IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels I (OML1)

Fonctions numériques à variable réelle (partie II)

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

Dérivée d’une fonction

Définition

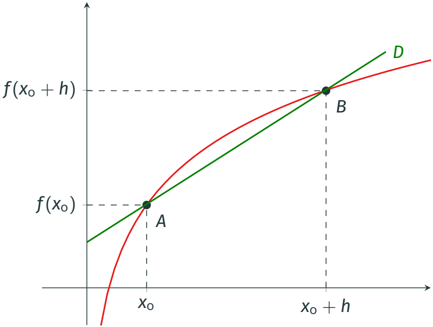
· Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

· Considérons deux points A et B appartenant à la courbe représentative de f avec $A, B \in I$.

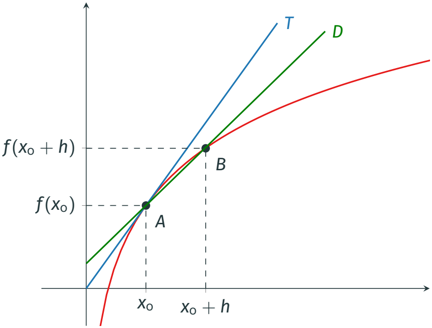
· La droite D passant par les deux points A et B est connue comme la *droite sécante*.

· Le coefficient directeur (ou la pente) de D est donnée par :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Définition



[animation]

- Lorsque $h \to 0$, alors $x_0 + h \to x_0$, et la droite sécante D tend vers la droite tangente T à la courbe en x_0.
- Dans ce cas, le taux de variation

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

tend vers le coefficient directeur de la tangente T.

Définition

· La *dérivée* en un point x_0 est la limite du taux de variation lorsque $h \to 0$. On la note :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

· f est dite *dérivable* en un point x_0 si cette limite existe et est finie.

· En généralisant cette définition à tout $x \in I$, on obtient la *dérivée* d'une fonction f sur un intervalle I :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

· La dérivée de f par rapport à x se note également :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Définition

Exemples.

1. $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x + h \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Exemples (suite).

2. $f(x) = x^n \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + a_1 h x^{n-1} + a_2 h^2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} h^{n-1} x + h^n - \cancel{x^n}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(a_1 x^{n-1} + a_2 h x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} h^{n-2} x + h^{n-1})}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} a_1 x^{n-1} + a_2 h x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} h^{n-2} x + h^{n-1} \\
&= a_1 x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

· En utilisant le *triangle de Pascal*, on obtient le coefficient $a_n = n$, ce qui conduit à la formule de dérivation d'une puissance :

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad \text{pour } f(x) = x^n.$$

Définition

Exemples (suite).

3. $f(x) = \cos(x)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \cos(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \cancelto{0}{\lim_{h\to 0} \frac{[\cos(h) - 1]}{h}} - \sin(x) \cancelto{1}{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}} \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}
$$

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	e^x	e^x	$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$-\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$		

Exercice. Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt[n]{x}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et appliquer la formule au cas particulier $n = 3$.

Piste. Réécrire la fonction sous forme exponentielle $f(x) = x^{1/n}$.

Règles de dérivation

· Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies sur un même domaine et $a \in \mathbb{R}$. Les règles suivantes peuvent être établies :

Opération	Dérivée
$af(x)$	$af'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$g(f(x))$	$g'(f(x))f'(x)$ (règle de la chaîne)

Exercice. Calculer la dérivée de

1. $u(x) = 5x\sin(x)$
2. $v(x) = \sin(-x^2)$
3. $w(x) = \sqrt{\sin(2x - x^2)}$

Solution.

1. $u(x) = 5\underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\sin(x)}_{g(x)}$, alors $u'(x) = 5[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]$:
$$u'(x) = 5[\sin(x) + x\cos(x)].$$
2. $v(x) = \underbrace{\sin(\underbrace{-x^2}_{f(x)})}_{g(f(x))}$, alors $u'(x) = g'(f(x))f'(x)$:
$$v'(x) = \cos(-x^2)\cdot(-2x) = -2x\cos(-x^2).$$
3. $w(x) = \underbrace{\sqrt{\underbrace{\sin(\underbrace{2x - x^2}_{f(x)})}_{g(f(x))}}}_{h(g(f(x)))}$, alors $w'(x) = h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x)$:
$$w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(2x - x^2)}}\cdot\cos(2x - x^2)\cdot(2 - 2x) = \frac{(1 - x)\cos(2x - x^2)}{\sqrt{\sin(2x - x^2)}}.$$

Dérivées de quelques fonctions composées

· De manière récurrente, la dérivée $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ apparaît dans l'expression finale de la fonction étudiée, ce qui donne lieu à la règle de la chaîne. Par exemple :

$$\frac{d}{dx}[f^n(x)] = nf^{n-1}(x)\frac{df(x)}{dx} = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

Fonction $g(x)$	Dérivée de $g(x)$
$f^n(x)$	$nf^{n-1}(x)f'(x)$
$\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)$
$\dfrac{1}{f(x)}$	$-\dfrac{1}{f^2(x)}f'(x)$
$\ln f(x)$	$\dfrac{1}{f(x)}f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$
$\sin(f(x))$	$\cos(f(x))f'(x)$

Dérivée seconde

· La dérivée seconde d'une fonction $f(x)$ est simplement la dérivée de $f'(x)$:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{df(x)}{dx}\right].$$

· Les dérivées premières et secondes ont des interprétations spécifiques en physique.

· Par exemple, si $f(t) = t^3 + t$ représente la position d'un objet à l'instant t, alors les dérivées $\frac{df(t)}{dt}$ et $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ correspondent respectivement à la vitesse et à l'accélération de l'objet à cet instant t :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = 3t^2 + 1, \qquad \text{(fonction vitesse)}$$

$$f''(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = 6t. \qquad \text{(fonction accélération)}$$

Dérivée d'ordre n

- En général, la dérivée d'ordre n d'une fonction $f(x)$ est définie comme suit :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\cdots\left[\frac{df(x)}{dx}\right]\right].$$

Exercice. Calculer la dérivée d'ordre $n = 4$ de la fonction $f(x) = \sin(x)$.

Dérivée d'ordre n

· En général, la dérivée d'ordre n d'une fonction $f(x)$ est définie comme suit :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\cdots\left[\frac{df(x)}{dx}\right]\right].$$

Exercice. Calculer la dérivée d'ordre $n = 4$ de la fonction $f(x) = \sin(x)$.

Solution.

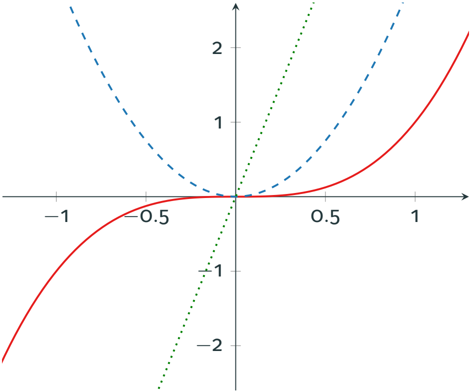
$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) \\
f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x) \\
f''(x) &= \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x) \\
f'''(x) &= \frac{df''(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[-\sin(x)] = -\cos(x) \\
f^{(iv)}(x) &= \frac{df'''(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[-\cos(x)] = \sin(x)
\end{aligned}$$

Tableau de variation

Tableau de variation

- Considérons $f(x) = x^3$.

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$

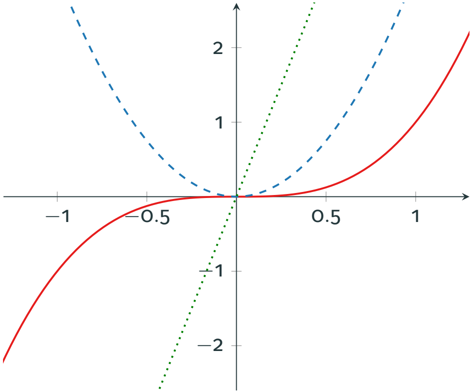


- Que peut-on observer ?

Tableau de variation

- Considérons $f(x) = x^3$.

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$



- Que peut-on observer ?
- On observe que $f'(x) \geq 0$ pour tout x, et $f''(x) = \begin{cases} \text{positive}, & x > 0 \\ \text{négative}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

CERAMATHS
Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Quelques remarques.

· La dérivée $f'(x)$ permet d'étudier la *pente* de sa courbe représentative :

- Si $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in I$, la fonction est *croissante* dans l'intervalle I.
- Si $f'(x) > 0 \; \forall x \in I$, la fonction est *strictement croissante* dans l'intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in I$, la fonction est *décroissante* dans l'intervalle I.
- Si $f'(x) < 0 \; \forall x \in I$, la fonction est *strictement décroissante* dans l'intervalle I.

· La dérivée seconde $f''(x)$ permet d'étudier la *concavité* de sa courbe représentative :

- Si $f''(x) > 0 \; \forall x \in I$, la fonction a une *concavité positive* ($\cup$) dans l'intervalle I.
- Si $f''(x) < 0 \; \forall x \in I$, la fonction a une *concavité négative* ($\cap$) dans l'intervalle I.
- Les valeurs pour lesquelles $f''(x) = 0$ sont les abscisses des points d'inflexion de la courbe, où il y a un changement de concavité : de $\cup \to \cap$ ou de $\cap \to \cup$.

Exemple. Dessiner la fonction

$$f(x) = \frac{3}{x-2}.$$

- Tout d'abord, on peut étudier le domaine de définition : $D = \mathbb{R} - \{2\}$.
- On peut aussi étudier le signe de la fonction :

	2		
-	0	+	$(x-2)$
-	fi	+	$\frac{3}{x-2}$

- En étudiant les limites, on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{-\infty} = 0^-, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{+\infty} = 0^+,$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0(-)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0(+)} = +\infty.$$

Tableau de variation

Exemple (suite).

· En analysant la dérivée $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{3}{x-2}\right] = -\frac{3}{(x-2)^2}.$$

· En étudiant le signe de $f'(x)$, on remarque que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in D$

	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	fi	+
$f'(x)$	$\searrow$	fi	$\searrow$

Tableau de variation

Exemple (suite).

· On peut calculer la dérivée seconde $f''(x)$ si nécessaire :

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[-\frac{3}{(x-2)^2}\right] = \frac{6}{(x-2)^3}.$$

· En étudiant le signe de $f''(x)$, on observe que :

$$f''(x) \text{ est } \begin{cases} \text{négative si } x < 2, \\ \text{fi si } x = 2, \\ \text{positive si } x > 2. \end{cases}$$

Remarque. Puisque $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, la fonction $f(x)$ n'a pas de points d'inflexion.

Tableau de variation

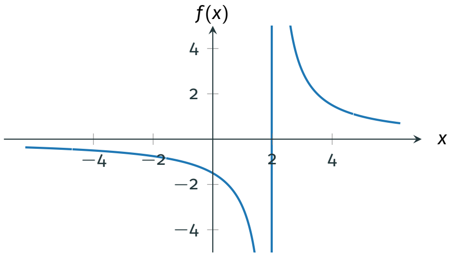
Exemple (suite).

- Enfin, on sait que la fonction f doit vérifier les conditions suivantes :

	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	fi	+
$f'(x)$	$\searrow$	fi	$\searrow$
$f''(x)$	$\cap$	fi	$\cup$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+,$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty.$$

- Cette information nous permet de tracer la fonction f :



Exercice. Dessiner la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Tableau de variation

Exercice. Dessiner la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Solution.

· Tout d'abord, on étudie le domaine de définition :

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{e^x}{(x-2)(x-1)},$$

d'où on conclut que la fonction n'est pas définie pour $x = 1$ et $x = 2$. Ainsi, le domaine de définition est $D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

· On peut également analyser le signe de la fonction :

	1		2		
+	+	+	+	+	e^x
-	0	+	+	+	$(x-1)$
-	-	-	0	+	$(x-2)$
+	fi	-	fi	+	$\frac{e^x}{(x-2)(x-1)}$

Tableau de variation

- En calculant les limites, on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2-3x+2} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{e^x}{(x-2)(x-1)} = \frac{e^2}{0^+} = +\infty$$

Solution (suite).

- Ensuite, on calcule $f'(x)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x}{x^2-3x+2}\right] &= \frac{e^x(x^2-3x+2)-e^x(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} \\
&= \frac{e^x(x^2-5x+5)}{(x^2-3x+2)^2} \\
&= \frac{e^x\left(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}{(x-1)^2(x-2)^2}.
\end{aligned}
$$

- En étudiant le signe de $f'(x)$, on obtient :

	1		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$		
+	+	+	+	+	+	+	+	+	e^x
-	-	-	0	+	+	+	+	+	$x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}$
-	-	-	-	-	-	-	0	+	$x-\frac{5+\sqrt{5}}{2}$
+	0	+	+	+	0	+	+	+	$(x-1)^2(x-2)^2$
+	fi	+	0	-	fi	-	0	+	$f'(x)$
$\nearrow$	fi	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	fi	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	

Solution (suite).

· Finalement, on sait que la fonction f doit satisfaire les conditions suivantes :

		1		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	
$f(x)$	+	fi	-	-	-	fi	+	+	+
$f'(x)$	$\nearrow$	fi	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	fi	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty.$$

Exercice. Dessiner la fonction f en utilisant les informations précédentes.

Fonctions usuelles

Fonction polynomiale

· Une fonction polynomiale est une fonction de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

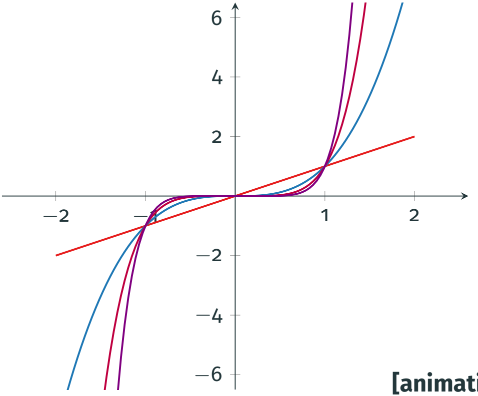
où $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles et $n \in \mathbb{N}$.

$f(x) = x$

$f(x) = x^3$

$f(x) = x^5$

$f(x) = x^7$



[animation]

Fonction polynomiale

· Une fonction polynomiale est une fonction de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

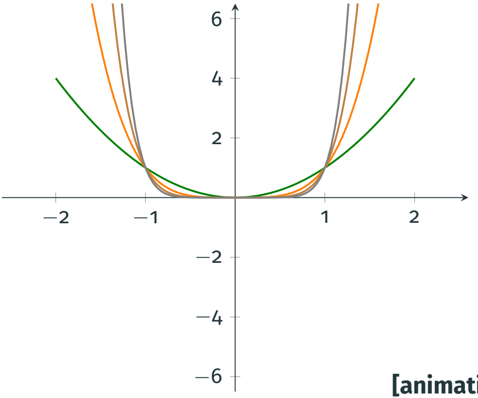
où $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles et $n \in \mathbb{N}$.

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^4$

$f(x) = x^6$

$f(x) = x^8$



[animation]

Fonction polynomiale

· Une fonction polynomiale est une fonction de la forme :

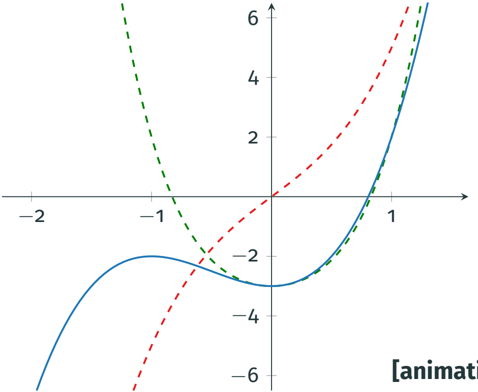
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles et $n \in \mathbb{N}$.

$f_1(x) = 2x^3 + 3x$

$f_2(x) = 2x^4 + 3x^2 - 3$

$f_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3$



[animation]

Fonction polynomiale

- Le domaine de définition d'une fonction polynomiale est $D = \mathbb{R}$.
- Une fonction polynomiale $f(x)$ de degré $n \in \mathbb{N}$ est continue et dérivable $n + 1$ fois :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4] = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}[a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3] = 2a_2 + (3 \cdot 2)a_3x + (4 \cdot 3)a_4x^2$$

$$\frac{d^3f(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx}[2a_2 + (3 \cdot 2)a_3x + (4 \cdot 3)a_4x^2] = (3 \cdot 2)a_3 + (4 \cdot 3 \cdot 2)a_4x$$

$$\frac{d^4f(x)}{dx^4} = \frac{d}{dx}[(3 \cdot 2)a_3 + (4 \cdot 3 \cdot 2)a_4x] = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)a_4 = 4!\, a_4$$

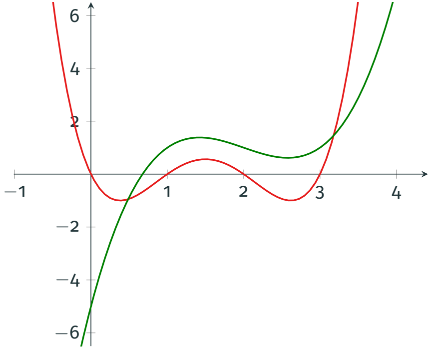
$$\frac{d^5f(x)}{dx^5} = \frac{d}{dx}[4!\, a_4] = 0$$

Fonction polynomiale

- Une fonction polynomiale $f(x)$ de degré $n \in \mathbb{N}$ possède nécessairement n racines, qui peuvent être réelles ou complexes.
- Les racines du polynôme $f(x)$ sont les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.

$$f_1(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

$$f_2(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$$



Fonction polynomiale

· La détermination des solutions de l'équation $f(x) = 0$ d'une fonction polynomiale est possible dans certains cas particuliers :

- Cas linaire $f(x) = ax - b$:
$$x = \frac{b}{a}.$$
- Cas quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
- Cas bicarré $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$: il s'agit d'effectuer un changement de variable $z = x^2$, ce qui transforme l'équation en un cas quadratique $az^2 + bz + c = 0$
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \text{avec } x = \pm\sqrt{z}.$$
- Cas du type $ax^n - 1 = 0$:
$$x = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$
- Cas du type $ax^n = 0$:
$$x = 0.$$

Fonction polynomiale

· Dans certains cas, on peut trouver des solutions évidentes. Par exemple, pour la fonction :

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

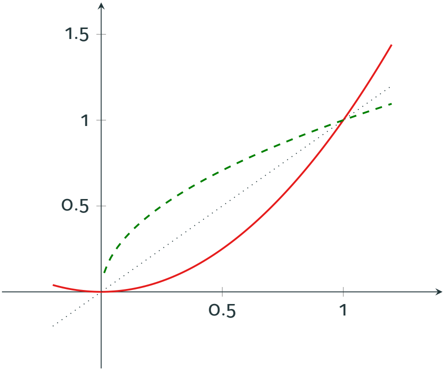
On trouve que $f(x) = 0$ pour $x = 0, 1, 2, 3$. Ensuite, on peut réécrire $f(x)$ sous la forme suivante :

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3).$$

· Pour les autres cas, il convient d'utiliser d'autres techniques de factorisation, comme par exemple la division euclidienne (OML2).

Fonction racine simple

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$



· On appelle g la *fonction réciproque* de f, c'est-à-dire $g(x) = f^{-1}(x)$, car :

$$g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x,$$
$$f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

· Domaine de $f(x)$: $D = \mathbb{R}$.

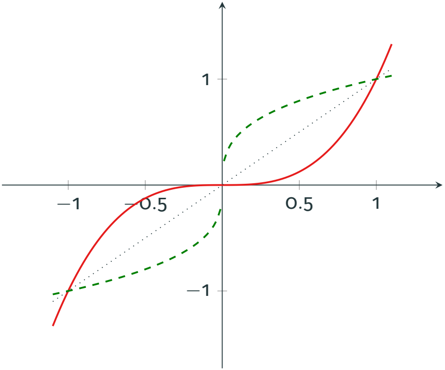
· Domaine de $f^{-1}(x)$: $D = \mathbb{R}^+$.

Fonction racine cubique

- Pour le cas $f(x) = x^3$, on obtient

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

- Domaine de $f(x) = x^3$: $D = \mathbb{R}$.
- Domaine de $f^{-1}(x)$: $D = \mathbb{R}$.



Racine d'ordre k

- Dans le cas général, si $f(x) = x^k$, alors $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$
  - Si k est pair, le domaine de définition de $f^{-1}(x)$ est $D = \mathbb{R}_+$.
  - Si k est impair, le domaine de définition de $f^{-1}(x)$ est $D = \mathbb{R}$.

Fonction exponentielle

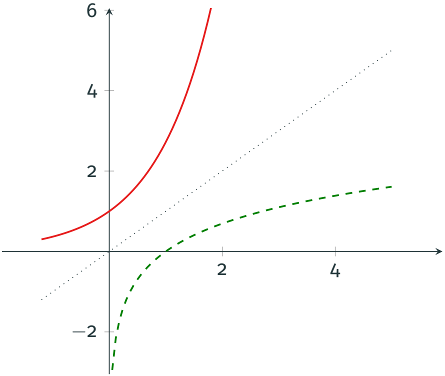
$$f(x) = e^x$$
$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

· Le logarithme népérien (ln) est la fonction réciproque de $f(x) = e^x$:

$$\ln(e^x) = x,$$
$$e^{\ln(x)} = x.$$

· Domaine de e^x : $D = \mathbb{R}$.

· Domaine de $\ln(x)$: $D = \mathbb{R}^+$.



Propriétés de la fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien

Fonction exponentielle

$$\begin{aligned}
e^0 &= 1\\
e^x e^y &= e^{x+y}\\
\frac{e^x}{e^y} &= e^{x-y}\\
(e^x)^y &= e^{xy}\\
\sqrt[y]{e^x} &= e^{\frac{x}{y}}\\
\frac{de^x}{dx} &= e^x
\end{aligned}$$

Fonction logarithme népérien

$$\begin{aligned}
\ln(1) &= 0\\
\ln(x) + \ln(y) &= \ln(xy)\\
\ln(x) - \ln(y) &= \ln\left(\frac{x}{y}\right)\\
-\ln(x) &= \ln\left(\frac{1}{x}\right)\\
y\ln(x) &= \ln(x^y)\\
\ln(e) &= 1\\
\frac{d\ln(x)}{dx} &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Fonction logarithme en base quelconque

· La fonction réciproque de l'exponentielle en base a est la fonction logarithme en base a, $\log_a(x)$:

$$f(x) = a^x, \qquad f^{-1}(x) = \log_a(x), \qquad \log_a(a^x) = x.$$

Propriétés.

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$$

$$\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$y\log_a(x) = \log_a(x^y)$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\frac{d\log_a(x)}{dx} = \frac{1}{x\ln(a)}$$

Fonction arc sinus

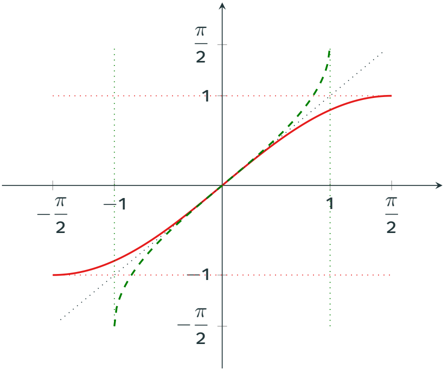
$$f(x) = \sin(x)$$
$$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

· On appelle arc sinus la fonction réciproque de $f(x) = \sin(x)$.

· Domaine de $\sin(x)$: $D = \mathbb{R}$.

· Domaine de $\arcsin(x)$: $D = [-1; 1]$.

$$\frac{d\arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Fonction arc cosinus

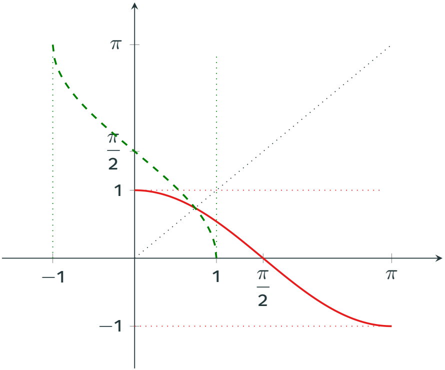
$$f(x) = \cos(x)$$
$$f^{-1}(x) = \arccos(x)$$

· On appelle arc cosinus la fonction réciproque de $f(x) = \cos(x)$.

· Domaine de $\cos(x)$: $D = \mathbb{R}$.

· Domaine de $\arccos(x)$: $D = [-1; 1]$.

$$\frac{d\arccos(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Fonction arc tangente

$$f(x) = \tan(x)$$
$$f^{-1}(x) = \arctan(x)$$

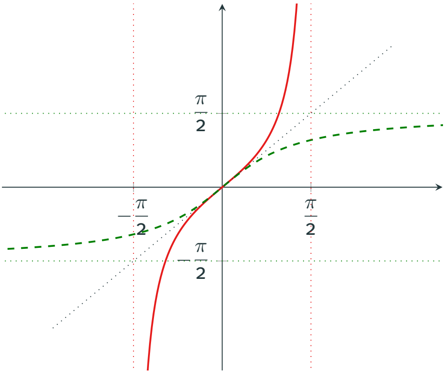
· On appelle arc tangente la fonction réciproque de $f(x) = \tan(x)$.

· Domaine de $\tan(x)$:

$$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\},\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

. · Domaine de $\arctan(x)$: $D = \mathbb{R}$.

$$\frac{d\arctan(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$



Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 1ère Année.
Ellipses, 2017.

Geogebra outils et ressources.
`https://www.geogebra.org/?lang=fr`.
Accessed: 2023-07.