IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels I (OML1)

Fonctions numériques à variable réelle (partie I)

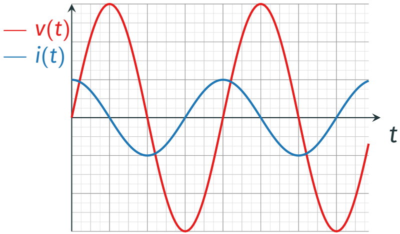
Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

Motivation

· Dans tous les domaines des sciences et des techniques, des fonctions s'utilisent pour représenter l'évolution d'une donnée par rapport à une autre.

· Par exemple, un signal électrique est une fonction qui décrit l'évolution d'une quantité physique en fonction du temps.



$$v(t) = 3\sin(\omega t) \qquad [\text{volt}, V],$$
$$i(t) = \cos(\omega t) \qquad [\text{ampère}, A].$$

· Ici, on considère de manière générale des fonctions telles que :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto f(x). \end{cases}$$

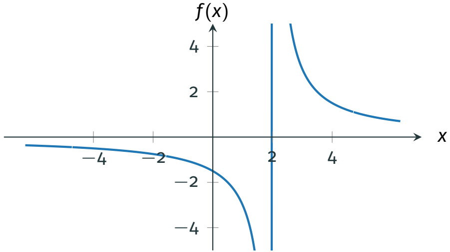
Domaine de définition

Domaine de définition

· Le domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}$ d'une fonction est l'ensemble des valeurs $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la fonction est définie. Ainsi, on exclut du domaine toutes les valeurs de x qui rendent la fonction indéfinie.

Exemple.

$$f(x) = \frac{3}{x-2}, \qquad D = \mathbb{R} - \{2\}.$$



Exercice. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. $f(x) = \sqrt{x+2}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$
5. $f(x) = \sin(x)$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sin(x)}$
7. $f(x) = \tan(x)$

Solution.

1. $f(x) = ax^2 + bx + c : D = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \sqrt{x+2} : D = [-2; +\infty[$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x-3} : D = \mathbb{R} - \{3\}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)} : D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$
5. $f(x) = \sin(x) : D = \mathbb{R}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \cos(x)} : D = \mathbb{R} - \{2k\pi\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
7. $f(x) = \tan(x) : D = \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Domaine d’étude

Domaine d'étude

- Il n'est pas toujours nécessaire d'étudier une fonction sur l'ensemble complet de D.
- Parfois, la fonction présente une périodicité ou une parité, ce qui permet de restreindre l'analyse à un sous-ensemble spécifique du domaine.
- Ainsi, le domaine d'étude D_e devient un sous-ensemble du domaine de D, c'est-à-dire $D_e \subseteq D$.

Périodicité

Une fonction $f(x)$ est dite *périodique* si et seulement si, pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$, il existe un réel $T > 0$ tel que :

$$f(x+T) = f(x).$$

· Cette définition peut être exprimée en termes ensemblistes de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists ! \, T > 0 \mid f(x+T) = f(x).$$

Exemple. La fonction $f(x) = \sin(x)$ est périodique avec une période $T = 2\pi$.

· L'existence de cette périodicité permet de restreindre l'étude à une seule période ; il suffit ensuite de dupliquer le tracé en appliquant cette périodicité à chaque intervalle :

$$D_e = [0; T] \qquad \text{ou} \qquad D_e = \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right].$$

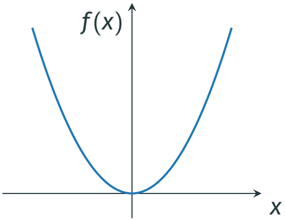
Parité

- Une fonction $f(x)$ est dite *paire* si elle vérifie la relation suivante :

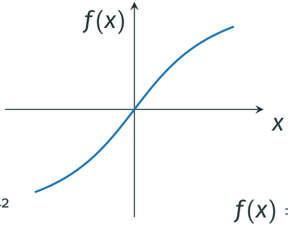
$$f(-x) = f(x).$$

- Une fonction $f(x)$ est dite *impaire* si elle vérifie la relation suivante :

$$f(-x) = -f(x).$$



$f(x) = x^2$



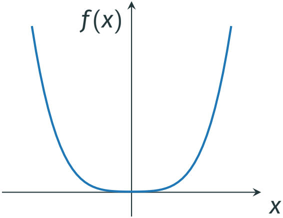
$f(x) = \arctan(x)$

- Dans les deux cas, l'étude de la fonction peut se limiter à l'intervalle

$$D_e = [0; +\infty[\qquad \text{ou} \qquad D_e =]-\infty; 0].$$

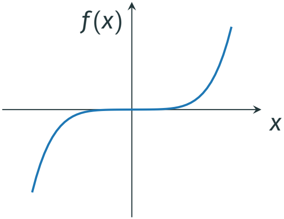
Domaine d'étude

· Toute fonction polynomiale ne comportant que des termes de degré pair est paire.



$f(x) = x^4 + x^2 + 1$

· Toute fonction polynomiale ne comportant que des éléments de degré impair est impaire.



$f(x) = x^5 + x^3 + x$

Propriétés.

- La somme de deux fonctions paires est paire.
- La somme de deux fonctions impaires est impaire.
- Le produit ou le quotient de deux fonctions paires est pair.
- Le produit ou le quotient de deux fonctions impaires est pair.
- Le produit ou le quotient d'une fonction impaire par une fonction paire est impair.

Démonstration.

- Soient f et g deux fonctions paires :

$$h(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = h(-x),$$
$$h(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = h(-x),$$
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(-x)}{g(-x)} = h(-x).$$

- Soient f et g deux fonctions impaires :

$$h(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) - g(-x) = -h(-x),$$
$$h(x) = f(x)g(x) = [-f(-x)][-g(-x)] = h(-x),$$
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(-x)}{-g(-x)} = h(-x).$$

- Soient f une fonction paire et g une fonction impaire :

$$h(x) = f(x)g(x) = f(-x)[-g(-x)] = -h(-x),$$
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(-x)}{-g(-x)} = -h(-x).$$

Étude des limites et asymptotes

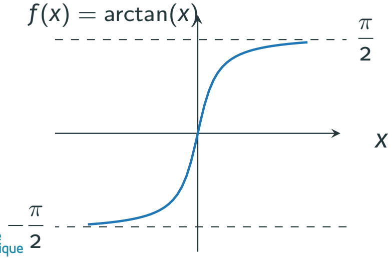
Étude des limites et asymptotes

- Il est nécessaire de déterminer le comportement de f lorsque $x \to \pm\infty$.
- De même, il convient d'étudier le comportement de f pour les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \to \pm\infty$.

Limite

On dit que $f(x)$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ (ou tend vers ℓ) lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$, si, en choisissant x de plus en plus proche de a, $f(x)$ devient aussi proche de ℓ que l'on souhaite. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$



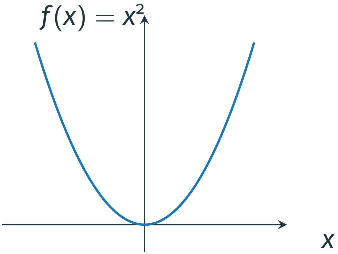
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

- On distingue la limite à gauche et la limite à droite :

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \qquad \lim_{x\to a^+} f(x).$$

- Deux cas peuvent se présenter :
  - Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$, alors $f(x)$ tend vers ℓ des deux côtés de a, et on écrit :

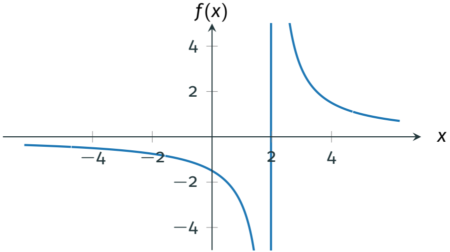
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$



$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

- Si $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, alors la f admet une *discontinuité* en $x = a$.



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty.$$

Continuité

On dit que $f(x)$ est continue sur $I \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $a \in I$, les conditions suivantes sont vérifiées :

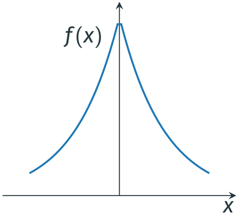
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Cas possibles en un point d'abscisse a

· La limite de $f(x)$ est finie lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

$$\lim_{x \to 0} e^{-|x|} = 1$$



· La limite de f est infinie lorsque x tend vers a, ce qui signifie que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

· La limite n'existe si f présente des oscillations infinies autour de a

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) = ?$$

Étude des limites et asymptotes

$\lim f(x)$	ℓ	$\ell < 0$				$\ell > 0$			
$\lim g(x)$	ℓ'	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim[h(x)+g(x)]$	$\ell+\ell'$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lim[h(x)\cdot g(x)]$	$\ell\cdot\ell'$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim[h(x)/g(x)]$	ℓ/ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

$\lim f(x)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim[h(x)+g(x)]$	0	$+\infty$	$-\infty$	fi	fi
$\lim[h(x)\cdot g(x)]$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim[h(x)/g(x)]$	fi	fi	fi	fi	fi

Étude des indéterminations

· À l'infini, la limite d'une fonction polynomiale est dominée par son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) \sim \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$$

· Pour un quotient de deux polynômes, la limite à l'infini est approximée par le rapport de leurs termes dominants :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{2x^3 - 5x + 2} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \frac{3}{2}.$$

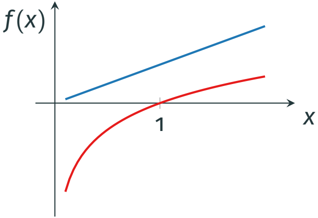
Remarque : Cette méthode est valable lorsque le degré du numérateur et du dénominateur sont égaux. Dans le cas contraire :

- Si le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, la limite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si le degré du dénominateur est supérieur, la limite est 0.

Étude des indéterminations

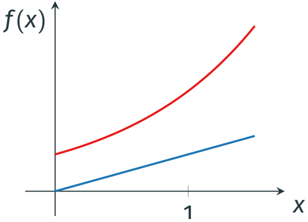
· Pour toute valeur de $a > 0$, la fonction x^a croît toujours plus rapidement que la fonction $\ln(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$$



· Pour toute valeur de $a > 0$ et toute base $b > 1$, la fonction b^x croît toujours plus rapidement que la fonction x^a lorsque $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

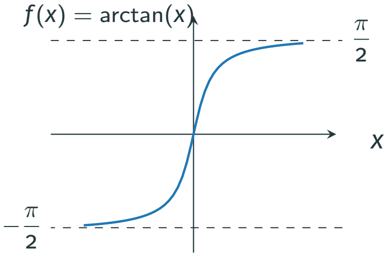


- Une fonction admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = a$ si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a, \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

Exemple 1.

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$



Exemple 2.

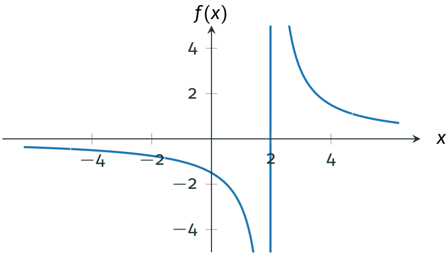
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-3} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$

- Une fonction admet une *asymptote verticale* d'équation $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Exemple.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty.$$



· Si une fonction f s'écrit sous la forme

$$f(x) = ax + b + g(x),$$

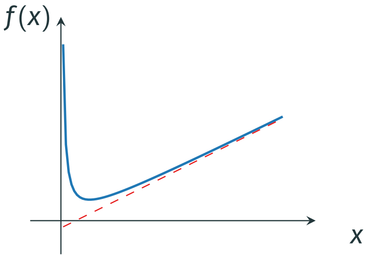
avec

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* de f en $\pm\infty$.

Exemple.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x} = 3x - 2 + \frac{5}{x}$$



Étude des limites et asymptotes

· Si une fonction f s'écrit sous la forme

$$f(x) = k(x) + g(x),$$

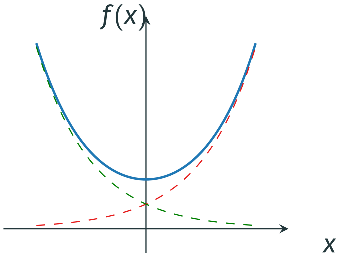
avec

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

alors la fonction $k(x)$ est une *courbe asymptote* de f en $\pm\infty$.

Exemple.

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$



· On dit que :

- $k(x) = \frac{e^x}{2}$ est asymptote à $f(x)$ à $+\infty$
- $g(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ est asymptote à $f(x)$ à $-\infty$

Transformations

Dilatation et contraction horizontale

· Soit $g(x)$ une transformation de la fonction $f(x)$ définie par :

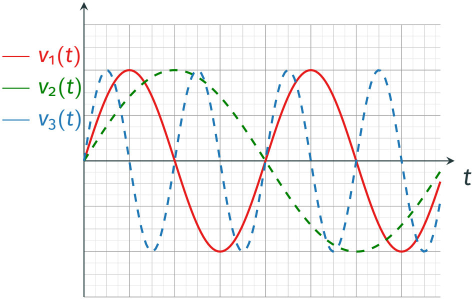
$$g(x) = f(ax).$$

- Si $0 < a < 1$, la fonction subit une *dilatation horizontale* (étirement).
- Si $a > 1$, il s'agit d'une *contraction horizontale* (rétrécissement).

$v_1(t) = \sin(t)$

$v_2(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$

$v_3(t) = \sin(2t)$



Transformations

Dilatation et contraction verticale

· Soit $g(x)$ une transformation de la fonction $f(x)$ définie par :

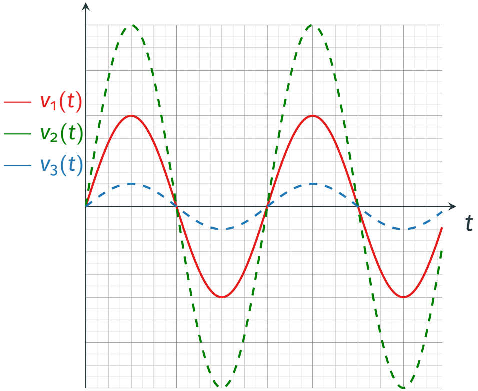
$$g(x) = af(x)$$

- Si $a > 1$, la fonction subit une *dilatation verticale* (amplification).
- Si $0 < a < 1$, il s'agit d'une *contraction verticale* (atténuation).

$$v_1(t) = \sin(t)$$

$$v_2(t) = 2\sin(t)$$

$$v_3(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$$



Transformations

Translation horizontale

· Une fonction $g(x)$ est une *translation horizontale* de la fonction $f(x)$ si :

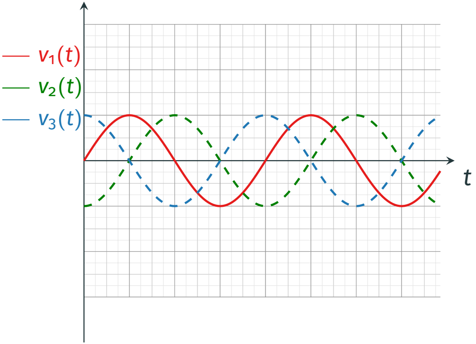
$$g(x) = f(x - a).$$

- Si $a > 0$, la translation est vers la droite.
- Si $a < 0$, la translation est vers la gauche.

$$v_1(t) = \sin(t)$$

$$v_2(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_3(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Translation verticale

- Une fonction $g(x)$ est une *translation verticale* (*offset*) de $f(x)$ si :

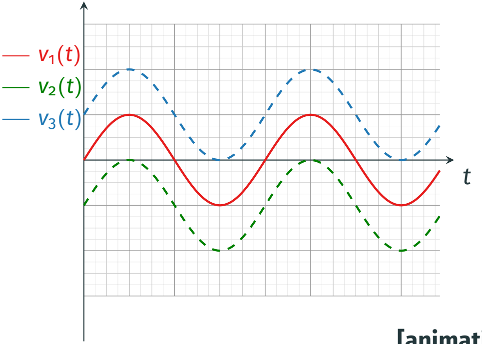
$$g(x) = f(x) + a.$$

  - Si $a > 0$, la translation est vers le haut.
  - Si $a < 0$, la translation est vers le bas.

$v_1(t) = \sin(t)$

$v_2(t) = \sin(t) - 1$

$v_3(t) = \sin(t) + 1$



[animation]

Exercice. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Représenter graphiquement la fonction :

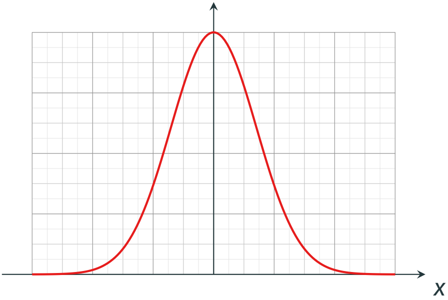
$$g(x) = \frac{1}{2} f(2[x-1]).$$

Exercice. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Représenter graphiquement la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{2}f(2[x-1]).$$

Solution.

