IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels I (OML1)

Les nombres complexes

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

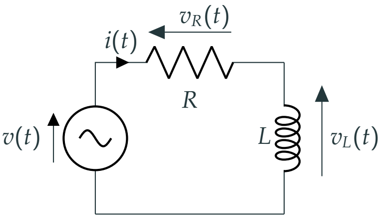
Les nombres complexes

Les nombres complexes

· Les nombres complexes sont largement utilisés en ingénierie (électrique, électronique, automatique, mécanique), en physique, ...

· Quelques cas d'applications sont :

- La résolution des équations différentielles
- L'étude des circuits électriques



· L'impédance Z est donnée par

$$Z = R + j\omega L$$

· $\omega \in \mathbb{R}^+$: la pulsation du signal [rad/s]

· $R \in \mathbb{R}^+$: la résistance [ohm, Ω]

· $L \in \mathbb{R}^+$: le bobinage inductif ou l'inductance [henry, H]

· $j \in \mathbb{C}$: le nombre imaginaire

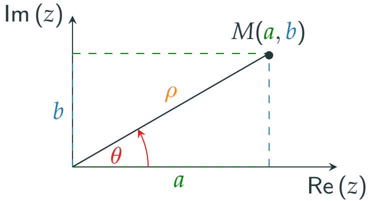
· Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est donné par la forme algébrique :

$$z = a + jb,$$

où

- $a \in \mathbb{R}$: partie réelle de z
- $b \in \mathbb{R}$: partie imaginaire de z
- $j \in \mathbb{C}$: nombre imaginaire défini comme $j = \sqrt{-1}$

Représentation géométrique



· D'après Pythagore, on obtient :

$$\text{(module) } \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{(argument) } \theta = \arg(z) = \arctan \frac{b}{a}$$

· Selon les *coordonnées polaires* $M(\rho, \theta)$:

$$z = \rho \angle \theta$$

Règles de calcul

· Posons $z = a + jb$, on dénote les opérateurs $\mathsf{Re}\,()$ et $\mathsf{Im}\,()$ tels que

$$\mathsf{Re}\,(z) = a, \qquad \mathsf{Im}\,(z) = b$$

· L'élévation du nombre imaginaire j à une puissance n est donné par :

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1, \quad j^3 = j \cdot j^2 = -j, \qquad j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1, \qquad j^5 = j \cdot j^4 = j,$$

plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient **[Exercice]** :

$$j^{4n} = 1, \qquad j^{4n+1} = j, \qquad j^{4n+2} = -1, \qquad j^{4n+3} = 1$$

· Le conjugué de z est le nombre complexe noté par

$$\bar{z} = a - jb,$$

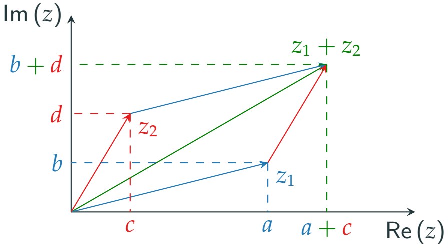
et en particulier on a :

$$z \cdot \bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$

· L'addition de deux nombres complexes est ainsi définie :

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a + c) \pm j(b + d)$$

Représentation graphique de l'addition



$$z_1 = a + jb$$
$$z_2 = c + jd$$
$$z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d)$$

Règles de calcul

- La multiplication de deux nombres complexes est ainsi définie **[Exercice]** :

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

- La division de deux nombres complexes est ainsi définie **[Exercice]** :

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + j\frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

- On dit que $z_1 = a + jb$ et $z_2 = c + jd$ sont égaux si et seulement si :

$$a = c \quad et \quad b = d$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Solution.

