IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels I (OML1)

Équations différentielles ordinaires du premier ordre

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

1. Introduction aux équations différentielles ordinaires

2. Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants
   - Solution générale
   - Résolution de l'équation homogène
   - Résolution de l'équation avec second terme

Introduction aux équations différentielles ordinaires

- Les *équations différentielles* trouvent des applications dans de nombreux domaines :
  - la biologie,
  - la physique,
  - l'ingénierie (électrique, industrielle, mécanique).
- De nombreux phénomènes naturels sont régis par ces équations, tels que
  - les systèmes dynamiques (par exemple, le mouvement des objets),
  - les circuits électriques (par exemple, les circuits RLC),
  - la relation entre l'ADN et les protéines (par exemple, la régulation de l'expression des gènes).

- Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois différentiable.
- Dans le cas général, une *équation différentielle ordinaire* (EDO) *linéaire à coefficients constants* s'écrit de la manière suivante :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = s(t),$$

ou

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = s(t),$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $s(t) : I \to \mathbb{R}$ (fonction d'entrée du système).

Introduction aux équations différentielles ordinaires

· Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois différentiable.

· Dans le cas général, une *équation différentielle ordinaire* (EDO) *linéaire à coefficients constants* s'écrit de la manière suivante :

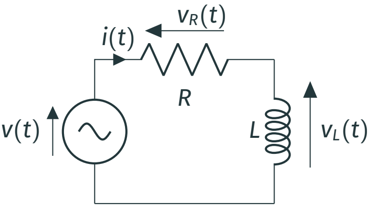
$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = s(t),$$

ou

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = s(t),$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $s(t) : I \to \mathbb{R}$ (fonction d'entrée du système).

Exemple (Circuit RL en série).



· Grâce au principe de conservation de l'énergie, on sait que :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_R(t) + v_L(t) \\ &= Ri(t) + Li'(t). \end{aligned}$$

· De manière générale, on appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* toute équation de la forme :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = s(t),$$

avec $a(t), b(t), s(t) : I \to \mathbb{R}$.

· On appelle *équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre* toute équation de la forme :

$$ay'(t) + by(t) = s(t),$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $s(t) : I \to \mathbb{R}$.

[OML1, OML5]

· De manière générale, on appelle *équation différentielle linéaire du deuxième ordre* toute équation de la forme :

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = s(t),$$

avec $a(t), b(t), c(t), s(t) : I \to \mathbb{R}$.

· On appelle *équation différentielle linéaire à coefficients constants du deuxième ordre* toute équation de la forme :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = s(t),$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $s(t) : I \to \mathbb{R}$.

[OML2, OML5]

Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

· Ici, nous nous concentrons sur des équations différentielles du premier ordre :

$$y'(t) + ay(t) = s(t).$$

· Pour l'équation du type $ay'(t) + by(t) = s(t)$, il suffit de diviser l'équation par a afin d'obtenir les formes précédentes :

$$y'(t) + \underbrace{\frac{b}{a}}_{c} y(t) = \underbrace{\frac{s(t)}{a}}_{d(t)}.$$

Solution générale d'une équation différentielle linaire de 1er ordre

· La solution générale $y_G(t)$ d'une équation différentielle linéaire est la somme :

- de la *solution de l'équation homogène* $y_H(t)$:

$$y'_H(t) + ay_H(t) = 0,$$

- et d'une *solution particulière* $y_P(t)$ *de l'équation avec second membre* :

$$y'_P(t) + ay_P(t) = s(t).$$

Résolution de l'équation homogène

· Nous cherchons toutes les fonctions $y_H(t)$ qui sont solutions de l'équation :

$$y_H'(t) + ay_H(t) = 0. \tag{1}$$

· Les solutions de cette équation sont les fonctions définies par :

$$y_H(t) = ke^{-at}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R},$$

où la valeur de k dépendra de la condition initiale $y_G(0) = y(0)$.

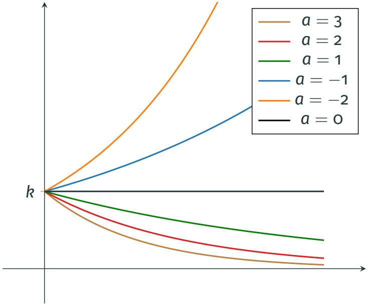
· Il est possible de vérifier que $y_H(t) = ke^{-at}$ est une solution de (1) :

$$\begin{aligned} y_H'(t) + ay_H(t) &= \frac{d}{dt}[ke^{-at}] + a[ke^{-at}] \\ &= -ake^{-at} + ake^{-at} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque. Ces solutions peuvent être obtenues formellement par la méthode de séparation de variables.

