IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels II (OML2)

Série de Fourier complexe

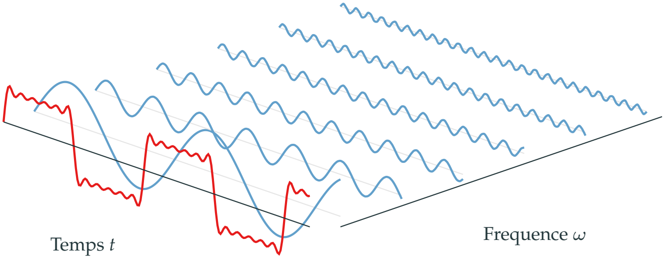
Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

Série de Fourier

Représentation trigonométrique

· Selon J. Fourier, toute *fonction périodique* peut se décomposer, sous certaines conditions, sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales



[animation 1] [animation 2] [animation 3]

Applications :

- Le traitement du signal (ou image)
- L'analyse spectrale des phénomènes périodiques
- La représentation des systèmes électriques (la transformée de Fourier)

Représentation trigonométrique

- La représentation trigonométrique de Fourier est donnée sous la forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t),$$

avec $\omega, a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$

- f est une fonction periodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- a_0 est la valeur moyenne
- $h_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$ est appelée la *fondamental*, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $h_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ est appelée *harmonique* de rang n de f, de période $T_n = \frac{T}{n} = \frac{2\pi}{n\omega}$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Représentation trigonométrique

· Les coefficients de la représentation de Fourier précédent sont donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\omega t) dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Exercice. Vérifier que les expressions précédentes sont valides.

Représentation trigonométrique

Solution.

· Calcul de a_0

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_T f(t)dt &= \frac{1}{T}\int_T [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_T a_0 dt + \int_T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)dt + \int_T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)dt\right] \\
&= a_0 + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cancelto{0}{\int_T \cos(n\omega t)dt} + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cancelto{0}{\int_T \sin(n\omega t)dt}
\end{aligned}
$$

Solution (continuation).

· Calcul de a_n

$$\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(m\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_T [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]\cos(m\omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\Bigg[a_0 \cancelto{0}{\int_T \cos(m\omega t)dt} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cancelto{0}{\int_T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt}\Bigg]$$

· L'intégration restante est donné par (principe d'orthogonalité) :

$$\int_T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

· Finalement :

$$\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(m\omega t)dt = a_n$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Solution (continuation).

· Calcul de b_n

$$\frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(m\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_T \Big[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big] \sin(m\omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\Bigg[a_0 \cancelto{0}{\int_T \sin(m\omega t)dt} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cancelto{0}{\int_T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)dt}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt\Bigg]$$

· L'intégration restante est donné par (principe d'orthogonalité) :

$$\int_T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

· Finalement :

$$\frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(m\omega t)dt = b_n$$

Cas particulier – fonction paire

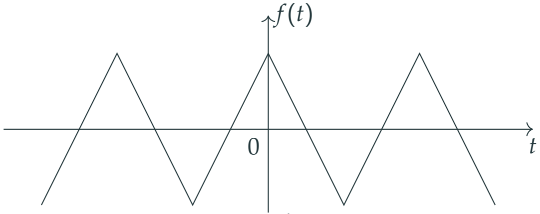
· Soit f une *fonction périodique paire*, i.e. $f(-t) = f(t)$, on obtient **[Exercice]** :

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t),$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt, \qquad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$$

Exemple.



triangle

Cas particulier – fonction paire

Solution (continuation).

· Calcul de a_0 : sachant que f est une fonction paire, i.e. $f(-t) = f(t)$, on a

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{T/2} f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{T/2} f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[-\int_{T/2}^{0} f(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{0}^{T/2} f(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} f(t)dt\right] = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)dt
\end{aligned}$$

· Calcul de a_n : en définissant $g(t) = f(t)\cos(n\omega t)$, on observe que g est aussi une fonction paire, i.e. $g(-t) = g(t)$, d'où on obtient :

$$a_n = 2\left[\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} g(t)dt\right] = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$$

Solution (continuation).

· Calcul de b_n : en définissant $g(t) = f(t)\sin(n\omega t)$, on observe que g est une fonction impaire, i.e. $g(-t) = -g(t)$, d'où on obtient :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{T/2} f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[-\int_{-T/2}^{0} g(-t)dt + \int_{0}^{T/2} f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{T/2}^{0} g(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} g(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[-\int_{0}^{T/2} g(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{T/2} g(t)dt\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

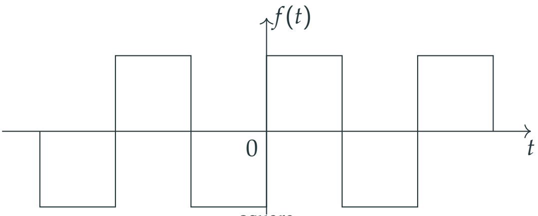
· Soit f une *fonction périodique impaire*, i.e. $f(-t) = -f(t)$, on obtient :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t),$$

avec

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Exemple.

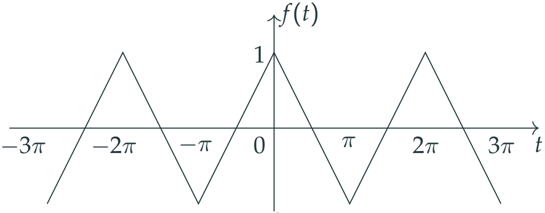


square

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Exercice.

· On considère le signal 2π-périodique défini sur $[-\pi, \pi[$ par $f(t) = 1 - \left|\frac{2t}{\pi}\right|$

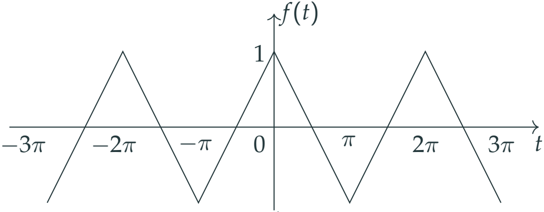


triangle

Déterminer a_0, a_n et b_n.

Exercice.

· On considère le signal 2π-périodique défini sur $[-\pi, \pi[$ par $f(t) = 1 - \left|\frac{2t}{\pi}\right|$



triangle

Déterminer a_0, a_n et b_n.

Solution.

· De la représentation graphique, on observe que f est une fonction paire et centrée (i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$). Alors, on obtient :

$$a_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad b_n = 0,$$

donc il reste qu'à calculer a_n.

Série de Fourier

Solution (continuation).

· Par définition :

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[1-\frac{2t}{\pi}\right]\cos(nt)dt \\
&= \cancelto{0}{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt} - \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt
\end{aligned}
$$

· En effectuant une intégration par partie, on obtient :

$$
\int_0^{\pi} t\cos(nt) = \cancelto{0}{\left[\frac{1}{n}t\sin(nt)\right]_0^{\pi}} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt = -\frac{1}{n}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}[\cos(n\pi)-1]
$$

· Finalement :

$$
a_n = \frac{4[1-\cos(n\pi)]}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi^2 n^2}, & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}
$$

Représentation polaire

· Une autre façon d'écrire la représentation de Fourier est **[Exercice]** :

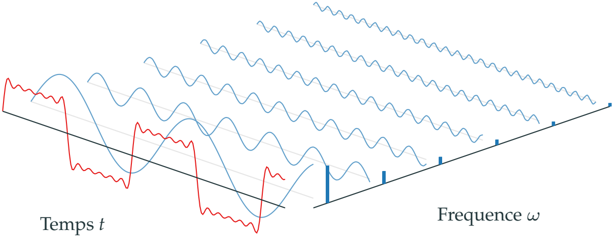
$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n),$$

avec

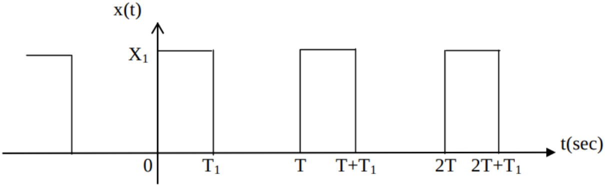
$$A_0 = a_0, \qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \tan\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}, \qquad h_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

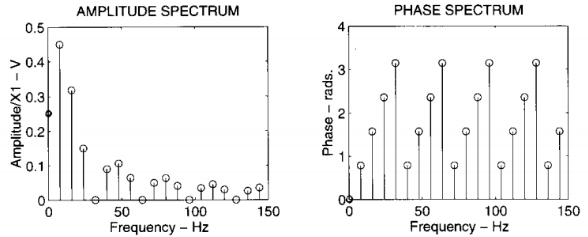
· On dénote :

- A_n : l'amplitude du signal h_n
- φ_n : la phase du signal h_n



· Les spectres d'amplitude (A_n) et de phase (φ_n) d'un signal sont représentes par des diagrammes en bâtons





· Si f est développable en série de Fourier, alors

$$\frac{1}{T}\int_T f^2(t)dt = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Interprétation physique.

· Le théorème de Parseval traduit le fait que la puissance du signal est égale à la somme des puissances des harmoniques :

$$P(f) = (f_{moyenne})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} P(h_n) \quad \text{(principe de conservation de l'énergie)},$$

où

- $P(f) = \frac{1}{T}\int_T f^2(t)dt$ est la puissance moyenne sur une période du signal f
- $P(h_n) = |c_n|^2 = \frac{1}{2}A_n^2 = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$ est la puissance moyenne sur une période de h_n (la n-ème harmonique)

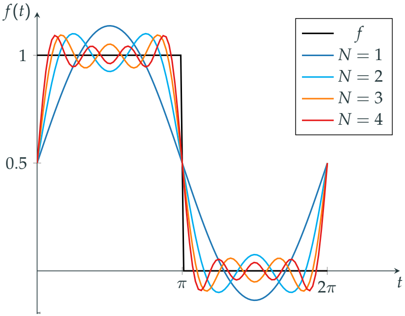
Théorème de Parseval

· La formulation précédente permet d'approximer f (au sens de la puissance)

· Si $\widetilde{f}_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ est une approximation de f, la fonction $\widetilde{f}_N$ a pour puissance

$$P(\widetilde{f}_N) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)$$

· $\widetilde{f}_N$ est donc une approximation de f à $\dfrac{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)}{\frac{1}{T}\int_T f^2(t)dt}$ près

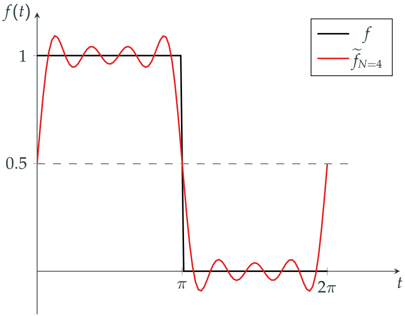


CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Théorème de Dirichlet

- Soit f une fonction T-périodique, i.e. $f(t+T) = f(t)$
- Soit $\widetilde{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ la série de Fourier de f
- Si f es continue et monotone par morceau, alors on a :

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ est continue en } t \\ \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$



CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Série de Fourier complexe

Série de Fourier complexe

· Grâce aux formules d'Euler, on peut récrire la représentation de Fourier comme :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

avec

$$c_n = \begin{cases} a_0, & n = 0 \\ \dfrac{a_n - jb_n}{2}, & n > 0 \\ \dfrac{a_n + jb_n}{2}, & n < 0 \end{cases}, \qquad c_{-n} = \overline{c_n}$$

Exercice. À partir de la représentation trigonométrique de Fourier, développer la forme exponentielle complexe.

Solution.

· Sachant que $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \\
&= a_0 e^{0j\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}}{2j} \\
&= a_0 e^{0jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \\
&= c_0 e^{0jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{j(-n)\omega t} \\
&= c_0 e^{0jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jn\omega t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}
\end{aligned}
$$

Lien avec la décomposition sous forme réelle

Rappel :

$$c_n = \begin{cases} a_0, & n = 0 \\ \dfrac{a_n - jb_n}{2}, & n > 0 \\ \dfrac{a_n + jb_n}{2}, & n < 0 \end{cases}, \qquad c_{-n} = \overline{c_n}$$

· Soit $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$. De l'expression précédente, on obtient **[Exercice]** :

$$a_0 = c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = j(c_n - c_{-n})$$

· Soit $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$. Par définition **[Exercice]** :

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 = c_0, \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\sqrt{c_n c_{-n}} = 2\sqrt{c_n \overline{c_n}} = 2\,|c_n| \\ \tan\varphi_n &= \frac{b_n}{a_n} = j\frac{c_n - \overline{c_n}}{c_n + \overline{c_n}} = -\frac{\operatorname{Im}(c_n)}{\operatorname{Re}(c_n)}, \quad \varphi_n = -\arg(c_n) \end{aligned}$$

Série de Fourier complexe

· Soit $f(t)$ la série de Fourier complexe :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

· Les coefficients de cette représentation sont donnés par :

$$\begin{aligned} c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega t)dt - j\frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega t)dt\right] \\ &= \frac{1}{T}\left[\int_T f(t)[\cos(n\omega t) - j\sin(n\omega t)dt\right] \\ &= \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega t}dt \end{aligned}$$

Exercice. Soit le signal périodique de période $T = 2\pi$ définie par

$$g(t) = -e^{-t}, \quad t \in [\pi, \pi[$$

Écrire la décomposition de $g(t)$ en série de Fourier à coefficients complexes.

Solution.

· Par définition,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-jn\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-e^{-t}]e^{-jn\omega t}dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+jn\omega)t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-(1+jn\omega)t}}{1+jn\omega}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-(1+jn\omega)\pi} - e^{(1+jn\omega)\pi}}{1+jn\omega}\right] \end{aligned}$$

Solution (continuation).

· En remplaçant $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi(1+jn)}[e^{-\pi}e^{-jn\pi} - e^{\pi}e^{jn\pi}] \\ &= \frac{1}{2\pi(1+jn)}[e^{-\pi}\cos(n\pi) - e^{\pi}\cos(n\pi)] \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi(1+jn)} \cdot \frac{[e^{-\pi} - e^{\pi}]}{2} \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi(1+jn)}[-\sinh\pi] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\sinh\pi}{\pi(1+jn)} \end{aligned}$$

· Finalement, on a la décomposition en séries de Fourier donnée par :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt} = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+jn}e^{jnt}$$

Introduction à la transformée de Fourier

· La transformée de Fourier permet d'exprimer les composantes spectrales d'un signal temporel

· Soit $x(t)$ un signal de $L^2(\mathbb{R})$, i.e. un signal dit à énergie finie :

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

· On appelle *transformée de Fourier* la fonction $X(v) = \mathcal{F}\{x(t)\}(v)$ définie par :

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \\ v \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2j\pi v t} dt \end{cases}$$

· L'application $\mathcal{F} : x(t) \to X(v)$ est appelée *transformation de Fourier*

Exemple. Calculer la transformée de Fourier de

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq \dfrac{1}{2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases},$$

Solution.

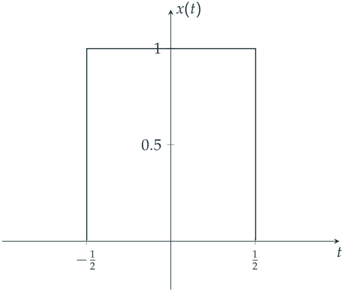
· Par définition :

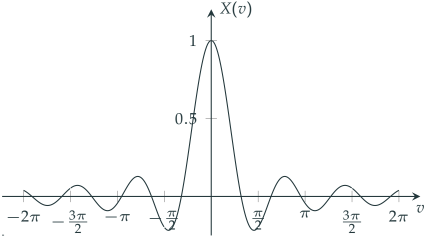
$$\begin{aligned} X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2j\pi v t} dt &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2j\pi v t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-2j\pi v t}}{2j\pi v} \right]_{1/2}^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\pi v} \left[\frac{e^{j\pi v} - e^{-j\pi v}}{2j} \right] \\ &= \frac{\sin(\pi v)}{\pi v} \end{aligned}$$

Introduction à la transformée de Fourier

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq \dfrac{1}{2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$X(v) = \frac{\sin(\pi v)}{\pi v}$$



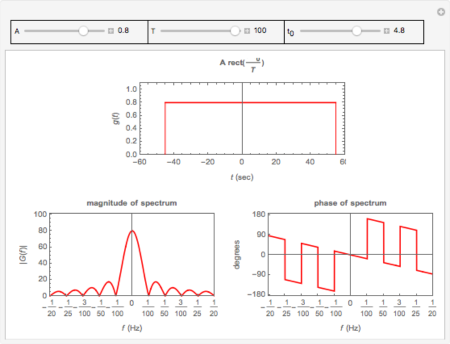


Interprétation spectrale

- $X(v)$ est en général une fonction complexe
- Notons $A(v)$ son module et $\varphi(v)$ son argument, on a alors :

$$X(v) = A(v)e^{j\varphi(v)}$$

- La courbe d'équation $A(v)$ est appelée *spectre d'amplitude* du signal $x(t)$
- La courbe d'équation $\varphi(v)$ est appelée *spectre de phase* du signal $x(t)$



CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

[animation]

Transformation de Fourier inverse

- Soit $x(t)$ un signal de $L^2(\mathbb{R})$ et $X(\nu) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\nu)$ sa transformée de Fourier
- On a alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)e^{2j\pi\nu t}d\nu = \begin{cases} x(t) & \text{si } x \text{ est continue en } t \\ \dfrac{x(t^+) - x(t^-)}{2} & \text{si } x \text{ n'est pas continue en } t\text{, mais} \\ & \text{si } x(t^+) \text{ et } x(t^-) \text{ existent} \end{cases}$$

- Le signal $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)e^{2j\pi\nu t}d\nu$ est appelé *transformée de Fourier inverse* de $X(\nu)$ est notée $\mathcal{F}^{-1}\{X(\nu)\}(t)$