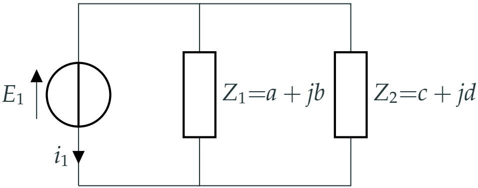
· Multiplication :

$$\begin{aligned}(a+jb)(c+jd) &= ac + jad + jbc + j^2bd \\ &= (ac-bd) + j(ad+bc)\end{aligned}$$

· Division :

$$\begin{aligned}\frac{a+jb}{c+jd} &= \frac{a+jb}{c+jd} \cdot \frac{c-jd}{c-jd} \\ &= \frac{ac - jad + jbc - j^2bd}{c^2+d^2} \\ &= \frac{(ac+bd) + j(bc-ad)}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

Application: montage en parallèle



· L'impédance équivalente Z_{eq} d'un montage en parallèle est donnée par :

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(a + jb)(c + jd)}{(a + jb) + (c + jd)}$$

Exercice. Mettre Z_{eq} sous la forme $Z_{eq} = \alpha + j\beta$.

Application: montage en parallèle

Solution.

$$
\begin{aligned}
Z_{eq} &= \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \\
&= \frac{(a+jb)(c+jd)}{(a+jb)+(c+jd)} \\
&= \frac{(ac-bd)+j(ad+bc)}{(a+c)+j(b+d)} \\
&= \frac{[(ac-bd)+j(ad+bc)][(a+c)-j(b+d)]}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&= \frac{[(ac-bd)(a+c)+(ad+bc)(b+d)]}{(a+c)^2+(b+d)^2} + j\frac{[-(ac-bd)(b+d)+(ad+bc)(a+c)]}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&= \frac{a^2c - \cancel{abd} + ac^2 - \cancel{bcd} + \cancel{abd} + b^2c + ad^2 + \cancel{bcd}}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&\quad + j\frac{-\cancel{abc} + b^2d - \cancel{acd} + bd^2 + a^2d + \cancel{abc} + \cancel{acd} + bc^2}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&= \frac{a^2c + ac^2 + b^2c + ad^2}{(a+c)^2+(b+d)^2} + j\frac{b^2d + bd^2 + a^2d + bc^2}{(a+c)^2+(b+d)^2}
\end{aligned}
$$

Forme trigonométrique

Définition

· Un nombre complexe z peut être défini par son module ρ et son argument θ :

$$z = \rho[\cos\theta + j\sin\theta],$$

où $\rho = \text{mod}(z)$ et $\theta = \arg(z)$

Lien entre la forme trigonométrique et la forme algébrique

· On a :

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}, \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

· Réciproquement :

$$a = \rho\cos\theta, \qquad b = \rho\sin\theta$$

Forme exponentielle

Définition

· La forme exponentielle complexe est également utilisée par la relation :

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}$$

· On en déduit l'écriture du nombre complexe z suivante :

$$z = a + jb = \rho[\cos\theta + j\sin\theta] = \rho e^{j\theta}$$

Règles de calcul

· Multiplication :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} \\ &= \rho_1\rho_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)} = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

· Division :

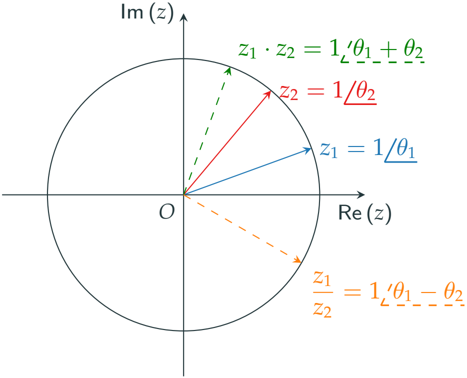
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1-\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + j\sin(\theta_1-\theta_2)] \end{aligned}$$

- On peut déduire les propriétés suivantes sur les modules et arguments :

$$
\begin{aligned}
|z_1 z_2| &= |z_1|\,|z_2|\,, &\qquad \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2)\\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, &\qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2)\\
|z^n| &= |z|^n\,, &\qquad \arg(z^n) &= n\arg(z)
\end{aligned}
$$