Résolution de l'équation homogène

$$y'(t) + ay(t) = 0, \qquad y_H(t) = ke^{-at}.$$



Remarque.

- Pour $a > 0$, cela représente une constante d'atténuation.
- Pour $a < 0$, cela représente une constante d'amplification.

· En GEII, on désigne par $\tau = \dfrac{1}{a}$, avec $a > 0$, la “constante de temps”.

Résolution de l'équation homogène

Exercice. Trouver les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$3y'(t) - 6y(t) = 0.$$

Exercice. Trouver les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$3y'(t) - 6y(t) = 0.$$

Solution.

· On peut réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$y'(t) - 2y(t) = 0.$$

· En appliquant la formule $y_H(t) = ke^{-at}$ pour l'équation de la forme $y'(t) + ay(t) = 0$, on obtient :

$$y_H(t) = ke^{2t},$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

Résolution de l'équation avec second membre

- On cherche la fonction $y_P(t)$ solution de

$$y_P'(t) + a y_P(t) = s(t). \tag{2}$$

- La solution $y_P(t)$ dépend de la forme de $s(t)$.

$s(t)$	$y_P(t)$
constante c	constante α
ct	$\alpha t + \beta$
$P(t)$ un polynôme de degré n	$Q(t)$ un polynôme de degré n
ce^{-bt}	αe^{-bt} si $b \neq a$ cte^{-at} si $b = a$
$c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t)$	$\alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t)$
$e^{-\lambda t}[c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t)]$	$e^{-\lambda t}[\alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t)]$

- Pour trouver les constantes (α, β, coefficients de $Q(t)$), on doit vérifier (2).

Résolution de l'équation avec second terme

Exemple. Soit l'équation différentielle donnée par :

$$3y'(t) - 6y(t) = -6t.$$

- La solution particulière de cette équation est de la forme $y_P(t) = mt + n$.
- Pour trouver les valeurs $m, n \in \mathbb{R}$, il suffit de remplacer $y(t)$ par $y_P(t)$:

$$-6t = 3y'_P(t) - 6y_P(t) = 3m - 6mt - 6n,$$

d'où on obtient les équations $-6m = -6$ et $3m - 6n = 0$. Ainsi, $m = 1$ et $n = \frac{m}{2} = \frac{1}{2}$.

- Finalement, on obtient la solution particulière :

$$y_P(t) = t + \frac{1}{2}.$$

Procédure.

1. Définir l'équation différentielle sous la forme :

$$y'(t) + ay(t) = s(t), \qquad y(0) = c \text{ (condition initiale)}.$$

2. Calculer la solution de l'équation homogène $y'(t) + ay(t) = 0$:

$$y_H(t) = ke^{-at}.$$

3. Selon la nature de $s(t)$, déterminer la forme de la solution particulière $y_P(t)$ [par exemple, si $s(t) = \sin(t)$, alors $y_P(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$].
4. Calculer les constantes associées à $y_P(t)$ en vérifiant l'équation :

$$y_P'(t) + ay_P(t) = s(t).$$

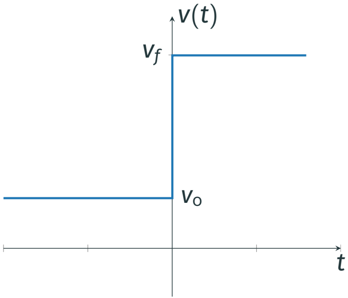
5. Définir la solution générale sous la forme :

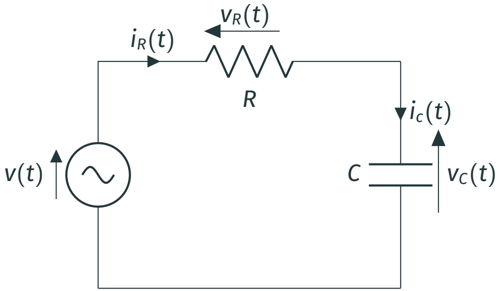
$$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t).$$

