IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels II (OML2)

Équations différentielles ordinaires du second ordre

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

Rappel sur les équations différentielles ordinaires

Rappel sur les équations différentielles ordinaires

· Les *équations différentielles* trouvent des applications dans de nombreux domaines :

- la biologie,
- la physique,
- l'ingénierie (électrique, industrielle, mécanique).

· De nombreux phénomènes naturels sont régis par ces équations, tels que

- les systèmes dynamiques (par exemple, le mouvement des objets),
- les circuits électriques (par exemple, les circuits RLC),
- la relation entre l'ADN et les protéines (par exemple, la régulation de l'expression des gènes).

- Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois différentiable.

- Dans le cas général, une *équation différentielle ordinaire* (EDO) *linéaire à coefficients constants* s'écrit de la manière suivante :

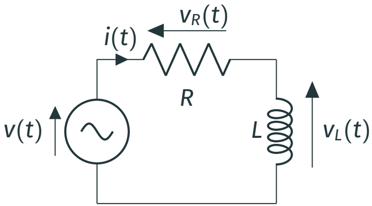
$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = s(t),$$

ou

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = s(t),$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $s(t) : I \to \mathbb{R}$ (fonction d'entrée du système).

Exemple (Circuit RL en série).



- Grâce au principe de conservation de l'énergie, on sait que :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_R(t) + v_L(t) \\ &= Ri(t) + Li'(t). \end{aligned}$$

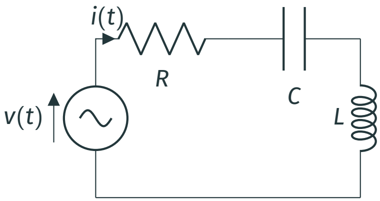
Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

· On appelle *équation différentielle linéaire (à coefficients constants) du 2nd ordre* toute équation de la forme :

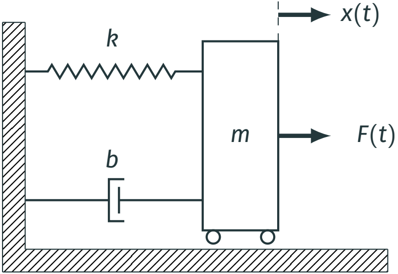
$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = s(x),$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $s(x) : I \to \mathbb{R}$.

Applications.



$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = v'(t)$$



$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = F(t)$$

Solution générale d'une équation différentielle linéaire de 2nd ordre

· La solution générale $y_G(t)$ d'une équation différentielle linéaire est la somme :

- de la *solution de l'équation homogène* $y_H(t)$:

$$ay_H''(t) + by_H'(t) + cy_H(t) = 0,$$

- et d'une *solution particulière* $y_P(t)$ *de l'équation avec second membre* :

$$ay_P''(t) + by_P'(t) + cy_P(t) = s(t).$$

Résolution de l'équation homogène

· On cherche toutes les fonctions y_H solutions de l'équation différentielle :

$$ay_H''(t) + by_H'(t) + cy_H(t) = 0. \tag{1}$$

· Les solutions de cette équation dépendent du discriminant du polynôme caractéristique associé $p(r) = ar^2 + br + c = 0$:

- Si $\Delta > 0$, $p(r)$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et la solution homogène $y_H(t)$ est donnée par :

$$y_H(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$, $p(r)$ admet une racine réelle double r, et la solution homogène $y_H(t)$ est donnée par :

$$y_H(t) = [k_1 t + k_2] e^{rt}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

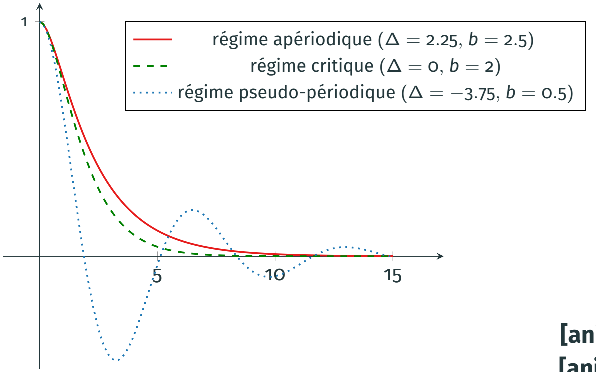
- Si $\Delta < 0$, $p(r)$ admet deux racines complexes $(r_1, r_2) = \alpha \pm j\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et la solution homogène $y_H(t)$ est donnée par :

$$y_H(t) = e^{\alpha t}\left[k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)\right], \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple. Supposons l'équation différentielle donnée par :

$$y''(t) + by'(t) + y(t) = 0,$$

avec $a = 1$, $c = 1$, $b \in \mathbb{R}^+$ et $\Delta = b^2 - 4$.



[animation 1]
[animation 2]

[0] **Note.** Pour le calcul de k_1 et k_2, on a considéré les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

Exercice. Supposons l'équation différentielle donnée par :

$$2y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

1. Cette équation correspond-elle au régime apériodique, critique ou pseudo-périodique ? (justifier la réponse)
2. Donner la solution de l'équation homogène $y_H(t)$.

Solution.

1. D'après le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, on obtient :

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0,$$

ce qui signifie que l'équation correspond au régime pseudo-périodique.

2. Avant d'appliquer la formule, il faut calculer les racines du polynôme caractéristique $p(r) = ar^2 + br + c = 0$:

$$p(r) = 2r^2 + 3r + 2 = 0, \quad \text{d'où on obtient} \quad r = -\frac{3}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4} = \alpha \pm j\beta.$$

· Ensuite, pour $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, la solution générale est donnée par :

$$y_H(t) = e^{\alpha t}[k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)] = e^{-\frac{3}{4}t}\left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right).$$

Résolution de l'équation avec second terme

· Rappelez-vous qu'on s'intéresse à trouver la solution particulière de :

$$ay_P''(t) + by_P'(t) + cy_P(t) = s(t).$$

Méthode de variation de la constante

· La méthode consiste à supposer que $y_P(t)$ a une forme similaire à celle de $y_H(t)$, où l'on fait "varier" les constantes de $y_H(t)$.

· Par exemple, si $y_H(t)$ est de la forme :

$$y_H(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

on suppose que la solution particulière $y_P(t)$ prend la forme :

$$y_P(t) = k_1(t) e^{r_1 t} + k_2(t) e^{r_2 t}, \qquad \forall\, k_1, k_2 : I \to \mathbb{R},$$

où $k_1(t)$ et $k_2(t)$ sont maintenant des fonctions à déterminer

Résolution de l'équation avec second terme

· De manière générale,

$$y_H(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t), \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

alors $y_P(t)$ prend la forme :

$$y_P(t) = k_1(t) y_1(t) + k_2(t) y_2(t), \qquad \forall\, k_1, k_2 : I \to \mathbb{R}.$$

· Ensuite, on substitue cette forme de $y_P(t)$ dans l'équation différentielle pour déterminer les expressions de $k_1(t)$ et $k_2(t)$ qui satisfont l'équation

$$\begin{cases} k_1'(t) y_1(t) + k_2'(t) y_2(t) = 0, \\ k_1'(t) y_1'(t) + k_2'(t) y_2'(t) = \dfrac{s(t)}{a}. \end{cases} \tag{2}$$

· Du système (2), on trouve $k_1'(t)$ et $k_2'(t)$, et ensuite k_1 et k_2 s'obtiennent par intégration :

$$k_1(t) = \int k_1'(t)\,dt, \qquad k_2(t) = \int k_2'(t)\,dt.$$

· Ensuite, on substitue cette forme de $y_P(t)$ dans l'équation différentielle pour déterminer les expressions de $k_1(t)$ et $k_2(t)$ qui satisfont l'équation

$$\begin{cases} k_1'(t)y_1(t) + k_2'(t)y_2(t) = 0, \\ k_1'(t)y_1'(t) + k_2'(t)y_2'(t) = \dfrac{s(t)}{a}. \end{cases} \tag{2}$$

Vérification. Supposons (2). Si $y_P(t) = k_1(t)y_1(t) + k_2(t)y_2(t)$, alors

$$\begin{aligned} y_P'(t) &= k_1'(t)y_1(t) + k_1(t)y_1'(t) + k_2'(t)y_2(t) + k_2(t)y_2'(t) \\ &= 0 + k_1(t)y_1'(t) + k_2(t)y_2'(t), \\ y_P''(t) &= k_1'(t)y_1'(t) + k_1(t)y_1''(t) + k_2'(t)y_2'(t) + k_2(t)y_2''(t) \\ &= \frac{s(t)}{a} + k_1(t)y_1''(t) + k_2(t)y_2''(t). \end{aligned}$$

· Ainsi, l'équation $ay_P''(t) + by_P'(t) + cy_P(t) = s(t)$ est vérifiée :

$$\begin{aligned} & a\left[\frac{s(t)}{a} + k_1y_1'' + k_2y_2''\right] + b[k_1y_1' + k_2y_2'] + c[k_1y_1 + k_2y_2] \\ &= s(t) + k_1[ay_1'' + by_1' + cy_1] + k_2[ay_2'' + by_2' + cy_2] \\ &= s(t) + 0 + 0. \end{aligned}$$

Exemple. Trouver la solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^t.$$

Solution de l'équation homogène $y_H(t)$

· Le polynôme caractéristique associé à l'équation est $p(r) = r^2 + 3r + 2$.

· Étant donné que le discriminant est $\Delta = 1 > 0$, l'équation est dans un régime apériodique. Par conséquent, la solution de l'équation homogène prend la forme :

$$y_H(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

· Pour déterminer les racines r_1 et r_2, nous résolvons le polynôme caractéristique et trouvons :

$$(r_1, r_2) = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},$$

d'où nous obtenons les racines $r_1 = -1$ et $r_2 = -2$.

- En substituant les valeurs de r_1 et r_2 dans l'expression de y_H, on obtient :

$$y_H(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'équation avec second membre $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^t$

- On suppose que la solution particulière y_P a une forme similaire à celle de y_H, mais avec des constantes $k_1(t)$ et $k_2(t)$ variables :

$$\begin{aligned} y_P(t) &= k_1(t) e^{-t} + k_2(t) e^{-2t} \\ &= k_1(t) y_1(t) + k_2(t) y_2(t), \qquad \forall\, k_1, k_2 : I \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- On détermine les dérivées de $y_1(t)$ et $y_2(t)$:

$$y_1'(t) = -e^{-t}, \qquad y_2'(t) = -2e^{-2t}.$$

- On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} k_1'(t) y_1(t) + k_2'(t) y_2(t) = 0, \\ k_1'(t) y_1'(t) + k_2'(t) y_2'(t) = \dfrac{s(t)}{a}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1'(t) e^{-t} + k_2'(t) e^{-2t} = 0, & (*) \\ -k_1'(t) e^{-t} - 2k_2'(t) e^{-2t} = e^t. & (**) \end{cases}$$

Résolution de l'équation avec second terme

$(*) + (**)$:

$$k_2'(t)e^{-2t} - 2k_2'(t)e^{-2t} = -k_2'(t)e^{-2t} = e^t \qquad \Rightarrow \qquad k_2'(t) = -e^{3t}.$$

$2(*) + (**)$:

$$2k_1'(t)e^{-t} - k_1'(t)e^{-t} = k_1'(t)e^{-t} = e^t \qquad \Rightarrow \qquad k_1'(t) = e^{2t}.$$

· D'où l'on trouve

$$k_1(t) = \frac{1}{2}e^{2t}, \qquad k_2(t) = -\frac{1}{3}e^{3t}.$$

· Finalement,

$$y_P(t) = k_1(t)f_1(t) + k_2(t)f_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{3t}e^{-2t} = \frac{1}{6}e^t.$$

Solution générale

$$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

· Pour trouver $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $y_G(t)$ doit vérifier les conditions initiales : $y_G(0) = y(0)$ et $y_G'(0) = y'(0)$.

Résolution de l'équation avec second terme

Exemple. Trouver la solution particulière de l'équation différentielle :

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t,$$

avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Solution de l'équation homogène $y_H(t)$

- D'après l'exemple précédent, on a :

$$y_H(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'équation avec second terme $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t$

- On suppose que la solution particulière y_P a une forme similaire à celle de y_H, mais avec des constantes $k_1(t)$ et $k_2(t)$ qui varient

$$\begin{aligned} y_P(t) &= k_1(t)e^{-t} + k_2(t)e^{-2t} \\ &= k_1(t)y_1(t) + k_2(t)y_2(t), \qquad \forall\, k_1, k_2 : I \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Les dérivées de $y_1(t)$ et $y_2(t)$:

$$y_1'(t) = -e^{-t}, \qquad y_2'(t) = -2e^{-2t}.$$

Résolution de l'équation avec second terme

- On obtient le système :

$$\begin{cases} k_1'(t)y_1(t) + k_2'(t)y_2(t) = 0 \\ k_1'(t)y_1'(t) + k_2'(t)y_2'(t) = \dfrac{s(t)}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1'(t)e^{-t} + k_2'(t)e^{-2t} = 0 & (*) \\ -k_1'(t)e^{-t} - 2k_2'(t)e^{-2t} = t & (**) \end{cases}$$

$(*)$ + $(**)$:

$$k_2'(t)e^{-2t} - 2k_2'(t)e^{-2t} = -k_2'(t)e^{-2t} = t \qquad \Rightarrow \qquad k_2'(t) = -te^{2t}.$$

$2(*)$ + $(**)$:

$$2k_1'(t)e^{-t} - k_1'(t)e^{-t} = k_1'(t)e^{-t} = t \qquad \Rightarrow \qquad k_1'(t) = te^{t}.$$

- D'où l'on trouve (après une intégration par parties)

$$k_1(t) = [t-1]e^t, \qquad k_2(t) = \frac{1}{4}[1-2t]e^{2t}.$$

- Finalement,

$$y_P(t) = k_1(t)y_1(t) + k_2(t)y_2(t) = [t-1]e^te^{-t} + \frac{1}{4}[1-2t]e^{2t}e^{-2t} = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}.$$

Solution générale

$$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

· Pour trouver k_1 et k_2, y_G doit vérifier les conditions initiales :
$y_G(0) = y(0) = 0$ et $y'_G(0) = y'(0) = 1$

$$\begin{aligned} y_G(0) &= \left[k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right]_{t=0} \\ &= k_1 + k_2 - \frac{3}{4} = 0, \\ y'_G(0) &= \left[-k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}\right]_{t=0} \\ &= -k_1 - 2k_2 - \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

· Pour ce système d'équations on trouve $k_1 = 2$ et $k_2 = -\frac{5}{4}$.

Forme polynomiale

· Si $s(t)$ est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = Q(t)$, où $Q(t)$ est une fonction polynomiale. On peut distinguer trois cas :

1. Si $c \neq 0$, i.e.
$$ay_P''(t) + by_P'(t) + cy_P(t) = s(t),$$
alors $Q(t)$ est un polynôme d'ordre n.
2. Si $c = 0$ et $b \neq 0$, i.e.
$$ay_P''(t) + by_P'(t) = s(t),$$
alors $Q(t)$ est un polynôme d'ordre $n + 1$.
3. Si $c = 0$ et $b = 0$, i.e.
$$ay_P''(t) = s(t),$$
alors $Q(t)$ est un polynôme d'ordre $n + 2$.

Exemple. Trouver la solution générale à l'équation différentielle :

$$2y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2t^2 + 1,$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution.

Solution de l'équation homogène $y_H(t)$

· Dans l'exercice précédent, on avait obtenu que :

$$y_H(t) = e^{\alpha t}[k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)] = e^{-\frac{3}{4}t}\left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right).$$

Solution de l'équation avec second terme $2y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t^2 + 1$

· On observe que $s(t)$ est un polynôme d'ordre $n = 2$. Parce que $c \neq 0$, alors la solution particulier $y_P(t)$ est aussi un polynôme d'ordre $n = 2$:

$$y_P(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

· Pour le calcul des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on sait que $2y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) = 2t^2 + 1$:

$$\begin{aligned} 2y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) &= 2(2\alpha_2) + 3(2\alpha_2 t + \alpha_1) + 2(\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0) \\ &= 2\alpha_2 t^2 + 2(3\alpha_2 + \alpha_1)t + 4\alpha_2 + 3\alpha_1 + 2\alpha_0 \\ &= 2t^2 + 1, \end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\begin{cases} 2\alpha_2 = 2 \\ 2(3\alpha_2 + \alpha_1) = 0 \\ 4\alpha_2 + 3\alpha_1 + 2\alpha_0 = 1 \end{cases}, \qquad \text{alors} \qquad \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = -3\alpha_2 = -3 \\ \alpha_0 = \dfrac{1 - 4\alpha_2 - 3\alpha_1}{2} = 3 \end{cases}$$

Cas particuliers

Solution général $y_G(t)$

$$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t) = e^{-\frac{3}{4}t}\left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right) + t^2 - 3t + 3.$$

· Pour le calcul de k_1 et k_2, on doit satisfaire les conditions initiales $y_G(0) = y(0) = 1$ et $y'_G(0) = y'(0) = 0$:

$$\begin{aligned} y_G(0) &= \left[e^{-\frac{3}{4}t}\left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right) + t^2 - 3t + 3\right]_{t=0} \\ &= k_1 + 3 = 1 \quad \rightarrow \quad k_1 = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_G(0) &= y'_H(0) \\ &= \Bigg[-\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t}\left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{7}}{4}e^{-\frac{3}{4}t}\left(-k_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right) + 2t - 3\Bigg]_{t=0} \\ &= -\frac{3}{4}k_1 + \frac{\sqrt{7}}{4}k_2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad k_2 = \frac{6}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Forme exponentielle

· Si $s(t) = e^{st}$, alors on cherche une solution particulière $y_P(t)$ dont la forme dépend du paramètre s, en fonction des racines du polynôme caractéristique $p(r) = ar^2 + br + c$.

1. Si s n'est pas une solution de $p(r)$, c'est-à-dire si $s \neq r_1$ et $s \neq r_2$, alors

$$y_P(t) = Ae^{st}.$$

2. Si s est une solution simple de $p(r)$, c'est-à-dire si $s = r_1$ ou $s = r_2$, alors

$$y_P(t) = Ate^{st}.$$

3. Si s est une solution double de $p(r)$, c'est-à-dire si $s = r_1 = r_2$, alors

$$y_P(t) = At^2e^{st}.$$

Exemple. Trouver la solution générale à l'équation différentielle :

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-3t},$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Cas particuliers

Exemple. Trouver la solution générale à l'équation différentielle :

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-3t},$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution.

Solution de l'équation homogène $y_H(t)$

· D'après le calcul du discriminant $\Delta = 1 > 0$, on sait que l'on se trouve dans un régime apériodique. Ainsi, la solution de l'équation homogène est de la forme :

$$y_H(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

· Pour déterminer les valeurs de r_1 et r_2, on résout le polynôme caractéristique $p(r) = r^2 + 2r = r(r+2) = 0$, ce qui donne les racines :

$$(r_1, r_2) = (-1, -2).$$

· En substituant ces valeurs de r_1 et r_2 dans l'expression de y_H, on obtient la solution générale :

$$y_H(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Cas particuliers

Solution de l'équation avec second terme $2y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-3t}$

· On observe que la fonction $s(t) = e^{-3t}$ est de la forme exponentielle et que $s = -3$ n'est pas une racine du polynôme caractéristique, c'est-à-dire $s \neq r_1$ et $s \neq r_2$. Par conséquent, la solution particulière y_P est de la forme :

$$y_P(t) = Ae^{-3t}.$$

· Pour déterminer la valeur de A, nous devons satisfaire l'équation $y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) = e^{-3t}$. En calculant les dérivées, nous obtenons :

$$y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) = 9Ae^{-3t} - 9Ae^{-3t} + 2Ae^{-3t} = 2Ae^{-3t} = s(t).$$

· En comparant les coefficients de l'expression précédente et de $s(t) = e^{-3t}$, on en déduit que $A = \frac{1}{2}$. En substituant cette valeur dans l'expression de y_P, on trouve :

$$y_P(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Solution général $y_G(t)$

$$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

· Les valeurs de k_1 et k_2 s'obtiennent grâce à aux conditions initiales $y_G(0) = 1$ et $y'_G(0) = 0$:

$$y_G(0) = \left[k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-3t} \right]_{t=0} = k_1 + k_2 + \frac{1}{2} = 1,$$

$$y'_G(0) = \left[-k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t} \right]_{t=0} = -k_1 - 2k_2 - \frac{3}{2} = 0,$$

d'où on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \frac{1}{2} = 1 \\ -k_1 - 2k_2 - \frac{3}{2} = 0 \end{cases}, \quad \text{d'où on obtient} \quad \begin{cases} k_2 = -2 \\ k_1 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

· Finalement, la solution générale à l'équation différentielle est :

$$y_G(t) = \frac{5}{2} e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

Cas particuliers

Forme mixte polynomiale/exponentielle

· Si $s(t) = P(t)e^{st}$ avec $P(t)$ un polynôme d'ordre $n \in \mathbb{N}$, alors la solution particulière $y_P(t)$ aura une forme dépendant de s et des racines du polynôme caractéristique $p(r) = ar^2 + br + c = 0$:

1. Si s n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = Q(t)e^{st}.$$
2. Si s est une racine simple de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = tQ(t)e^{st}.$$
3. Si s est une racine double de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = t^2Q(t)e^{st}.$$

· Dans tous les cas, $Q(t)$ est un polynôme d'ordre n

Cas particuliers

Forme trigonométrique

· Si $s(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, alors la solution particulière $y_P(t)$ dépend de ω et des racines du polynôme caractéristique $p(r) = ar^2 + br + c = 0$:

1. Si $j\omega$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t).$$
2. Si $j\omega$ est une racine de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = t\left[C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)\right].$$

Forme mixte trigonométrique/exponentielle

· Si $s(t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]e^{st}$, alors on cherche une solution particulière $y_P(t)$ dont la forme dépend de $s + j\omega$ par rapport aux racines du polynôme caractéristique $p(r) = ar^2 + br + c = 0$:

1. Si $s + j\omega$ n'est pas une racine du polynôme caractéristique, alors

$$y_P(t) = [C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)]e^{st}.$$

2. Si $s + j\omega$ est une racine du polynôme caractéristique, alors

$$y_P(t) = t[C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)]e^{st}.$$

Procédure générale.

1. Définir l'équation différentielle de la forme :

   $$ay''(t)+by'(t)+cy(t) = s(t), \qquad y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2 \text{ (conditions initiales)}$$

2. Calculer le discriminant Δ et déterminer les racines du polynôme caractéristique : $p(r) = ar^2 + br + c$.
3. Selon la valeur de Δ, déterminer la solution à l'équation homogène :

   $$ay_H''(t) + by_H'(t) + cy_H(t) = 0.$$

4. En fonction du type de $s(t)$, déterminer la forme de la solution particulière $y_P(t)$.
5. Calculer les constantes associées à $y_P(t)$ en satisfaisant l'équation :

   $$ay_P''(t) + by_P'(t) + cy_P(t) = s(t).$$

6. Définir la solution générale sous la forme :

   $$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t).$$

7. Calculer les constantes k_1 et k_2 en évaluant $y_G(0)$ et $y_G'(0)$:

   $$y_G(0) = y_H(0) + y_P(0) = c_1,$$
   $$y_G'(0) = y_H'(0) + y_P'(0) = c_2.$$

Exercices.

1. $y''(x) + 2y'(x) = 2x^2 + 1$, avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$
2. $2i''(t) + 3i'(t) + 2i(t) = 2\sin(t)$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$
3. $y''(t) + 2y'(t) + 6y(t) = 5e^{-3t}\cos(t)$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 1ère Année.
Ellipses, 2017.

Exo7 - Cours et Exercices de Mathématiques.
`http://exo7.emath.fr/`.
Accessed: 2023-07.

Geogebra outils et ressources.
`https://www.geogebra.org/?lang=fr`.
Accessed: 2023-07.