Interprétation graphique

- Ici, on suppose $z_1 = e^{j\theta_1}$ et $z_2 = e^{j\theta_2}$



Exercice. Sachant que $z = \rho e^{j\theta} = \rho[\cos\theta + j\sin\theta]$, montrez :

$$\bar{z} = \rho e^{-j\theta}$$

Exercice. Sachant que $z = \rho e^{j\theta} = \rho[\cos\theta + j\sin\theta]$, montrez :

$$\bar{z} = \rho e^{-j\theta}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \overline{\rho[\cos\theta + j\sin\theta]} \\
&= \rho[\overline{\cos\theta + j\sin\theta}] \\
&= \rho[\cos\theta - j\sin\theta] \\
&= \rho[\cos(-\theta) + j\sin(-\theta)] \\
&= \rho e^{j(-\theta)}
\end{aligned}$$

Formules d’Euler et de Moivre

Formules d'Euler

· Les formules d'Euler sont les expressions réciproques de l'expression :

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}$$

· On a également :

$$\cos\theta - j\sin\theta = e^{-j\theta}$$

· Par l'addition et la soustraction de ceux expressions, on obtient **[Exercice]** :

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Linéarisation

· Les formules d'Euler permettent de linéariser les fonctions trigonométriques, par exemple :

$$\begin{aligned}\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}\right)^3\\ &= \frac{1}{8}(e^{j3\theta}+3e^{j2\theta}e^{-j\theta}+3e^{j\theta}e^{-j2\theta}+e^{-j3\theta})\\ &= \frac{1}{8}(e^{j3\theta}+3e^{j\theta}+3e^{-j\theta}+e^{-j3\theta})\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{j3\theta}+e^{-j3\theta}}{2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}\right)=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta\end{aligned}$$

Remarque. La linéarisation s'appuie du triangle de Pascal pour trouver les coefficients λ_i de l'expression :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\ a^{n-i}b^i\\ &= \lambda_0\ a^n+\lambda_1\ a^{n-1}b^1+\lambda_2\ a^{n-2}b^2+\cdots+\lambda_{n-1}\ ab^{n-1}+\lambda_n\ b^n\end{aligned}$$

Formule de Moivre

· La formule de Moivre donne une relation entre l'argument d'un nombre complexe et l'argument de ce nombre élevé a une puissance

· Soit $z = e^{j\theta}$, on a :

$$z^n = (\cos\theta + j\sin\theta)^n = (e^{j\theta})^n = e^{jn\theta} = \cos n\theta + j\sin n\theta$$

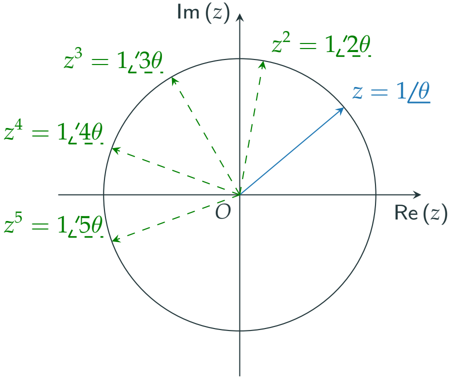
· Ceci établie la formule de Moivre :

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Interprétation graphique

· Ici, on suppose $z = e^{j\theta}$



Racines d’un nombre complexe

Racines n-ième d'un nombre complexe quelconque

· On appelle racine n-ième d'un nombre complexe w, tout nombre complexe z tel que

$$z^n = w \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}$$

· Posons $w = \mu e^{j\alpha}$ et $z = \rho e^{j\theta}$. Il vient :

$$z^n = \rho^n e^{jn\theta} = \mu e^{j\alpha},$$

d'où on déduit avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mu &= \rho^n, & \rho &= \sqrt[n]{\mu} \\ \alpha &= n\theta + 2k\pi, & \theta &= \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

· On obtient alors n racines distinctes s'écrivant :

$$z_k = \sqrt[n]{\mu} e^{j\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},$$

avec k : $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Racine carrée d'un nombre complexe

· On appelle racine carrée de d'un nombre complexe w, tout nombre z tel que

$$z^2 = w$$

· Posons $w = \mu e^{j\alpha}$ et $z = \rho e^{j\theta}$. Il vient :

$$z^2 = \rho^2 e^{j2\theta} = \mu e^{j\alpha},$$

d'où on déduit avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mu &= \rho^2, & \rho &= \sqrt{\mu} \\ \alpha &= 2\theta + 2k\pi, & \theta &= \frac{\alpha}{2} + k\pi \end{aligned}$$

