IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels I (OML1)

Trigonométrie

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

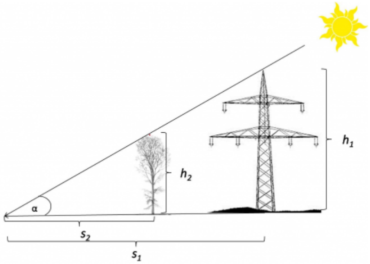
Thèmes

Trigonométrie

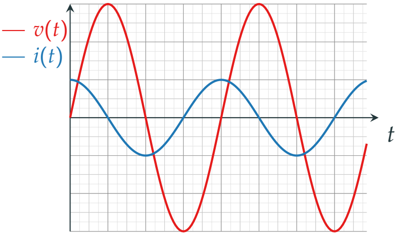
Trigonométrie

· Des nombreux domaines scientifiques utilisent la trigonométrie :

- La géographie
- L'astronomie
- La physique
- L'électricité et l'électronique
- La mécanique
- ...

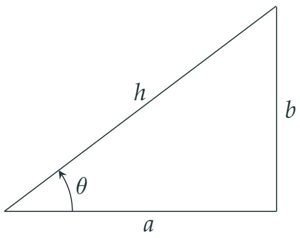


$$\tan \alpha = \frac{h_1}{s_1} = \frac{h_2}{s_2}$$



$$v(t) = 3\sin(\omega t) \text{ [volt, } V\text{]}$$
$$i(t) = \cos(\omega t) \text{ [ampère, } A\text{]}$$

Un rappel des fonctions trigonométriques usuelles



Rappel : $\pi = 180^\circ$

$$\text{angle [rad]} = \text{angle [deg]} \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\text{angle [deg]} = \text{angle [rad]} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

· On dénote :

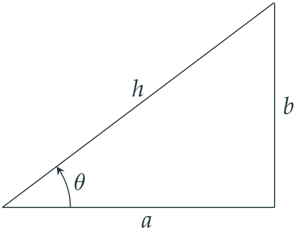
θ : angle [degré ou radian]

a : côté adjacent à l'angle θ

b : côté opposé à l'angle θ

h : hypoténuse

Un rappel des fonctions trigonométriques usuelles



· On dénote :

θ : angle [degré ou radian]

a : côté adjacent à l'angle θ

b : côté opposé à l'angle θ

h : hypoténuse

Rappel : $\pi = 180°$

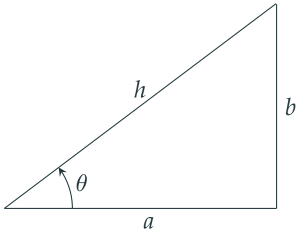
$$\text{angle [rad]} = \text{angle [deg]} \times \frac{\pi}{180°}$$

$$\text{angle [deg]} = \text{angle [rad]} \times \frac{180°}{\pi}$$

· Fonctions trigonométriques usuelles :

- $\sin\theta = \dfrac{b}{h}, \quad \theta = \arcsin\dfrac{b}{h}$
- $\cos\theta = \dfrac{a}{h}, \quad \theta = \arccos\dfrac{a}{h}$
- $\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta = \arctan\dfrac{b}{a}$

Un rappel des fonctions trigonométriques usuelles



· On dénote :

θ : angle [degré ou radian]

a : côté adjacent à l'angle θ

b : côté opposé à l'angle θ

h : hypoténuse

Rappel : $\pi = 180°$

$$\text{angle [rad]} = \text{angle [deg]} \times \frac{\pi}{180°}$$

$$\text{angle [deg]} = \text{angle [rad]} \times \frac{180°}{\pi}$$

· Fonctions trigonométriques usuelles :

- $\sin\theta = \frac{b}{h}, \quad \theta = \arcsin\frac{b}{h}$
- $\cos\theta = \frac{a}{h}, \quad \theta = \arccos\frac{a}{h}$
- $\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta = \arctan\frac{b}{a}$
- $\sec\theta = \frac{h}{a} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \theta = \operatorname{arcsec}\frac{h}{a}$
- $\csc\theta = \frac{h}{b} = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \theta = \operatorname{arccsc}\frac{h}{b}$
- $\cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}, \quad \theta = \operatorname{arccot}\frac{a}{b}$

D'autres relations entre fonctions trigonométriques

· Théorème de Pythagore :

$$h^2 = a^2 + b^2, \tag{1}$$

d'où on obtient **[Exercices]** :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta.$$

