IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels I (OML1)

Équations différentielles ordinaires du premier ordre

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

Introduction aux équations différentielles ordinaires

Introduction aux équations différentielles ordinaires

· Les *équations différentielles* trouvent leurs applications dans nombreux domaines :

- biologie
- physique
- ingénierie (électrique, industrielle, mécanique)

· Nombreux phénomènes naturels sont régis par ces équations :

- Systèmes dynamiques (e.g. mouvement des objets)
- Circuit électriques (e.g. circuits RLC)
- Relation entre l'ADN et les protéines (e.g. régulation de l'expression des gènes)

· Dans le cas général, une *équation différentielle ordinaire* (EDO) *linéaire à coefficients constants* est donnée par :

$$a_n \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = e(x),$$

ou

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = e(x),$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $e(x) : I \to \mathbb{R}$ (fonction d'entrée du système).

· Dans le cas général, une *équation différentielle ordinaire* (EDO) *linéaire à coefficients constants* est donnée par :

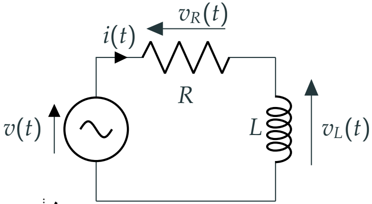
$$a_n \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = e(x),$$

ou

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = e(x),$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $e(x) : I \to \mathbb{R}$ (fonction d'entrée du système).

Exemple (Circuit RL en série).



· Grâce au principe de la conservation de l'énergie, on sait que :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_R(t) + v_L(t) \\ &= Ri(t) + Li'(t) \end{aligned}$$

· On appelle *équation différentielle linéaire (à coefficients constants) de 1er ordre* toute équation de la forme :

$$ay'(x) + by(x) = e(x),$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $e(x) : I \to \mathbb{R}$.

· De façon plus générale, on appelle *équation différentielle linéaire de 1er ordre* toute équation de la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = e(x),$$

avec $a(x), b(x), e(x) : I \to \mathbb{R}$.

· On appelle *équation différentielle linéaire (à coefficients constants) de 2nd ordre* toute équation de la forme :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e(x),$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $e(x) : I \to \mathbb{R}$.

· De façon plus générale, on appelle *équation différentielle linéaire de 2nd ordre* toute équation de la forme :

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = e(x),$$

avec $a(x), b(x), c(x), e(x) : I \to \mathbb{R}$.

· On appelle équation à variables séparables, toute équation du 1er ordre qui peut s'écrire :

$$y'g(y) = f(x),$$

ou, en utilisant la notation différentielle, sous la forme :

$$g(y)dy = f(x)dx$$

Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

· Ici, on se concentre sur des équations différentielles de 1er ordre :

$$y'(x) + ay(x) = e(x)$$

· Pour le cas $ay'(x) + by(x) = e(x)$, il suffit de diviser l'équation différentielle par a afin d'avoir les formes précédentes :

$$y'(x) + \underbrace{\frac{b}{a}}_{c} y(x) = \underbrace{\frac{e(x)}{a}}_{d(x)}$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Solution générale d'une équation différentielle linaire de 1er ordre

· La solution générale $y_G(x)$ d'une équation différentielle linéaire est la somme :

- de la *solution de l'équation homogène* $y_H(x)$:

$$y'_H(x) + a y_H(x) = 0$$

- et d'une *solution particulière* $y_P(x)$ *de l'équation avec second membre* :

$$y'_P(x) + a y_P(x) = e(x)$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Résolution de l'équation homogène

· On cherche toutes les fonctions $y_H(x)$ solutions de

$$y_H'(x) + a y_H(x) = 0 \tag{1}$$

· Les solutions de cette équation sont les fonctions définies par :

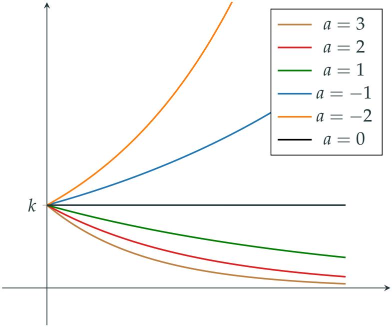
$$y_H(x) = ke^{-ax}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Remarque. Ces solutions s'obtient formellement par intégration.

· On peut vérifier que $y_H(x) = ke^{-ax}$ sont des solutions de (1) :

$$\begin{aligned} y_H'(x) + a y_H(x) &= \frac{d}{dx}[ke^{-ax}] + a[ke^{-ax}] \\ &= -ake^{-ax} + ake^{-ax} = 0 \end{aligned}$$

$$y'(x) + ay(x) = 0, \qquad y_H(x) = ke^{-ax}$$



Remarque.

- Pour $a > 0$, elle représente une constante de atténuation
- Pour $a < 0$, elle représente une constante d’amplification

Exercice. Trouver les solutions de l'équation différentielle donnée par :

$$3y'(x) - 6y(x) = 0$$

Exercice. Trouver les solutions de l'équation différentielle donnée par :

$$3y'(x) - 6y(x) = 0$$

Solution.

· On peut récrire l'équation précédente de la forme :

$$y'(x) - 2y(x) = 0$$

· En appliquant la formule $y_H(x) = ke^{-ax}$ pour l'équation de la forme $y'(x) + ay(x) = 0$, on obtient :

$$y_H(x) = ke^{2x},$$

pour $k \in \mathbb{R}$

Résolution de l'équation avec second terme

· On cherche la fonction $y_P(x)$ solution de

$$y'(x) + ay(x) = e(x) \tag{2}$$

· La solution $y_P(x)$ de cette équation dépend du type de la fonction $e(x)$

$e(x)$	$y_P(x)$
constante a	constante c
ax	$mx + n$
$a_n x^n + \cdots + a_1 x$	$c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$
ae^{-bx}	ce^{-bx}
$a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)$	$\alpha\sin(\omega x) + \beta\cos(\omega x)$
$e^{-\lambda x}[a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)]$	$e^{-\lambda x}[\alpha\sin(\omega x) + \beta\cos(\omega x)]$

Exemple. Soit l'équation différentielle donnée par :

$$3y'(x) - 6y(x) = -6x$$

· La solution particulier à cette équation est de la forme $y_P(x) = mx + n$

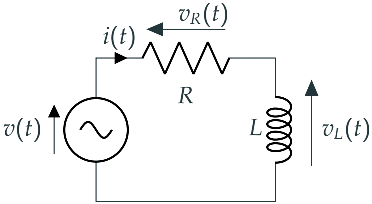
· Pour trouver les valeurs $m, n \in \mathbb{R}$, il suffit de remplacer $y(x)$ par $y_P(x)$:

$$-6x = 3y_P'(x) - 6y_P(x) = 3m - 6mx - 6n,$$

d'où on obtient que $-6m = -6$ et $3m - 6n = 0$. Alors, $m = 1$ et $n = \dfrac{m}{2} = \dfrac{1}{2}$.

· Finalement, on obtient $y_P(x) = x + \dfrac{1}{2}$

Exercice. Considérer le circuit RL série :



Avec :

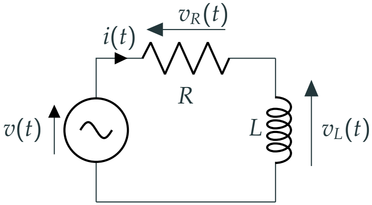
$$R = 3\Omega,$$
$$L = 1H$$
$$v(t) = \sin(t)$$

Calculer la solution générale de l'équation différentielle :

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) = Ri(t) + Li'(t)$$

Remarque. La solution particulier est de la forme $i_P(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$.

Exercice. Considérer le circuit RL série :



Avec :

$$R = 3\Omega,$$
$$L = 1H$$
$$v(t) = \sin(t)$$

Calculer la solution générale de l'équation différentielle :

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) = Ri(t) + Li'(t)$$

Remarque. La solution particulier est de la forme $i_P(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$.

Solution.

· L'équation différentielle associée au courant du circuit RL est donnée par :

$$i'(t) + 3i(t) = \sin(t)$$

Solution de l'équation homogène : $i'(t) + 3i(t) = 0$

· En appliquant la formule $y_H(x) = ke^{-ax}$ pour l'équation $y'(x) + ay(x) = 0$:

$$i_H(t) = ke^{-3t}$$

Remarque

Dans le cas général $Li'(t) + Ri(t) = 0$, on obtient :

$$i_H(t) = ke^{-\frac{R}{L}t},$$

avec une constante de atténuation $a = \dfrac{R}{L}$:

- le taux de décroissement est plus important si $R \gg L$
- le taux de décroissement est plus faible si $R \ll L$

Solution de l'équation avec second terme : $i'(t) + 3i(t) = \sin(t)$

· En sachant que $i_P(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$, on peut trouver les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en remplaçant $i(t)$ par $i_P(t)$:

$$\begin{aligned}\sin(t) &= i_P'(t) + 3i_P(t)\\ &= [-\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)] + 3[\alpha\cos(t) + \beta\sin(t)]\\ &= (-\alpha + 3\beta)\sin(t) + (\beta + 3\alpha)\cos(t),\end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 1\\ \beta + 3\alpha = 0\end{cases}$$

· Parce que $\beta = -3\alpha$, on obtient : $\alpha = -\dfrac{1}{10}$ et $\beta = \dfrac{3}{10}$

Solution générale : $i_G(t) = i_H(t) + i_P(t)$

$$i_G(t) = ke^{-3x} - \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{3}{10}\sin(t)$$

Calcul de la constante k :

Pour calculer la valeur de k, il faut considérer la condition initial $i(0)$ et satisfaire l'égalité :

$$i_G(0) = i(0)$$

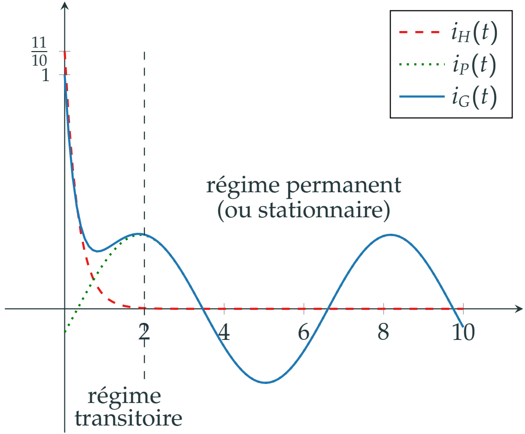
· En supposant dans notre exemple que $i(0) = 1$, on obtient :

$$i_G(0) = 1 = k - \frac{1}{10}, \qquad \text{d'où on obtient } k = \frac{11}{10}$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

$$i_G(t) = ke^{-3x} - \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{3}{10}\sin(t)$$



Procédure.

1. Définir l'équation différentielle de la forme :

$$y'(x) + ay(x) = e(x), \qquad y(0) = c \text{ (condition initiale)}$$

2. Calculer les solutions de l'équation homogène $y'(x) + ay(x) = 0$:

$$y_H(x) = ke^{-ax}$$

3. Selon le type de fonction $e(x)$, établir la forme de la solution particulière $y_P(x)$ [e.g., si $e(x) = \sin(x)$, alors $y_P(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$]
4. Calculer les constantes associées au $y_P(x)$ en utilisant le fait que :

$$y_P'(x) + ay_P(x) = e(x)$$

5. Définir la solution générale de la forme :

$$y_G(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

6. Calculer k en évaluant la solution générale $y_G(0)$ sur $x = 0$:

$$y_G(0) = y_H(0) + y_P(0) = c$$

Exercices.

Calculer et dessiner la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) + 5y(x) = 10$, avec $y(0) = 3$
2. $y'(x) + 2y(x) = 4x^2 - x$, avec $y(0) = 1$
3. $2v'(t) + 6v(t) = e^{-2t}$, avec $v(0) = 3$
4. $i'(t) + 4i(t) = e^{-t}[2\sin(t) + 4\cos(t)]$, avec $i(0) = 3$

Solution.

1. $y'(x) + 5y(x) = 10$, avec $y(0) = 3$

Solution à l'équation homogène : $y'(x) + 5y(x) = 0$

$$y_H(x) = ke^{-5x}$$

Solution à l'équation avec second terme : $y'(x) + 5y(x) = 10$

En sachant que $y_P(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, on obtient que :

$$y_P'(x) + 5y_P(x) = 5c = 10, \qquad \text{d'où on obtient } c = 2$$

Solution général : $y_G(x) = y_H(x) + y_P(x)$

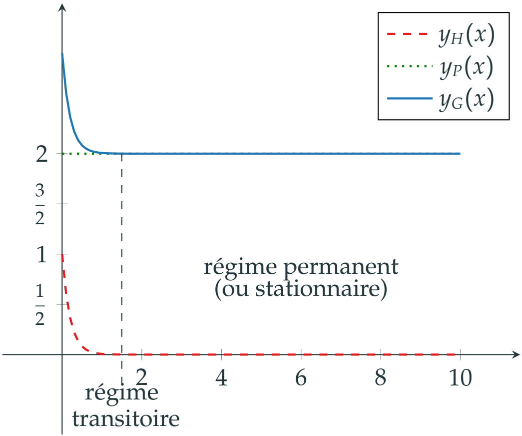
$$y_G(x) = y_H(x) + y_P(x) = ke^{-5x} + 2$$

· Grâce à la condition initial $y(0) = 3$, on obtient :

$$y_G(x) = k + 2 = 3, \qquad \text{d'où on obtient } k = 1$$

· Finalement, on obtient :

$$y_G(x) = e^{-5x} + 2$$



Solution (continuation).

2. $y'(x) + 2y(x) = 4x^2 - x$, avec $y(0) = 1$

Solution à l'équation homogène : $y'(x) + 2y(x) = 0$

$$y_H(x) = ke^{-2x}$$

Solution à l'équation avec second terme : $y'(x) + 2y(x) = 4x^2 - x$

En sachant que $y_P(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ avec $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, on obtient que :

$$\begin{aligned} y_P'(x) + 2y_P(x) &= (2c_2x + c_1) + 2(c_2x^2 + c_1x + c_0) \\ &= 2c_2x^2 + 2(c_1 + c_2)x + 2c_0 + c_1 = 4x^2 - x, \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\begin{cases} 2c_2 = 4 \\ 2c_1 + 2c_2 = -1 \\ 2c_0 + c_1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = 2 \\ c_1 = -\frac{5}{2} \\ c_0 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Solution (continuation).

Solution général : $y_G(x) = y_H(x) + y_P(x)$

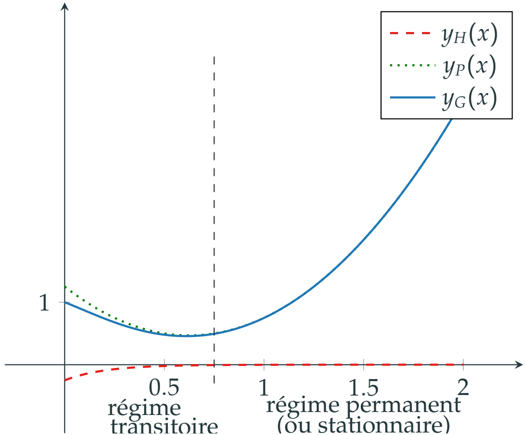
$$y_G(x) = y_H(x) + y_P(x) = ke^{-2x} + 2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}$$

· Grâce à la condition initial $y(0) = 1$, on obtient :

$$y_G(x) = k + \frac{5}{4} = 1, \qquad \text{d'où on obtient } k = -\frac{1}{4}$$

· Finalement, on obtient :

$$y_G(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x} + 2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}$$



Solution (continuation).

3. $2v'(t) + 6v(t) = e^{-2t}$, avec $v(0) = 3$

Solution à l'équation homogène : $2v'(t) + 6v(t) = 0$

$$v_H(t) = ke^{-3t}$$

Solution à l'équation avec second terme : $2v'(t) + 6v(t) = e^{-2t}$

En sachant que $v_P(t) = ce^{-2t}$ avec $c \in \mathbb{R}$, on obtient que :

$$2v_P'(t) + 6v_P(t) = -4ce^{-2t} + 6ce^{-2t} = 2ce^{-2t} = e^{-2t}, \qquad \text{d'où on obtient } c = \frac{1}{2}$$

Solution général : $v_G(t) = v_H(t) + v_P(t)$

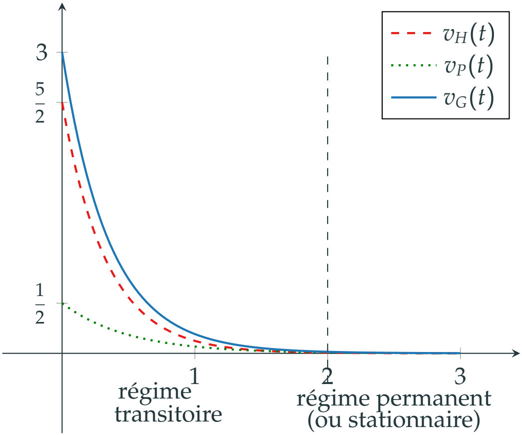
$$v_G(t) = v_H(t) + v_P(t) = ke^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

· Grâce à la condition initial $v(0) = 3$, on obtient :

$$v_G(t) = k + \frac{1}{2} = 3, \qquad \text{d'où on obtient } k = \frac{5}{2}$$

· Finalement, on obtient :

$$v_G(t) = \frac{5}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$



Solution (continuation).

4. $i'(t) + 4i(t) = e^{-t}[2\sin(t) + 4\cos(t)]$, avec $i(0) = 3$

Solution à l'équation homogène : $i'(t) + 4i(t) = 0$

$$i_H(t) = ke^{-4t}$$

Solution à l'équation avec second terme : $i'(t) + 4i(t) = e^{-t}[2\sin(t) + 4\cos(t)]$

En sachant que $i_P(t) = e^{-t}[\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)]$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on obtient que :

$$\begin{aligned} i_P'(t) + 4i_P(t) &= -e^{-t}[\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)] + e^{-t}[\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)] \\ &\quad + 4e^{-t}[\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)] \\ &= e^{-t}[(3\alpha - \beta)\sin(t) + (\alpha + 3\beta)\cos(t)] \\ &= e^{-t}[2\sin(t) + 4\cos(t)] \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 2 \\ \alpha + 3\beta = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Solution (continuation).

Solution général : $i_G(t) = i_H(t) + i_P(t)$

$$i_G(t) = i_H(t) + i_P(t) = ke^{-4t} + e^{-t}[\sin(t) + \cos(t)]$$

· Grâce à la condition initial $i(0) = 3$, on obtient :

$$i_G(t) = k + 1 = 3, \qquad \text{d'où on obtient } k = 2$$

· Finalement, on obtient :

$$i_G(t) = 2e^{-4t} + e^{-t}[\sin(t) + \cos(t)]$$