IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels II (OML2)

Primitivation

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

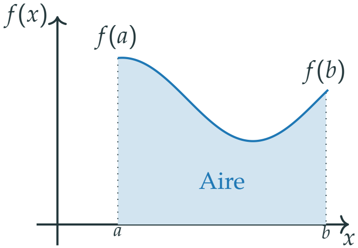
CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Intégrale

Intégrale

· Le calcul des *primitives* (*primitivation* ou *intégration*) trouve ses applications dans de nombreux domaines en ingénierie :

- Pour le calcul des aires et des volumes (génie civile ou mécanique)



$$\text{Aire} = \int_a^b f(x)dx$$

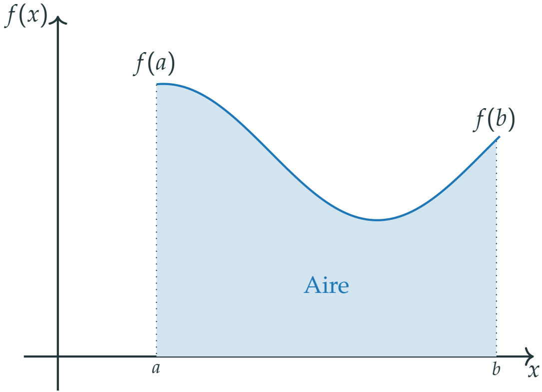
- Pour l'analyse des circuits RLC (génie électrique)

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}, \qquad v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

- Pour l'analyse des systèmes dynamiques (automatisation)

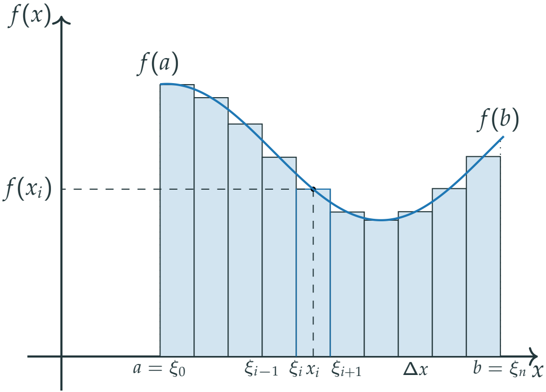
Transformée de Laplace : $\mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$

Intégrale



[animation]

Intégrale



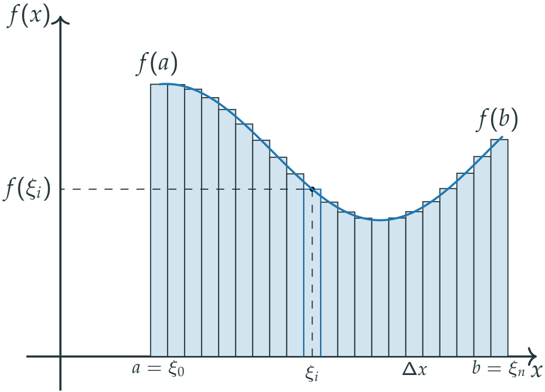
Somme de Riemann :

$$\text{Aire } \approx f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

[animation]

Intégrale

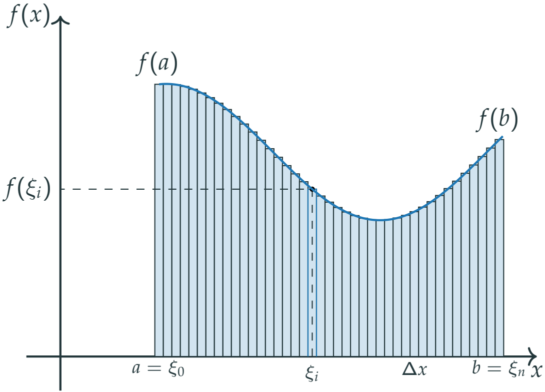


Somme de Riemann :

$$\text{Aire } \approx f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x$$

[animation]

Intégrale



Somme de Riemann :

$$\text{Aire } \approx f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x$$

[animation]

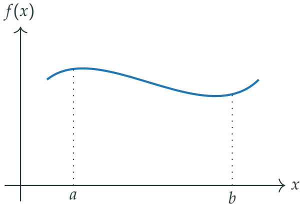
Intégrale

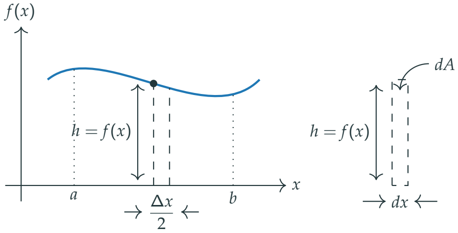
- Somme de Riemann :

$$\begin{aligned}\text{Aire } &\approx f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x\end{aligned}$$

- Si $\Delta x \to 0$, c'est-à-dire $n \to \infty$, la somme de Riemann devient une intégrale :

$$\text{Aire } = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$





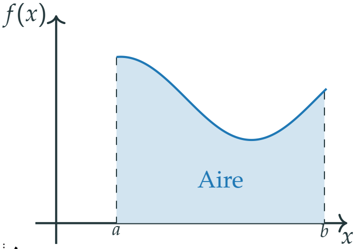
Intégrale

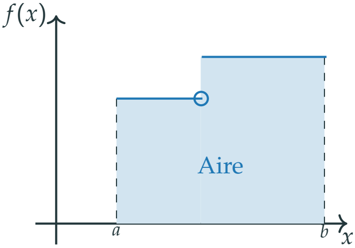
· Par définition, $f(x)$ est dite *intégrable* au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$ si la somme admet une limite lorsque $n \to \infty$:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Propriétés de l'intégrale

- Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$
- Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$





Propriétés de l'intégrale [à démontrer]

- Si f est intégrable dans l'intervalle $[a, b]$ et $c \in [a, b]$, alors la relation suivante est valide :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors $h(x) = f(x) + g(x)$ est également intégrable sur $[a, b]$:

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

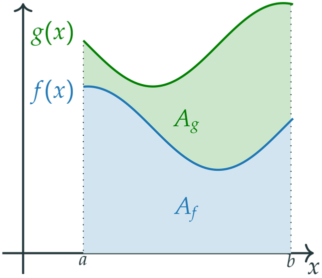
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction $h(x) = \alpha f(x)$ est également intégrable sur $[a, b]$:

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Intégrale

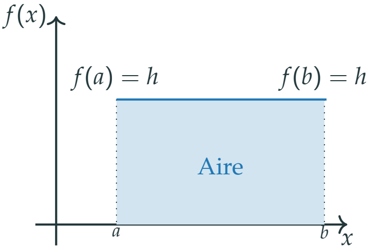
Propriétés de l'intégrale [à démontrer]

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$:
  - Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors
    $$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$
  - Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, alors
    $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$



CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Exemple. Calculer l'aire de la surface située en dessous de la courbe $f(x) = h$ dans l'intervalle $x \in [a, b]$.



· En utilisant la somme de Riemann :

$$\text{Aire} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{\cancel{n}} [\cancel{n}h] = (b-a)h$$

· En utilisant la définition de l'intégrale :

$$\int_a^b h dx = h \int_a^b dx = h(b-a)$$

Primitive

Primitive

· Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle *primitive* de f, toute fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

· On note :

$$F(x) = \int f(x)dx$$

· Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors $F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$, est une primitive de f :

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

Exercice. Calculer les primitives de :

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \cos(x)$
3. $f(x) = x^2$

Piste. Rappelez-vous que $F'(x) = f(x)$.

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Exercice. Calculer les primitives de :

1. $f(x) = e^x$ 2. $f(x) = \cos(x)$ 3. $f(x) = x^2$

Piste. Rappelez-vous que $F'(x) = f(x)$.

