IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels I (OML1)

Fonctions numériques à variable réelle et usuelles du GEII (partie I)

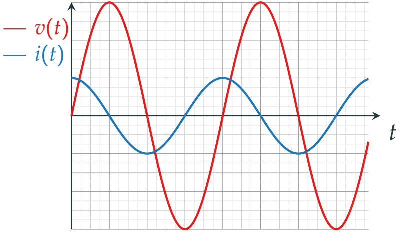
Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

Fonctions numériques à variable réelle et usuelles du GEII (partie I)

· Tous les domaines de l'économie, des sciences et des techniques utilisent des fonctions qui ont pour objectif de représenter l'évolution d'une donnée par rapport à une autre

· Par exemple, un signal électrique est une fonction qui représente l'évolution d'une quantité physique par rapport à la variable temps



$$v(t) = 3\sin(\omega t) \qquad [\text{volt}, V]$$

$$i(t) = \cos(\omega t) \qquad [\text{ampère}, A]$$

· Ici, on considère de manière générale des fonctions :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

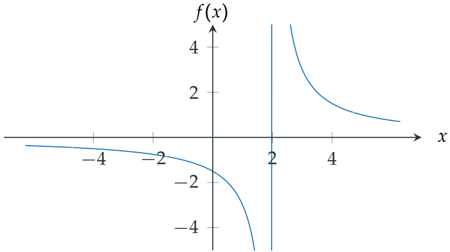
Domaine de définition

Domaine de définition

· Le domaine de définition D d'une fonction est l'ensemble des valeurs $x \in \mathbb{R}$ qui ont un sens pour la fonction ; on écarte donc du domaine de définition toutes les valeurs de x interdites.

Exemple.

$$f(x) = \frac{3}{x-2}, \qquad D = \mathbb{R} - \{2\}$$



Exercice. Écrire les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. $f(x) = \sqrt{x+2}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$
5. $f(x) = \sin(x)$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sin(x)}$
7. $f(x) = \tan(x)$

Solution.

1. $f(x) = ax^2 + bx + c : D = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \sqrt{x+2} : D = [-2, \infty[$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x-3} : D = \mathbb{R} - \{3\}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)} : D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$
5. $f(x) = \sin(x) : D = \mathbb{R}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \cos(x)} : D = \mathbb{R} - \{2k\pi\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
7. $f(x) = \tan(x) : D = \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Domaine d’étude

Domaine d’étude

· Il n’est pas toujours nécessaire d’étudier une fonction sur la totalité des valeurs de D

· La fonction peut présenter une périodicité ou une parité qui permet de restreindre le domaine d’étude

· Ainsi le domaine d’étude est un sous-ensemble du domaine de définition

Périodicité

Une fonction $f(x)$ est dite *périodique* si et seulement si, pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$, il existe un même réel T tel que :

$$f(x+T) = f(x)$$

· Ce qui s'écrit en termes ensemblistes :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists T! \, / f(x+T) = f(x)$$

Exemple. $f(x) = \sin(x)$ est une fonction périodique avec période $T = 2\pi$

· L'existence d'une périodicité autorise de limiter l'étude à une période donnée ; il suffit ensuite de dupliquer le tracé avec une récurrence de la période

Domaine d'étude

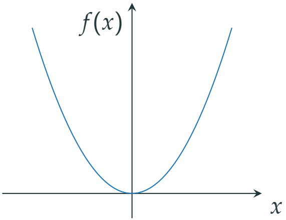
Parité

- Une fonction $f(x)$ est *paire* si elle vérifie

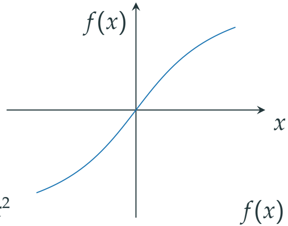
$$f(-x) = f(x)$$

- Une fonction $f(x)$ est *impaire* si elle vérifie

$$f(-x) = -f(x)$$



$f(x) = x^2$

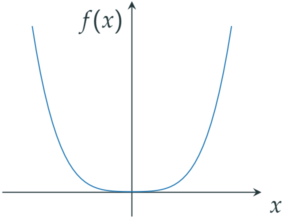


$f(x) = \mathrm{arctan}(x)$

- Dans les deux cas, l'étude de la fonction peut se limiter à l'intervalle $]-\infty, 0]$ ou $[0, \infty[$

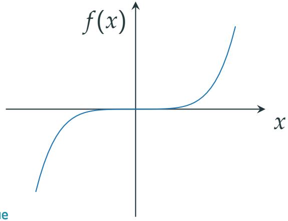
Domaine d’étude

· Toute fonction polynomiale ne comportant que des éléments de degré pair est paire



$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

· Toute fonction polynomiale ne comportant que des éléments de degré impair est impaire



$$f(x) = x^5 + x^3 + x$$

Propriétés.

- La somme des deux fonctions paires est paire
- La somme des deux fonctions impaires est impaire
- Le produit ou le quotient deux fonctions paires est pair
- Le produit ou le quotient deux fonctions paires est pair
- Le produit ou le quotient deux fonctions impaires est pair
- Le produit ou le quotient d'une fonction impaire par une fonction paire est impair

Démonstration.

· Soient f et g deux fonction paires :

$$h(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = h(-x)$$
$$h(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = h(-x)$$
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(-x)}{g(-x)} = h(-x)$$

· Soient f et g deux fonction impaires :

$$h(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) - g(-x) = -h(-x)$$
$$h(x) = f(x)g(x) = [-f(-x)][-g(-x)] = h(-x)$$
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(-x)}{-g(-x)} = h(-x)$$

· Soient f paire et g impaire :

$$h(x) = f(x)g(x) = f(-x)[-g(-x)] = -h(-x)$$
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(-x)}{-g(-x)} = -h(-x)$$

Étude aux limites

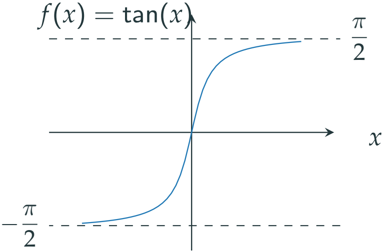
Étude aux limites

- Il est nécessaire de déterminer le comportement de f quand $x \to \pm\infty$
- De même pour toute valeur de x pour laquelle $f(x) \to \pm\infty$

Présentation

On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ (ou tend vers ℓ) lorsque x tend vers a si, en choisissant x de plus en plus proche de a, $f(x)$ devient aussi proche de ℓ que l'on veut. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Étude aux limites

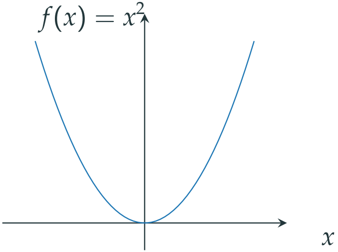
· On distingue la limite à gauche et la limite à droite :

$$\lim_{x \to a^-} f(x), \qquad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

· On peut avoir :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell,$$

ce qui signifie que lq fonction tend vers la même limite pour les valeurs de x tendant vers a par la valeur inférieur ou supérieur à α



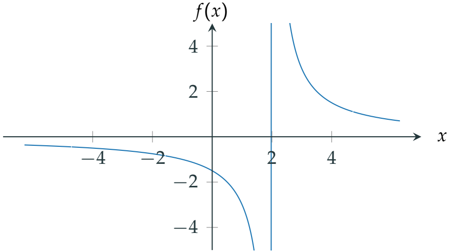
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

· Si on a :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x),$$

alors la f est discontinue (ou non continue) en a



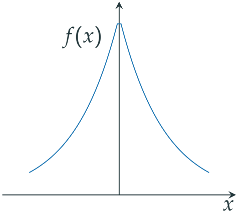
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

Cas possibles en un point d'abscisse a

- La limite de $f(x)$ est finie quand x tend vers a

$$\lim_{x \to 0} e^{-|x|} = 1$$



- La limite de $f(x)$ est infinie quand x tend vers a

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

- La limite de $f(x)$ n'existe pas quand x tend vers a :

$$\lim_{x \to 1} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) = ?$$

Étude aux limites

$\lim f(x)$	ℓ	$\ell < 0$				$\ell > 0$			
$\lim g(x)$	ℓ'	0^+	0^-	∞	$-\infty$	0^+	0^-	∞	$-\infty$
$\lim[h(x)+g(x)]$	$\ell+\ell'$	ℓ	ℓ	∞	$-\infty$	ℓ	ℓ	∞	$-\infty$
$\lim[h(x)\cdot g(x)]$	$\ell\cdot\ell'$	0^-	0^+	$-\infty$	∞	0^+	0^-	∞	$-\infty$
$\lim[h(x)/g(x)]$	ℓ/ℓ'	$-\infty$	∞	0^-	0^+	∞	$-\infty$	0^+	0^-

$\lim f(x)$	0	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim g(x)$	0	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$
$\lim[h(x)+g(x)]$	0	∞	$-\infty$	fi	fi
$\lim[h(x)\cdot g(x)]$	0	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$
$\lim[h(x)/g(x)]$	fi	fi	fi	fi	fi

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Étude des indéterminations

· La limite à l'infini d'une fonction polynomiale est donnée par le comportement de son terme de plus haut degré

$$\lim_{x \to \infty} x^2 - x = \lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$$

· La limite à l'infini d'un quotient de deux polynôme est donnée par la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré

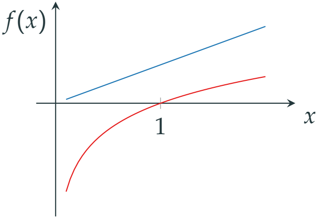
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{2x^3 - 5x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \frac{3}{2}$$

Étude des indéterminations

· La fonction x^a croît toujours plus vite que la fonction logarithme, quelle que soit la valeur de $a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

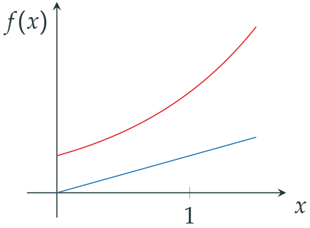
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$$



· La fonction b^x croît toujours plus vite que la fonction x^a, quelle que soit la valeur de $a > 0$ et la valeur de la base b de l'exponentielle

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$



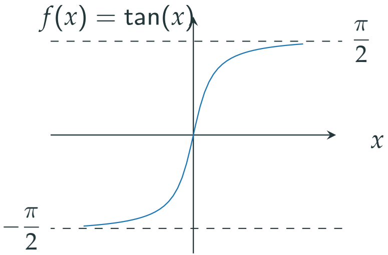
Comportements asymptotiques

· Une fonction possède une *asymptote horizontale d'équation* $y = a$ s'il est vérifié

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a, \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

Exemple 1.

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$



Exemple 2.

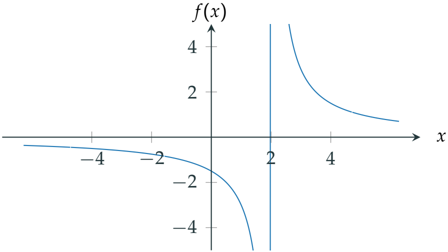
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

· Une fonction possède une *asymptote verticale d'équation* $x = a$ s'il est vérifié :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Exemple.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty$$



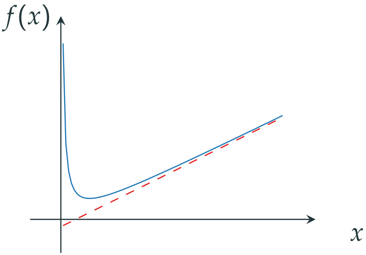
· Si une fonction f peut se mettre sous la forme $f(x) = ax + b + g(x)$ avec :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* de f en $\pm\infty$

Exemple.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x} = 3x - 2 + \frac{5}{x}$$



· Si une fonction f peut se mettre sous la forme $f(x) = k(x) + g(x)$ avec :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

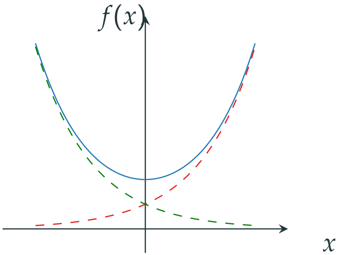
alors la fonction $k(x)$ est une *courbe asymptote* de f en $\pm\infty$

Exemple.

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

· On dit que :

- $g(x) = \frac{e^x}{2}$ est asymptote à $f(x)$ à $+\infty$
- $h(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ est asymptote à $f(x)$ à $-\infty$



CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Transformations

Dilatation horizontale

· On appelle $g(x)$ une fonction dilatée horizontalement de $f(x)$ si

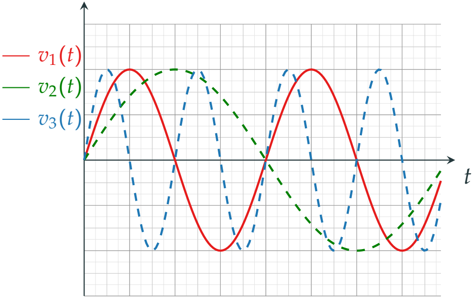
$$g(x) = f(ax),$$

si $a < 1$. Si $a > 1$, il s'agit d'une contraction

$v_1(t) = \sin(t)$

$v_2(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$

$v_3(t) = \sin(2t)$



Dilatation verticale

· On appelle $g(x)$ une fonction dilatée verticalement de $f(x)$ si

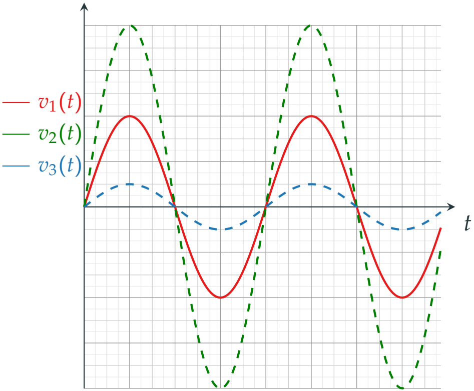
$$g(x) = af(x)$$

Si $a > 1$, il s'agit d'une amplification. Si $a < 1$, il s'agit d'une atténuation

$$v_1(t) = \sin(t)$$

$$v_2(t) = 2\sin(t)$$

$$v_3(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$$



Translation horizontale

· On appelle $g(x)$ une fonction translatée horizontalement de $f(x)$ si

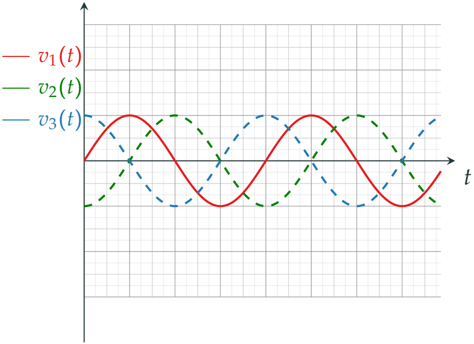
$$g(x) = f(x - a)$$

Si $a > 0$, il s'agit d'une translation vers la droite. Si $a < 0$, il s'agit d'une translation vers la gauche

$$v_1(t) = \sin(t)$$

$$v_2(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_3(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$



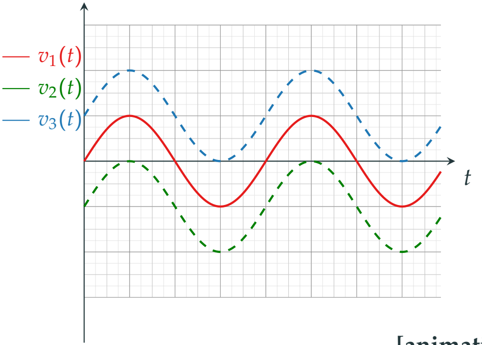
Translation verticale

· On appelle $g(x)$ une fonction translatée verticalement de $f(x)$ si

$$g(x) = f(x) + a$$

Si $a > 0$, il s'agit d'une translation vers le haut. Si $a < 0$, il s'agit d'une translation vers le bas

$$v_1(t) = \sin(t)$$
$$v_2(t) = \sin(t) - 1$$
$$v_3(t) = \sin(t) + 1$$



[animation]

Exercice. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Dessiner $g(x) = \frac{1}{2}f(2[x-1])$

Exercice. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Dessiner $g(x) = \dfrac{1}{2}f(2[x-1])$

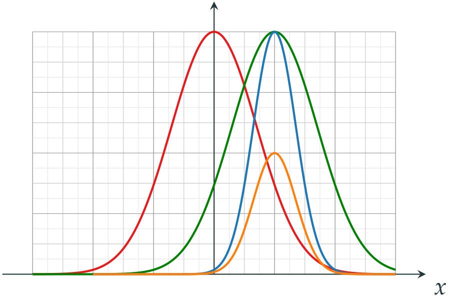
Solution.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f(x-1) = e^{-(x-1)^2}$$

$$f(2[x-1]) = e^{-(2[x-1]^2)}$$

$$\frac{1}{2}f(2[x-1]) = \frac{1}{2}e^{-(2[x-1]^2)}$$



Sens de variation

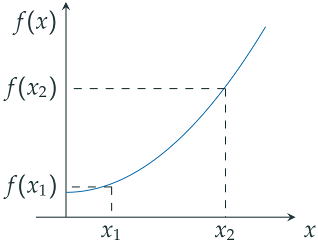
Sens de variation

- Une fonction est dite *croissante* sur un intervalle I si

$$\forall x_1, x_2 \in I / x_1 < x_2 \quad \text{on a} \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

- Une fonction est dite *strictement croissante* sur un intervalle I si

$$\forall x_1, x_2 \in I / x_1 < x_2 \quad \text{on a} \quad f(x_1) < f(x_2)$$



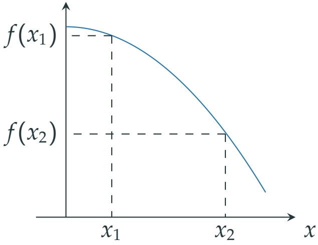
Sens de variation

- Une fonction est dite *décroissante* sur un intervalle I si

$$\forall x_1, x_2 \in I / x_1 < x_2 \quad \text{on a} \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

- Une fonction est dite *strictement décroissante* sur un intervalle I si

$$\forall x_1, x_2 \in I / x_1 < x_2 \quad \text{on a} \quad f(x_1) > f(x_2)$$



· Une fonction est dite *monotone* (resp. *strictement monotone*) si et seulement si elle est, soit croissante (resp. strictement croissante) ou soit décroissante (resp. strictement décroissante)

Remarque. Le sens de variation d'une fonction est étudié grâce à sa dérivée