



IUT GEII - Mathématiques (Ma3)

Série de Fourier complexe

Andrés F. López-Lopera Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI) Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF) 2021 – 2022

Thèmes

1. Série de Fourier

Représentation trigonométrique

Représentation polaire

Théorème de Parseval

Théorème de Dirichlet

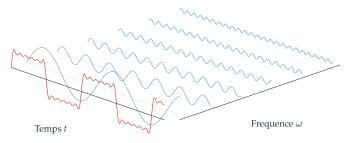
- 2. Série de Fourier complexe
- 3. Introduction à la transformée de Fourier





Série de Fourier

· Selon J. Fourier, toute *fonction périodique* peut se décomposer, sous certaines conditions, sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales



[animation 1] [animation 2] [animation 3]

Applications:

- Le traitement du signal (ou image)
- L'analyse spectrale des phénomènes périodiques
- La représentation des systèmes électriques (la transformée de Fourier)





 \cdot La représentation trigonométrique de Fourier est donnée sous la forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t),$$

avec ω , a_0 , a_n , $b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$

- · f est une fonction periodique de période $T=\frac{2\pi}{\omega}$
- · a_0 est la valeur moyenne
- $h_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$ est appelée la fondamental, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- · $h_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ est appelée harmonique de rang n de f, de période $T_n = \frac{T}{n} = \frac{2\pi}{n\omega}$





 \cdot Les coefficients de la représentation de Fourier précédent sont donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\omega t)dt$$

Exercice. Vérifier que les expressions précédentes sont valides.





Solution.

· Calcul de a₀

$$\frac{1}{T} \int_{T} f(t)dt = \frac{1}{T} \int_{T} [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]dt$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_{T} a_0 dt + \int_{T} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) dt + \int_{T} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) dt \right]$$

$$= a_0 + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{T} \cos(n\omega t) dt + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{T} \sin(n\omega t) dt$$





Solution (continuation).

· Calcul de an

$$\frac{2}{T} \int_{T} f(t) \cos(m\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{T} [a_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n} \cos(n\omega t) + b_{n} \sin(n\omega t)] \cos(m\omega t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[a_{0} \int_{T} \cos(m\omega t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n} \int_{T} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n} \int_{T} \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt \right]^{0}$$

· L'intégration restante est donné par (principe d'orthogonalité) :

$$\int_{T} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

· Finalement :

$$\frac{2}{T} \int_{T} f(t) \cos(m\omega t) dt = a_n$$





Solution (continuation).

 \cdot Calcul de b_n

$$\frac{2}{T} \int_{T} f(t) \sin(m\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{T} [a_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n} \cos(n\omega t) + b_{n} \sin(n\omega t)] \sin(m\omega t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[a_{0} \int_{T} \sin(m\omega t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n} \int_{T} \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n} \int_{T} \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt \right]$$

· L'intégration restante est donné par (principe d'orthogonalité) :

$$\int_{T} \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

· Finalement :

$$\frac{2}{T} \int_{T} f(t) \sin(m\omega t) dt = b_n$$





Cas particulier - fonction paire

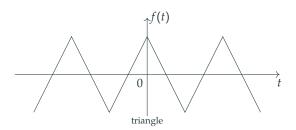
· Soit f une fonction périodique paire, i.e. f(-t) = f(t), on obtient [Exercice] :

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t),$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)dt, \qquad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)dt$$

Exemple.







Cas particulier - fonction paire

Solution (continuation).

· Calcul de a_0 : sachant que f est une fonction paire, i.e. f(-t) = f(t), on a

$$a_{0} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{T/2} f(t)dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{T/2} f(t)dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[-\int_{T/2}^{0} f(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} f(t)dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_{0}^{T/2} f(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} f(t)dt \right] = \frac{2}{T} \int_{0}^{T/2} f(t)dt$$

· Calcul de a_n : en définissant $g(t) = f(t) \cos(n\omega t)$, on observe que g est aussi une fonction paire, i.e. g(-t) = g(t), d'où on obtient :



 $\bigvee_{\substack{\text{Puniversite and Production For the Construction Product Constru$

Cas particulier - fonction paire

Solution (continuation).

· Calcul de b_n : en définissant $g(t) = f(t) \sin(n\omega t)$, on observe que g est une fonction impaire, i.e. g(-t) = -g(t), d'où on obtient:

$$b_{n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)dt$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{T/2} f(t)dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[-\int_{-T/2}^{0} g(-t)dt + \int_{0}^{T/2} f(t)dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_{T/2}^{0} g(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} g(t)dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[-\int_{0}^{T/2} g(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} g(t)dt \right]$$

$$= 0$$





Cas particulier – fonction impaire

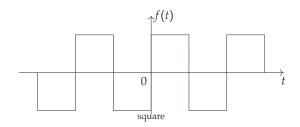
· Soit f une fonction périodique impaire, i.e. f(-t) = -f(t), on obtient :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t),$$

avec

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

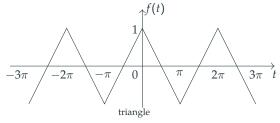
Exemple.





Exercice.

· On considère le signal 2π -périodique défini sur $[-\pi,\pi[$ par $f(t)=1-\left|\frac{2t}{\pi}\right|$

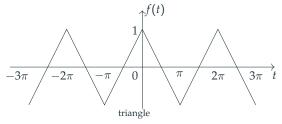


Déterminer a_0 , a_n et b_n .



Exercice.

· On considère le signal 2π -périodique défini sur $[-\pi,\pi[$ par $f(t)=1-\left|\frac{2t}{\pi}\right|$



Déterminer a_0 , a_n et b_n .

Solution.

· De la représentation graphique, on observe que f est une fonction paire et centrée (i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$). Alors, on obtient :

$$a_0=0,$$
 et $b_n=0,$



donc il reste qu'à calculer a_n .

Série de Fourier

Solution (continuation).

· Par définition :

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[1 - \frac{2t}{\pi} \right] \cos(nt) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt$$

· En effectuant une intégration par partie, on obtient :

$$\int_0^{\pi} t \cos(nt) = \left[\frac{1}{n} t \sin(nt) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = -\frac{1}{n} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} [\cos(n\pi) - 1]$$

· Finalement:

$$a_n = \frac{4[1 - \cos(n\pi)]}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2 n^2}, & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$



Représentation polaire

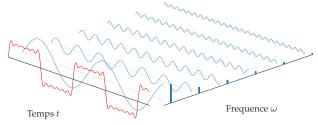
· Une autre façon d'écrire la représentation de Fourier est [Exercice] :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n),$$

avec

$$A_0=a_0, \qquad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}, \qquad an arphi_n=rac{b_n}{a_n}, \qquad h_n(t)=A_n\cos(n\omega t-arphi_n)$$

- · On dénote :
 - · A_n : l'amplitude du signal h_n · φ_n : la phase du signal h_n

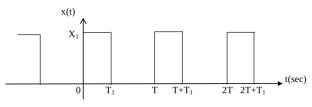


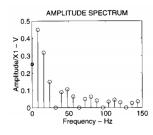


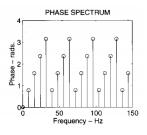


Spectre d'amplitude et de phase

· Les spectres d'amplitude (A_n) et de phase (φ_n) d'un signal sont représentes par des diagrammes en bâtons











Théorème de Parseval

 \cdot Si f est développable en série de Fourier, alors

$$\frac{1}{T} \int_{T} f^{2}(t)dt = A_{0}^{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n}^{2} = a_{0}^{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n}^{2} + b_{n}^{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n}|^{2}$$

Interprétation physique.

 \cdot Le théorème de Parseval traduit le fait que la puissance du signal est égale à la somme des puissances des harmoniques :

$$P(f) = (f_{moyenne})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} P(h_n)$$
 (principe de conservation de l'énergie),

où

- · $P(f) = \frac{1}{T} \int_T f^2(t) dt$ est la puissance moyenne sur une période du signal f
- · $P(h_n) = |c_n|^2 = \frac{1}{2}A_n^2 = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$ est la puissance moyenne sur une période de h_n (la n-ème harmonique)



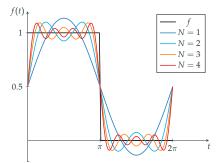


Théorème de Parseval

- \cdot La formulation précédente permet d'approximer f (au sens de la puissance)
- · Si $\widetilde{f}_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ est une approximation de f, la fonction \widetilde{f}_N a pour puissance

$$P(\widetilde{f}_N) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$$

 $\cdot \widetilde{f}_N$ est donc une approximation de f à $\frac{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2)}{\frac{1}{T} \int_T f^2(t) dt}$ près



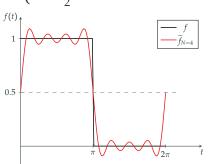




Théorème de Dirichlet

- · Soit f une fonction T-périodique, i.e. f(t+T) = f(t)
- · Soit $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ la série de Fourier de f
- \cdot Si f es continue et monotone par morceau, alors on a :

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ est continue en } t \\ \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$







· Grâce aux formules d'Euler, on peut récrire la représentation de Fourier comme :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

avec

$$c_{n} = \begin{cases} a_{0}, & n = 0\\ \frac{a_{n} - jb_{n}}{2}, & n > 0\\ \frac{a_{n} + jb_{n}}{2}, & n < 0 \end{cases}, \qquad c_{-n} = \overline{c_{n}}$$

Exercice. À partir de la représentation trigonométrique de Fourier, développer la forme exponentielle complexe.





Solution.

Sachant que
$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$
 et $\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$, on obtient :
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$
$$= a_0 e^{0j\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$
$$= a_0 e^{0jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t}$$
$$= c_0 e^{0jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{j(-n)\omega t}$$
$$= c_0 e^{0jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$





Lien avec la décomposition sous forme réelle

Rappel:

$$c_{n} = \begin{cases} a_{0}, & n = 0\\ \frac{a_{n} - jb_{n}}{2}, & n > 0\\ \frac{a_{n} + jb_{n}}{2}, & n < 0 \end{cases}, \qquad c_{-n} = \overline{c_{n}}$$

· Soit $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$. De l'expression précédente, on obtient [Exercice] :

$$a_0 = c_0,$$
 $a_n = c_n + c_{-n},$ $b_n = j(c_n - c_{-n})$

· Soit $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$. Par définition [Exercice] :

$$\begin{split} A_0 &= a_0 = c_0, \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\sqrt{c_n c_{-n}} = 2\sqrt{c_n \overline{c_n}} = 2\left|c_n\right| \\ \tan\varphi_n &= \frac{b_n}{a_n} = j\frac{c_n - \overline{c_n}}{c_n + \overline{c_n}} = -\frac{\operatorname{Im}\left(c_n\right)}{\operatorname{Re}\left(c_n\right)}, \quad \varphi_n = -\operatorname{arg}(c_n) \end{split}$$





· Soit f(t) la série de Fourier complexe :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

· Les coefficients de cette représentation sont donnés par :

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\omega t) dt - j\frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\omega t) dt \right]$$
$$= \frac{1}{T} \left[\int_T f(t) [\cos(n\omega t) - j \sin(n\omega t) dt \right]$$
$$= \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Exercice. Soit le signal périodique de période $T=2\pi$ définie par

$$g(t) = -e^{-t}, \quad t \in [\pi, \pi[$$

Écrire la décomposition de g(t) en série de Fourier à coefficients complexes.





Solution.

· Par définition,

$$c_{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-jn\omega t}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-e^{-t}]e^{-jn\omega t}dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+jn\omega)t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-(1+jn\omega)t}}{1+jn\omega} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-(1+jn\omega)\pi} - e^{(1+jn\omega)\pi}}{1+jn\omega} \right]$$



Solution (continuation).

· En remplaçant $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$, on obtient :

$$c_n = \frac{1}{2\pi(1+jn)} [e^{-\pi} e^{-jn\pi} - e^{\pi} e^{jn\pi}]$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+jn)} [e^{-\pi} \cos(n\pi) - e^{\pi} \cos(n\pi)]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(1+jn)} \cdot \frac{[e^{-\pi} - e^{\pi}]}{2}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(1+jn)} [-\sinh \pi]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(1+jn)}$$

· Finalement, on a la décomposition en séries de Fourier donnée par :

$$f(t) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} c_n e^{jnt} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n = -\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 + jn} e^{jnt}$$





Introduction à la transformée de

Fourier

Introduction à la transformée de Fourier

- \cdot La transformée de Fourier permet d'exprimer les composantes spectrales d'un signal temporel
- · Soit x(t) un signal de $L^2(\mathbb{R})$, i.e. un signal dit à énergie finie :

$$||x||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

· On appelle *transformée de Fourier* la fonction $X(v) = \mathcal{F}\{x(t)\}(v)$ définie par :

$$X: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \\ v \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2j\pi v t} dt \end{cases}$$

· L'application $\mathcal{F}: x(t) \to X(v)$ est appelée transformation de Fourier





Introduction à la transformée de Fourier

Exemple. Calculer la transformée de Fourier de

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Solution.

· Par définition :

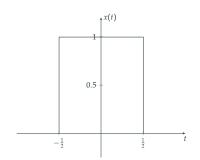
$$X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2j\pi vt}dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2j\pi vt}dt$$
$$= \left[\frac{e^{-2j\pi vt}}{2j\pi v}\right]_{1/2}^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{\pi v} \left[\frac{e^{j\pi v} - e^{-j\pi v}}{2j}\right]$$
$$= \frac{\sin(\pi v)}{\pi v}$$

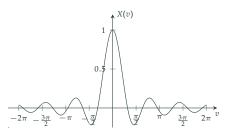


Introduction à la transformée de Fourier

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$X(v) = \frac{\sin(\pi v)}{\pi v}$$





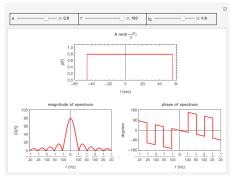


Interprétation spectrale

- \cdot X(v) est en général une fonction complexe
- · Notons A(v) son module et $\varphi(v)$ son argument, on a alors :

$$X(v) = A(v)e^{j\varphi(v)}$$

- · La courbe d'équation A(v) est appelée spectre d'amplitude du signal x(t)
- · La courbe d'équation $\varphi(v)$ est appelée *spectre de phase* du signal x(t)







Transformation de Fourier inverse

- · Soit x(t) un signal de $L^2(\mathbb{R})$ et $X(v) = \mathcal{F}\{x(t)\}(v)$ sa transformée de Fourier
- · On a alors:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(v)e^{2j\pi vt}dv = \begin{cases} x(t) & \text{si } x \text{ est continue en } t \\ \frac{x(t^+) - x(t^-)}{2} & \text{si } x \text{ n'est pas continue en } t, \text{ mais} \\ & \text{si } x(t^+) \text{ et } x(t^-) \text{ existent} \end{cases}$$

· Le signal $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(v)e^{2j\pi vt}dv$ est appelé transformée de Fourier inverse de X(v) est notée $\mathcal{F}^{-1}\{X(v)\}(t)$



