IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels III (OML3)

Transformée de Fourier

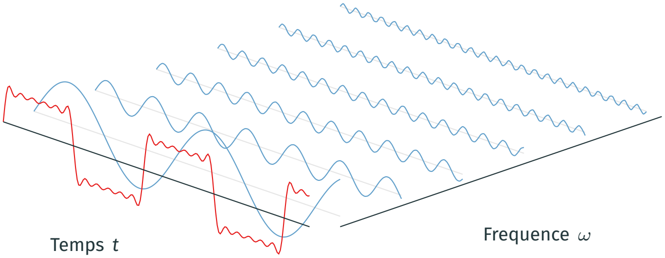
Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

Transformée de Fourier

Motivation

· La transformée de Fourier est l'un des outils les plus puissants utilisés dans le traitement du signal.

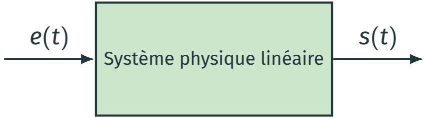


· Elle trouve également des applications dans d'autres domaines, tels que :

- Le génie mécanique, pour l'analyse des vibrations.
- La chimie, pour la mesure des rapports masse/charge des ions.

Motivation

· Des applications en électronique incluent l'analyse des circuits, où les composants électriques sont étudiés dans le domaine des fréquences.



· Si le système physique est décrit par une équation différentielle, l'utilisation de la transformée de Fourier permet d'obtenir :

$$S(\nu) = H(\nu)E(\nu),$$

où H représente la *fonction de transfert*.

- Soit $f(t)$ un signal appartenant à $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty.$$

- On définit la *transformée de Fourier* comme la fonction de la variable ν ainsi donnée :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t} \, dt. \tag{1}$$

- On note $\mathcal{F}(f(t)) = F(\nu)$ la transformée de Fourier de $f(t)$.
- Cette transformation permet d'associer à toute fonction temporelle sa transformée de Fourier.
- Observez la similitude avec la transformée de Laplace, qui est donnée par :

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-pt} \, dt,$$

où $p \in \mathbb{C}$. Que pouvez-vous en déduire ?

- Par la suite, on supposera que les signaux sont toujours dans $L^2(\mathbb{R})$.

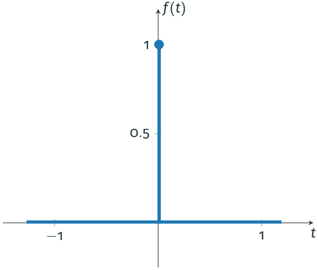
Exemple. Soit $f(t) = \delta(t)$ (fonction delta de Dirac).

· Sa transformée de Fourier s'obtient d'après l'intégrale suivante :

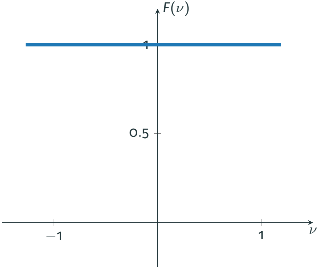
$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\delta(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi\nu t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi\nu(0)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

Transformée de Fourier

$$f(t) = \delta(t)$$



$$F(\nu) = 1$$



Exemple. Soit la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ e^{-at}, & t > 0. \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{R}^+$.

· Sa transformée de Fourier s'obtient d'après l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi\nu t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi\nu)t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-(a+j2\pi\nu)t}}{a+j2\pi\nu} \right]_\infty^0 \\ &= \frac{1}{a+j2\pi\nu}. \end{aligned}$$

Exemple. Soit la fonction

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{si } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- D'après la définition de la transformée de Fourier, on a :

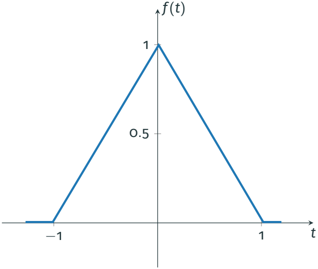
$$\mathcal{F}(\Lambda(t)) = \int_{-1}^{1} (1 - |t|) e^{-j2\pi\nu t} dt = \int_{-1}^{0} (1 + t) e^{-j2\pi\nu t} dt + \int_{0}^{1} (1 - t) e^{-j2\pi\nu t} dt.$$

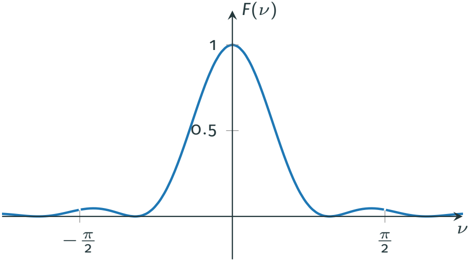
- En faisant des intégrations par partie pour les deux intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Lambda(t)) &= \left[-\frac{1}{j2\pi\nu} + \frac{1}{4\pi^2\nu^2} - \frac{e^{j2\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} \right] + \left[-\frac{e^{-j2\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} + \frac{1}{j2\pi\nu} + \frac{1}{4\pi^2\nu^2} \right] \\ &= -\frac{e^{j2\pi\nu} - 2 + e^{-j2\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} \\ &= \frac{1}{\pi^2\nu^2} \left(\frac{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}}{2j} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \right)^2. \end{aligned}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(\nu) = \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$$





Exercice. Soit $\Pi(t)$ la fonction porte-unité :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

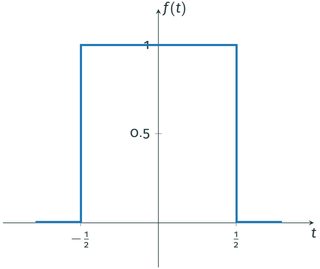
Démontrer que la transformée de Fourier est donnée par :

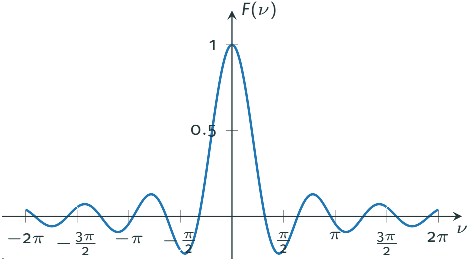
$$\mathcal{F}(\Pi(t)) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}.$$

Exercice. Démontrer que $\mathcal{F}(e^{j2\pi\nu_0 t} f(t)) = F(\nu - \nu_0)$.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$





Interprétation spectrale

- La fonction $F(\nu)$ est généralement une fonction complexe, c'est-à-dire

$$F(\nu) = \alpha(\nu) + j\beta(\nu).$$

- On peut alors exprimer $F(\nu)$ sous la forme exponentielle complexe :

$$F(\nu) = A(\nu)e^{j\varphi(\nu)}, \tag{2}$$

où $A(\nu)$ est le module et $\varphi(\nu)$ est son argument.

- La courbe associée à $A(\nu)$ est appelée le *spectre d'amplitude* du signal.
- La courbe associée à $\varphi(\nu)$ est appelée le *spectre de phase* du signal.

[animation]

Transformée de Fourier inverse

- Soient $f(t)$ un signal et $F(\nu) = \mathcal{F}(f(t))$ sa transformée de Fourier.
- La transformée de Fourier inverse de $F(\nu)$, notée $\mathcal{F}^{-1}(F(\nu))$, est donnée par l'intégrale :

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{2j\pi\nu t}d\nu. \tag{3}$$

- Si $f(t)$ est continue, alors $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu))$.

Propriétés

Propriétés

Linéarité

· La transformée de Fourier d'une combinaison linéaire de fonctions est égale à la combinaison linéaire des transformées de Fourier de ces fonctions :

$$\mathcal{F}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{F}(f(t)) + \beta \mathcal{F}(g(t)). \tag{4}$$

· De manière similaire :

$$\mathcal{F}^{-1}(\alpha F(\nu) + \beta G(\nu)) = \alpha \mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) + \beta \mathcal{F}^{-1}(G(\nu)). \tag{5}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le principe de linéarité de l'intégrale.

Dilatation

- Soient $f(t)$ un signal et $F(\nu) = \mathcal{F}(f(t))$ sa transformée de Fourier.
- La transformée de Fourier de $f(\lambda t)$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(f(\lambda t)) = \frac{1}{|\lambda|} F\left(\frac{\nu}{\lambda}\right). \tag{6}$$

Démonstration. En partant la définition, on a :

$$\mathcal{F}(f(\lambda t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda t) e^{-j2\pi\nu t} dt.$$

- Ici on suppose le changement de variable $z = \lambda t$. Si $\lambda > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(z)) &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-j2\pi\nu \frac{z}{\lambda}} dz \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-j2\pi(\frac{\nu}{\lambda})z} dz \\
&= \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) = \frac{1}{|\lambda|} F\left(\frac{\nu}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

Dilatation

- Si $\lambda < 0$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(z)) &= \frac{1}{\lambda}\int_{+\infty}^{-\infty} f(z)e^{-j2\pi\nu\frac{z}{\lambda}}dz \\ &= -\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-j2\pi(\frac{\nu}{\lambda})z}dz \\ &= \frac{1}{-\lambda}F\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) = \frac{1}{|\lambda|}F\left(\frac{\nu}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

- On peut alors conclure que

$$\mathcal{F}(f(\lambda t)) = \frac{1}{|\lambda|}F\left(\frac{\nu}{\lambda}\right).$$

Exemple. Soit $\Pi_a(t)$ la fonction porte de Dirac :

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} a, & \text{si } |t| \leq \dfrac{1}{2a}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{R}^+$.

- On peut exprimer $\Pi_a(t)$ comme une dilatation de la fonction porte-unité :

$$\Pi_a(t) = a\Pi(at).$$

- Rappelez-vous que $\mathcal{F}(\Pi(t)) = \dfrac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$.
- En appliquant les propriétés de la dilatation et de la linéarité, on obtient :

$$\mathcal{F}(\Pi_a(t)) = \mathcal{F}(a\Pi(at)) = a\mathcal{F}(\Pi(at)) = a\left[\frac{1}{a}\frac{\sin(\pi\frac{\nu}{a})}{\pi\frac{\nu}{a}}\right] = \frac{\sin(\frac{\pi\nu}{a})}{\frac{\pi\nu}{a}}.$$

Propriétés

Dualité

- Soient $f(t)$ un signal continu et $F(\nu)$ sa transformée de Fourier.
- Le principe de dualité permet d'établir les relations duales suivantes :

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu), \\ F(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} f(-\nu). \end{aligned} \tag{7}$$

Dualité

Démonstration. D'après la transformation de Fourier inverse, on sait :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2j\pi\nu t} d\nu.$$

· On a donc pour $f(-t)$:

$$f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{-2j\pi\nu t} d\nu.$$

· En échangeant les variables temporelles et fréquentielles dans l'expression précédente, on obtient :

$$f(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-2j\pi\nu t} dt = \mathcal{F}(F(t)).$$

· On obtient alors les équations duales :

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu), \\ F(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} f(-\nu). \end{aligned}$$

Exemple. Soit $f(t) = 1$. Sachant que

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = 1,$$

et en appliquant le principe de dualité, on obtient :

$$\mathcal{F}(1) = \delta(-\nu) = \delta(\nu).$$

Exercice. Démontrer que $\mathcal{F}\left(\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right) = \Pi(\nu)$.

Propriétés

Exemple. Calculons la transformée de Fourier de $f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$.

- D'après les formules d'Euler, on sait :

$$f(t) = \frac{e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{-j2\pi\nu_0 t}}{2}.$$

- En appliquant la définition de la transformée de Fourier, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\cos(2\pi\nu_0 t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{-j2\pi\nu_0 t}}{2}\right] e^{-j2\pi\nu t} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu_0 t} e^{-j2\pi\nu t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\nu_0 t} e^{-j2\pi\nu t} dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi[\nu-\nu_0]t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi[\nu+\nu_0]t} dt\right],
\end{aligned}$$

d'où on trouve :

$$\mathcal{F}(\cos(2\pi\nu_0 t)) = \frac{1}{2}[\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)].$$

Propriétés

Exercice. Démontrer que :

$$\mathcal{F}(\sin(2\pi\nu_0 t)) = \frac{1}{2j}[\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)].$$

Translation

- Soient $f(t)$ un signal et $F(\nu) = \mathcal{F}(f(t))$ sa transformée de Fourier.
- La transformée de Fourier de $f(t-\tau)$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(f(t-\tau)) = e^{-j2\pi\nu\tau}F(\nu). \tag{8}$$

Démonstration. D'après la définition de la transformée de Fourier, on a :

$$\mathcal{F}(f(t-\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-j2\pi\nu t}dt.$$

- En faisant le changement de variable $z = t - \tau$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(z)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-j2\pi\nu(z+\tau)}dz \\
&= e^{-j2\pi\nu\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-j2\pi\nu z}dz \\
&= e^{-j2\pi\nu\tau}F(\nu).
\end{aligned}$$

Exemple. Considérons la transformée de Fourier de $f(t) = \cos(2\pi\nu_0[t-\tau])$.

· En sachant que

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{2}[\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)],$$

alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t-\tau)) &= \frac{e^{-j2\pi\nu\tau}}{2}[\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)] \\ &= \frac{e^{-j2\pi\nu_0\tau}}{2}\delta(\nu-\nu_0) + \frac{e^{j2\pi\nu_0\tau}}{2}\delta(\nu+\nu_0).\end{aligned}$$

Modulation par une porteuse sinusoïdale

- La transformée de Fourier de $g(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)f(t)$ avec $\nu_0 \in \mathbb{R}^+$ est :

$$\mathcal{F}(\cos(2\pi\nu_0 t)f(t)) = \frac{1}{2}[F(\nu - \nu_0) + F(\nu + \nu_0)]. \tag{9}$$

Démonstration. D'après les formules d'Euler, on sait que :

$$\cos(2\pi\nu_0 t) = \frac{e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{-j2\pi\nu_0 t}}{2}.$$

- On peut alors réécrire la transformée de Fourier de $g(t)$ comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\cos(2\pi\nu_0 t)f(t)) &= \mathcal{F}\left(\left[\frac{e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{-j2\pi\nu_0 t}}{2}\right]f(t)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(e^{j2\pi\nu_0 t}f(t)) + \mathcal{F}(e^{-j2\pi\nu_0 t}f(t))\right].\end{aligned}$$

- En utilisant la propriété $\mathcal{F}(e^{j2\pi\nu_0 t}f(t)) = F(\nu - \nu_0)$, on obtient (9).

Modulation par une porteuse sinusoïdale

Exercice. Démontrer que $\mathcal{F}(\sin(2\pi\nu_0 t)f(t)) = \frac{1}{2j}[F(\nu-\nu_0) - F(\nu+\nu_0)]$ avec $\nu_0 \in \mathbb{R}^+$.

Modulation par une rampe

- La transformée de Fourier de $g(t) = tf(t)$ est :

$$\mathcal{F}(tf(t)) = -\frac{1}{2\pi j}\frac{dF(\nu)}{d\nu}. \tag{10}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\nu}F(\nu) &= \frac{d}{d\nu}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\nu t}dt\right)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(e^{-j2\pi\nu t}\right)dt\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(-2\pi jte^{-j2\pi\nu t}\right)dt\\
&= -2\pi j\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-j2\pi\nu t}dt\\
&= -2\pi j\mathcal{F}(tf(t)),
\end{aligned}$$

d'où on l'en déduit (10).

Parité

- Soient $f(t)$ un signal et $F(\nu) = \mathcal{F}(f(t))$ sa transformée de Fourier.
  - Si $f(t)$ est paire, alors $F(\nu)$ est réelle et paire.
  - Si $f(t)$ est impaire, alors $F(\nu)$ est imaginaire pur et impaire.

Exercice. Démontrer les deux propriétés précédentes.

Dérivation

· Soient $f(t)$ une fonction continue de $L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f(t))$ sa transformée de Fourier. Alors, la transformée de Fourier de $f'(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(f'(t)) = j2\pi\nu\mathcal{F}(f(t)). \tag{11}$$

· On observe que la transformée de Fourier de $f(t)$ peut être calculée à partir de la transformée de Fourier de $f'(t)$.

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{j2\pi\nu}\mathcal{F}(f'(t)). \tag{12}$$

Dérivation

Exemple. Considérons la transformée de Fourier de la fonction

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{si } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

· On cherche à calculer $\mathcal{F}(\Lambda(t))$ à partir de $\mathcal{F}(\Lambda'(t))$. La dérivée de $\Lambda(t)$ est :

$$\Lambda'(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 < t < 0, \\ -1, & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{si } |t| > 1, \end{cases}$$

expression équivalente à $\Lambda'(t) = \Pi\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right)$.

· En sachant que $\mathcal{F}(\Pi(t)) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$, et en appliquant la propriété de translation $\mathcal{F}(f(t-\tau)) = e^{-j2\pi\nu\tau}F(\nu)$, on a :

$$\mathcal{F}(\Lambda'(t)) = e^{j\pi\nu}\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} = [e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}]\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}.$$

Finalement, en utilisant la propriété de l'équation (12), on obtient

$$\mathcal{F}(\Lambda(t)) = \left[\frac{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}}{2j}\right]\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} = \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}.$$

Intégration

· Soient $f(t)$ une fonction à moyenne nulle (i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 0$) et continue de $L^2(\mathbb{R})$, et $F(\nu) = \mathcal{F}(f(t))$ sa transformée de Fourier.

· La transformée de Fourier de $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$ est donnée par :

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(\nu)}{j2\pi\nu}. \tag{13}$$

Intégration

Démonstration. En partant de la propriété de la dérivation, on a :

$$\mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = j2\pi\nu\mathcal{F}(f(t)).$$

· · On peut définir $h(t) = \dfrac{df(t)}{dt}$, alors on a $f(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$. Ensuite, la transformée est donc donnée par :

$$\mathcal{F}(h(t)) = j2\pi\nu\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau\right),$$

d'où on obtient

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{j2\pi\nu}\mathcal{F}(h(t)).$$

· On peut observer que $\dfrac{df(t)}{dt} = \dfrac{d[f(t)+a]}{dt}$, avec $a \in \mathbb{R}$. L'expression précédente est donc vraie si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = 0$. Sinon, il existe une constante c telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [h(t) - c]\,dt = 0$, et

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{j2\pi\nu}\mathcal{F}(h(t)) + c\delta(\nu).$$

Théorème de Parseval

Théorème de Parseval

· Soient $f(t)$ une fonction continue de $L^2(\mathbb{R})$, et $F(\nu) = \mathcal{F}(f(t))$ sa transformée de Fourier.

· Le théorème de Parseval stipule que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu. \tag{14}$$

· Ce théorème nous affirme que les énergies de $f(t)$ et de $F(\nu)$ sont égales. Il constitue un résultat fondamental pour comprendre les relations entre une fonction et sa transformée de Fourier.

Résolution des équations différentielles ordinaires

· Soit l'équation différentielle du second ordre :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e(t),$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. En appliquant la transformée de Fourier, on obtient :

$$-4a\pi^2\nu^2 F(\nu) + j2b\pi\nu F(\nu) + cF(\nu) = E(\nu),$$

d'où l'on trouve :

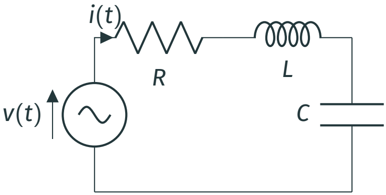
$$F(\nu) = \left[\frac{1}{-4a\pi^2\nu^2 + j2b\pi\nu + c}\right] E(\nu).$$

· Cette expression est de la forme $F(\nu) = H(\nu)E(\nu)$, où la fonction de transfert est donnée par :

$$H(\nu) = \frac{1}{-4a\pi^2\nu^2 + j2b\pi\nu + c}.$$

· De manière similaire à la transformée de Laplace, la transformée de Fourier nous permet d'associer une fonction de transfert aux systèmes dynamiques.

Exemple. Considérons le circuit RLC en série :



· Grâce au principe de conservation de l'énergie on a :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\ &= Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

· En appliquant la transformée de Fourier sur l'équation différentielle, on obtient :

$$V(\nu) = RI(\nu) + j2\pi\nu LI(\nu) + \frac{1}{j2\pi\nu C}I(\nu).$$

· D'après votre cours d'électronique, vous avez défini, les réactances $Z_L(\nu) = j2\pi\nu L = j\omega L$ et $Z_C(\nu) = \dfrac{1}{j2\pi\nu C} = \dfrac{1}{j\omega C}$.

· A partir de l'expression précédente, on a :

$$I(\nu) = \underbrace{\left[\frac{jC(2\pi\nu)}{1 + jRC(2\pi\nu) + j^2LC(2\pi\nu)^2}\right]}_{H(\nu)} V(\nu).$$

Lien avec le cours d'électronique

- Si l'on s'intéresse à calculer la tension $V_C(\nu)$, on a :

$$V_C(\nu) = Z_C(\nu)I(\nu) = \left[\frac{1}{1 + jRC(2\pi\nu) + j^2LC(2\pi\nu)^2}\right]V(\nu),$$

d'où on obtient la relation suivante pour le gain (transmittance) :

$$T(\nu) := \frac{V_C(\nu)}{V(\nu)} = \frac{1}{1 + jRC(2\pi\nu) + j^2LC(2\pi\nu)^2}.$$

- En considérant le changement de variable $\omega = 2\pi\nu$, on obtient :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}.$$

- En comparaison avec la forme générale :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2},$$

il est possible d'identifier la fréquence propre $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$ et le coefficient d'amortissement $m \in \mathbb{R}^+$ du circuit :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 2ème Année.
Ellipses, 2018.

B. Dequatre.
Mathématiques Appliquées à l'Électricité - Tome 2.
ERREUR PERIMES Nathan, 1995.

Wolfram Mathematica.
`https://www.wolfram.com/mathematica/index.html.fr`.
Accessed: 2023-07.