IUT GEII – Mathématiques (Ma3)

Introduction aux séries entières

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

1. Séries entières

   Séries entières réelles

   Domaine de convergence

CERAMATHS

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Séries entières

· Les séries entières font intervenir la notion de variable dans les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n x^n) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

· Pour une valeur donnée de la variable x, la série entière est une série numérique

· Dans un certain sens, on peut donc dire que les séries numériques sont un cas particulier des séries entières

Définition

· On appelle série entière, toute série dont le terme général est de la forme

$$u_n(x) = c_n x^n,$$

où (c_n) est une suite numérique et la variable $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$)

· On note

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)$$

Séries entières réelles

· Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$ une série entière de la variable x

· On dit que S est une série entière réelle si le terme général général est de la forme

$$u_n(x) = a_n x^n,$$

où (a_n) est une suite numérique et la variable $x \in \mathbb{R}$

Domaine de convergence

Lemme de convergence d'Abel

Si un série entière converge en x_0, alors elle converge pour tout x vérifient $|x| < |x_0|$

· A toute série entière de la variable réelle $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$ on peut associer un unique nombre $R \in \mathbb{R}^+$ (éventuellement infini) tel que :

- $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$ est absolument convergente $\forall x \in \mathbb{R}$ vérifient $|x| < R$
- $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$ est divergente $\forall x \in \mathbb{R}$ vérifient $|x| > R$

· R est appelé *rayon de convergence* de la série entière

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Domaine de convergence

· On appelle *intervalle de convergence* à l'intervalle ouvert $]-R, R[$

Remarques

· Aux bornes, la série entière peut-être convergente ou divergente

- Il est alors nécessaire d'en faire l'étude pour $x = -R$ et $x = R$

· Si $R = 0$, la série ne converge que pour $x = 0$, si $R = \infty$ la série converge $\forall x \in \mathbb{R}$

Critère de d'Alembert

· Soit la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$. Si

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell,$$

alors $R = \dfrac{1}{L}$

Remarque : Si $\ell = 0$, alors $R = \infty$

Critère de Cauchy

· Soit la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$. Si

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \ell,$$

alors $R = \dfrac{1}{L}$

Exercice. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{(n+1)3^n} \right)$$

Étudier la série aux bornes de son rayon de convergence

Exercice. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{(n+1)3^n} \right)$$

Étudier la série aux bornes de son rayon de convergence

Solution

· Soit $a_n = \dfrac{1}{(n+1)3^n}$

· Utilisons le critère de d'Alembert en étudiant $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, on a

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1+1)3^{n+1}}}{\dfrac{1}{(n+1)3^n}} = \frac{n+1}{3(n+2)},$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \dfrac{1}{3} = \ell$. Alors, $R = \dfrac{1}{\ell} = 3$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Solution (continuation)

· Pour $R = 3$, on obtient

$$S(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

· D'après le critère d'équivalence :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n},$$

d'où on peut conclure (d'après Riemann) que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ est divergente

Solution (continuation)

· Pour $R = -3$, on obtient

$$S(-3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

· D'après le critère de Leibniz pour les séries alternées :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = 0,$$

et $\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right|$ est une suite décroissante alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente

· En conclusion, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{(n+1)3^n} \right)$ converge pour $x \in [-3, 3[$