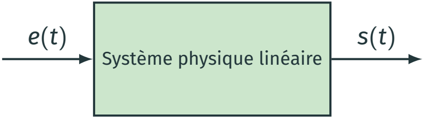
IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels II (OML2)

Transformée de Laplace

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Motivation

· La transformée de Laplace est un outil permettant de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel.



· Si un système physique est décrit par une équation différentielle linéaire, sa solution peut être obtenue à l'aide du produit de convolution :

$$s(t) = h(t) \otimes e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e(\tau - t)dt, \quad \text{où } h \text{ est la } \textit{réponse impulsionnelle}.$$

· En appliquant la transformée de Laplace, cette relation se traduit par :

$$S(p) = H(p)E(p), \quad \text{où } H \text{ représente la } \textit{fonction de transfert}.$$

· L'utilisation de la transformée de Laplace permet de simplifier l'analyse de la réponse d'un système soumis à un signal d'entrée $e(t)$.

Thèmes

1. Fonctions remarquables
2. Transformée de Laplace
3. Propriétés
4. Transformées de Laplace inverse

Fonctions remarquables

Fonction causale

· Une *fonction causale* est une fonction définie sur l'ensemble des réels, mais nulle pour toutes les valeurs négatives du temps :

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

· Les fonctions causales les plus couramment utilisées en ingénierie sont celles définies sur l'ensemble des réels positifs ou nuls.

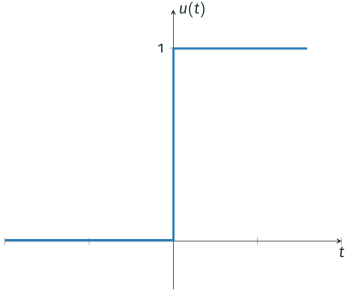
Conditions initiales

· Les conditions initiales d'une fonction causale $f(t) \in \mathbb{R}^+$ correspondent aux valeurs de cette fonction et de ses dérivées successives évaluées à l'instant $t = 0$.

Échelon unitaire

· La fonction *échelon unitaire*, également connue sous le nom d'*échelon de Heaviside*, est notée $u(t)$ et définie comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



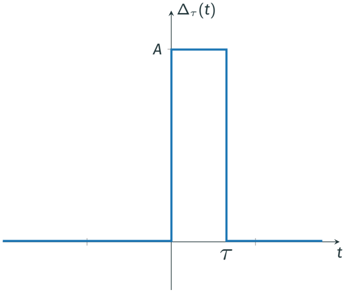
Remarque. Une fonction causale $f(t)$ peut être exprimée à l'aide de l'échelon unitaire $u(t)$:

$$f(t) = f(t)u(t).$$

Impulsion

· L'*impulsion* d'amplitude A et de durée τ est définie par :

$$\Delta_\tau(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Remarque. L'impulsion Δ_τ peut être réécrite à l'aide de l'échelon unitaire :

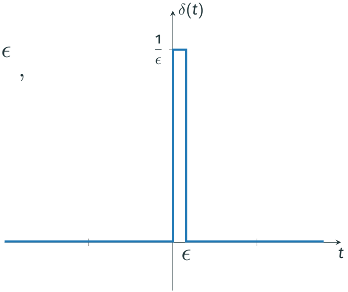
$$\Delta_\tau(t) = A[u(t) - u(t-\tau)].$$

Impulsion unitaire de Dirac

· L'*impulsion unitaire de Dirac*, d'amplitude $A \to +\infty$, de durée nulle $\epsilon \to 0$ et d'aire égale à 1, est notée :

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \Delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$



Remarque. $\delta(t)$ peut être réécrite à l'aide de l'échelon unitaire :

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[u(t) - u(t-\epsilon)].$$

· Une autre interprétation de l'impulsion de Dirac peut être donnée en définissant une *mesure de Dirac* sur un ensemble $\mathcal{A}$ comme suit :

$$\delta(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

· L'intégrale de Lebesgue par rapport à la mesure δ satisfait alors l'égalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(dt) = x(0).$$

· En pratique, on utilise souvent cette notation de manière abrégée, ce qui est considéré comme un abus de langage :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0).$$

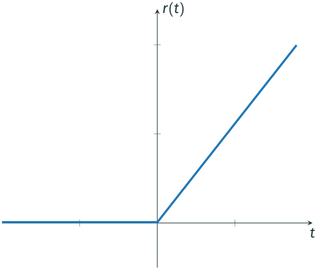
Exemple.

$$\int_{0}^{+\infty} \delta(t)e^{-pt}dt = e^{-p\times 0} = 1.$$

Fonction rampe

· La fonction *rampe* de pente $m = 1$ est définie par :

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Remarque. La fonction $r(t)$ peut être exprimée en termes de l'échelon unitaire comme suit :

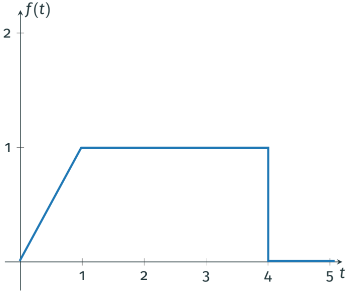
$$r(t) = t\,u(t).$$

Note. Il convient de noter que l'échelon unitaire $u(t)$ est la dérivée de $r(t)$:

$$u(t) = \frac{d}{dt}r(t) \quad \Rightarrow \quad r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau.$$

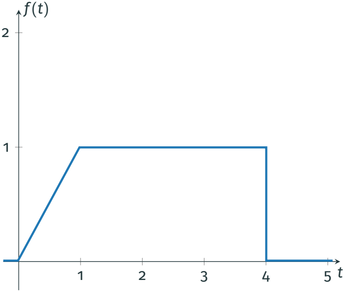
CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Exemple. Exprimer la fonction $f(t)$ en termes des fonctions remarquables définies précédemment.

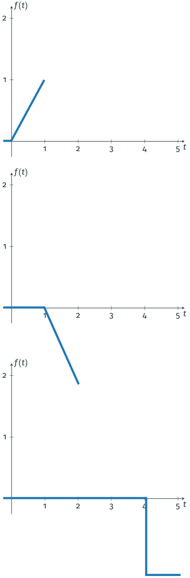


Fonctions remarquables

Solution 1.



$$f(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_3(t)$$
$$= r(t) - r(t-1) - u(t-4)$$

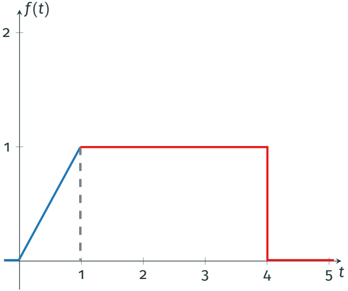


$$g_1(t) = r(t)$$

$$g_2(t) = -r(t-1)$$

$$g_3(t) = -u(t-4)$$

Solution 2. On représente la fonction $f(t)$ par morceaux :



$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

· Les intervalles de la forme $a \leq t \leq b$ peuvent être représentés par la *fonction d'activation* : $I_{a,b}(t) = u(t-a) - u(t-b)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= t \cdot I_{0,1}(t) + 1 \cdot I_{1,4}(t) \\ &= t[u(t) - u(t-1)] + 1[u(t-1) - u(t-4)] \\ &= tu(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-4) \\ &= r(t) - r(t-1) - u(t-4). \end{aligned}$$

Transformée de Laplace

Transformée de Laplace

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction causale.
- On appelle *transformée de Laplace* de $f(t)$ la fonction de la variable complexe p (ou s pour les anglo-saxons) définie par :

$$F(p) := \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\, dt.$$

- Cette transformation permet d'associer à toute fonction temporelle sa transformée de Laplace.
- Dans ce contexte, nous nous intéressons à l'utilisation de la transformée de Laplace pour résoudre des équations différentielles.

