IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels II (OML2)

Fractions rationnelles

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

1. Rappel sur la division euclidienne
2. Fractions rationnelles
3. Décomposition en éléments simples
4. Méthodes de calcul des coefficients

Rappel sur la division euclidienne

Rappel sur la division euclidienne

· Soient P et D deux polynômes définis par :

$$P : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \end{cases} \qquad Q : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m \end{cases}$$

· Nous nous intéressons au calcul du quotient $\dfrac{P}{Q}$.

Theorem

· *Si $Q \neq 0$ et $\deg(Q) \leq \deg(P)$, alors il existe deux polynômes uniques E et R tels que :*

$$P(x) = Q(x)E(x) + R(x),$$

avec $\deg(R) < \deg(Q)$.
· *E est appelé le quotient et R est appelé le reste de la division P/Q.*

Remarque. Si $R = 0$, alors $\dfrac{P}{Q} = E$. On dit que P est *divisible* par Q.

Exemple. Soient $P(x) = x^4 + 3x^2 - x + 1$ et $Q(x) = x^2 + 1$. Calculons $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Rappel sur la division euclidienne

Exemple. Soient $P(x) = x^4 + 3x^2 - x + 1$ et $Q(x) = x^2 + 1$. Calculons $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + 3x^2 - x + 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - x^2 \phantom{{}- x + 1} & x^2 + 2 \quad (= E(x)) \\ \cline{1-1}
2x^2 - x + 1 & \\
-2x^2 \phantom{{}- x} - 2 & \\ \cline{1-1}
\underbrace{-x - 1}_{R(x)} &
\end{array}
$$

D'où :

$$P(x) = Q(x)E(x) + R(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2) + (-x - 1).$$

· Ainsi, la division s'écrit :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = x^2 + 2 - \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$$

Question : P est-il divisible par Q ?

Rappel sur la division euclidienne

Exercice. Soient $P(x) = x^3 - 7x + 6$ et $Q(x) = x + 3$. Calculons $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Exercice. Soient $P(x) = x^3 - 7x + 6$ et $Q(x) = x + 3$. Calculons $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 & & -7x+6 & x+3 \\
\cline{4-4}
-x^3 & -3x^2 & & x^2 - 3x + 2 \\
\cline{1-3}
 & -3x^2 & -7x+6 & \\
 & 3x^2 & +9x & \\
\cline{1-3}
 & & 2x+6 & \\
 & & -2x-6 & \\
\cline{1-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

D'où :

$$P(x) = Q(x)E(x) + \cancelto{0}{R(x)} = (x+3)(x^2 - 3x + 2).$$

· Ainsi, la division s'écrit :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1).$$

Question : P est-il divisible par Q ?

Rappel sur la division euclidienne

· Si $\deg(Q) > \deg(P)$, la division euclidienne de P par Q n'est pas possible.

Exemple :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-1}{x^2-1}.$$

· Toutefois, il est possible de simplifier les polynômes :

Exemple :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Fractions rationnelles

· Ici, nous cherchons à décomposer une fraction, issue du quotient de deux polynômes, en plusieurs fractions élémentaires. Par exemple :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+\alpha}{(x-\beta)(x+\delta)} = \frac{A}{x-\beta} + \frac{B}{x+\delta}.$$

· Cette décomposition est particulièrement utile pour la *résolution d'intégrales* **[OML2]** :

$$\int \frac{x+\alpha}{(x-\beta)(x+\delta)}\,dx = \int \frac{A}{x-\beta}\,dx + \int \frac{B}{x+\delta}\,dx.$$

· Dans de nombreux domaines scientifiques, cette approche constitue un outil fondamental pour l'analyse et la caractérisation des systèmes :

- Par exemple, la *transformée de Laplace* permet d'exprimer la fonction de transfert d'un système sous forme de fractions rationnelles, facilitant ainsi son étude **[OML2]**.

Fractions rationnelles

· On appelle *fraction rationnelle* toute fonction $F(x)$ de la forme :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C} \to \mathbb{C}), \\ F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}. \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients réels (ou complexes).

Exemple :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+2)}.$$

· Une fraction rationnelle F est *irréductible* si P et Q n'ont pas de racines communes, par exemple :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{(x-2)(x-1)}, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x+1}{(x-j)(x+j)}.$$

Fractions rationnelles

· Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle irréductible et soit $\alpha \in \mathbb{C}$:

- α est un *zéro* de F si α est une racine de P, c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$.
- α est un *pôle* de F si α est une racine de Q, c'est-à-dire $Q(\alpha) = 0$.
- α est un *pôle d'ordre k* de F si α est une racine d'ordre k de Q.

Exemple :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-\alpha}{(x-\beta)(x-\delta)^2}$$

Ici, on observe que :

- α est un zéro de F,
- β est un pôle simple de F,
- δ est un pôle d'ordre 2 de F.

Theorem

Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *une fraction rationnelle irréductible telle que* $\deg(P) \geq \deg(Q)$. *Il existe deux polynômes uniques* $E(x)$ *et* $R(x)$ *tels que :*

$$\begin{cases} F(x) = E(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)} \\ \deg(R) < \deg(Q) \end{cases}$$

· *On appelle* E *la partie entière de* F *et* R *le reste de la division* P/Q.

Exemple. Considérons la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^2 + 1}.$$

· Commençons par effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & +3x^2 & -x & +1 & x^2+1 \\
\cline{5-5}
-x^4 & -x^2 & & & x^2+2 \\
\cline{1-4}
 & 2x^2 & -x & +1 & \\
 & -2x^2 & & -2 & \\
\cline{1-4}
 & & -x & -1 &
\end{array}$$

· Ainsi, on obtient :

$$F(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = x^2 + 2 - \frac{x+1}{x^2+1},$$

où $E(x) = x^2 + 2$ est la partie entière, $R(x) = -(x+1)$ est le reste et $Q(x) = x^2 + 1$ est le dénominateur.

Décomposition en éléments simples

Cas I. Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle irréductible, où le polynôme $Q(x)$ admet une décomposition sur $\mathbb{C}$ sous la forme :

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ sont les racines complexes de $Q(x)$, chacune d'ordre respectif $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Exemples.

$$F_1(x) = \frac{x-3}{(x+1)(x-j)(x+j)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-j)} + \frac{C}{(x+j)}$$

$$F_2(x) = \frac{x-3}{(x+1)^2(x-j)(x+j)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x-j)} + \frac{C}{(x+j)}$$

$$F_3(x) = \frac{x-3}{(x+1)^3(x-2)^2} =$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Cas I. Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle irréductible, où le polynôme $Q(x)$ admet une décomposition sur $\mathbb{C}$ sous la forme :

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ sont les racines complexes de $Q(x)$, chacune d'ordre respectif $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Exemples.

$$F_1(x) = \frac{x-3}{(x+1)(x-j)(x+j)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-j)} + \frac{C}{(x+j)}$$

$$F_2(x) = \frac{x-3}{(x+1)^2(x-j)(x+j)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x-j)} + \frac{C}{(x+j)}$$

$$F_3(x) = \frac{x-3}{(x+1)^3(x-2)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x-2)} + \frac{E}{(x-2)^2}$$

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

· De manière générale, il existe un unique polynôme $E(x)$ et des nombres complexes uniques A_{ij} (avec $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq k_i$) tels que :

$$F(x) = E(x) + \qquad \text{(partie entière)}$$

$$\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \qquad \text{(partie principale par ligne)}$$

$$\frac{A_{21}}{(x-\alpha_2)} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \dots + \underbrace{\frac{A_{2k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}}_{\text{élément simple 1ère espèce}} +$$

$$\dots$$

$$\frac{A_{r1}}{(x-\alpha_r)} + \frac{A_{r2}}{(x-\alpha_r)^2} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}}.$$

Exemple. Considérons la fraction rationnelle donnée par :

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}$$

· La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ est de la forme :

$$F(x) = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-j)} + \frac{E}{(x+j)}$$

Note. Puisque j et $\bar{j} = -j$ sont des racines complexes de (x^2+1), les coefficients D et E seront conjugués l'un de l'autre :

$$E = \overline{D}.$$

Exemple. Considérons la fraction rationnelle donnée par :

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)^2}$$

· La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ est de la forme :

$$F(x) = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-j)} + \frac{E}{(x+j)} + \frac{G}{(x-j)^2} + \frac{H}{(x+j)^2}$$

Note. Puisque j et $\bar{j} = -j$ sont des racines complexes de (x^2+1), les coefficients D et E seront conjugués l'un de l'autre :

$$E = \overline{D}.$$

· Idem pour les coefficients G et H : $H = \overline{G}$.

Cas II. Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle irréductible, où le polynôme $Q(x)$ se factorise sur $\mathbb{R}$ sous la forme :

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines réelles d'ordre $k_1, k_2, \ldots, k_r$ de $Q(x)$.

· $(x^2+p_ix+q_i)^{l_i}$ sont des polynômes de degré 2 à discriminant négatif (donc irréductibles sur $\mathbb{R}$).

Exemple. Considérons la fraction rationnelle donnée par :

$$F(x) = \frac{x^3-21x-7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}.$$

· La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$F(x) = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)}$$

Cas II. Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle irréductible, où le polynôme $Q(x)$ se factorise sur $\mathbb{R}$ sous la forme :

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines réelles d'ordre $k_1, k_2, \ldots, k_r$ de $Q(x)$.

· $(x^2+p_ix+q_i)^{l_i}$ sont des polynômes de degré 2 à discriminant négatif (donc irréductibles sur $\mathbb{R}$).

Exemple. Considérons la fraction rationnelle donnée par :

$$F(x) = \frac{x^3-21x-7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

· La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$F(x) = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}.$$

· De manière générale, il existe un unique polynôme E et des nombres réels uniques A_{ij}, B_{ij} et C_{ij} tels que

$$
\begin{aligned}
F(x) = E(x) &+ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(partie entière)}\\
&\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \qquad \text{(partie principale par ligne)}\\
&\cdots\\
&\frac{A_{r1}}{(x-\alpha_r)} + \frac{A_{r2}}{(x-\alpha_r)^2} + \cdots + \underbrace{\frac{A_{rk_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}}}_{\text{élément simple 1ère espèce}} +\\
&\frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \underbrace{\frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}}_{\text{élément simple 2ème espèce}} +\\
&\cdots\\
&\frac{B_{s1}x + C_{s1}}{(x^2+p_sx+q_s)} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \cdots + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}.
\end{aligned}
$$

Méthodes de calcul des coefficients

Pôles simples

· Cette méthode permet de calculer le coefficient associé à un élément simple correspondant à un pôle simple :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \cdots, \qquad (1)$$

où α est un pôle simple.

Principe :

1. On multiplie (1) par $(x-\alpha)$:
$$(x-\alpha)F(x) = \frac{P(x)}{Q_1(x)} = A + (x-\alpha)\cdot[\cdots]$$
2. On prend $x = \alpha$:
$$\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = A.$$

· On résume ce principe en écrivant : $A = [(x-\alpha)F(x)]_{x=\alpha}$.

Exemple. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Solution.

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)}$$

· Calcul de A_1 :

$$A = [(x+2)F(x)]_{x=-2} = \left[\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]_{x=-2} = \frac{3}{5}.$$

Pôles multiples “dernier” coefficient

· La méthode précédente permet également de calculer le coefficient d’un élément simple d’ordre maximal associé à un pôle donné :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^n Q_1(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n} + \cdots, \qquad (2)$$

où α est un pôle d’ordre n.

Principe :

1. On multiplie (2) par $(x-\alpha)^n$:

$$(x-\alpha)^n F(x) = \frac{P(x)}{Q_1(x)} = A_1(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + A_n + (x-\alpha)^n \cdot [\cdots]$$

2. On prend $x = \alpha$:

$$\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = A_n.$$

· On résume ce principe en écrivant : $A_n = [(x-\alpha)^n F(x)]_{x=\alpha}$.

Exemple (suite).

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)}.$$

· Calcul de C :

$$C = [(x-1)^2 F(x)]_{x=1} = \left[\frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x^2+1)}\right]_{x=1} = -\frac{9}{2}.$$

Remarque. La méthode précédente permet uniquement de calculer le coefficient d'ordre n

$$[(x-1)F(x)]_{x=1} = \left[\frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)(x^2+1)}\right]_{x=1} = \left[B + \frac{C}{(x-1)}\right]_{x=1} = ?$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Forme quadratique “dernier” coefficient

· La même méthode permet de calculer le coefficient d’un élément simple de 2ème espèce d’ordre maximal pour un facteur quadratique donné :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^n Q_1(x)} = \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2+px+q)^n} + \cdots, \quad (3)$$

Principe :

1. On multiplie (3) par $(x^2+px+q)^n$:

$$(x^2+px+q)^n F(x) = (B_1x+C_1)(x^2+px+q)^{n-1} + \cdots + (B_nx+C_n) + (x^2+px+q)^n \cdot [\cdots],$$

2. On pose $x = \alpha$, où α est une racine de (x^2+px+q)

$$\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = B_n j + C_n.$$

3. Dans l’équation obtenue, on trouve B_n et C_n en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire.

Exemple (suite).

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)}.$$

· Calcul de D et E : une racine de x^2+1 est donnée par $\alpha = j$

$$jD + E = [(x^2+1)F(x)]_{x=j} = \frac{j^3 - 21j - 7}{(j+2)(j-1)^2} = -j\frac{36}{10} + \frac{37}{10},$$

d'où on obtient $D = -\dfrac{18}{5}$ et $E = \dfrac{37}{10}$.

La limite en $+\infty$

· Cette méthode consiste à multiplier d'abord par x, puis à en prendre la limite lorsque $x \to +\infty$.

Exemple (suite).

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{x^3-21x-7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty}\left[x\frac{A}{(x+2)} + x\frac{B}{(x-1)} + x\frac{C}{(x-1)^2} + x\frac{Dx+D}{(x^2+1)}\right],$$

d'où on obtient

$$0 = A+B+D \qquad \to \qquad B = -A-D = 3.$$

Les valeurs particuliers

· On prend pour x de valeurs particulières afin d'avoir un système d'équations permettant de déterminer les coefficients manquants

Exemple (suite).

· Si on considère $x = 0$, on obtient :

$$F(0) = \left[\frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}\right]_{x=0} = \left[\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+D}{(x^2+1)}\right]_{x=0},$$

d'où on obtient :

$$-\frac{7}{2} = \frac{A}{2} - B + C + D,$$

et finalement :

$$B = \frac{7}{2} + \frac{A}{2} + C + D = \frac{7}{2} + \frac{3}{10} - \frac{9}{2} + \frac{37}{10} = 3.$$

La méthode de “secours” : mise au même dénominateur et identification

· Cette méthode consiste à mettre la décomposition en éléments simples sous le même dénominateur, puis à identifier les différents coefficients.

Exemple.

$$F(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}.$$

· On multiplie par $(x+1)(x+2)$:

$$(x+1)(x+2)F(x) = 1 = A(x+2) + B(x+1) = (A+B)x + (2A+B),$$

d’où on obtient le système d’équations :

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ 2A + B &= 1. \end{aligned}$$

· Ensuite, il reste qu’à résoudre le système.

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 1ère Année.
Ellipses, 2017.

Wolfram Mathematica.
`https://www.wolfram.com/mathematica/index.html.fr`.
Accessed: 2023-07.

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE