dots + a_{n-1} h^{n-2} x + h^{n-1})}{\cancel{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a_1 x^{n-1} + a_2 h x^{n-2} + \dots + a_{n-1} h^{n-2} x + h^{n-1} \\ &= a_1 x^{n-1} \end{aligned}$$

· Grâce au triangle du Pascal, on a $a_n = n$, d'où on obtient $f'(x) = nx^{n-1}$

Exemples. (continuation)

3. $f(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \cos(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
 &= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
 &= -\sin(x)
 \end{aligned}$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	e^x	e^x	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$		

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	e^x	e^x	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$		

Exercice. Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt[n]{x}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et appliquer la formule pour le cas $n = 3$

Piste. On peut récrire la fonction f comme $f(x) = x^{1/3}$, d'où on obtient

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[x^{1/3} \right] = \frac{1}{3} x^{1/3-1} = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Règles de dérivation

· Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ et $a \in \mathbb{R}$. Les règles suivantes peuvent être établies :

Opération	Dérivée
$af(x)$	$af'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$

Exercice. calculer la dérivée de $h(x) = 5x \sin(x)$

Règles de dérivation

· Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ et $a \in \mathbb{R}$. Les règles suivantes peuvent être établies :

Opération	Dérivée
$af(x)$	$af'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$

Exercice. calculer la dérivée de $h(x) = 5x \sin(x)$

Solution.

- Si on dénote $f(x) = x$ et $g(x) = \sin(x)$, on obtient $f'(x) = 1$ et $g'(x) = \cos(x)$
- D'où la dérivée de $h(x) = 5f(x)g(x)$ est donnée par :

$$h'(x) = 5[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] = 5[\sin(x) + x \cos(x)]$$

· De manière récurrente, la dérivée $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ de la fonction apparaît dans l'expression finale de la fonction étudiée, par exemple :

$$g(x) = f^n(x)$$
$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[f^n(x)] = nf^{n-1}(x)\frac{df(x)}{dx} = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Dérivées de quelques fonctions composées

Fonction $g(x)$	Dérivée de la fonction $g'(x)$
$f^n(x)$	$nf^{n-1}(x)f'(x)$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{1}{2f(x)}f'(x)$
$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{1}{f^2(x)}f'(x)$
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)}f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$
$\sin(f(x))$	$\cos(f(x))f'(x)$

- La dérivée seconde d'une fonction $f(x)$ est donnée par la dérivée de $f'(x)$

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right]$$

- La dérivée et la dérivée seconde ont d'interprétations précises en physique
- Soit $f(t) = t^3 + t$ une fonction décrivant la position d'un objet à l'instant t donné. Les dérivées $\frac{df(t)}{dt}$ et $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ représenteront la vitesse et l'accélération associées à l'objet au même instant t

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = 3t^2 + 1 \quad \text{(fonction vitesse)}$$

$$f''(t) = \frac{d^2f(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = 6t \quad \text{(fonction accélération)}$$

- Dans un cadre général, la dérivée d'ordre n donnée par :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left[\dots \left[\frac{df(x)}{dx} \right] \right]$$

Exercice. Calculer la dérivée d'ordre $n = 5$ de $f(x) = \sin(x)$.

- Dans un cadre général, la dérivée d'ordre n donnée par :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left[\dots \left[\frac{df(x)}{dx} \right] \right]$$

Exercice. Calculer la dérivée d'ordre $n = 5$ de $f(x) = \sin(x)$.

Solution.

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x)$$

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x)$$

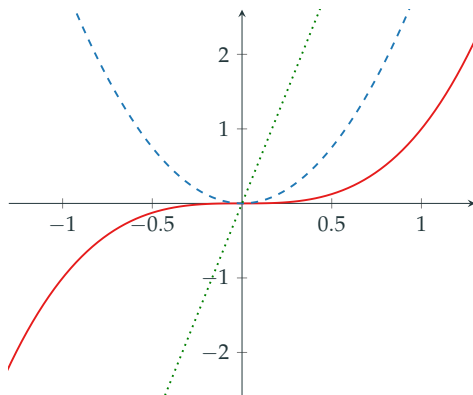
$$f'''(x) = \frac{df''(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[-\sin(x)] = -\cos(x)$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{df'''(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[-\cos(x)] = \sin(x)$$

Tableau de variation

- Considérons $f(x) = x^3$.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 \\f'(x) &= 3x^2 \\f''(x) &= 6x\end{aligned}$$

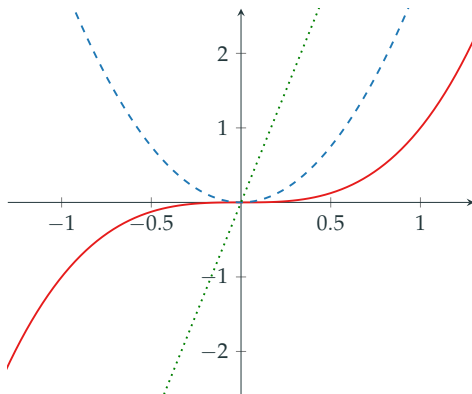


- Que peut-on observer ?

Tableau de variation

- Considérons $f(x) = x^3$.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 \\f'(x) &= 3x^2 \\f''(x) &= 6x\end{aligned}$$



- Que peut-on observer ?
- On observe que $f'(x) \geq 0$ pour tout x , et $f''(x) = \begin{cases} \text{positive,} & x > 0 \\ \text{négative,} & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Quelques remarques.

- La dérivée d'une fonction $f'(x)$ permet d'étudier la *pente* de sa courbe représentative
 - Si $f'(x) \geq 0 \forall x \in I$, la fonction est *croissante* dans l'intervalle I
 - Si $f'(x) > 0 \forall x \in I$, la fonction est *strictement croissante* dans l'intervalle I
 - Si $f'(x) \leq 0 \forall x \in I$, la fonction est *décroissante* dans l'intervalle I
 - Si $f'(x) < 0 \forall x \in I$, la fonction est *strictement décroissante* dans l'intervalle I
- La dérivée seconde $f''(x)$ permet d'étudier la *concavité* de sa courbe représentative
 - Si $f''(x) > 0 \forall x \in I$, la fonction a une *concavité positive* (\cup) dans l'intervalle I
 - Si $f''(x) < 0 \forall x \in I$, la fonction a une *concavité négative* (\cap) dans l'intervalle I
 - Les valeurs pour lesquelles $f''(x) = 0$ sont les abscisses des points d'inflexion de la courbe (changement de concavité $\cup \rightarrow \cap$ ou $\cap \rightarrow \cup$)

Exemple. Dessiner la fonction

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

- Tout d'abord, on peut étudier le domaine de définition : $D = \mathbb{R} - \{2\}$
- On peut aussi étudier le signe de la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} & 2 & & & \\ - & 0 & + & (x-2) & \\ \hline - & \text{fi} & + & \frac{3}{x-2} & \end{array}$$

- En regardant les limites, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{-\infty} = 0(-), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{\infty} = 0(+)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0(-)} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0(+)} = \infty$$

Exemple (continuation).

- Ensuite, on calcul $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{x-2} \right] = -\frac{3}{(x-2)^2}$$

- On regardant le signe de $f'(x)$, on observe que $f(x) < 0$ pour tout x

	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	fi	+
$f'(x)$	\searrow	fi	\searrow

Exemple (continuation).

- On peut calculer $f''(x)$ si c'est nécessaire :

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left[-\frac{3}{(x-2)^2} \right] = \frac{6}{(x-2)^3}$$

- En regardant le signe de $f''(x)$, on obtient que :

$$f''(x) \text{ est } \begin{cases} \text{négative si } x < 2 \\ \text{fi si } x = 2 \\ \text{positive si } x > 2 \end{cases}$$

Remarque. Parce que $f''(x) \neq 0$ pour tout x , alors $f(x)$ n'a pas des points d'inflexion

Exemple (continuation).

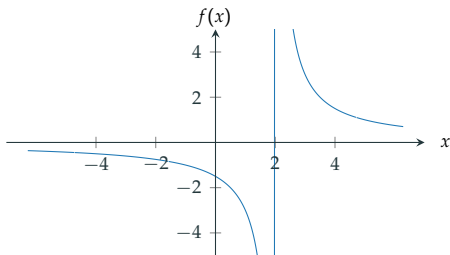
- Finalement, on sait que la fonction f doit satisfaire les conditions suivantes :

	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	fi	+
$f'(x)$	\searrow	fi	\searrow
$f''(x)$	\cap	fi	\cup

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0(-), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0(+)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

- Cette information nous laisse dessiner la fonction f :



Exercice. Dessiner la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2}$$

Exercice. Dessiner la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2}$$

Solution.

· Tout d'abord, on peut étudier le domaine de définition :

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{e^x}{(x - 2)(x - 1)},$$

d'où on obtient que la fonction n'est pas définie pour $x = 1$ et $x = 2$, alors $D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

· On peut aussi étudier le signe de la fonction :

	1		2		
+	+	+	+	+	e^x
-	0	+	+	+	$(x - 1)$
-	-	-	0	+	$(x - 2)$
<hr/>					
+	fi	-	fi	+	$\frac{e^x}{(x - 2)(x - 1)}$

· En regardant les limites, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^1}{0(+)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^1}{0(-)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^2}{0(-)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^2}{0(+)} = \infty$$

Solution (continuation).

· Ensuite, on calcul $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{e^x}{x^2 - 3x + 2} \right] = \frac{e^x(x^2 - 3x + 2) - e^x(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\ &= \frac{e^x(x^2 - 5x + 5)}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\ &= \frac{e^x \left(x - \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{5-\sqrt{5}}{2} \right)}{(x-1)^2(x-2)^2} \end{aligned}$$

· En regardant le signe de la dérivée, on obtient :

	1		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$		
+	+	+	+	+	+	+	+	+	e^x
-	-	-	0	+	+	+	+	+	$x - \frac{5-\sqrt{5}}{2}$
-	-	-	-	-	-	-	0	+	$x - \frac{5+\sqrt{5}}{2}$
+	0	+	+	+	0	+	+	+	$(x-1)^2(x-2)^2$
+	fi	+	0	-	fi	-	0	+	$f'(x)$
	fi	↗	→	↘	fi	↘	→	↗	

Solution (continuation).

- Finalement, on sait que la fonction f doit satisfaire les conditions suivantes :

		1		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	
$f'(x)$	+	fi	-	-	-	fi	+	+	+
$f'(x)$	\nearrow	fi	\nearrow	\rightarrow	\searrow	fi	\searrow	\rightarrow	\nearrow

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

Exercice. Dessiner la fonction f en utilisant l'information précédente.

Fonctions usuelles

Fonction polynomiale

- Une fonction polynomiale est une fonction de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

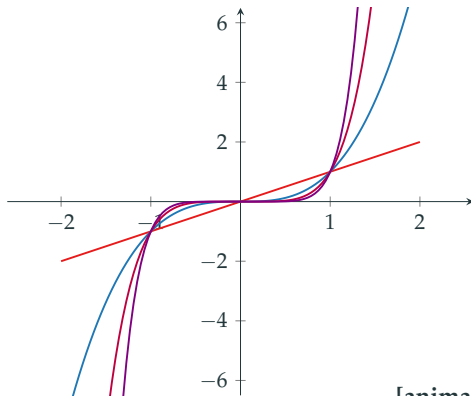
où a_0, \dots, a_n sont des constantes réelles et n est un entier positif

$$f(x) = x$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^5$$

$$f(x) = x^7$$



[animation]

Fonction polynomiale

- Une fonction polynomiale est une fonction de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

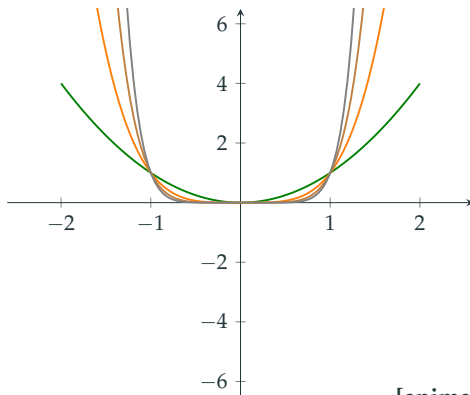
où a_0, \dots, a_n sont des constantes réelles et n est un entier positif

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = x^4$$

$$f(x) = x^6$$

$$f(x) = x^8$$



[animation]

Fonction polynomiale

- Une fonction polynomiale est une fonction de la forme :

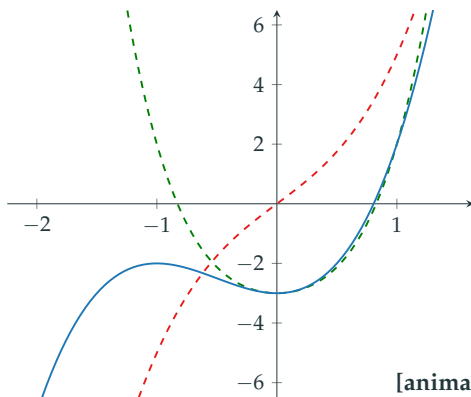
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

où a_0, \dots, a_n sont des constantes réelles et n est un entier positif

$$f_1(x) = 2x^3 + 3x$$

$$f_2(x) = 2x^4 + 3x^2 - 3$$

$$f_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3$$



[animation]

- Le domaine de définition d'une fonction polynomiale est $D = \mathbb{R}$
- Une fonction polynomiale $f(x)$ est continue et différentiable :

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n] \\ &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2f(x)}{dx^2} &= \frac{d}{dx}[a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}] \\ &= 2a_2 + 6a_3x + \cdots + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + n(n-1)a_nx^{n-2}\end{aligned}$$

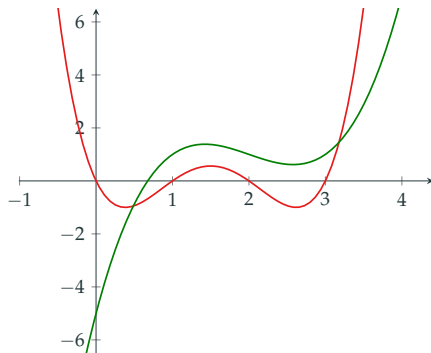
\vdots

$$\frac{d^nf(x)}{dx^n} = n! a_n$$

- Une fonction polynomiale $f(x)$ de degré n possède nécessairement n racines (soit complexes ou réelles)
- Les racines du polynôme $f(x)$ sont les valeurs de x telles que $f(x) = 0$

$$f_1(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

$$f_2(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$$



· La détermination des solutions $f(x) = 0$ d'une fonction polynomiale n'est possible que dans certain cas particuliers :

- Cas linéaire $f(x) = ax - b$:

$$x = \frac{b}{a}$$

- Cas quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Cas bicarrées $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$: il s'agit d'effectuer un changement de variable $z = x^2$ afin d'avoir le cas quadratique $az^2 + bz + c = 0$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{avec } x = \pm\sqrt{z}$$

- Le cas du type $ax^n - 1 = 0$:

$$x = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$$

- Le cas du type $ax^n = 0$:

$$x = 0$$

- Dans certains cas, on peut trouver des solutions évidentes, par exemple :

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

on trouve que $f(x) = 0$ si $x = 0, 1, 2, 3$. Ensuite, on peut récrire $f(x)$ comme

$$f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

- Pour les autres cas, il faudrait considérer d'autres techniques de factorisation (p.e. la division euclidienne)

Fonction racine simple

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

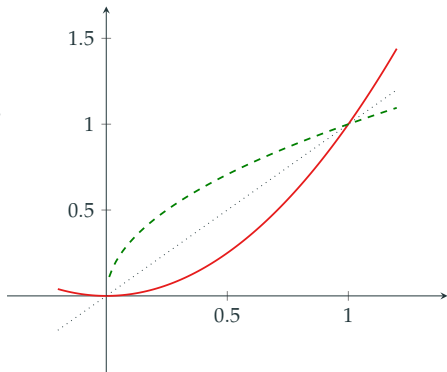
· On appelle g la *fonction réciproque* de f , i.e. $g(x) = f^{-1}(x)$, parce que :

$$g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$$

$$f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$

· Domaine de $f(x)$: $D = \mathbb{R}$

· Domaine de $f^{-1}(x)$: $D = \mathbb{R}^+$

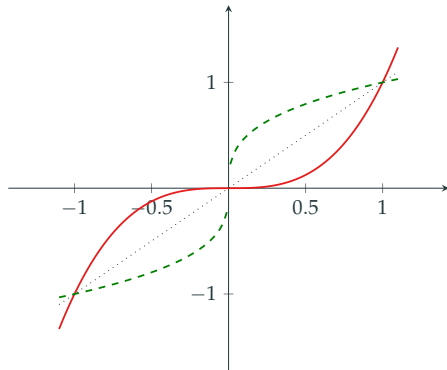


Fonction racine cubique

- Pour le cas $f(x) = x^3$, on obtient

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

- Domaine de $f(x) = x^3$: $D = \mathbb{R}$
- Domaine de $f^{-1}(x)$: $D = \mathbb{R}$



