IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels I (OML1)

Trigonométrie

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

1. Trigonométrie

2. Cercle trigonométrique

3. D’autres propriétés remarquables

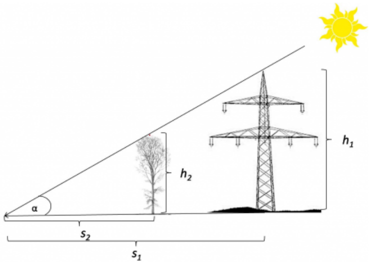
4. Fonctions trigonométriques

Trigonométrie

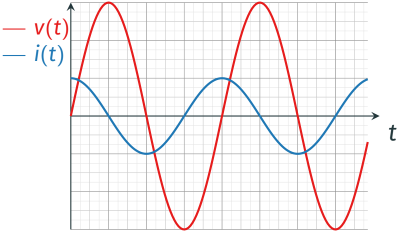
Trigonométrie

· De nombreux domaines scientifiques font appel à la trigonométrie :

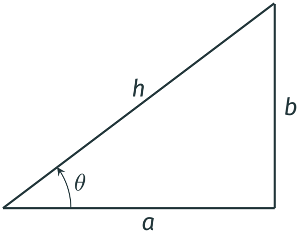
- Géographie
- Astronomie
- Physique
- Électricité et électronique
- Mécanique
- Et bien d'autres...



$$\tan(\alpha) = \frac{h_1}{s_1} = \frac{h_2}{s_2}$$



$$v(t) = 3\sin(\omega t) \text{ [volt}, V],$$
$$i(t) = \cos(\omega t) \text{ [ampère}, A].$$



Rappel : $\pi = 180^\circ$

$$\text{angle [rad]} = \text{angle [deg]} \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\text{angle [deg]} = \text{angle [rad]} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

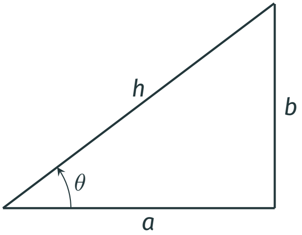
- On note :

θ : l'angle [degrés ou radians]

a : le côté adjacent à l'angle θ

b : le côté opposé à l'angle θ

h : l'hypoténuse



· On note :

θ : l'angle [degrés ou radians]

a : le côté adjacent à l'angle θ

b : le côté opposé à l'angle θ

h : l'hypoténuse

Rappel : $\pi = 180^\circ$

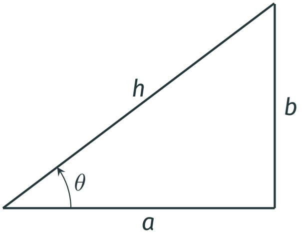
$$\text{angle [rad]} = \text{angle [deg]} \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\text{angle [deg]} = \text{angle [rad]} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

· Fonctions trigonométriques usuelles :

- $\cos(\theta) = \dfrac{a}{h}, \quad \theta = \arccos\left(\dfrac{a}{h}\right),$
- $\sin(\theta) = \dfrac{b}{h}, \quad \theta = \arcsin\left(\dfrac{b}{h}\right),$
- $\tan(\theta) = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \quad \theta = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right),$

Fonctions trigonométriques usuelles



· On note :

θ : l'angle [degrés ou radians]

a : le côté adjacent à l'angle θ

b : le côté opposé à l'angle θ

h : l'hypoténuse

Rappel : $\pi = 180^\circ$

$$\text{angle [rad]} = \text{angle [deg]} \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\text{angle [deg]} = \text{angle [rad]} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

· Fonctions trigonométriques usuelles :

- $\cos(\theta) = \dfrac{a}{h}, \quad \theta = \arccos\left(\dfrac{a}{h}\right),$
- $\sin(\theta) = \dfrac{b}{h}, \quad \theta = \arcsin\left(\dfrac{b}{h}\right),$
- $\tan(\theta) = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \quad \theta = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right),$
- $\sec(\theta) = \dfrac{h}{a} = \dfrac{1}{\cos(\theta)}, \quad \theta = \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{h}{a}\right),$
- $\csc(\theta) = \dfrac{h}{b} = \dfrac{1}{\sin(\theta)}, \quad \theta = \operatorname{arccsc}\left(\dfrac{h}{b}\right),$
- $\cot(\theta) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\tan(\theta)}, \quad \theta = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{a}{b}\right).$

Autres relations entre fonctions trigonométriques

· Théorème de Pythagore :

$$h^2 = a^2 + b^2, \tag{1}$$

d'où l'on déduit les relations suivantes **[exercices]** :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1,$$
$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta),$$
$$\cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta).$$

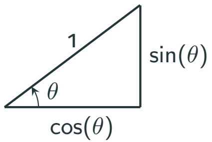
Rappel :

$$\sin(\theta) = \frac{b}{h}, \quad \cos(\theta) = \frac{a}{h},$$
$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \quad \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}.$$

Cercle trigonométrique

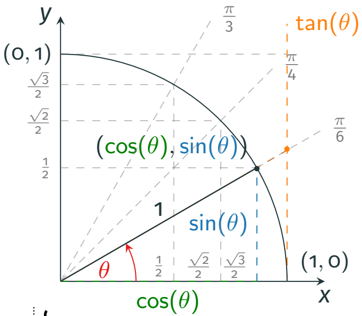
Construction du cercle trigonométrique

- En utilisant le théorème de Pythagore, on peut construire le triangle :



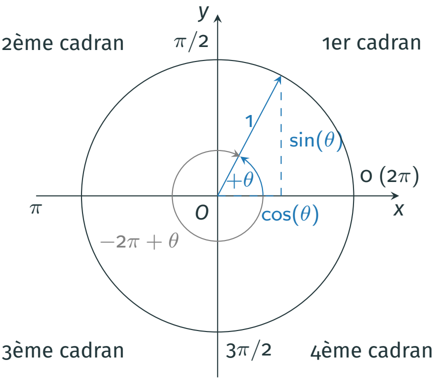
$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

- Pour $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient un quart de cercle trigonométrique :



θ [deg]	0	30°	45°	60°	90°
[rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–

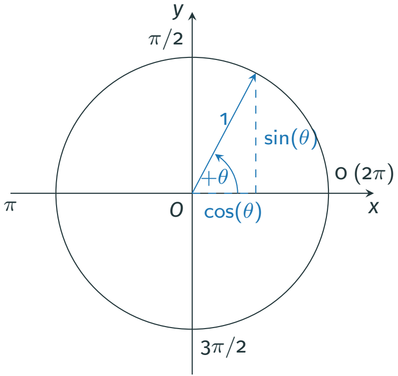
· Le quart de cercle trigonométrique se généralise à un cercle complet :

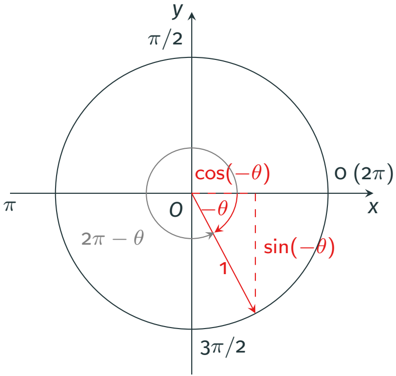


Propriétés. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

- $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$
- $\cos(\theta \pm 2k\pi) = \cos(\theta)$
- $\sin(\theta \pm 2k\pi) = \sin(\theta)$

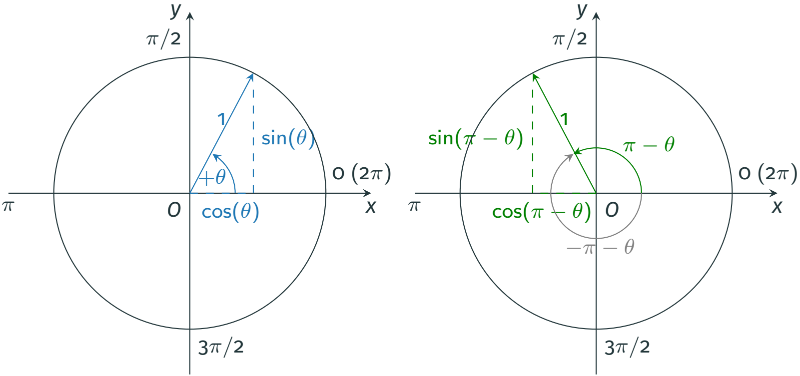
Cercle trigonométrique – lien avec le 4ème cadran





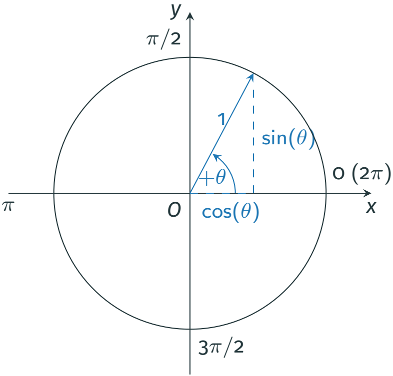
Propriétés. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

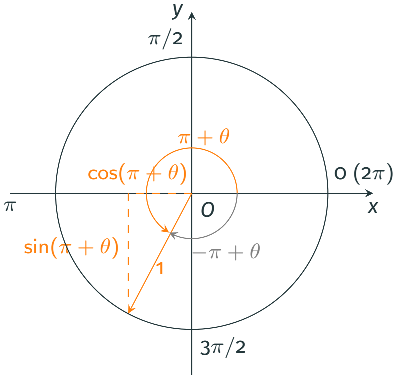
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(-\theta \pm 2k\pi) = \cos(-\theta)$
- $\sin(-\theta \pm 2k\pi) = \sin(-\theta)$



Propriétés.

- $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$
- $\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$
- $\cos(-\pi-\theta) = \cos(\pi-\theta)$
- $\sin(-\pi-\theta) = \sin(\pi-\theta)$

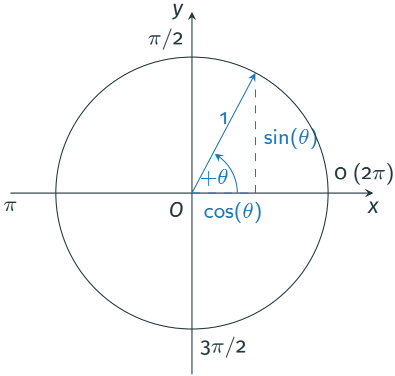


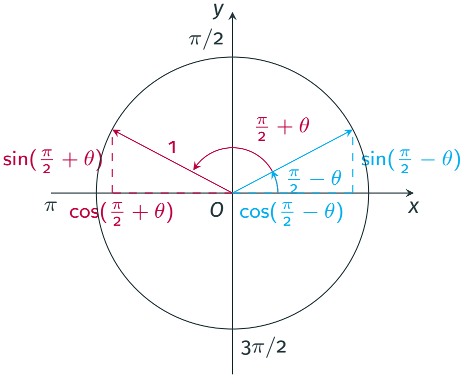


Propriétés.

- $\cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta)$
- $\sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(-\pi+\theta) = \cos(\pi+\theta)$
- $\sin(-\pi+\theta) = \sin(\pi+\theta)$

Cercle trigonométrique – déphasage de $\pi/2$

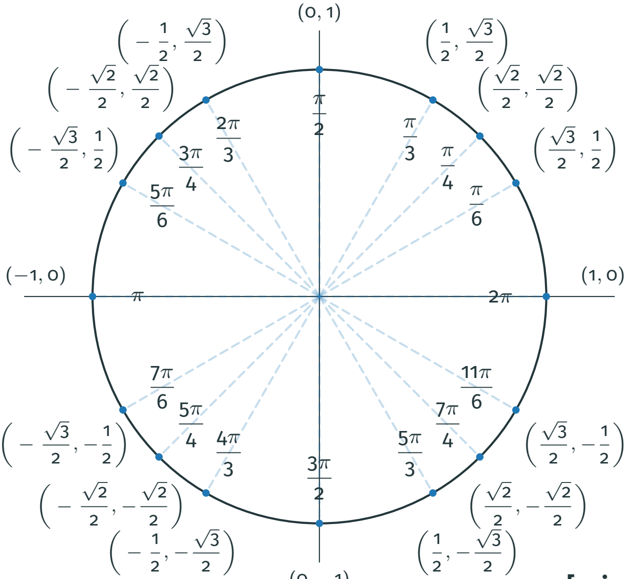




Propriétés.

- $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin(\theta)$
- $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos(\theta)$
- $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin(\theta)$
- $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos(\theta)$

Cercle trigonométrique – valeurs remarquables



CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

[animation]

Relations trigonométriques de la fonction tangente

- $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$
- $\tan(\pm 2k\pi + \theta) = \tan(\theta)$
- $\tan(\pi \pm \theta) = \pm\tan(\theta)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} \pm \theta) = \mp\cot(\theta)$

Exercices. Démontrer les relations précédentes.

Rappel :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta), \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta),$$

$$\cos(\theta \pm 2k\pi) = \cos(\theta), \quad \sin(\theta \pm 2k\pi) = \sin(\theta),$$

$$\cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta), \quad \sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin(\theta),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\sin(\theta), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos(\theta).$$

Solution.

- $\tan(-\theta) = \dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \dfrac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$
- $\tan(\pm 2k\pi + \theta) = \dfrac{\sin(\pm 2k\pi + \theta)}{\cos(\pm 2k\pi + \theta)} = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$
- $\tan(\pi - \theta) = \dfrac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \dfrac{\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$
- $\tan(\pi + \theta) = \dfrac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} = \dfrac{-\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} = \tan(\theta)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \cot(\theta)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \dfrac{\cos(\theta)}{-\sin(\theta)} = -\cot(\theta)$

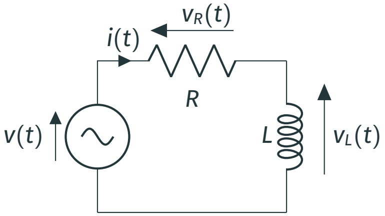
D’autres propriétés remarquables

D'autres propriétés remarquables

Relations associées à l'addition des angles

- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

Application GEII



· Considérons les tensions :

$$v_R(t) = 4\cos(\omega t),$$
$$v_L(t) = 3\sin(\omega t).$$

· Sachant que $v(t) = v_R(t) + v_L(t)$, on obtient :

$$v(t) = 4\cos(\omega t) + 3\sin(\omega t).$$

- La tension $v(t) = 4\cos(\omega t) + 3\sin(\omega t)$ peut être réécrite sous la forme :

$$\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a-b).$$

- En réécrivant $v(t)$ comme

$$v(t) = A\left[\frac{4}{A}\cos(\omega t) + \frac{3}{A}\sin(\omega t)\right],$$

et en comparant les deux expressions, on identifie que :

$$\cos(b) = \frac{4}{A}, \quad \sin(b) = \frac{3}{A}, \quad \cos(a) = \cos(\omega t), \quad \sin(a) = \sin(\omega t).$$

- Grâce au théorème de Pythagore, on a :

$$A = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$b = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.64.$$

- Finalement, on obtient :

$$v(t) = A\cos(a-b) = 5\cos(\omega t - 0.64).$$

D'autres propriétés remarquables

Relations relatives au produit de sinus et cosinus

- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

Relations relatives à la somme de sinus et cosinus

- $\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right)\cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

D'autres propriétés remarquables

Linéarisation

· La linéarisation consiste à exprimer des fonctions trigonométriques élevées à une puissance donnée sous forme de fonctions trigonométriques de degré un :

- $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$
- $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$
- $\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta)$
- $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(3\theta)$

Exercices. Démontrer les relations énoncées précédemment.

Solution.

- $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) &= \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta)\\ &= \cos^2(\theta) - \underbrace{\sin^2(\theta)}_{1-\cos^2(\theta)}\\ &= 2\cos^2(\theta) - 1.\end{aligned}$$

- $\cos^3\theta = \dfrac{3}{4}\cos(\theta) + \dfrac{1}{4}\cos(3\theta)$

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta) = \cos(\theta)\cos^2(\theta) &= \frac{1}{2}\cos(\theta)(1+\cos(2\theta))\\ &= \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta)\cos(\theta)\\ &= \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\cos(2\theta-\theta)+\cos(2\theta+\theta))\right]\\ &= \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{4}(\cos(\theta)+\cos(3\theta))\\ &= \frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta).\end{aligned}$$

Résolution d’équations trigonométriques

- Il s’agit de trouver les solutions de certaines égalités :
  - $\cos a = \cos b$ donne les solutions :

$$a = b + 2k\pi, \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}. \quad \textbf{[figure]}$$

  - $\sin a = \sin b$ donne les solutions :

$$a = b + 2k\pi, \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}. \quad \textbf{[figure]}$$

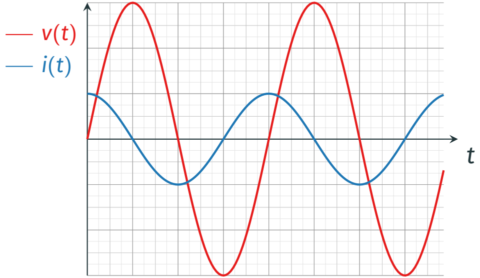
- Pour les autres cas, il convient de les ramener à l’une de ces deux formes.

Fonctions trigonométriques

Fonctions trigonométriques

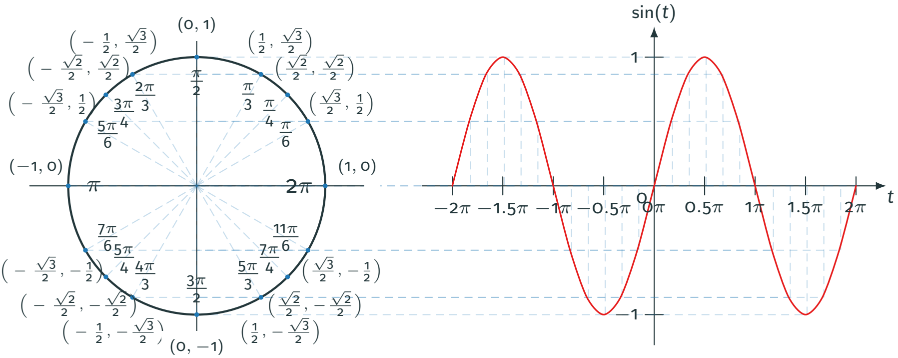
- En génie électrique, les tensions (v) et les courants électriques (i) sont modélisés à l'aide de *fonctions trigonométriques*, par exemple :

$$v(t) = 3\sin(\omega t) \text{ [volt}, V\text{]}, \qquad i(t) = \cos(\omega t) \text{ [ampère}, A\text{]}.$$



- Ici, l'argument de la fonction trigonométrique est donné par ωt :
  - $t \in \mathbb{R}$: une variable représentant le temps (secondes [s]),
  - $\omega \in \mathbb{R}^+$: la pulsation du signal électrique [rad/s].

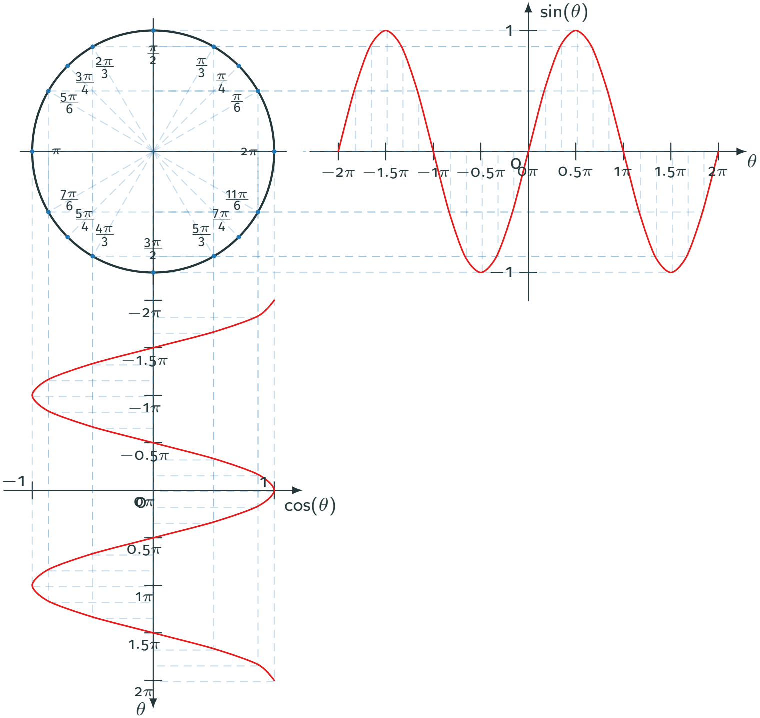
Fonction sinus



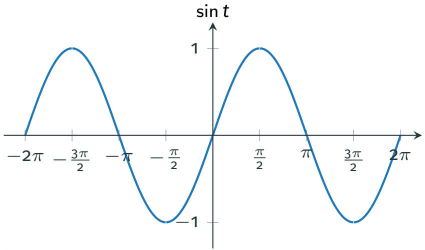
[animation 1]
[animation 2]

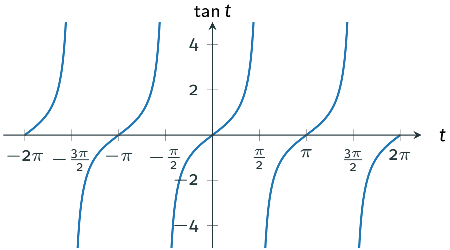
Remarque. $f(t) = \sin(t)$ est une *fonction périodique* de période $T = 2\pi$:

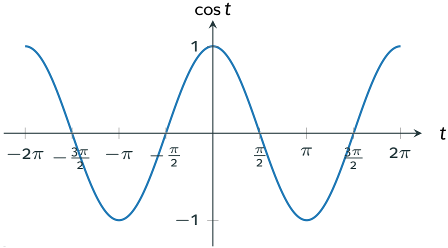
$$f(t+T) = f(t).$$


sin(θ)
1
−1
θ
−2π
−1.5π
−1π
−0.5π
0
0π
0.5π
1π
1.5π
2π
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
π
2π
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{11\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$
cos(θ)

Fonctions trigonométriques classiques







Remarque.

· $f(t) = \sin(t)$ et $f(t) = \tan(t)$ sont des *fonctions impaires*, c'est-à-dire :

$$f(-t) = -f(t).$$

· $f(t) = \cos(t)$ est une *fonction paire*, c'est-à-dire :

$$f(-t) = f(t).$$

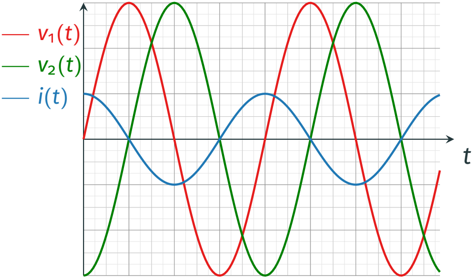
Représentation des signaux électriques

· De manière générale, une fonction trigonométrique peut être de la forme :

$$f_1(t) = A\cos(\omega t \pm \varphi), \quad f_2(t) = A\sin(\omega t \pm \varphi),$$

où

- $t \in \mathbb{R}$: le temps [s],
- $\omega \in \mathbb{R}^+$: la pulsation du signal [rad/s],
- $A \in \mathbb{R}^+$: l'amplitude du signal [volt ou ampère],
- $\varphi \in \mathbb{R}$: le déphasage [rad].



· Les deux premières formes sont utilisées pour la représentation des signaux électriques.

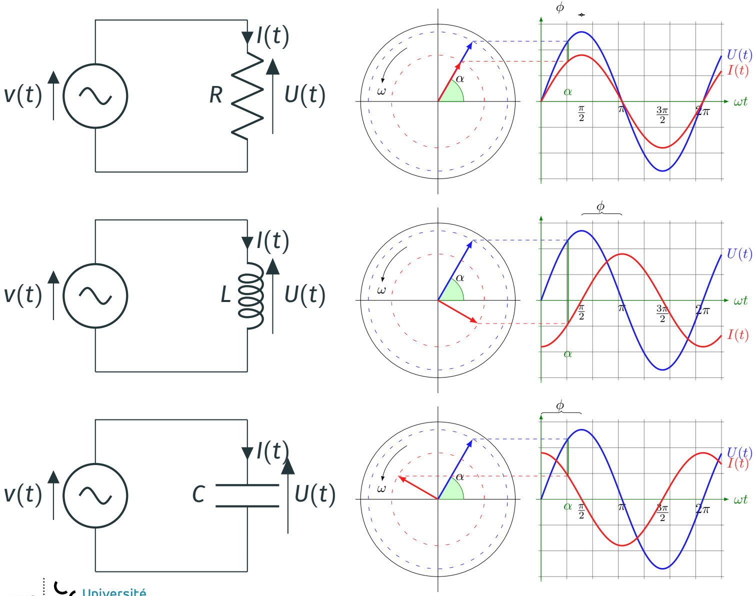
$$v_1(t) = 3\sin(\omega t)\ [V],$$

$$v_2(t) = 3\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\ [V],$$

$$i(t) = \cos(\omega t)\ [A].$$

[animation]

Représentation des signaux électriques



Transformation en somme de termes non déphasés

· Il est toujours possible de décomposer des signaux électriques en une somme de sinus et de cosinus non déphasés :

$$A\cos(\omega t - \varphi) = A[\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)].$$

· En utilisant la relation $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, on obtient :

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t)\underbrace{\cos(\varphi)}_{\alpha} + \sin(\omega t)\underbrace{\sin(\varphi)}_{\beta}.$$

· Finalement, on a :

$$A\cos(\omega t - \varphi) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t),$$

où

$$a = A\cos(\varphi), \qquad b = A\sin(\varphi).$$

Transformation inverse

- Ici, on part de l'expression

$$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi).$$

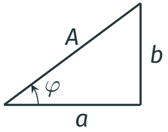
- La fonction f peut être écrite sous la forme :

$$f(t) = A\left[\frac{a}{A}\cos(\omega t) + \frac{b}{A}\sin(\omega t)\right].$$

- En sachant que $\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)$, on obtient :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{A}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{A}.$$

- Grâce au théorème de Pythagore, on peut montrer :



$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 1ère Année.
Ellipses, 2017.

Jean Duveau, Marcel Pasquinelli, and Michel Tholomier.
Électronique : IUT 1ère Année GEII - GMP.
DUNOD, 2e édition, 2017.

Geogebra outils et ressources.
`https://www.geogebra.org/?lang=fr`.
Accessed: 2023-07.