6. Calculer k en évaluant la solution générale $y_G(0)$ en $t = 0$:

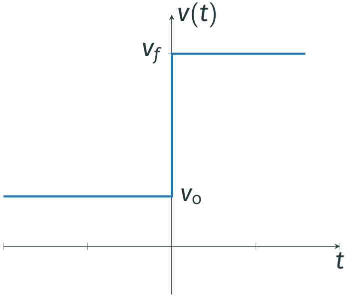
$$y_G(0) = y_H(0) + y_P(0) = c.$$

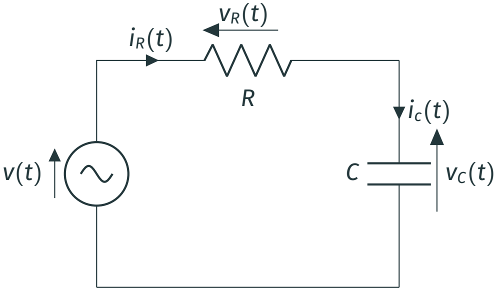
Exemple. Considérer le circuit RC :





Exemple. Considérer le circuit RC :





- Grâce à la loi de Kirchhoff, on a :

$$i_R(t) = i_C(t) + \cancelto{0}{i(t)} \quad \Rightarrow \quad i_R(t) - i_C(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_R(t)}{R} - C\frac{dv_C(t)}{dt} = 0. \tag{3}$$

- D'après le principe de conservation de l'énergie, on sait que :

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) \quad \Rightarrow \quad v_R(t) = v(t) - v_C(t). \tag{4}$$

· En remplaçant (4) dans (3), on obtient l'équation différentielle :

$$v_C'(t) + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{v(t)}{RC}, \tag{5}$$

avec $v_C'(t) := \dfrac{dv_C(t)}{dt}$ et $v_C(0) = v_0$.

<u>Solution de l'équation homogène : $v_C'(t) + \dfrac{1}{RC} v_C(t) = 0$</u>

$$v_{C,H}(t) = k e^{-\frac{1}{RC} t}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Remarque

La constante du temps $\tau > 0$ d'un circuit RC en série est donnée par $\tau = RC$.

Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

Solution de l'équation avec second terme : $v_C'(t) + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{v(t)}{RC}$

· Puisque $v(t) = v_f$ (constante), on a alors $v_{C,P}(t) = A \in \mathbb{R}$ (constante).

· Pour déterminer la valeur de A, il est nécessaire de vérifier l'équation différentielle :

$$\frac{v_f}{RC} = v_{C,P}'(t) + \frac{1}{RC} v_{C,P}(t) = 0 + \frac{A}{RC},$$

d'où on obtient $A = v_f$.

Solution générale : $v_{C,G}(t) = v_{C,H}(t) + v_{C,P}(t)$

$$v_{C,G}(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t} + v_f.$$

Calcul de la constante k :

· Pour calculer la valeur de k, il faut considérer la condition initiale $v(0)$ et satisfaire l'égalité :

$$v_{C,G}(0) = v(0).$$

· Dans notre exemple, comme $v(0) = v_0$, on a alors :

$$v_{C,G}(0) = \left[ke^{-\frac{1}{RC}t} + v_f\right]_{t=0} = k + v_f = v_0 \quad \Rightarrow \quad k = v_0 - v_f.$$

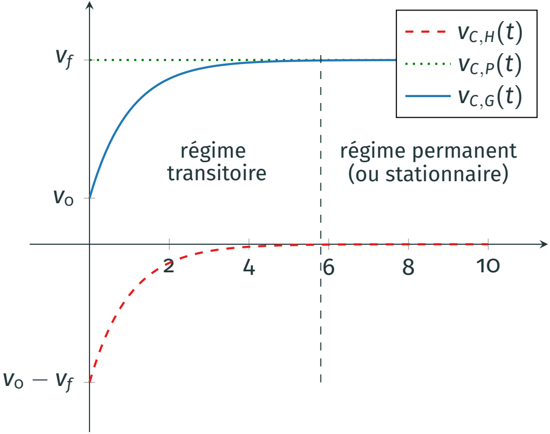
· Finalement, la solution générale est donnée par :

$$v_{C,G}(t) = (v_0 - v_f)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_f,$$

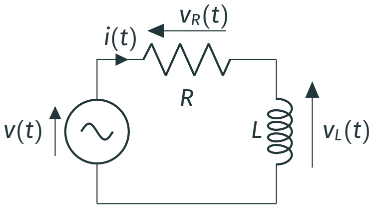
avec $\tau = RC$.

- Pour un circuit RC en série avec $R = 1\Omega$, $C = 1F$, et $v_f > v_0 > 0$, on a :

$$v_{C,G}(t) = [v_0 - v_f]e^{-t} + v_f.$$



Exercice. Considérer le circuit RL série :



Avec :

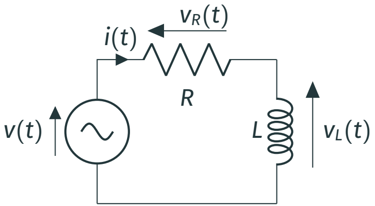
$$R = 3\Omega,$$
$$L = 1H,$$
$$v(t) = \sin(t)$$

Calculer la solution générale de l'équation différentielle :

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) = Ri(t) + Li'(t).$$

Remarque. La solution particulier est de la forme $i_P(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$.

Exercice. Considérer le circuit RL série :



Avec :

$$R = 3\Omega,$$
$$L = 1H,$$
$$v(t) = \sin(t)$$

Calculer la solution générale de l'équation différentielle :

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) = Ri(t) + Li'(t).$$

Remarque. La solution particulier est de la forme $i_P(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$.

Solution.

· L'équation associée au courant dans le circuit RL est donnée par :

$$i'(t) + 3i(t) = \sin(t).$$

Solution de l'équation homogène : $i'(t) + 3i(t) = 0$

· En appliquant la formule $y_H(t) = ke^{-at}$ pour l'équation $y'(t) + ay(t) = 0$:

$$i_H(t) = ke^{-3t}.$$

Remarque

Dans le cadre général $Li'(t) + Ri(t) = 0$, on obtient :

$$i_H(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}},$$

avec une constante du temps $\tau = \dfrac{L}{R}$.

Solution de l'équation avec second terme : $i'(t) + 3i(t) = \sin(t)$

· Sachant que $i_P(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$, on peut déterminer les valeurs de α et $\beta \in \mathbb{R}$ en remplaçant $i(t)$ par $i_P(t)$:

$$\begin{aligned}\sin(t) &= i_P'(t) + 3i_P(t)\\ &= [-\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)] + 3[\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)]\\ &= (-\alpha + 3\beta) \sin(t) + (\beta + 3\alpha) \cos(t),\end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 1, \\ \beta + 3\alpha = 0. \end{cases}$$

· Étant donné que $\beta = -3\alpha$, on trouve : $\alpha = -\dfrac{1}{10}$ et $\beta = \dfrac{3}{10}$.

Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

Solution générale : $i_G(t) = i_H(t) + i_P(t)$

$$i_G(t) = ke^{-3t} - \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{3}{10}\sin(t).$$

Calcul de la constante k :

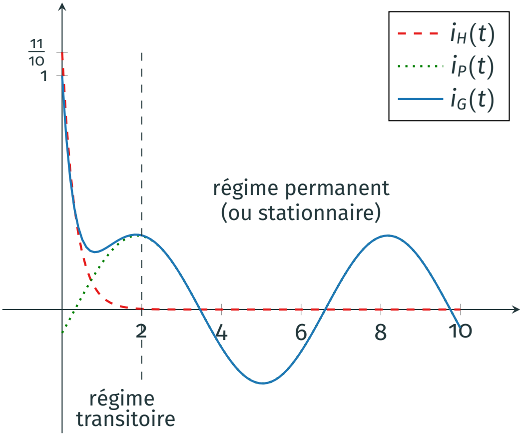
· Pour calculer la valeur de k, il faut considérer la condition initial $i(0)$ et satisfaire l'égalité :

$$i_G(0) = i(0).$$

· En supposant dans notre exemple que $i(0) = 1$, on obtient :

$$i_G(0) = 1 = k - \frac{1}{10}, \qquad \text{d'où on obtient } k = \frac{11}{10}.$$

$$i_G(t) = \frac{11}{10}e^{-3t} - \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{3}{10}\sin(t)$$



Exercices.

· Calculer et tracer la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) + 5y(t) = 10$, avec $y(0) = 3$
2. $y'(t) + 2y(t) = 4t^2 - t$, avec $y(0) = 1$
3. $2v'(t) + 6v(t) = e^{-2t}$, avec $v(0) = 3$
4. $i'(t) + 4i(t) = e^{-t}[2\sin(t) + 4\cos(t)]$, avec $i(0) = 3$

Solution.

1. $y'(t) + 5y(t) = 10$, avec $y(0) = 3$

Solution à l'équation homogène : $y'(t) + 5y(t) = 0$

$$y_H(t) = ke^{-5t}.$$

Solution à l'équation avec second terme : $y'(t) + 5y(t) = 10$

En sachant que $y_P(t) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$y_P'(t) + 5y_P(t) = 5c = 10, \qquad \text{d'où on trouve } c = 2.$$

Solution général : $y_G(t) = y_H(t) + y_P(t)$

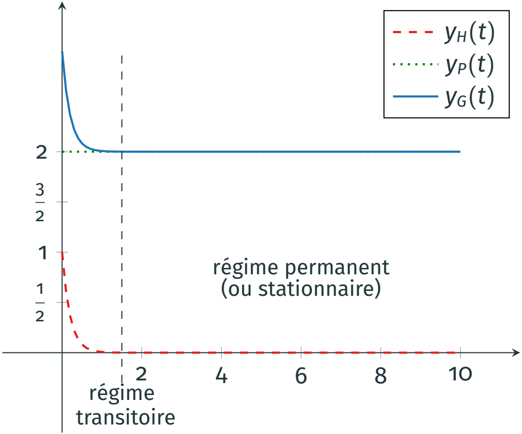
$$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t) = ke^{-5t} + 2.$$

· Grâce à la condition initial $y(0) = 3$, on a :

$$y_G(t) = k + 2 = 3, \qquad \text{d'où on obtient } k = 1.$$

- Finalement, on obtient :

$$y_G(t) = e^{-5t} + 2.$$



Solution (suite).

2. $y'(t) + 2y(t) = 4t^2 - t$, avec $y(0) = 1$.

Solution à l'équation homogène : $y'(t) + 2y(t) = 0$

$$y_H(t) = ke^{-2t}.$$

Solution à l'équation avec second terme : $y'(t) + 2y(t) = 4t^2 - t$

En sachant que $y_P(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$ avec $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned} y_P'(t) + 2y_P(t) &= (2c_2t + c_1) + 2(c_2t^2 + c_1t + c_0) \\ &= 2c_2t^2 + 2(c_1 + c_2)t + 2c_0 + c_1 = 4t^2 - t, \end{aligned}$$

d'où on trouve

$$\begin{cases} 2c_2 = 4, \\ 2c_1 + 2c_2 = -1, \\ 2c_0 + c_1 = 0. \end{cases} \qquad \to \qquad \begin{cases} c_2 = 2, \\ c_1 = -\frac{5}{2}, \\ c_0 = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Solution (suite).

Solution général : $y_G(t) = y_H(t) + y_P(t)$

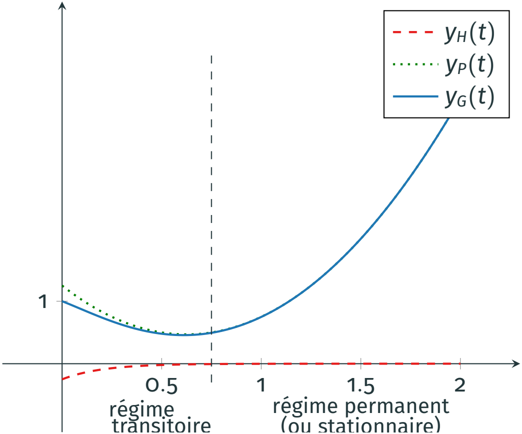
$$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t) = ke^{-2t} + 2t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}.$$

· Grâce à la condition initial $y(0) = 1$, on a :

$$y_G(t) = k + \frac{5}{4} = 1, \qquad \text{d'où on obtient } k = -\frac{1}{4}.$$

- Finalement, on obtient :

$$y_G(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} + 2t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}.$$



Solution (suite).

3. $2v'(t) + 6v(t) = e^{-2t}$, avec $v(0) = 3$

Solution à l'équation homogène : $2v'(t) + 6v(t) = 0$

$$v_H(t) = ke^{-3t}.$$

Solution à l'équation avec second terme : $2v'(t) + 6v(t) = e^{-2t}$

En sachant que $v_P(t) = ce^{-2t}$ avec $c \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$2v_P'(t)+6v_P(t) = -4ce^{-2t}+6ce^{-2t} = 2ce^{-2t} = e^{-2t}, \qquad \text{d'où on trouve } c = \frac{1}{2}.$$

Solution général : $v_G(t) = v_H(t) + v_P(t)$

$$v_G(t) = v_H(t) + v_P(t) = ke^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

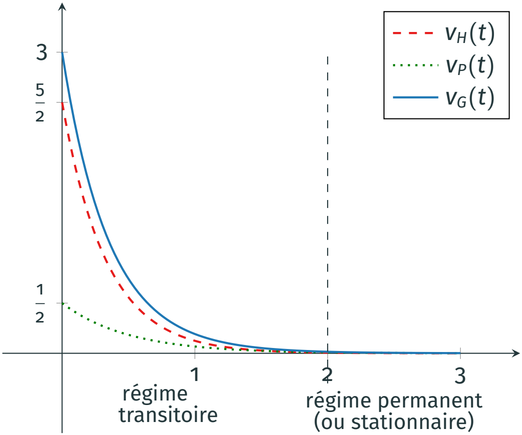
· Grâce à la condition initial $v(0) = 3$, on a :

$$v_G(t) = k + \frac{1}{2} = 3, \qquad \text{d'où on obtient } k = \frac{5}{2}.$$

Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

- Finalement, on obtient :

$$v_G(t) = \frac{5}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}.$$



Solution (suite).

4. $i'(t) + 4i(t) = e^{-t}[2\sin(t) + 4\cos(t)]$, avec $i(0) = 3$

Solution à l'équation homogène : $i'(t) + 4i(t) = 0$

$$i_H(t) = ke^{-4t}.$$

Solution à l'équation avec second terme : $i'(t) + 4i(t) = e^{-t}[2\sin(t) + 4\cos(t)]$

En sachant que $i_P(t) = e^{-t}[\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)]$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned} i_P'(t) + 4i_P(t) &= -e^{-t}[\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)] + e^{-t}[\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)] \\ &\quad + 4e^{-t}[\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)] \\ &= e^{-t}[(3\alpha - \beta)\sin(t) + (\alpha + 3\beta)\cos(t)] \\ &= e^{-t}[2\sin(t) + 4\cos(t)]. \end{aligned}$$

d'où on trouve

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 2, \\ \alpha + 3\beta = 4. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = 1. \end{cases}$$

Solution (suite).

Solution général : $i_G(t) = i_H(t) + i_P(t)$

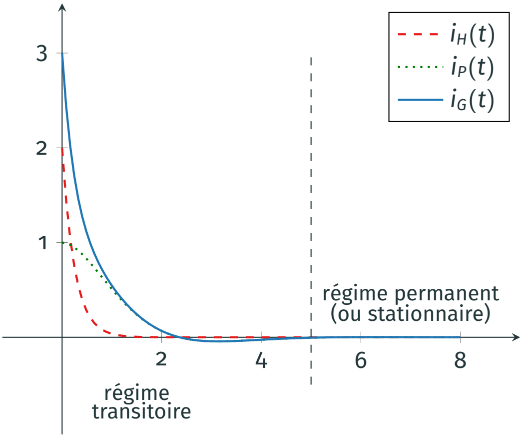
$$i_G(t) = i_H(t) + i_P(t) = ke^{-4t} + e^{-t}[\sin(t) + \cos(t)].$$

· Grâce à la condition initial $i(0) = 3$, on a :

$$i_G(t) = k + 1 = 3, \qquad \text{d'où on obtient } k = 2.$$

- Finalement, on obtient :

$$i_G(t) = 2e^{-4t} + e^{-t}[\sin(t) + \cos(t)].$$



Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 1ère Année.
Ellipses, 2017.

Jean Duveau, Marcel Pasquinelli, and Michel Tholomier.
Électronique : IUT 1ère Année GEII - GMP.
DUNOD, 2e édition, 2017.