Racine d'ordre k

- Dans le cas général, si $f(x) = x^k$ alors $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$
 - Si k est pair, le domaine de définition de $f^{-1}(x)$ est $D = \mathbb{R}^+$
 - Si k est impair, le domaine de définition de $f^{-1}(x)$ est $D = \mathbb{R}$

Fonction exponentielle

$$f(x) = e^x$$

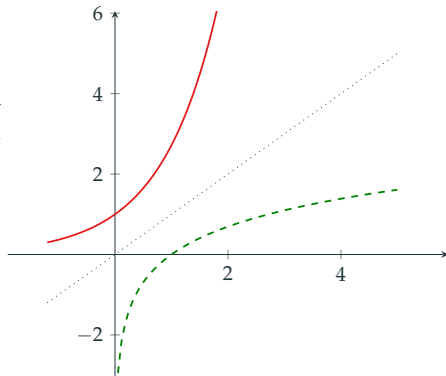
$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

- On appelle le logarithme népérien (\ln) la fonction réciproque de la fonction exponentielle :

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

- Domaine de e^x : $D = \mathbb{R}$
- Domaine de $\ln(x)$: $D = \mathbb{R}^+$



Propriétés de la fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien

Fonction exponentielle

$$e^0 = 1$$

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$(e^x)^y = e^{xy}$$

$$\sqrt[y]{e^x} = e^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

Fonction logarithme népérien

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$$

$$\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y \ln(x) = \ln(x^y)$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Fonction logarithme en base quelconque

· La fonction réciproque de l'exponentielle en base a est la fonction logarithme en base a :

$$f(x) = a^x, \quad f^{-1}(x) = \log_a(x), \quad \log_a(a^x) = x$$

Propriétés.

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$$

$$\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$y \log_a(x) = \log_a(x^y)$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\frac{d \log_a(x)}{dx} = \frac{1}{x \ln(a)}$$

Fonction arc sinus

$$f(x) = \sin(x)$$

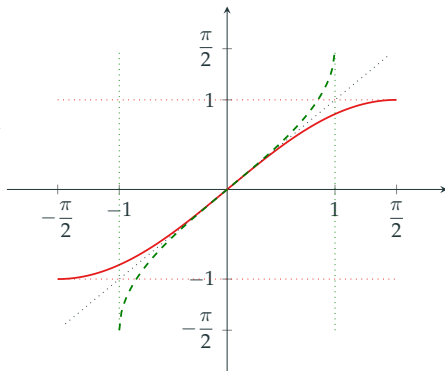
$$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

· On appelle arc sinus la fonction réciproque de la fonction sinus

· Domaine de $\sin(x)$: $D = \mathbb{R}$

· Domaine de $\arcsin(x)$: $D = [-1, 1]$

$$\cdot \frac{d \arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Fonction arc cosinus

$$f(x) = \cos(x)$$

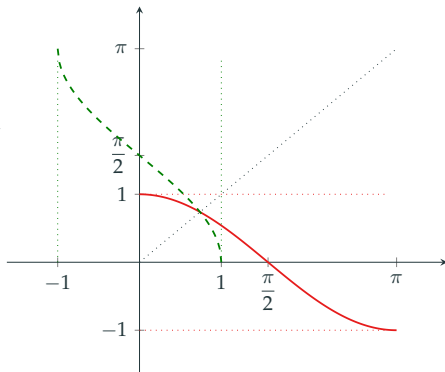
$$f^{-1}(x) = \arccos(x)$$

· On appelle arc cosinus la fonction réciproque de la fonction cosinus

· Domaine de $\cos(x)$: $D = \mathbb{R}$

· Domaine de $\arccos(x)$: $D = [-1, 1]$

$$\cdot \frac{d \arccos(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Fonction arc tangente

$$f(x) = \tan(x)$$

$$f^{-1}(x) = \arctan(x)$$

· On appelle arc tangente la fonction réciproque de la fonction tangente

· Domaine de $\tan(x)$:

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

· Domaine de $\arctan(x)$: $D = \mathbb{R}$

$$\cdot \frac{d \arctan(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

