IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels IV (OML4)

Séries numériques

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

Séries numériques

- Après avoir étudié les suites numériques, nous nous intéressons maintenant au calcul de la somme infinie des termes d'une suite.
- Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut associer à (u_n) la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rang n, définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- La suite (S_n) est appelée *série numérique* de terme général u_n.

· On dit qu'une série (S_n) converge vers une limite ℓ si et seulement si :

$$\lim_{n \to +\infty} (S_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n = \ell.$$

· Si (S_n) n'a pas de limite, on dit que la série de terme général u_n est divergente, par exemple :

$$\lim_{n \to +\infty} (S_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n = \pm\infty.$$

Exemple. Pour la suite (u_n) où $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on a :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right].$$

· En calculant la limite, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 2\left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right] = 2,$$

d'où on peut conclure que la série est convergente.

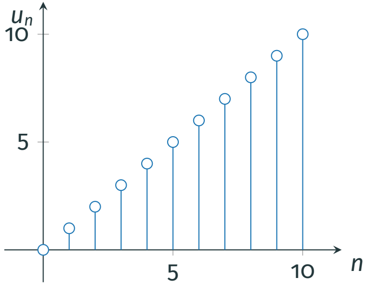
Condition nécessaire de convergence

Si la série $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 0.$$

· Ce critère s'utilise généralement dans l'autre sens (la condition n'est pas suffisante !) :

$$\text{si } \lim_{n\to+\infty} (u_n) \neq 0, \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ diverge (grossièrement)}$$



· On appelle *série géométrique* toute série de terme général $u_n = aq^n$.

Propriété

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n \text{ est } \begin{cases} \text{convergente, de somme } a\dfrac{1}{1-q} \text{ si } |q| < 1 \\ \text{divergente si } |q| \geq 1 \end{cases}$$

Démonstration. D'après les résultats obtenus sur les suites numériques, on sait que :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} aq^n = \lim_{p\to+\infty} a\frac{1-q^{p+1}}{1-q} = \begin{cases} a\dfrac{1}{1-q}, & \text{si } |q| < 1, \\ +\infty, & \text{si } |q| \geq 1. \end{cases}$$

· On appelle *série de Riemann* toute série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Propriété

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est } \begin{cases} \text{convergente si } \alpha > 1, \\ \text{divergente si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Exemples

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (série harmonique) diverge.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

Série télescopique

- On appelle *série télescopique* toute série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Propriété

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ est convergente.}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{p} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \left[1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right] + \cdots + \left[\cancel{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p+1}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{p+1}.
\end{aligned}$$

- En appliquant la limite, on obtient :

$$\lim_{p\to+\infty} S_p = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{p\to+\infty} \left[1 - \frac{1}{p+1}\right] = 1$$

Opérations sur les séries

· Soient deux séries numériques convergentes : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. On a les propriétés suivantes :

- La somme de deux séries convergentes est convergente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- Une constante multipliant une série convergente donne une série convergente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- En revanche, on ne peut pas conclure en général sur la convergence de la série produit $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n \cdot v_n)$.

Séries à termes positifs

· Une série est dite à termes positifs si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 0$.

· Il existe des critères de convergence spécifiques pour les séries à termes positifs.

Théorème de comparaison

· Soient deux séries à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

· Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors :

- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est également convergente.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est divergente.

Critère d'équivalence

· Soient deux séries à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

· Si $u_n \sim v_n$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1$, alors les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ sont de la même nature (c'est-à-dire elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

Exemples.

- $\frac{n^2+4n}{n^3+5} \sim \frac{1}{n}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n}{n^3+5}$ diverge, car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.
- $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge, car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Critère de d'Alembert

- Soit la série numérique à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\ell.$$

- Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ est } \begin{cases} \text{convergente si } \ell<1, \\ \text{divergente si } \ell>1, \\ \text{on ne peut pas conclure si } \ell=1. \end{cases}$$

Exemple.

- Si $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}=0<1,$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ converge.

Critère de Cauchy

- Soit la série numérique à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

- Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ est } \begin{cases} \text{convergente si } \ell < 1, \\ \text{divergente si } \ell > 1, \\ \text{on ne peut pas conclure si } \ell = 1. \end{cases}$$

Exemple.

- Si $u_n = \dfrac{1}{(\sqrt{n})^n}$, alors

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\sqrt{n})^n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 < 1,$$

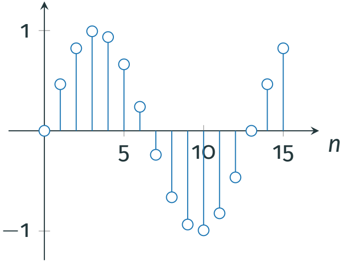
donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{n})^n}$ converge.

Critère intégral de Cauchy

- Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a; \infty[$.
- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ converge si et seulement si l'intégral $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

Séries à termes de signe quelconque

· Ici, on s'intéresse aux séries dont le terme général u_n oscille autour de zéro.



Séries absolument convergentes

· Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est *absolument convergente* si $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge.

- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est divergente, alors on ne peut rien dire de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemple. Considérons une série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$.

· On sait que

$$\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

donc par comparaison sur les séries à termes positifs (d'après Riemann), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|$ converge.

· Alors, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ est absolument convergente et convergente.

Remarque.

· Il existe des séries qui convergent mais qui ne sont pas absolument convergentes.

· Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle *semi-convergente*.

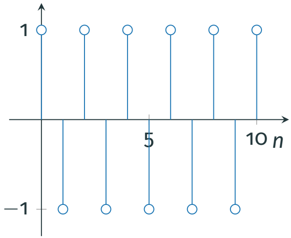
Séries alternées

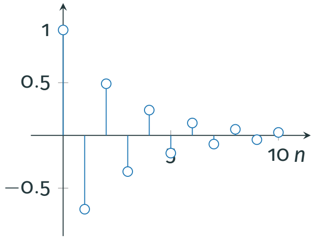
· La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite *alternée* si ses termes sont alternativement positifs et négatifs.

Théorème des séries alternées (critère de Leibniz)

· Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série alternée.

· Si $\lim_{n\to+\infty}(|u_n|) = 0$, et si $|u_n|$ est décroissante, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente.

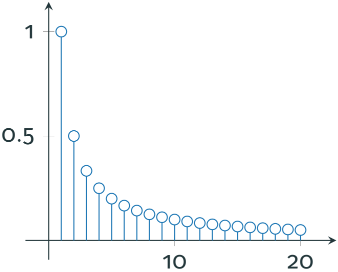




Exemple.

· Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série alternée de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

· La suite $(|u_n|) = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ est une suite décroissante qui tend vers 0.



· D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

· Cependant, la série des valeurs absolues $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).

· Par conséquent, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est semi-convergente.

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 1ère Année.
Ellipses, 2017.