$f(x) = e^{-x^2}$



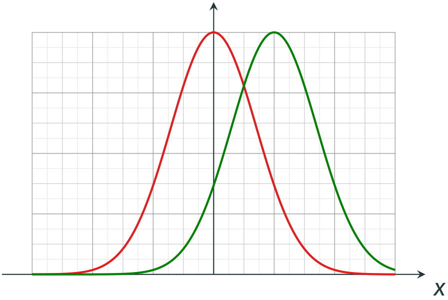
Exercice. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Représenter graphiquement la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{2} f(2[x-1]).$$

Solution.

$f(x) = e^{-x^2}$

$f(x-1) = e^{-(x-1)^2}$



Exercice. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Représenter graphiquement la fonction :

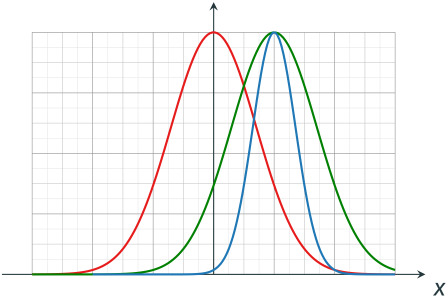
$$g(x) = \frac{1}{2} f(2[x-1]).$$

Solution.

$f(x) = e^{-x^2}$

$f(x-1) = e^{-(x-1)^2}$

$f(2[x-1]) = e^{-(2[x-1]^2)}$

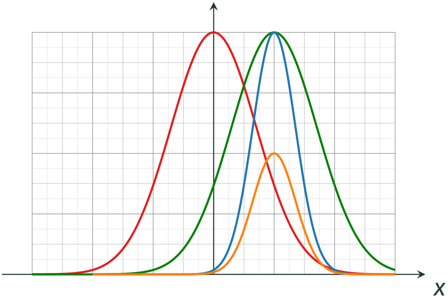


Exercice. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Représenter graphiquement la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{2} f(2[x-1]).$$

Solution.

$$f(x) = e^{-x^2}$$
$$f(x-1) = e^{-(x-1)^2}$$
$$f(2[x-1]) = e^{-(2[x-1]^2)}$$
$$\frac{1}{2} f(2[x-1]) = \frac{1}{2} e^{-(2[x-1]^2)}$$



Sens de variation

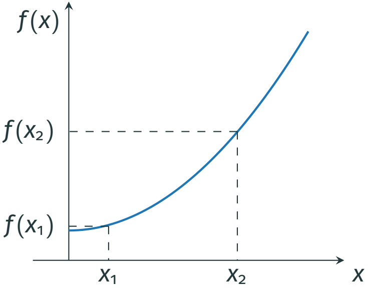
Sens de variation

- Une fonction est dite *croissante* sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ si, pour tous $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a :

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

- Une fonction est dite *strictement croissante* sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ si, pour tous $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a :

$$f(x_1) < f(x_2).$$



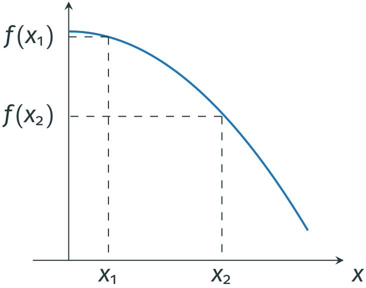
Sens de variation

· Une fonction est dite *décroissante* sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ si, pour tous $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a :

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

· Une fonction est dite *strictement décroissante* sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ si, pour tous $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a :

$$f(x_1) > f(x_2).$$



Sens de variation

· Une fonction est dite *monotone* (resp. *strictement monotone*) si et seulement si elle est soit croissante (resp. *strictement croissante*), soit décroissante (resp. *strictement décroissante*).

Remarque. Le sens de variation d'une fonction peut également être déterminé à partir de l'étude de sa dérivée.

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 1ère Année.
Ellipses, 2017.

Jean Duveau, Marcel Pasquinelli, and Michel Tholomier.
Électronique : IUT 1ère Année GEII - GMP.
DUNOD, 2e édition, 2017.

Geogebra outils et ressources.
`https://www.geogebra.org/?lang=fr`.
Accessed: 2023-07.