

# IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels (OML1)

## Trigonométrie

---

Andrés F. López-Lopera  
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)  
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)  
2021 – 2022

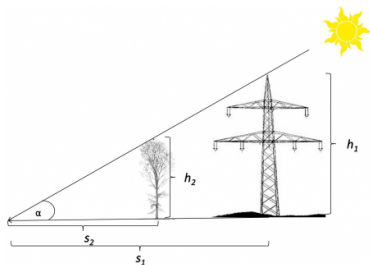
1. Trigonométrie
2. Cercle trigonométrique
3. D'autres propriétés remarquables
4. Fonctions trigonométriques

# Trigonométrie

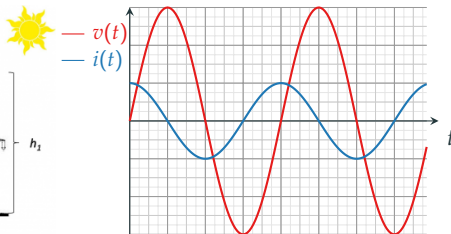
---

· Des nombreux domaines scientifiques utilisent la trigonométrie :

- La géographie
- L'électricité et l'électronique
- L'astronomie
- La mécanique
- La physique
- ...



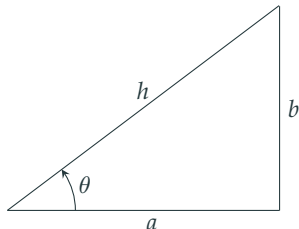
$$\tan \alpha = \frac{h_1}{s_1} = \frac{h_2}{s_2}$$



$$v(t) = 3 \sin(\omega t) \text{ [volt, V]}$$

$$i(t) = \cos(\omega t) \text{ [ampère, A]}$$

**Rappel :**  $\pi = 180^\circ$



$$\text{angle [rad]} = \text{angle [deg]} \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\text{angle [deg]} = \text{angle [rad]} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

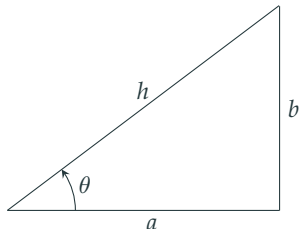
· On dénote :

$\theta$  : angle [degré ou radian]

$a$  : côté adjacent à l'angle  $\theta$

$b$  : côté opposé à l'angle  $\theta$

$h$  : hypoténuse



· On dénote :

$\theta$  : angle [degré ou radian]

$a$  : côté adjacent à l'angle  $\theta$

$b$  : côté opposé à l'angle  $\theta$

$h$  : hypoténuse

**Rappel :**  $\pi = 180^\circ$

$$\text{angle [rad]} = \text{angle [deg]} \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\text{angle [deg]} = \text{angle [rad]} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

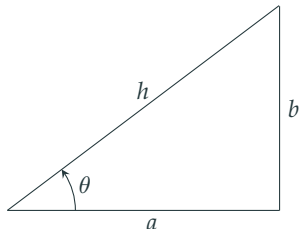
· Fonctions trigonométriques usuelles :

$$\cdot \sin \theta = \frac{b}{h}, \quad \theta = \arcsin \frac{b}{h}$$

$$\cdot \cos \theta = \frac{a}{h}, \quad \theta = \arccos \frac{a}{h}$$

$$\cdot \tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

# Un rappel des fonctions trigonométriques usuelles



· On dénote :

$\theta$  : angle [degré ou radian]

$a$  : côté adjacent à l'angle  $\theta$

$b$  : côté opposé à l'angle  $\theta$

$h$  : hypoténuse

**Rappel :**  $\pi = 180^\circ$

$$\text{angle [rad]} = \text{angle [deg]} \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\text{angle [deg]} = \text{angle [rad]} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

· Fonctions trigonométriques usuelles :

$$\cdot \sin \theta = \frac{b}{h}, \quad \theta = \arcsin \frac{b}{h}$$

$$\cdot \cos \theta = \frac{a}{h}, \quad \theta = \arccos \frac{a}{h}$$

$$\cdot \tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

$$\cdot \sec \theta = \frac{h}{a} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \theta = \operatorname{arcsec} \frac{h}{a}$$

$$\cdot \csc \theta = \frac{h}{b} = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \theta = \operatorname{arccsc} \frac{h}{b}$$

$$\cdot \cot \theta = \frac{a}{b} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \theta = \operatorname{arccot} \frac{a}{b}$$

# D'autres relations entre fonctions trigonométriques

· Théorème de Pythagore :

$$h^2 = a^2 + b^2, \quad (1)$$

d'où on obtient [Exercices] :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta,$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta.$$

Rappel :

$$\sin \theta = \frac{b}{h}, \quad \cos \theta = \frac{a}{h}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

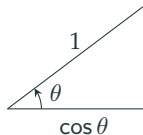


## Cercle trigonométrique

---

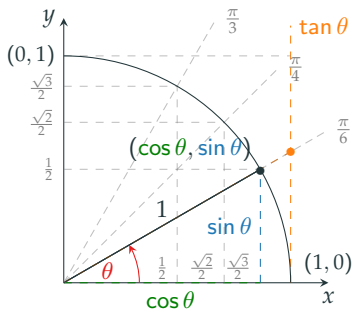
# Construction du cercle trigonométrique

- Grâce au théorème de Pythagore, on peut construire le triangle :



$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

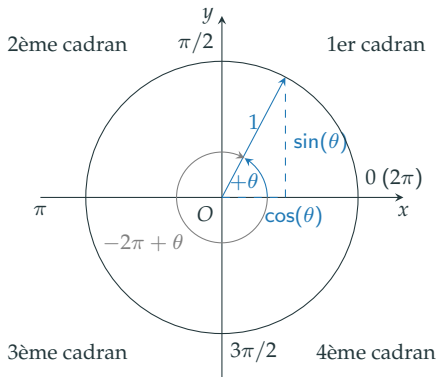
- Pour  $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ , on obtient le quart de cercle (trigonométrique) :



$\theta$ [deg]	0	30°	45°	60°	90°
[rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

# Cercle trigonométrique

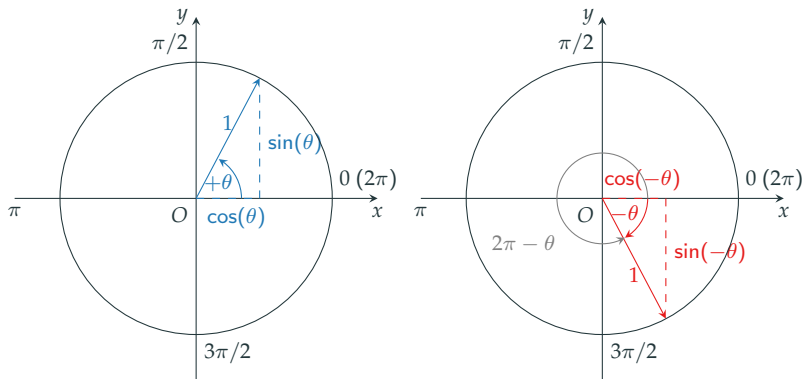
- Le quart de cercle trigonométrique peut être généralisé à un cercle complet :



**Propriétés.** Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on obtient :

- $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$
- $\cos(\theta \pm 2k\pi) = \cos(\theta)$
- $\sin(\theta \pm 2k\pi) = \sin(\theta)$

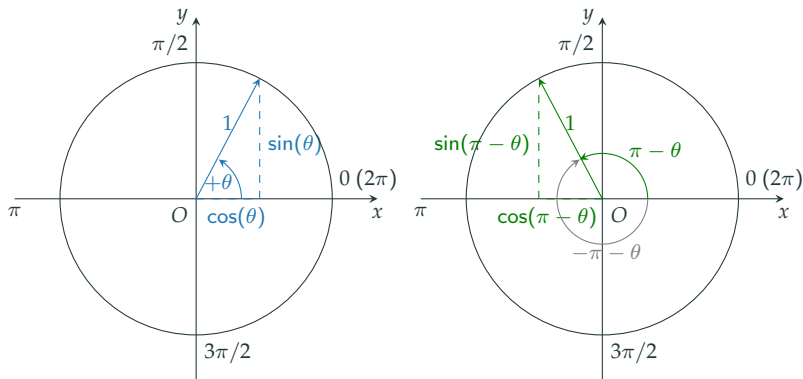
# Cercle trigonométrique – lien avec le 4ème cadran



**Propriétés.** Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on obtient :

- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- $\cos(-\theta \pm 2k\pi) = \cos(-\theta)$
- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\sin(-\theta \pm 2k\pi) = \sin(-\theta)$

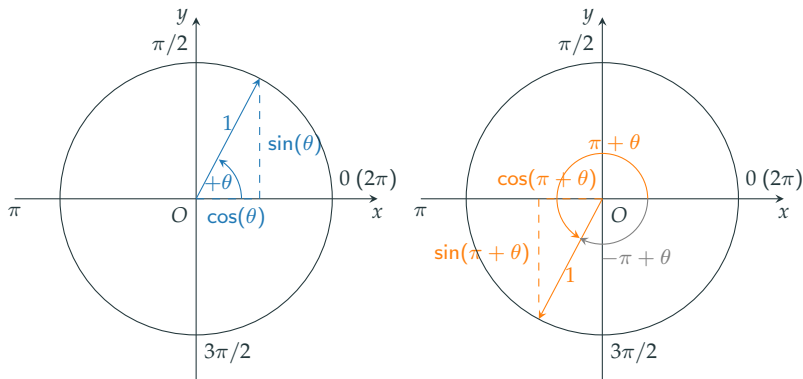
# Cercle trigonométrique – lien avec le 2ème cadran



## Propriétés.

- $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$
- $\cos(-\pi - \theta) = \cos(\pi - \theta)$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
- $\sin(-\pi - \theta) = \sin(\pi - \theta)$

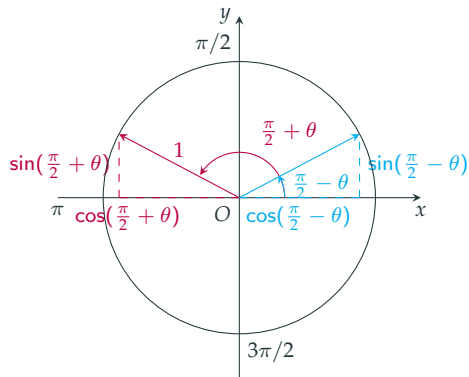
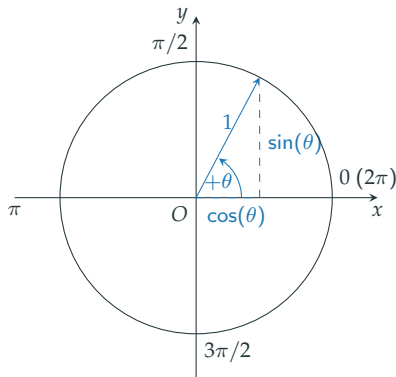
# Cercle trigonométrique – lien avec le 3ème cadran



## Propriétés.

- $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$
- $\cos(-\pi + \theta) = \cos(\pi + \theta)$
- $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$
- $\sin(-\pi + \theta) = \sin(\pi + \theta)$

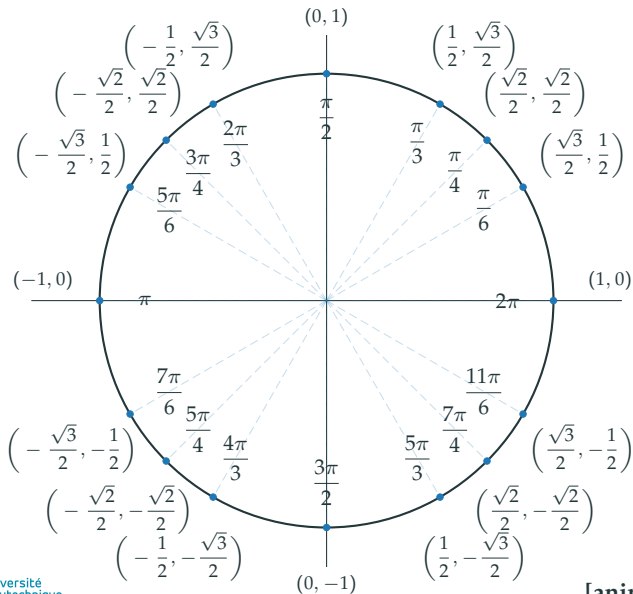
# Cercle trigonométrique – déphasage de $\pi/2$



## Propriétés.

- $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos(\theta)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$

# Cercle trigonométrique – valeurs remarquables



[animation]



## Relations trigonométriques pour la fonction tangente

- $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$
- $\tan(\pm 2k\pi + \theta) = \tan(\theta)$
- $\tan(\pi \pm \theta) = \pm \tan(\theta)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \cot(\theta)$

**Exercices.** Démontrer les relations précédentes.

**Rappel :**

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta), \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta \pm 2k\pi) = \cos(\theta), \quad \sin(\theta \pm 2k\pi) = \sin(\theta)$$

$$\cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta), \quad \sin(\pi \pm \theta) = \mp \sin(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \sin(\theta), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos(\theta)$$

## Solution.

- $\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$
- $\tan(\pm 2k\pi + \theta) = \frac{\sin(\pm 2k\pi + \theta)}{\cos(\pm 2k\pi + \theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$
- $\tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$
- $\tan(\pi + \theta) = \frac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} = \frac{-\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} = \tan(\theta)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \cot(\theta)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos(\theta)}{-\sin(\theta)} = -\cot(\theta)$

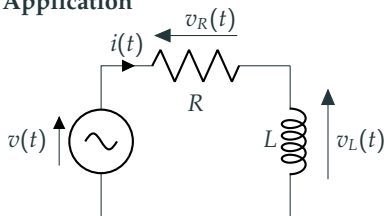
## **D'autres propriétés remarquables**

---

## Relations relatives à l'addition d'angles

- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$
- $\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \tan(b)}$

## Application



- Considérons les tensions électriques

$$v_R(t) = 4 \cos(\omega t), \quad v_L(t) = 3 \sin(\omega t)$$

- Sachant que  $v(t) = v_R(t) + v_L(t)$ , on obtient :

$$v(t) = 4 \cos(\omega t) + 3 \sin(\omega t)$$

- La tension  $v(t) = 4 \cos(\omega t) + 3 \sin(\omega t)$  a la forme :

$$\cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b)$$

- En réécrivant  $v(t)$  comme

$$v(t) = A \left[ \frac{4}{A} \cos(\omega t) + \frac{3}{A} \sin(\omega t) \right],$$

- et en comparant les deux expressions, on identifie que :

$$\cos(b) = \frac{4}{A}, \quad \sin(b) = \frac{3}{A}, \quad \cos(a) = \cos(\omega t), \quad \sin(a) = \sin(\omega t)$$

- Grâce au théorème de Pythagore, on a :

$$A = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$b = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.64$$

- Finalement :

$$v(t) = A \cos(a - b) = 5 \cos(\omega t - 0.64)$$

## Relatives au produit de sinus et cosinus

- $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
- $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$
- $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$

## Relatives à la somme de sinus et cosinus

- $\sin(a) \pm \sin(b) = 2 \sin \left( \frac{a \pm b}{2} \right) \cos \left( \frac{a \mp b}{2} \right)$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos \left( \frac{a + b}{2} \right) \cos \left( \frac{a - b}{2} \right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin \left( \frac{a + b}{2} \right) \sin \left( \frac{a - b}{2} \right)$

## Linéarisation

· La linéarisation consiste à exprimer des fonctions trigonométriques élevées à une puissance donnée selon des fonctions trigonométriques de degré un.

$$\cdot \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$$

$$\cdot \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$$

$$\cdot \cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos(\theta) + \frac{1}{4} \cos(3\theta)$$

$$\cdot \sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin(\theta) - \frac{1}{4} \sin(3\theta)$$

**Exercices.** Démontrer les relations précédentes.

**Solution.**

$$\cdot \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$$

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos(\theta + \theta) = \cos(\theta) \cos(\theta) - \sin(\theta) \sin(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \underbrace{\sin^2(\theta)}_{1 - \cos^2(\theta)} \\ &= 2 \cos^2(\theta) - 1\end{aligned}$$

$$\cdot \cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos(\theta) + \frac{1}{4} \cos(3\theta)$$

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta) &= \cos(\theta) \cos^2(\theta) = \frac{1}{2} \cos(\theta)(1 + \cos(2\theta)) \\ &= \frac{1}{2} \cos(\theta) + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2} \cos(\theta) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (\cos(2\theta - \theta) + \cos(2\theta + \theta)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cos(\theta) + \frac{1}{4} (\cos(\theta) + \cos(3\theta)) \\ &= \frac{3}{4} \cos(\theta) + \frac{1}{4} \cos(3\theta)\end{aligned}$$



- Il s'agit de trouver les solutions de certaines égalités :

- $\cos a = \cos b$  donne les solutions :

$$a = b + 2k\pi, \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \quad \textbf{[figure]}$$

- $\sin a = \sin b$  donne les solutions :

$$a = b + 2k\pi, \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \quad \textbf{[figure]}$$

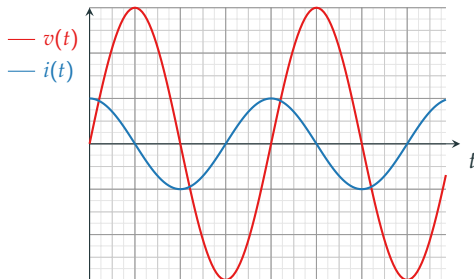
- Pour les autres cas, il s'agit de se ramener à l'une de ces deux formes.

# Fonctions trigonométriques

---

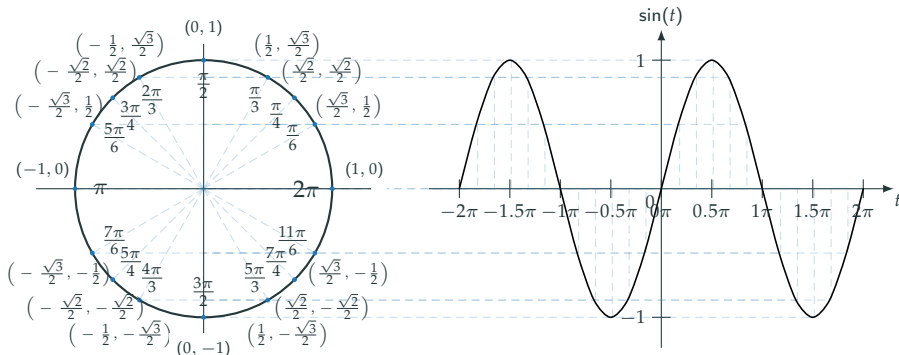
- En génie électrique, les tensions  $v$  et les courants électriques  $i$  sont décrits par des *fonctions trigonométriques*, par exemple :

$$v(t) = 3 \sin(\omega t) \text{ [volt, V]}, \quad i(t) = \cos(\omega t) \text{ [ampère, A]}$$



- Ici, l'argument de la fonction trigonométrique est donné par  $\omega t$  :
  - $t \in \mathbb{R}$  : une variable représentant le temps (secondes [s])
  - $\omega \in \mathbb{R}^+$  : la pulsation du signal électrique [rad/s]

## Fonction sinus

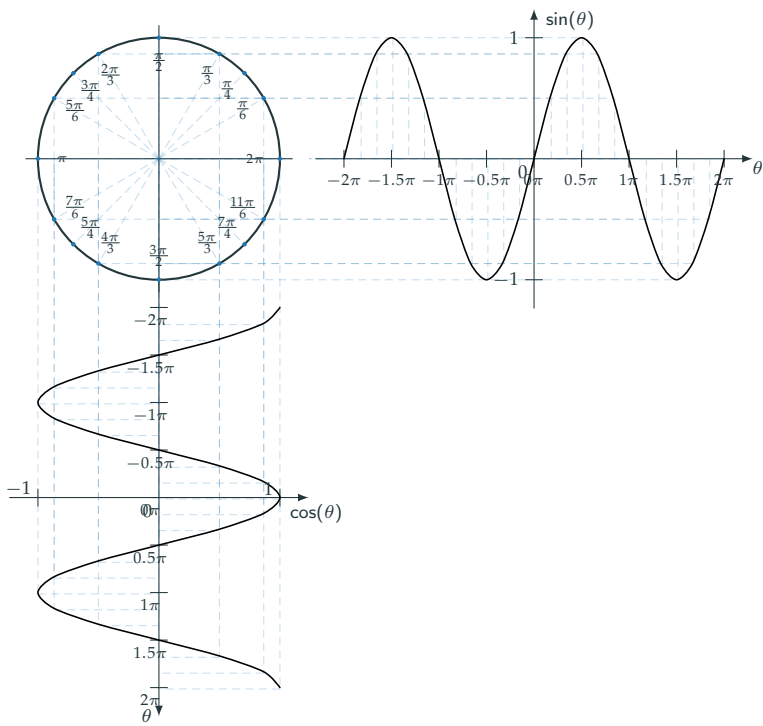


[animation 1]

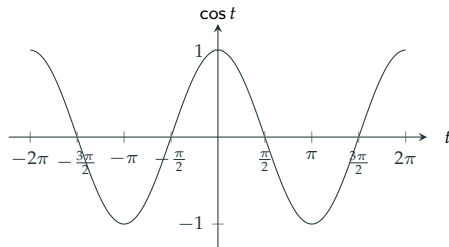
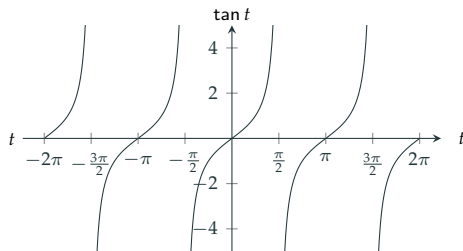
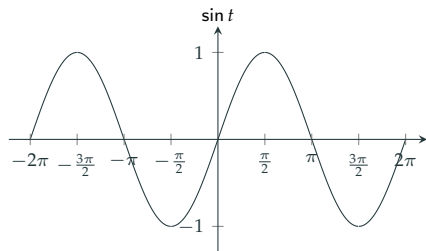
[animation 2]

**Remarque.** La fonction  $\sin(t)$  est une *fonction périodique* de période  $T = 2\pi$  :

$$f(t + T) = f(t)$$



# Fonctions trigonométriques classiques



## Remarque.

· Les fonctions  $f(t) = \sin t$  et  $f(t) = \tan t$  sont des *fonctions impaires*, i.e. :

$$f(-t) = -f(t)$$

· La fonction  $f(t) = \cos t$  est une *fonction paire*, i.e. :

$$f(-t) = f(t)$$

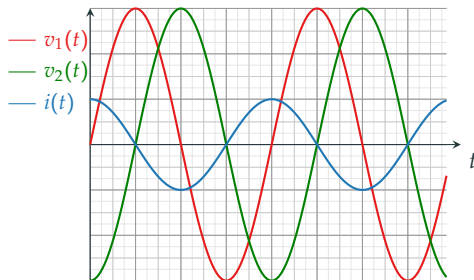
# Représentation de signaux

- De façon général, une fonction trigonométrique peut être de la forme :

$$f_1(t) = A \cos(\omega t \pm \varphi), \quad f_2(t) = A \sin(\omega t \pm \varphi), \quad f_3(t) = A \tan(\omega t \pm \varphi),$$

où

- $t \in \mathbb{R}$  : le temps [s]
  - $\omega \in \mathbb{R}^+$  : la pulsation du signal [rad/s]
  - $A \in \mathbb{R}^+$  : l'amplitude du signal [volt ou ampère]
  - $\varphi \in \mathbb{R}$  : le déphasage [rad]
- 
- Les deux premières formes s'utilisent pour la représentation de signaux électriques



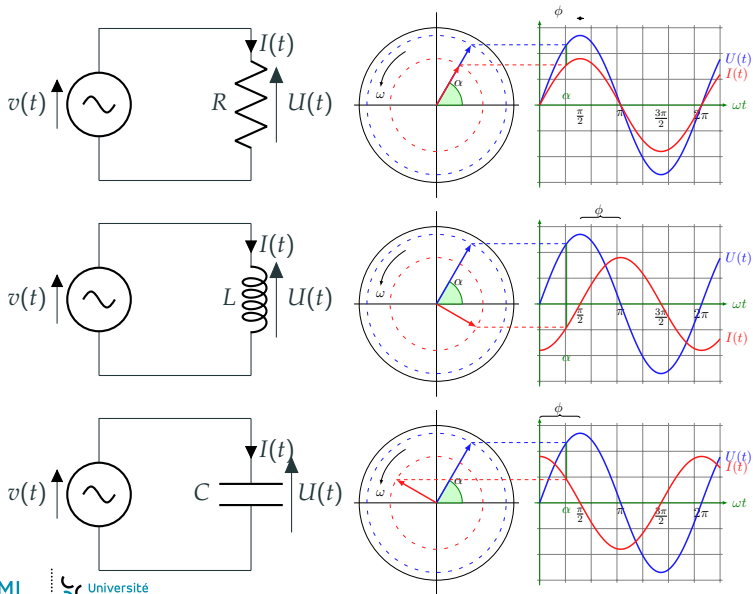
$$v_1(t) = 3 \sin(\omega t) [V]$$

$$v_2(t) = 3 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) [V]$$

$$i(t) = \cos(\omega t) [A]$$

[animation]

# Représentation de signaux électriques





- Il est toujours possible de décomposer ce type de fonction en une somme de sinus et cosinus non déphasés :

$$A \cos(\omega t - \varphi) = A[\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)]$$

- En utilisant la relation  $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$ , on obtient :

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t) \underbrace{\cos(\varphi)}_{\alpha} + \sin(\omega t) \underbrace{\sin(\varphi)}_{\beta}$$

- Finalement :

$$A \cos(\omega t - \varphi) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où

$$a = A \cos(\varphi), \quad b = A \sin(\varphi)$$

- Ici on part de l'expression

$$f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

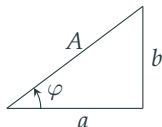
- La fonction  $f$  peut être écrite de la forme :

$$f(t) = A \left[ \frac{a}{A} \cos(\omega t) + \frac{b}{A} \sin(\omega t) \right]$$

- En sachant que  $\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi)$ , on obtient :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{A}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{A}$$

- Grâce au théorème de Pythagore, on peut montrer :



$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a}$$