Solution

1. En supposant $F(x) = e^x$, on obtient que $F'(x) = e^x = f(x)$, alors
$$\int e^x dx = e^x + k$$
2. En supposant $F(x) = \sin(x)$, on obtient que $F'(x) = \cos(x) = f(x)$, alors
$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + k$$
3. En supposant $F(x) = \frac{x^3}{3}$, on obtient que $F'(x) = x^2 = f(x)$, alors
$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k$$

Primitive

Primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	k	$\cos(x)$	$\sin(x)+k$
a	$ax+k$	$\sin(x)$	$-\cos(x)+k$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+k$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$	e^x	e^x+k
$\frac{1}{x}$	$\ln x+k$	e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+k$

Exercice. Calculer la primitive de $f(x)=\sin^2(x)$.

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Primitive

Exercice. Calculer la primitive de

$$f(x) = \sin^2(x)$$

Solution. En utilisant la propriété $\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)dx &= \int \sin^2(x)dx \\ &= \int \left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + k \end{aligned}$$

Primitives spécifiques

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\sin^2 x$	$\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(2x)}{4}$	$\cos^2 x$	$\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{4}$
$\dfrac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$	$\dfrac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2+1}\rvert$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$
$\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$	$\dfrac{1}{2}\arctan(x) + \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$	$\dfrac{1}{2}\arctan(x) - \dfrac{x}{2(x^2+1)}$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Primitive

Theorem

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit F une primitive de f. Alors on peut calculer l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple. En revenant sur le cas $f(x) = h$, on avait trouvé :

$$h\int_a^b dx = h\Big[x\Big]_a^b = h(b-a)$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Primitive

Theorem

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit F une primitive de f. Alors on peut calculer l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple. En revenant sur le cas $f(x) = h$, on avait trouvé :

$$h\int_a^b dx = h\Big[x\Big]_a^b = h(b-a)$$

Exercice. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [3x^2 + \sin(x) + 4]dx$$

Exercice. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [3x^2 + \sin(x) + 4]dx$$

Solution.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [3x^2 + \sin(x) + 4]dx = \left[x^3 - \cos(x) + 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cancelto{0}{- \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[(0)^3 \cancelto{1}{- \cos(0)} + 4(0)\right]$$

$$= \frac{\pi^3}{8} + 2\pi + 1$$

Principe de linéarité

· Soient f et g deux fonctions ayant comme primitives F et G, alors une primitive de $h(x) = f(x) + g(x)$ est donnée par :

$$H(x) = F(x) + G(x)$$

· Soient f une fonction ayant comme primitive F et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors une primitive de $h(x) = \alpha f(x)$ est donnée par :

$$H(x) = \alpha F(x)$$

Primitives de fonctions composées

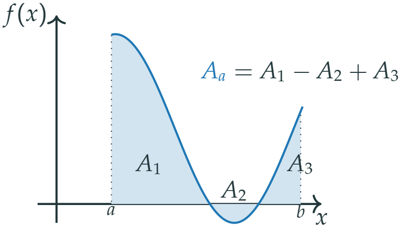
	$f(x)$	$F(x)$
$n \in Q - \{-1\}$	$f(x) = u'(x)u^n(x)$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)$
$n = -2$	$f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$F(x) = -\frac{1}{u(x)}$
$n = -\frac{1}{2}$	$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = \sqrt{u(x)}$
$n = -1$	$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln(u(x))$
	$f(x) = u'(x)\cos(u(x))$	$F(x) = \sin(u(x))$
	$f(x) = u'(x)\sin(u(x))$	$F(x) = -\cos(u(x))$
	$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)}$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Calcul de la valeur moyenne et la valeur efficace

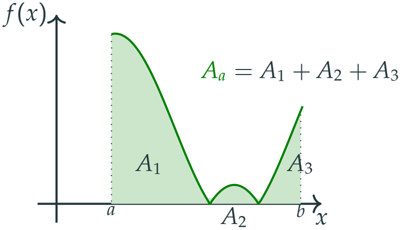
· Rappelez-vous que l'aire (*algébrique*) de la surface située en dessous de la courbe f dans l'intervalle $x \in [a, b]$ est donné par :

$$A_a = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{avec } A_a \in \mathbb{R}$$



· On appelle *aire géométrique* :

$$A_g = \int_a^b |f(x)|dx, \quad \text{avec } A_g \in \mathbb{R}^+$$



Remarque: On note que $A_g \geq A_a$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Calcul de la valeur moyenne et la valeur efficace

- Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $I = [a, b]$
- On appelle *valeur moyenne* de f sur $I = [a, b]$, le nombre défini par :

$$V_{\text{moyenne}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

- On appelle *valeur efficace* de f sur $I = [a, b]$, le nombre défini par :

$$V_{\text{efficace}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

· Pour le cas où f est une fonction périodique de période T, la valeur moyenne et la valeur efficace sont données par :

$$V_{\text{moyenne}} = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx$$

$$V_{\text{efficace}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} [f(x)]^2 dx}$$

· On mesure les valeurs moyenne et efficace de f sur une seule période

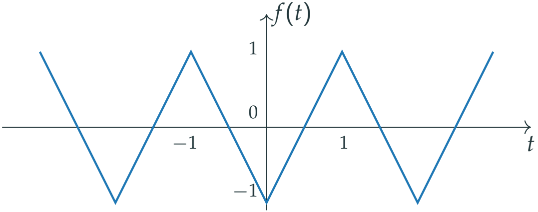
Preuve. On supposant l'intervalle $I = [a, b]$ avec $b = a + nT$, on obtient

$$\begin{aligned} V_{\text{moyenne}} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{nT}\left[\int_a^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^{a+2T} f(x)dx + \cdots + \int_{a+(n-1)T}^{a+nT} f(x)dx\right] \\ &= \frac{1}{nT}\left[n\int_a^{a+T} f(x)dx\right] = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx \end{aligned}$$

Exercice.

Calculer les valeurs moyenne et efficace de la fonction périodique avec période $T = 2$ suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -2x - 1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$



triangle

Solution.

Valeur moyenne :

$$
\begin{aligned}
V_{\text{moyenne}} &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} [-2x-1]dx + \int_0^1 [2x-1]dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Big[-x^2-x\Big]_{-1}^{0} + \Big[x^2-x\Big]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Big[-0-0+1-1\Big] + \Big[1-1-0+0\Big]\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

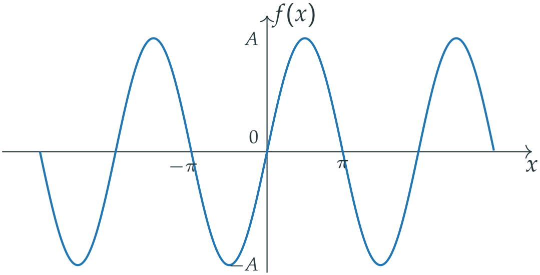
Solution (continuation).

Valeur efficace :

$$
\begin{aligned}
V_{\text{efficace}}^2 &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [f(x)]^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} [f(x)]^2 dx + \int_0^1 [f(x)]^2 dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} [-2x-1]^2 dx + \int_0^1 [2x-1]^2 dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} [4x^2+4x+1] dx + \int_0^1 [4x^2-4x+1] dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{4}{3}x^3-2x^2+x\right]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{4}{3}-2+1\right] + \left[\frac{4}{3}-2+1\right]\right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Quiz. Calculer les valeurs moyenne et efficace de la fonction périodique $f(x) = A\sin(x)$ avec $A \in \mathbb{R}^+$.



CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Techniques d’intégration

· Certaines primitives des fonctions trigonométriques peuvent être calculées grâce aux formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Exemple.

· Si on s'intéresse à calculer $\int \sin^3(x)dx$, on peut tout d'abord linéariser $\sin^3(x)$

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left[\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right]^3 = -\frac{1}{8j}[e^{j3x} - 3e^{j2x}e^{-jx} + 3e^{jx}e^{-j2x} - e^{-j3x}] \\
&= -\frac{1}{8j}[e^{j3x} - 3e^{jx} + 3e^{-jx} - e^{-j3x}] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{j3x} - e^{-j3x}}{2j} - 3\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right] = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)
\end{aligned}$$

d'où on obtient par la suite :

$$\int \sin^3(x)dx = \int \left[-\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\right]dx = \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x) + k$$

Changement de variables

· On s'intéresse à des fonctions f de la forme

$$f(x) = u'(x)g(u(x))$$

· Dans ce cas, on obtient que une primitive est donnée par :

$$F(x) = \int f(x)dx = \int g(u(x))u'(x)dx = \int g(u(x))\frac{du(x)}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int g(u(x))du(x)$$

Exemple.

· Soit $f(x) = xe^{x^2}$. Si on suppose que $u(x) = x^2$, alors $du(x) = 2xdx$. En substituant les termes dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}dx &= \int \frac{2}{2}xe^{x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int e^{u(x)}du(x) \qquad \left(\text{ou simplement} \int e^u du\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{u(x)} + k \\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + k\end{aligned}$$

· Concernant la résolution d'intégrales définies, on doit transformer les bornes d'intégration selon le changement de variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u(x))du(x)$$

Exemple.

· Pour calculer l'intégral $\int_0^2 xe^{x^2}\, dx$, en supposant $u(x) = x^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^2 xe^{x^2} dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} e^u du = \int_0^4 e^u du \\
&= \frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^4 \\
&= \frac{1}{2}[e^4 - 1]
\end{aligned}$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Intégration par partie

- Avec l'intégration par partie, on s'intéresse à des fonctions f de la forme :

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx$$

- On peut démontrer que cette intégrale est donnée par :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx + k$$

- Pour l'intégration définie, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

- Une notation "simpliste" peut être trouvée dans la littérature :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_a^b udv = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b vdu$$

Intégration par partie

Exemple. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$$

Solution.

· Par convenance, on suppose :

$$u(x) = x \qquad v'(x)dx = \cos(x)dx$$

$$u'(x)dx = dx \qquad v(x) = \int \cos(x)dx = \sin(x)$$

Intégration par partie

Exemple. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$$

Solution.

· Par convenance, on suppose :

$$\begin{array}{ccc} u(x) = x & & v'(x)dx = \cos(x)dx \\ & \searrow & \\ u'(x)dx = dx & \leftarrow & v(x) = \int \cos(x)dx = \sin(x) \end{array}$$

· En appliquant la formule de l'intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx &= \Big[u(x)v(x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx \\ &= \cancelto{0}{\Big[x\sin(x)\Big]_0^{\pi}} - \int_0^{\pi} \sin(x)dx \\ &= \Big[\cos(x)\Big]_0^{\pi} \\ &= \cos(\pi) - \cos(0) = -2 \end{aligned}$$

Décomposition en éléments simples

· Dans plusieurs cas il est possible de récrire les intégrales sous des forme canoniques :

$$\int \frac{1}{x+a}dx = \ln(x+a), \qquad \int \frac{1}{(x+a)^n}dx = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x+a)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n+a}dx = \frac{1}{n}\ln(x^n+a), \qquad \int \frac{1}{x^2+a}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

Exemple.

$$I = \int \frac{1}{x^4+3x^3+3x^2+3x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}dx$$

En décomposant en éléments simples, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2}\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{1-3x}{x^2+1}\right)\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{10}\int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{3}{10}\int \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{5}\ln(x+2) + \frac{1}{10}\arctan(x) - \frac{3}{20}\ln(x^2+1) + k \end{aligned}$$

· Pour le cas quadratique, on a trois possibilités :

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

· Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, on obtient :

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{\left[x+\dfrac{b}{2a}\right]^2}dx = -\frac{2a}{2ax+b} + k$$

· Si $\Delta > 0$, on obtient :

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{\left[x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right]}dx$$

$$= \alpha \ln\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \beta \ln\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + k$$

Décomposition en éléments simples

· Si $\Delta < 0$, on doit récrire l'intégrale sous la forme $\int \frac{1}{z^2+\alpha} dz$:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} dx$$
$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} dx$$
$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 + \left[\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]} dx$$

· En sachant que $\int \frac{1}{z^2+\alpha} dz = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{\alpha}}\right)$, on obtient :

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{4a^2}{4ac-b^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{4a^2}{4ac-b^2}}\left[x + \frac{b}{2a}\right]\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left[x + \frac{b}{2a}\right]\right) + k$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE