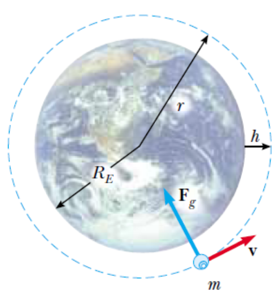
[1]

1. Calcule la masa del Sol usando el hecho de que el periodo de la Tierra alrededor del Sol es $P \approx 3{,}156 \times 10^7$ s y la distancia desde el centro de la Tierra al centro del Sol es $r \approx 1{,}496 \times 10^{11}$ m. ¿Importa el hecho de que la Tierra y el Sol no son masas puntuales?

2. Usando el radio de la Tierra $R \approx 6{,}37 \times 10^6$ m y el hecho de que la gravedad en la superficie terrestre es $g \approx 9{,}8$ m/s^2, demuestre que la densidad promedio de la Tierra es $\rho \approx 5{,}51 \times 10^3$ kg/m^3.

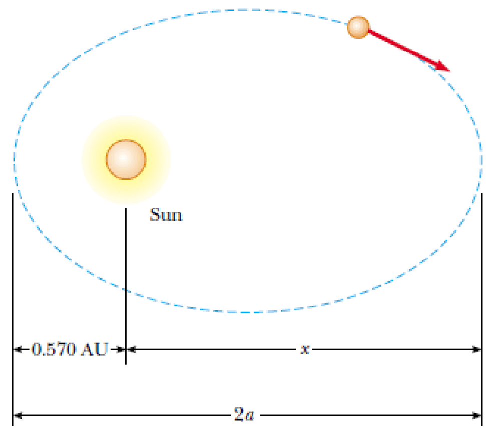
3. Considere un satélite de masa m en órbita circular alrededor de la Tierra, a una rapidez constante v y a una altitud h por encima de la superficie terrestre (ver figura).



   a) Determine la rapidez del satélite en términos de G, h, R (radio de la Tierra), y M (masa de la Tierra).

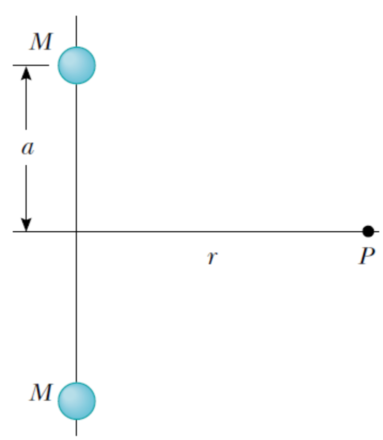
   b) ¿Cuál es la rapidez del satélite si es geoestacionario y a qué altura respecto a la superficie debe encontrarse?

4. El cometa Halley se acerca al sol a una distancia de 0.57 A. U. (Un A. U. es igual a 150×10^{11} m) y su periodo orbital es $75{,}6$ años. ¿Qué tan lejos del Sol viajar el cometa antes de alcanzar su jornada de regreso?



5. Se ha propuesto un lugar para vivir en el espacio en forma de cilindro de 6 km de diámetro y 30 km de longitud (G.K. O'Neill, 1974). En dicho lugar se construirían ciudades, tierras y lagos en la superficie, con aire y nubes en el centro. Todo esto se mantendría en su lugar por la rotación del cilindro respecto a su eje mayor. ¿Qué tan rápido tendría que girar el cilindro para producir un campo gravitacional de $1g$ (9.8 m/s^2) en las paredes del cilindro?

6. Calcule la magnitud y dirección del campo gravitacional en un punto P sobre el bisector de la linea que une los dos planetas de igual masa mostrados en la figura. Los planetas están separados una distancia $2a$.



7. Tres masas puntuales m están localizadas en las esquinas de un cuadrado de lado l (ver figura).

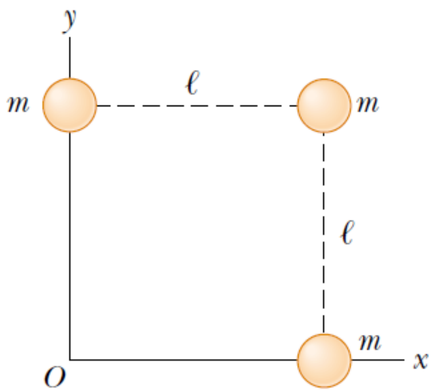
   a) Halle el campo gravitacional en el punto de coordenadas (0,0).

$$\vec{g} = \frac{Gm}{l^2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\hat{i} + \hat{j}\right)$$

[1] Las figuras de este documento han sido tomadas en su gran mayoría de Physics For Scientist and Engineers 6E By Serway and Jewett.

b) Halle la fuerza gravitacional sobre una masa M que se localiza en el punto de coordenadas (0,0).

$$\vec{F} = M\vec{g} = \frac{GMm}{l^2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\hat{i}+\hat{j}\right)$$



8. Tres masas puntuales m iguales se encuentran fijas en los puntos coordenados (0,0,0), (0,0,a), (0,0,-a). Una cuarta masa M describe una órbita circular de radio R en un plano perpendicular al plano que contiene las tres masas anteriores y con centro en el punto (0,0,0).

    a) Halle la magnitud de la fuerza resultante sobre la masa M.

    $$F = GMm\left(\frac{1}{R^2}+\frac{2R}{(a^2+R^2)^{3/2}}\right)$$

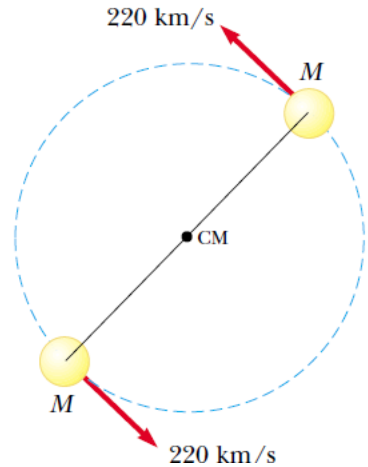
    b) Halle el periodo de revolución de la masa que efectúa el movimiento circular.

    $$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 R}{\left(\frac{1}{R^2}+\frac{2R}{(a^2+R^2)^{3/2}}\right)}}$$

    c) Encuentre la energía potencial asociada con estas cuatro masas puntuales.

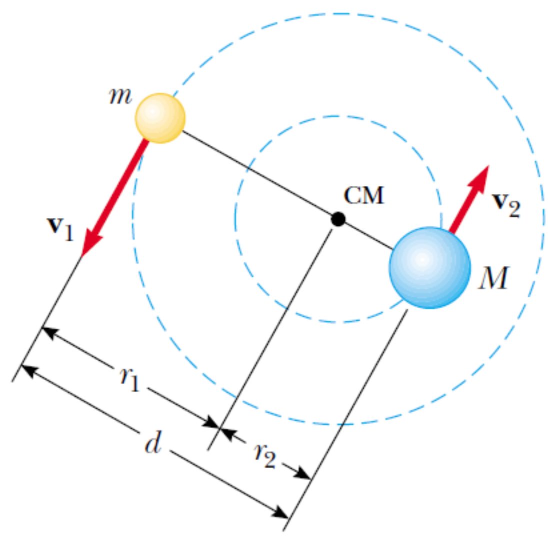
    $$U = -Gm\left[\frac{5m}{2a}+M\left(\frac{1}{R}+\frac{2}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)\right]$$

9. El sistema binario Plaskett consiste de dos estrellas de masa iguales girando en torno a su centro de masa CM. Asuma que la rapidez de cada estrella es $v = 220$ km/s y que el periodo orbital de cada estrella es de $14{,}4$ días. Halle la masa M de cada estrella.



10. Dos estrellas de masas m y M , separadas por una distancia d, giran en órbita circular alrededor de su centro de masa CM (ver figura). Muestre que el periodo de cada estrella está dado por:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M+m)}$$



11. Un planeta hipotético de masa M tiene tres lunas de igual masa m, cada una moviéndose en una órbita circular de radio R. Las lunas están igualmente espaciadas, por lo que forman un triángulo equilátero. Encuentre:

    a) La energía potencial total del sistema.

    $$U = -\frac{3Gm}{R}\left(M+\frac{m}{\sqrt{3}}\right)$$

b) La rapidez orbital de cada luna para que pueda mantenerse en esa configuración.

$$v = \sqrt{\frac{G}{R}\left(M + \frac{m}{\sqrt{3}}\right)}$$

12. Una partícula de masa m se haya en un eje de simetría de un anillo de radio R y masa M uniformemente distribuida.

    a) Encuentre la fuerza sobre m si está a una distancia d del plano del anillo.

    b) Demuestre que su resultado del inciso anterior se reduce a lo que se espera intuitivamente cuando:

    - m está en el centro del anillo.
    - m se encuentra distante del anillo ($d >> R$).

13. Muestre que el momento angular L, la excentricidad y la energía E en el movimiento general bajo interacción gravitacional, son tal que:

$$L^2 = GMm^2 a(1-\epsilon^2)$$
$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{L}{GmM}\right)^2$$
$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

14. Muestre la tercera ley de Kepler para $M \gg m$

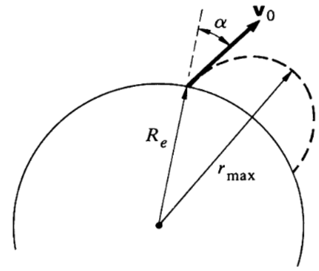
$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

15. Un satélite de masa $m = 2000$ kg está en órbita elíptica alrededor de la tierra. En el perigeo tiene una altura de 1100 km y el apogeo su altitud es de 4100 km (el radio de la tierra es $R \approx 6400$ km). Determine la energía del sistema, la excentricidad de la orbital, el momento angular del satélite y su rapidez en perigeo y en el apogeo.

    Respuesta:

$$E \approx -4{,}5 \times 10^{10}\ \text{J}, \quad \epsilon = \frac{1}{6}$$
$$L = 1{,}2 \times 10^{14}\text{kg m}^2/\text{s}$$
$$v_p \approx 7900\,\text{m/s}, \quad v_a \approx 5600\,\text{m/s}.$$

16. Un proyectil de masa m es lanzado desde la superficie de la tierra formando un ángulo α con la vertical. Si la rapidez inicial del proyectil es $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_e}}$, donde M es la masa de la tierra. Determinar la altura máxima alcanzada por el proyectil (r_{max}).



Respuesta: $\quad r_{\text{max}} = R(1+\cos\alpha)$

17. Un satélite de masa m está en órbita circular alrededor de la tierra de masa M y radio R a una altura $h = R$. En un punto de la órbita hay un fallo en el motor y la rapidez disminuye instatáneamente a la mitad y después se apaga, haciendo que el satélite quede en caida libre y en una nueva órbita elíptica hasta caer a la tierra.

    a) Hallar la magnitud de la velocidad cuando el satélite impacta sobre la tierra.

    b) Hallar el semieje mayor de la órbita ($a = (8/7)R$).

    c) Hallar la excentricidad de la órbita ($\epsilon = 3/4$).

18. Haga todos los cálculos de distribuciones continuas hechos y propuestos en clase.