IUT GEII – Mathématiques (Ma3)

Produit de Convolution

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

2021 – 2022

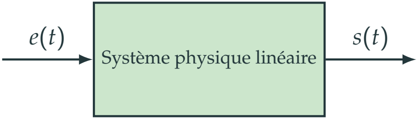
Thèmes

1. Produit de convolution

Produit de convolution

Produit de convolution

Lien avec l'automatique :



· Si le système physique est donné par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, en utilisant la transformée de Laplace :

$$S(p) = H(p)E(p), \quad \text{avec } H \text{ une } \textit{fonction de transfert}$$

· La transformée de Laplace inverse est donnée par :

$$s(t) = h(t) \otimes e(t), \quad \text{avec } h \text{ la } \textit{réponse impulsionnelle}$$

Produit de convolution

- Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$
- Le produit de convolution de (f par g) est :

$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\tau - t)dt$$

Exercice. Déterminer le produit de convolution :

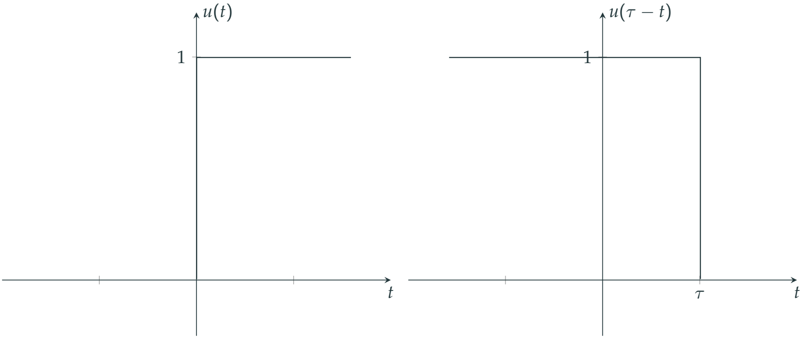
$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(\tau - t)dt,$$

avec u l'échelon unitaire :

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Produit de convolution

Solution.



· De la représentation graphique de l'échelon unité, on déduit :

$$(f \otimes u)(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} f(t)dt$$

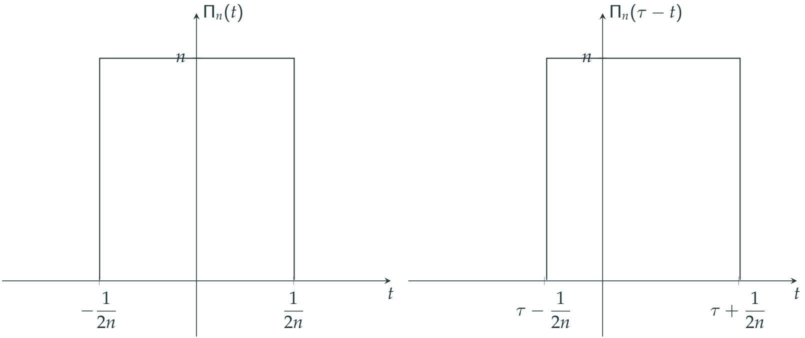
Exercice. Déterminer le produit de convolution :

$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Pi_n(\tau - t)dt,$$

avec Π_n la porte de Dirac :

$$\Pi_n(t) = \begin{cases} n, & \text{si } |t| \leq \dfrac{1}{2n} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Solution.



· De la représentation graphique, on déduit :

$$(f \otimes \Pi_n)(\tau) = n \int_{\tau - \frac{1}{2n}}^{\tau + \frac{1}{2n}} f(t)dt$$

Propriétés

· Le produit de convolution est commutatif et associatif :

$$f \otimes g = g \otimes f \quad \text{(commutativité)}$$
$$f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h \quad \text{(associativité)}$$

· L'élément neutre est l'impulsion de Dirac :

$$f \otimes \delta = \delta \otimes f = f$$

· Le produit de convolution est bilinéaire :

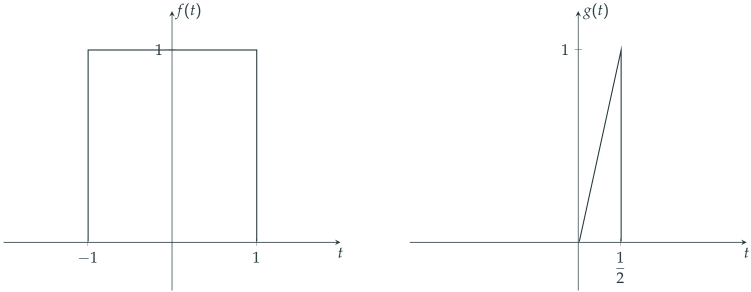
$$(f + \lambda g) \otimes h = f \otimes h + \lambda g \otimes h$$
$$f \otimes (g + \lambda h) = f \otimes g + f \otimes \lambda h$$

· La dérivée de la convoluée de 2 fonctions est donnée par :

$$\frac{d}{dt}(f \otimes g) = \frac{d}{dt} f \otimes g = f \otimes \frac{d}{dt} g$$

Exercice. Soient f et g deux signaux :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}, \qquad g(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



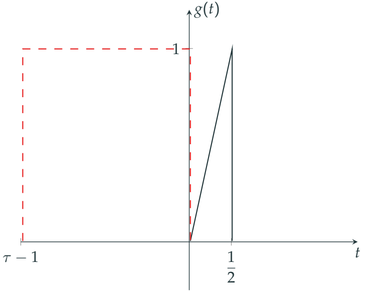
· Calculer le produit de convolution $(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\tau - t)dt$

Solution.

· Ici, il sera plus simple de travailler avec $f(\tau - t)$ que $g(\tau - t)$, alors on considère :

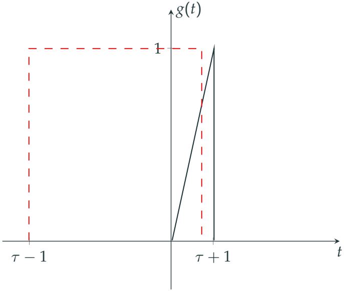
$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\tau - t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(\tau - t)dt$$

Cas I : $\tau + 1 < 0$:



$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(\tau - t)dt = 0$$

Cas II : $0 \leq \tau + 1 < \dfrac{1}{2}$:

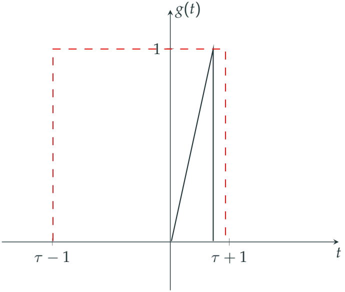


$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) {\color{red}f}(\tau - t) dt \\
&= \int_{0}^{\tau+1} 2t \ dt \\
&= [t^2]_0^{\tau+1} = (\tau + 1)^2
\end{aligned}
$$

Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur
Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Produit de convolution

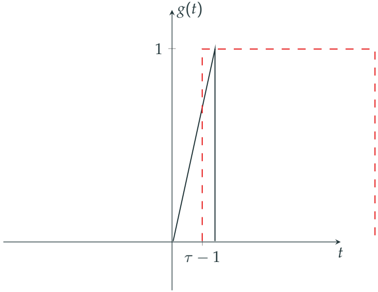
Cas III : $\tau + 1 \geq \frac{1}{2}$ et $\tau - 1 < 0$:



$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(\tau - t) dt$$
$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2t \ dt$$
$$= [t^2]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

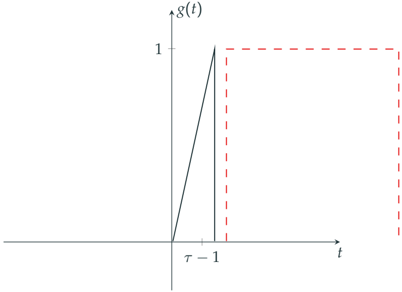
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur
Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Cas IV : $0 \leq \tau - 1 < \dfrac{1}{2}$:



$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(\tau - t) dt \\
&= \int_{\tau-1}^{\frac{1}{2}} 2t \ dt \\
&= [t^2]_{\tau-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - (\tau - 1)^2
\end{aligned}
$$

Cas V : $\tau - 1 > \frac{1}{2}$:



$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(\tau - t) dt = 0$$

· Finalement, on obtient :

$$(f \otimes g)(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -1 \\ (\tau+1)^2, & -1 \leq \tau < -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4}, & -\dfrac{1}{2} \leq \tau < 1 \\ \dfrac{1}{4} - (\tau-1)^2, & 1 \leq \tau < \dfrac{3}{2} \\ 0, & \tau > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

D'autres exemples

[animation 1]

[animation 2]