· On obtient alors deux racines distinctes s'écrivant :

$$z_k = \sqrt{\mu} e^{j\left(\frac{\alpha}{2} + k\pi\right)},$$

avec $k : \{0, 1\}$

Racines n-ième de l'unité

· On s'intéresse ici à la résolution des équations du type :

$$z^n - 1 = 0$$

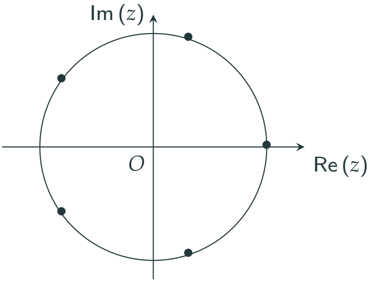
· Cette équation est de la forme $z^n = w$ avec $w = 1$, donc $\mu = 1$ et $\alpha = 0$.

· On obtient alors les n racines distinctes :

$$z_k = \sqrt[n]{\mu} e^{j\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = e^{j\frac{2k\pi}{n}}$$

avec $k : \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Représentation graphique avec $n = 5$



CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Racines n-ième de -1

· On s'intéresse ici à la résolution des équations du type :

$$z^n + 1 = 0$$

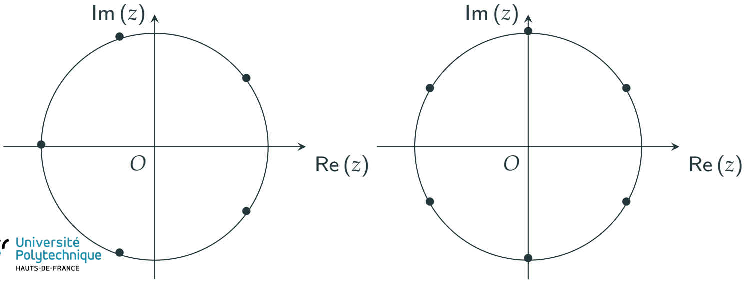
· Cette équation est de la forme $z^n = w$ avec $w = -1$, donc $\mu = 1$ et $\alpha = \pi$.

· On obtient alors les n racines distinctes :

$$z_k = \sqrt[n]{\mu} e^{j\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = e^{j(1+2k)\frac{\pi}{n}}$$

avec k : $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Représentation graphique avec $n = 5$ et $n = 6$



CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Racine carrée d'un nombre complexe

· Si le nombre complexe est de la forme $w = a + jb$, on cherche $z = x + jy$ tel que $z^2 = a + jb$

· Il vient :

$$\left|z^2\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = x^2 + y^2 = |z|^2\,,$$

$$z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + 2jxy = aj + b,$$

d'où on a le système suivant pour déterminer x et y :

$$x^2 - y^2 = a \qquad (1)$$

$$2xy = b \qquad (2)$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (3)$$

· En exprimant (3) $\pm$ (1), on obtient **[Exercice]**:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

· De (2), notez que le signe de b indique si x et y sont de même signe ou non

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Résolution d’équations du second degré

Résolution d'équations du second degré

- Soit une équation du second degré à coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$az^2 + bz + c = 0$$

- La nature des solutions de cette équation dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$
  - Si $\Delta \geq 0$, les deux solutions de l'équation sont réelles

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  - Si $\Delta < 0$, les deux solutions de l'équation sont complexes

$$z = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Résolution d'équations du second degré

· Soit une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients $a, b, c \in \mathbb{C}$

· Le calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$ donne en général un nombre complexe de la forme

$$\Delta = \alpha + j\beta$$

· Si tel est le cas, on calcule la racine carrée de Δ et on a les solutions :

$$z = \frac{-b \pm \mathsf{rac}(\Delta)}{2a}$$

· Si Δ est un nombre réel, les solutions se déterminent de manière classique et celles-ci peuvent être complexes si les coefficients a et/ou b son complexes

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE