IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels III (OML3)

Suites numériques

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

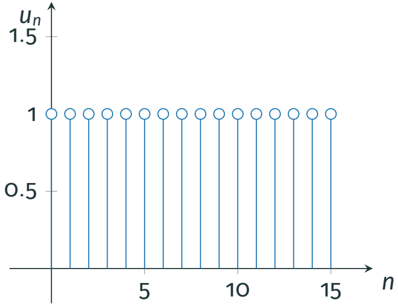
Thèmes

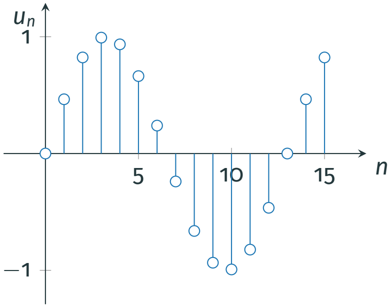
1. Suites numériques
    - Mode de définition d'une suite
    - Suites de références
2. Convergence d'une suite
    - Suites de références
    - Définitions et vocabulaires
    - Étude de la monotonie
3. Limite d'une suite

Suites numériques

Voici une version améliorée de la phrase :

· Les suites jouent un rôle crucial dans de nombreux aspects de la discrétisation rencontrés en génie électrique, par exemple dans le traitement des signaux discrets.





- Une *suite numérique* est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$u_n = \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \\ n \mapsto u_n. \end{cases}$$

- On utilise plus souvent :
    - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour désigner la suite dans son ensemble,
    - u_n pour désigner l'image de l'entier n (le n-ème terme de la suite).

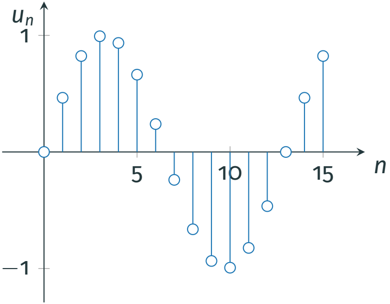
Mode de définition d'une suite

· Les suites numériques sont généralement définies de deux manières : suite explicite ou suite implicite.

Définition explicite

· Si u_n est une suite définie directement en fonction de n, on parle de suite explicite :

$$u_n = f(n).$$



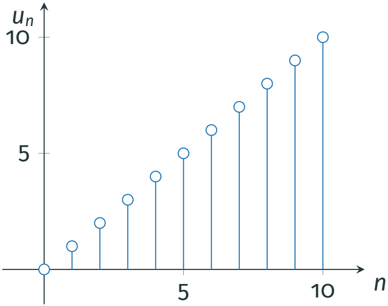
Définition implicite

· Si u_n est une suite définie en fonction des $k \in \mathbb{N}$ termes précédents, on parle de suite définie par récurrence (ou implicite) d'ordre k :

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-k}).$$

Exemple.

$$u_n = u_{n-1} + 1, \quad \text{avec} \quad u_0 = 0.$$

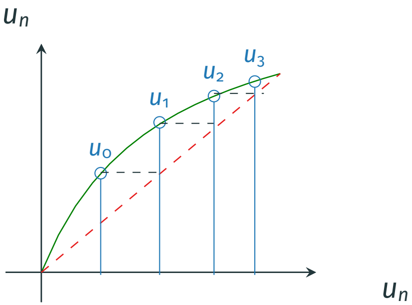


Mode de définition d'une suite

- Cas particulier $u_n = f(u_{n-1})$:
  - Représentation graphique dans un repère (u_n, u_{n-1}) ;
  - Tracer la droite d'équation $y = x$;
  - Tracer la fonction $y = f(x)$.

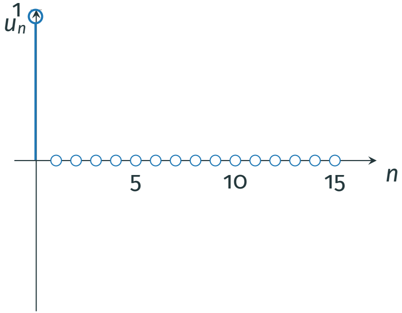
Exemple

$$u_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \dfrac{4u_{n-1}}{u_{n-1}+2}, & n \geq 1. \end{cases}$$



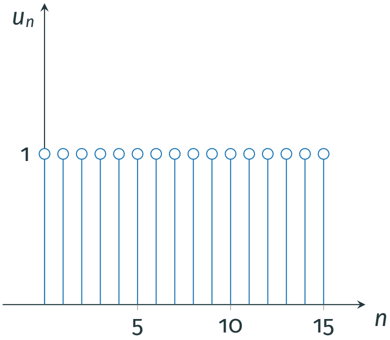
Suite de Dirac

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$



Suite “échelon-unité”

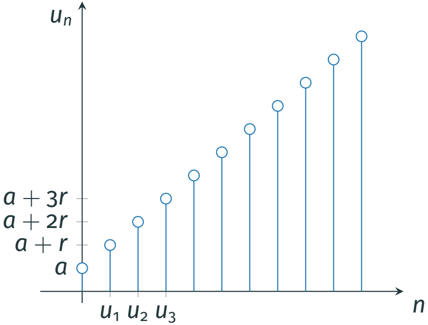
$$u_n = 1, \quad n \geq 0.$$



Suite arithmétique

· La suite arithmétique (u_n) de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $a \neq 0$ est définie par :

$$u_n = \begin{cases} a, & \text{si } n = 0, \\ u_{n-1} + r, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$



Suites de références

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $a \neq 0$, alors on peut écrire la définition implicite de la suite (u_n) :

$$u_n = \begin{cases} a, & \text{si } n = 0, \\ u_0 + nr, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

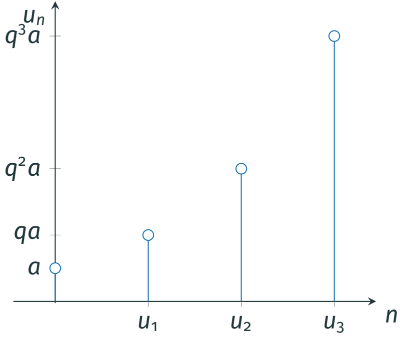
- La somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) est :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n} u_p &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n \\ &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \ldots \\ &\quad + (u_n - 2r) + (u_n - r) + u_n \quad (n+1 \text{ termes}) \\ &= (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \ldots \quad ((n+1)/2 \text{ termes}) \\ &= \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Suite géométrique

· La suite géométrique (u_n) de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme $a \neq 0$ est définie par :

$$u_n = \begin{cases} a, & \text{si } n = 0, \\ qu_{n-1}, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$



- Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme $a \neq 0$, alors on peut écrire la définition implicite de la suite (u_n) :

$$u_n = \begin{cases} a, & \text{si } n = 0, \\ u_0 q^n, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

- La somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) est :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n} u_p &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n \\ &= u_0 + qu_0 + q^2 u_0 + \ldots + q^{n-1} u_0 + q^n u_0 \\ &= [1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n] u_0 = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} u_0. \end{aligned}$$

Exercice. Démontrer que $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Piste. Définir $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n$, et développer $S - qS$.

Suite récurrente linéaires d'ordre 1

- On appelle *suite récurrente linéaire d'ordre 1* (ou *suite arithmético-géométrique*) de raisons $q \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, et de premier terme $a \neq 0$, toute suite (u_n) telle que :

$$u_n = \begin{cases} a, & \text{si } n = 0, \\ qu_{n-1} + r, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

- Cas particuliers :

  - si $q = 1$ et $r \in \mathbb{R}$, on obtient la suite arithmétique.
  - si $r = 0$ et $q \in \mathbb{R} - \{1\}$, on obtient la suite géométrique.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On appelle *suite récurrente linéaires d'ordre 2* toute suite (u_n) telle que :

$$u_n = \begin{cases} a, & \text{si } n = 0, \\ b, & \text{si } n = 1, \\ \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}, & \text{si } n \geq 2, \end{cases}$$

avec $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

· Toute suite récurrente linéaire d'ordre 2 peut s'écrire comme une combinaison linéaire de deux suites.

Convergence d’une suite

Convergence d'une suite

- Une suite (u_n) est *convergente* de limite ℓ, si

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \ell.$$

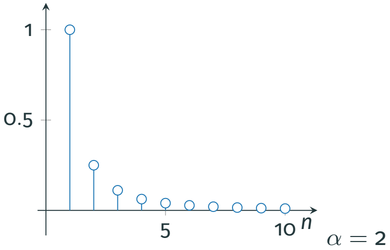
Théorème

Si une suite (u_n) admet une limite alors cette limite est unique.

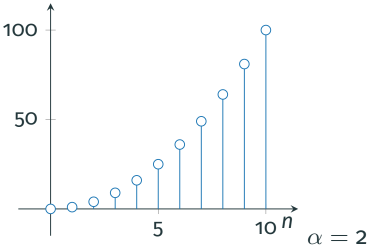
- Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est *divergente*.
- Il existe deux types de divergence :
  - Soit (u_n) a une limite infinie.
  - Soit (u_n) n'a pas de limite du tout.

Suites de références

- Pour tout réel α tel que $\alpha > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

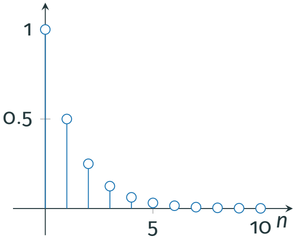


- Pour tout réel α tel que $\alpha > 0$, la suite (n^α) diverge vers $+\infty$.

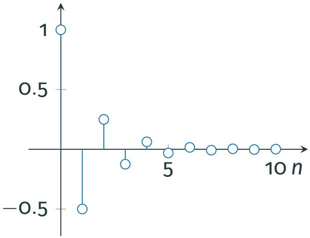


Suites de références

- Pour tout réel q tel que $|q| < 1$, la suite (q^n) converge vers 0.

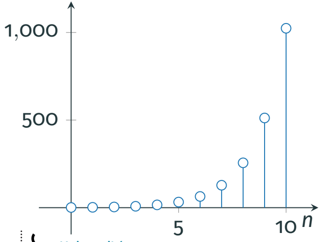


$q = \frac{1}{2}$

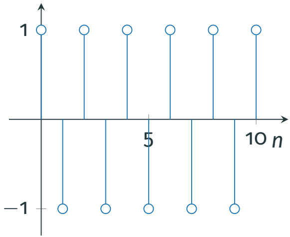


$q = -\frac{1}{2}$

- Pour tout réel q tel que $|q| \geq 1$, la suite (q^n) diverge.

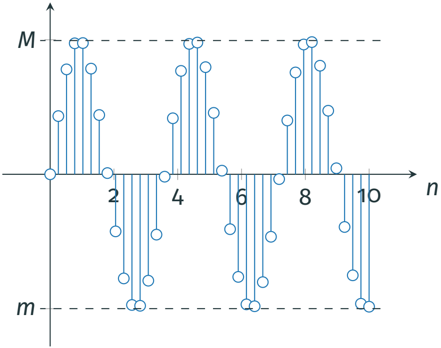


$q = 2$

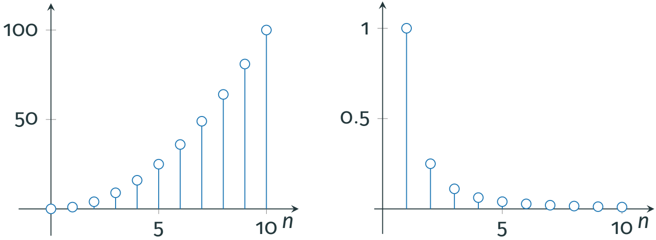


$q = -1$

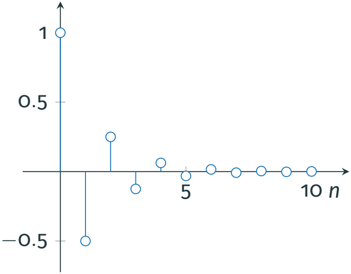
- Une suite (u_n) est *majorée* si, pour tout n, on a $u_n \leq M$.
- Une suite (u_n) est *minorée* si, pour tout n, on a $u_n \geq m$.
- Une suite (u_n) est *bornée* si, pour tout n, on a $m \leq u_n \leq M$.



