IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels IV (OML4)

Introduction aux séries entières

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

1. Séries entières

   Séries entières réelles

   Domaine de convergence

   Propriétés des séries entières

2. Développement en série entière

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Séries entières

- Les séries entières introduisent une variable dans les séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

- Pour une valeur donnée de x, une série entière devient une série numérique.
- En un certain sens, les séries numériques peuvent être vues comme un cas particulier des séries entières (avec $x = 1$ par exemple).

Définition

· On appelle série entière, toute série dont le terme général est de la forme

$$u_n(x) = a_n x^n,$$

où (a_n) est une suite numérique et la variable $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$).

· On note :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n) \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \end{aligned}$$

· On dit que S est une série entière réelle si la variable $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{C}$, alors S est une série entière complexe.

Remarque. Les séries entières généralisent les polynômes.

Exemple. Si $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est une série géométrique.

· $S(x)$ est convergente si $|x| < 1$ et divergente si $|x| \geq 1$.

· Si $|x| < 1$, alors

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Domaine de convergence

Lemme de convergence d'Abel

Si une série entière converge en x_0, alors elle converge pour tout x vérifiant $|x| < |x_0|$.

· À toute série entière de variable réelle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

on peut associer un unique nombre $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que :

- La série est absolument convergente pour tout x vérifiant $|x| < R$.
- La série est divergente pour tout x vérifiant $|x| > R$.

· Le nombre R est appelé *rayon de convergence* de la série entière.

Domaine de convergence

· Une série entière dont la convergence est garantie pour tout x a un rayon de convergence infini : $R = +\infty$.

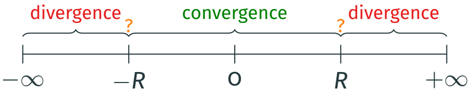
· Si elle diverge pour toute valeur de x, son rayon de convergence est nul : $R = 0$.

· Dans tous les autres cas, il existe un réel positif R tel que :

- Si $|x| < R$, la série converge.
- Si $|x| > R$, la série diverge.

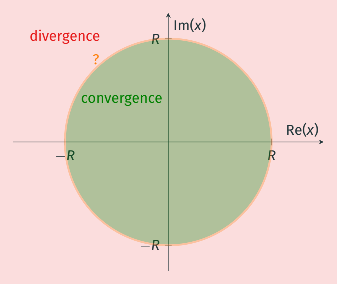
Remarque. Aux bornes, la série entière peut être convergente ou divergente. Il est alors nécessaire d'en faire l'étude pour $|x| = R$.

Interprétation graphique du rayon de convergence sur $\mathbb{R}$



· On appelle *intervalle de convergence* à l'intervalle ouvert $]-R;R[$.

Interprétation graphique du rayon de convergence dans $\mathbb{C}$



· On appelle *disque de convergence* au disque de centre O et de rayon R.

Domaine de convergence

Critère de d'Alembert

· Considérons la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Si

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell,$$

alors le rayon de convergence est donné par : $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Remarque : Si $\ell = 0$, alors $R = +\infty$.

Critère de Cauchy

· Considérons la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Si

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell,$$

alors le rayon de convergence est donné par : $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Exercice. Déterminer le rayon de convergence R de la série suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{(n+1)3^n} \right)$$

Étudier la série aux bornes de son rayon de convergence.

Exercice. Déterminer le rayon de convergence R de la série suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{(n+1)3^n} \right)$$

Étudier la série aux bornes de son rayon de convergence.

Solution.

- Soit $a_n = \dfrac{1}{(n+1)3^n}$.
- En utilisant le critère de d'Alembert, on a

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{(n+1+1)3^{n+1}} \cdot (n+1)3^n = \frac{n+1}{3(n+2)},$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \dfrac{1}{3} = \ell$. Alors, $R = \dfrac{1}{\ell} = 3$.

Solution (suite)

· Pour $x = R = 3$, on obtient :

$$S(3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}.$$

· D'après le critère d'équivalence :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n},$$

et comme la série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente (selon Riemann), on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge également.

Solution (suite)

· Pour $x = -R = -3$, on obtient

$$S(-3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

· D'après le critère de Leibniz pour les séries alternées, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Lorsque $\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$ est une suite décroissante, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

· Lorsque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ ne converge pas, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ ne converge pas absolument.

· On peut donc conclure que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^n}$ converge pour $x \in \ [-3; 3[$.

Exercice. Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$

Propriétés des séries entières

· Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$.

Dérivation.

· Si $f(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]-R; R[$, alors la série entière

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

a le même rayon de converge R.

Intégration.

· Si $f(x)$ possède une primitive s'annulant en 0 obtenue comme somme des primitives, alors la série entière

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

a le même rayon de converge R.

Exemple. Considérons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

· On sait que f est une série géométrique de rayon de convergence $R = 1$, et que la somme de la série est donnée par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

· Alors, la dérivée de $f(x)$ donnée par :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n,$$

a également pour rayon de convergence $R = 1$ avec la somme :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{(1-x)^2},$$

d'où on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Exemple (suite)

· La primitive de f est

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

a également pour rayon de convergence $R = 1$ avec la somme :

$$F(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x),$$

d'où on déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Exercice. Calculer la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)x^n$.

Exercice. Calculer la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)x^n$.

Solution.

· On peut réécrire la série entière sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} + 2\frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3-2x}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

Développement en série entière

· On dit qu'une fonction f est *développable en série entière* s'il existe une série entière de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

de rayon de convergence $R > 0$, telle que cette série converge pour tout $|x| < R$.

· Si cette série entière existe, alors elle est unique et les termes a_n sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0), \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

où $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ désigne la dérivée d'ordre n de f.

Remarque. On observe que $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$, ce qui montre que les termes de la série sont reliés aux dérivées successives de la fonction en 0.

Exemple. Considérons $f(x) = e^x$.

· On sait que $f^{(n)}(x) = e^x$. En supposant que f est développable, pour tout $n \geq 0$, on a

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}.$$

· La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon $R = +\infty$ (grâce au critère de d'Alembert). Alors, on peut en réduire :

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{pour tout } x.$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Développement en série entière

$f(x)$	Série entière	Premiers termes	Rayon R
e^x	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$R = +\infty$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$R = 1$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$R = +\infty$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$R = +\infty$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$	$R = 1$

· On peut obtenir d'autres exemples par changement de variable.

Exemple. · Pour $f(x) = \frac{x}{1+x}$, on a :

$$\frac{x}{1+x} = x\frac{1}{1-(-x)} = x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}.$$

Exercice. Développer en série entière la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.

· Les premiers termes, voire même le premier terme, du développement en série entière permettent de fournir un équivalent de la fonction en 0.

- $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ permet de dire que $e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ permet de dire que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, et d'en déduire par exemple que

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n},$$
$$\ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

- Considérons l'équation différentielle donnée par :

$$y'(x) - y(x) = x, \quad \text{avec } y(0) = 0.$$

- On peut supposer que la solution est une série entière de la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

avec $a_0 = 0$ (condition initiale).

- La dérivée de y est donnée par :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

- En substituant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$y'(x) - y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n.$$

- D'après l'énoncé on a $y' - y = x$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1} - a_n]x^n = x,$$

c'est à dire :

$$[a_1 - a_0] + [2a_2 - a_1]x + [3a_3 - a_2]x^2 + \cdots + [na_n - a_{n-1}]x^{n-1} + [(n+1)a_{n+1} - a_n]x^n + \cdots = x,$$

d'où on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} a_1 - a_0 = 0 \\ 2a_2 - a_1 = 1 \\ 3a_3 - a_2 = 0 \\ \vdots \\ na_n - a_{n-1} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

- Il est possible de résoudre ce système de façon récursive car $a_0 = 0$.

$$\begin{cases} a_1 = a_0 = 0 \\ a_2 = \dfrac{1 + a_1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ a_3 = \dfrac{a_2}{3} = \dfrac{1}{3 \cdot 2} \\ \vdots \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{n!} \\ \vdots \end{cases}$$

· Finalement, on en déduit que $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Remarque. On remarque que $y(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est le développement en série entière de $f(x) = e^x$ auquel on a retiré les deux premiers termes $1 + x$. Alors, on peut réécrire la solution sous la forme :

$$y(x) = e^x - 1 - x.$$