IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels (OML1)

Mise à niveau

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

2021 – 2022

Thèmes

1. Exercices

Exercices

Exercice 1. Réduire les fractions :

$$C = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, \quad D = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x} + 2}$$

Exercice 1. Réduire les fractions :

$$C = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, \quad D = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x} + 2}$$

Solution.

$$C = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2}{\frac{y+x}{xy}} = \frac{2xy}{y+x}$$

$$D = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x} + 2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1+2x}{x}} = \frac{2x}{3(1+2x)}$$

Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Exercice 2. Résoudre l'équation :

$$\frac{3x}{x+1} = 2$$

Exercice 2. Résoudre l'équation :

$$\frac{3x}{x+1} = 2$$

Solution.

· On note en premier que $x \neq -1$, et ensuite on développe l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{3x}{\cancel{x+1}} \cdot \cancel{(x+1)} &= 2 \cdot (x+1) \\ 3x &= 2x + 2 \\ 3x - 2x &= \cancel{2x} + 2 \cancel{- 2x} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Exercice 3.

a. Résoudre l'équation $(5x-1)(1+2x)=0$

b. Résoudre l'inéquation $(5x-1)(1+2x)<0$

Exercice 3.

a. Résoudre l'équation $(5x-1)(1+2x)=0$

b. Résoudre l'inéquation $(5x-1)(1+2x)<0$

Solution.

a.

$$(5x-1)(1+2x)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 5x-1=0 \\ 1+2x=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{5} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

b. Si $(5x-1)(1+2x)<0$, les monômes doivent avoir des signes contraires :

- Si $(5x-1)>0$, alors $(1+2x)<0$
- Si $(5x-1)<0$, alors $(1+2x)>0$

Solution (continuation).

· On doit trouver en premier quand $(5x-1)>0$, $(5x-1)<0$, $(1+2x)>0$ et $(1+2x)<0$

- $5x-1>0$:

$$5x\cancel{-1}\cancel{+1}>0+1$$
$$\cancel{5}x\cdot\frac{1}{\cancel{5}}>1\cdot\frac{1}{5}$$
$$x>\frac{1}{5}$$

- $5x-1<0$: c'est donné par le complément de $(5x-1)>0$, d'où $x<\frac{1}{5}$
- $1+2x>0$:

$$\cancel{1}+2x\cancel{-1}>0-1$$
$$\cancel{2}x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}>-1\cdot\frac{1}{2}$$
$$x>-\frac{1}{2}$$

- $1+2x<0$: c'est donné par le complément de $(1+2x)>0$, d'où $x<-\frac{1}{2}$

Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Solution (continuation).

· Finalement :

	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{5}$		
-	-	-	0	+	$(5x-1)$
-	0	+	+	+	$(1+2x)$
+	0	-	0	+	$(5x-1)(1+2x)$

d'où on obtient :

$$(5x-1)(1+2x) < 0 \qquad \rightarrow \qquad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{5}$$

Exercice 4. Résoudre $\dfrac{x+4}{x-2} \geq 0$

Exercice 4. Résoudre $\frac{x+4}{x-2} \geq 0$

Solution.

· On commence en premier par l'équation

$$\frac{x+4}{\cancel{x-2}} \cdot \cancel{(x-2)} = 0 \cdot (x-2) \qquad (x \neq 2)$$
$$x = -4$$

· Ensuite on passe à l'inéquation. Si $\frac{x+4}{x-2} > 0$, les monômes doivent avoir les mêmes signes :

- Si $(x+4) > 0$, alors $(x-2) > 0$
- Si $(x+4) < 0$, alors $(x-2) < 0$

Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Solution (continuation).

	-4		2		
-	0	+	+	+	$(x+4)$
-	-	-	0	+	$(x-2)$
+	0	-		+	$\dfrac{x+4}{x-2}$

d'où on obtient :

$$\frac{x+4}{x-2} \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} x \leq 4 \\ x > 2 \end{cases}$$

Exercice 5. Simplifier l'expression :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3} + \frac{x}{2x+7}$$

Exercice 5. Simplifier l'expression :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3} + \frac{x}{2x+7}$$

Solution.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x-1}{x+3} + \frac{x}{2x+7} \\ &= \frac{(2x-1)(2x+7) + x(x+3)}{(x+3)(2x+7)} \\ &= \frac{4x^2 + 14x - 2x - 7 + x^2 + 3x}{2x^2 + 7x + 6x + 21} \\ &= \frac{5x^2 + 15x - 7}{2x^2 + 13x + 21} \end{aligned}$$

Exercice 6. Soient $f(x) = x^2 + 4x$ et $g(x) = 2x + 3$. Calculer $f(g(x))$

Exercice 6. Soient $f(x) = x^2 + 4x$ et $g(x) = 2x + 3$. Calculer $f(g(x))$

Solution.

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= g^2(x) + 4g(x) \\
&= (2x+3)^2 + 4(2x+3) \\
&= 4x^2 + 12x + 9 + 8x + 12 \\
&= 4x^2 + 20x + 21 \\
&= (2x)^2 + 10(2x) + 21 \\
&= (2x+7)(2x+3)
\end{aligned}
$$

Exercice 7. Simplifier les structures :

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{11}\left(\frac{3}{5}\right)^{12}\left(\frac{5}{2}\right)^{10}$$

$$B = -2^2$$

$$C = (-2)^2$$

$$D = -2^{-2}$$

$$E = (\sqrt{2} - \sqrt{8})^2$$

$$F = \frac{3 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

Solution.

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{2}{3}\right)^{11}\left(\frac{3}{5}\right)^{12}\left(\frac{5}{2}\right)^{10} \\
&= \frac{2^{11}}{3^{11}} \cdot \frac{3^{12}}{5^{12}} \cdot \frac{5^{10}}{2^{10}} \\
&= \frac{2^{11}}{2^{10}} \cdot \frac{3^{12}}{3^{11}} \cdot \frac{5^{10}}{5^{12}} \\
&= 2^{11-10} \cdot 3^{12-11} \cdot 5^{10-12} \\
&= 2 \cdot 3 \cdot 5^{-2} \\
&= \frac{6}{25}
\end{aligned}
$$

Solution (continuation).

$$B = -2^2 = -4$$

$$C = (-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$

$$D = -2^{-2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

Solution (continuation).

$$
\begin{aligned}
E &= (\sqrt{2} - \sqrt{8})^2 \\
&= (\sqrt{2} - \sqrt{2 \cdot 4})^2 \\
&= (\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 \\
&= (-1\sqrt{2})^2 \\
&= (-1)^2(\sqrt{2})^2 \; = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{6+5\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{2^2-(\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{8+5\sqrt{2}}{2} \\
&= 4 + \frac{5}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Exercice 8. Déterminer les deux nombres dont la somme fait 1 et le produit -6

Exercice 8. Déterminer les deux nombres dont la somme fait 1 et le produit -6

Solution.

· On peut écrire le système d'équations :

$$A + B = 1$$
$$A \times B = -6$$

· De la somme, on obtient $A = 1 - B$, alors le produit est donné par $(1 - B) \times B = B - B^2 = -6$, d'où on obtient :

$$B^2 - B - 6 = (B - 3)(B + 2) = 0$$

· Finalement, on obtient deux solutions possibles :

$$\begin{cases} B = 3, \text{ donc } A = -2 \\ B = -2, \text{ donc } A = 3 \end{cases}$$