IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels I (OML1)

Nombres complexes

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

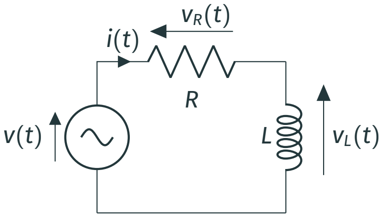
Nombres complexes

Nombres complexes

· Les nombres complexes sont largement utilisés dans divers domaines tels que l'ingénierie (électrique, électronique, automatique, mécanique), la physique, et bien d'autres.

Cas d'applications en génie électrique :

- Résolution des équations différentielles
- Étude des circuits électriques



· L'impédance $Z \in \mathbb{C}$ est donnée par

$$Z = R + j\omega L,$$

- $\omega \in \mathbb{R}^+$: la pulsation du signal [rad/s],
- $R \in \mathbb{R}^+$: la résistance [ohm, Ω],
- $L \in \mathbb{R}^+$: l'inductance [henry, H] (ou bobinage inductif),
- $j \in \mathbb{C}$: le nombre imaginaire, $j = \sqrt{-1}$.

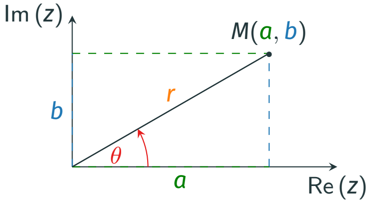
· Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est donné par la forme algébrique (ou forme cartésienne) :

$$z = a + jb,$$

où

- $a \in \mathbb{R}$ est la partie réelle de z,
- $b \in \mathbb{R}$ est la partie imaginaire de z,
- $j \in \mathbb{C}$ est le nombre imaginaire, défini comme $j = \sqrt{-1}$.

Représentation géométrique



· D'après le théorème de Pythagore :

$$\text{(module) } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{(argument) } \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

· Coordonnées polaires $M(r, \theta)$: on peut exprimer z sous la forme

$$z = r\underline{/\theta}$$

Règles de calcul

· Soit $z = a + jb$, les opérateurs $\mathrm{Re}\,()$ et $\mathrm{Im}\,()$ sont définis de la manière suivante :

$$\mathrm{Re}\,(z) = a, \qquad \mathrm{Im}\,(z) = b.$$

· L'élévation du nombre imaginaire j à une puissance n est donnée par :

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1, \quad j^3 = j \cdot j^2 = -j, \qquad j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1, \qquad j^5 = j \cdot j^4 = j,$$

et plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient les résultats **[exercice]** :

$$j^{4n} = 1, \qquad j^{4n+1} = j, \qquad j^{4n+2} = -1, \qquad j^{4n+3} = -j.$$

· Le conjugué de z est le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par :

$$\bar{z} = a - jb.$$

En particulier, on a :

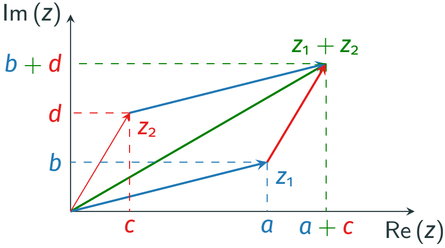
$$z \cdot \bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2.$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Addition de deux nombres complexes

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d).$$

Représentation graphique de l'addition



$$z_1 = a + jb,$$
$$z_2 = c + jd,$$
$$z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d).$$

Règles de calcul

Multiplication de deux nombres complexes [exercice]

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc).$$

Division de deux nombres complexes [exercice]

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + j\frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Égalité de deux nombres complexes

- On dit que $z_1 = a + jb$ et $z_2 = c + jd$ sont égaux si et seulement si :

$$a = c \quad \text{et} \quad b = d.$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

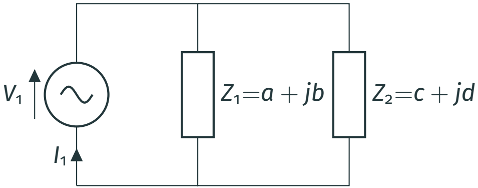
Solution.

· Multiplication :

$$\begin{aligned}(a+jb)(c+jd) &= ac+jad+jbc+j^2bd\\ &= (ac-bd)+j(ad+bc).\end{aligned}$$

· Division :

$$\begin{aligned}\frac{a+jb}{c+jd} &= \frac{a+jb}{c+jd}\cdot\frac{c-jd}{c-jd}\\ &= \frac{ac-jad+jbc-j^2bd}{c^2+d^2}\\ &= \frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2}.\end{aligned}$$



· L'impédance équivalente Z_{eq} d'un montage en parallèle est donnée par :

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(a+jb)(c+jd)}{(a+jb)+(c+jd)}. \tag{1}$$

Exercice 1. Calculer Z_{eq} en supposant $Z_1 = 1 + 2j$ et $Z_2 = 1 - j$.

Exercice 2 (avancé). Réécrire (1) sous la forme $Z_{eq} = \alpha + j\beta$.

Exercice 3 (optionnel). En déduire la formule (1).

Application: montage en parallèle

Exercice 1 (Solution). Calculer Z_{eq} en supposant $Z_1 = 1 + 2j$ et $Z_2 = 1 - j$.

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(1+2j)(1-j)}{(1+2j)+(1-j)} = \frac{3+j}{2+j} \times \frac{2-j}{2-j} = \frac{7-j}{2^2+1^2} = \frac{7}{5} - j\frac{1}{5}.$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Exercice 2 (Solution). Réécrire (1) sous la forme $Z_{eq} = \alpha + j\beta$

$$
\begin{aligned}
Z_{eq} &= \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \\
&= \frac{(a+jb)(c+jd)}{(a+jb)+(c+jd)} \\
&= \frac{(ac-bd)+j(ad+bc)}{(a+c)+j(b+d)} \\
&= \frac{[(ac-bd)+j(ad+bc)][(a+c)-j(b+d)]}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&= \frac{[(ac-bd)(a+c)+(ad+bc)(b+d)]}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&\quad + j\frac{[-(ac-bd)(b+d)+(ad+bc)(a+c)]}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&= \frac{a^2c-\cancel{abd}+ac^2-\cancel{bcd}+\cancel{abd}+b^2c+ad^2+\cancel{bcd}}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&\quad + j\frac{-\cancel{abc}+b^2d-\cancel{acd}+bd^2+a^2d+\cancel{abc}+\cancel{acd}+bc^2}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&= \frac{a^2c+ac^2+b^2c+ad^2}{(a+c)^2+(b+d)^2} + j\frac{b^2d+bd^2+a^2d+bc^2}{(a+c)^2+(b+d)^2}.
\end{aligned}
$$

Forme trigonométrique (ou forme polaire)

Définition

· Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut être exprimé en termes de son module r et de son argument θ :

$$z = r[\cos(\theta) + j\sin(\theta)],$$

où $r = \mathrm{mod}(z)$ et $\theta = \arg(z)$.

Lien entre la forme trigonométrique et la forme algébrique

· La relation entre le module, l'argument et la forme algébrique du nombre complexe $z = a + jb$ est donnée par :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}, \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

· Réciproquement, les coordonnées cartésiennes peuvent être retrouvées à partir de la forme trigonométrique :

$$a = r\cos(\theta), \qquad b = r\sin(\theta).$$

- Cette forme s'obtient à partir de la relation d'Euler :

$$\cos(\theta) + j\sin(\theta) = e^{j\theta}.$$

- On en déduit l'écriture du nombre complexe z suivante :

$$z = a + jb = r[\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = re^{j\theta}.$$

Règles de calcul

- Multiplication :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)} = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

- Division :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

- Puissance :

$$z_1^2 = (r_1 e^{j\theta_1})^2 = r_1^2 e^{j2\theta_1} = r_1^2[\cos(2\theta_1) + j\sin(2\theta_1)].$$

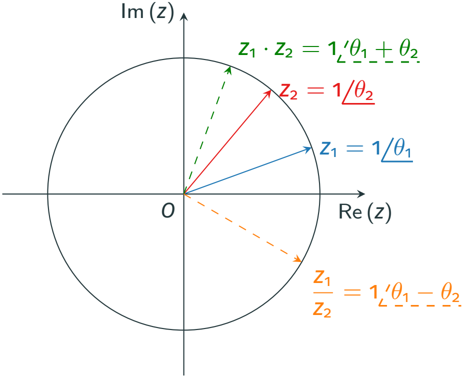
Forme exponentielle complexe

· En utilisant la forme exponentielle, on peut en déduire les propriétés suivantes concernant les modules et les arguments :

$$
\begin{aligned}
|z_1 z_2| &= |z_1|\,|z_2|\,, & \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2),\\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, & \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2),\\
|z^n| &= |z|^n\,, & \arg(z^n) &= n\arg(z).
\end{aligned}
$$

Interprétation graphique

- Ici, on suppose $z_1 = e^{j\theta_1}$ et $z_2 = e^{j\theta_2}$.



Exercice. Étant donné que $z = re^{j\theta} = r[\cos(\theta) + j\sin(\theta)]$, montrez que :

$$\bar{z} = re^{-j\theta}.$$

Exercice. Étant donné que $z = re^{j\theta} = r[\cos(\theta) + j\sin(\theta)]$, montrez que :

$$\bar{z} = re^{-j\theta}.$$

Solution.

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)}\\ &= r\cos(\theta) - jr\sin(\theta)\\ &= r[\cos(\theta) - j\sin(\theta)]\\ &= r[\cos(-\theta) + j\sin(-\theta)]\\ &= re^{j(-\theta)}.\end{aligned}$$

Formules d’Euler et de Moivre

Formules d'Euler

- Les formules d'Euler sont les expressions réciproques de l'identité suivante :

$$\cos(\theta) + j\sin(\theta) = e^{j\theta}.$$

- De manière similaire, on peut écrire :

$$\cos(\theta) - j\sin(\theta) = e^{-j\theta}.$$

- En additionnant et soustrayant ces deux expressions, on obtient **[exercice]**

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}.$$

Linéarisation

· Les formules d'Euler permettent de linéariser les fonctions trigonométriques. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}(e^{j3\theta}+3e^{j2\theta}e^{-j\theta}+3e^{j\theta}e^{-j2\theta}+e^{-j3\theta}) \\
&= \frac{1}{8}(e^{j3\theta}+3e^{j\theta}+3e^{-j\theta}+e^{-j3\theta}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{j3\theta}+e^{-j3\theta}}{2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}\right)=\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Remarque. La linéarisation repose sur le triangle de Pascal pour déterminer les coefficients λ_i dans l'expression :

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\ a^{n-i}b^i \\
&= \lambda_0\ a^n+\lambda_1\ a^{n-1}b^1+\lambda_2\ a^{n-2}b^2+\cdots+\lambda_{n-1}\ ab^{n-1}+\lambda_n\ b^n.
\end{aligned}$$

Formule de Moivre

- La formule de Moivre établit une relation entre l'argument d'un nombre complexe et l'argument de ce nombre lorsqu'il est élevé à une puissance.
- Soit $z = e^{j\theta}$. On a :

$$z^n = (\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = (e^{j\theta})^n = e^{jn\theta} = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta).$$

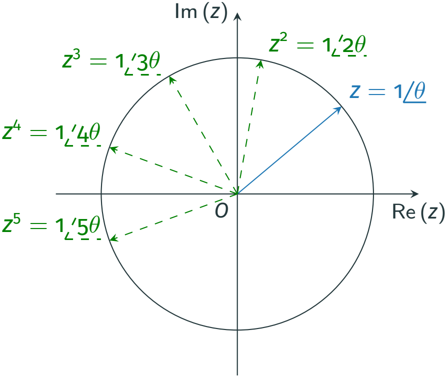
- Ceci aboutit à la formule de Moivre :

$$(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta).$$

Formule de Moivre

Interprétation graphique

- Ici, on suppose $z = e^{j\theta}$.



Racines d’un nombre complexe

Racine carrée d'un nombre complexe

- On appelle racine carrée d'un nombre complexe w, tout nombre z tel que

$$z^2 = w.$$

- Posons $w = \mu e^{j\alpha}$ et $z = re^{j\theta}$. Il en découle :

$$z^2 = r^2 e^{j2\theta} = \mu e^{j\alpha},$$

d'où, avec $k \in \mathbb{Z}$, on déduit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu &= r^2, & r &= \sqrt{\mu}, \\ \alpha &= 2\theta \pm 2k\pi, & \theta &= \frac{\alpha}{2} \pm k\pi. \end{aligned}$$

- On obtient alors deux racines distinctes, exprimées par :

$$z_k = \sqrt{\mu}\, e^{j\left(\frac{\alpha}{2} + k\pi\right)}, \quad k \in \{0, 1\}.$$

Racines n-ième d'un nombre complexe quelconque

· On appelle racine n-ième d'un nombre complexe w, tout nombre complexe z tel que

$$z^n = w \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}.$$

· Posons $w = \mu e^{j\alpha}$ et $z = re^{j\theta}$. Il vient :

$$z^n = r^n e^{jn\theta} = \mu e^{j\alpha},$$

d'où, avec $k \in \mathbb{Z}$, on déduit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu &= r^n, & r &= \sqrt[n]{\mu}, \\ \alpha &= n\theta \pm 2k\pi, & \theta &= \frac{\alpha}{n} \pm \frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

· On obtient alors n racines distinctes s'écrivant :

$$z_k = \sqrt[n]{\mu}\, e^{j\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

- On s'intéresse ici à la résolution des équations du type :

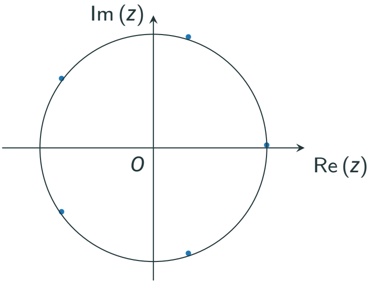
$$z^n - 1 = 0.$$

- Cette équation peut être réécrite sous la forme $z^n = w$ avec $w = 1$, ce qui donne $\mu = 1$ et $\alpha = 0$.

- On obtient alors les n racines distinctes de l'unité :

$$z_k = \sqrt[n]{\mu}\, e^{j\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = e^{j\frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Représentation graphique avec $n = 5$



· On s'intéresse ici à la résolution des équations du type :

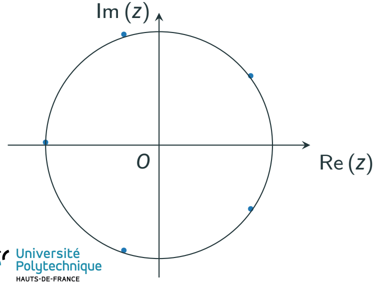
$$z^n + 1 = 0.$$

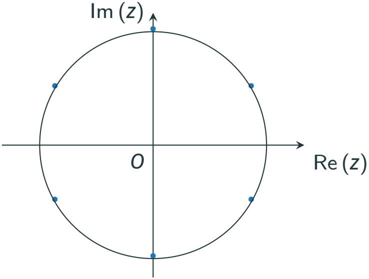
· Cette équation peut être réécrite sous la forme $z^n = w$ avec $w = -1$, ce qui donne $\mu = 1$ et $\alpha = \pi$.

· On obtient alors les n racines distinctes :

$$z_k = \sqrt[n]{\mu}\, e^{j\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = e^{j(1+2k)\frac{\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Représentation graphique avec $n = 5$ et $n = 6$





Racine carrée d'un nombre complexe

· Soit le nombre complexe $w = a + jb$, et cherchons $z = x + jy$ tel que $z^2 = a + jb$.

· Il vient : $\quad |z|^2 = |z^2| \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2},$

$$z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy = a + jb,$$

d'où le système suivant pour déterminer x et y :

$$x^2 - y^2 = a, \tag{2}$$

$$2xy = b, \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{4}$$

· En combinant (4) $\pm$ (2), on obtient **[exercice]** :

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

· De (3), notez que le signe de b indique si x et y sont de même signe ou non.

Résolution d’équations du second degré

Résolution d'équations du second degré

- Soit une équation du second degré à coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{5}$$

- La nature des solutions de (5) dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:
  - Si $\Delta \geq 0$, les deux solutions de (5) sont réelles et s'expriment par :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  - Si $\Delta < 0$, les solutions sont complexes et se donnent sous la forme :

$$z = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 1ère Année.
Ellipses, 2017.

Jean Duveau, Marcel Pasquinelli, and Michel Tholomier.
Électronique : IUT 1ère Année GEII - GMP.
DUNOD, 2e édition, 2017.