Remarque. La représentation graphique de $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ doit se faire sur le plan complexe !

Exercices. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(t) = \delta(t)$
2. $f(t) = e^{-at}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Exercices. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(t) = \delta(t)$
2. $f(t) = e^{-at}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Solution.

1. $$\mathcal{L}(\delta(t))(p) = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

2. $$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{-at})(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(a+p)t}}{a+p} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{p+a}. \end{aligned}$$

· Pour alléger la notation, dans la suite, on notera $\mathcal{L}(f(t)) := \mathcal{L}(f(t))(p)$.

Transformées usuelles

$f(t)$	$F(p)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Échelon de Heaviside $u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe $r(t)$	$\frac{1}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

Exercice. Démontrer les transformées précédentes.

[tableau des transformées]

Propriétés

Linéarité

- Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions causales. Considérons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- La transformée de Laplace de $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}(h(t)) = \mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t)).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \int_0^{+\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-pt} dt \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt \\
&= \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t)).
\end{aligned}$$

Propriétés

Dilatation

· Soient $f(t)$ une fonction causal et $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ sa transformée de Laplace.

· La transformée de Laplace de $f(\lambda t)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est donnée par :

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Démonstration.

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \int_0^{+\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt.$$

· En faisant le changement de variable $z = \lambda t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(z)) &= \int_0^{+\infty} f(z) e^{-p\frac{z}{\lambda}} \frac{dz}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(z) e^{-\frac{p}{\lambda} z} dz \\
&= \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

Translation

· Soient $f(t)$ une fonction causal et $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ sa transformée de Laplace.

· La transformée de Laplace de $f(t-\tau)$ (dilatation), avec $\tau \in \mathbb{R}^+$, est donnée par :

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-p\tau} F(p)$$

Démonstration.

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt.$$

· En considérant le changement de variable $z = t - \tau$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(z)) &= \int_{-\tau}^{+\infty} f(z) e^{-p(z+\tau)} dz \\ &= e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(z) e^{-pz} dz \\ &= e^{-p\tau} F(p). \end{aligned}$$

Exemple. La transformée de la fonction $f(t) = r(t) - r(t-1) - u(t-4)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \mathcal{L}(r(t)) - \mathcal{L}(r(t-1)) - \mathcal{L}(u(t-4)) \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-4p}}{p}. \end{aligned}$$

Propriétés

Dérivées successives

- Soient $f(t)$ une fonction causale et $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ sa transformée de Laplace.
- Soient $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ les n conditions initiales de la fonction f.
- On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t)) &= pF(p) - f(0), \\
\mathcal{L}(f''(t)) &= p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \\
&\vdots \\
\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Remarque. Si les conditions initiales sont nulles, chaque dérivation de la fonction dans le domaine temporel correspond à une multiplication par p dans le domaine de Laplace.

Démonstration.

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt.$$

· On effectuant une intégration par partie :

$$\begin{aligned} u &= e^{-pt}, & v' &= f'(t), \\ u' &= -pe^{-pt}, & v &= f(t), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t)) &= \Big[uv\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'vdt \\ &= \Big[e^{-pt}f(t)\Big]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\ &= -f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

· Les transformées des dérivées d'ordres supérieurs s'obtiennent par récurrence.

Propriétés

Transformée d'une primitive

· Contrairement à la dérivation, l'intégration correspond à une division par p dans le domaine de Laplace :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(p)}{p}.$$

Démonstration.

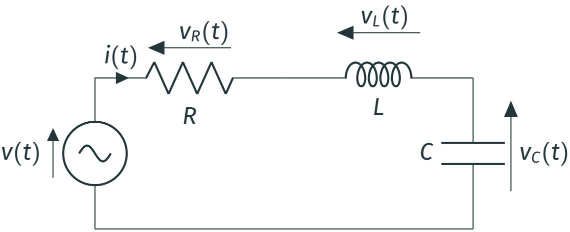
$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]e^{-pt}dt.$$

· On effectuant une intégration par partie :

$$\begin{array}{rlrl} u = & \int_0^t f(\tau)d\tau, & v' = & e^{-pt}, \\ u' = & f(t), & v = & -\frac{1}{p}e^{-pt}, \end{array}$$

d'où on obtient

$$\mathcal{L}(f'(t)) = -\frac{1}{p}\cancelto{0}{\left[e^{-pt}\int_0^t f(\tau)d\tau\right]_0^{+\infty}} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \frac{1}{p}F(p).$$



avec

$$v_C(0) = 0,$$
$$i(0) = 0.$$

- Grâce au principe de conservation de l'énergie, on sait :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\ &= Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + \cancelto{0}{v_C(0)}. \end{aligned}$$

- En calculant la transformée de Laplace, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v(t)) &= \mathcal{L}\left(Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau\right) \\ &= R\mathcal{L}(i(t)) + L\mathcal{L}(i'(t)) + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left(\int_0^t i(\tau)d\tau\right). \end{aligned}$$

- En notant $V(p) = \mathcal{L}(v(t))$ et $I(p) = \mathcal{L}(i(t))$, on a :

$$V(p) = RI(p) + \underbrace{Lp}_{Z_L(p)} I(p) - Li(\cancel{0})^{0} + \underbrace{\frac{1}{Cp}}_{Z_C(p)} I(p)$$

$$= \left[\frac{LCp^2 + RCp + 1}{Cp}\right] I(p).$$

- D'où l'on obtient :

$$I(p) = \underbrace{\left[\frac{Cp}{LCp^2 + RCp + 1}\right]}_{H(p)} V(p),$$

avec $H(p) = \frac{Cp}{LCp^2+RCp+1}$ la fonction de transfert du circuit RLC série.

· Si l'on souhaite calculer la tension $V_C(p)$, on a alors :

$$V_C(p) = \frac{1}{Cp} I(p) = \left[\frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}\right] V(p),$$

d'où on trouve la relation $\dfrac{V_C(p)}{V(p)} = \left[\dfrac{1}{1 + RCp + LCp^2}\right]$ (transmittance).

Lien avec le cours d'électronique. Supposons que $p = j\omega$, on obtient alors :

$$\frac{V_C(\omega)}{V(\omega)} = \left[\frac{1}{1 + jRC\omega + j^2 LC\omega^2}\right] = \left[\frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}\right].$$

· Il est possible d'identifier la fréquence propre $\omega_0 \in \mathbb{R}_+$ et le coefficient d'amortissement $\zeta \in \mathbb{R}_+$ du circuit :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Exercice. Calculer la transmittance $\dfrac{V_L}{V}$ en fonction de **a)** p et **b)** ω.

Modulation par une porteuse exponentielle

· Soient $f(t)$ une fonction causale et $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ sa transformée de Laplace.

· La transformée de Laplace de $e^{-at}f(t)$, avec $a \in \mathbb{R}$, est donnée par :

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(p+a).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(a+p)t}dt \\ &= F(a+p).\end{aligned}$$

Modulation par une rampe

· Soient $f(t)$ une fonction causale et $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ sa transformée de Laplace.

· La transformée de Laplace de $tf(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(p).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
F'(p) &= \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)\left[\frac{\partial}{\partial p}e^{-pt}\right]dt \\
&= -\int_0^{+\infty} [tf(t)]e^{-pt}dt \\
&= -\mathcal{L}(tf(t)).
\end{aligned}$$

Transformées de Laplace inverse

· Soit une fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace est $F(p)$. Alors, $f(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $F(p)$:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t).$$

Principe de linéarité

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(p) + \beta G(p)) &= \mathcal{L}^{-1}(\alpha\mathcal{L}(f(t)) + \beta\mathcal{L}(g(t)))\\ &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))\\ &= \alpha f(t) + \beta g(t).\end{aligned}$$

D'autres propriétés

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(\frac{p}{\lambda}\right)\right) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\lambda\mathcal{L}(f(\lambda t))\Big) = \lambda f(\lambda t),$$
$$\mathcal{L}^{-1}(F(p+a)) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(e^{-at}f(t))) = e^{-at}f(t).$$

Lien avec le produit de convolution

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)G(p)) = f(t) \otimes g(t),$$

où

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau,$$

représente le produit de convolution de deux fonctions.

Exercice.

En supposant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, trouvez la solution générale de l'équation différentielle suivante :

1. $y'(t) - 2y(t) = 6e^{-t}$
2. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-3t}$

Solution.

1. $y'(t) - 2y(t) = 6e^{-t}$ où $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

· On calcule d'abord la transformée de Laplace de l'équation différentielle :

$$\mathcal{L}(y'(t)) - 2\mathcal{L}(y(t)) = 6\mathcal{L}(e^{-t}),$$

d'où

$$\mathcal{L}(y(t)) = Y(p), \quad \mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1, \quad \mathcal{L}(e^{-3t}) = \frac{1}{p+1}.$$

· En substituant les expressions précédentes dans la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient :

$$pY(p) - 1 - 2Y(p) = \frac{6}{p+1},$$

d'où l'on déduit :

$$(p-2)Y(p) = \frac{6}{p+1} + 1 = \frac{p+7}{p+1}.$$

Transformées de Laplace inverse

- La transformée de Laplace de y est alors donnée par :

$$Y(p) = \frac{p+7}{(p+1)(p-2)}.$$

- Ensuite, il faut calculer la transformée de Laplace inverse de Y pour déterminer y. En appliquant une décomposition en éléments simples, on obtient :

$$Y(p) = \frac{p+7}{(p+1)(p-2)} = -\frac{2}{p+1} + \frac{3}{p-2}.$$

- En effectuant la transformée de Laplace inverse de chaque terme, on obtient finalement :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{p-2}\right) = -2e^{-t} + 3e^{2t}.$$

Solution (suite).

2. $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=e^{-3t}$ où $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

· La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$\mathcal{L}(y''(t))+3\mathcal{L}(y'(t))+2\mathcal{L}(y(t))=\mathcal{L}(e^{-3t}),$$

d'où

$$\mathcal{L}(y(t))=Y(p),\quad \mathcal{L}(y'(t))=pY(p)-y(0)=pY(p)-1,$$
$$\mathcal{L}(y''(t))=p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p,\quad \mathcal{L}(e^{-3t})=\frac{1}{p+3}.$$

· En substituant les expressions précédentes dans la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient :

$$(p^2+3p+2)Y(p)=\frac{p^2+6p+10}{p+3}.$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Solution (suite).

- Ensuite, la transformée de Laplace de y est alors donnée par :

$$Y(p) = \frac{p^2 + 6p + 10}{(p^2 + 3p + 2)(p + 3)} = \frac{p^2 + 6p + 10}{(p + 1)(p + 2)(p + 3)}.$$

- En effectuant une décomposition en éléments simples, on a :

$$Y(p) = \frac{p^2 + 6p + 10}{(p + 1)(p + 2)(p + 3)} = \frac{5}{2}\frac{1}{p + 1} - 2\frac{1}{p + 2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p + 3}.$$

- Enfin, en calculant la transformée inverse, on trouve :

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) \\ &= \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p + 1}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p + 2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p + 3}\right) \\ &= \frac{5}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}. \end{aligned}$$

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 1ère Année.
Ellipses, 2017.

B. Dequatre.
Mathématiques Appliquées à l'Électricité - Tome 2.
ERREUR PERIMES Nathan, 1995.

Jean Duveau, Marcel Pasquinelli, and Michel Tholomier.
Électronique : IUT 1ère Année GEII - GMP.
DUNOD, 2e édition, 2017.