IUT GEII – Mathématiques (Ma3)

Séries numériques

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

2021 – 2022

Thèmes

Séries numériques

Séries numériques

· Après avoir étudié les suites numériques, on s'intéresse au calcul de la somme infinie des termes d'une suite

· Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut associer à (u_n) la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rang n définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

· La suite (S_n) est appelée série numérique de terme général u_n

Convergence d'une série numérique

· On dit q'une série (S_p) converge vers une limite ℓ si et seulement si :

$$\lim_{p\to\infty}(S_p) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \ell$$

· Si (S_p) n'a pas de limite, on dit que la série de terme général u_n est divergente, e.g.

$$\lim_{p\to\infty}(S_p) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \pm\infty$$

Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur
Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Exemple.

· Pour la suite (u_n) avec $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on a

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]$$

· En appliquant la limite, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right] = 2,$$

d'où on peut dire que la série est convergente

Convergence d'une série numérique

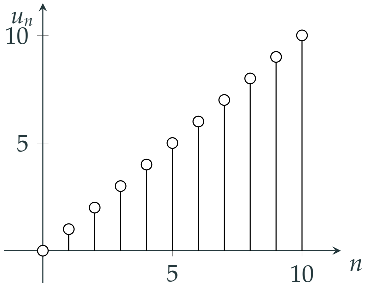
Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente, alors

$$\lim_{n\to\infty} (u_n) = 0$$

· Le critère précédente s'utilise en général dans l'autre sens :

$$\text{si } \lim_{n\to\infty} (u_n) \neq 0, \text{ alors } \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ est divergente}$$



Séries géométriques

· On appelle *série géométrique*, toute série de terme général $u_n = aq^n$

Propriété

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \text{ est } \begin{cases} \text{convergente, de somme } a\dfrac{1}{1-q} \text{ si } |q| < 1 \\ \text{divergente si } |q| \geq 1 \end{cases}$$

Démonstration

· De la partie de suites numériques, on sait :

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=0}^{p} aq^n = \lim_{p\to\infty} a\frac{1-q^{p+1}}{1-q} = \begin{cases} a\dfrac{1}{1-q}, & \text{si } |q| < 1 \\ \infty, & \text{si } |q| \geq 1 \end{cases}$$

Séries de Riemann

· On appelle *série de Riemann*, toute série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$

Propriété

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est } \begin{cases} \text{convergente si } \alpha > 1 \\ \text{divergente si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Exemples

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (série harmonique) diverge
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge

Série télescopique

· On appelle *série télescopique*, toute série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

Propriété

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ est convergente}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{p} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \left[1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right] + \cdots + \left[\cancel{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p+1}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{p+1}
\end{aligned}$$

· En appliquant la limite :

$$\lim_{p\to\infty} S_p = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{p\to\infty} \left[1 - \frac{1}{p+1}\right] = 1$$

Opérations sur les séries

- Soient les deux séries numériques $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ convergentes, alors

  - $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente
  - $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est convergente
  - On ne peut pas conclure sur $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n \cdot v_n)$

Séries à termes positifs

- Une série est dite à termes positifs si, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$
- Il existe des critères de convergence pour les séries à termes positifs

Théorème de comparaison

- Soient deux séries à termes positifs $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$
- Si $u_n \leq v_n$ (à partir d'un certain rang), alors on a :
  - Si $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente
  - Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est divergente alors $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est divergente

Critère d'équivalence

· Soient deux séries à termes positifs $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$

· Si $u_n \sim v_n$, i.e. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont la même nature

<u>*Exemples*</u>

- $\frac{n^2+4n}{n^3+5} \sim \frac{1}{n}$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n^3+5}$ diverge car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge
- $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Critère de d'Alembert

· Soit la série numérique à termes positif $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\ell$$

· Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ est } \begin{cases} \text{convergente si } \ell<1 \\ \text{divergente si } \ell>1 \\ \text{on ne peut pas conclure si } \ell=1 \end{cases}$$

Exemple

· Si $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$ alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1},\qquad \text{et}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1,$$

donc $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ converge

Critère de Cauchy

· Soit la série numérique à termes positif $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

· Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ est } \begin{cases} \text{convergente si } \ell < 1 \\ \text{divergente si } \ell > 1 \\ \text{on ne peut pas conclure si } \ell = 1 \end{cases}$$

Exemple

· Si $u_n = \dfrac{1}{(\sqrt{n})^n}$ alors

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\sqrt{u})^n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 < 1,$$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ converge

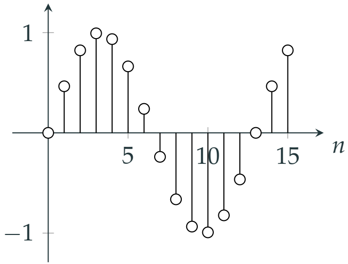
Critère intégral de Cauchy

· Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a, \infty[$

· La série $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge si et seulement si l'intégral $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ converge

Séries à termes de signe quelconque

- Ici on s'intéresse aux séries dont le terme général u_n oscille autour de zéro



Séries absolument convergente

- Une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est *absolument convergente* si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge
  - Si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est convergente alors elle est convergente
  - Si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est divergente, alors on ne peut pas rien dire de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

Exemple

· On considère une série de terme général $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$

· On sait que

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

donc par comparaison sur les séries à termes positifs (d'après Riemann), $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|$ converge

· Alors, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$ est absolument convergente et convergente

Remarque.

· Il existe des séries qui convergent mais qui ne sont pas absolument convergentes

· Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle *semi-convergente*

Séries à termes de signe quelconque

Séries alternées

· La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite *alternée* si ses termes sont alternativement positifs et négatifs

Théorème des séries alternées (critère de Leibniz)

· Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série alternée

· Si $\lim_{n\to\infty} (|u_n|) = 0$, et si $|u_n|$ est décroissante, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente