IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels III (OML3)

Transformée en Z

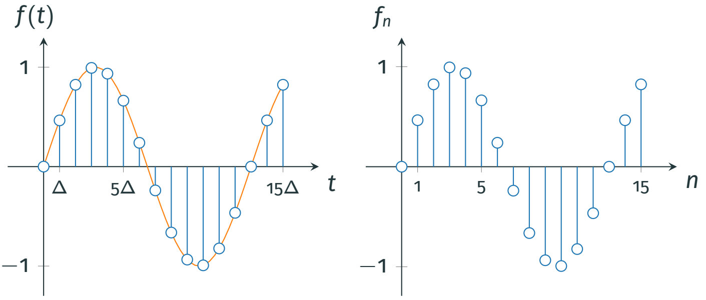
Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

Transformée en Z

Motivation

· En pratique, les signaux électriques doivent être discrétisés afin de pouvoir être traités numériquement.



Processus d'échantillonnage d'un signal sinusoïdal avec période Δ.

· Le *processus d'échantillonnage* à période fixe Δ aboutit à une suite numérique $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n \triangleq f(n\Delta)$.

Rappel des suites

- Une *suite numérique* est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$u_n = \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \\ n \mapsto u_n. \end{cases}$$

- On utilise plus souvent :
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour désigner la suite dans son ensemble,
  - u_n pour désigner l'image de l'entier n (le n-ème terme de la suite).

Transformée en Z

· En considérant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut construire la série entière correspondante :

$$S(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n, \tag{1}$$

de rayon de convergence R.

· En supposant le changement de variable $x = \frac{1}{z}$, la série (1) devient :

$$U(z) = u_0 + u_1 \frac{1}{z} + u_2 \frac{1}{z^2} + \cdots + u_n \frac{1}{z^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{1}{z^n}. \tag{2}$$

Cette nouvelle série converge pour $|z| \geq \dfrac{1}{R}$.

· La fonction $U(z)$, qu'on notera par $Z(u_n) = U(z)$ par la suite, est appelée *transformée en Z* de la suite u_n.

Exemple. Considérons la suite échelon-unité (u_n) où $u_n = 1$. La somme $U(z)$ associée est de la forme :

$$U(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

· Cette somme est la série géométrique de raison $\frac{1}{z}$ et elle est égale à :

$$U(z) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z}{z-1}.$$

· Alors, on peut conclure que la transformée en Z de la suite échelon-unité est $Z(1) = \dfrac{z}{z-1}$.

Exemple. Considérons la suite géométrique (u_n) où $u_n = r^n$. La somme $U(z)$ associée est de la forme :

$$U(z) = 1 + \frac{r}{z} + \frac{r^2}{z^2} + \cdots + \frac{r^n}{z^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{z_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{z}\right)^n .$$

· Cette somme est la série géométrique de raison $\frac{r}{z}$ et elle est égale à :

$$U(z) = \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{z}\right)} = \frac{z}{z - r}.$$

· Finalement, on peut en conclure que $Z(r^n) = \dfrac{z}{z - r}$.

Exercice. Démontrer que la transformée en Z de la suite (u_n) où $u_n = e^{a(n\Delta)} = (e^{a\Delta})^n$ est donnée par :

$$Z(e^{a(n\Delta)}) = \frac{z}{z - e^{a\Delta}}.$$

Propriétés

Propriétés

Linéarité

· La transformée en Z d'une combinaison linéaire de suites est égale à la combinaison linéaire des transformées en Z de ces suites :

$$Z(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha Z(u_n) + \beta Z(v_n). \tag{3}$$

Exemple. Calculons $Z(\cos(n\theta))$ et $Z(\sin(n\theta))$.