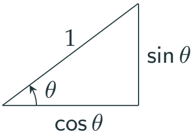
Rappel :

$$\sin\theta = \frac{b}{h}, \quad \cos\theta = \frac{a}{h}$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

Cercle trigonométrique

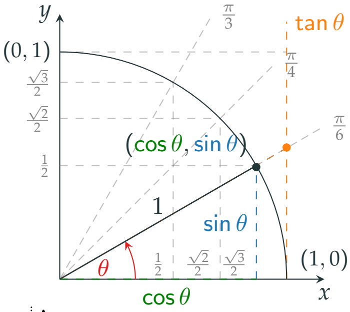
Construction du cercle trigonométrique

- Grâce au théorème de Pythagore, on peut construire le triangle :



$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

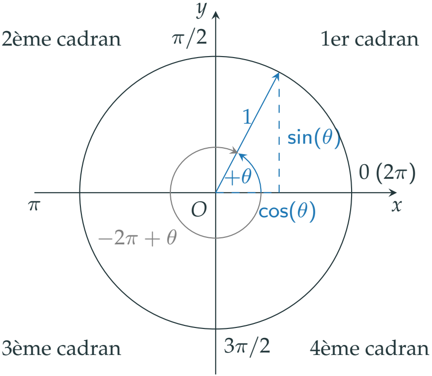
- Pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient le quart de cercle (trigonométrique) :



θ [deg]	0	30°	45°	60°	90°
[rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Cercle trigonométrique

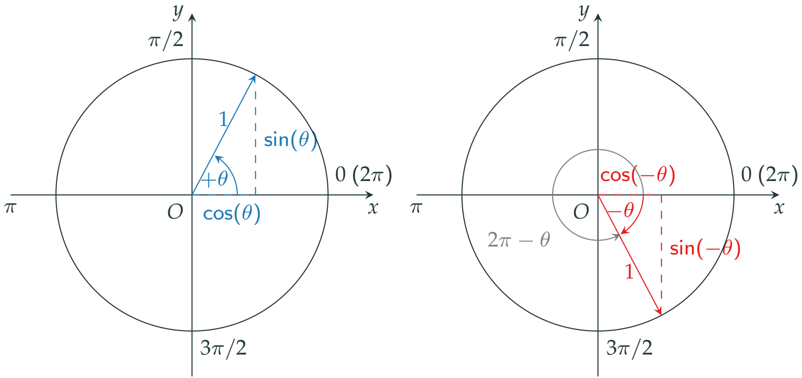
· Le quart de cercle trigonométrique peut être généralisé à un cercle complet :



Propriétés. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

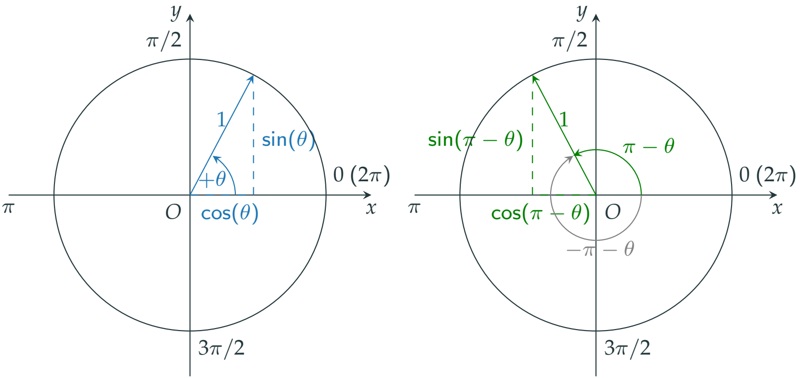
- $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$
- $\cos(\theta \pm 2k\pi) = \cos(\theta)$
- $\sin(\theta \pm 2k\pi) = \sin(\theta)$

Cercle trigonométrique – lien avec le 4ème cadran



Propriétés. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

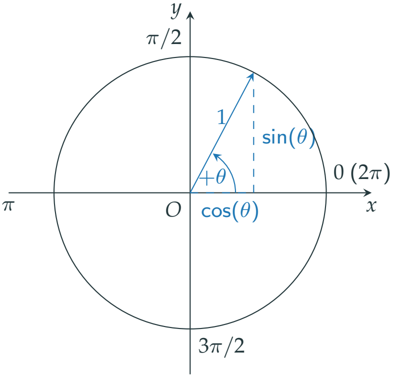
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- $\cos(-\theta \pm 2k\pi) = \cos(-\theta)$
- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\sin(-\theta \pm 2k\pi) = \sin(-\theta)$

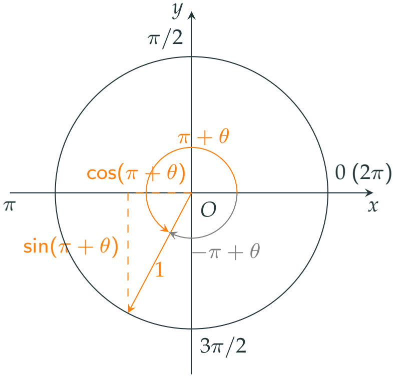


Propriétés.

- $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$
- $\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$
- $\cos(-\pi-\theta) = \cos(\pi-\theta)$
- $\sin(-\pi-\theta) = \sin(\pi-\theta)$

Cercle trigonométrique – lien avec le 3ème cadran

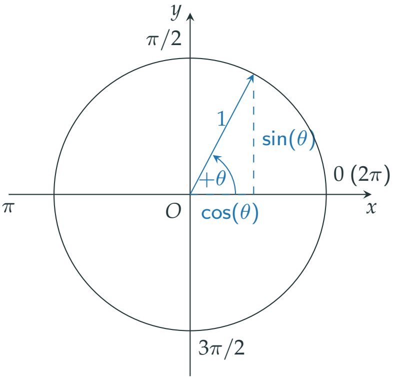


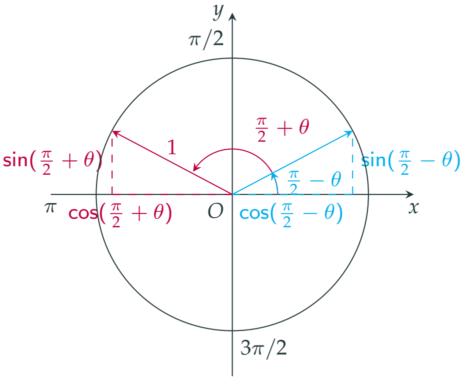


Propriétés.

- $\cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta)$
- $\sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(-\pi+\theta) = \cos(\pi+\theta)$
- $\sin(-\pi+\theta) = \sin(\pi+\theta)$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE



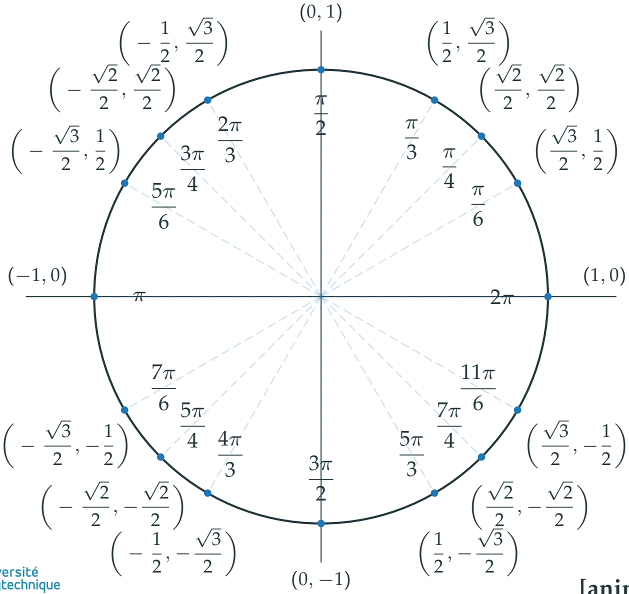


Propriétés.

- $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin(\theta)$
- $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos(\theta)$
- $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin(\theta)$
- $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos(\theta)$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Cercle trigonométrique – valeurs remarquables



CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

[animation]

Relations trigonométriques pour la fonction tangente

- $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$
- $\tan(\pm 2k\pi + \theta) = \tan(\theta)$
- $\tan(\pi \pm \theta) = \pm\tan(\theta)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} \pm \theta) = \mp\cot(\theta)$

Exercices. Démontrer les relations précédentes.

Rappel :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta), \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta \pm 2k\pi) = \cos(\theta), \quad \sin(\theta \pm 2k\pi) = \sin(\theta)$$

$$\cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta), \quad \sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\sin(\theta), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos(\theta)$$

Solution.

