IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels II (OML2)

Primitivation

Andrés F. López-Lopera
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

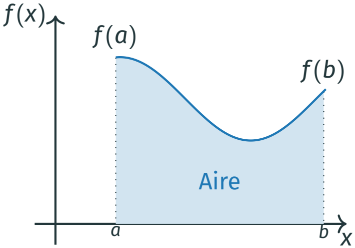
Thèmes

Intégrales

Intégrales

· Le calcul des *intégrales* a de nombreuses applications en ingénierie, notamment :

- Dans le calcul des aires et des volumes (génie civil et mécanique).



$$\text{Aire} = \int_a^b f(x)dx.$$

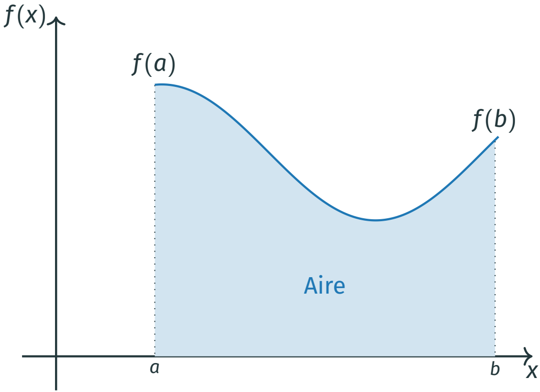
- Dans l'analyse des circuits RLC (génie électrique).

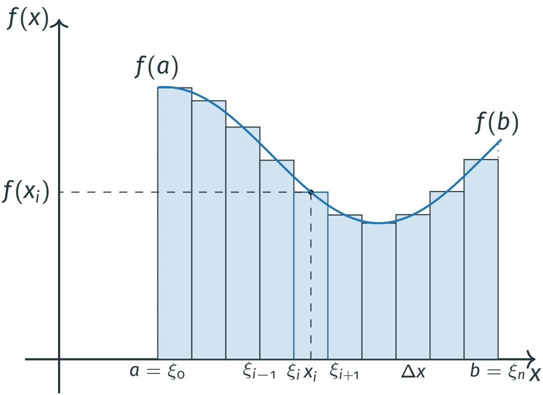
$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}, \qquad v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau.$$

- Dans l'étude des systèmes dynamiques.

Transformée de Laplace : $$\mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Intégrales



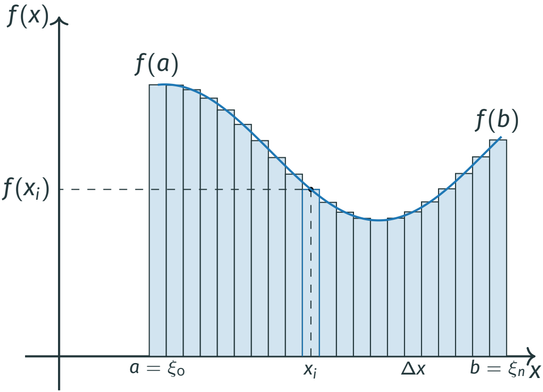


$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Somme de Riemann

$$\text{Aire } \approx f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x, \qquad x_i \in [a;b].$$

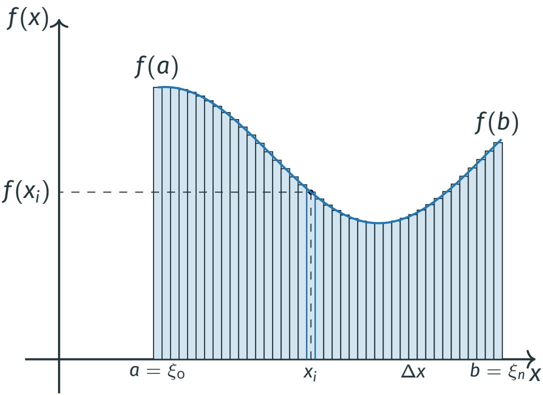
[animation]



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Somme de Riemann

$$\text{Aire } \approx f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x, \qquad x_i \in [a;b].$$



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Somme de Riemann

$$\text{Aire} \approx f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x, \qquad x_i \in [a; b].$$

