IUT GEII – Outils Mathématiques et Logiciels II (OML2)

Équations différentielles ordinaires du second ordre

Andrés F. López-Lopera
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur (LMI)
Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF)

Thèmes

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Rappel sur les équations différentielles ordinaires

Rappel sur les équations différentielles ordinaires

· Les *équations différentielles* trouvent leurs applications dans nombreux domaines :

- biologie
- physique
- ingénierie (électrique, industrielle, mécanique)

· Nombreux phénomènes naturels sont régis par ces équations :

- Systèmes dynamiques (e.g. mouvement des objets)
- Circuit électriques (e.g. circuits RLC)
- Relation entre l'ADN et les protéines (e.g. régulation de l'expression des gènes)

Rappel sur les équations différentielles ordinaires

· Dans le cas général, une *équation différentielle ordinaire* (EDO) *linéaire à coefficients constants* est donnée par :

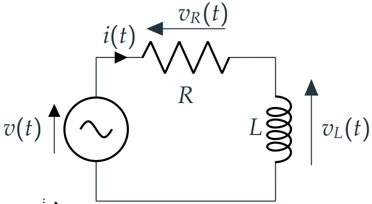
$$a_n \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = e(x),$$

ou

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = e(x),$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $e(x) : I \to \mathbb{R}$ (fonction d'entrée du système).

Exemple (Circuit RL en série).



· Grâce au principe de la conservation de l'énergie, on sait que :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_R(t) + v_L(t) \\ &= Ri(t) + Li'(t) \end{aligned}$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

· On appelle *équation différentielle linéaire (à coefficients constants) de 2nd ordre* toute équation de la forme :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e(x),$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $e(x) : I \to \mathbb{R}$.

· De façon plus générale, on appelle *équation différentielle linéaire de 2nd ordre* toute équation de la forme :

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = e(x),$$

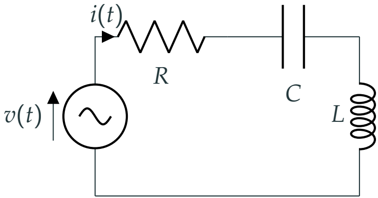
avec $a(x), b(x), c(x), e(x) : I \to \mathbb{R}$.

Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

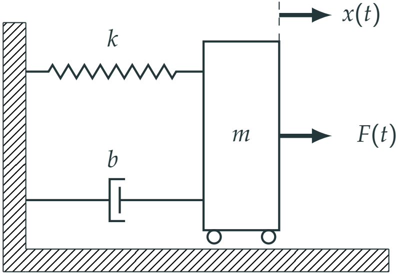
· Ici, on se concentre sur des équations différentielles de 2ème ordre :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e(t)$$

Applications.



$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = v'(t)$$



$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = F(t)$$

Solution générale d'une équation différentielle linaire de 1er ordre

· La solution générale $y_G(t)$ d'une équation différentielle linéaire est la somme :

- de la *solution de l'équation homogène* $y_H(t)$:

$$ay''_H(t) + by'_H(t) + cy_H(t) = 0$$

- et d'une *solution particulière* $y_P(t)$ *de l'équation avec second membre* :

$$ay''_P(t) + by'_P(t) + cy_P(t) = e(t)$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Résolution de l'équation homogène

· On cherche toutes les fonctions $y_H(t)$ solutions de

$$ay''_H(t) + by'_H(t) + cy_H(t) = 0 \qquad (1)$$

· Les solutions de l'équation vont dépendre du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles r_1 et r_2 et $y_H(t)$ s'écrit :

$$y_H(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle double r et $y_H(t)$ s'écrit :

$$y_H(t) = [k_1 t + k_2]e^{rt}, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes $(r_1, r_2) = \alpha \pm j\beta$ et $y_H(t)$ s'écrit :

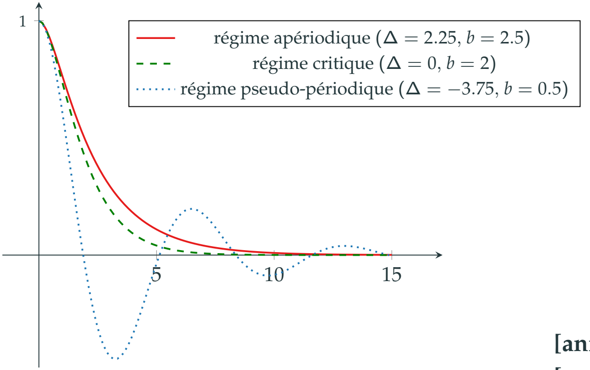
$$y_H(t) = e^{\alpha t}[k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)], \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Note. Les racines s'obtiennent de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$

Exemple. Supposons l'équation différentielle donnée par :

$$y''(t) + by'(t) + y(t) = 0,$$

avec $a = 1$, $c = 1$, $b \in \mathbb{R}^+$ et $\Delta = b^2 - 4$.



[animation 1]
[animation 2]

[0] **Note.** Pour le calcul de k_1 et k_2, on a supposé les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice. Supposons l'équation différentielle donnée par :

$$2y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

1. Corresponde-t-elle au régime apériodique, critique ou pseudo-périodique ? (justifier la réponse)
2. Donner la solution générale $y_H(t)$
3. Calculer les valeurs de k_1 et k_2 en supposant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

Solution.

1. D'après le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, on obtient que :

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0,$$

alors l'équation corresponde au régime pseudo-périodique.

2. Avant d'appliquer la formule, on a besoin de calculer les racines de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$:

$$2r^2 + 3r + 2 = 0, \quad \text{d'où on obtient} \quad r = -\frac{3}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4} = \alpha \pm j\beta$$

· Ensuite, $\forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, on a la solution générale :

$$y_H(t) = e^{\alpha t}[k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)] = e^{-\frac{3}{4}t}\left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right)$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Solution. (continuation)

3. Les valeurs de k_1 et k_2 s'obtiennent du fait que :

$$y_G(0) = y(0) = 1, \qquad y'_G(0) = y'(0) = 0,$$

d'où on a :

$$y_H(0) = \left[e^{-\frac{3}{4}t} \left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4} t \right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4} t \right) \right) \right]_{t=0} = k_1 = 1$$

$$\begin{aligned} y'_H(0) = \Bigg[& -\frac{3}{4} e^{-\frac{3}{4}t} \left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4} t \right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4} t \right) \right) \\ & + \frac{\sqrt{7}}{4} e^{-\frac{3}{4}t} \left(-k_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4} t \right) + k_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4} t \right) \right) \Bigg]_{t=0} \\ = & -\frac{3}{4} k_1 + \frac{\sqrt{7}}{4} k_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad k_2 = \frac{3}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

CERAMATHS Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Résolution de l'équation avec second terme

· On cherche la fonction $y_P(t)$ solution de

$$ay_P''(t) + by_P'(t) + cy_P(t) = e(t) \tag{2}$$

· La solution $y_P(t)$ de cette équation dépend du type de la fonction $e(t)$

Forme polynomiale

· Si $e(t)$ est un polynôme d'ordre n, alors on cherche une solution $y_P(t) = Q(t)$ avec $Q(t)$ une fonction polynomiale. On peut trouver trois cas :

1. Si $c \neq 0$, alors $Q(t)$ est un polynôme d'ordre n
2. Si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors $Q(t)$ est un polynôme d'ordre $n + 1$
3. Si $c = 0$ et $b = 0$, alors $Q(t)$ est un polynôme d'ordre $n + 2$

Exemple. Trouver la solution générale à l'équation différentielles :

$$2y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2t^2 + 1,$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution.

Solution de l'équation homogène $y_H(t)$

· Dans l'exercice précédent, on avait obtenu que :

$$y_H(t) = e^{\alpha t}[k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)] = e^{-\frac{3}{4}t}\left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right)$$

Résolution de l'équation avec second terme

Solution de l'équation avec second terme $2y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t^2 + 1$

· On observe que $e(t)$ est un polynôme d'ordre $n = 2$. Parce que $c \neq 0$, alors la solution particulier $y_P(t)$ est aussi un polynôme d'ordre $n = 2$:

$$y_P(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$

· Pour le calcul des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, on sait que $2y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) = 2t^2 + 1$:

$$\begin{aligned} 2y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) &= 2(2\alpha_2) + 3(2\alpha_2 t + \alpha_1) + 2(\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0) \\ &= 2\alpha_2 t^2 + 2(3\alpha_2 + \alpha_1)t + 4\alpha_2 + 3\alpha_1 + 2\alpha_0 \\ &= 2t^2 + 1, \end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\begin{cases} 2\alpha_2 = 2 \\ 2(3\alpha_2 + \alpha_1) = 0 \\ 4\alpha_2 + 3\alpha_1 + 2\alpha_0 = 1 \end{cases}, \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = -3\alpha_2 = -3 \\ \alpha_0 = \dfrac{1 - 4\alpha_2 - 3\alpha_1}{2} = 3 \end{cases}$$

Solution de général $y_G(t)$

$$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t) = e^{-\frac{3}{4}t}\left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right) + t^2 - 3t + 3$$

· Pour le calcul de k_1 et k_2, on doit satisfaire les conditions initiales $y_G(0) = y(0) = 1$ et $y'_G(0) = y'(0) = 0$:

$$y_G(t) = \left[e^{-\frac{3}{4}t}\left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right) + t^2 - 3t + 3\right]_{t=0}$$
$$= k_1 + 3 = 1 \quad \rightarrow \quad k_1 = -2$$

$$y_G(t) = y'_H(0)$$
$$= \left[-\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t}\left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{7}}{4}e^{-\frac{3}{4}t}\left(-k_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + k_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right) + 2t - 3\right]_{t=0}$$
$$= -\frac{3}{4}k_1 + \frac{\sqrt{7}}{4}k_2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad k_2 = \frac{6}{\sqrt{7}}$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Résolution de l'équation avec second terme

Forme exponentielle

· Si $e(t) = e^{st}$, alors on cherche une solution $y_P(t)$ dont la forme dépend de s par rapport aux solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$:

1. Si s n'est pas solution de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = Ae^{st}$$
2. Si s est une solution simple de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = Ate^{st}$$
3. Si s est une solution double de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = At^2e^{st}$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Forme mixte polynomiale/exponentielle

· Si $e(t) = P(t)e^{st}$ avec $P(t)$ un polynôme d'ordre n, alors on cherche une solution $y_P(t)$ dont la forme dépend de s par rapport aux solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$:

1. Si s n'est pas solution de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = Q(t)e^{st}$$
2. Si s est une solution simple de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = tQ(t)e^{st}$$
3. Si s est une solution double de l'équation caractéristique, alors
$$y_P(t) = t^2Q(t)e^{st}$$

· Pour les trois cas, $Q(t)$ est un polynôme d'ordre n.

Résolution de l'équation avec second terme

Forme trigonométrique

· Si $e(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, alors on cherche une solution $y_P(t)$ dont la forme dépend de ω par rapport aux solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$:

1. Si $j\omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, alors

$$y_P(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

2. Si $j\omega$ est solution de l'équation caractéristique, alors

$$y_P(t) = t[C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)]$$

CERAMATHS | Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Résolution de l'équation avec second terme

Forme mixte trigonométrique/exponentielle

· Si $e(t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]e^{st}$, alors on cherche une solution $y_P(t)$ dont la forme dépend de $s + j\omega$ par rapport aux solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$:

1. Si $s + j\omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, alors

$$y_P(t) = [C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)]e^{st}$$

2. Si $s + j\omega$ est solution de l'équation caractéristique, alors

$$y_P(t) = t[C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)]e^{st}$$

Exercices.

1. $y''(x) + 2y'(x) = 2x^2 + 1$, avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$
2. $2i''(t) + 3i'(t) + 2i(t) = 2\sin(t)$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$
3. $y''(t) + 2y'(t) + 6y(t) = 5e^{-3t}\cos(t)$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$