IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels II (OML2)

Produit de convolution

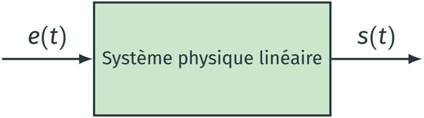
Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

1. Produit de convolution

Produit de convolution

Lien avec l'automatique :



· Si le système physique est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, en utilisant la transformée de Laplace, on a :

$$S(p) = H(p)E(p), \quad \text{avec } H \text{ la } \textit{fonction de transfert}$$

· La transformée inverse de Laplace est donnée par :

$$s(t) = h(t) \otimes e(t), \quad \text{avec } h \text{ la } \textit{réponse impulsionnelle}$$

Produit de convolution

- Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$
- Le produit de convolution de f par g est défini par :

$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(\tau - t)dt$$

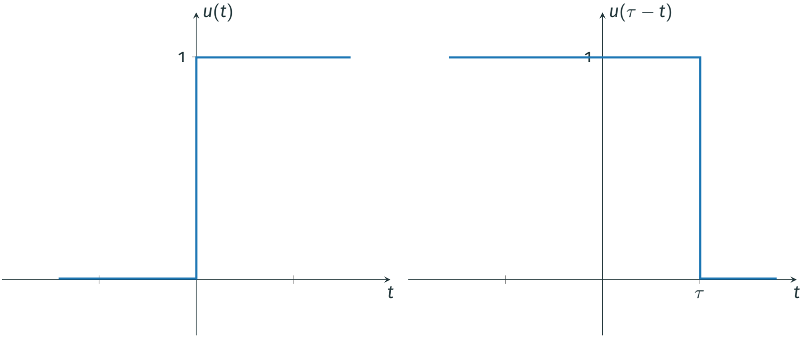
Exercice. Déterminer le produit de convolution :

$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(\tau - t)\, dt,$$

avec $u(t)$ la fonction *échelon unitaire* défini par :

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Solution.



- De la représentation graphique de l'échelon unitaire, on déduit :

$$(f \otimes u)(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} f(t)dt$$

Produit de convolution

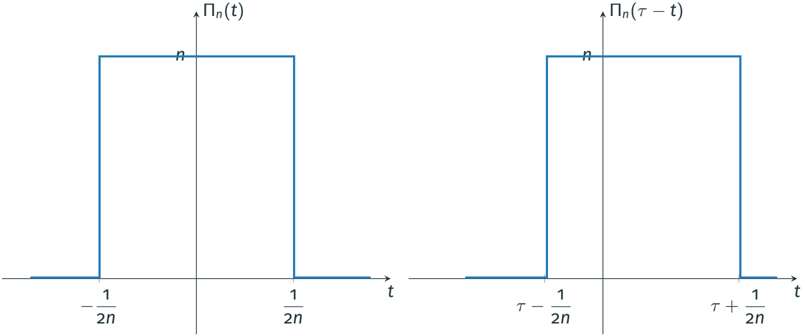
Exercice. Déterminer le produit de convolution :

$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Pi_n(\tau - t)dt,$$

avec $\Pi_n(t)$ la fonction *porte de Dirac* défini par :

$$\Pi_n(t) = \begin{cases} n, & \text{si } |t| \leq \dfrac{1}{2n} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Solution.



- De la représentation graphique, on déduit :

$$(f \otimes \Pi_n)(\tau) = n \int_{\tau - \frac{1}{2n}}^{\tau + \frac{1}{2n}} f(t)dt$$

Propriétés

- Le produit de convolution est commutatif et associatif :

$$f \otimes g = g \otimes f \quad \text{(commutativité)}$$
$$f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h \quad \text{(associativité)}$$

- L'élément neutre est l'impulsion de Dirac :

$$f \otimes \delta = \delta \otimes f = f$$

- Le produit de convolution est bilinéaire :

$$(f + \lambda g) \otimes h = f \otimes h + \lambda g \otimes h$$
$$f \otimes (g + \lambda h) = f \otimes g + f \otimes \lambda h$$

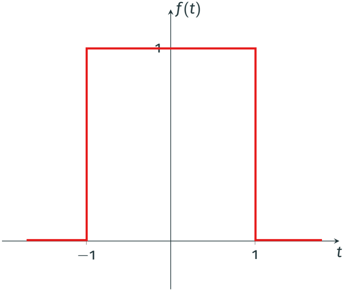
- La dérivée de la convolution de deux fonctions est donnée par :

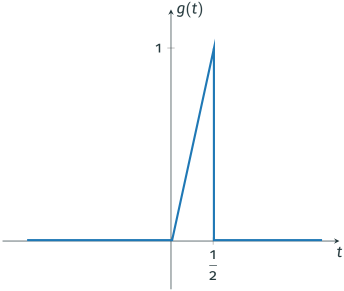
$$\frac{d}{dt}(f \otimes g) = \frac{d}{dt}f \otimes g = f \otimes \frac{d}{dt}g$$

Produit de convolution

Exercice. Soient f et g deux signaux :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}, \qquad g(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$





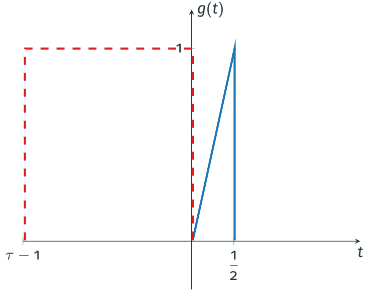
Calculer le produit de convolution $(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(\tau - t)dt$

Solution.

· Ici, il sera plus simple de travailler avec $f(\tau - t)$ plutôt qu'avec $g(\tau - t)$, donc on considère :

$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(\tau - t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(\tau - t)dt$$

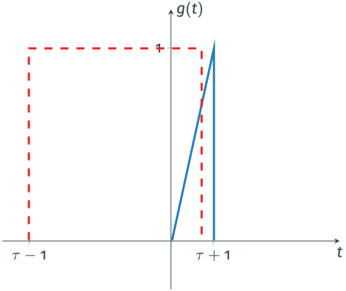
Cas I : $\tau + 1 < 0$



$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(\tau - t)dt = 0$$

Produit de convolution

Cas II : $0 \leq \tau + 1 < \dfrac{1}{2}$

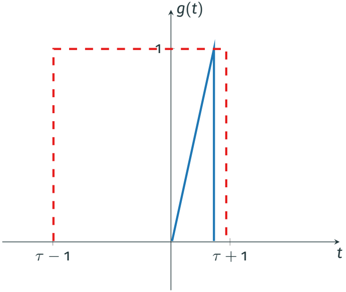


$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t){\color{red}f}(\tau - t)dt \\
&= \int_{0}^{\tau+1} 2t \; dt \\
&= \left[t^2\right]_0^{\tau+1} = (\tau + 1)^2
\end{aligned}
$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

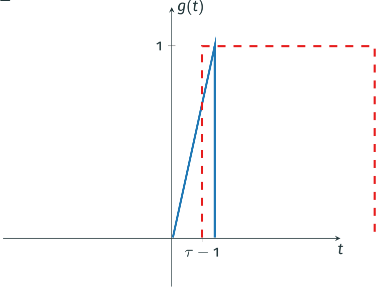
Produit de convolution

Cas III : $\tau + 1 \geq \frac{1}{2}$ et $\tau - 1 < 0$



$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(\tau - t) dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 2t \, dt \\
&= \left[t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

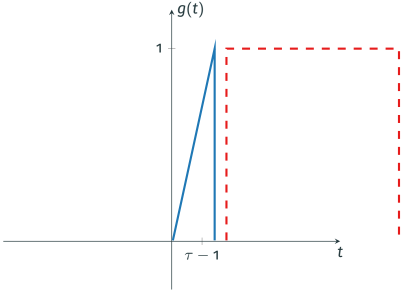
Cas IV : $0 \leq \tau - 1 < \frac{1}{2}$



$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(\tau - t) dt$$
$$= \int_{\tau - 1}^{\frac{1}{2}} 2t \; dt$$
$$= \left[t^2 \right]_{\tau - 1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - (\tau - 1)^2$$

Produit de convolution

Cas V : $\tau - 1 > \frac{1}{2}$



$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(\tau - t)dt = 0$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Produit de convolution

- Finalement, on obtient :

$$(f \otimes g)(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -1 \\ (\tau + 1)^2, & -1 \leq \tau < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, & -\frac{1}{2} \leq \tau < 1 \\ \frac{1}{4} - (\tau - 1)^2, & 1 \leq \tau < \frac{3}{2} \\ 0, & \tau > \frac{3}{2} \end{cases}$$

D'autres exemples

[animation 1]

[animation 2]

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 2ème Année.
Ellipses, 2018.

Geogebra outils et ressources.
`https://www.geogebra.org/?lang=fr`.
Accessed: 2023-07.