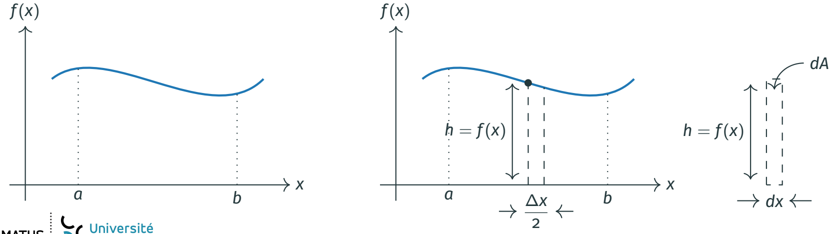
[animation]

Somme de Riemann

$$\begin{aligned} \text{Aire } &\approx f\left(x_0\right)\Delta x + f\left(x_1\right)\Delta x + \cdots + f\left(x_{n-1}\right)\Delta x \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right)\Delta x. \end{aligned}$$

· Lorsque $\Delta x \to 0$, alors $n \to +\infty$, et la somme de Riemann converge vers une intégrale :

$$\text{Aire } = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right)\Delta x.$$

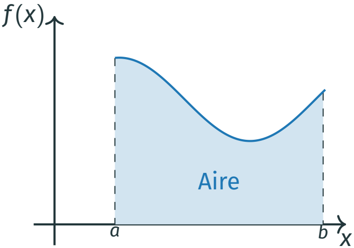


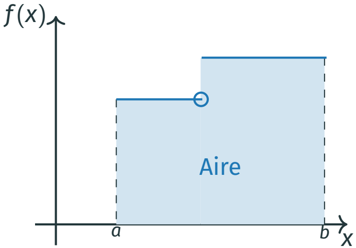
· Par définition, $f(x)$ est dite *intégrable* au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$ si la somme de Riemann admet une limite lorsque $n \to +\infty$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Propriétés de l'intégrale

- Toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ est intégrable sur $[a;b]$.
- Toute fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ est intégrable sur $[a;b]$.





Propriétés de l'intégrale [exercice]

- Si f est intégrable sur l'intervalle $[a; b]$ et que $c \in [a; b]$, alors la relation suivante est vérifiée :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a; b]$, alors leur somme $h(x) = f(x) + g(x)$ est également intégrable sur $[a; b]$:

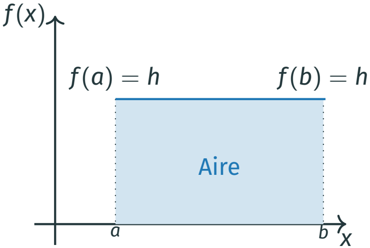
$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction intégrable sur $[a; b]$, alors le produit $h(x) = \alpha f(x)$ est également intégrable sur $[a; b]$:

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Intégrales

Exemple. Calculer l'aire de la surface située sous la courbe de la fonction $f(x) = h$ sur l'intervalle $[a; b]$.



- En calculant la somme de Riemann :

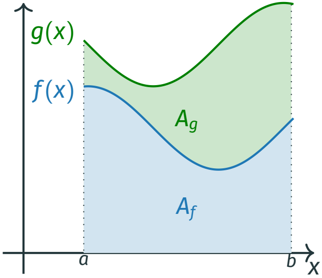
$$\text{Aire} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{\cancel{n}} [\cancel{n} h] = h(b-a).$$

- Par définition de l'intégrale :

$$\int_a^b h dx = h \int_a^b dx = h(b-a).$$

Propriétés de l'intégrale

- $\int_a^a f(x)dx = 0.$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
- Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a; b]$:
  - Si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$, alors
  $$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$
  - Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$, alors
  $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$



Primitives

Primitives

· Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle *primitive* de f toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$F'(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

· On note :

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

· Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $F(x) + k$ est également une primitive de f :

$$\int f(x)dx = F(x) + k.$$

Exercice. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \cos(x)$
3. $f(x) = x^2$

Piste. Rappelez-vous que $F'(x) = f(x)$.

Solution

1. En supposant que $F(x) = e^x + k$, on obtient $F'(x) = e^x = f(x)$. Ainsi,
$$\int e^x dx = e^x + k.$$
2. En supposant que $F(x) = \sin(x) + k$, on obtient $F'(x) = \cos(x) = f(x)$. Ainsi,
$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + k.$$
3. En supposant que $F(x) = \frac{x^3}{3} + k$, on obtient $F'(x) = x^2 = f(x)$. Ainsi,
$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k.$$

Primitives

Primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	k	$\cos(x)$	$\sin(x)+k$
a	$ax+k$	$\sin(x)$	$-\cos(x)+k$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+k$	$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+k$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}+k$	$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+k$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$	e^x	e^x+k
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x+k$	e^{ax+b}	$\dfrac{1}{a}e^{ax+b}+k$

Exercice. Calculer la primitive de $f(x)=\sin^2(x)$.

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Solution.

· En utilisant la propriété $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)dx &= \int \sin^2(x)dx \\ &= \int \left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + k. \end{aligned}$$

Primitives

Primitives spécifiques

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\sin^2 x$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$	$\cos^2 x$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$	$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+1}\rvert$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$
$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}$	$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2(x^2+1)}$

Theorem

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f. Alors, l'intégrale de f sur $[a;b]$ peut être calculée comme suit :

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple. En revenant sur le cas $f(x) = h$ sur $[a;b]$, on trouve :

$$h\int_a^b dx = h\Big[x\Big]_a^b = h(b-a).$$

Theorem

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f. Alors, l'intégrale de f sur $[a;b]$ peut être calculée comme suit :

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple. En revenant sur le cas $f(x) = h$ sur $[a;b]$, on trouve :

$$h\int_a^b dx = h\Big[x\Big]_a^b = h(b-a).$$

Exercice. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [3x^2 + \sin(x) + 4]dx.$$

Primitives

Solution.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} [3x^2 + \sin(x) + 4]dx &= \Big[x^3 - \cos(x) + 4x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + 4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&\quad - \left[(0)^3 - \underbrace{\cos(0)}_{1} + 4(0)\right] \\
&= \frac{\pi^3}{8} + 2\pi + 1.
\end{aligned}
$$

Principe de linéarité

· Soient f et g deux fonctions ayant pour primitives respectivement F et G. Alors, une primitive de $h(x) = f(x) + g(x)$ est donnée par :

$$H(x) = F(x) + G(x).$$

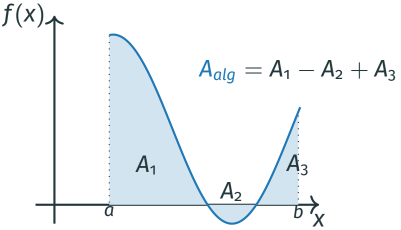
· Soit f une fonction ayant pour primitive F. Alors, une primitive de $h(x) = \alpha f(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est donnée par :

$$H(x) = \alpha F(x).$$

Calcul de la valeur moyenne et la valeur efficace

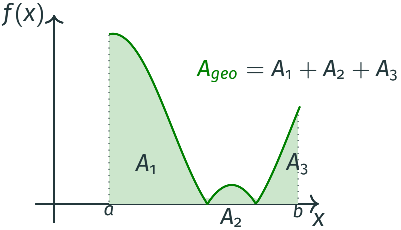
· Rappelez-vous que l'aire (*algébrique*) de la surface située sous la courbe de f dans l'intervalle $x \in [a; b]$ est donnée par :

$$A_{alg} = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{avec } A_{alg} \in \mathbb{R}.$$



· On appelle *aire géométrique* :

$$A_{geo} = \int_a^b |f(x)|dx, \quad \text{avec } A_{geo} \in \mathbb{R}^+.$$



Remarque :

- On observe que $A_{geo} \geq A_{alg}$.
- $A_{geo} = 0$ si $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a; b]$.

Calcul de la valeur moyenne et la valeur efficace

- Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $I = [a; b]$.
- On appelle *valeur moyenne* de f sur $I = [a; b]$, le nombre défini par :

$$V_{\text{moyenne}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

- On appelle *valeur efficace* de f sur $I = [a; b]$, le nombre défini par :

$$V_{\text{efficace}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx}.$$

Remarque. V_{efficace}^2 correspond à la valeur moyenne de f^2 sur $I = [a, b]$.

Calcul de la valeur moyenne et la valeur efficace

· Dans le cas où f est une fonction périodique de période $T > 0$, la valeur moyenne et la valeur efficace sont données par :

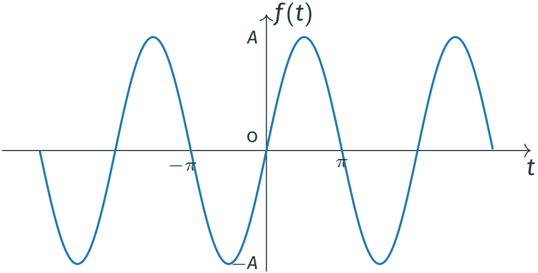
$$V_{\text{moyenne}} = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx,$$
$$V_{\text{efficace}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} [f(x)]^2 dx}.$$

· On mesure ces valeurs sur une seule période

Preuve. En supposant l'intervalle $I = [a; b]$ avec $b = a + nT$, on obtient

$$\begin{aligned} V_{\text{moyenne}} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{nT}\left[\int_a^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^{a+2T} f(x)dx + \cdots + \int_{a+(n-1)T}^{a+nT} f(x)dx\right] \\ &= \frac{1}{nT}\left[n\int_a^{a+T} f(x)dx\right] = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx. \end{aligned}$$

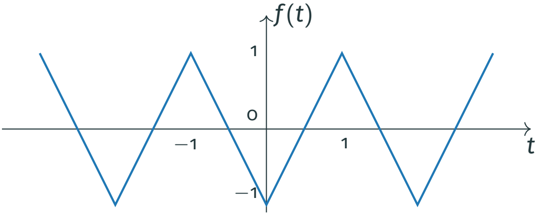
Exercice. Calculer les valeurs moyenne et efficace de la fonction périodique $f(t) = A\sin(t)$, avec $A \in \mathbb{R}^+$.



Solution. $v_{moyenne} = 0$, $v_{efficace}^2 = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$.

Exercice. Calculer les valeurs moyenne et efficace de la fonction périodique suivante, avec période $T = 2$:

$$f(t) = \begin{cases} 2t - 1, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -2t - 1, & \text{si } -1 \leq t < 0 \end{cases}$$



triangle

Solution.

Valeur moyenne :

$$
\begin{aligned}
V_{\text{moyenne}} &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} [-2t-1]dt + \int_0^1 [2t-1]dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Big[-t^2-t\Big]_{-1}^{0} + \Big[t^2-t\Big]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Big[-0-0+1-1\Big] + \Big[1-1-0+0\Big]\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Solution (suite).

Valeur efficace :

$$
\begin{aligned}
V^2_{\text{efficace}} &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T}[f(t)]^2dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[f(t)]^2dt\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}[f(t)]^2dt + \int_0^1[f(t)]^2dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}[-2t-1]^2dt + \int_0^1[2t-1]^2dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}[4t^2+4t+1]dt + \int_0^1[4t^2-4t+1]dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{4}{3}t^3+2t^2+t\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{4}{3}t^3-2t^2+t\right]_0^1\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{4}{3}-2+1\right] + \left[\frac{4}{3}-2+1\right]\right)\\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Techniques d’intégration

Linéarisation de fonctions trigonométriques

· Certaines primitives des fonctions trigonométriques peuvent être calculées à l'aide des formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}.$$

Exemple. Si l'on souhaite calculer $\int \sin^3(x)\,dx$, on peut tout d'abord linéariser $\sin^3(x)$:

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left[\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right]^3 = -\frac{1}{8j}\left[e^{j3x} - 3e^{j2x}e^{-jx} + 3e^{jx}e^{-j2x} - e^{-j3x}\right] \\
&= -\frac{1}{8j}\left[e^{j3x} - 3e^{jx} + 3e^{-jx} - e^{-j3x}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{j3x} - e^{-j3x}}{2j} - 3\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right] = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x).
\end{aligned}$$

d'où l'on obtient ensuite :

$$\int \sin^3(x)dx = \int \left[-\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\right]dx = \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x) + k.$$

Changement de variables

- On s'intéresse à des fonctions f de la forme

$$f(x) = u'(x)g(u(x)) = u'g(u).$$

- Dans ce cas, on obtient que la primitive est donnée par :

$$\int f(x)dx = \int g(u(x))\frac{du(x)}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int g(u(x))du(x) = \int g(u)du.$$

Exemple. Soit $f(x) = xe^{x^2}$. Si l'on pose $u = x^2$, alors $du = 2xdx$. En substituant dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}dx &= \int \frac{2}{2}xe^{x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int e^{u}du \\ &= \frac{1}{2}e^{u} + k \\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + k.\end{aligned}$$

Exemple.

$$\int \sin^3(x)dx = \int \sin(x)\sin^2(x)dx = \int \sin(x)[1-\cos^2(x)]dx$$
$$= \int \sin(x)dx - \underbrace{\int \sin(x)\cos^2(x)dx}_{I}.$$

En supposant $u = \cos(x)$ dans la 2ème intégrale, on a $du = -\sin(x)\,dx$, et

$$I = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{\cos^3(x)}{3},$$

d'où l'on trouve :

$$\int \sin^3(x)dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + k.$$

· Concernant la résolution d'intégrales définies, on doit transformer les bornes d'intégration selon le changement de variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u(x))\,du(x).$$

Exemple. Pour calculer l'intégrale $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$, en supposant $u(x) = x^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^{x^2}dx \; = \int_{u(0)}^{u(2)} e^u du &= \int_0^4 e^u du \\ &= \frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{2}[e^4 - 1]. \end{aligned}$$

Intégration par partie

- Avec l'intégration par parties, on s'intéresse à des fonctions f de la forme :

$$f(x) = u(x)v'(x).$$

- On peut démontrer que cette intégrale est donnée par :

$$\int f(x)\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx + k.$$

- Pour l'intégration définie, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

- Une notation "simpliste" peut être trouvée dans la littérature :

$$\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx,$$

$$\int_a^b uv'dx = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v\,dx.$$

Exemple. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx.$$

Solution. Par convenance, on suppose :

$$u = x, \qquad v' = \cos(x),$$

$$u' = 1, \qquad v = \int \cos(x)dx = \sin(x).$$

Intégration par partie

Exemple. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx.$$

Solution. Par convenance, on suppose :

$$\begin{array}{lcl}
u = x, & & v' = \cos(x), \\
 & \searrow & \\
u' = 1, & \longleftarrow & v = \int \cos(x)dx = \sin(x).
\end{array}$$

- En appliquant la formule de l'intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} uv'dx &= \Big[uv\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'v\ dx \\
&= \cancelto{0}{\Big[x\sin(x)\Big]_0^{\pi}} - \int_0^{\pi} \sin(x)dx \\
&= \Big[\cos(x)\Big]_0^{\pi} \\
&= \cos(\pi) - \cos(0) = -2.
\end{aligned}$$

· Dans plusieurs cas, il est possible de réécrire les intégrales sous des formes canoniques **[exercice]** :

$$\int \frac{1}{x+a}dx = \ln(x+a), \qquad \int \frac{1}{(x+a)^n}dx = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x+a)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n+a}dx = \frac{1}{n}\ln(x^n+a), \qquad \int \frac{1}{x^2+a}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right).$$

Exemple.

$$I = \int \frac{1}{x^4+3x^3+3x^2+3x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}dx.$$

· En décomposant en éléments simples, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2}\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{1-3x}{x^2+1}\right)\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{10}\int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{3}{10}\int \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{5}\ln(x+2) + \frac{1}{10}\arctan(x) - \frac{3}{20}\ln(x^2+1) + k. \end{aligned}$$

- Pour le cas quadratique, on a trois possibilités :

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx.$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, on obtient :

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{\left[x+\dfrac{b}{2a}\right]^2}dx = -\frac{2a}{2ax+b} + k.$$

- Si $\Delta > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx &= \int \frac{1}{\left[x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right]}dx \\ &= \alpha \ln\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \beta \ln\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + k.\end{aligned}$$

Décomposition en éléments simples

- Si $\Delta < 0$, on doit récrire l'intégrale sous la forme $\displaystyle\int \frac{1}{z^2+\alpha}dz$:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}dx \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x{\color{red}+\frac{b^2}{4a^2}}+\frac{c}{a}{\color{green}-\frac{b^2}{4a^2}}}dx \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2+\left[\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]}dx.
\end{aligned}
$$

- En sachant que $\displaystyle\int \frac{1}{z^2+\alpha}dz = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{\alpha}}\right)$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx &= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{4a^2}{4ac-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4a^2}{4ac-b^2}}\left[x+\frac{b}{2a}\right]\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left[x+\frac{b}{2a}\right]\right)+k.
\end{aligned}
$$

Exercices.

1. $$\int \frac{-3}{(x+1)(x-2)}dx.$$

   Solution. $\ln(x+1) - \ln(x-2) + k.$

2. $$\int \frac{3x^2 + 11x + 9}{(x+1)(x+2)^2}dx.$$

   Solution. $-\dfrac{1}{x+2} + \ln(x+1) + 2\ln(x+2) + k.$

3. $$\int \frac{2}{(x+1)(x^2+4x+5)}dx.$$

   Solution. $\ln(x+1) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \arctan(x+2) + k.$

Références

Frédéric Guegnard and Marc Bourcerie.
Mathématiques IUT GEII 1ère Année.
Ellipses, 2017.

Jean Duveau, Marcel Pasquinelli, and Michel Tholomier.
Électronique : IUT 1ère Année GEII - GMP.
DUNOD, 2e édition, 2017.

Geogebra outils et ressources.
`https://www.geogebra.org/?lang=fr`.
Accessed: 2023-07.