

IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels (OML2)

Les nombres complexes

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)
2021 – 2022

1. Les nombres complexes
2. Formules d'Euler et de Moivre
3. Racines d'un nombre complexe
4. Résolution d'équations du second degré

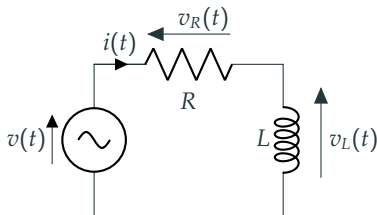
Les nombres complexes

- Les nombres complexes sont largement utilisés en ingénierie (électrique, électronique, automatique, mécanique), en physique, ...
- Quelques cas d'applications sont :
 - La résolution des équations différentielles
 - L'étude des circuits électriques

· L'impédance Z est donnée par

$$Z = R + j\omega L$$

- $\omega \in \mathbb{R}^+$: la pulsation du signal [rad/s]
- $R \in \mathbb{R}^+$: la résistance [ohm, Ω]
- $L \in \mathbb{R}^+$: le bobinage inductif ou l'inductance [henry, H]
- $j \in \mathbb{C}$: le nombre imaginaire



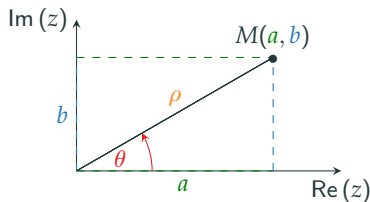
- Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est donné par la forme algébrique :

$$z = a + jb,$$

où

- $a \in \mathbb{R}$: partie réelle de z
- $b \in \mathbb{R}$: partie imaginaire de z
- $j \in \mathbb{C}$: nombre imaginaire défini comme $j = \sqrt{-1}$

Représentation géométrique



- D'après Pythagore, on obtient :

$$(\text{module}) \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(\text{argument}) \theta = \arg(z) = \arctan \frac{b}{a}$$

- Selon les *coordonnées polaires* $M(\rho, \theta)$:

$$z = \rho / \theta$$

- Posons $z = a + jb$, on dénote les opérateurs $\text{Re}()$ et $\text{Im}()$ tels que

$$\text{Re}(z) = a, \quad \text{Im}(z) = b$$

- L'élévation du nombre imaginaire j à une puissance n est donné par :

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1, \quad j^3 = j \cdot j^2 = -j, \quad j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1, \quad j^5 = j \cdot j^4 = j,$$

plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient **[Exercice]** :

$$j^{4n} = 1, \quad j^{4n+1} = j, \quad j^{4n+2} = -1, \quad j^{4n+3} = -j$$

- Le conjugué de z est le nombre complexe noté par

$$\bar{z} = a - jb,$$

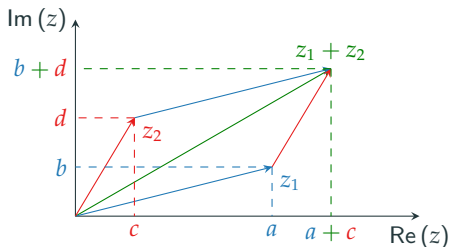
et en particulier on a :

$$z \cdot \bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$

- L'addition de deux nombres complexes est ainsi définie :

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a + c) \pm j(b + d)$$

Représentation graphique de l'addition



$$z_1 = a + jb$$

$$z_2 = c + jd$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d)$$

- La multiplication de deux nombres complexes est ainsi définie **[Exercice]** :

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

- La division de deux nombres complexes est ainsi définie **[Exercice]** :

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + j \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

- On dit que $z_1 = a + jb$ et $z_2 = c + jd$ sont égaux si et seulement si :

$$a = c \quad \text{et} \quad b = d$$

Solution.

