IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels (OML1)

Fonctions numériques à variable réelle et usuelles du GEII (partie II)

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

2021 – 2022

Thèmes

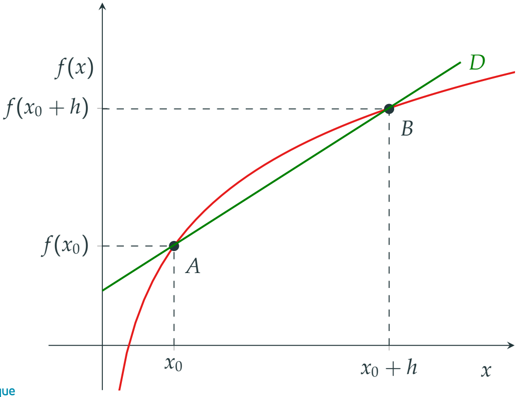
Dérivée d'une fonction

Définition

· Soit une fonction $f(x)$ monotone sur un intervalle I

· Sur cet intervalle, on définit entre les points d'abscisses x_0 et $x_1 = x_0 + h$ le taux de variation par le quotient :

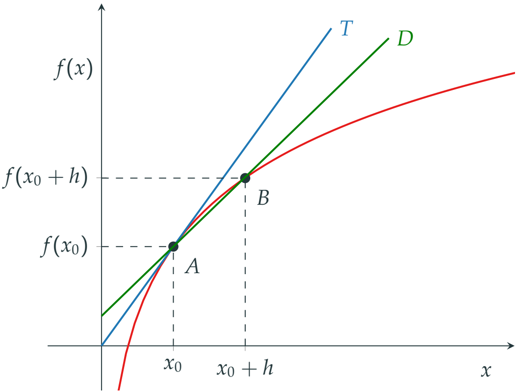
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur

Université Polytechnique Hauts-de-France

Définition



[animation]

· Si $h \to 0$, d'où $x_0 + h \to x_0$ et la droite D tend vers la tangente T à la courbe

· Dans ce cas-là, le taux de variation tend vers le coefficient directeur de la tangente T à la courbe

Définition

· On appelle dérivée en un point A, la valeur que prend le taux de variation quand $h \to 0$. On note cette dérivée :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

· On dit qu'une fonction est dérivable en un point donné x_0 si $f'(x_0)$ est finie

· En utilisant l'expression précédente du taux de variation pour toute valeur de $x_0 \in I$, on détermine la dérivée de toute fonction :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

· On notera la dérivée de f par rapport à x comme : $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$

Exemples.

1. $f(x) = x^2$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x + h \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Exemples. (continuation)

2. $f(x) = x^n \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + a_1 h x^{n-1} + a_2 h^2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} h^{n-1} x + h^n - \cancel{x^n}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(a_1 x^{n-1} + a_2 h x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} h^{n-2} x + h^{n-1})}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} a_1 x^{n-1} + a_2 h x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} h^{n-2} x + h^{n-1} \\
&= a_1 x^{n-1}
\end{aligned}
$$

· Grâce au triangle du Pascal, on a $a_n = n$, d'où on obtient $f'(x) = nx^{n-1}$

Exemples. (continuation)

3. $f(x) = \cos(x)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \cos(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{[\cos(h) - 1]}{h}}_{\to 0} - \sin(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}
$$

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	e^x	e^x	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$-\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$		

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	e^x	e^x	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$		

Exercice. Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt[n]{x}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et appliquer la formule pour le cas $n = 3$

Piste. On peut récrire la fonction f comme $f(x) = x^{1/3}$, d'où on obtient

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^{1/3}\right] = \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Règles de dérivation

· Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ et $a \in \mathbb{R}$. Les règles suivantes peuvent être établies :

Opération	Dérivée
$af(x)$	$af'(x)$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$

Exercice. calculer la dérivée de $h(x) = 5x\sin(x)$

Règles de dérivation

· Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ et $a \in \mathbb{R}$. Les règles suivantes peuvent être établies :

Opération	Dérivée
$af(x)$	$af'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$

Exercice. calculer la dérivée de $h(x) = 5x\sin(x)$

Solution.

· Si on dénote $f(x) = x$ et $g(x) = \sin(x)$, on obtient $f'(x) = 1$ et $g'(x) = \cos(x)$

· D'où la dérivée de $h(x) = 5f(x)g(x)$ est donnée par :

$$h'(x) = 5[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] = 5[\sin(x) + x\cos(x)]$$

Dérivées de quelques fonctions composées

· De manière récurrente, la dérivée $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ de la fonction apparaît dans l'expression finale de la fonction étudiée, par exemple :

$$g(x) = f^n(x)$$
$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[f^n(x)] = nf^{n-1}(x)\frac{df(x)}{dx} = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Dérivées de quelques fonctions composées

Fonction $g(x)$	Dérivée de la fonction $g'(x)$
$f^n(x)$	$nf^{n-1}(x)f'(x)$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{1}{2f(x)}f'(x)$
$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{1}{f^2(x)}f'(x)$
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)}f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$
$\sin(f(x))$	$\cos(f(x))f'(x)$

· La dérivée seconde d'une fonction $f(x)$ est donnée par la dérivée de $f'(x)$

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]$$

· La dérivée et la dérivée seconde ont d'interprétations précises en physique

· Soit $f(t) = t^3 + t$ une fonction décrivant la position d'un objet à l'instant t donné. Les dérivées $\frac{df(t)}{dt}$ et $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ représenterons la vitesse et l'accélération associées à l'objet au même instant t

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = 3t^2 + 1 \qquad \text{(fonction vitesse)}$$

$$f''(t) = \frac{d^2f(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = 6t \qquad \text{(fonction accélération)}$$

Dérivée d'ordre n

· Dans un cadre général, la dérivée d'ordre n donnée par :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\cdots\left[\frac{df(x)}{dx}\right]\right]$$

Exercice. Calculer la dérivée d'ordre $n = 5$ de $f(x) = \sin(x)$.

· Dans un cadre général, la dérivée d'ordre n donnée par :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\cdots\left[\frac{df(x)}{dx}\right]\right]$$

Exercice. Calculer la dérivée d'ordre $n = 5$ de $f(x) = \sin(x)$.

Solution.

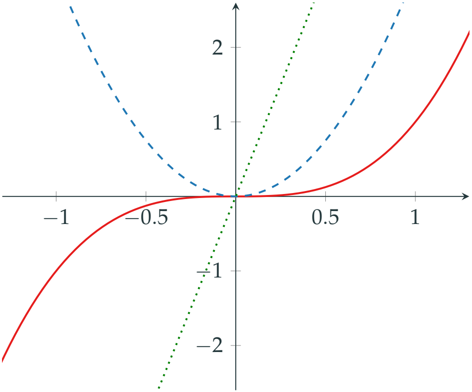
$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) \\
f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x) \\
f''(x) &= \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x) \\
f'''(x) &= \frac{df''(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[-\sin(x)] = -\cos(x) \\
f^{(iv)}(x) &= \frac{df'''(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[-\cos(x)] = \sin(x)
\end{aligned}$$

Tableau de variation

Tableau de variation

- Considérons $f(x) = x^3$.

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$

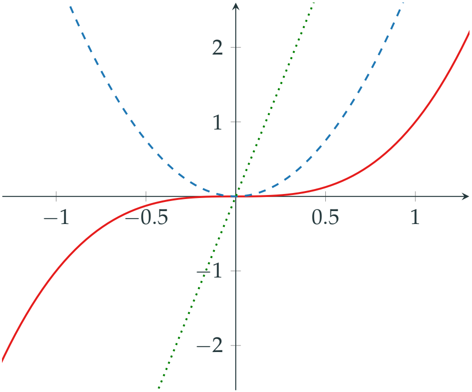


- Que peut-on observer ?

Tableau de variation

- Considérons $f(x) = x^3$.

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$



- Que peut-on observer ?
- On observe que $f'(x) \geq 0$ pour tout x, et $f''(x) = \begin{cases} \text{positive}, & x > 0 \\ \text{négative}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Quelques remarques.

- La dérivée d'une fonction $f'(x)$ permet d'étudier la *pente* de sa courbe représentative
  - Si $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in I$, la fonction est *croissante* dans l'intervalle I
  - Si $f'(x) > 0 \; \forall x \in I$, la fonction est *strictement croissante* dans l'intervalle I
  - Si $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in I$, la fonction est *décroissante* dans l'intervalle I
  - Si $f'(x) < 0 \; \forall x \in I$, la fonction est *strictement décroissante* dans l'intervalle I
- La dérivée seconde $f''(x)$ permet d'étudier la *concavité* de sa courbe représentative
  - Si $f''(x) > 0 \; \forall x \in I$, la fonction a une *concavité positive* ($\cup$) dans l'intervalle I
  - Si $f''(x) < 0 \; \forall x \in I$, la fonction a une *concavité négative* ($\cap$) dans l'intervalle I
  - Les valeurs pour lesquelles $f''(x) = 0$ sont les abscisses des points d'inflexion de la courbe (changement de concavité $\cup \to \cap$ ou $\cap \to \cup$)

Tableau de variation

Exemple. Dessiner la fonction

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

· Tout d'abord, on peut étudier le domaine de définition : $D = \mathbb{R} - \{2\}$

· On peut aussi étudier le signe de la fonction :

	2		
-	0	+	$(x-2)$
-	fi	+	$\frac{3}{x-2}$

· En regardant les limites, on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{-\infty} = 0(-), \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{\infty} = 0(+)$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0(-)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to2^+} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0(+)} = \infty$$

Tableau de variation

Exemple (continuation).

· Ensuite, on calcul $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{3}{x-2}\right] = -\frac{3}{(x-2)^2}$$

· On regardant le signe de $f'(x)$, on observe que $f(x) < 0$ pour tout x

	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	fi	+
$f'(x)$	$\searrow$	fi	$\searrow$

Exemple (continuation).

· On peut calculer $f''(x)$ si c'est nécessaire :

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[-\frac{3}{(x-2)^2}\right] = \frac{6}{(x-2)^3}$$

· En regardant le signe de $f''(x)$, on obtient que :

$$f''(x) \text{ est } \begin{cases} \text{négative si } x < 2 \\ \text{fi si } x = 2 \\ \text{positive si } x > 2 \end{cases}$$

Remarque. Parce que $f''(x) \neq 0$ pour tout x, alors $f(x)$ n'a pas des points d'inflexion

Exemple (continuation).

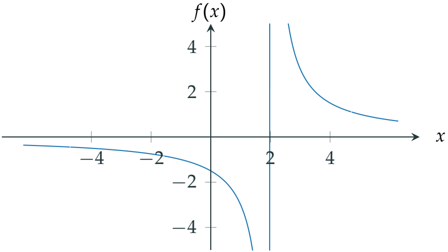
· Finalement, on sait que la fonction f doit satisfaire les conditions suivantes :

	$x<2$	$x=2$	$x>2$
$f(x)$	-	fi	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	fi	$\searrow$
$f''(x)$	$\cap$	fi	$\cup$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0(-), \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0(+)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$$

· Cette information nous laisse dessiner la fonction f :



Exercice. Dessiner la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2}$$

Tableau de variation

Exercice. Dessiner la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2}$$

Solution.

· Tout d'abord, on peut étudier le domaine de définition :

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{e^x}{(x-2)(x-1)},$$

d'où on obtient que la fonction n'est pas définie pour $x = 1$ et $x = 2$, alors $D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

· On peut aussi étudier le signe de la fonction :

	1		2		
+	+	+	+	+	e^x
-	0	+	+	+	$(x-1)$
-	-	-	0	+	$(x-2)$
+	fi	-	fi	+	$\frac{e^x}{(x-2)(x-1)}$

Tableau de variation

· En regardant les limites, on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2-3x+2} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^1}{0(+)} = \infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^1}{0(-)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^2}{0(-)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^2}{0(+)} = \infty$$

Solution (continuation).

· Ensuite, on calcul $f'(x)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x}{x^2-3x+2}\right] &= \frac{e^x(x^2-3x+2)-e^x(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} \\
&= \frac{e^x(x^2-5x+5)}{(x^2-3x+2)^2} \\
&= \frac{e^x\left(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}{(x-1)^2(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

· En regardant le signe de la dérivée, on obtient :

	1		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$		
+	+	+	+	+	+	+	+	+	e^x
-	-	-	0	+	+	+	+	+	$x-\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$
-	-	-	-	-	-	-	0	+	$x-\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$
+	0	+	+	+	0	+	+	+	$(x-1)^2(x-2)^2$
+	fi	+	0	-	fi	-	0	+	$f'(x)$
$\nearrow$	fi	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	fi	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	

Solution (continuation).

· Finalement, on sait que la fonction f doit satisfaire les conditions suivantes :

		1		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	
$f'(x)$	+	fi	-	-	-	fi	+	+	+
$f'(x)$	$\nearrow$	fi	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	fi	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$$

· Cette information nous laisse dessiner la fonction f **(Exercice)**