- Une suite (u_n) est *croissante* si, pour tout n, on a $u_n \leq u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est *décroissante* si, pour tout n, on a $u_n \geq u_{n+1}$.
- Une suite croissante ou décroissante est dite *monotone*.

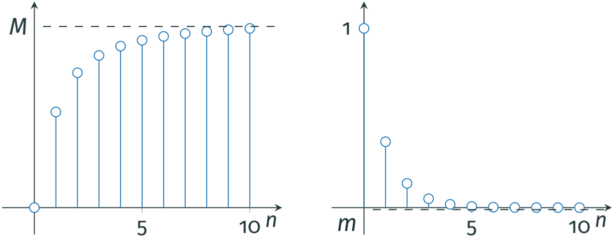


- (u_n) est une suite *alternée* si, pour tout n, on a $u_n u_{n+1} \leq 0$.



Théorème sur la convergence

- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*
- *Toute suite monotone et bornée est convergente.*



Suite définie de façon explicite $u_n = f(n)$

- Si f est *croissante*, alors (u_n) est croissante.
- Si f est *décroissante*, alors (u_n) est décroissante.

Suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

- Si f est *croissante* et $u_0 \leq u_1$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est *croissante* et $u_0 \geq u_1$, alors (u_n) est décroissante.
- Si f est *décroissante*, alors on ne peut pas conclure.

Exercice. Étudier la monotonie des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n^2 + 2}$
2. $u_n = \begin{cases} 8, & n = 0 \\ \dfrac{1}{2}u_{n-1} + 5, & n \geq 1 \end{cases}$

Exercice. Étudier la monotonie des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n^2 + 2}$

2. $u_n = \begin{cases} 8, & n = 0 \\ \dfrac{1}{2} u_{n-1} + 5, & n \geq 1 \end{cases}$

Solution.

1.
$$f'(n) = \frac{4n(n^2+2) - 2n(2n^2-3)}{(n^2+2)^2} = \frac{14n}{(n^2+2)^2} > 0, \qquad \forall n \geq 1.$$
Lorsque f est croissante, alors (u_n) est croissante.

2.
$$f'(u_n) = \frac{1}{2} > 0,$$
alors $f(u_n)$ est croissante.
· Lorsque $u_1 = \dfrac{8}{2} + 5 = 9 > u_0$, alors (u_n) est croissante.

Étude de la monotonie selon le signe de $u_{n+1} - u_n$

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est décroissante.

Étude de la monotonie selon le rapport de u_{n+1}/u_n

- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est croissante.
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors (u_n) est décroissante.

Limite d’une suite

Opérations sur les limites

· Soient deux suites (u_n) et (v_n) convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ', alors :

- $(u_n + v_n)$ est convergente, de limite $\ell + \ell'$.
- (λu_n), avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est convergente, de limite $\lambda \ell$.
- $(u_n \cdot v_n)$ est convergente, de limite $\ell \cdot \ell'$.
- (u_n / v_n) est convergente, de limite ℓ / ℓ', sous réserve que $\ell' \neq 0$.

Limite d'une suite

- A partir de la définition explicite, si $u_n = f(n)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \ell.$$

- À partir de la définition implicite (d'ordre 1), si $u_{n+1} = f(u_n)$:

Propriété

Si (u_n) converge vers une limite ℓ, et f est continue en ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Théorème de gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell, \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

S’il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq w_n \leq v_n$, alors, (w_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

Suites adjacentes

- Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si :
  - L'une est croissante et l'autre est décroissante ;
  - et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème

Deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes sont convergentes et ont la même limite ℓ.

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 2ème Année.
Ellipses, 2018.