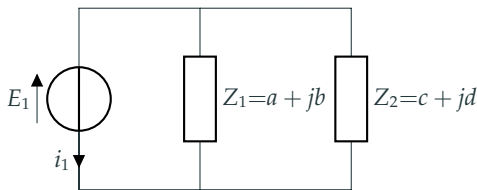
· Multiplication :

$$\begin{aligned}(a + jb)(c + jd) &= ac + jad + jbc + j^2bd \\ &= (ac - bd) + j(ad + bc)\end{aligned}$$

· Division :

$$\begin{aligned}\frac{a + jb}{c + jd} &= \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} \\ &= \frac{ac - jad + jbc - j^2bd}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}\end{aligned}$$

Application: montage en parallèle



· L'impédance équivalente Z_{eq} d'un montage en parallèle est donnée par :

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(a + jb)(c + jd)}{(a + jb) + (c + jd)}$$

Exercice. Mettre Z_{eq} sous la forme $Z_{eq} = \alpha + j\beta$.

Solution.

$$\begin{aligned}Z_{eq} &= \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \\&= \frac{(a + jb)(c + jd)}{(a + jb) + (c + jd)} \\&= \frac{(ac - bd) + j(ad + bc)}{(a + c) + j(b + d)} \\&= \frac{[(ac - bd) + j(ad + bc)][(a + c) - j(b + d)]}{(a + c)^2 + (b + d)^2} \\&= \frac{[(ac - bd)(a + c) + (ad + bc)(b + d)]}{(a + c)^2 + (b + d)^2} + j \frac{[-(ac - bd)(b + d) + (ad + bc)(a + c)]}{(a + c)^2 + (b + d)^2} \\&= \frac{a^2c - \cancel{abd} + ac^2 - \cancel{bcd} + \cancel{abd} + b^2c + ad^2 + \cancel{bcd}}{(a + c)^2 + (b + d)^2} \\&\quad + j \frac{-\cancel{abc} + b^2d - \cancel{acd} + bd^2 + a^2d + \cancel{abc} + \cancel{acd} + bc^2}{(a + c)^2 + (b + d)^2} \\&= \frac{a^2c + ac^2 + b^2c + ad^2}{(a + c)^2 + (b + d)^2} + j \frac{b^2d + bd^2 + a^2d + bc^2}{(a + c)^2 + (b + d)^2}\end{aligned}$$

Définition

- Un nombre complexe z peut être défini par son module ρ et son argument θ :

$$z = \rho[\cos \theta + j \sin \theta],$$

où $\rho = \text{mod}(z)$ et $\theta = \text{arg}(z)$

Lien entre la forme trigonométrique et la forme algébrique

- On a :

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\tan \theta = \frac{b}{a}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Réciproquement :

$$a = \rho \cos \theta, \quad b = \rho \sin \theta$$

Définition

- La forme exponentielle complexe est également utilisée par la relation :

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$$

- On en déduit l'écriture du nombre complexe z suivante :

$$z = a + jb = \rho[\cos \theta + j \sin \theta] = \rho e^{j\theta}$$

Règles de calcul

- Multiplication :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} \\ &= \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

- Division :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned}$$

- On peut déduire les propriétés suivantes sur les modules et arguments :

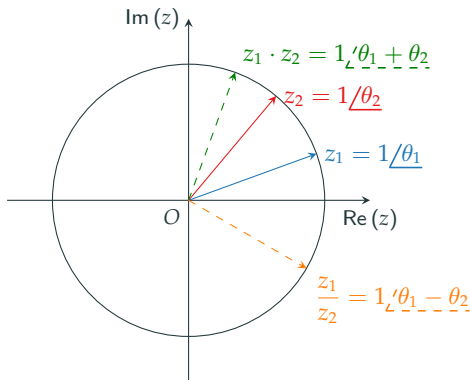
$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n \arg(z)$$

Interprétation graphique

· Ici, on suppose $z_1 = e^{j\theta_1}$ et $z_2 = e^{j\theta_2}$



Exercice. Sachant que $z = \rho e^{j\theta} = \rho[\cos \theta + j \sin \theta]$, montrez :

$$\bar{z} = \rho e^{-j\theta}$$

Exercice. Sachant que $z = \rho e^{j\theta} = \rho[\cos \theta + j \sin \theta]$, montrez :

$$\bar{z} = \rho e^{-j\theta}$$

Solution.

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{\rho[\cos \theta + j \sin \theta]} \\ &= \rho \overline{[\cos \theta + j \sin \theta]} \\ &= \rho[\cos \theta - j \sin \theta] \\ &= \rho[\cos(-\theta) + j \sin(-\theta)] \\ &= \rho e^{j(-\theta)}\end{aligned}$$

Formules d'Euler et de Moivre

- Les formules d'Euler sont les expressions réciproques de l'expression :

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$$

- On a également :

$$\cos \theta - j \sin \theta = e^{-j\theta}$$

- Par l'addition et la soustraction de ceux expressions, on obtient **[Exercice]** :

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Linéarisation

· Les formules d'Euler permettent de linéariser les fonctions trigonométriques, par exemple :

$$\begin{aligned}\cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \right)^3 \\&= \frac{1}{8} (e^{j3\theta} + 3e^{j2\theta} e^{-j\theta} + 3e^{j\theta} e^{-j2\theta} + e^{-j3\theta}) \\&= \frac{1}{8} (e^{j3\theta} + 3e^{j\theta} + 3e^{-j\theta} + e^{-j3\theta}) \\&= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{j3\theta} + e^{-j3\theta}}{2} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \right) = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta\end{aligned}$$

Remarque. La linéarisation s'appuie du triangle de Pascal pour trouver les coefficients λ_i de l'expression :

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \lambda_i a^{n-i} b^i$$

$$= \lambda_0 a^n + \lambda_1 a^{n-1} b^1 + \lambda_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + \lambda_{n-1} a b^{n-1} + \lambda_n b^n$$

- La formule de Moivre donne une relation entre l'argument d'un nombre complexe et l'argument de ce nombre élevé à une puissance
- Soit $z = e^{j\theta}$, on a :

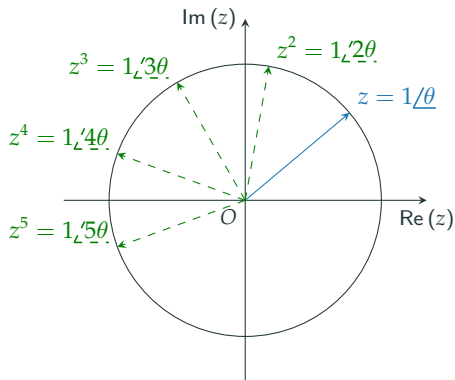
$$z^n = (\cos \theta + j \sin \theta)^n = (e^{j\theta})^n = e^{jn\theta} = \cos n\theta + j \sin n\theta$$

- Ceci établit la formule de Moivre :

$$(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos n\theta + j \sin n\theta$$

Interprétation graphique

· Ici, on suppose $z = e^{j\theta}$



Racines d'un nombre complexe

Racines n -ième d'un nombre complexe quelconque

- On appelle racine n -ième d'un nombre complexe w , tout nombre complexe z tel que

$$z^n = w \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}$$

- Posons $w = \mu e^{j\alpha}$ et $z = \rho e^{j\theta}$. Il vient :

$$z^n = \rho^n e^{jn\theta} = \mu e^{j\alpha},$$

d'où on déduit avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mu &= \rho^n, & \rho &= \sqrt[n]{\mu} \\ \alpha &= n\theta + 2k\pi, & \theta &= \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

- On obtient alors n racines distinctes s'écrivant :

$$z_k = \sqrt[n]{\mu} e^{j\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},$$

avec $k : \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

- On appelle racine carrée de d'un nombre complexe w , tout nombre z tel que

$$z^2 = w$$

- Posons $w = \mu e^{j\alpha}$ et $z = \rho e^{j\theta}$. Il vient :

$$z^2 = \rho^2 e^{j2\theta} = \mu e^{j\alpha},$$

d'où on déduit avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\mu &= \rho^2, & \rho &= \sqrt{\mu} \\ \alpha &= 2\theta + 2k\pi, & \theta &= \frac{\alpha}{2} + k\pi\end{aligned}$$