· On sait que la suite $w_n = (e^{jn\theta})$ a pour transformée $Z(e^{jn\theta}) = \dfrac{z}{z - e^{j\theta}}$:

$$\begin{aligned}
Z(e^{jn\theta}) &= \frac{z}{z - e^{j\theta}} \cdot \frac{z - e^{-j\theta}}{z - e^{-j\theta}} \\
&= \frac{z}{z - [\cos(\theta) + j\sin(\theta)]} \cdot \frac{z - [\cos(\theta) - j\sin(\theta)]}{z - [\cos(\theta) - j\sin(\theta)]} \\
&= \frac{z(z - \cos(\theta))}{z^2 - 2z\cos(\theta) + 1} + j\frac{z\sin(\theta)}{z^2 - 2z\cos(\theta) + 1}.
\end{aligned}$$

· À partir de la relation $e^{jn\theta} = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$, et en utilisant la propriété de linéarité, on obtient :

$$Z(e^{-jn\theta}) = Z(\cos(n\theta)) + jZ(\sin(n\theta)).$$

Exercice. Dans le cas d'un échantillonnage au pas Δ d'une fonction $\cos(\omega x)$ et d'une fonction $\sin(\omega x)$, les suites (u_n) et (b_n) sont définies par les termes $u_n = \cos(\omega n \Delta)$ et $b_n = \sin(\omega n \Delta)$.

· Démontrer les transformées en Z de ces suites :

$$Z(\cos(n\omega\Delta)) = \frac{z(z - \cos(\omega\Delta))}{z^2 - 2z\cos(\omega\Delta) + 1},$$
$$Z(\sin(n\omega\Delta)) = \frac{z\sin(\omega\Delta)}{z^2 - 2z\cos(\omega\Delta) + 1}.$$

Transformée pour un signal modulé

- Soient (u_n) une suite et $U(z)$ sa transformée en Z.
- La transformée en Z de la suite (v_n), où $v_n = r^n u_n$, est donnée par :

$$Z(v_n) = Z(r^n u_n) = U\left(\frac{z}{r}\right). \tag{4}$$

Démonstration. La transformée en Z de (u_n) est donnée par :

$$Z(u_n) = U(z) = u_0 + u_1 \frac{1}{z} + u_2 \frac{1}{z^2} + \cdots + u_n \frac{1}{z^n} + \cdots$$

- Maintenant, la transformée en Z de (v_n), notée $V(z)$, est comme suit :

$$\begin{aligned} V(z) &= u_0 + r u_1 \frac{1}{z} + r^2 u_2 \frac{1}{z^2} + \cdots + r^n u_n \frac{1}{z^n} + \cdots \\ &= u_0 + u_1 \frac{1}{\frac{z}{r}} + u_2 \frac{1}{\left(\frac{z}{r}\right)^2} + \cdots + u_n \frac{1}{\left(\frac{z}{r}\right)^n} + \cdots = U\left(\frac{z}{r}\right). \end{aligned}$$

Exemple. Soit la suite (v_n) où $v_n = r^n \cos(n\theta)$.

· On note $u_n = \cos(n\theta)$ avec transformée en Z donnée par :

$$Z(u_n) = U(z) = \frac{z(z - \cos(\theta))}{z^2 - 2z\cos(\theta) + 1}.$$

· En appliquant la propriété (4), on obtient :

$$V(z) = U\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{\frac{z}{r}\left(\frac{z}{r} - \cos(\theta)\right)}{\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 2\frac{z}{r}\cos(\theta) + 1} = \frac{z(z - r\cos(\theta))}{z^2 - 2zr\cos(\theta) + r^2}.$$

Exercice. Soit la suite (v_n) avec $v_n = e^{an\Delta}\sin(n\omega\Delta)$. Démontrer que :

$$Z(v_n) = \frac{ze^{a\Delta}\sin(\omega\Delta)}{z^2 - 2ze^{a\Delta}\cos(\omega\Delta) + (e^{a\Delta})^2}.$$

Propriétés

Transformée d'une suite avancée

- Soient (u_n) une suite et $U(z)$ sa transformée en Z.
- La transformée en Z de la suite (v_n), où $v_n = u_{n+1}$, est donnée par :

$$Z(u_{n+1}) = z[Z(u_n) - u_0]. \tag{5}$$

Démonstration.

$$Z(u_n) = U(z) = u_0 + u_1 \frac{1}{z} + u_2 \frac{1}{z^2} + \cdots + u_n \frac{1}{z^n} + \cdots$$

- Alors,

$$\begin{aligned} V(z) \ := Z(u_{n+1}) &= u_1 + u_2 \frac{1}{z} + u_3 \frac{1}{z^2} + \cdots + u_n \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots \\ &= z\left[u_1 \frac{1}{z} + u_2 \frac{1}{z^2} + u_3 \frac{1}{z^3} + \cdots + u_n \frac{1}{z^n} + \cdots\right] = z[U(z) - u_0]. \end{aligned}$$

Exemple. Soit (u_n) une suite. On cherche à déterminer la transformée en Z de $v_n = u_{n+2}$. En appliquant le résultat de (5) de façon itérative, on obtient :

$$Z(u_{n+2}) = z[Z(u_{n+1}) - u_1] = z[z[Z(u_n) - u_0] - u_1] = z^2 Z(u_n) - z^2 u_0 - z u_1.$$

Exercice. Démontrer que :

$$Z(u_{n+k}) = z^k Z(u_n) - z^k u_0 - z^{k-1} u_1 - \cdots - z^2 u_{k-2} - z u_{k-1} = z^k Z(u_n) - \sum_{i=0}^{k-1} z^{k-i} u_i.$$

- Soit à résoudre :

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 4^n,$$

avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

- La transformée en Z de l'équation de récurrence précédente est :

$$Z(u_{n+2}) - 5Z(u_{n+1}) + 6Z(u_n) = Z(4^n),$$

où :

$$Z(4^n) = \frac{z}{z-4},$$

$$Z(u_{n+1}) = zZ(u_n) - zu_0 = zZ(u_n),$$

$$Z(u_{n+2}) = z^2 Z(u_n) - z^2 u_0 - zu_1 = z^2 Z(u_n) - z.$$

- En substituant ces résultats dans la première équation, on obtient :

$$z^2 Z(u_n) - z - 5zZ(u_n) + 6Z(u_n) = \frac{z}{z-4},$$

d'où on l'a :

$$Z(u_n) = \frac{z + z(z-4)}{(z-4)(z^2 - 5z + 6)} = \frac{z\cancel{(z-3)}}{(z-4)\cancel{(z-3)}(z-2)} = \frac{z}{(z-4)(z-2)}.$$

Transformée d'une suite retardée

· Soit (u_n) une suite dont la transformée en Z est $U(z)$. La transformée en Z de la suite (v_n), définie par $v_n = u_{n-1}$ (avec $v_0 = 0$, $v_1 = u_0$, $v_2 = u_1, \ldots,$ $v_n = u_{n-1}$), est donnée par :

$$Z(u_{n-1}) = \frac{1}{z} Z(u_n). \tag{6}$$

Démonstration.

$$Z(u_n) = U(z) = u_0 + u_1 \frac{1}{z} + u_2 \frac{1}{z^2} + \cdots + u_n \frac{1}{z^n} + \cdots$$

· Alors,

$$\begin{aligned} V(z) &= v_0 + v_1 \frac{1}{z} + v_2 \frac{1}{z^2} + v_3 \frac{1}{z^3} + \cdots + v_{n+1} \frac{1}{z^{n+1}} + \cdots \\ &= 0 + u_0 \frac{1}{z} + u_1 \frac{1}{z^2} + u_2 \frac{1}{z^3} + \cdots + u_n \frac{1}{z^{n+1}} + \cdots \\ &= \frac{1}{z} \left[u_0 + u_1 \frac{1}{z} + u_2 \frac{1}{z^2} + \cdots + u_n \frac{1}{z^n} + \cdots \right] = \frac{1}{z} U(z). \end{aligned}$$

Transformée d'une suite retardée

Exercice. Soit (u_n) une suite. Démontrer que la transformée en Z de $v_n = u_{n-2}$ est :

$$Z(u_{n-2}) = \frac{1}{z^2} Z(u_n).$$

Exercice. Soit (u_n) une suite. Démontrer que la transformée en Z de $v_n = u_{n-k}$ est :

$$Z(u_{n-k}) = \frac{1}{z^k} Z(u_n).$$

Transformée de nu_n

· Soit (u_n) une suite dont la transformée en Z est $U(z)$. La transformée en Z de la suite (v_n), définie par $v_n = nu_n$, est donnée par :

$$Z(nu_n) = -z\frac{d}{dz}Z(u_n). \tag{7}$$

Démonstration.

$$Z(u_n) = U(z) = u_0 + u_1\frac{1}{z} + u_2\frac{1}{z^2} + \cdots + u_n\frac{1}{z^n} + \cdots$$

Alors,

$$Z(nu_n) \ = V(z) = u_1\frac{1}{z} + 2u_2\frac{1}{z^2} + \cdots + nu_n\frac{1}{z^n} + \cdots$$

On peut déduire que $V(z) = -z\dfrac{dU(z)}{dz}$.

Transformée de nu_n

Exemple. En considérant $u_n = 1$ et $Z(u_n) = \dfrac{z}{z-1}$, la transformée en Z de $v_n = n$ est :

$$\begin{aligned} Z(n) &= Z(nu_n) = -z\frac{d}{dz}Z(u_n) \\ &= -z\left(\frac{z-1-z}{(z-1)^2}\right) \\ &= \frac{z}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

- Soit (u_n) une suite dont la transformée en Z est $U(z)$. Le *théorème de la valeur initiale* stipule que :

$$\lim_{z \to +\infty} U(z) = u_0. \qquad \text{(lorsque la limite existe)} \tag{8}$$

- De même, le *théorème de la valeur finale* affirme que :

$$\lim_{z \to 1} (z-1)U(z) = \lim_{n \to +\infty} u_n. \qquad \text{(lorsque les limites existent)} \tag{9}$$

Transformée en Z inverse

Transformée en Z inverse

· Soit la transformée $Z(u_n) = U(z)$ de la suite (u_n). La *transformée en Z inverse* de $U(z)$, notée $Z^{-1}(U(z))$, est définie de manière à satisfaire :

$$Z^{-1}(U(z)) = Z^{-1}(Z(u_n)) = u_n.$$

· Autrement dit, la transformée en Z inverse de $U(z)$ permet de retrouver la suite (u_n). On appelle alors (u_n) *l'original* de $U(z)$.

· Les fonctions des transformées en Z des signaux de référence sont généralement sous forme de fractions rationnelles, par exemple :

$$Z(1) = \frac{z}{z-1}, \qquad Z(r^n) = \frac{z}{z-r}, \qquad Z(n) = \frac{z}{(z-1)^2}, \qquad Z(\delta_{k,0}) = \frac{1}{z^k}.$$

· Ainsi, pour obtenir la transformée en Z inverse, il est nécessaire de décomposer la fonction $U(z)$ (ou $U(z)/z$) en éléments simples, ce qui permet d'utiliser les transformées en Z usuelles ainsi que les propriétés de transformation (linéarité, modulation, etc.).

Principe de linéarité

· La transformée en Z inverse d'une combinaison linéaire de transformées $Z(u_n) = U(z)$ et $Z(v_n) = V(z)$ est égale à la combinaison linéaire des suites (u_n) et (v_n), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} Z^{-1}(\alpha U(z) + \beta V(z)) &= \alpha Z^{-1}(U(z)) + \beta Z^{-1}(V(z)) \\ &= \alpha u_n + \beta v_n, \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Application : Résolution d'une équation de récurrence.

- Dans l'application proposée précédemment, il a été obtenu :

$$Z(u_n) = U(z) = \frac{z}{(z-4)(z-2)}.$$

- Ici, on peut décomposer en éléments simples la fonction $\dfrac{U(z)}{z}$:

$$\frac{U(z)}{z} = \frac{1}{(z-4)(z-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-4} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-2}.$$

- En réinjectant ce résultat dans l'expression de $U(z)$, on obtient :

$$U(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-4} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-2}.$$

- Finalement, on peut calculer la transformée en Z inverse :

$$u_n = Z^{-1}(U(z)) = \frac{1}{2}Z^{-1}\left(\frac{z}{z-4}\right) - \frac{1}{2}Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) = \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}2^n.$$

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
***Mathématiques IUT GEII 1ère Année*.**
Ellipses, 2017.