IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels III (OML3)

Série de Fourier

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

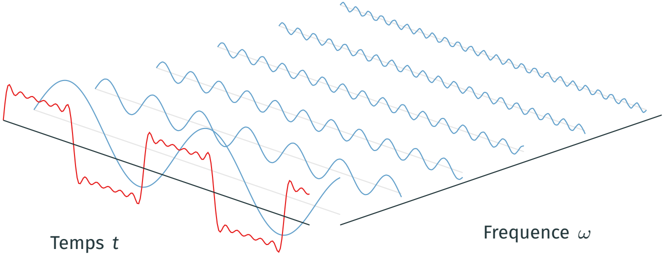
Thèmes

Intuition pratique...

- **Vidéo 1**
- **Vidéo 2**

Série de Fourier

· Selon J. Fourier, toute *fonction périodique* peut se décomposer, sous certaines conditions, en une somme infinie de fonctions sinusoïdales.



[animation 1] [animation 2] [animation 3]

Applications :

- Le traitement du signal (ou des images).
- L'analyse spectrale des phénomènes périodiques.
- La représentation des systèmes électriques (via la transformée de Fourier).

Représentation trigonométrique

· Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

· La représentation trigonométrique de Fourier de y est donnée sous la forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t),$$

avec $\omega > 0, a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

- a_0 est la valeur moyenne de y,
- $h_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$ est appelée la composante *fondamentale* de période T,
- $h_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ est appelée *harmonique* de rang n de période $T_n = \dfrac{T}{n}$.

Représentation trigonométrique

- Les coefficients de la représentation de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_T y(t)\,dt, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_T y(t)\cos(n\omega t)\,dt, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_T y(t)\sin(n\omega t)\,dt. \end{aligned}$$

- Ici, $\int_T y(t)\,dt$ représente l'intégrale de la fonction sur une période. Les deux cas les plus courants sont :

$$\begin{aligned} \int_T y(t)\,dt &= \int_0^T y(t)\,dt, \\ \int_T y(t)\,dt &= \int_{-T/2}^{T/2} y(t)\,dt. \end{aligned}$$

Exercice. Vérifier que les expressions précédentes sont valides.

Solution.

· Calcul de a_0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_T y(t)dt &= \frac{1}{T}\int_T f(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_T [a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_T a_0 dt + \int_T \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t)dt + \int_T \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(n\omega t)dt\right] \\
&= a_0 + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_T \cos(n\omega t)dt}_{0} + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \underbrace{\int_T \sin(n\omega t)dt}_{0}.
\end{aligned}$$

Solution (suite).

· Calcul de a_n :

$$\frac{2}{T}\int_T y(t)\cos(m\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_T [a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]\cos(m\omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\cancelto{0}{a_0\int_T \cos(m\omega t)dt} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\int_T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cancelto{0}{\int_T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt}\right].$$

· L'intégration restante est donné par (principe d'orthogonalité) :

$$\int_T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{si } m = n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

· Finalement :

$$\frac{2}{T}\int_T y(t)\cos(m\omega t)dt = a_n.$$

Solution (suite).

- Calcul de b_n :

$$\frac{2}{T}\int_T y(t)\sin(m\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_T [a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]\sin(m\omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\cancel{a_0\int_T \sin(m\omega t)dt}^{0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \cancel{a_n\int_T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)dt}^{0} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\int_T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt\right].$$

- L'intégration restante est donné par (principe d'orthogonalité) :

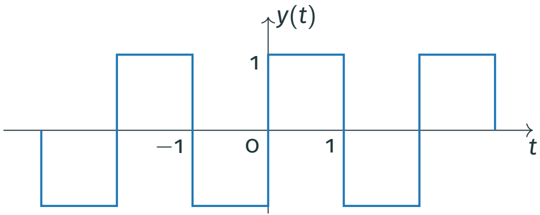
$$\int_T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{si } m = n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Finalement :

$$\frac{2}{T}\int_T y(t)\sin(m\omega t)dt = b_n.$$

Exercice.

· Considérons la fonction $y(t)$ suivant :



Déterminer a_0, a_n et b_n.

Cas particulier – fonction carrée

Solution.

- Puisque y est une fonction périodique de période $T = 2$, on en déduit que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi.$$

- Étant donné que le y est centré (i.e., de moyenne nulle), on a $a_0 = 0$.
- Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients a_n et b_n.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_T y(t)\cos(n\omega t)dt \\
&= \int_0^2 y(t)\cos(n\pi t)dt \\
&= \int_0^1 \cos(n\pi t)dt - \int_1^2 \cos(n\pi t)dt \\
&= \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 - \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\cancelto{0}{(\sin(n\pi) - \sin(0))} - \cancelto{0}{(\sin(2n\pi) - \sin(n\pi))}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Cas particulier – fonction carrée

Solution (suite).

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_T y(t)\sin(n\omega t)dt \\
&= \int_0^2 y(t)\sin(n\pi t)dt \\
&= \int_0^1 \sin(n\pi t)dt - \int_1^2 \sin(n\pi t)dt \\
&= \left[\frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 - \left[\frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[(-\cos(n\pi) + \cancelto{1}{\cos(0)}) - (-\cancelto{1}{\cos(2n\pi)} + \cos(n\pi))\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right].
\end{aligned}
$$

Solution (suite).

- Pour le calcul des coefficients b_n, on obtient :

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

- Une autre formulation équivalente est :

$$b_{2k} = 0, \qquad b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

- Ainsi, le développement en série de Fourier de la fonction y s'écrit :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1} \sin((2k+1)\omega t).$$

Cas particulier – fonction paire

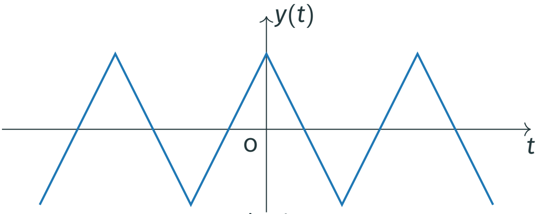
· Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une *fonction périodique paire*, c'est-à-dire $y(-t) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient **[exercice]**

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t),$$

où

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} y(t)dt, \qquad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} y(t)\cos(n\omega t)dt.$$

Exemple.



triangle

Démonstration (suite).

· Calcul de a_0 :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} y(t)dt + \int_{0}^{T/2} y(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} y(-t)dt + \int_{0}^{T/2} y(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[-\int_{T/2}^{0} y(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} y(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{0}^{T/2} y(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} y(t)dt\right] = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} y(t)dt.
\end{aligned}$$

· Calcul de a_n : en définissant $g(t) = y(t)\cos(n\omega t)$, on remarque que g est une fonction paire, c'est-à-dire que $g(-t) = g(t)$. Par conséquent, on a :

$$a_n = 2\left[\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} g(t)dt\right] = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} y(t)\cos(n\omega t)dt.$$

Cas particulier – fonction paire

Démonstration (suite).

· Calcul de a_n : en définissant $g(t) = y(t)\sin(n\omega t)$, on remarque que g est une fonction impaire, c'est-à-dire que $g(-t) = -g(t)$. Par conséquent, on a :

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{T/2} f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[-\int_{-T/2}^{0} g(-t)dt + \int_{0}^{T/2} f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{T/2}^{0} g(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} g(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[-\int_{0}^{T/2} g(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} g(t)dt\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

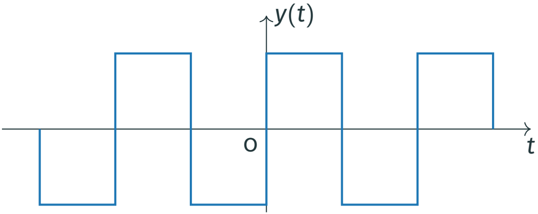
· Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une *fonction périodique impaire*, c'est-à-dire $y(-t) = -y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t),$$

où

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} y(t) \sin(n\omega t) dt.$$

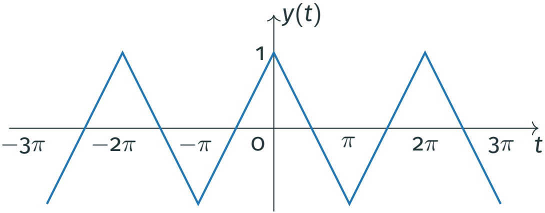
Exemple.



Exercice.

· Considérons la fonction 2π-périodique défini sur $[-\pi;\pi[$ donnée par

$$y(t) = 1 - \left|\frac{2t}{\pi}\right|.$$

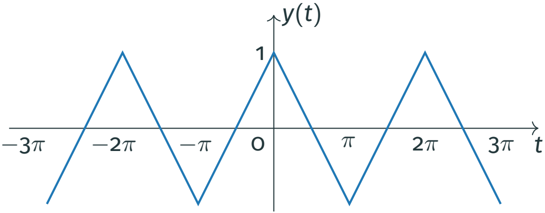


Déterminer a_0, a_n et b_n.

Exercice.

· Considérons la fonction 2π-périodique défini sur $[-\pi;\pi[$ donnée par

$$y(t) = 1 - \left|\frac{2t}{\pi}\right|.$$



Déterminer a_0, a_n et b_n.

Solution. En observant la représentation graphique, on constate que y est une fonction paire et centrée. Ainsi, on obtient :

$$a_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad b_n = 0,$$

il ne reste donc plus qu'à calculer a_n.

Série de Fourier

Solution (suite).

- Par définition, on a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[1-\frac{2t}{\pi}\right]\cos(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\cancelto{0}{\int_0^{\pi}\cos(nt)dt} - \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt. \end{aligned}$$

- En effectuant une intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t\cos(nt) &= \cancelto{0}{\left[\frac{1}{n}t\sin(nt)\right]_0^{\pi}} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt \\ &= -\frac{1}{n}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}[\cos(n\pi)-1]. \end{aligned}$$

- Et enfin, on trouve :

$$a_n = \frac{4[1-\cos(n\pi)]}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi^2 n^2}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Représentation polaire

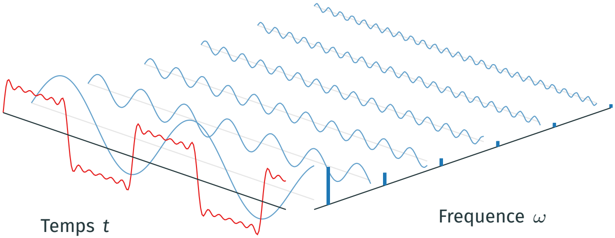
- Une autre façon d'écrire la représentation de Fourier est donnée par **[exercice]** :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n),$$

où

$$A_0 = a_0, \qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \tan\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}, \qquad h_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n).$$

- On note A_n et φ_n l'amplitude et la phase de l'harmonique h_n



CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Démonstration. Pour l'harmonique de rang n de f, on a :

$$\begin{aligned} h_n &= a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \\ &= \underbrace{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}_{A_n} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega t) \right). \end{aligned}$$

· Grâce à la relation trigonométrique

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),$$

on peut en déduire :

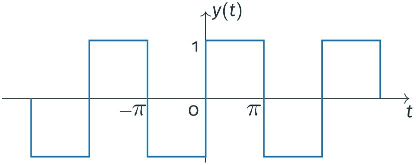
$$h_n = A_n \cos(n\omega t - \varphi),$$

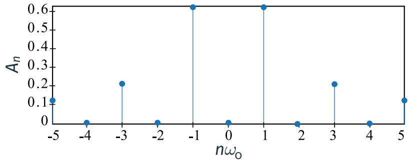
où

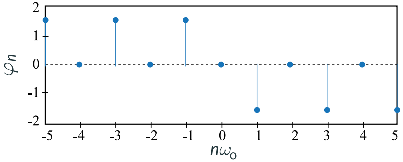
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \text{et} \qquad \tan\varphi = \frac{b_n}{a_n}.$$

Spectre d'amplitude et de phase

· Les spectres d'amplitude (A_n) et de phase (φ_n) d'une fonction sont représentés par des diagrammes en bâtons.







Série de Fourier complexe

Série de Fourier complexe

· Grâce aux formules d'Euler, on peut réécrire la représentation de Fourier sous la forme suivante :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

où

$$c_n = \begin{cases} a_0, & n = 0 \\ \dfrac{a_n - jb_n}{2}, & n > 0 \\ \dfrac{a_{|n|} + jb_{|n|}}{2}, & n < 0 \end{cases}, \qquad c_{-n} = \overline{c_n}$$

Exercice. À partir de la représentation trigonométrique de Fourier, développer la forme exponentielle complexe.

Série de Fourier complexe

Solution.

· Sachant que $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \\
&= a_0 e^{0j\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \\
&= a_0 e^{0jn\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \\
&= a_0 e^{0jn\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_{-n} + jb_{-n}}{2} e^{jn\omega t} \\
&= c_0 e^{0jn\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jn\omega t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}.
\end{aligned}
$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Lien avec la décomposition sous forme réelle

Rappel :

$$c_n = \begin{cases} a_0, & n = 0 \\ \dfrac{a_n - jb_n}{2}, & n > 0 \\ \dfrac{a_{|n|} + jb_{|n|}}{2}, & n < 0 \end{cases}$$

· Soit $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$. De l'expression précédente, on obtient **[exercice]** :

$$a_0 = c_0, \qquad a_n = c_n + \overline{c_n}, \qquad b_n = j(c_n - \overline{c_n}).$$

· Soit $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$. Par définition **[exercice]** :

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 = c_0, \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\sqrt{c_n \overline{c_n}} = 2\left|c_n\right|, \\ \tan\varphi_n &= \frac{b_n}{a_n} = j\frac{c_n - \overline{c_n}}{c_n + \overline{c_n}} = -\frac{\operatorname{Im}(c_n)}{\operatorname{Re}(c_n)}, \quad \varphi_n = -\arg(c_n). \end{aligned}$$

Série de Fourier complexe

- Soit $f(t)$ la série de Fourier complexe :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

- Les coefficients de cette représentation sont donnés par :

$$\begin{aligned} c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_T y(t)\cos(n\omega t)dt - j\frac{2}{T}\int_T y(t)\sin(n\omega t)dt\right] \\ &= \frac{1}{T}\left[\int_T y(t)[\cos(n\omega t) - j\sin(n\omega t)dt\right] \\ &= \frac{1}{T}\int_T y(t)e^{-jn\omega t}dt. \end{aligned}$$

Exercice. Considérons la fonction 2π-périodique définie par

$$y(t) = -e^{-t}, \quad t \in [-\pi; \pi[.$$

Écrire la décomposition de y en série de Fourier à coefficients complexes.

Solution.

· En partant de la définition, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)e^{-jn\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-e^{-t}]e^{-jn\omega t}dt \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+jn\omega)t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-(1+jn\omega)t}}{1+jn\omega}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-(1+jn\omega)\pi} - e^{(1+jn\omega)\pi}}{1+jn\omega}\right].
\end{aligned}$$

Solution (suite).

- En remplaçant $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} c_n = & \frac{1}{2\pi(1+jn)}[e^{-\pi}e^{-jn\pi} - e^{\pi}e^{jn\pi}] = \frac{1}{2\pi(1+jn)}[e^{-\pi}\cos(n\pi) - e^{\pi}\cos(n\pi)] \\ & = \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \cdot \frac{[e^{-\pi} - e^{\pi}]}{2}(1-jn) \\ & = \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}[-\sinh\pi](1-jn). \end{aligned}$$

- Finalement, la décomposition en série de Fourier est donnée par :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnt} = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1-jn)}{1+n^2}\, e^{jnt}.$$

Théorèmes de Parseval et de Dirichlet

· Soit $y(t)$ une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt < \infty.$$

Elle est donc développable en série de Fourier et

$$\frac{1}{T}\int_T y^2(t)dt = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 .$$

Interprétation physique.

· Le théorème de Parseval exprime le fait que l'énergie totale de la fonction est égale à la somme des énergies de ses harmoniques :

$$P(y) = (y_{moyenne})^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(h_n) \quad \text{(principe de conservation d'énergie),}$$

où

- $P(y) = \frac{1}{T}\int_T y^2(t)dt$ est la puissance moyenne sur une période de y,
- $P(h_n) = |c_n|^2 = \frac{1}{2}A_n^2 = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$ est la puissance moyenne sur une période de h_n (l'harmonique de rang n).

Théorème de Parseval

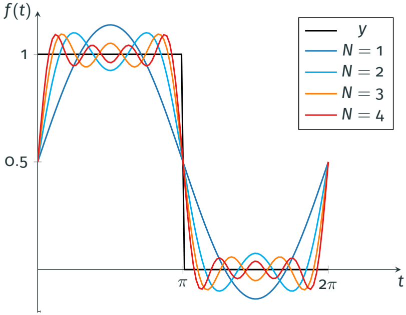
· La formulation précédente permet d'approximer y (au sens de sa puissance).

· Si $f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ est une approximation de y, la puissance de la fonction f_N est donnée par :

$$P(f_N) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2).$$

· Ainsi, f_N est une approximation de y avec un écart relatif donné par :

$$\frac{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)}{\frac{1}{T}\int_T y^2(t)\,dt}.$$

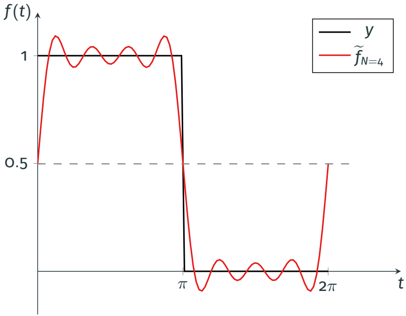


· Soit y une fonction T-périodique, c'est-à-dire $y(t+T) = y(t)$.

· Soit $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ la série de Fourier de y.

· Si y est continue et monotone par morceaux, alors on a :

$$f(t) = \begin{cases} y(t), \text{si } y \text{ est continue en } t, \\ \dfrac{y(t^+) + y(t^-)}{2}, \text{sinon.} \end{cases}$$



Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 2ème Année.
Ellipses, 2018.

B. Dequatre.
Mathématiques Appliquées à l'Électricité - Tome 2.
ERREUR PERIMES Nathan, 1995.

Geogebra outils et ressources.
`https://www.geogebra.org/?lang=fr`.
Accessed: 2023-07.