- On obtient alors deux racines distinctes s'écrivant :

$$z_k = \sqrt{\mu} e^{j(\frac{\alpha}{2} + k\pi)},$$

avec $k : \{0, 1\}$

- On s'intéresse ici à la résolution des équations du type :

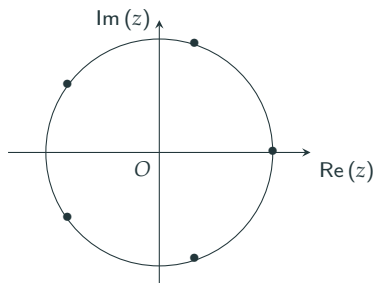
$$z^n - 1 = 0$$

- Cette équation est de la forme $z^n = w$ avec $w = 1$, donc $\mu = 1$ et $\alpha = 0$.
- On obtient alors les n racines distinctes :

$$z_k = \sqrt[n]{\mu} e^{j\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = e^{j\frac{2k\pi}{n}}$$

avec $k : \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Représentation graphique avec $n = 5$



- On s'intéresse ici à la résolution des équations du type :

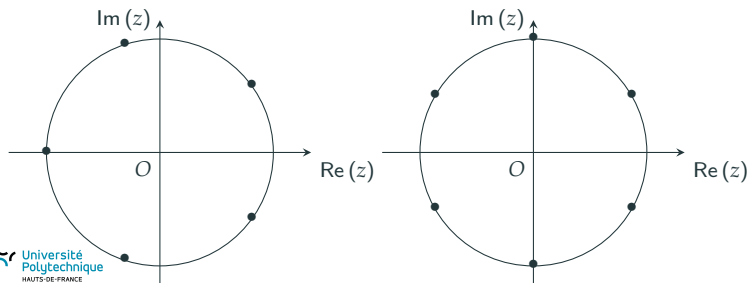
$$z^n + 1 = 0$$

- Cette équation est de la forme $z^n = w$ avec $w = -1$, donc $\mu = 1$ et $\alpha = \pi$.
- On obtient alors les n racines distinctes :

$$z_k = \sqrt[n]{\mu} e^{j\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = e^{j(1+2k)\frac{\pi}{n}}$$

avec $k : \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Représentation graphique avec $n = 5$ et $n = 6$



Racine carrée d'un nombre complexe

- Si le nombre complexe est de la forme $w = a + jb$, on cherche $z = x + jy$ tel que $z^2 = a + jb$
- Il vient :

$$|z^2| = \sqrt{a^2 + b^2} = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

$$z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + 2jxy = aj + b,$$

d'où on a le système suivant pour déterminer x et y :

$$x^2 - y^2 = a \tag{1}$$

$$2xy = b \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3}$$

- En exprimant (3) \pm (1), on obtient **[Exercice]**:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

- De (2), notez que le signe de b indique si x et y sont de même signe ou non

Résolution d'équations du second degré

- Soit une équation du second degré à coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$az^2 + bz + c = 0$$

- La nature des solutions de cette équation dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$
 - Si $\Delta \geq 0$, les deux solutions de l'équation sont réelles

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, les deux solutions de l'équation sont complexes

$$z = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- Soit une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients $a, b, c \in \mathbb{C}$
- Le calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$ donne en général un nombre complexe de la forme

$$\Delta = \alpha + j\beta$$

- Si tel est le cas, on calcule la racine carrée de Δ et on a les solutions :

$$z = \frac{-b \pm \text{rac}(\Delta)}{2a}$$

- Si Δ est un nombre réel, les solutions se déterminent de manière classique et celles-ci peuvent être complexes si les coefficients a et/ou b son complexes