IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels IV (OML4)

Calcul matriciel

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

Calcul matriciel

Motivation

· Le calcul matriciel est un outil essentiel dans plusieurs domaines en mathématiques et ingénierie. Par exemple, le système d'équations :

$$\left\{\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,m}x_m &= b_m \end{aligned}\right. \tag{1}$$

peut être écrit sous la forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} \tag{2}$$

Motivation

· Ceci est équivalent à écrire $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, où

- $\boldsymbol{A}$ est une matrice de m lignes et m colonnes,
- $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{b}$ sont deux vecteurs colonnes de taille m.

· Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, alors le système admet une solution unique, qui est donnée par :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b},$$

où $\boldsymbol{A}^{-1}$ désigne la matrice inverse de $\boldsymbol{A}$.

Définition

· On note $\boldsymbol{A} \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ (ou $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$) la matrice réelle de m lignes et p colonnes donnée par :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

où $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$. Le terme $a_{i,j}$ correspond au coefficient de $\boldsymbol{A}$ en i-ème ligne et j-ème colonne.

· On note $\boldsymbol{x} \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ (ou $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m}$) le vecteur (colonne) de taille m donnée par :

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \tag{4}$$

où $x_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, m$. Le i-ème élément du vecteur $\boldsymbol{x}$ est donné par x_i.

- Si $\boldsymbol{A} \in M_{m,m}(\mathbb{R}) := M_m(\mathbb{R})$, alors on dit qu'elle est une matrice carrée de taille m.
- $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique si $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, m$.
- $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

- $\boldsymbol{I}_m \in M_m(\mathbb{R})$ est une matrice identité de taille m si elle diagonale avec $I_{i,i} = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.
- $\boldsymbol{0} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est une matrice nulle de taille $m \times n$ si $o_{i,j} = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$.

Matrices particulières

- Soient $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{B} \in M_m(\mathbb{R})$ deux matrices de la forme :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix}.$$

  On dit que $\boldsymbol{A}$ est une matrice triangulaire supérieur et que $\boldsymbol{B}$ est une matrice triangulaire inférieur.

- $\boldsymbol{B} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ est la matrice transposée de $\boldsymbol{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si $b_{j,i} = a_{i,j}$ pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

  On note $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^\top$. La transposée de la matrice $\boldsymbol{A}^\top$ est la matrice $\boldsymbol{A}$.

Égalité de deux matrices

- Soient $\boldsymbol{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{B} \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices.
- On dit qu'elles sont égales si et seulement si :
  - Elles sont de la même taille :

$$\begin{aligned} m &= p \quad \text{(même nombre de lignes)}, \\ n &= q \quad \text{(même nombre de colonnes)}. \end{aligned}$$

  - Pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, on a

$$a_{i,j} = b_{i,j}.$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Addition des matrices

- L'addition des matrices n'est définie que si elles ont la même taille.
- La somme de $\boldsymbol{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{B} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est une nouvelle matrice $\boldsymbol{C} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

- Pour la soustraction $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, on a $c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}$ pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$.

Addition des matrices

Exemple. Considérons

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

L'addition $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ est égale à

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

La soustraction $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ est égale à

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Addition des matrices

Exercice. Calculer (si possible) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ pour les matrices suivantes :

a. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Addition des matrices

· Soient $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ trois matrices réelles de taille $m \times n$.

Propriétés.

