Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

IUT GEII – Mathématiques (Ma3)

Transformée de Laplace

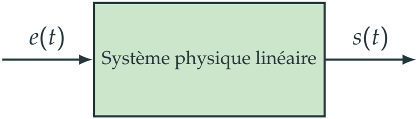
Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

2021 – 2022

Motivation

· La transformée de Laplace est un outil permettant le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel

Lien avec l'automatique :



· Si le système physique est donné par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, en utilisant la transformée de Laplace :

$$S(p) = H(p)E(p), \quad \text{avec } H \text{ une } \textit{fonction de transfert}$$

· La transformée de Laplace a pour objectif de simplifier l'étude de la réaction d'un système à l'application d'un signal d'entrée e

Thèmes

Fonctions remarquables

Fonction causale

· Une *fonction causale* (ou *signaux causaux*) est une fonction temporelle définie sur l'ensemble des réels, mais bornée à gauche :

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

· Les fonctions causales les plus utilisées dans le domaine technique sont les fonctions définies sur l'ensemble des réels positifs ou nuls

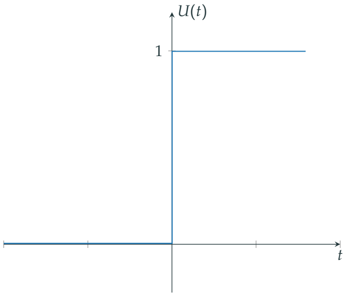
Conditions initiales

· Les conditions initiales d'une fonction causale $f(x) \in \mathbb{R}^+$ sont les valeurs déterminées de cette fonction et de ses dérivées successives à l'instant $t = 0$

Échelon unitaire

· La fonction *échelon unitaire*, communément appelée *échelon de Heaviside* $U(t)$ ainsi défini :

$$U(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



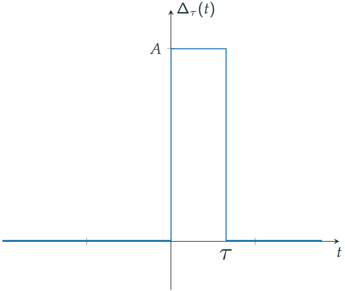
Remarque. Une fonction causale f peut être récrite en utilisant l'échelon unitaire :

$$f(t) = f(t)U(t)$$

Impulsion

· L'*impulsion* d'amplitude A et de durée τ est définie par :

$$\Delta_\tau(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Remarque. L'impulsion Δ_τ peut être récrite en utilisant l'échelon unitaire :

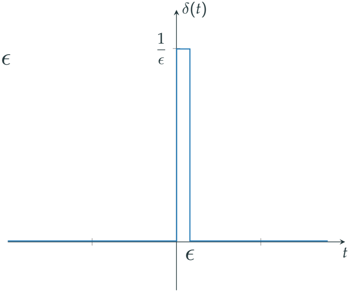
$$\Delta_\tau(t) = A[U(t) - U(t-\tau)]$$

Impulsion unitaire de Dirac

· L'*impulsion unitaire de Dirac* d'amplitude $A = \infty$, de durée nulle $\tau = 0$ et d'aire 1, est notée par :

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \Delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \delta(t)dt = 1$$



Remarque. L'impulsion de Dirac δ peut être récrite en utilisant l'échelon unitaire :

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[U(t) - U(t - \epsilon)]$$

· Une autre interprétation de l'impulsion Dirac est obtenue en définissant une *mesure de Dirac* dans un ensemble $\mathcal{A}$:

$$\delta(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases},$$

d'où on obtient que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

Exemple.

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-pt}dt = e^{-p\times 0} = 1$$

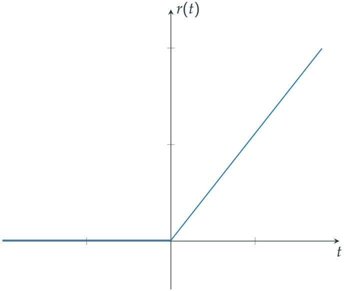
Remarque. Avec cette définition, on note que la fonction δ est la dérivée de l'échelon unitaire :

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}U(t)$$

Fonction rampe

· La fonction *rampe* de pente a est définie par :

$$r(t) = \begin{cases} at, & t \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Remarque. L'impulsion Δ_τ peut être récrite en utilisant l'échelon unitaire :

$$r(t) = atU(t)$$

Note. La rampe de pente 1 est une primitive de l'échelon unitaire :

$$r_{a=1}(t) = \int_0^t U(\tau)d\tau$$

Transformée de Laplace

Transformée de Laplace

· Soit une fonction causale $f(t)$

· On appelle *transformée de Laplace* de $f(t)$, la fonction de la variable complexe p (ou s pour les anglo-saxons) ainsi définie :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

· Cette transformation permet d'associer à toute fonction temporelle sa transformée de Laplace

Transformée de Laplace

Exercices. Calculer la transformée de Laplace de :

1. $f(t) = \delta(t)$
2. $f(t) = e^{-at}$

Exercices. Calculer la transformée de Laplace de :

1. $f(t) = \delta(t)$
2. $f(t) = e^{-at}$

Solution.

1.

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1$$

2.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{-at}) &= \int_0^{\infty} e^{-(a+p)t} dt \\ &= \left[- \frac{e^{-(a+p)t}}{a+p} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{p+a}\end{aligned}$$

Transformées usuelles

$f(t)$	$F(p)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Échelon de Heaviside $U(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe $r(t)$	$\frac{1}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{\omega^2+p^2}$

Exercices. Démontrer les relations précédentes

[lien]

Propriétés

Propriétés

Linéarité

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t))$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \int_0^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-pt} dt \\
&= \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt \\
&= \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t))
\end{aligned}$$

Propriétés

Dilatation

· Il s'agit de dilater l'échelle temporelle, autrement dit d'étudier un autre signal et sa transformée de Laplace à partir de la transformée de Laplace original

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

Démonstration.

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \int_0^\infty f(\lambda t) e^{-pt} dt$$

· En faisant le changement de variable $\alpha = \lambda t$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(\alpha)) &= \int_0^\infty f(\alpha) e^{-p\frac{\alpha}{\lambda}} \frac{d\alpha}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty f(\alpha) e^{-\frac{p}{\lambda}\alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Théorème du retard

· Un signal peut être retardé d'un temps τ. Il s'agit alors de déterminer sa transformée de Laplace par la relation :

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-p\tau}F(p)$$

Démonstration.

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt$$

· En faisant le changement de variable $\alpha = t - \tau$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(\alpha)) &= \int_{-\tau}^{\infty} f(\alpha)e^{-p(\alpha+\tau)}d\alpha \\
&= e^{-p\tau}\int_0^{\infty} f(\alpha)e^{-p\alpha}d\alpha \\
&= e^{-p\tau}F(p)
\end{aligned}$$

Transformée des dérivées successives

· Soit f une fonction causale définie sur $\mathbb{R}^+$

· Soient $f(0^+), f'(0^+), \ldots, f^{(n)}(0^+)$ les conditions initiales

· On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t)) &= pF(p) - f(0^+) \\
\mathcal{L}(f''(t)) &= p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) \\
&\vdots \\
\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)
\end{aligned}$$

· Si les conditions initiales sont nulles, chaque dérivation correspond à une multiplication par p dans le domaine de Laplace

Démonstration.

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}dt$$

· On effectuant une intégration par partie :

$$\begin{aligned} u &= e^{-pt} & dv &= f'(t)dt, \\ du &= -pe^{-pt}dt & v &= f(t), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t)) &= [uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} vdu \\ &= [e^{-pt}f(t)]_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \\ &= -f(0^+) + pF(p) \end{aligned}$$

Transformée d'une primitive

· A l'inverse de la dérivation, l'intégration correspond à une division par p dans le domaine de Laplace :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(p)}{p}$$

Démonstration

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] e^{-pt}dt$$

· On effectuant une intégration par partie :

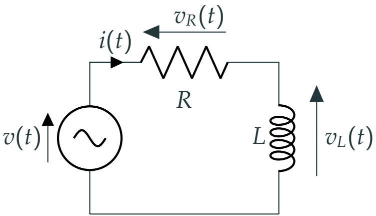
$$\begin{array}{ll} u = \int_0^t f(\tau)d\tau & dv = e^{-pt}dt \\ du = f(t)dt & v = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{array}$$

d'où on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t)) &= [uv]_0^\infty - \int_0^\infty v du \\ &= -\frac{1}{p}\cancelto{0}{\left[e^{-pt}\int_0^t f(\tau)d\tau\right]_0^\infty} + \frac{1}{p}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \frac{1}{p}F(p) \end{aligned}$$

Propriétés

Exemple.



· Grâce au principe de la conservation de l'énergie, on sait :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) + v_C(0) \\ &= Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_C(0) \end{aligned}$$

· En supposant $v_C(0) = 0$, la transformée de Laplace est donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v(t)) &= \mathcal{L}\left(Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau\right) \\ &= R\mathcal{L}(i(t)) + L\mathcal{L}(i'(t)) + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left(\int_0^t i(\tau)d\tau\right) \end{aligned}$$

Exemple (continuation).

· On dénote $V(p) = \mathcal{L}(v(t))(p)$ et $I(p) = \mathcal{L}(i(t))(p)$

$$\begin{aligned} V(p) &= RI(p) + L(pI(p) - I(0^+)) + \frac{1}{C}\frac{I(p)}{p} \\ &= \left[R + Lp + \frac{1}{Cp}\right] I(p) - LI(0^+) \\ &= \left[\frac{LCp^2 + RCp + 1}{Cp}\right] I(p) - LI(0^+) \end{aligned}$$

· D'où on obtient :

$$I(p) = \underbrace{\left[\frac{pC}{LCp^2 + RCp + 1}\right]}_{H(p)} [V(p) + LI(0^+)],$$

avec $H(p) = \dfrac{pC}{LCp^2 + RCp + 1}$ la fonction de transfert du circuit RLC série

Multiplication par une exponentielle

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(p+a)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(a+p)t}dt \\ &= F(a+p)\end{aligned}$$

Propriétés

Multiplication par t

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(p)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} F'(p) &= \frac{d}{dp}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)\left[\frac{\partial}{\partial p}e^{-pt}\right]dt \\ &= -\int_0^\infty [tf(t)]e^{-pt}dt \\ &= -\mathcal{L}(tf(t)) \end{aligned}$$

Transformées de Laplace inverse

· Soit une fonction $f(t)$ de transformée de Laplace $F(p)$. Alors, $f(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $f(p)$:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$$

Linéarité

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(p) + \beta G(p)) &= \mathcal{L}^{-1}(\alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t))) \\
&= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) \\
&= \alpha f(t) + \beta g(t)
\end{aligned}$$

D'autres propriétés

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(\frac{p}{\lambda}\right)\right) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\lambda\mathcal{L}(f(\lambda t))\Big) = \lambda f(\lambda t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p+a)) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(e^{-at}f(t))) = e^{-at}f(t)$$

Laplace inverse d'un produit

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)G(p)) = f(t) \otimes g(t),$$

où

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

est le produit de convolution de deux fonctions