- $\tan(-\theta) = \dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \dfrac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$
- $\tan(\pm 2k\pi + \theta) = \dfrac{\sin(\pm 2k\pi + \theta)}{\cos(\pm 2k\pi + \theta)} = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$
- $\tan(\pi - \theta) = \dfrac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \dfrac{\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$
- $\tan(\pi + \theta) = \dfrac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} = \dfrac{-\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} = \tan(\theta)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \cot(\theta)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \dfrac{\cos(\theta)}{-\sin(\theta)} = -\cot(\theta)$

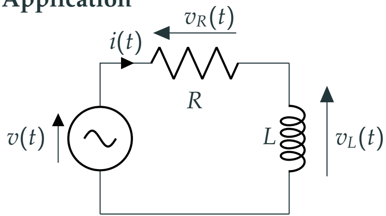
D’autres propriétés remarquables

D’autres propriétés remarquables

Relations relatives à l’addition d’angles

- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$
- $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$

Application



· Considérons les tensions électriques

$$v_R(t) = 4\cos(\omega t), \quad v_L(t) = 3\sin(\omega t)$$

· Sachant que $v(t) = v_R(t) + v_L(t)$, on obtient :

$$v(t) = 4\cos(\omega t) + 3\sin(\omega t)$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Application – circuit RL

- La tension $v(t) = 4\cos(\omega t) + 3\sin(\omega t)$ a la forme :

$$\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a-b)$$

- En réécrivant $v(t)$ comme

$$v(t) = A\left[\frac{4}{A}\cos(\omega t) + \frac{3}{A}\sin(\omega t)\right],$$

et en comparant les deux expressions, on identifie que :

$$\cos(b) = \frac{4}{A}, \quad \sin(b) = \frac{3}{A}, \quad \cos(a) = \cos(\omega t), \quad \sin(a) = \sin(\omega t)$$

- Grâce au théorème de Pythagore, on a :

$$A = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$b = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.64$$

- Finalement :

$$v(t) = A\cos(a-b) = 5\cos(\omega t - 0.64)$$

D'autres propriétés remarquables

Relatives au produit de sinus et cosinus

- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

Relatives à la somme de sinus et cosinus

- $\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right)\cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Linéarisation

· La linéarisation consiste à exprimer des fonctions trigonométriques élevées à une puissance donnée selon des fonctions trigonométriques de degré un.

- $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$
- $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$
- $\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta)$
- $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(3\theta)$

Exercices. Démontrer les relations précédentes.

Solution.

· $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) &= \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta) \\
&= \cos^2(\theta) - \underbrace{\sin^2(\theta)}_{1-\cos^2(\theta)} \\
&= 2\cos^2(\theta) - 1
\end{aligned}$$

· $\cos^3\theta = \dfrac{3}{4}\cos(\theta) + \dfrac{1}{4}\cos(3\theta)$

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) = \cos(\theta)\cos^2(\theta) &= \frac{1}{2}\cos(\theta)(1+\cos(2\theta)) \\
&= \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta)\cos(\theta) \\
&= \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\cos(2\theta-\theta)+\cos(2\theta+\theta))\right] \\
&= \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{4}(\cos(\theta)+\cos(3\theta)) \\
&= \frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta)
\end{aligned}$$

Résolution d'équations trigonométriques

- Il s'agit de trouver les solutions de certaines égalités :
  - $\cos a = \cos b$ donne les solutions :

$$a = b + 2k\pi, \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$ **[figure]**

  - $\sin a = \sin b$ donne les solutions :

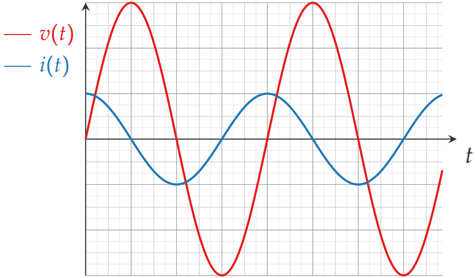
$$a = b + 2k\pi, \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$ **[figure]**

- Pour les autres cas, il s'agit de se ramener à l'une de ces deux formes.

Fonctions trigonométriques

· En génie électrique, les tensions v et les courants électriques i sont décrits par des *fonctions trigonométriques*, par exemple :

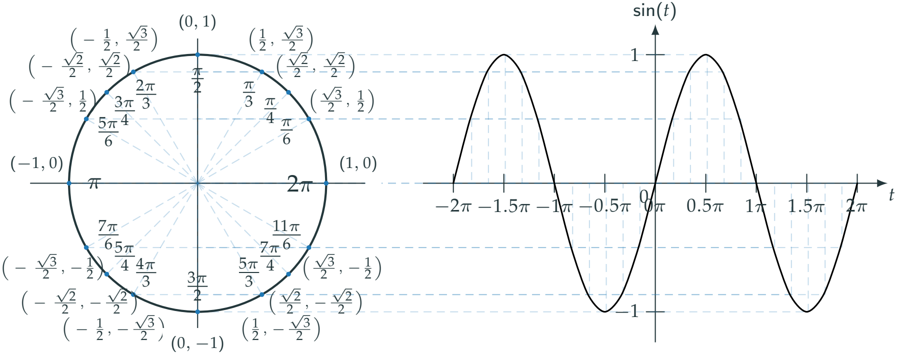
$$v(t) = 3\sin(\omega t)\ [\text{volt}, V], \qquad i(t) = \cos(\omega t)\ [\text{ampère}, A]$$



· Ici, l'argument de la fonction trigonométrique est donné par ωt :

- $t \in \mathbb{R}$: une variable représentant le temps (seconds [s])
- $\omega \in \mathbb{R}^+$: la pulsation du signal électrique [rad/s]

Fonction sinus

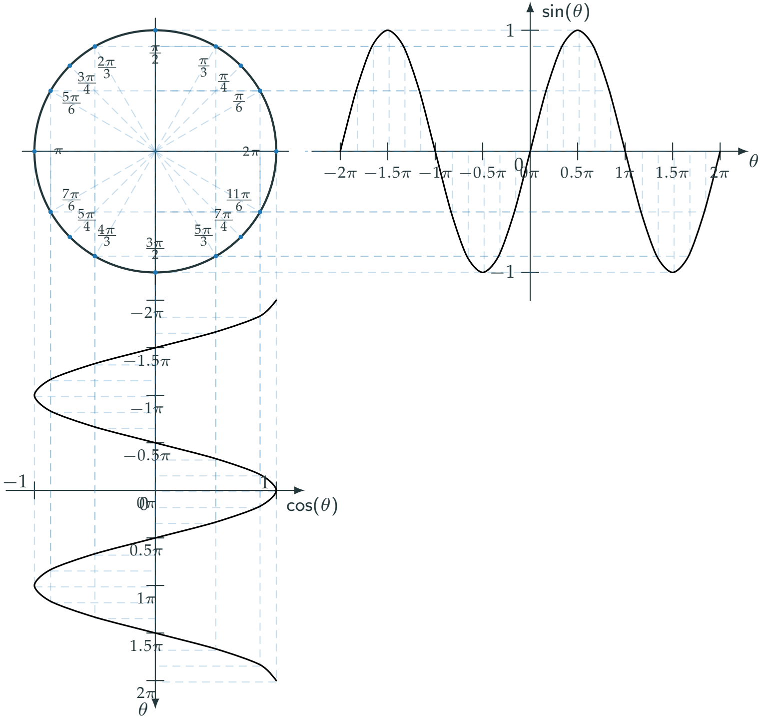


[animation 1]
[animation 2]

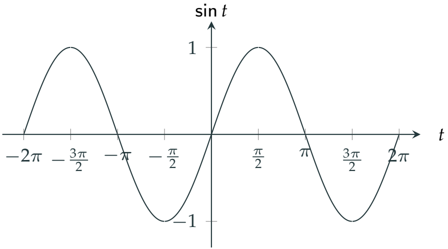
Remarque. La fonction $\sin(t)$ est une *fonction périodique* de période $T = 2\pi$:

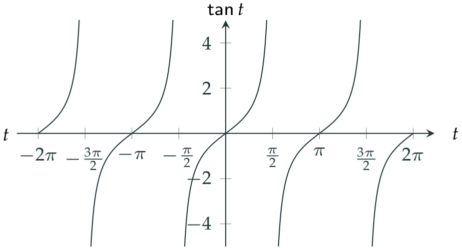
$$f(t+T) = f(t)$$

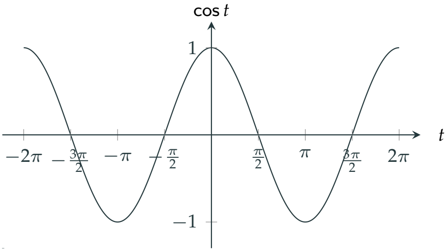
CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE


sin(θ)
1
−1
θ
−2π −1.5π −1π −0.5π 0 0π 0.5π 1π 1.5π 2π
π/2
2π/3
π/3
3π/4
π/4
5π/6
π/6
π
2π
7π/6
11π/6
5π/4
7π/4
4π/3
5π/3
3π/2
−2π
−1.5π
−1π
−0.5π
−1
1
0π
0.5π
1π
1.5π
2π
cos(θ)
θ

Fonctions trigonométriques classiques







Remarque.

· Les fonctions $f(t) = \sin t$ et $f(t) = \tan t$ sont des *fonctions impaires*, i.e. :

$$f(-t) = -f(t)$$

· La fonction $f(t) = \cos t$ est une *fonction paire*, i.e. :

$$f(-t) = f(t)$$

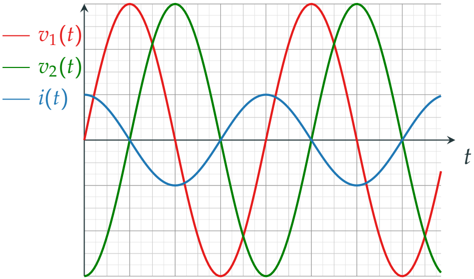
Représentation de signaux

· De façon général, une fonction trigonométrique peut être de la forme :

$$f_1(t) = A\cos(\omega t \pm \varphi), \quad f_2(t) = A\sin(\omega t \pm \varphi), \quad f_3(t) = A\tan(\omega t \pm \varphi),$$

où

- $t \in \mathbb{R}$: le temps [s]
- $\omega \in \mathbb{R}^+$: la pulsation du signal [rad/s]
- $A \in \mathbb{R}^+$: l'amplitude du signal [volt ou ampère]
- $\varphi \in \mathbb{R}$: le déphasage [rad]



· Les deux premières formes s'utilisent pour la représentation de signaux électriques

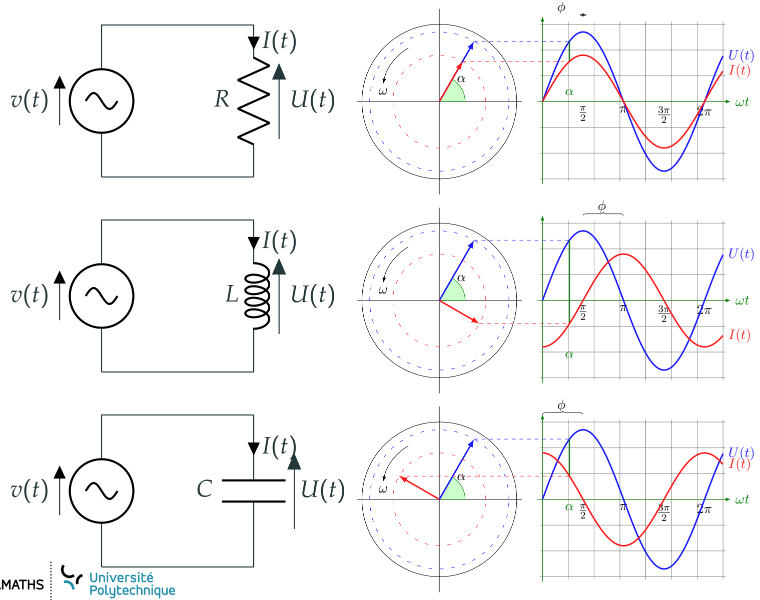
$$v_1(t) = 3\sin(\omega t)\ [V]$$

$$v_2(t) = 3\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\ [V]$$

$$i(t) = \cos(\omega t)\ [A]$$

[animation]

Représentation de signaux électriques



Transformation en somme de termes non déphasés

· Il est toujours possible de décomposer ce type de fonction en une somme de sinus et cosinus non déphasés :

$$A\cos(\omega t - \varphi) = A[\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)]$$

· En utilisant la relation $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, on obtient :

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t)\underbrace{\cos(\varphi)}_{\alpha} + \sin(\omega t)\underbrace{\sin(\varphi)}_{\beta}$$

· Finalement :

$$A\cos(\omega t - \varphi) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t),$$

où

$$a = A\cos(\varphi), \qquad b = A\sin(\varphi)$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Transformation inverse

- Ici on parte de l'expression

$$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

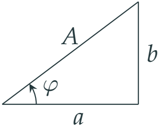
- La fonction f peut être écrite de la forme :

$$f(t) = A\left[\frac{a}{A}\cos(\omega t) + \frac{b}{A}\sin(\omega t)\right]$$

- En sachant que $\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)$, on obtient :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{A}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{A}$$

- Grâce au théorème de Pythagore, on peut montrer :



$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \arctan\frac{b}{a}$$