1. L'addition matricielle est commutative et associative :
   - $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$,
   - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D})$.
2. L'élément neutre est la matrice nulle $\boldsymbol{O}$.
3. La matrice opposée de la matrice $\boldsymbol{A}$ est $-\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

Multiplication d'une matrice par un réel

- Soient $\boldsymbol{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel.
- Le produit $\boldsymbol{B} = \lambda \boldsymbol{A}$ est la matrice $\boldsymbol{B} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ avec éléments $b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$:

$$\boldsymbol{B} = \lambda \boldsymbol{A} = \lambda \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

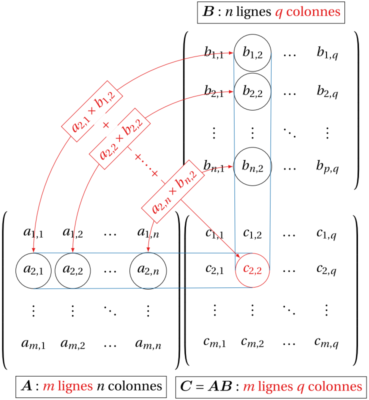
- Pour le cas de la division $\boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{A}}{\lambda} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$, on a $b_{i,j} = \lambda^{-1} a_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{\lambda}$.

Multiplication des matrices

- Soient $\boldsymbol{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{B} \in M_{p,q}(\mathbb{R})$.
- La multiplication $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ n'est définie que si le nombre de colonnes de $\boldsymbol{A}$ est égal au nombre de lignes de $\boldsymbol{B}$, c'est-à-dire si $n = p$.
- La matrice $\boldsymbol{C}$ obtenue de la multiplication est ensuite une matrice avec m lignes et q colonnes, i.e. $\boldsymbol{C} \in M_{m,q}(\mathbb{R})$, avec éléments :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}, \tag{7}$$

pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, q$.



Exemple. Soient

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

· La multiplication $\boldsymbol{AB}$ est égale à

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2) + (2)(4) & (1)(2) + (2)(3) \\ (3)(2) + (4)(4) & (3)(2) + (4)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 22 & 18 \end{bmatrix}.$$

Exercice. Calculer (si possible) la multiplication $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ pour les matrices suivantes :

a. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

d. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Propriétés.

· Soient $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ trois matrices de taille $m \times m$.

1. En général, la multiplication matricielle n'est pas commutative :

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}.$$

   Si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, alors on dit que les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ commutent.

2. En revanche, elle est associative et distributive :
   - $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$,
   - $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$.

3. $\boldsymbol{A}^p$ désigne le produit de $\boldsymbol{A}$ par elle-même $p \in \mathbb{N}$ fois, soit :

$$\boldsymbol{A}^p = \underbrace{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\,\cdots\,\boldsymbol{A}}_{p \text{ facteurs}}.$$

4. L'élément neutre de la multiplication est la matrice identité $\boldsymbol{I}$, i.e. $\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$.

Produit scalaire

· Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs réels de taille m. Le produit scalaire est définie par le produit :

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k. \tag{8}$$

Propriétés. · Soient $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ trois vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ (positivité, on observe que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$).
2. $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ (symétrie).
3. $\lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y} \rangle$.
4. $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$.

Produit dyadique

- Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs réels de taille m. Le produit dyadique (ou produit croisé) est définie par le produit matricielle :

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\top} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_m \end{bmatrix}. \tag{9}$$

- On note le produit croisé $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\top} \in M_m(\mathbb{R})$

Trace d'une matrice

· La trace de la matrice $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$, notée par $\operatorname{trace}(\boldsymbol{A}) \in \mathbb{R}$, est définie comme la somme des éléments diagonaux :

$$\operatorname{trace}(\boldsymbol{A}) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{m,m} = \sum_{k=1}^{m} a_{k,k}.$$

Propriétés.

· Considérons $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{B} \in M_m(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{C} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{D} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\operatorname{trace}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{trace}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{trace}(\boldsymbol{B})$.
2. $\operatorname{trace}(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \operatorname{trace}(\boldsymbol{A})$.
3. $\operatorname{trace}(\boldsymbol{A}^\top) = \operatorname{trace}(\boldsymbol{A})$.
4. $\operatorname{trace}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}) = \operatorname{trace}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{C})$.
5. $\operatorname{trace}(\boldsymbol{I}_m) = m$.

Déterminant d’une matrice carrée

Matrice carrée de taille $m = 2$

· Soit $\boldsymbol{A} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Le déterminant de $\boldsymbol{A}$, noté par $|\boldsymbol{A}|$ ou $\det(\boldsymbol{A})$, est le nombre réel obtenu par :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Exemple. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Son déterminant est donné par :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = -2.$$

- Soit $\boldsymbol{A} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Le déterminant de $\boldsymbol{A}$ est le nombre réel obtenu par :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Exemple. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Son déterminant est donné par :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3 - 2) - (0 + 4) + 3(0 - 2) = -15.$$

Matrice carrée de taille $m = 3$

· Soit $\boldsymbol{A} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Le déterminant de $\boldsymbol{A}$ est le nombre réel obtenu par :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Exemple. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Son déterminant est donné par :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3 - 2) - (0 + 4) + 3(0 - 2) = -15.$$

Matrice carrée de taille $m = 3$

- Soit $\boldsymbol{A} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Le déterminant de $\boldsymbol{A}$ est le nombre réel obtenu par :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Exemple. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Son déterminant est donné par :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3 - 2) - (0 + 4) + 3(0 - 2) = -15.$$

Matrice carrée de taille $m = 3$

· Soit $\boldsymbol{A} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Le déterminant de $\boldsymbol{A}$ est le nombre réel obtenu par :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Exemple. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Son déterminant est donné par :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-2) - (0+4) + 3(0-2) = -15.$$

Propriétés

- Le déterminant d'une matrice $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ est nul si, et seulement si, au moins une colonne (ou une ligne) peut s'exprimer comme une combinaison linéaire d'autres :

$$c_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \alpha_j c_j, \quad \text{ou} \quad l_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \alpha_j l_j,$$

- où c_i et l_j désignent respectivement la i-ème colonne et la j-ème ligne de la matrice $\boldsymbol{A}$.

Exemples.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Propriétés

- Le déterminant d'une matrice diagonale $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ est égal au produit des éléments diagonaux :

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{m,m} = \prod_{k=1}^{m} a_{k,k}$$

  On trouve le même résultat pour $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire.
- Soient $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^m |\boldsymbol{A}|$.
- Soient $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\boldsymbol{B}$ la matrice obtenue en multipliant une ligne (ou une colonne) de $\boldsymbol{A}$ par λ. Alors, $|\boldsymbol{B}| = \lambda |\boldsymbol{A}|$.

Exemple.

· Soient $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & \lambda a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$.

Alors, $|\boldsymbol{B}| = \lambda |\boldsymbol{A}|$.

Manipulation des déterminants

Changement de ligne ou de colonne

· Tout échange de lignes ou de colonnes entraîne un changement de signe dans le calcul du déterminant.

Exemples. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = -|\boldsymbol{A}| \qquad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} - |\boldsymbol{A}|.$$

· Cette propriété permet de faciliter le calcul des déterminants.

Exemple.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -(0) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(3+6) - 2(1+2) \\
&= -15.
\end{aligned}$$

Opérations élémentaires possibles

- Il est possible de remplacer une ligne par une combinaison linéaire de cette ligne et des autres lignes :

$$l_i \leftarrow l_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \alpha_j l_j.$$

- La même analyse s'applique pour les colonnes :

$$c_i \leftarrow c_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \alpha_j c_j.$$

Exemple. Soient $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} + \lambda a_{1,1} & a_{2,2} + \lambda a_{1,2} & a_{2,3} + \lambda a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|.$$

· Cette propriété permet d'introduire des zéros dans le calcul du déterminant en faisant des combinaisons linéaires entre lignes (ou entre les colonnes).

Exemple. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. Il est possible de manipuler le déterminant afin d'introduire des zéros :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 + l_2]{} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1]{} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_1 \leftarrow l_1 + \frac{3}{10} l_3]{} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - \frac{2}{10} l_3]{} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Finalement, on obtient $|\boldsymbol{A}| = -10$.

Méthode des cofacteurs

· Soit $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$.

· On définit $\boldsymbol{A}_{-(i,j)}$, pour tout $i, j = 1, \ldots, m$, comme la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}_{-(i,j)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,m} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j-1} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix}.$$

Mineur

· Le terme $A_{i,j} = |\boldsymbol{A}_{-(i,j)}|$ est nommé comme le *mineur* de l'élément $a_{i,j}$.

Méthode des cofacteurs

- Le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ peut être calculé de la manière suivante :

  1. Méthode en fixant une colonne :

  $$|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} c_{i,j}.$$

  2. Méthode en fixant une ligne :

  $$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} c_{i,j}.$$

- Le terme $c_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{i,j}$ est le *cofacteur* de l'élément $a_{i,j}$.

Exemple. Considérons la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \qquad \left(\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}\right)$$

· Ici, on s'intéresse à calculer $|\boldsymbol{A}|$ en fixant la 2ème ligne, c'est-à-dire on fixe $i = 2$. En utilisant la méthode des cofacteurs, on obtient :

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{2+j} a_{2,j} A_{2,j} \\ &= (-1)^3 a_{2,1} A_{2,1} + (-1)^4 a_{2,2} A_{2,2} + (-1)^5 a_{2,3} A_{2,3} \\ &= -\, a_{2,1} A_{2,1} + a_{2,2} A_{2,2} - a_{2,3} A_{2,3} \\ &= -(0) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -15. \end{aligned}$$

Matrice inverse

Définition

· Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice carrée de taille m. La matrice inverse de $\boldsymbol{A}$, notée par $\boldsymbol{A}^{-1}$, est la matrice qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}. \tag{10}$$

Remarque. Il est seulement possible d'associer des matrices inverses aux matrices carrées (sous réserve qu'elles existent).

- Dans certains cas particuliers, la matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$ peut être calculée directement, par exemple lorsque $\boldsymbol{A}$ est une matrice diagonale.

Exemple. Considérons $\boldsymbol{A}$ la matrice diagonale :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix},$$

avec $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$. Alors la matrice inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{2,2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{m,m}} \end{bmatrix}.$$

Il est possible de vérifier que $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

Cas des matrices de taille $m = 2$

- Soit $\boldsymbol{A} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}.$$

- L'inverse de la matrice $\boldsymbol{A}$ donnée par :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

où $|\boldsymbol{A}| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$.

- Que pouvons-nous en remarquer ?

Vérification de l'existence d'une matrice inverse

· La matrice inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ existe si et seulement si $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

Exercice. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles :

a. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

b. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Méthode de cofacteurs

Comatrice

· La *comatrice* de la matrice $\boldsymbol{A} = (a_{i,j}) \in M_m(\mathbb{R})$ est définie par la matrice $\boldsymbol{C} = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq m}$, où $c_{i,j}$ est le cofacteur de l'élément $a_{i,j}$: $c_{i,j} = (-1)^{i+j}A_{i,j}$.

Exemple. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Les mineurs $A_{i,j}$, pour tout $i, j = 1, \ldots, m$, sont donnés par :

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{1,2} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{1,3} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{2,1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9, \qquad A_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Méthode de cofacteurs

- On obtient alors la comatrice suivante :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}A_{1,1} & (-1)^{1+2}A_{1,2} & (-1)^{1+3}A_{1,3} \\ (-1)^{2+1}A_{2,1} & (-1)^{2+2}A_{2,2} & (-1)^{2+3}A_{2,3} \\ (-1)^{3+1}A_{3,1} & (-1)^{3+2}A_{3,2} & (-1)^{3+3}A_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +A_{1,1} & -A_{1,2} & +A_{1,3} \\ -A_{2,1} & +A_{2,2} & -A_{2,3} \\ +A_{3,1} & -A_{3,2} & +A_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrice complémentaire

· La matrice complémentaire de $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ (appelée en anglais “matrice adjointe”) est donnée par la transposée de la comatrice $\boldsymbol{C}$:

$$\operatorname{comp}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}^\top.$$

Calcul de la matrice inverse

· Lorsque $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, son inverse est donnée par :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\operatorname{comp}(\boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{A}|}.$$

Exemple. Considérons $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. On peut d'abord déterminer si $\boldsymbol{A}$ est inversible :

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15.$$

- La matrice complémentaire $\boldsymbol{A}$ est donnée par :

$$\operatorname{comp}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}^\top = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -4 & 9 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Finalement, on obtient comme matrice inverse de $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\operatorname{comp}(\boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -4 & 9 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Méthode de Gauss

- Soit $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$.
- La méthode de Gauss consiste d'abord à construire une matrice augmentée de la forme $\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}\right]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right].$$

- Ensuite, en effectuant des combinaisons linéaires entre les lignes, on cherche à obtenir la forme :

$$\left[\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{B}\right],$$

avec $\boldsymbol{B} \in M_m(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{I} \in M_m(\mathbb{R})$ la matrice identité.
- Si cette forme peut être atteinte, alors $\boldsymbol{B}$ est la matrice inverse de $\boldsymbol{A}$. Sinon, on dit que $\boldsymbol{A}$ n'est pas inversible.

Opérations élémentaires possibles

· Il est possible de multiplier une ligne par un réel non nul $\alpha \neq 0$:

$$l_i \leftarrow \alpha l_i.$$

· Il est également possible de remplacer une ligne par une combinaison linéaire de cette ligne et des autres lignes :

$$l_i \leftarrow l_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \alpha_j l_j,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

· Il est possible d'échanger des lignes $l_i \leftrightarrow l_j$.

Remarque. Contrairement au calcul du déterminant, ici, il est permis d'effectuer le produit $\alpha_i l_i$, car l'égalité est préservée.

Exemple. Considérons $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$. La matrice augmentée $\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}\right]$ est donnée par :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

· En soustrayant trois fois la première ligne à la deuxième ligne, on obtient :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - 3l_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

· Ensuite, en soustrayant deux fois la deuxième ligne à la première ligne, on obtient :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftarrow l_1 - 2l_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Enfin, on peut en conclure que $\boldsymbol{A}$ est inversible et que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemple. Considérons $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. La matrice augmentée $\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}\right]$ est donnée par :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

· En divisant la première ligne par 2, en multipliant la deuxième ligne par -1, et en divisant la troisième ligne par 3, on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 \leftarrow \frac{1}{2} l_1 \\ l_2 \leftarrow -l_2 \\ l_3 \leftarrow \frac{1}{3} l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Alors, $\boldsymbol{A}$ est inversible et $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Exercice. Calculer les matrices inverses des matrices suivantes :

a. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Propriétés de la matrice inverse

- Considérons $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{B} \in M_m(\mathbb{R})$, deux matrices inversibles.
  - $\boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{I}$.
  - $(\operatorname{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{m,m}))^{-1} = \operatorname{diag}\left(a_{1,1}^{-1}, \ldots, a_{m,m}^{-1}\right)$.
  - $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.
  - Soient $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2 \in M_m(\mathbb{R})$ deux matrices telles que :

    $$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{I}.$$

    Alors, on a l'égalité $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}^{-1}$, ce qui garantit l'unicité de $\boldsymbol{A}^{-1}$.
  - $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
  - $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 \ldots \boldsymbol{A}_p)^{-1} = \boldsymbol{A}_p^{-1} \ldots \boldsymbol{A}_2^{-2}\boldsymbol{A}^{-1}$.
  - L'égalité $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, avec $\boldsymbol{C} \in M_m(\mathbb{R})$, n'implique pas nécessairement que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. Toutefois, si $\boldsymbol{C}$ est inversible, alors on a bien $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Application aux systèmes linaires

Application aux systèmes linaires

- Tout système d'équations linéaires peut être réécrit sous forme matricielle : $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

$$
\begin{cases}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\
\vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,m}x_m = b_m
\end{cases}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}.
$$

- On va désormais analyser des méthodes permettant de calculer $\boldsymbol{x}$.

Méthode du pivot de Gauss

· Soit $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{x} \in M_m(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{b} \in M_m(\mathbb{R})$

· La méthode du pivot de Gauss consiste à construire d'abord une matrice augmentée de la forme : $\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} & b_m \end{array}\right]$$

· De manière similaire à la méthode de Gauss utilisée pour calculer $\boldsymbol{A}^{-1}$, on effectue des combinaisons linéaires entre les lignes de manière à obtenir une matrice augmentée sous la forme

$$\left[\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d}\right],$$

où $\boldsymbol{C} \in M_m(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieur (ou échelonnée) et $\boldsymbol{d}$ est un vecteur de taille m.

· La solution $\boldsymbol{x}$ (s'il existe) s'obtient en résolvant récursivement $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$.

Méthode du pivot de Gauss

Exemple. Considérons le système d'équations linaires : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$

· Ce système peut être écrit sous la forme matricielle : $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$

Méthode du pivot de Gauss. La matrice augmentée est donnée par :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

· En soustrayant 3 fois la 1ère ligne à la 2ème ligne, on a :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - 3l_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{1}^{x_1} & \overbrace{2}^{x_2} & \overbrace{1}^{b} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

d'où on obtient le système d'équations : $x_2 = -1$ et $x_1 + 2x_2 = 1$.

- Enfin, on trouve de manière récursive :

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Il est possible de vérifier que la solution satisfait effectivement le système

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}.$$

<u>Méthode en calculant $\boldsymbol{A}^{-1}$.</u>

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ensuite, on obtient $\boldsymbol{x}$ en effectuant la multiplication matricielle $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Exemple. Considérons le système d'équations linaires donné par :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

· En appliquant des opérations élémentaires sur la matrice augmentée, on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

d'où l'on peut conclure que le système n'a pas de solution, car $0 \neq 2$ (condition imposée par la dernière ligne).

· Ce résultat est cohérent avec l'information donnée par le fait que le déterminant $|\boldsymbol{A}| = 0$.

Exemple. Considérons le système d'équations : $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

· On applique des opérations élémentaires sur la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} \overbrace{1}^{x_1} & \overbrace{-1}^{x_2} & \overbrace{2}^{x_3} \\ 0 & 4 & -5 \end{array}}_{\text{matrice échelonnée}} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \end{array}\right],$$

d'où l'on obtient les équations $4x_2 - 5x_3 = 0$ et $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$. En réécrivant ces résultats en termes de x_3, on trouve :

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x_2 - 2x_3 \\ \frac{5}{4}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{4}x_3 \\ \frac{5}{4}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

· Il s'observe que la solution finale dépend de la valeur de $x_3 \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que le système admet une infinité de solutions possibles.

· Similairement à la méthode du pivot de Gauss, cette méthode consiste à construire d'abord une matrice augmentée de la forme $\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right]$.

· Ensuite, il faut effectuer des combinaisons linéaires entre les lignes afin d'obtenir une matrice augmentée de la forme

$$\left[\widetilde{\boldsymbol{C}} \mid \boldsymbol{d}\right],$$

où $\widetilde{\boldsymbol{C}} \in M_m(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{d}$ est un vecteur de taille m.

· Ici, $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ est une matrice de la forme $\widetilde{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$, où $\boldsymbol{I} \in M_{m_r}(\mathbb{R})$ est la matrice identité de taille m_r avec $m_r = \mathrm{rang}(\boldsymbol{A})$, et $\boldsymbol{E} \in M_{m_r, m-m_r}(\mathbb{R})$.

· Si $m_r = m$, alors le vecteur $\boldsymbol{d}$ est la solution unique du système linéaire, i.e. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$.

Exemple.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - 3l_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftarrow l_1 - 2l_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

d'où l'on obtient $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}^\top$.

Exemple.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftarrow \frac{1}{4} l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[l_1 \leftarrow l_1 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 0 \end{array}\right],$$

d'où l'on obtient les équations $x_2 - \frac{5}{4}x_3 = 0$ et $x_1 + \frac{3}{4}x_3 = 1$. En réécrivant ces résultats en termes de x_3, on trouve :

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{4}x_3 \\ \frac{5}{4}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

· Il s'observe que la solution finale dépend de la valeur de $x_3 \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que le système admet une infinité de solutions possibles.

Exercice. Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant les méthodes du pivot de Gauss et d'élimination de Gauss-Jordan :

a. $$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x - 8y = -2 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

c. $$\begin{cases} 2x + 3y - 5z + w = 1 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 4y - 5z - w = 0 \end{cases}$$

Méthode de Cramer

Soit $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, la règle de Cramer indique que l'unique solution est donnée par :

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{B}_i|}{|\boldsymbol{A}|},$$

où $\boldsymbol{B}_i$ est la matrice obtenue en remplaçant la i-ième colonne de $\boldsymbol{A}$ par le vecteur $\boldsymbol{b}$.

Exemple. Considérons le système d'équations linaires donné par :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}.$$

· On calcul d'abord le déterminant de $\boldsymbol{A}$: $|\boldsymbol{A}| = 1$.

· En appliquant la méthode de Cramer, on obtient :

$$x_1 = \frac{\begin{array}{cc} \overbrace{}^{\boldsymbol{b}} & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}} \end{array}}{|\boldsymbol{A}|} = 3, \qquad x_2 = \frac{\begin{array}{cc} & \overbrace{}^{\boldsymbol{b}} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} \end{array}}{|\boldsymbol{A}|} = -1.$$

Exemple. Considérons le système d'équations linaires donné par :

$$\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ x+y-z=2 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}.$$

Le déterminant de $\boldsymbol{A}$ est : $|\boldsymbol{A}| = -14$. En appliquant la méthode de Cramer, on obtient :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{0}{-14}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{-14}{-14}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{14}{-14}.$$

Diagonalisation d’une matrice

· Soit $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ une matrice associée à une application linéaire de la forme $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. S'il existe m vecteurs non nuls $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ de taille m, et m réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, tels que :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k, \tag{11}$$

pour $k = 1, \ldots, m$, alors $\boldsymbol{v}_k$ est appelé un *vecteur propre* de $\boldsymbol{A}$ associé à la *valeur propre* λ_k.

Polynôme caractéristique

Soit $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$. On appelle *polynôme caractéristique* de $\boldsymbol{A}$ le polynôme :

$$P(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|, \tag{12}$$

où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité de taille m. Les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ sont les racines de son polynôme caractéristique, c'est-à-dire les solutions de l'équation $P(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$.

Exemple. Considérons $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \left| \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right|.$$

D'après le calcul du déterminant, on obtient :

$$P(\lambda) = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3). \tag{13}$$

· Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire $P(\lambda) = 0$. D'après l'expression précédente, on a $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$, d'où on peut conclure que la matrice $\boldsymbol{A}$ possède deux valeurs propres distinctes.

· Les vecteurs propres $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ s'obtiennent à partir de la condition (11), plus précisément :

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}, \tag{14}$$

pour tout $k = 1, \ldots, m$.

Exemple (suite). Nous avons trouvé $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

· Le vecteur propre $\boldsymbol{v}_1$ s'obtient par la condition $(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda_1 & -2 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d'où l'on trouve que $x = y$. En supposant $y = 1$, on obtient le vecteur propre

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

qui est une solution possible et donc un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$.

· Le vecteur propre $\boldsymbol{v}_2$ s'obtient par la condition $(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda_2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d'où l'on trouve $x = 2y$. En supposant $y = 1$, alors le vecteur

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

est une solution possible et donc vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$.

Diagonalisation

· Une matrice $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}, \tag{15}$$

où $\boldsymbol{D} \in M_m(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale et $\boldsymbol{P} \in M_m(\mathbb{R})$ est une matrice de passage.

· Les matrices $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{P}$ peuvent être déterminées à partir des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $\boldsymbol{A}$.

- La matrice diagonale $\boldsymbol{D}$ a comme éléments diagonaux les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

- La matrice $\boldsymbol{P}$ a pour colonnes les vecteurs propres $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \end{bmatrix}.$$

Remarques.

- Si les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de la matrice $\boldsymbol{A}$ sont distinctes, alors $\boldsymbol{A}$ est dite diagonalisable.
- Si certaines valeurs propres ont des racines multiples, la diagonalisabilité de $\boldsymbol{A}$ dépend de la dimension de l'espace propre associé à chaque valeur propre. Plus précisément, si la dimension de l'espace propre $\boldsymbol{E}_{\lambda_k}$ associé à une valeur propre λ_k est égale à la multiplicité algébrique de λ_k, alors $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable. Dans le cas contraire, $\boldsymbol{A}$ n'est pas diagonalisable (*sujet à approfondir dans un cours d'algèbre linéaire à l'école d'ingénieurs.*)

Exemple.

· Considérons $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. On s'intéresse à diagonaliser la matrice $\boldsymbol{A}$.

<u>Calcul de valeurs propres.</u>

$$P(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0,$$

d'où l'on obtient les valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$. Comme λ_1, λ_2 et λ_3 sont distinctes, on en conclut que $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable.

Calcul de vecteurs propres.

- Vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

  d'où l'on trouve $y = x$ et $z = -x + y$. En posant $x = 1$ et $y = 1$, on obtient alors le vecteur propre$\boldsymbol{v}_1 = [x \;\; y \;\; z]^\top = [1 \;\; 1 \;\; 0]^\top$, qui est une solution possible et donc un vecteur propre associé à λ_1.

- Vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

  d'où l'on trouve $x = 0$ et $z = \frac{1}{2}y$. En posant $y = 2$, on obtient alors le vecteur propre $\boldsymbol{v}_2 = [x \;\; y \;\; z]^\top = [0 \;\; 2 \;\; 1]^\top$, qui est une solution possible et donc un vecteur propre associé à λ_2.

- Vecteur propre associé à $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_3 & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d'où l'on trouve $x = 0, x - 2y = 0$ et $x - y = 0$. En posant $z = 1$, on obtient alors le vecteur propre $\boldsymbol{v}_3 = [x \;\; y \;\; z]^\top = [0 \;\; 0 \;\; 1]^\top$, qui est une solution possible et donc un vecteur propre associé à λ_3.

Calcul de la matrice D et P.

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice. Pour l'exemple précédent, vérifier que $\boldsymbol{PDP}^{-1} = \boldsymbol{A}$.

Application au calcul de la puissance d'une matrice

· Soit $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, c'est-à-dire $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$. Le calcul de la puissance $\boldsymbol{A}^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ est donné par :

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PD}\cancel{\boldsymbol{P}^{-1}}\cancel{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{D}\cancel{\boldsymbol{P}^{-1}}\cdots\cancel{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{DP}^{-1} = \boldsymbol{PDD}\cdots\boldsymbol{DP}^{-1} = \boldsymbol{PD}^k\boldsymbol{P}^{-1},$$

où $\boldsymbol{D}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m^k \end{bmatrix}$.

Exercice. Considérons $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Calculer $\boldsymbol{A}^4$.

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 2ème Année.
Ellipses, 2018.

Exo7 - Cours et Exercices de Mathématiques.
`http://exo7.emath.fr/`.
Accessed: 2023-07.

Wolfram Mathematica.
`https://www.wolfram.com/mathematica/index.html.fr`.
Accessed: 2023-07.