

Física II - FÍSICA DE CAMPOS

Prof: Andrés Felipe Rivera Romero

Medellín - Colombia
6 de junio de 2022

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Flujo magnético	1
1.2. Principio de inducción	1
2. Gravitación	3
2.1. Movimiento planetario	3
2.1.1. Modelos planetarios	3
2.1.2. Leyes de Kepler	4
2.2. Ley de Gravitación Universal	6
2.2.1. Ejemplos:	7
2.2.2. Ejercicios:	11
2.3. Campo Gravitacional	11
2.3.1. Energía potencial gravitacional $E_p(r) = U_p(r)$	12
2.3.2. Potencial gravitacional $V(r)$	14
2.4. Movimiento general bajo interacción gravitacional	16
2.5. Distribuciones continuas de masa	17
2.5.1. Ejemplos de campo gravitacional	17
2.5.2. Ejemplos de potencial gravitacional	24
3. Electrostática	27
3.1. Carga eléctrica	27
3.1.1. Cuantización y conservación de la carga eléctrica	27
3.1.2. Ley de Coulomb	27
3.2. Campo eléctrico	30
3.2.1. Ejemplos de campos eléctricos	32
3.2.2. Movimiento de partículas en presencia de un campo eléctrico	33
3.3. Potencial y energía potencial eléctrica	35
3.3.1. Diferencia de potencial eléctrica	35
3.3.2. Potencial eléctrico para una partícula puntual $Q = q$	36
3.3.3. Relación entre el campo y el potencial eléctrico	37
3.3.4. Ejemplo de potencial eléctrico	37
3.3.5. Potencial eléctrico debido a conductores cargados	39
3.4. Ley de Gauss	40
3.4.1. Ley de Gauss en función del potencial eléctrico	42
3.4.2. Ejemplos: Ley de Gauss	42

4. Magnetostática	43
4.1. Fuerza magnética	43
4.2. Fuentes de campo magnético	43
4.2.1. Ley de Biot-Savart	43
4.2.2. Ejemplos:	43
5. Inducción electromagnética	49
5.1. Flujo magnético	49
5.2. Principio de inducción	49

Capítulo 1

Introducción

El principio de inducción fue formulado por Michael Faraday (Inglaterra) e independientemente por Joseph Henry (Estados Unidos) en el año de 1831 [1]. Hoy en día, este principio es la base para producir la electricidad en las centrales hidroeléctricas que posteriormente es conducida hasta nuestros hogares.

1.1. Flujo magnético

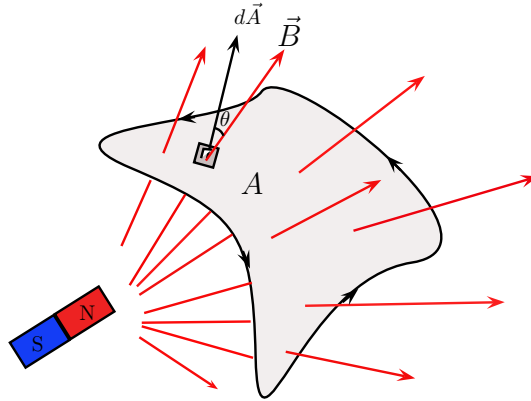


Figura 1.1: Flujo magnético atravesando la superficie A .

Se define el flujo magnético Φ_B a través de la superficie de área A como

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (1.1)$$

donde $d\vec{A}$ es un vector normal a la superficie, y forma un ángulo θ con el vector \vec{B} , tal como se muestra en la Fig. 1.1. La integral debe realizarse sobre toda el área A .

1.2. Principio de inducción

Capítulo 2

Gravitación

2.1. Movimiento planetario

Uno de los problemas fundamentales del pensamiento del hombre en la antigüedad, fue el movimiento de los cuerpos celestes. Este pensamiento impulsó el desarrollo de la ciencia hasta nuestros días. Inicialmente para explicar el movimiento de las estrellas errantes y de las estrellas fijas en el cielo, se desarrollaron los siguientes modelos planetarios.

2.1.1. Modelos planetarios

1. **Modelo geocéntrico:** Este primer modelo fue formulado en el año 100 por el astrónomo griego Ptolomeo de Alejandría. En este sistema la tierra era el centro del universo y el conjunto de las estrellas fijas inundaban el universo circundante alrededor de la tierra. Por otro lado, se asumió que las estrellas errantes que se observaban en la noches giraban en torno a la tierra, algunas describiendo trayectorias muy complicadas, conocidas como epiciclos [?]. Cabe anotar que este modelo tenía como fundamentación al “hombre como el centro del universo”, fue apoyado fuertemente por la iglesia y prevaleció por alrededor de 1400 años.
2. **Modelo heliocéntrico:** Este modelo fue propuesto por el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473 – 1543). Tiene como fundamentación al sol como el centro del universo. Cabe anotar que la idea de tener al sol como centro del universo, no era una idea nueva. Se tienen datos históricos que argumentan que fue realmente una idea del filósofo Aristarco de Samos, muchos años atrás [?].

Cabe mencionar que los dos modelos anteriores lograron explicar el movimiento de las estrellas de una manera aceptable. Sin embargo, prevalecían algunos detalles que necesitaron un estudio y una comprensión más profunda de los mismos. Pasados unos años, el físico Johannes Kepler (1571 – 1630) usó el modelo de Copérnico y descubrió las leyes planetarias después de hacer un cuidadoso análisis de los datos coleccionados por el astrónomo danés Tycho Brahe (1546 – 1601). Éste último murió sin poder dar una buena interpretación de sus datos, coleccionados durante toda su vida. No obstante, estas leyes fueron empíricas y su explicación teórica fue dada unos años después por el Físico británico Isaac Newton (1642 – 1727). Este último hizo la contribución más notable a la dinámica de los cuerpos celestes, que hoy en día conocemos como la ley de la gravitación universal, formulada en el año 1686 y publicada en el año de 1687 en el famoso libro; “Los Principia” (Philosophiae Naturalis Mathematica [?]).

2.1.2. Leyes de Kepler

1. **LEY 1:** Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el sol en una de sus focos (ver Fig. 2.1).

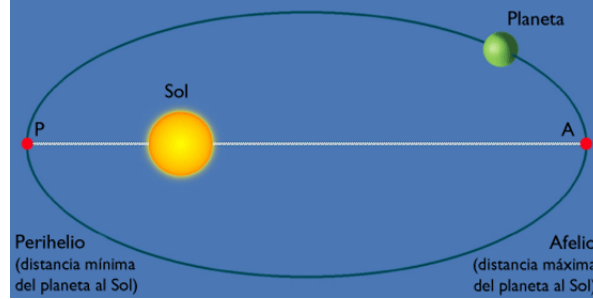


Figura 2.1: Primera ley de Kepler.

Dicha ley generó una gran controversia para la época, debido a que las órbitas propuestas por el modelo heliocéntrico de Copérnico eran circulares y reflejaban la perfección del cielo. Las órbitas elípticas habían obstaculizado el trabajo Tycho Brahe durante toda su vida. Cabe anotar que esta ley fue empírica. Fue deducida de la observación astronómica. Sin embargo, es un resultado de la estructura funcional de la fuerza de gravitación universal, la cual estudiaremos posteriormente.

2. **LEY 2:** El radio-vector dirigido desde el sol a un planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales (ver Fig. 2.2).

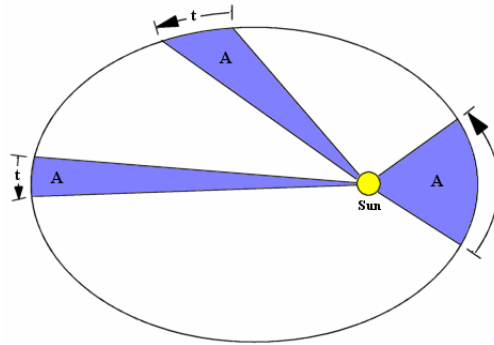


Figura 2.2: Segunda ley de Kepler.

Kepler obtuvo dicha ley estudiando detenidamente los datos obtenidos en las observaciones astronómicas de Tycho Brahe. En la Fig. 2.2 podemos ver que el área barrida en un tiempo t fijo, siempre es A .

Veamos las primeras implicaciones de esta ley. Supongamos que un planeta de masa m está en órbita elíptica alrededor del sol. Consideremos un diferencial de área dA , tal como se muestra en la Fig. 2.3.

$$dA = \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{2} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m \frac{d\vec{r}}{dt}| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{|\vec{L}|}{2m}, \quad (2.1)$$

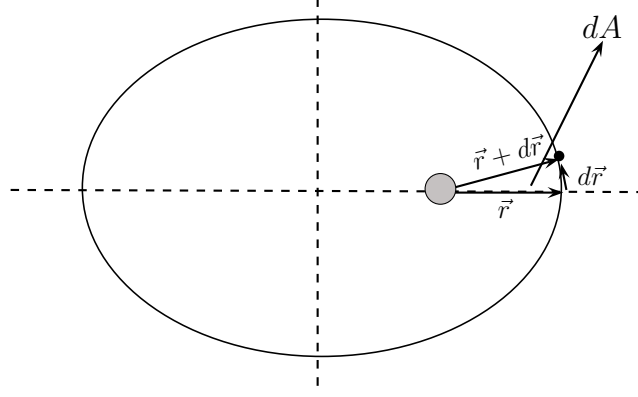


Figura 2.3: Diferencial de área.

donde \vec{p} y \vec{L} son el momento lineal y angular de la masa. Así, de la ec. 2.1 queda claro que el hecho de que se barran áreas iguales en tiempos iguales tiene como consecuencia que el momento angular \vec{L} de los planetas alrededor del sol es constante, es decir:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = c\vec{e}. \quad (2.2)$$

Además, esto establece uno de los precedentes fundamentales para la formulación de la ley de la gravitación universal. El hecho de que el momento angular sea una constante implica que la fuerza que está actuando sobre los planetas, es una fuerza central. Esto puede verse de la siguiente forma:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.3)$$

Por lo tanto, el torque neto $\vec{\tau}$ que actúa sobre cada planeta, debido a su interacción con el sol, está dado por:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (2.4)$$

donde \vec{F} es la fuerza neta que actúa sobre cada planeta. Ahora, si \vec{L} es una constante, entonces la ecuación anterior implica que $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$, y por lo tanto \vec{F} y \vec{r} son antiparalelas (fuerza atractiva), es decir, *la fuerza que mantiene en órbita a los planetas alrededor del sol, es una fuerza central atractiva.*¹

De lo anterior, tenemos que si consideramos dos puntos p_1 y p_2 sobre la trayectoria elíptica de cada planeta, se cumple que:

$$\begin{aligned} \vec{L} = c\vec{e} &\Rightarrow |\vec{r}_1 \times \vec{p}_1| = |\vec{r}_2 \times \vec{p}_2| \Rightarrow |\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1| = |\vec{r}_2 \times m\vec{v}_2|. \\ &\Rightarrow |\vec{r}_1 \times \vec{v}_1| = |\vec{r}_2 \times \vec{v}_2|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En el caso particular del perihelio y el afelio mostrado en la Fig. 2.4:

$$|\vec{r}_1 \times \vec{v}_1| = |\vec{r}_2 \times \vec{v}_2| \Rightarrow v_1 r_1 = v_2 r_2 \Rightarrow \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2.6)$$

¹La fuerza \vec{F} y el vector posición \vec{r} no pueden ser paralelos dado que la trayectoria es una curva cerrada.

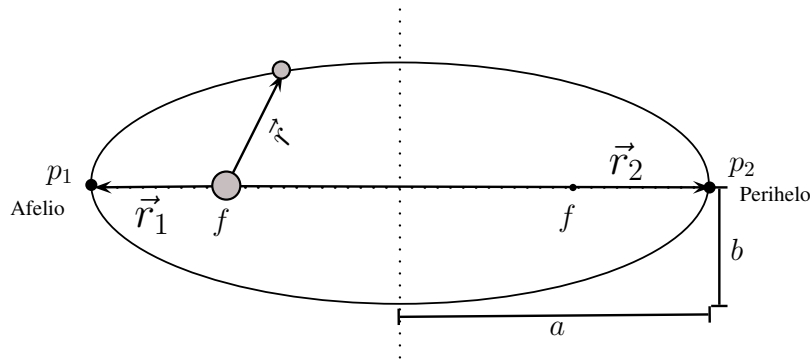


Figura 2.4: Perihelio y afelio de los planetas.

De la ecuación anterior se puede inferir claramente que la rapidez de los planetas al pasar cerca al punto más cercano al sol, debe ser mayor a la rapidez que tengan dichos planetas cuando pasan por el punto más alejado del sol, es decir, la rapidez en el perihelio es mayor a la rapidez en el afelio.

3. **LEY 3:** El cuadrado del periodo orbital P de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor a de la órbita elíptica.

De acuerdo a la Fig. 2.4:

$$P^2 = ka^3, \quad (2.7)$$

donde k es una constante a determinar.

2.2. Ley de Gravitación Universal

En 1688 Isaac Newton logró establecer con ayuda de las leyes de Kepler, la ley que gobierna el movimiento celeste de los cuerpos. Newton determinó que **cada partícula del universo atrae a los demás partículas del universo con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la separación entre dichas masas.**

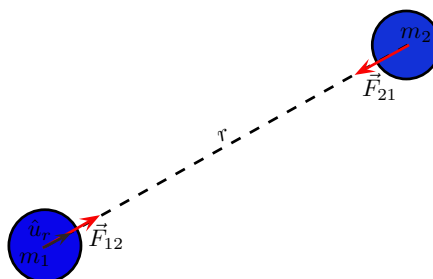


Figura 2.5: Fuerza de interacción gravitacional

Supongamos que tenemos dos partículas “puntuales” cuya separación es r , entonces, la fuerza que siente la partícula de masa m_1 debido a la partícula de masa m_2 es:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r = -\vec{F}_{21} \quad (2.8)$$

donde G es conocida como la constante gravitacional; $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Note que \vec{F}_{12} y \vec{F}_{21} forman un **par acción-reacción** y además son fuerzas atractivas.

2.2.1. Ejemplos:

1. Ley de kepler para un MCU
2. Dos estrellas de masas m y M separadas por una distancia d , giran en órbita circular alrededor de su centro de masa CM, tal como se muestra en la parte izquierda de la Fig. 2.6.

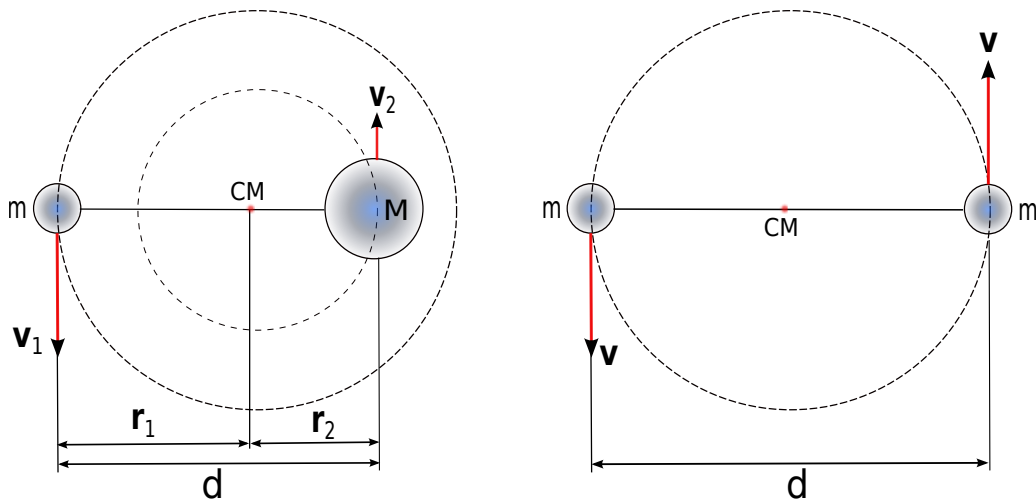


Figura 2.6: Sistema binario de estrellas en órbitas circulares con distintas e iguales masa.

- a) Determinar el periodo de cada estrella.
- b) Suponga que $M \gg m$. En este caso, se puede asumir que la masa M está en el centro de masa del sistema. ¿Cuál es el periodo en este caso? ¿Es compatible con la tercera Ley de Kepler para el movimiento elíptico con excentricidad 0 (órbita circular)?
- c) El sistema binario Plaskett consiste de dos estrellas de masas iguales girando en torno a su centro de masa CM, tal como se muestra en la parte derecha de la Fig. 2.6. La rapidez de cada estrella es aproximadamente $v = 300 \text{ km/s}$ y el periodo orbital es de 14,396 días https://en.wikipedia.org/wiki/Plaskett%27s_Star. Use el resultado del primer literal para determinar la masa m de cada estrella.

Solución:

- a) En primer lugar, sabemos que la fuerza que experimenta la masa M debido a su interacción con la masa m esta dada por ley de gravitación universal:

$$F = G \frac{Mm}{d^2} \quad (2.9)$$

Por otro lado, sabemos que la fuerza gravitacional que actúa sobre las masas es de carácter central y que el movimiento alrededor de su centro de masa es circular uniforme con distintos radios r_1 y r_2 , pero con igual velocidad angular ω . Por lo tanto, la fuerza que experimenta la masa M debido a su interacción con la masa m está dada por:

$$F = M \frac{v_2^2}{r_2} = M\omega^2 r_2. \quad (2.10)$$

Note que usamos la relación $v = \omega r$, para un movimiento circular uniforme.

Análogamente, la fuerza central que experimenta la masa m debido a su interacción con la masa M está dada por la siguiente expresión:

$$F = m \frac{v_1^2}{r_1} = m\omega^2 r_1. \quad (2.11)$$

Ahora, si multiplicamos la ec. (2.10) la masa m y la ec. (2.11) la masa M y las sumamos, tenemos la siguiente ecuación:

$$F(m + M) = \omega^2 Mm (r_1 + r_2). \quad (2.12)$$

Despejando la fuerza F de la ec. (2.9) y reemplazando en la ec. (2.12), tenemos que:

$$G \frac{Mm}{d^2} (m + M) = \omega^2 Mm (r_1 + r_2). \quad (2.13)$$

Finalmente, usamos la definición del periodo en un movimiento circular uniforme $P = \frac{2\pi}{\omega}$ y la relación $r_1 + r_2 = d$ mostrada en la Fig. 2.6, para concluir que:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m + M)} d^3. \quad (2.14)$$

b) Si asumimos que $M \gg m$ en la ec. (2.13), entonces:

$$P^2 \approx \frac{4\pi^2}{GM} d^3, \quad (2.15)$$

es decir, obtenemos la tercera ley de Kepler para el caso de un movimiento circular. Recordemos que esta ley fue originalmente deducida para el sistema planetario en el cual la masa del sol es mucho mayor que la masa de los planetas, y en este contexto la aproximación $M \gg m$ es completamente válida. De igual forma, es importante aclarar, que las órbitas planetarias realmente son elípticas en las cuales la distancia d debe ser interpretada como el semieje mayor de la elipse (parámetro comúnmente llamado a). Por lo tanto, podemos afirmar que este resultado es compatible con la tercera ley de Kepler.

c) Usando la ec. (2.14) con $M = m$, tenemos que:

$$m = \frac{2\pi^2 d^3}{GP^2}, \quad (2.16)$$

además, en el movimiento circular se cumple que:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi d}{v}, \quad (2.17)$$

donde usamos la relación $R = d/2$ entre el diámetro y el radio de la órbita circular. Combinando las dos últimas ecuaciones tenemos que:

$$m = \frac{2v^3 P}{\pi G} = \frac{2 \times (3 \times 10^5 \text{ m/s})^3 \times (14,396 \times 24 \times 3600 \text{ s})}{\pi \times 6,673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2} \approx 3,204 \times 10^{32} \text{ kg}, \quad (2.18)$$

es decir, alrededor de cien veces la masa del sol ($M_{\odot} \approx 1,988 \times 10^{30} \text{ kg}$).

3. Suponga que un satélite de masa $m = 2000 \text{ kg}$ está en órbita elíptica alrededor de la tierra. En el perigeo (punto de mayor cercanía a la tierra) tiene una altitud de 1100 km y en el apogeo (punto de mayor lejanía a la tierra) tiene una altura de 4100 km. Suponga que se quiere transferir el satélite desde la órbita elíptica a la órbita circular cambiando su velocidad en el perigeo, tal como se muestra en la Fig. 2.7. Asuma que el radio terrestre es $R \approx 6400 \text{ km}$.

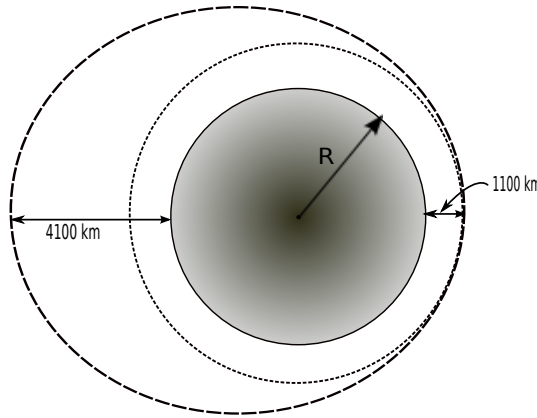


Figura 2.7: Cambio de órbita de un satélite.

- Determinar la energía mecánica del satélite en ambas órbitas.
- Determinar la excentricidad de la órbita elíptica.
- ¿Cuál debe ser el cambio en la velocidad del satélite en el perigeo para realizar la transferencia hacia la órbita circular?
- Determinar el momento angular en ambas órbitas.

Solución:

- La energía mecánica de un cuerpo de masa m en un órbita elíptica alrededor de un cuerpo de masa $M \gg m$ esta dada por la expresión:

$$E = -\frac{GmM}{2a}, \quad (2.19)$$

donde a es el semieje mayor de la órbita. Por lo tanto, la energía mecánica en la órbita elíptica es:

$$E_1 = -\frac{GmM}{2a} = -\left(\frac{GM}{R^2}\right) \frac{mR^2}{2a} = -g \frac{mR^2}{2a} \quad (2.20)$$

donde $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre. Reemplazando los valores numéricos:

$$E_1 = -9,8 \text{ m/s}^2 \left(\frac{2 \times 10^3 \text{ kg} \times (6400 \times 10^3 \text{ m})^2}{(1100 + 4100 + 2(6400)) \times 10^3 \text{ m}} \right) \approx -4,46 \times 10^{10} \text{ J}. \quad (2.21)$$

Análogamente, en la órbita circular, la energía mecánica también está dada por la ec. (2.19), donde ahora el semieje mayor de la órbita debe ser interpretado como la distancia que hay al perigeo, es decir:

$$E_2 = -9,8 \text{ m/s}^2 \left(\frac{2 \times 10^3 \text{ kg} \times (6400 \times 10^3 \text{ m})^2}{2(1100 + 6400) \times 10^3 \text{ m}} \right) \approx -5,35 \times 10^{10} \text{ J}. \quad (2.22)$$

b) La excentricidad de la órbita elíptica puede determinarse usando la expresión:

$$\epsilon = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}, \quad (2.23)$$

donde r_{\max} y r_{\min} son respectivamente las distancias al apogeo y al perigeo de la órbita elíptica. Recuerde que estas son las distancias de mayor lejanía y mayor cercanía entre los centros de masa de ambos cuerpos. En este caso:

$$\epsilon = \frac{((R + 4100) - (R + 1100)) \text{ km}}{((R + 4100) + (R + 1100)) \text{ km}} = \frac{3000}{(2R + 5200)} = \frac{3000}{12800 + 5200} = \frac{1}{6}. \quad (2.24)$$

c) Para determinar el cambio en la velocidad del satélite, calculemos primero su rapidez en el perigeo para cada una de las dos órbitas. En este punto esta rapidez es fija una vez se tiene una órbita de movimiento. Para lo anterior, usaremos la definición de la energía mecánica para la órbita elíptica en el perigeo:

$$E_1 = -G \frac{Mm}{r_{\min}} + \frac{1}{2} m v_1^2, \quad (2.25)$$

Por lo tanto:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_1 + G \frac{mM}{r_{\min}} \right)} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_1 + g \frac{mR^2}{r_{\min}} \right)}, \quad (2.26)$$

donde usamos nuevamente el valor de la gravedad sobre la superficie terrestre. Finalmente, podemos concluir que el cambio en la rapidez está dado por:

$$\Delta v = (v_2 - v_1) = \sqrt{\frac{2}{m} \left[\sqrt{\left(E_1 + g \frac{mR^2}{r_{\min}} \right)} - \sqrt{\left(E_2 + g \frac{mR^2}{r_{\min}} \right)} \right]} \approx -584,784 \text{ m/s}, \quad (2.27)$$

donde tuvimos en cuenta que la rapidez v_2 tiene la misma estructura de la ec. (2.26) cambiando E_1 por la energía E_2 . De este resultado se puede concluir que el satélite debe disminuir su velocidad para poder pasar desde la órbita elíptica a la órbita circular.

d) El momento angular en ambas órbitas es respectivamente:

$$L_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{p}_1| = m r_{\min} v_1 \approx 1,18531 \times 10^{14} \text{ kg m}^2/\text{s} \quad (2.28)$$

$$L_2 = |\vec{r}_2 \times \vec{p}_2| = m r_{\min} v_2 \approx 1,09759 \times 10^{14} \text{ kg m}^2/\text{s}. \quad (2.29)$$

2.2.2. Ejercicios:

1. Suponga que el movimiento de la tierra alrededor del sol es casi circular (la excentricidad e de la órbita de la tierra es casi 0) y determine la constante k que aparece en la tercera ley del Kepler $P^2 = ka^3$.
2. Calcule la masa el sol usando el periodo de rotación de la tierra alrededor del sol $P \approx 356$ días $\approx 3,156 \times 10^7$ s y sabiendo que la distancia tierra sol es $r \approx 1,496 \times 10^{11}$ m (distancia desde el centro de la tierra al centro del sol).
3. Calcule el valor de la gravedad terrestre usando el radio de la tierra $R \approx 6,37 \times 10^6$ m y la masa de la tierra $M \approx 5,98 \times 10^{24}$ kg.
4. Considere un satélite de masa m que se mueve en órbita circular alrededor de la tierra con una rapidez v constante y a una altura fija h sobre la superficie terrestre. Si el satélite es geoestacionario (permanece en una posición fija sobre la tierra), ¿qué tan rápido debe moverse? y ¿a qué altura?
Respuesta: $v = 3,07 \times 10^3$ m/s, $h \approx 36000$ km.
5. Si el periodo de la luna alrededor de la tierra es de 28 días, ¿cuál debe ser el periodo de un satélite que órbita la tierra a una distancia 1/10 de la distancia tierra - luna?
Respuesta: $T = 28 (1/10^{3/2})$ días.

2.3. Campo Gravitacional

Supongamos que tenemos una masa puntual m y a diferentes posiciones de m ponemos una masa puntual m' . En cada posición m experimenta una fuerza \vec{F} debido a la atracción gravitacional.

El campo gravitacional en un punto P producido por la masa m es definido como la fuerza ejercida sobre una unidad de masa m' colocada en P , es decir, es la fuerza ejercida sobre una masa de prueba m' dividida sobre m' , es decir:

$$\vec{g}_p(r) = \frac{\vec{F}}{m'} = -G \frac{m}{r^2} \hat{u}_r \quad (2.30)$$

Para el caso general de una distribución de masa volumétrica (Fig. 2.9), superficial o lineal; el campo gravitacional se calcula con la siguiente expresión:

$$\vec{g}_p(r) = -G \int_M \frac{dm}{r^2} \hat{u}_r, \quad (2.31)$$

donde la integral debe hacerse sobre todo el cuerpo de masa M . Note que que el la ecuación anterior, el vector unitario \hat{u}_r y la magnitud r son variables al igual que dm , tal como se muestra en la Fig. 2.9.

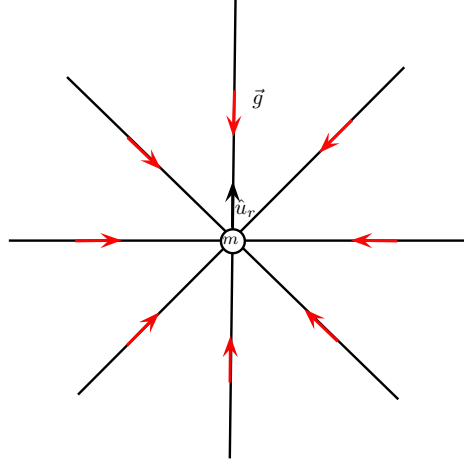


Figura 2.8: Campo gravitacional generado por una masa puntual m

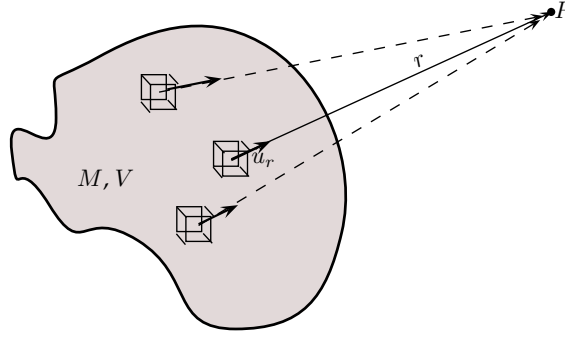


Figura 2.9: Campo gravitacional generado por una masa M .

2.3.1. Energía potencial gravitacional $E_p(r) = U_p(r)$

Dado que la fuerza gravitacional \vec{F}_g es una fuerza central y sólo depende de la distancia r entre las dos masas (Fig. 2.10), entonces \vec{F}_g es una fuerza conservativa y podemos asociarle una función energía potencial gravitacional $E_p(r)$.

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_g(r) &= -G \frac{mm'}{r^2} \hat{u}_r = -\vec{\nabla} E_p(r) = -\hat{u}_r \frac{\partial}{\partial r} E_p(r) \\
 \Rightarrow -G \frac{mm'}{r^2} &= -\frac{\partial}{\partial r} E_p(r) \Rightarrow \int_{\infty}^r \frac{Gmm'}{r^2} dr = \int_0^{E_p} dE_p \\
 \Rightarrow \boxed{E_p(r) &= -\frac{Gmm'}{r}}, \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

donde hemos definido $E_p(\infty) = 0$, es decir, hemos tomado el cero de energía potencial en el infinito.

Para un sistema de n masas puntuales m_1, m_2, \dots, m_n , la energía potencial del sistema está dada por:

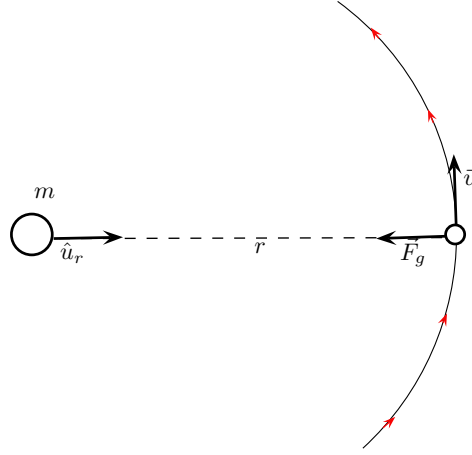


Figura 2.10: Energía potencial

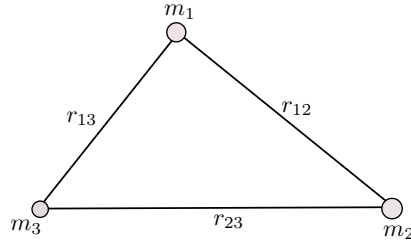


Figura 2.11: Tres masas puntuales

$$E_p = U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{-Gm_i m_j}{r_{ij}} = \sum_{j < i=1}^n \frac{-Gm_i m_j}{r_{ij}}, \quad (2.33)$$

donde r_{ij} es la magnitud del vector posición que va desde la masa m_i hasta la masa m_j .

Ejemplos

- Para dos masas puntuales m_1, m_2 , separadas una distancia $r = r_{12}$:

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (2.34)$$

- Para tres masas puntuales m_1, m_2, m_3 , separadas distancias r_{12}, r_{13}, r_{23} (ver Fig. 2.11 para mayor ilustración):

$$\begin{aligned} U &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \\ &= -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

- Para cuatro masas puntuales m_1, m_2, m_3, m_4 , separadas distancias $r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}$:

$$U = -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_1 m_4}{r_{14}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_2 m_4}{r_{24}} + \frac{m_3 m_4}{r_{34}} \right)$$

Ejemplo

Un proyectil de masa m es lanzado desde la superficie de la tierra formando un ángulo α con la vertical tal como se muestra en la Fig. 2.12. Si la rapidez inicial del proyectil es $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_e}}$, donde M es la masa de la tierra, determinemos la altura máxima alcanzada por el proyectil (r_{max}). [?] [?]

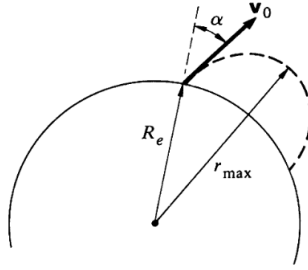


Figura 2.12: Altura máxima (r_{max}) en un tiro parabólico

Usando la conservación de la energía mecánica del sistema masa-tierra, tenemos:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r_{max}}, \quad (2.36)$$

donde v , es la rapidez cuando se alcanza la altura máxima.

Por otro lado, usando la conservación del momento angular del sistema masa-tierra, tenemos:

$$mRv_0 \sin \alpha = mr_{max}v \quad (2.37)$$

Usando las dos ecuaciones anteriores, tenemos que:

$$r_{max} = R(1 + \cos \theta) \quad (2.38)$$

2.3.2. Potencial gravitacional $V(r)$

Se define el potencial gravitacional $V(r)$ como la energía potencial por unidad de masa m' colocada en el campo gravitacional.

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{m'} = -\frac{Gm}{r} \quad (2.39)$$

Note que:

$$g(r) = -\frac{Gm}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{Gm}{r} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g}(r) = -\vec{\nabla}V(r)} \quad (2.40)$$

La ecuación anterior es fundamental. El concepto de potencial gravitacional juega un papel muy importante en el cálculo de algunos campos, debido a que es una cantidad escalar, la cual “casi” siempre es más fácil de calcular que la cantidad vectorial \vec{g} . Una vez calculado $V(r)$ hallamos \vec{g} usando la ec. (2.40).

Definimos la **superficie equipotencial** como aquella superficie que rodea a la masa m en la cual V tiene el mismo valor.

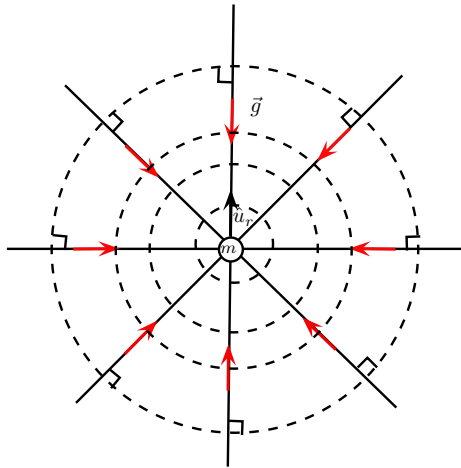


Figura 2.13: Superficie equipotenciales de una carga puntual (curva a rayas).

Para el caso de distribuciones continuas de masa, el potencial gravitacional ha de calcularse mediante la ecuación:

$$\boxed{V(r) = -G \int_M \frac{dm}{r}} \quad (2.41)$$

Principio de superposición para masas puntuales

En cualquier campo P (Fig. 2.14), el campo debido a un grupo de masas m_1, m_2, \dots, m_n , es igual al vector suma de los campos \vec{g}_i generados por cada una de masas individuales, es decir, el campo en el punto P es la superposición de los campos individuales \vec{g}_i :

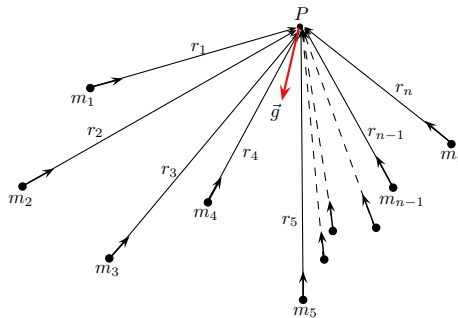


Figura 2.14: Principio de superposición para campos

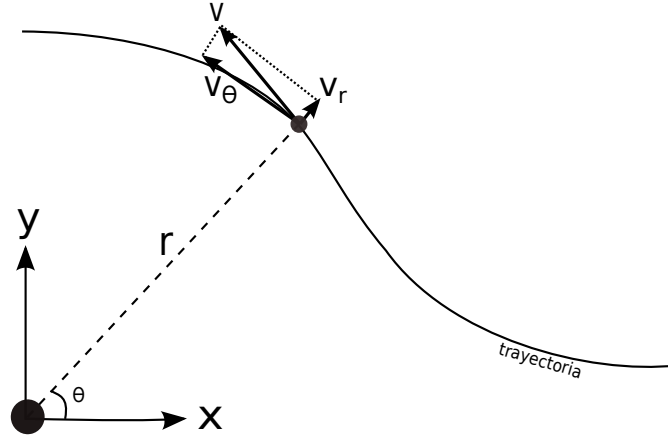


Figura 2.15: Movimiento general de un cuerpo bajo interacción gravitacional.

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i = - \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i^2} \hat{u}_i \quad (2.42)$$

Análogamente el potencial en el punto P es:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \frac{-Gm_i}{r_i} \quad (2.43)$$

2.4. Movimiento general bajo interacción gravitacional

Consideremos el movimiento de un cuerpo de masa m alrededor de un cuerpo de masa $M > m$ tal como se muestra en la Fig. 2.15. Según la conservación de la energía mecánica

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) &= \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{Gm}{r} = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{Gm}{r} \\ &= \frac{1}{2}m \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] - \frac{Gm}{r}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Por otro lado, usando la definición de momento angular

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m \vec{r} \times \vec{v}_\theta \rightarrow L = m r \left(r \frac{d\theta}{dt} \right). \quad (2.45)$$

Reemplazando la ec. (2.45) en la ec. (2.44) tenemos que:

$$\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{m^2 r^4}{L^2} \left(\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right). \quad (2.46)$$

Por otro lado, en el estudio de la geometría se tiene que la ecuación de las cónicas es

$$\frac{\epsilon d}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta, \quad (2.47)$$

donde ϵ es la excentricidad de la cónica, d es la distancia a la directriz y r, θ son la coordenadas polares [?]. Usando esta ecuación se tiene que

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4 \sin^2 \theta}{d^2}. \quad (2.48)$$

Por lo tanto, de acuerdo a las ecs. (2.46) y (2.48) tenemos que:

$$\sin^2 \theta = \frac{d^2 m^2}{L^2} \left(\frac{2E}{m} + \frac{2Gm}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) = \left(1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{r\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2} \right), \quad (2.49)$$

donde usamos la ec. (2.47). Comparando las potencias en la coordenada r tenemos las siguientes dos relaciones:

- Potencias de r^0 :

$$1 - \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{2d^2 m E}{L^2} \rightarrow E = \frac{L^2}{2d^2 m} \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2} \right). \quad (2.50)$$

- Potencias de r^{-1} :

$$\frac{2d}{r\epsilon} = \frac{2d^2 m^2 G M}{r L^2} \rightarrow \epsilon = \frac{L^2}{d m^2 G M}. \quad (2.51)$$

A continuación, en la Tabla 2.1. mostramos algunas características de las tres cónicas mostradas, enfatizando en el caso particular de la elipse. Note que aunque el tamaño de una órbita

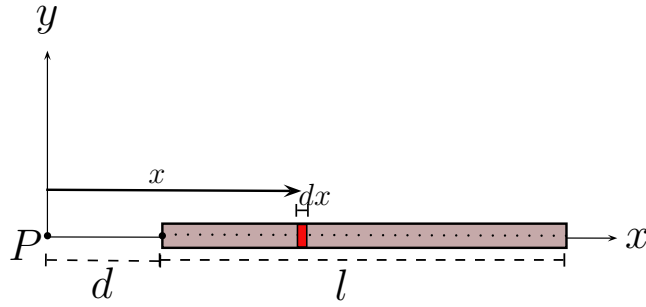
Cónica	Excentricidad	Energía	Momento angular
Elipse	$0 \leq \epsilon < 1$	$E = -\frac{GMm}{2a} < 0$	$L^2 = Gm^2 Ma(1 - \epsilon^2)$
Parábola	$\epsilon = 1$	$E = 0$	$L > 0$
Hipérbola	$\epsilon > 1$	$E > 0$	$L > 0$

Tabla 2.1: Energía y momento angular en una órbita elíptica. Recuerde que $\epsilon = 0$ es la circunferencia.

elíptica está determinado por la energía, es decir $E \approx -1/a$, la forma de la elipse (excentricidad) está determinado por el momento angular. En general, se pueden tener muchas órbitas elípticas con la misma energía, pero con distinto momento angular.

2.5. Distribuciones continuas de masa

2.5.1. Ejemplos de campo gravitacional

Figura 2.16: Campo en el eje de una barra de longitud l .

Campo de una barra

1. Una barra delgada de longitud l tiene una masa m uniformemente distribuida tal como muestra en la Fig. 2.16. El campo en el punto P a una distancia d por el eje de la barra está dado por:

$$\vec{g} = -G \int_m \frac{dm}{r^2} \hat{u}_r = -G \int_m \frac{dm}{x^2} (-\hat{i}). \quad (2.52)$$

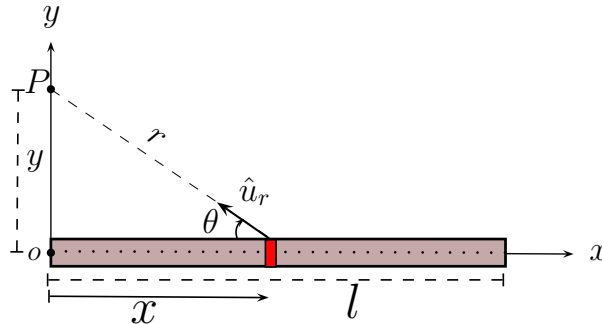
Usando la función densidad lineal de masa:

$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{m}{l} \Rightarrow dm = \frac{m}{l} dx,$$

tenemos que:

$$\vec{g} = -G \int_d^{d+l} \frac{dm}{x^2} (-\hat{i}) = G \frac{M}{d(d+l)} \hat{i}. \quad (2.53)$$

2. Una barra delgada de longitud l tiene una masa m uniformemente distribuida tal como se muestra en la Fig. 2.17. El campo en el punto P está dado por:

Figura 2.17: Campo en el eje perpendicular a un extremo de una barra de longitud l .

$$\begin{aligned}
\vec{g} &= -G \int_m \frac{dm}{r^2} \hat{u}_r = -G \int_m \frac{dm}{r^2} (-\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \\
&= -G \int_m \frac{dm}{r^2} \left(-\frac{x}{r} \hat{i} + \frac{y}{r} \hat{j}\right) = -G \int_0^l (m/l) dx \left(-\frac{x}{r^3} \hat{i} + \frac{y}{r^3} \hat{j}\right) \\
&= -\frac{Gm}{l} \int_0^l dx \left(-\frac{x}{(y^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} + \frac{y}{(y^2 + x^2)^{3/2}} \hat{j}\right) \\
&= \frac{Gm}{l} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + y^2}}\right) \hat{i} - \frac{Gm}{y} \frac{1}{\sqrt{l^2 + y^2}} \hat{j}. \tag{2.54}
\end{aligned}$$

3. Caso general: Campo en el punto P mostrado en la Fig. 2.18.

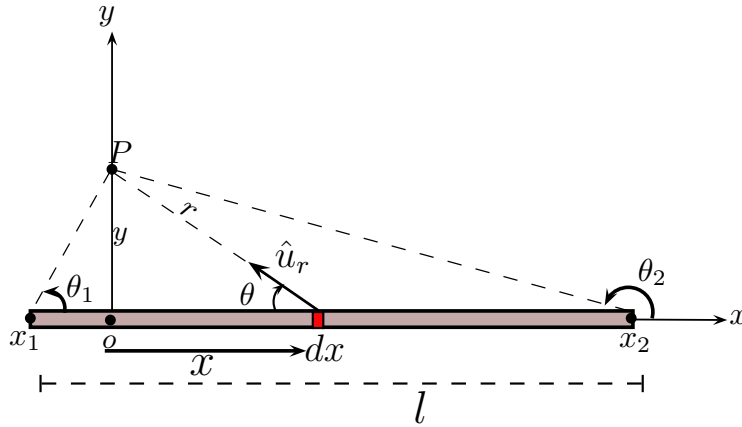


Figura 2.18: Campo general a una distancia y perpendicular al eje de una barra de longitud l .

$$\begin{aligned}
\vec{g} &= -G \int_m \frac{dm}{r^2} \hat{u}_r = -G \int_m \frac{dm}{r^2} (-\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = -G\lambda \int_m dx \left[\frac{-x}{r^3} \hat{i} + \frac{y}{r^3} \hat{j} \right] \\
&= -G\lambda \left[-\int_{-x_1}^{x_2} \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{i} + \int_{-x_1}^{x_2} \frac{y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{j} \right] \\
&= -G\lambda \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right) \hat{i} + \frac{1}{y} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right) \hat{j} \right], \tag{2.55}
\end{aligned}$$

o alternativamente, usando $x_1 = y/\tan \theta_1$ y $x_2 = -y/\tan \theta_2$:

$$\vec{g} = \frac{-G\lambda}{y} \left[(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \hat{i} + (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \hat{j} \right]. \tag{2.56}$$

En el caso de tener una *barra infinita* de densidad λ uniforme podemos usar el resultados anterior con $x_2 \rightarrow \infty$ y $x_1 \rightarrow -\infty$ ó $\theta_1 \rightarrow 0$ y $\theta_2 \rightarrow \pi$, tal que:

$$\vec{g}(y) = \frac{-2G\lambda}{y} \hat{j}. \tag{2.57}$$

Ejercicio: Use el resultado general para el campo de una barra y verifique los dos casos particulares hechos con anterioridad.

Campo de una anillo

Un anillo de radio R tiene una masa m uniformemente distribuida. El campo \vec{g} en un punto P a lo largo del eje del anillo, tal como se muestra en la Fig. 2.19.

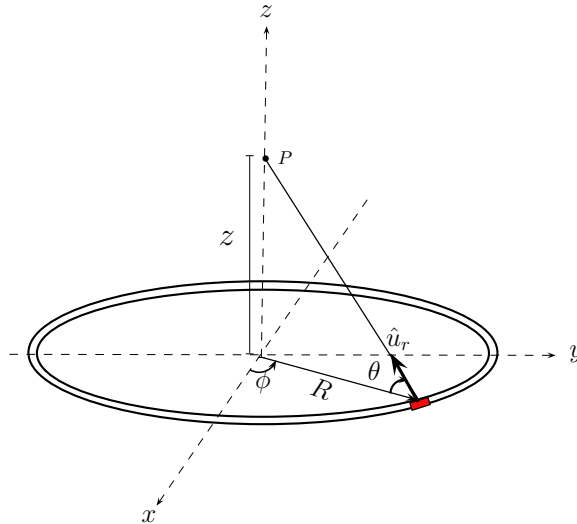


Figura 2.19: Campo en el eje de un anillo de radio R .

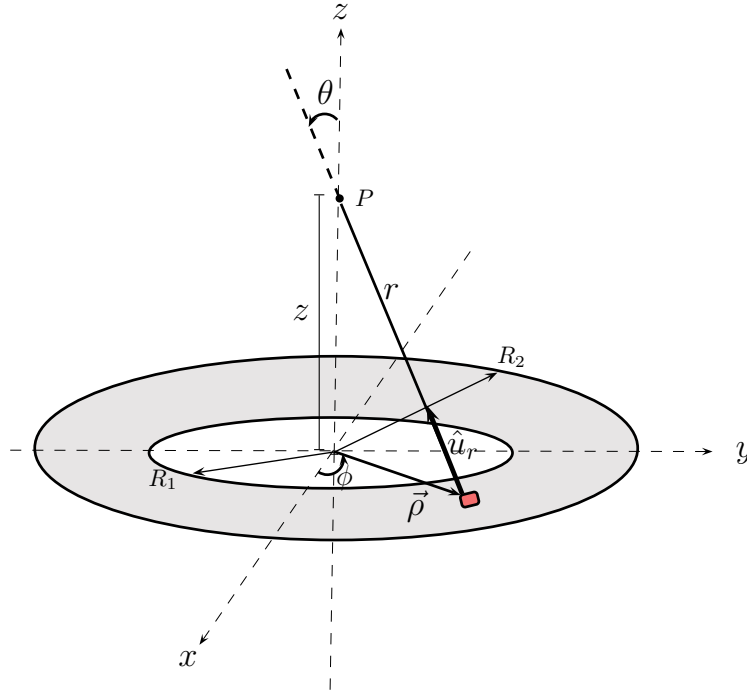
$$\begin{aligned}
 \vec{g} &= -G \int_m \frac{dm}{r^2} \hat{u}_r = -G \int_m \frac{dm}{r^2} (\sin \theta \hat{k} - \cos \theta \hat{R}) \\
 &= -G \int_m \frac{dm}{r^2} [\sin \theta \hat{k} - \cos \theta (\cos \phi \hat{i} - \sin \phi \hat{j})] \\
 &= -G \int_0^{2\pi} \frac{md\phi}{2\pi} \frac{1}{r^2} [\sin \theta \hat{k} - \cos \theta (\cos \phi \hat{i} - \sin \phi \hat{j})] \\
 &= -G \frac{m2\pi}{2\pi r^2} \sin \theta \hat{k} = -G \frac{m}{r^2} \left(\frac{z}{r} \right) \hat{k} = -Gm \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}. \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

Note que en el cálculo anterior usamos:

$$\lambda = \frac{m}{l} = \frac{m}{2\pi R} = \frac{dm}{dl} = \frac{dm}{Rd\phi} \Rightarrow dm = \frac{md\phi}{2\pi}.$$

Campo de una arandela y de un disco

Considere un disco hueco de radio exterior R_2 , radio interior R_1 y masa m uniformemente distribuida. El campo gravitacional en el punto P mostrado en la Fig. 2.20 está dado por:

Figura 2.20: Arandela de radio interno R_1 y radio externo $R_2 > R_1$.

$$\begin{aligned}
 \vec{g} &= \int_m G \frac{dm}{r^2} \hat{u}_r = \int_m G \frac{\sigma \rho d\rho d\phi}{r^2} (\cos \theta \hat{k} - \sin \theta \hat{\rho}) \\
 &= G \int_m \frac{\sigma \rho d\rho d\phi}{r^2} \left(\frac{z}{r} \hat{k} - \frac{\rho}{r} (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) \right) \\
 &= G \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma \rho d\rho d\phi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \left(z \hat{k} - \rho (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) \right) \\
 &= G \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi \sigma \rho d\rho d\phi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{2mG}{(R_2^2 - R_1^2)} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} \right) \hat{k}. \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

Note que si $R_1 \rightarrow 0$, tenemos el campo de un disco o moneda de radio R_2 :

$$\vec{g}(z) = \frac{-2mG}{R_2^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right) \hat{k}. \quad (2.60)$$

Además, si $R_1 \rightarrow 0$ y $z \gg R_2$ tenemos aproximadamente el campo de masa puntual m , lo cual es de esperarse ya que desde muy lejos cualquier configuración de masa ha de verse como una masa puntual, tal que:

$$\vec{g} \approx -G \frac{m}{z^2} \hat{k}. \quad (2.61)$$

Campo de un plano

Para calcular el campo de un plano muy grande (infinito) con densidad de masa σ uniforme podemos usar el resultado obtenido para el campo de disco dado por la ec. 2.60. El campo gravitacional del plano se obtiene haciendo infinito el radio del disco, tal como se muestra en

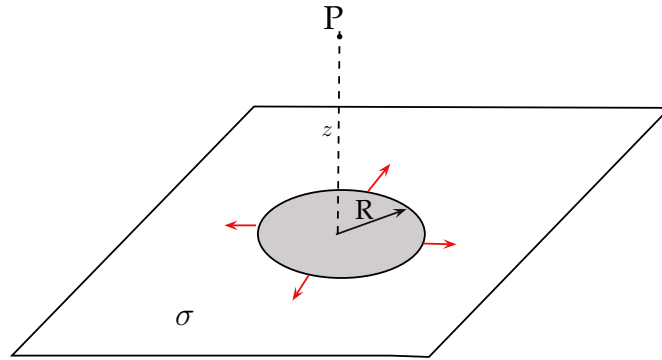


Figura 2.21: Plano infinito con densidad superficial de masa σ .

la Fig. 2.21. Es decir:

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-2mG}{R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \hat{k} = \lim_{R \rightarrow \infty} -2\pi\sigma G \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \hat{k} \\ &= -2\pi\sigma G \hat{k},\end{aligned}\tag{2.62}$$

donde usamos la función densidad $\sigma = m/(\pi R^2)$.

Campo de una superficie esférica

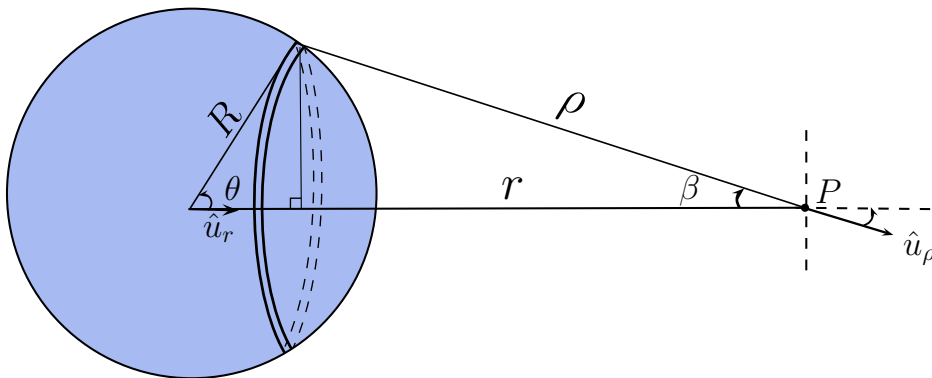


Figura 2.22: Cascarón esférico de radio R .

Calculemos el campo para un cascarón esférico de radio R y masa m uniformemente distribuida tal como se muestra en la Fig 2.22.

1. Para $r > R$ (exterior del cascarón esférico). De acuerdo a la Fig. 2.22:

$$\vec{g}_p = -G \int_m \frac{dm}{\rho^2} \hat{u}_\rho.\tag{2.63}$$

Dada la simetría del problema, al integrar sólo sobrevive la componente del vector \hat{u}_ρ en la dirección de \hat{u}_r , tal que:

$$\vec{g} = -G \int_m \frac{dm}{\rho^2} \hat{u}_\rho == -G \int_m \frac{dm}{\rho^2} \cos \beta \hat{u}_r.\tag{2.64}$$

Además, si la distribución superficial de masa σ es uniforme, entonces:

$$\sigma = \frac{m}{4\pi R^2} = \frac{dm}{dA} = \frac{dm}{2\pi R^2 \sin \theta d\theta} \Rightarrow dm = \frac{1}{2}m \sin \theta d\theta, \quad (2.65)$$

Por otro lado, usando la ley del coseno en el triángulo de lados r , R y ρ , tenemos:

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta. \quad \text{Derivando} \Rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{\rho}{Rr} d\rho. \quad (2.66)$$

$$R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{r^2 + \rho^2 - R^2}{2r\rho}. \quad (2.67)$$

Reemplazando las tres ecuaciones anteriores en la ecuación para el campo tenemos que:

$$\vec{g}(r) = -\frac{Gm}{4Rr^2} \hat{u}_r \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{\rho^2}\right) d\rho = -G \frac{m}{r^2} \hat{u}_r. \quad (2.68)$$

2. Para $r < R$ (interior del cascarón esférico). De acuerdo a la Fig. 2.22:

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{4Rr^2} \hat{u}_r \int_{R-r}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{\rho^2}\right) d\rho = \hat{0}. \quad (2.69)$$

El resultado obtenido para el campo gravitacional de un cascarón esférico, marca uno de los resultados fundamentales en la teoría de campo gravitacional.

- El campo gravitacional en el exterior de un cascarón esférico, es equivalente al campo generado por una masa puntual m situada en el centro de masa de dicho cascarón.
- El campo gravitacional en el interior es nulo.

Campo de una esfera maciza con densidad de masa uniforme ρ

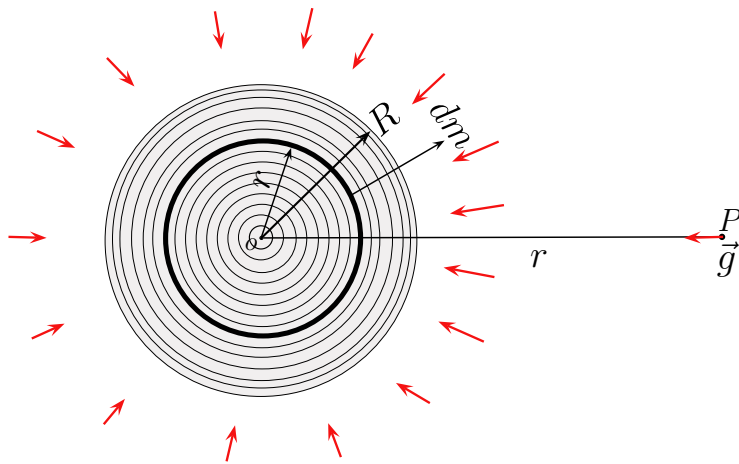


Figura 2.23: Esfera maciza de radio R y masa m .

1. Para $r > R$ (exterior de la esfera), podemos integrar en cascarones esféricos y usar el resultado obtenido para el campo generado por un cascarón de masa diferencial dm en el punto P (ec. (2.68)).

$$\vec{g}(r) = \int_m d\vec{g} = \int_m \left(-G \frac{dm}{r^2} \hat{u}_r \right) = -G \frac{1}{r^2} \hat{u}_r \int_m dm = -G \frac{m}{r^2} \hat{u}_r, \quad (2.70)$$

donde debe quedar claro que ahora m es la masa neta de la esfera maciza.

2. Para $r < R$ (interior de la esfera) sólo contribuye la masa m' localizada en la esfera de radio $r < R$ tal como se muestra en la Fig. 2.23, tal que:

$$\vec{g}(r) = -G \frac{m'}{r^2} \hat{u}_r = -G \left(m \frac{r^3}{R^3} \right) \frac{1}{r^2} \hat{u}_r = -G m \frac{r}{R^3} \hat{u}_r, \quad (2.71)$$

donde tuvimos en cuenta que la densidad de la esfera es uniforme, así:

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow m' = m \frac{r^3}{R^3}.$$

Al igual que el resultado obtenido para el campo gravitacional de un cascarón esférico. El campo de una esfera maciza marca uno de los resultados fundamentales en la teoría de campos.

- El campo gravitacional atractivo en el exterior de una esfera, es equivalente al campo generado por una masa puntual m situada en el centro de masa de la esfera. Note que externamente no importa si la masa m está distribuida en un cascarón esférico o en una esfera maciza.
- El campo gravitacional en el interior, es el campo generado por la masa localizada en una esfera de radio $r < R$, es decir, el campo es generado por la masa que hay desde el punto interno hasta el centro de masa.

2.5.2. Ejemplos de potencial gravitacional

Potencial de una barra

Consideremos la barra mostrada en la Fig. 2.18 de masa m y longitud l . El potencial gravitacional en el punto P es:

$$\begin{aligned} V &= - \int_m G \frac{dm}{r} = - \int_m G \frac{\lambda dx}{r} = -G \int_{-x_1}^{x_2} \frac{\lambda dx}{\sqrt{y^2 + x^2}} \\ &= -G\lambda \left[\ln \left(\frac{\sqrt{x_2^2 + y^2}}{y} + \frac{x_2}{y} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y^2}}{y} - \frac{x_1}{y} \right) \right] \\ &= -G\lambda \ln \left(\frac{\sqrt{x_2^2 + y^2} + x_2}{\sqrt{x_1^2 + y^2} - x_1} \right), \end{aligned} \quad (2.72)$$

donde $\lambda = m/l = m/(x_1 + x_2)$ es la densidad de masa de la barra.

Potencial de un anillo

Consideremos el anillo de masa m uniformemente distribuida y radio R mostrado en la Fig. 2.19. El potencial gravitacional en el punto P es:

$$V = -G \int_m \frac{dm}{r} = -G \frac{1}{r} \int_m dm = -G \frac{m}{r} = -G \frac{m}{\sqrt{z^2 + R^2}}, \quad (2.73)$$

donde la distancia r desde el diferencial al punto medida P es constante. Por otro lado, note que:

$$\vec{g}(z) = -\vec{\nabla}V = -\hat{k} \frac{d}{dz}V(z) = -Gm \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}. \quad (2.74)$$

Resultado idéntico al obtenido usando la definición de campo (ver ec. 2.58). Tenga en cuenta que para este caso particular, ha sido más fácil calcular el potencial y a partir de él calcular el campo gravitacional.

Ejercicio: Suponga que una masa m' es colocada en el punto P . Calcule la rapidez de m' justo cuando pasa por el centro del anillo. ¿Qué condición matemática debe cumplirse para que m' ejecute un movimiento armónico simple? Determine la frecuencia de oscilación.

Respuesta:

$$v_0 = \sqrt{2Gm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)}$$

Si $z \ll R \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Gm}{R^3}z \approx 0$ y así:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Gm}{R^3}}.$$

Potencial de una arandela y un disco

Calculemos el potencial gravitacional de la arandela de radio exterior R_2 y radio interior $R_1 < R_2$ en el punto P mostrado en la Fig. 2.20.

$$\begin{aligned} V &= -G \int_m \frac{dm}{r} = -G \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma \rho d\rho d\phi}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \\ &= -G \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma 2\pi \rho d\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = -2\pi\sigma G \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2} \right) \\ &= -\frac{2Gm}{(R_2^2 - R_1^2)} \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2} \right). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Note que podemos determinar el campo gravitacional a partir de este potencial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{g}(z) &= -\vec{\nabla}V(z) = -\hat{k} \frac{d}{dz}V(z) \\ &= \frac{2mG}{(R_2^2 - R_1^2)} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} \right) \hat{k}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

expresión que fue calculada directamente con la definición del campo gravitacional (ver ec. 2.59).

Para un disco de radio R y masa m usamos la ec. 2.75 con $R_1 = 0$ y $R_2 = R$, tal que:

$$V = -\frac{2Gm}{R^2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right) = -2\pi G\sigma \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right). \quad (2.77)$$

Potencial de un plano infinito con densidad superficial de masa σ constante

$$V(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} V_{\text{disco}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-2\pi G\sigma \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right) \right] = -\infty + 2\pi G\sigma z, \quad (2.78)$$

dado que el potencial es infinito, realizamos el proceso de renormalización. Éste consiste en tomar la parte finita del potencial. Por lo tanto, el potencial renormalizado de un plano infinito de densidad de masas σ es:

$$V(z) = 2\pi G\sigma z. \quad (2.79)$$

Note que podemos determinar el campo gravitacional a partir de este potencial de la siguiente manera:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}V(z) = -\hat{k} \frac{d}{dz}(2\pi G\sigma z) = -2\pi\sigma G\hat{k}, \quad (2.80)$$

el cual fue calculado directamente con la definición del campo gravitacional (ver ec. 2.62).

Potencial de una superficie esférica de radio R

1. Para el exterior del cascarón esférico ($r \geq R$):

$$V = -G\frac{m}{r} \quad (2.81)$$

2. Para el interior del cascarón esférico ($r \leq R$):

$$V = -G\frac{m}{R} = \text{cte.} \quad (2.82)$$

Potencial de una esfera maciza de radio R

1. Para el exterior de la esfera ($r \geq R$):

$$V = -G\frac{m}{r} \quad (2.83)$$

2. Para el interior de la esfera ($r \leq R$):

$$V = \frac{Gm}{2R^3}(r^2 - 3R^2) \quad (2.84)$$

Capítulo 3

Electrostática

Claramente los experimentos de frotación pueden electrificar un cuerpo, lo cual se ve claramente en la atracción de pedasitos de papel cuando le arrimamos una barra de vidrio o de plástico que frotamos previamente. El fenómeno de electrificación también puede verse en las chispas que salen cuando nos quitamos una camisa en ciertos lugares relativamente secos.

3.1. Carga eléctrica

Experimentalmente **Benjamin Franklin (1706-1790)** fue quien determinó que existen dos tipos de cargas eléctricas a las que llamó positivas y negativas. Él determinó que dos barras de vidrio o dos barras de hule (caucho) cargadas por frotación se repelen y dos barras, una de vidrio y otra de hule cargadas, se atraen. El experimento es esquematizado brevemente en la Figura...

Posterior a esto se estableció una visión más moderna y concreta de la interacción eléctrica. Existen dos tipos de carga, una positiva (vidrio) y una negativa (hule), las cuales exhiben una de las características fundamentales de la interacción eléctrica; “**cargas de un mismo signo se repelen y cargas de signo contrario se atraen**”, Figura ...

3.1.1. Cuantización y conservación de la carga eléctrica

En 1909 **Robert Millikan (1868-1953)** (CITAR EXPERIMENTO) encontró que las cargas eléctricas siempre se presentan en múltiplos enteros de una cantidad básica $e = 1,609 \times 10^{-19}$ C, donde C es la unidad tomada para la carga eléctrica en el sistema internacional SI. Dado, lo anterior, un cuerpo cargado eléctricamente tiene una carga neta q , tal que:

$$q = \pm Ne, \quad N \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

Los cuerpos cargados tienen una carga neta $+Ne$ y los cuerpos electricamente negativos tienen una carga neta $-Ne$. Por ejemplo, la carga eléctrica del electrón es $-e$ y la carga eléctrica del protón es $+e$.

3.1.2. Ley de Coulomb

Charles Coulomb (1736-1806) midió la magnitud de la fuerza eléctrica entre dos objetos cargados que había sido estudiada y no cuantificada por Benjamin Franklin. Coulomb usó una

balanza de torsión y determinó que la fuerza de atracción o repulsión eléctrica entre dos cargas q_1 y q_2 separadas una distancia r está dada por:

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \quad (3.2)$$

donde $k_e = 8,9875 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ y $\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}^2\text{m}^2$ son constantes. La primera es llamada la constante eléctrica y la segunda es llamada la permitividad del espacio libre (vacío).

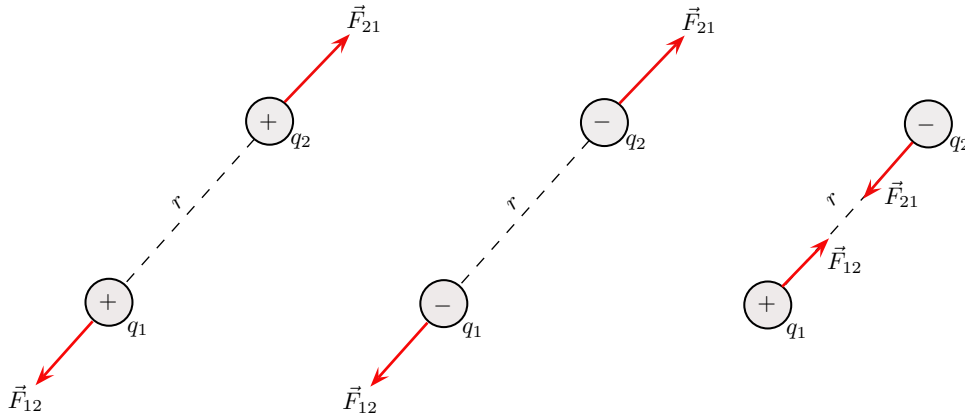


Figura 3.1: Atracción y repulsión eléctrica entre cargas eléctricas

El caracter vectorial de dicha fuerza depende del signo de ambas cargas, “**cargas de un mismo signo se repelen y cargas de signo contrario se atraen**”.

EJEMPLO:

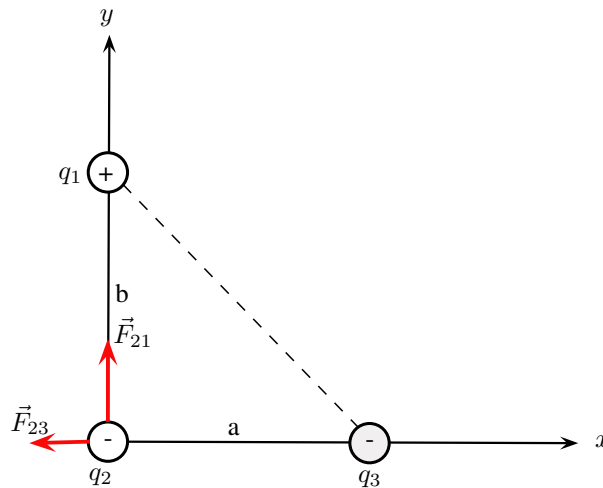


Figura 3.2: Fuerza neta sobre q_2

1. Calculemos la fuerza \vec{F}_2 que actúa sobre la carga q_2 debido a las cargas q_1 y q_3 . Use las cantidades dadas en la figura.

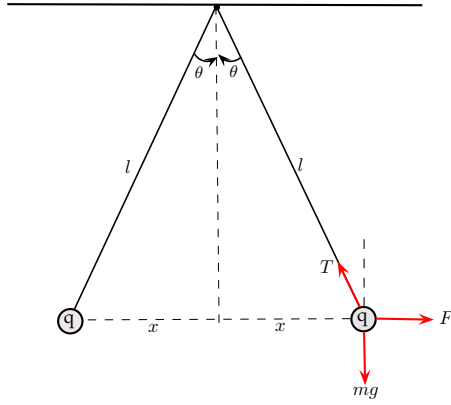


Figura 3.3: Repulsión eléctrica entre péndulos de cargas y masas iguales

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{21} = -k_e \frac{|q_2||q_3|}{a^2} \hat{i} + k_e \frac{|q_2||q_1|}{b^2} \hat{j} = k_e |q_2| \left[-\frac{|q_3|}{a^2} \hat{i} + \frac{q_1}{b^2} \hat{j} \right] \quad (3.3)$$

2. Calculemos el valor de la fuerza si $q_1 = 4\mu\text{ C}$, $q_2 = -2\mu\text{ C}$, $q_3 = -3\mu\text{ C}$, $a = 15\text{ cm}$ y $b = 10\text{ cm}$.

$$\vec{F}_2 = (-2,4N\hat{i} + 7,2N\hat{j}) \quad (3.4)$$

3. Ejercicio: Calcule la fuerza neta \vec{F}_1 y \vec{F}_3 que actúan sobre las cargas q_1 y q_3 respectivamente. Muestre que $\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$.

EJEMPLO: Dos masas puntuales m muy pequeñas e iguales, forman dos péndulos de longitud l (desprecie la masa de la cuerda). Debido a su repulsión mutua, las cuerdas forman un ángulo θ con la vertical, tal como se muestra en la figura. Calculemos la magnitud de la cada una de las cargas.

Según el diagrama de cuerpo mostrado en la figura:

$$\rightarrow^+ \sum_i F_{xi} = 0 \Rightarrow F_e = T \sin \theta \quad (3.5)$$

$$\uparrow^+ \sum_i F_{yi} = 0 \Rightarrow mg = T \cos \theta, \quad (3.6)$$

además, la fuerza eléctrica F_e está dada por:

$$F_e = k_e \frac{q^2}{(2x)^2} \quad (3.7)$$

Usando las ecuaciones anteriores y $\sin \theta = x/l$, se concluye que:

$$|q| = \sqrt{\frac{4mgl^2}{k_e \cos \theta \sin^3 \theta}} = (2l \sin \theta) \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \tan \theta}. \quad (3.8)$$

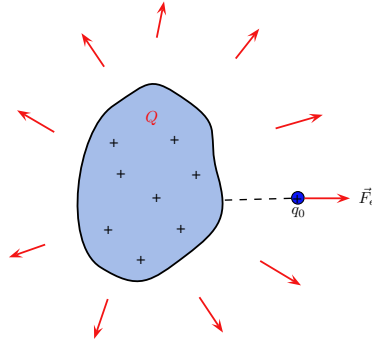


Figura 3.4: Definición de campo eléctrico

3.2. Campo eléctrico

El campo eléctrico \vec{E} en un punto del espacio se define como la fuerza eléctrica \vec{F}_e que actúa sobre una carga de prueba “positiva q_0 ” colocada en dicho punto, dividida entre la carga de prueba.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} \quad (3.9)$$

Se dice que existe un campo eléctrico en la región del espacio que rodea al cuerpo de carga Q . Cuando otro cuerpo cargado entra a este campo eléctrico, una fuerza eléctrica actúa sobre él.

Note que el campo es producido por la carga Q y no por la carga de prueba q_0 . Además, la fuerza que actúa a la distancia (no es necesario tener un contacto físico entre las cargas) es la que nos permite definir el concepto de campo eléctrico. Por último, las dimensiones del campo eléctrico en el sistema internacional SI, serán N/C.

Dirección del campo eléctrico → Líneas de campo

La dirección establecida para el campo eléctrico es una convención, es debida al hecho de que la carga de prueba q_0 es tomada positiva. Si la carga Q generadora del campo es positiva, entonces la línea de acción de la fuerza diverge de la carga Q y diremos que el campo eléctrico sale de las cargas positivas. Ahora, si Q es negativa, entonces la línea de acción de la fuerza va hacia la carga Q y diremos que el campo eléctrico entra a las cargas negativas (ver Figura 3.5).

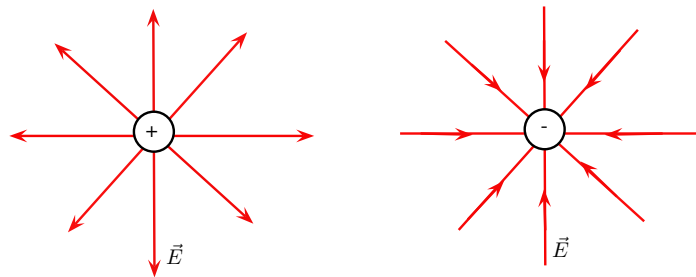


Figura 3.5: Dirección del campo eléctrico. Líneas de campo

Para el caso de una carga puntual (Figura 3.5) el campo eléctrico es:

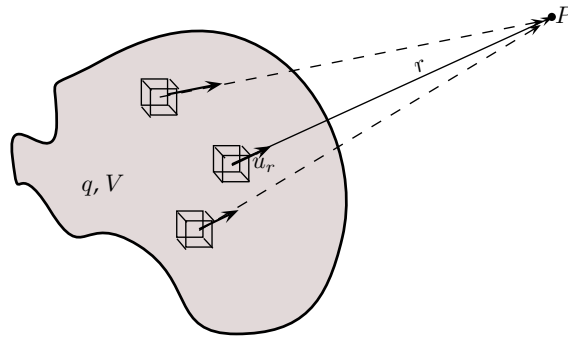
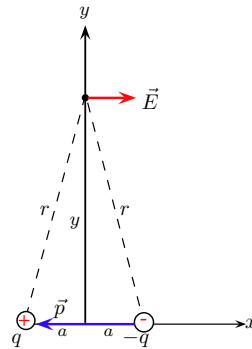
Figura 3.6: Campo eléctrico generado por una carga q 

Figura 3.7: Dipolo eléctrico

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r. \quad (3.10)$$

Para el caso general de una distribución de carga volumétrica, superficial o lineal; el campo eléctrico se calcula con la siguiente expresión:

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{u}_r, \quad (3.11)$$

donde la integral debe hacerse sobre todo el cuerpo de carga q (Figura 3.6). Note que en la ecuación anterior, el vector unitario \hat{u}_r y la magnitud r son variables al igual que dq .

Dipolo eléctrico

Dos cargas eléctricas opuestas, separadas una distancia $d = 2a$, forman lo que llamaremos un dipolo eléctrico (Figura 3.7).

El campo eléctrico en un punto $(0, y)$ está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{E}_y &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- \\ &= k \frac{q}{y^2 + a^2} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) + k \frac{q}{y^2 + a^2} (\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) \\ &= k \frac{2qa}{(y^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i} \end{aligned} \quad (3.12)$$

En general para $y \gg a$, $\frac{1}{(y^2 + a^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{y^3} \approx \frac{1}{r^3}$, y así:

$$E_y \approx k \frac{2qa}{y^3} \hat{i} \approx k \frac{2qa}{r^3} = k \frac{p}{r^3} \quad (3.13)$$

Donde se define el vector **momento de dipolo eléctrico** \vec{p} como una cantidad vectorial, con módulo p igual al producto de la carga q por la distancia ($d = 2a$) que separa las dos cargas, y cuya dirección va de la carga negativa a la carga positiva (Figura 3.7). Si una carga de prueba q_0 es acercada al dipolo eléctrico, sentirá una fuerza eléctrica, cuya magnitud es: $F = q_0 E \approx k q_0 \frac{p}{r^3}$.

Ahora, el campo eléctrico en un punto distante sobre el eje x , tal que $x \gg a$, es:

$$\vec{E}_x = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \left[\frac{kq}{(x+a)^2} - \frac{kq}{(x-a)^2} \right] \hat{i} \approx -2 \frac{2qa}{x^3} \hat{i} \Rightarrow E_x \approx k \frac{p}{r^3}, \quad (3.14)$$

donde r en este caso denota la magnitud del promedio del vector que va de cada una de las cargas al punto de medida del campo eléctrico.

3.2.1. Ejemplos de campos eléctricos

1. Consideremos un sector circular de un alambre de radio R , ángulo ϕ_0 y carga Q uniformemente distribuida. Calculemos el campo eléctrico en el punto P mostrado en la Figura 3.8.

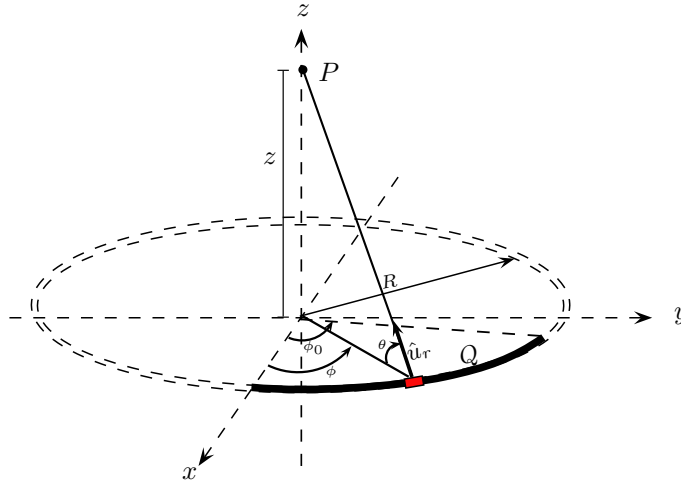
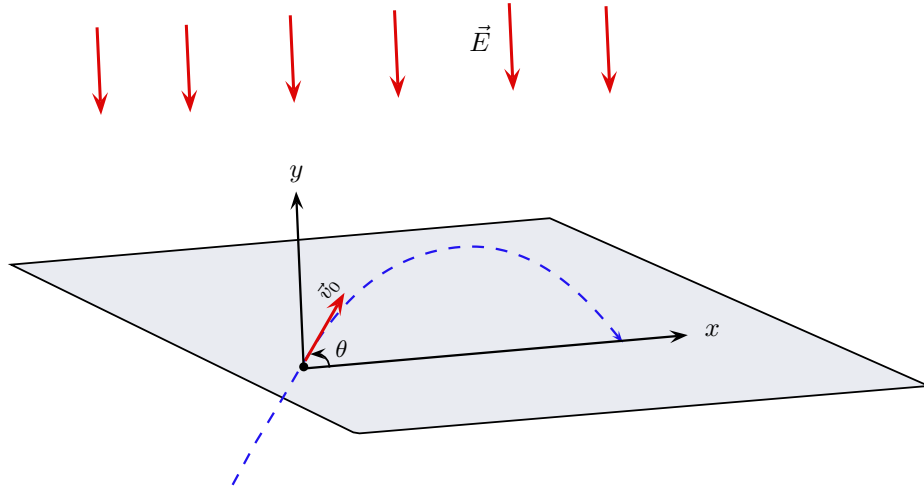
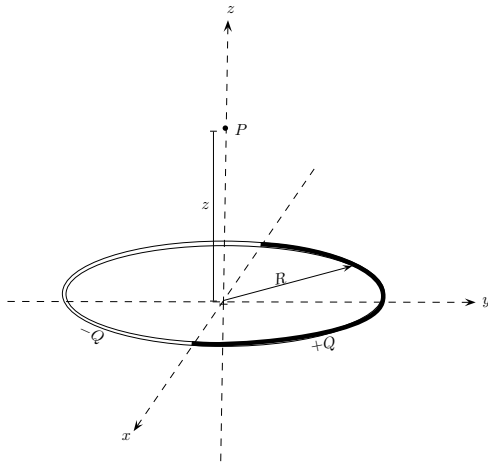


Figura 3.8: Sector circular

$$\vec{E} = k \int_q \frac{dq}{r^2} \hat{u}_r = k \quad (3.15)$$

2. Un anillo no conductor de radio R está compuesto de dos medios anillos con cargas opuestas $+Q$ y $-Q$, uniformemente distribuidas, tal como se muestra en la figura. Determine el valor del campo y el potencial eléctrico en el punto P .

Figura 3.9: Tiro parabólico de una carga $+q$ y masa m 

3.2.2. Movimiento de partículas en presencia de un campo eléctrico

Supongamos que una partícula positiva de carga $+q$ y masa m ingresa a una región, donde existe un campo eléctrico uniforme y constante, tal como se muestra en la Figura 3.9. En este caso, el sistema de coordenadas mostrado en la figura se ha escogido de tal modo que uno de los ejes coordenados tenga la dirección del campo eléctrico. Esto no le quita generalidad al problemas debido a que la escogencia del sistema de referencia no es un absoluto.

La ecuación de movimiento para la partícula es:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow -qE\hat{j} - mg\hat{j} = -ma_y\hat{j} \\ \Rightarrow a_y &= \frac{qE}{m} + g \approx \frac{qE}{m}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde hemos despreciado los efectos gravitacionales. Esto no siempre es válido, sólo se cumple en ciertos sistemas (ver ejemplo anerior ... redactar). Dado lo anterior, las ecuaciones cinemáticas de posición y rapidez son:

$$x = v_0 \cos \theta t \quad (3.17)$$

$$y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \quad (3.18)$$

$$v_x = v_0 \cos \theta \quad (3.19)$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - \frac{qE}{m} t \quad (3.20)$$

Usando las ecuaciones cinemáticas puede mostrarse que el alcance máximo en x y la altura máxima están dados por:

$$x_{max} = \frac{v_0^2 m}{qE} \sin(2\theta) \quad (3.21)$$

$$y_{max} = \dots \quad (3.22)$$

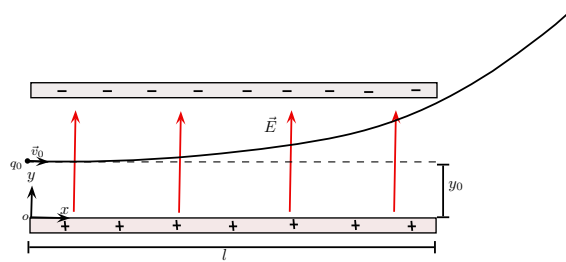


Figura 3.10: Movimiento cuando la velocidad es perpendicular al campo eléctrico

Un caso muy particular sucede cuando la velocidad de la partícula es perpendicular o paralela al campo eléctrico. Supongamos que una partícula positiva q_0 con velocidad \vec{v}_0 entra a una región donde existe un campo eléctrico perpendicular a su velocidad, por ejemplo, un campo eléctrico generado por un par de placas paralelas tal como se muestra en la Figura 3.10. Las ecuaciones cinemáticas de posición y rapidez para el sistema de referencia mostrado son:

$$x = v_0 t \quad (3.23)$$

$$v_x = v_0 = cte. \quad (3.24)$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2} \frac{q_0 E}{m} t^2 \quad (3.25)$$

$$v_y = \frac{q_0 E}{m} t \quad (3.26)$$

EJEMPLO:

Un electrón entra justo por la mitad de un par de placas paralelas, las cuales están generando un campo eléctrico constante $E = 200 \text{ N/C}$, perpendicular a la velocidad inicial. Su rapidez inicial es $v_0 = 3,0 \times 10^6 \text{ m/s}$, y la longitud horizontal de las placas es $l = 0,1 \text{ m}$.

La magnitud de la aceleración del electrón mientras está en el interior de las placas es:

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{C} \times 200 \text{ N/C}}{9,11 \times 10^{-31} \text{kg}} \approx 3,51 \times 10^{-13} \text{m/s}^2.$$

La mínima separación h de las placas para que el electrón salga de ellas, se obtiene evaluando las ecuaciones de movimiento para $x = l$ y $y = h/2$.

$$\begin{aligned} x &= v_0 t = l \Rightarrow t = \frac{l}{v_0} \\ y &= \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} (3,51 \times 10^{-13} \text{m/s}^2) \left(\frac{l}{v_0} \right)^2 = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 3,9 \times 10^{-2} \text{m}. \end{aligned}$$

Ejercicio:

En el tubo de rayos catódicos un electrón es acelerado horizontalmente desde el reposo por una diferencia de potencial V_1 . Luego ingresa por la mitad de dos placas paralelas conductoras de largo l , separadas una distancia h y sometidas a una diferencia de potencial V_2 , tal como se muestra en la figura 3.11.

1. Encuentre el valor de V_1 en términos de l , h y V_2 para que el electrón salga justo rozando la placa superior, tal como se muestra en la figura.
2. Halle el ángulo θ en términos de h y l , que forma la velocidad del electrón con la horizontal, al salir de las segundas placas.

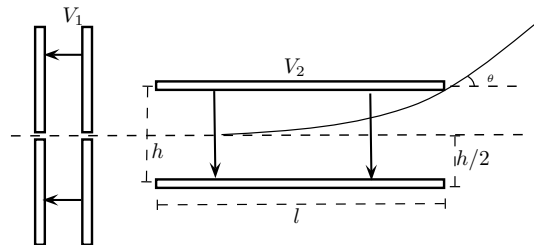


Figura 3.11: Electrón acelerado por un par de placas paralelas

3.3. Potencial y energía potencial eléctrica

Es conocido que una fuerza central es conservativa. Dado esto, es posible definir una función energía potencial $E_p(r) = U(r)$ y una función potencial $V(r)$ para dicha fuerza.

3.3.1. Diferencia de potencial eléctrica

Supongamos que una carga puntual q_0 se desplaza desde el punto A hasta el punto B debido a su interacción con la carga Q Figura 3.12. El trabajo realizado por la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga puntual es:

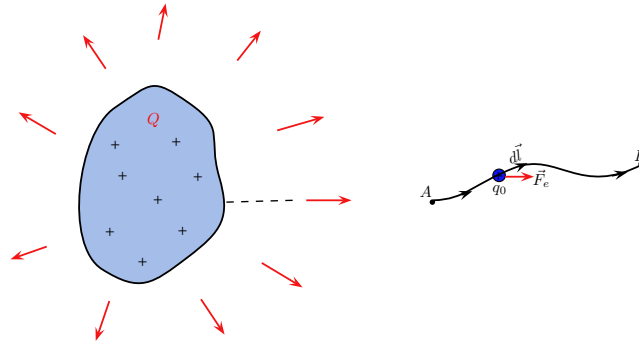


Figura 3.12: Trayectoria seguida por una carga puntual q_0 moviéndose desde el punto A hasta el punto B

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow W = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (3.27)$$

donde $d\vec{l}$ es un diferencial en la dirección de la trayectoria. Además, como el sistema es conservativo, entonces, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica debe ser tal que $W = -\Delta U$, es decir, *la variación en la energía potencial del sistema es*:

$$\boxed{\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad (3.28)$$

Dado lo anterior, se define la diferencia de potencial ΔV , como la diferencia de energía potencial eléctrica por unidad de carga, es decir:

$$\boxed{\Delta V(r) = V_B - V_A = \frac{\Delta U(r)}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad (3.29)$$

En general, la diferencia de potencial eléctrica entre los puntos A y B depende del campo eléctrico que a su vez depende de la distribución de carga Q . Diremos que el potencial eléctrico al igual que el campo eléctrico es generado por la carga Q . La unidad en el sistema internacional SI para la diferencia de potencial será el Volt (V). Diremos que un $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$. Otra unidad común en física subatómica es el electronvolt (electronvoltio) $1 \text{ eV} = e \text{ J} \approx 1,609 \times 10^{-19} \text{ J}$.

3.3.2. Potencial eléctrico para una partícula puntual $Q = q$

Si Q es una partícula puntual, entonces, la diferencia de potencial ΔV entre los puntos A y B es:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \frac{k_e q}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{l} = -k_e q \int_A^B \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{l}}{r^2} \quad (3.30)$$

$$= -k_e q \int_A^B \frac{dr}{r^2} = k_e q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right), \quad (3.31)$$

donde r_A y r_B son las magnitudes del vector posición que va desde la carga q que genera el campo eléctrico hasta la posición inicial y final de la trayectoria. Note que dicha diferencia de potencial no depende de la trayectoria seguida, solo depende de los puntos inicial y final. Esto es justamente una característica de tener una fuerza y un campo conservativo. Dado lo anterior, definimos el potencial eléctrico generado por una partícula puntual q a una distancia r como:

$$V(r) = k_e \frac{q}{r}, \quad (3.32)$$

donde se toma el cero de potencial eléctrica en el infinito, es decir, $V(\infty) = 0$. Dado esto, no hay ambigüedad en hablar de potencial eléctrico, refiriendonos a diferencia de potencial eléctrica, ya que $\Delta V = V(r) - V(\infty) \equiv V(r)$.

Es importante tener en cuenta que para distribuciones de carga q , el potencial eléctrico se calcula mediante la integral:

$$\boxed{V(r) = K_e \int_q \frac{dq}{r}}, \quad (3.33)$$

donde el límite de integración inferior es algo simbólico. Quiere decir que la integral debe hacerse barriendo el cuerpo de carga q .

3.3.3. Relación entre el campo y el potencial eléctrico

Note que la magnitud del campo eléctrico $E(r)$ para una carga puntual q y el potencial eléctrico son tales que:

$$E(r) = k_e \frac{q}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(k_e \frac{q}{r} \right) \equiv -\frac{\partial}{\partial r} V(r), \quad (3.34)$$

en general, se cumple que:

$$\boxed{\vec{E}(r) = -\vec{\nabla} V(r)}, \quad (3.35)$$

donde $\vec{\nabla}$ es el operador gradiente en las distintas coordenada en las cuales estemos trabajando. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas y en coordenadas esféricas:

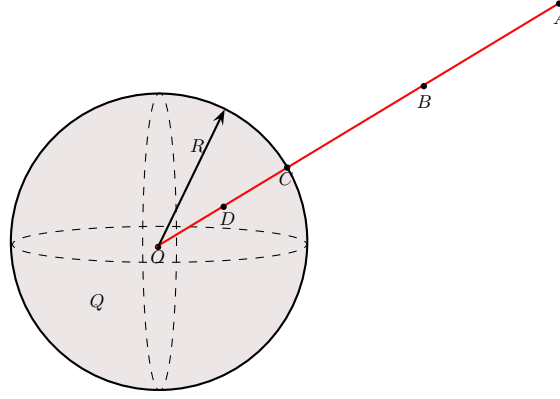
$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.36)$$

$$\vec{\nabla} = \hat{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{u}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{u}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (3.37)$$

3.3.4. Ejemplo de potencial eléctrico

Ejemplo:

Potencial eléctrico de una esfera maciza aislante de radio R y carga Q uniformemente distribuida (Figura 3.13).

Figura 3.13: Esfera de radio R

1. Afuera de la esfera ($r \geq R$). Determinemos la diferencia de potencial entre dos puntos externos A y B :

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_B}^{r_A} k \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r \cdot dr \hat{u}_r = -kQ \int_{r_B}^{r_A} \frac{dr}{r^2} \\ &= kQ \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]\end{aligned}\quad (3.38)$$

En general, para un punto externo a la esfera, cuya distancia al centro sea $r = r_B$, el potencial eléctrico se define como:

$$\boxed{V(r) = k \frac{Q}{r}} \quad r \geq R, \quad (3.39)$$

es decir, es justo el potencial generado por una carga puntual Q . Note que $V(\infty) = 0$ (es como tomar el punto A a una distancia infinita).

2. Dentro de la esfera ($r \leq R$). Determinemos la diferencia de potencial entre los puntos C y D , donde el punto C está justo en la superficie de la esfera y de acuerdo al resultado anterior $V_C = kQ/R$:

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_C - V_D = \frac{kQ}{R} - V_D \\ &= - \int_D^C \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_D}^{r_C} kQ \frac{r}{R^3} \hat{u}_r \cdot dr \hat{u}_r \\ &= - \int_{r_D}^R kQ \frac{r}{R^3} dr = - \frac{kQ}{2R^3} (R^2 - r_D^2),\end{aligned}\quad (3.40)$$

así, el potencial eléctrico en el punto D a una distancia $r_D = r$ está dado por:

$$\boxed{V(r) = \frac{kQ}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)} \quad r \leq R. \quad (3.41)$$

Note que el potencial es continuo en la superficie de la esfera aislante (Hacer Figura).

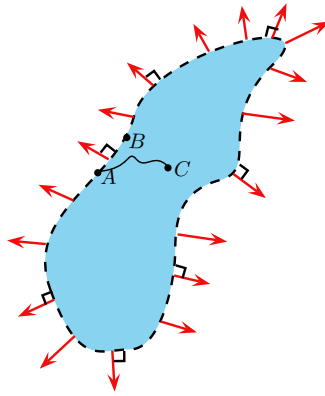


Figura 3.14: Campo eléctrico de un conductor cargado eléctricamente positivo

3.3.5. Potencial eléctrico debido a conductores cargados

Por definición, un conductor es aquel que permite que las cargas se muevan con facilidad, así, en condiciones de equilibrio electrostático, todas las cargas eléctricas en un conductor sienten fuerzas de repulsión, moviéndose hacia la superficie de dicho conductor. En la Figura 3.14 se muestra un corte transversal de un cuerpo conductor cargado positivo.

Las características básicas de un conductor son:

1. La superficie del conductor es una superficie equipotencial, de lo contrario, las partículas sobre la superficie estarían en movimiento y no estaríamos en equilibrio electrostático. Esto puede deducirse del hecho de que el campo eléctrico es perpendicular a la superficie, tal como se muestra en la Figura 3.14.

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_A = V_B \quad (3.42)$$

2. El campo eléctrico en el interior del conductor es nulo ya que no hay cargas internas al conductor y ellas son las fuentes de los campos eléctricos.
3. El potencial eléctrico en el interior del conductor es constante e igual al potencial en la superficie.

$$\Delta V = V_C - V_A = - \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_C = V_A, \quad (3.43)$$

donde tuvimos en cuenta que el campo eléctrico en el interior es nulo.

En general, en un conductor el campo eléctrico y la densidad de cargas superficial son más grandes en las regiones de menor radio de curvatura, es decir, en las regiones más puntudas (*efecto corona*).

Ejemplo:

Potencial eléctrico de una esfera maciza conductora de radio R y carga Q .

El potencial eléctrico en el exterior de una esfera cargada neta Q está dado por:

$$V(r) = k \frac{Q}{r} \quad r \geq R, \quad (3.44)$$

note que esto es independiente de que la esfera sea o no sea conductora. Ahora, para $r \leq R$, el potencial tiene el mismo valor, justo el valor que toma el potencial en la superficie:

$$V(r) = k \frac{Q}{R} \quad r \leq R. \quad (3.45)$$

Note que el potencial es continuo en la superficie de la esfera aislante (Hacer Figura).

3.4. Ley de Gauss

La ley de Gauss nos establece un método alternativo para el cálculo de campos eléctricos de configuraciones de carga altamente simétricas. La ley de Gauss nos establece una relación directa entre lo que es el flujo eléctrico que definiremos a continuación y la carga eléctrica que está generando el campo eléctrico.

Flujo eléctrico Φ_E :

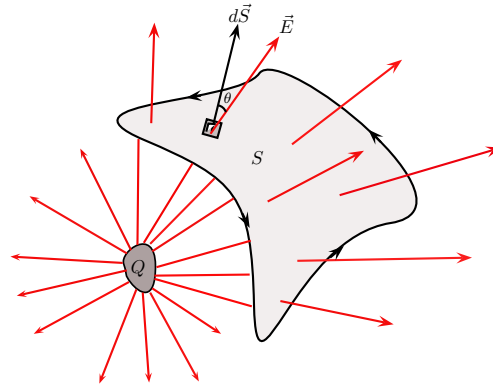


Figura 3.15: Flujo eléctrico atravezando la superficie S

El flujo eléctrico Φ_E que atravieza una superficie S se define como:

$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS \cos \theta}, \quad (3.46)$$

donde, la integral debe hacerse sobre la superficie S (Figura 3.15). El flujo eléctrico es debido a las líneas de campo que atraviesan la superficie S . En general el vector $d\vec{S}$ que se define perpendicular a la superficie, no es paralelo al vector de campo eléctrico \vec{E} , cuya dirección va determinada por la distribución de carga Q que lo genera.

Ejemplo:

Una carga puntual q está localizada sobre el eje de un anillo de radio R a una distancia z del plano del disco tal como se muestra en la Figura 3.16. Calculemos el flujo eléctrico que atraviesa el disco en función de z .

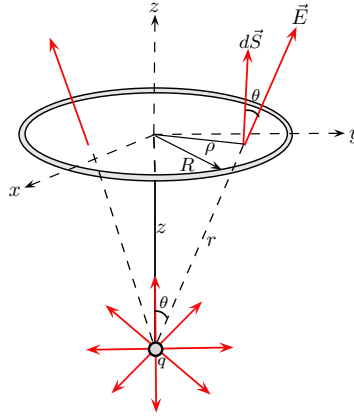


Figura 3.16: Flujo a través de un anillo

$$\begin{aligned}
 \Phi_E &= \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S k \frac{q}{r^2} \hat{u}_r \cdot dS \hat{k} = \int_S k \frac{q}{r^2} \cos \theta dS \\
 &= \int_S k \frac{q}{r^2} \frac{z}{r} dS = kqz \int_0^R \frac{2\pi \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

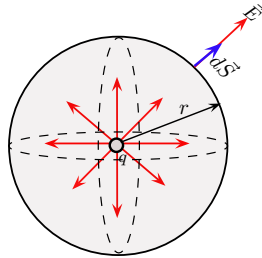
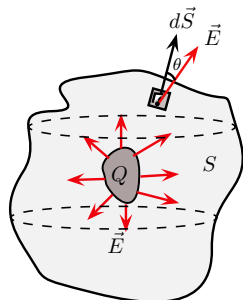


Figura 3.17: Gaussiana para una partícula puntual

Para introducir la ley de Gauss, supongamos que una partícula puntual q es encerrada por una superficie esférica “imaginaria”, concéntrica con la carga. Dicha superficie será llamada, *superficie gaussiana* Figura 3.17. El flujo eléctrico que atraviesa dicha superficie:

$$\begin{aligned}
\Phi_E &= \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS = E \int_S dS = ES = E(4\pi r^2) \\
&= \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$



▼

Figura 3.18: Ley de Gauss

Aunque el resultado anterior se obtuvo para el caso particular de una carga puntual, es un resultado general conocido como la **ley de Gauss**: El flujo neto Φ_E generado por una carga interna q_{int} y que atravieza una superficie imaginaria S , conocido como superficie gaussiana Figura 3.18, es igual $Q_{\text{int}}/\epsilon_0$, es decir;

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}} \tag{3.49}$$

3.4.1. Ley de Gauss en función del potencial eléctrico

3.4.2. Ejemplos: Ley de Gauss

...

Capítulo 4

Magnetostática

Introducción histórica

4.1. Fuerza magnética

Una partícula de carga q , con velocidad \vec{v} que entra a una región del espacio donde existe un campo magnético \vec{B} , siente una fuerza magnética:

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.1)$$

4.2. Fuentes de campo magnético

Para completar la descripción de la interacción magnética, exploremos su origen.

4.2.1. Ley de Biot-Savart

Poco después de que Oersted descubriera la desviación de la aguja, Jean Baptiste biot y Felix Savart cuantificaron la fuerza magnética ejercida por un alambre sobre la aguja magnética. El hallazgo experimental, llamado la ley de Biot Savart, se resume en la siguiente expresión matemática.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2},$$

donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A, es una constante conocida como la permeabilidad del vacío.

4.2.2. Ejemplos:

Campo magnético de un alambre muy largo (infinito)

Supongamos que tenemos un alambre delgado, muy largo y que transporta una corriente I constante tal como se muestra en la Figura 4.1.

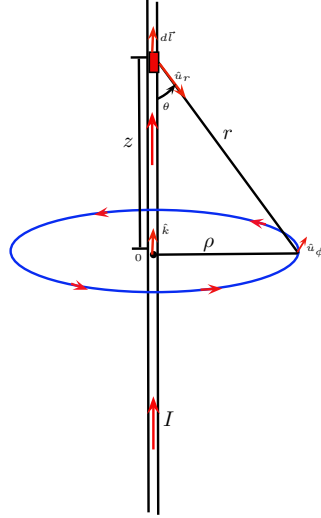


Figura 4.1: Campo magnético de un alambre recto muy largo (infinito)

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{dz \hat{k} \times \hat{u}_r}{r^2} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{dz \hat{k} \times (\sin \theta \hat{\rho} - \cos \theta \hat{k})}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz \sin \theta}{r^2} \hat{u}_\phi \\
 &= \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{u}_\phi = \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_\phi \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{u}_\phi
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Note que el campo magnético rodea al alambre de acuerdo a la regla de la mano derecha. En general diremos que el campo magnético es un vector circulante en el sentido que está circulando alrededor del alambre. Además, note que el campo magnético depende de la distancia radial al alambre, en este caso la variable ρ (no se llamó r para no generar confuciones a la hora de integrar).

Campo magnético de un alambre finito

De acuerdo a la Figura 4.2:

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{dx \sin \theta}{r^2} \hat{k} = \frac{\mu_0 I y}{4\pi} \int_{-x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{k} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right) \hat{k} \equiv \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \hat{k}
 \end{aligned}$$

Note que si el alambre es infinito basta con tomar el límite cuando x_1 y x_2 tienden a infinito ó $\theta_1 = 0^0$ y $\theta_2 = \pi/2$.

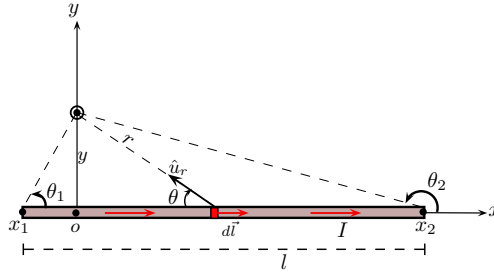


Figura 4.2: Campo magnético de un alambre recto finito

Campo magnético de un alambre circular

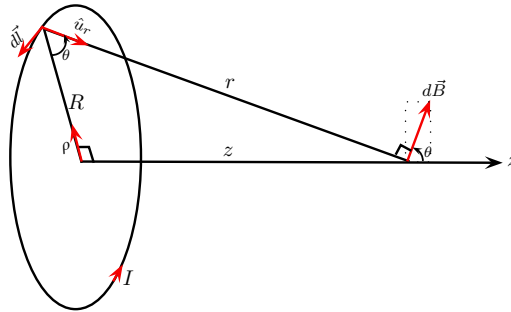


Figura 4.3: Campo magnético en el eje de un anillo de radio R

De acuerdo a la Figura 4.3, tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l dl \frac{(\cos \theta \hat{k} + \sin \theta \hat{\rho})}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_l dl \frac{\cos \theta \hat{k}}{r^2} + \int_l dl \frac{\sin \theta \hat{\rho}}{r^2} \right]\end{aligned}$$

Dada la simetría del problema, el campo sólo sobrevive en la dirección \hat{k} ($\int_l dl \hat{\rho} = \vec{0}$).

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l dl \frac{\cos \theta}{r^2} \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} l \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} (2\pi R) \hat{k} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} (2\pi R) \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}\end{aligned}\quad (4.3)$$

En general, el campo magnético de un alambre circular tiene una estructura muy complicada. En cualquier punto del espacio está descrito por la combinación de dos funciones muy especiales; los polinomios de Legendre y los armónicos esféricos. En la Figura 4.4 se muestran algunas de las líneas de campo. Note su similitud con las líneas de campo de imán de barra o del mismo planeta tierra.

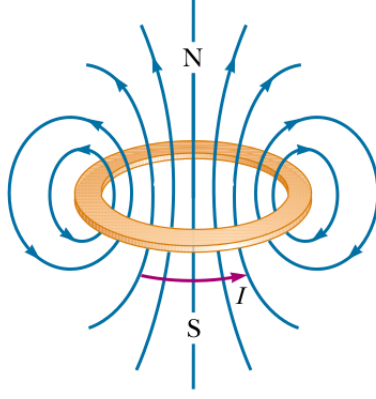


Figura 4.4: Líneas de campo magnético de un segmento circular

Campo magnético de un segmento circular de alambre

Calculemos el campo \vec{B} en el punto O generado por el dispositivo mostrado en la Figura 4.5. Para ello, sólo es necesario calcular el campo magnético generado por el sector circular de ángulo θ , ya que las secciones rectas no generan campo en el punto O .

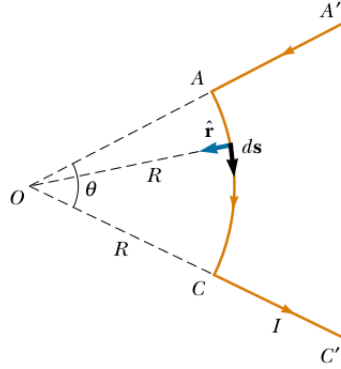


Figura 4.5: Campo magnético de un segmento circular

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{ds}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R^2} \int_l ds \otimes \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R^2} (\theta R) \otimes = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta \otimes,\end{aligned}\tag{4.4}$$

donde \otimes indica que el campo está entrando de la hoja.

Campo magnético en el interior de un solenoide

Consideremos un cilindro de radio R y altura l en el cual se enrolla un alambre. Si suponemos que se tienen N vueltas muy juntas, podemos pensar que en general se tiene una densidad de corriente que fluye circularmente alrededor del cilindro.

Usando el resultado obtenido para el campo magnético en el eje de una espira circular, tenemos que el diferencial de campo magnético dB generado por un diferencial de corriente dI , es:

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.5)$$

Ahora, suponiendo que la densidad superficial de corriente es contante, entonces:

$$\frac{dI}{dl} = \frac{dI}{dz} = \frac{NI}{l} = nI \Rightarrow dI = nI dz \quad (4.6)$$

Donde hemos definido la *densidad de vueltas del solenoide* como:

$$n = (N/l) \quad (4.7)$$

Usando lo anterior, tenemos que el campo magnético en el interior del solenoide es:

$$\begin{aligned} B &= \int_{-l/2}^{l/2} dB = \int_{-l/2}^{l/2} nI \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= \frac{\mu_0 nI}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\mu_0 nI}{2} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]_{-l/2}^{l/2} \\ &= \frac{\mu_0 nIl}{\sqrt{l^2 + 4R^2}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Generalmente los solenoides son largos, de tal modo que $l \gg R$. Así, en la expresión anterior:

$$B \approx \mu_0 nI \quad (4.9)$$

Este resultado anterior será calculado de una forma más rápida cuando introduzcamos la Ley de Ampere.

Esfera rotante

Capítulo 5

Inducción electromagnética

El principio de inducción fue formulado por Michael Faraday (Inglaterra) e independientemente por Joseph Henry (Estados Unidos) en el año de 1831.

5.1. Flujo magnético

5.2. Principio de inducción

