IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels (OML2)

Fractions rationnelles

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

2021 – 2022

Thèmes

Fractions rationnelles

Fractions rationnelles

· Ici, on s'intéresse à découper en plusieurs fractions élémentaires, une fraction initial résultant du quotient de deux polynômes, e.g. :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+\alpha}{(x-\beta)(x+\delta)} = \frac{A}{(x-\beta)} + \frac{B}{(x+\delta)}$$

· Les fractions rationnelles vont permettre la résolution d'intégrales :

$$\int \frac{x+\alpha}{(x-\beta)(x+\delta)}dx = \int \frac{A}{(x-\beta)}dx + \int \frac{B}{(x+\delta)}dx$$

· Dans les domaines des sciences et des techniques, cette démarche représente un outil très utile permettant la caractérisation de système

- e.g., on pourra écrire la fonction de transfert donnée par la transformée de Laplace d'un tel système pour le caractériser

· On appelle *fraction rationnelle* tout fonction F telle que :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C} \to \mathbb{C}) \\ F = \dfrac{P}{Q} \end{cases},$$

où P et Q sont deux polynômes à coefficients réelles (où à coefficients complexes)

Exemple.

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+2)}$$

Fractions rationnelles

· On dit qu'une fraction rationnelles F est *irréductible* si P et Q n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$, e.g. :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{(x-2)(x+3j)}$$

· Soit F une fraction rationnelles irréductible et soit α un nombre complexe

- α est un *zéro* de F (ou une *racine*) si $F(\alpha) = 0$ (c'est-à-dire une racine de P)
- α est un *pôle* de F si α est une *racine* de Q
- α est un *pôle d'ordre k* de F si α est une *racine d'ordre k* de Q

Exemple.

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+\alpha}{(x-\beta)(x+\delta)^2}$$

Dans cet exemple :

- α est un zéro de F
- β est un pôle de F
- δ est un pôle d'ordre k de F

Théorème. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ un fraction rationnelles irréductible. Il existe deux polynômes uniques E et R tels que

$$\begin{cases} F = E + \dfrac{R}{Q} \\ \deg(R) < \deg(Q) \end{cases}$$

· On appelle E la *partie entière* de F

· Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $E = 0$. Sinon il faut effectuer la division euclidienne de P par Q et on a $\deg(E) = \deg(P) - \deg(Q)$

Fractions rationnelles

Exemple. Considérez la fraction rationnelle donnée par :

$$F(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$$

· On effectue tout d'abord la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + 3x^2 - x + 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - x^2 \qquad\qquad & x^2 + 2 \\ \hline
2x^2 - x + 1 & \\
-2x^2 \qquad - 2 & \\ \hline
-x - 1 &
\end{array}$$

· Finalement, on obtient :

$$F(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2+1)(x^2+2) + (-x-1)}{x^2+1} = x^2 + 2 - \frac{x+1}{x^2+1}$$

d'où on obtient $E = x^2 + 2$, $R = -(x+1)$ et $Q = x^2 + 1$

Décomposition en éléments simples

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

· Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelles irréductible, où le polynôme Q se factorise sur $\mathbb{C}$ sous la forme :

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sont les racines complexes de Q d'ordre $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

· Alors, il existe un unique polynôme E et d'uniques nombres complexes A_{ij} (avec $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq i \leq k_i$) tels que

$$\begin{aligned}
F(x) = E(x) + & & \text{(partie entière)}\\
& \frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + & \text{(partie principale par ligne)}\\
& \frac{A_{21}}{(x-\alpha_2)} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \underbrace{\frac{A_{2k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}}_{\text{élément simple 1ère espèce}} + & \\
& \ldots & \\
& \frac{A_{r1}}{(x-\alpha_r)} + \frac{A_{r2}}{(x-\alpha_r)^2} + \cdots + \frac{A_{rk_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}} &
\end{aligned}$$

Exemples.

$$F_1(x) = \frac{x-3}{(x+1)^2(x-j)(x+j)} = \frac{A_{11}}{(x+1)} + \frac{A_{12}}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{(x-j)} + \frac{A_3}{(x+j)}$$

$$F_2(x) = \frac{1}{(x-2)^3(x-5)^2} = \frac{A_{11}}{(x-2)} + \frac{A_{12}}{(x-2)^2} + \frac{A_{13}}{(x-2)^3} + \frac{A_{21}}{(x-5)} + \frac{A_{22}}{(x-5)^2}$$

· Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelles irréductible, où le polynôme Q se factorise sur $\mathbb{R}$ sous la forme :

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sont les racines réelles de Q d'ordre $k_1, k_2, \ldots, k_r$;
$(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}$ sont les polynômes de degré 2 à discriminant négatif (donc irréductible sur $\mathbb{R}$)

· Il existe un unique polynôme E et d'uniques nombres réels A_{ij}, B_{ij} et C_{ij} tels que

$$F(x) = E(x) + \qquad \text{(partie entière)}$$

$$\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \qquad \text{(partie principale par ligne)}$$

$$\ldots$$

$$\frac{A_{r1}}{(x-\alpha_r)} + \frac{A_{r2}}{(x-\alpha_r)^2} + \cdots + \underbrace{\frac{A_{rk_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}}}_{\text{élément simple 1ère espèce}} +$$

$$\frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \underbrace{\frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}}_{\text{élément simple 2ème espèce}} +$$

$$\ldots$$

$$\frac{B_{s1}x + C_{s1}}{(x^2+p_sx+q_s)} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \cdots + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}$$

Exemple. On considère la fraction rationnelle donnée par :

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}$$

Exemple. On considère la fraction rationnelle donnée par :

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}$$

· La décomposition en éléments simple sur $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$F(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_{21}}{(x-1)} + \frac{A_{22}}{(x-1)^2} + \frac{B_1x + C_1}{(x^2+1)}$$

· La décomposition en éléments simple sur $\mathbb{C}$ est de la forme :

$$F(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_{21}}{(x-1)} + \frac{A_{22}}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-j)} + \frac{A_4}{(x+j)}$$

Note. Puisque j et $\bar{j} = -j$ sont racines complexes de (x^2+1), les coefficients A_3 et A_4 seront conjugué l'un de l'autre

Méthodes de calcul des coefficients

Pôles simples

· Cette méthode permet de calculer le coefficient d'un élément simple correspondant à un pôle simple :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \cdots, \tag{1}$$

où α est un pôle simple

Principe :

1. On multiplie (1) par $(x-\alpha)$:

$$(x-\alpha)F(x) = \frac{P(x)}{Q_1(x)} = A + (x-\alpha)\cdot[\cdots]$$

2. On prend $x = \alpha$:

$$\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = A$$

· On résume ce principe en écrivant : $A = [(x-\alpha)F(x)]_{x=\alpha}$

Exemple. Décomposer en éléments simple la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}$$

Solution.

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_{21}}{(x-1)} + \frac{A_{22}}{(x-1)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+1)}$$

· Calcul de A_1 :

$$A_1 = [(x+2)F(x)]_{x=-2} = \left[\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]_{x=-2} = \frac{3}{5}$$

Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Pôles multiples “dernier” coefficient

· La méthode précédente permet également de calculer le coefficient d’un élément simple d’ordre maximal pour un pôle donné :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^n Q_1(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n} + \cdots, \qquad (2)$$

où α est un pôle d’ordre n

Principe :

1. On multiplie (2) par $(x-\alpha)^n$:

$$(x-\alpha)^n F(x) = \frac{P(x)}{Q_1(x)} = A_1(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + A_n + (x-\alpha)^n \cdot [\cdots]$$

2. On prend $x = \alpha$:

$$\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = A_n$$

· On résume ce principe en écrivant : $A_n = [(x-\alpha)^n F(x)]_{x=\alpha}$

Exemple (continuation).

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_{21}}{(x-1)} + \frac{A_{22}}{(x-1)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+1)}$$

· Calcul de A_{22} :

$$A_{22} = \left[(x-1)^2 F(x)\right]_{x=1} = \left[\frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x^2+1)}\right]_{x=1} = -\frac{9}{2}$$

Remarque. On ne peut calculer que le coefficient d'ordre 2 avec la méthode précédente

$$A_{21} \neq \left[(x-1)F(x)\right]_{x=1}$$

$$\left[(x-1)F(x)\right]_{x=1} = \left[\frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)(x^2+1)}\right]_{x=1} = \left[A_{21} + \frac{A_{22}}{(x-1)}\right]_{x=1}$$

Forme quadratique “dernier” coefficient

· La même méthode permet de calculer le coefficient d’un élément simple de 2-ème espèce d’ordre maximal pour un facteur quadratique donné :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^n Q_1(x)} = \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n} + \cdots, \quad (3)$$

Principe :

1. On multiplie (3) par $(x^2+px+q)^n$:

   $$(x^2+px+q)^n F(x) = (B_1x+C_1)(x^2+px+q)^{n-1} + \cdots + (B_nx+C_n) + (x^2+px+q)^n \cdot [\cdots],$$

2. On pose $x = \alpha$, où α est une racine de (x^2+px+q)

   $$\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = B_nj + C_n$$

3. Dans l’équation obtenue, on trouve B_n et C_n en identifiant parties réelles et imaginaires

Laboratoire de Mathématiques pour l’Ingénieur

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Exemple (continuation).

$$F(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_{21}}{(x-1)} + \frac{A_{22}}{(x-1)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+1)}$$

· Calcul de B_1 et C_1 : une racine de $x^2 + 1$ est donnée par $\alpha = j$

$$jB_1 + C_1 = [(x^2+1)F(x)]_{x=j} = \frac{j^3 - 21j - 7}{(j+2)(j-1)^2} = -j\frac{36}{10} + \frac{37}{10},$$

d'où on obtient $B_1 = \frac{18}{5}$ et $C_1 = \frac{37}{10}$

La limite en $+\infty$

· Cette méthode consiste à multiplier d'abord par x, et à en prendre la limite lorsque $x \to \infty$

Exemple (continuation).

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{x^3-21x-7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty}\left[x\frac{A_1}{(x+2)} + x\frac{A_{21}}{(x-1)} + x\frac{A_{22}}{(x-1)^2} + x\frac{B_1x+C_1}{(x^2+1)}\right],$$

d'où on obtient

$$0 = A_1 + A_{21} + B_1 \qquad \to \qquad A_{21} = -A_1 - B_1 = 3$$

Les valeurs particuliers

· La méthode consiste à prendre pour x de valeurs particulières et ainsi d'avoir un système d'équations qui permet déterminer les coefficients manquants

Exemple (continuation).

· Si on considère $x = 0$, on obtient :

$$F(0) = \left[\frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}\right]_{x=0} = \left[\frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_{21}}{(x-1)} + \frac{A_{22}}{(x-1)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+1)}\right]_{x=0},$$

d'où on obtient :

$$-\frac{7}{2} = \frac{A_1}{2} - A_{21} + A_{22} + C_1,$$

et finalement :

$$A_{21} = \frac{7}{2} + \frac{A_1}{2} + A_{22} + C_1 = \frac{7}{2} + \frac{3}{10} - \frac{9}{2} + \frac{37}{10} = 3$$

Autres méthodes (pour les autres coefficients)

La méthode de "secours" : mise au même dénominateur et identification

· Cette méthode consiste à mettre la décomposition en éléments simples au même dénominateur et à ensuite identifier les différents coefficients

Exemple.

$$F(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$$

· On multiplie par $(x+1)(x+2)$:

$$(x+1)(x+2)F(x) = 1 = A(x+2) + B(x+1) = (A+B)x + (2A+B),$$

d'où on obtient le système d'équations :

$$A + B = 0$$
$$2A + B = 1$$

Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur
Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE