

目 录

前言	1
绪论	1
第一章 映射, 极限, 连续	6
第一节 集合与实数集	6
1.1 集合及其运算	6
1.2 实数的完备性	9
1.3 确界与确界存在定理	10
习题 1.1	13
第二节 映射与函数	14
2.1 映射	14
2.2 函数	18
习题 1.2	23
第三节 数列的极限	25
3.1 数列极限的概念	25
3.2 收敛数列的性质	28
3.3 数列收敛性的判别准则	33
习题 1.3	40
第四节 函数的极限	43
4.1 函数极限的概念	43
4.2 函数极限的性质	49
4.3 两个重要极限	52
4.4 函数极限的存在准则	55
习题 1.4	58
第五节 无穷小量与无穷大量	60
5.1 无穷小量及其阶	60
5.2 无穷大量	64
习题 1.5	65
第六节 连续函数	67
6.1 连续函数的概念与基本性质	67
6.2 函数的间断点及其分类	70
6.3 闭区间上连续函数的性质	73
6.4 函数的一致连续性	76

6.5 压缩映射原理与迭代法	78
习题 1.6	80
综合练习题	82
第二章 一元函数微分学及其应用	83
第一节 导数的概念	83
1.1 导数的定义	83
1.2 导数的几何意义	88
1.3 可导与连续的关系	91
1.4 导数在其他学科中的含义——变化率	92
习题 2.1	94
第二节 求导的基本法则	96
2.1 函数和、差、积、商的求导法则	96
2.2 复合函数的求导法则	98
2.3 反函数的求导法则	100
2.4 初等函数的求导问题	102
2.5 高阶导数	104
2.6 隐函数求导法	106
2.7 由参数方程确定的函数的求导法则	107
2.8 相关变化率问题	109
习题 2.2	112
第三节 微分	115
3.1 微分的概念	115
3.2 微分的运算法则	117
3.3 高阶微分	118
3.4 微分在近似计算中的应用	119
习题 2.3	120
第四节 微分中值定理及其应用	122
4.1 函数的极值及其必要条件	122
4.2 微分中值定理	123
4.3 L'Hospital 法则	130
习题 2.4	135
第五节 Taylor 定理	137
5.1 Taylor 定理	138
5.2 几个初等函数的 Maclaurin 公式	141
5.3 Taylor 公式的应用	143
习题 2.5	146
第六节 函数性态的研究	147
6.1 函数的单调性	147

6.2 函数的极值	149
6.3 函数的最大(小)值	151
6.4 函数的凸性	154
习题 2.6	158
综合练习题	161
第三章 一元函数积分学及其应用	163
第一节 定积分的概念、存在条件与性质	163
1.1 定积分问题举例	163
1.2 定积分的定义	166
1.3 定积分的存在条件	169
1.4 定积分的性质	172
习题 3.1	176
第二节 微积分基本公式与基本定理	178
2.1 微积分基本公式	178
2.2 微积分基本定理	181
2.3 不定积分	183
习题 3.2	186
第三节 两种基本积分法	189
3.1 换元积分法	189
3.2 分部积分法	199
3.3 初等函数的积分问题	204
习题 3.3	205
第四节 定积分的应用	207
4.1 建立积分表达式的微元法	207
4.2 定积分在几何中的应用举例	209
4.3 定积分在物理中的应用举例	213
习题 3.4	216
第五节 几类简单的微分方程	219
5.1 几个基本概念	219
5.2 可分离变量的一阶微分方程	221
5.3 一阶齐次微分方程	223
5.4 一阶线性微分方程	224
5.5 可降阶的高阶微分方程	229
5.6 微分方程应用举例	232
习题 3.5	237
第六节 反常积分	238
6.1 无穷区间上的积分	239
6.2 无界函数的积分	242

6.3 无穷区间上积分的审敛准则	245
6.4 无界函数积分的审敛准则	248
6.5 Γ 函数	249
习题 3.6	251
综合练习题	253
第四章 无穷级数	255
第一节 常数项级数	255
1.1 常数项级数的概念、性质与收敛原理	255
1.2 正项级数的审敛准则	259
1.3 变号级数的审敛准则	264
习题 4.1	271
第二节 函数项级数	273
2.1 函数项级数的处处收敛性	274
2.2 函数项级数的一致收敛性概念与判别方法	276
2.3 一致收敛级数的性质	280
习题 4.2	284
第三节 幂级数	285
3.1 幂级数及其收敛半径	285
3.2 幂级数的运算性质	290
3.3 函数展开成幂级数	293
3.4 幂级数的应用举例	299
习题 4.3	303
第四节 Fourier 级数	305
4.1 周期函数与三角级数	305
4.2 三角函数系的正交性与 Fourier 级数	306
4.3 周期函数的 Fourier 展开	308
4.4 定义在 $[0, l]$ 上函数的 Fourier 展开	314
4.5 Fourier 级数的复数形式	316
习题 4.4	320
综合练习题	321
习题答案与提示	322
参考文献	346

绪 论

同学们来到大学,要学习许多新的数学课程,自然要问,它们与中学已经学过的初等数学有什么不同?它们的研究对象与方法是什么?下面就来简要地讲一讲这些问题。

大家知道,现实世界中的万事万物,无一不在一定的空间中运动变化,在运动变化过程中都存在一定的数量关系。数学就是研究现实中数量关系与空间形式的科学。简略地说,就是研究数和形的科学。时至今日,虽然数学的内容非常丰富,数学的表述形式非常抽象,数学的应用非常广泛,但是,关于数学的上述说法大体上还是正确的。只是随着人们对事物认识的逐渐深化,作为数学研究对象的“数”和“形”,在数学发展的不同阶段,表现形式也不相同罢了!

17世纪以前的数学,研究的数是常数或常量(即在某一运动变化过程中保持不变或相对保持不变,可以看作一个固定数值的量),研究的形是孤立的、不变的规则几何形体。研究常量间的代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系,分别形成了初等代数和初等几何,统称为初等数学。因此,有人把这个阶段称为初等数学阶段。

1637年,法国数学家 Descartes 建立了解析几何,使数学的发展进入了一个新阶段。在这个阶段中,研究的数是变数或变量(即在某一运动变化过程中不断变化,可以取不同数值的量),研究的形是不规则的几何形体,如曲线、曲面、曲边形和曲面形等,而且数和形开始紧密地联系起来。由于 17 世纪工业革命的直接推动,英国科学家 Newton 和德国科学家 Leibniz 各自独立地创立了微积分。此后,数学的发展遂出现了一日千里之势,形成了内容丰富的高等代数、高等几何与数学分析三大分支,在此基础上,还出现了一些其他分支。相对于初等数学,它们被统称为高等数学。因此,有人把这个阶段(1637 年到 19 世纪末)称为高等数学阶段。同学们在大学学习的数学大都属于高等数学方面的课程。本书主要讲解工程科学中常用的数学分析的基础知识,其核心内容是微积分。

从研究常量到研究变量,从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体,是人类对自然界认识的一大飞跃,是数学发展中的一个转折点。在上述两个阶段中,不但研究的对象不同,而且研究的方法也不同。初等数学主要采用形式逻辑的方法,静止地、孤立地、一个一个问题进行研究,而高等数学却不然。下面,我们以“已知位移求速度”和“已知速度求位移”这两个经典问题为例,介绍微积分的基本思想方法,说明它与初等数学的研究方法有什么区别。

例 1 求变速直线运动的瞬时速度问题.

设一物体作变速直线运动, 已知位移随时间的变化规律为 $s = s(t)$. 由于物体的运动速度是随时间不断变化的, 要精确地研究物体的运动规律, 必须计算它在运动过程中每一时刻的速度, 就是所谓瞬时速度. 怎样认识和度量它呢?

如果物体作匀速直线运动, 那么位移函数 $s = s(t)$ 是一个线性函数, s 随 t 的变化是均匀的. 即无论从什么时刻 t_1 开始, 只要时间的变化 $t_2 - t_1$ 相同, 位移的变化 $s(t_2) - s(t_1)$ 也相同. 这时, 物体的运动速度只需用除法通过

$$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

来度量, 它显然是一个常量. 对于非匀速运动, $s = s(t)$ 是非线性函数, s 随 t 的变化是非均匀的, 即在相同的时间内位移的变化不同. 由于在不同时刻物体运动的速度不尽相同, 为了度量在 t_0 时刻的速度 $v(t_0)$, 考察物体从 t_0 时刻到与它邻近的 t 时刻所通过的位移 $s(t) - s(t_0)$. 记 $\Delta t = t - t_0$, $\Delta s = s(t) - s(t_0)$, 则用除法得到的

$$\bar{v} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

仅表示物体在 $|\Delta t|$ 这段时间内的平均速度, 还不是物体在 t_0 时刻的速度. 若位移随时间的变化是连续不断的, 则当 $|\Delta t|$ 很小时, 速度的变化也很小, 可以近似地看成是不变的, 因此, \bar{v} 可以作为 t_0 时刻速度的近似值, 即

$$v(t_0) \approx \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

$|\Delta t|$ 越小, 上面的近似表达式越精确. 如果令 $\Delta t \rightarrow 0$ (即 $t \rightarrow t_0$), 平均速度的极限存在, 那么这个极限值就规定为 t_0 时刻的瞬时速度, 即

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

例 2 求变速直线运动的位移问题.

设物体作变速直线运动, 速度随时间的变化规律为 $v = v(t)$, 求在时间区间 $[a, b]$ 内物体所通过的位移 s .

对于匀速直线运动, 若已知速度 v , 则物体在 Δt 时间内通过的位移 Δs 只要用乘法就能求得, 即

$$\Delta s = v \Delta t.$$

对于非匀速运动, 速度 $v = v(t)$ 随时间 t 不断地变化, 不能简单地用乘法求得.

像例 1 中那样,如果假定速度随时间的变化是连续不断的,那么,当时间间隔很小时,速度的变化很小,运动可以近似看成是匀速的.因此,若将时间区间 $[a, b]$ 任意分割为若干小区间,物体在每个小区间内都能近似看成是匀速运动,就可以利用上面的公式求出位移的近似值.再将各段时间内通过的位移近似值相加,就可得到在 $[a, b]$ 内物体通过的总位移的近似值.时间区间分割得越小,近似值就越精确.如果当每个时间小区间的长度无限趋近于零时,总位移近似值的极限存在,那么这个极限值就是物体在 $[a, b]$ 内通过的总位移的精确值.

上面的分析过程可以分解为四个具体步骤:

第一步 分 将区间 $[a, b]$ 任意分割为 n 个小区间 $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$),

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b,$$

每个小区间的长度记为 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

第二步 匀 在每个小区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 上运动可以近似看成是匀速的,速度 $v(t)$ 可以用其中任一时刻 ξ_k ($t_{k-1} \leq \xi_k \leq t_k$) 时的速度近似替代,从而求得物体在各段时间内通过的位移近似值:

$$\Delta s_k \approx v(\xi_k) \Delta t_k.$$

第三步 合 将物体在各段时间内通过的位移近似值相加,就得到总位移的近似值:

$$s \approx \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k.$$

第四步 精 令 n 无限趋大(记作 $n \rightarrow \infty$),且最大小区间的长度无限趋于零(记作 $d = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta t_k\} \rightarrow 0$),通过取极限(如果存在的话)总位移的近似值就转化为所求总位移的精确值,即

$$s = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k.$$

上面两个例子代表了微积分中的两类典型问题,具有普遍的意义.例 1 实际上是研究位移函数 $s = s(t)$ 当 s 随 t 非均匀变化时在 t_0 时刻变化的快慢程度,而例 2 则是研究在区间 $[a, b]$ 上位移函数 $s = s(t)$ 变化的大小.现实世界中存在着大量的类似问题.例如,设有一质量非均匀分布的物质细棒,取棒的一端为原点,棒上各点的坐标为 x .若已知质量 m 随 x 的变化规律 $m = m(x)$,要求细棒上某点 x_0 处的密度 $\rho(x_0)$,实际上就是求在 x_0 处质量函数 $m = m(x)$ 随位置 x 变化的快慢程度.反之,若已知密度函数 $\rho = \rho(x)$,要求位于 a 点与 b 点之间

那段细棒的质量 m , 实际上就是求质量函数 $m = m(x)$ 在 $[a, b]$ 内变化的大小。舍弃上述个别问题的具体含义, 从数量关系的侧面加以抽象, 就分别得到了导数和定积分这两个概念, 它们是微积分中两个最重要最基本的概念。

由上面可以看到, 与初等数学不同, 高等数学不是个别地讨论问题, 而是普遍地解决问题。有了导数, 就可以解决一批关于求函数在某点变化快慢程度的问题; 有了积分, 就可以解决一批关于求函数在某区间内变化大小的问题。其次, 导数和积分分别是从局部和整体认识同一事物的两个方面。导数是研究函数在一点处的变化情况的, 仅与函数在该点附近的局部性态有关; 而积分则研究函数在一个区间上的变化, 与函数在该区间上的整体性态有关。虽然如此, 它们的研究方法却是类似的。在上面两个例子中, 为了研究非匀速运动, 采取的方法都是: 在微小局部“以匀代非匀”, 将问题转化为匀速运动, 求得近似值, 通过求极限转化为精确值。这是微积分解决问题的基本思想方法, 体现了分析矛盾, 通过矛盾的转化解决矛盾的辩证法, 与初等数学主要依据形式逻辑的推演方法有很大不同。

从上面两类问题不难看到, 函数是微积分的研究对象, 极限是微积分的基础。没有极限概念, 我们无法求得两例中的精确值, 只能停留在近似值。有了极限, 近似值转化为精确值, 才使问题从根本上得到解决。Newton 和 Leibniz 虽然创立了微积分, 并且成功地将它应用到天文、力学与物理中去。然而, 在那个时代, 由于对函数和极限概念没有给予严格的定义, 因而也不可能给出导数和积分概念的精确定义, 使得微积分中的许多问题含糊不清, 不能自圆其说。经过许多数学家近两个世纪的努力, 到 19 世纪末 20 世纪初, 人们认识到函数概念应当建立在集合论的基础上, 极限理论应当建立在实数理论的基础上。1874 年, 德国数学家 Cantor 创立了集合论, 不但为微积分奠定了坚实的基础, 也使数学的发展进入了第三个阶段, 即现代数学的阶段。关于现代数学研究对象和研究方法有哪些特点, 本书不再多作介绍, 在第八章中将对无限维分析作一简要介绍, 读者从中可略见一斑。本书在讲解数学分析基础知识的时候, 也将适当地采用一些现代数学的观点和方法, 包括一些术语和符号。

由于高等数学的研究对象和研究方法与初等数学有很大的不同, 因此, 高等数学呈现出概念更复杂、理论性更强、表达形式更加抽象和推理更加严谨的显著特点。读者在学习高等数学的时候, 应当认真阅读和深入钻研教材的内容。一方面, 要透过抽象的表达形式, 深刻理解基本概念和理论的内涵与实质以及它们之间的内在联系, 正确领会一些重要的数学思想方法。另一方面, 也要培养抽象思维和逻辑推理能力。学习数学, 必须做一定数量的习题, 做习题不仅是为了掌握数学的基本运算方法, 而且可以帮助我们更好地理解概念、理论和思想方法。因此, 读者不应该仅仅满足于做题, 更不能认为, 只要做了题, 就算学好了数学。作为工科院校的大学生, 学习数学的主要目的是为了用数学, 当代科学技术的飞速

发展,不但要求我们掌握更多的数学知识,而且要求会运用这些去解决实际问题.因此,我们应当逐步培养自己综合运用所学的数学知识解决实际问题的意识和兴趣,培养建立实际问题的数学模型,运用数学方法分析解决实际模型的能力.在学习中还要提倡独立钻研,勤于思考,敢于大胆地提出问题,善于研究问题,培养自己的创造性思维和学习能力.

为了今后叙述的方便和简洁,本书将采用数学中一些常用的逻辑符号,现介绍如下:

设 P 与 Q 是两个命题,规定:

$P \vee Q$ 表示命题“ P 或 Q ”;

$P \wedge Q$ 表示命题“ P 且 Q ”;

$P \Rightarrow Q$ 表示命题“若 P 则 Q ”(或“ P 蕴含 Q ”,或“ P 是 Q 的充分条件”,“ Q 是 P 的必要条件”);

$P \Leftrightarrow Q$ 表示命题“ P 当且仅当 Q ”(或“ P 等价于 Q ”,或“ P 的充要条件是 Q ”);

$\neg P$ 表示命题“非 P ”,即 P 的否定命题;

\forall 表示“对任给的”,“对所有的”.例如,用“ $\forall x \in X, P$ ”表示“对集合 X 中的所有元素 x ,都具有性质 P ”;

\exists 表示“存在”,“有”.例如,用“ $\exists x \in X, P$ ”表示“在集合 X 中存在一个元素 x ,具有性质 P ”.

第一章 映射,极限,连续

在绪论中我们已经指出,函数是微积分的研究对象,极限理论是微积分的基础.为了准确而深刻地理解函数概念与极限理论,集合、映射与实数理论的知识是不可缺少的.但由于本书读者的主要对象是理工科院校非数学类专业的本科生,因此本章中我们仅对中学已学过的关于集合和映射的知识作简要的复习和必要的补充,从几何直观来说明实数的完备性.在此基础上,重点讲解数列与函数的极限理论以及连续函数的概念与性质,为学习微积分,为今后进一步学习现代数学奠定比较坚实的基础.

第一节 集合与实数集

本节将简要地介绍集合的概念及其基本运算,从几何上直观地说明实数的完备性.在此基础上,讲解实数集的确界概念以及刻画实数完备性的确界存在定理.

1.1 集合及其运算

在日常生活中,集合的概念是不难理解的.例如,某教室内学生的全体、某车间机床的全体、某商店一天内售出的电视机的全体等都分别构成一个集合.但是,要给集合下一个严格的数学定义是件相当困难的事.通常,所谓**集合**(简称**集**)是指具有某种确定性质的对象的全体,组成集合的各别对象称为该集合的**元素**(简称**元**).

习惯上,用大写拉丁字母 A, B, C, \dots 表示集合,用小写拉丁字母 a, b, c, \dots 表示集合的元素.用 $a \in A$ 表示 a 是集 A 中的元(读作“ a 属于 A ”),用 $a \notin A$ (或 $a \not\in A$) 表示 a 不是集 A 中的元(读作“ a 不属于 A ”).含有限个元素的集合称为**有限集**;不含任何元素的集合称为空集,记作 \emptyset ;既不是有限集又不是空集的集合称为**无限集**.

表示集合的方法有两种:一种是列举法,就是把它的所有元素一一列出来,写在一个花括号内.例如,方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集可以表示为 $S = \{-1, 1\}$.另一种方法是指明集合元素所具有的确定性质,将具有性质 $P(x)$ 的对象 x 所构成的集合表示为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P(x)\}.$$

例如,方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集也可表示为 $S = \{x | x^2 - 1 = 0\}$.

今后,我们用 N 表示自然数集, Z 表示整数集, Q 表示有理数集, R 表示实数集. 用加下标符号“₊”表示集内排除 0 的集. 例如 N_+ 表示正整数集, R_- 表示非零实数集等.

设 A, B 是两个集合. 若 A 的每个元都是 B 的元, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$), 读作“ A 含于 B ”(或“ B 包含 A ”); 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$; 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$.

对任何集 A , 规定 $\emptyset \subseteq A$. 显然 $A \subseteq A$, $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$.

集合的基本运算有三种: 并、交、差.

设 A, B 是两个集. 由含于 A 或含于 B 的所有元素构成的集称为 A 与 B 的并集(简称并). 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}. \quad (1.1)$$

由同时含于 A 与 B 的元素构成的集, 称为 A 与 B 的交集(简称交), 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}. \quad (1.2)$$

由含于 A 但不含于 B 的元素构成的集, 称为 A 与 B 的差集(简称差), 记作 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}. \quad (1.3)$$

两个集合的并、交、差可以用图形直观表示(图 1.1 中的阴影部分).

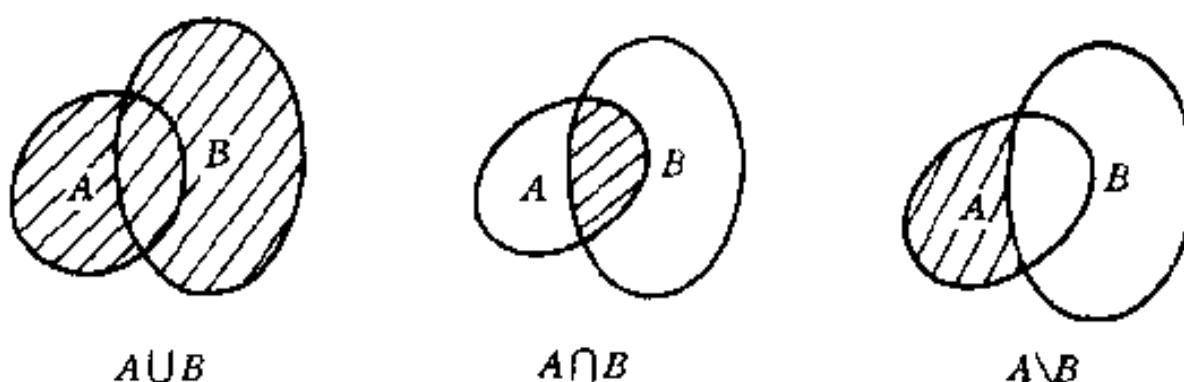


图 1.1

特别,若 $B \subseteq A$, 则称差 $A \setminus B$ 为 B 关于 A 的余(或补)集, 记作 $C_A B$. 通常我们所讨论的问题在一个大的集合 X (常称为基本集或全集)中进行, 所研究的其他集合 A 都是 X 的子集, 此时称 $X \setminus A$ 为 A 的余(或补)集, 记作 $C A$ 或 A^{\complement} .

若 $A \cap B = \emptyset$, 我们就说 A 与 B 不相交; 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 就说 A 与 B 相交.

集合的运算满足下面的基本法则.

^① 国标规定 A 的补集用 $C A$ 表示, 但为排印方便, 本书中用 A' 表示.

定理 1.1 设 A, B, C 为三个任意集合, 则下列法则成立:

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$
- (2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$
- (3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$
 $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C);$
- (4) 幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A;$
- (5) 吸收律 $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset,$
 $A \cup B = B, A \cap B = A$ (其中 $A \subseteq B$),
 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$

证 仅以分配律中第一式为例说明集合等式的证明方法, 其余等式读者可以利用类似的方法证明.

设 $x \in (A \cup B) \cap C$, 由交的定义, $x \in A \cup B$ 并且 $x \in C$. 再根据并的定义, $x \in A$ 且 $x \in C$, 或者 $x \in B$ 且 $x \in C$. 这就是说 $x \in A \cap C$ 或者 $x \in B \cap C$, 因而 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, 于是就证明了 $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$. 类似地可以证明相反的包含关系: $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$. 根据集合相等的定义即知等式成立. ■

下面介绍集合论中的一个重要定理, 通常称为对偶原理. 它提供了一个有效的方法, 使我们可以将已经证明的关于集合的某种性质转移到它的余集上去.

定理 1.2 设 X 为基本集, A, B 是它的两个子集, 则

$$(1) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \quad (1.4)$$

$$(2) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \quad (1.5)$$

这就是说, 两个集合并的余集等于它们的余集的交, 两集合交的余集等于它们余集的并.

证 (1) 为了证明(1.4)式, 根据集合相等的定义, 只要证明 $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ 且 $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. 事实上, 因为 $\forall x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B \Rightarrow x \in A^c$ 且 $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$, 所以 $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. 显然, 上面的推理可以反向进行, 因此相反的包含关系也成立, 从而(1.4)式得证.

(2) 由(1)知,

$$(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B,$$

等式两边取余即得(2)中的等式. ■

集合的并与交的定义以及对偶原理都可以推广到有限多个和无限多个集合的情形, 作为练习由读者自行完成.

设 A, B 是两个非空集合, 且 $x \in A, y \in B$, 则称有次序的一对元素 x, y 为一个序偶, 记作 (x, y) . 两个序偶 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 相等, 当且仅当 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. 由集合 A, B 中所有元素作成的序偶构成的集合, 称为 A 与 B 的 **Cartesian 乘积**, 简称为 **积集**, 记作 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

例如, 设 $A = [0, 1], B = [-1, 1]$, 则 $A \times B$ 就表示平面上以 $(0, -1), (1, -1), (1, 1), (0, 1)$ 为顶点的长方形, 而 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 表示整个坐标平面, 常记作 \mathbb{R}^2 .

1.2 实数的完备性

实数的完备性是极限理论的基础, 本段仅从几何直观来简要地说明什么是实数的完备性. 为此, 先介绍有理数关于有理运算的封闭性和有理数的稠密性.

所谓有理数, 是指一切形如 $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_+, p$ 与 q 互质) 的数, 包括正负整数、正负分数与零. 有理数有一个特性, 就是对有理数进行加减乘除(除法要求分母不为零)运算(以后简称为有理运算)后仍然是有理数, 称这个特性为有理数关于有理运算的**封闭性**.

有理数的另一个重要特性是它的**稠密性**, 即任意两个有理数之间必存在一个有理数. 事实上, 设 r_1 与 r_2 是两个不同的有理数, 不难证明, $\frac{r_1 + r_2}{2}$ 就是介于 r_1 与 r_2 之间的一个有理数. 由此可见, 任意两个有理数之间必有无穷多个有理数.

一条规定了原点和单位长度的有向直线, 称为**坐标轴**. 有了坐标轴, 就可以使有理数与坐标轴上的点对应起来. 对于任何有理数 $\frac{p}{q}$, 必能在坐标轴上得到一个对应点, 这种与有理数相对应的点, 称为**有理点**. 有理数的稠密性反映在坐标轴上, 就是任何两个有理点之间必定含有无穷多个有理点. 因此有理点在坐标轴上的分布是处处稠密的.

如上所说, 任意给定一个有理数, 必有坐标轴上的一个有理点与它相对应. 而且有理点在数轴上的分布是处处稠密的. 反之, 坐标轴上的任意一点是否都对应一个有理数呢? 也就是说, 有理数集是否与坐标轴上的所有点组成的集合一一对应呢? 如果答案是肯定的, 那么有理点就布满了坐标轴. 实际上, 人们早就发现, 尽管有理点在坐标轴上是处处密布的, 但并未布满坐标轴, 在坐标轴上还存在着很多不是有理点的点. 例如, 以原点为中心, 单位正方形的对角线长度 $\sqrt{2}$ 为半径画一圆弧(图 1.2), 它与坐标轴相交于一点 A , A 就不是有理点. 事实上,

假如它是有理点, 也就是说 $\sqrt{2}$ 是有理数, 设

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

其中, $p, q \in \mathbb{N}_+$ 且 p 与 q 互质. 则由 $p^2 = 2q^2$

可知, p^2 可被 2 整除, 所以 p 也可被 2 整除

(读者可用反证法来证明). 设 $p = 2n$

($n \in \mathbb{N}_+$), 则 $2q^2 = p^2 = 4n^2$, 这样, q^2 也能被

2 整除, 故 q 亦能被 2 整除. 因此, p 与 q 有公因子 2, 与 p, q 互质的假定相矛盾. 这就证明了 $\sqrt{2}$ 不是一个有理数, 与 $\sqrt{2}$ 相对应的点 A 不是有理点. 不但如此, 由有理数对加减法运算的封闭性知, $\sqrt{2} \pm 1, \sqrt{2} \pm 2, \dots$ 都对应着坐标轴上不是有理点的点, 这种点有无穷多. 我们把数轴上这种不是有理点的点称为无理点, 无理点所对应的数称为无理数.

有理数与无理数统称为实数, 实数布满了整个坐标轴(因此也称坐标轴为实数轴). 也就是说, 实数集与坐标轴上的所有点是一一对应的, 实数的这个特性称为实数的连续性或完备性. 而有理数集不能与坐标轴上的所有点一一对应, 因此, 有理数是不完备的.

任何一个实数 a 都可以表示为十进制无穷小数, 即

$$a = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中 $a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in M \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. 称 $[a]_n \stackrel{\text{def}}{=} a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为 a 的 n 阶有理近似, a_0 为 a 的整数部分, 记作 $[a] = a_0.0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是 a 的小数部分. 有理数可以表示为十进制循环小数, 而无理数可以表示为十进制无限不循环小数.

设 $a, b \in \mathbb{R}$, 且

$$a = a_0.a_1a_2\cdots, \quad b = b_0.b_1b_2\cdots,$$

若 $\forall i = 0, 1, 2, \dots, a_i = b_i$, 则称 $a = b$; 若 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 使 $a_N < b_N$ ($a_N > b_N$), 且当 $i < N$ 时, $a_i = b_i$, 则称 $a < b$ ($b < a$). 因此, 任何两个实数都可以比较大小.

1.3 确界与确界存在定理

实数集的完备性是实数的最基本的属性之一, 极限理论必须建立在实数完备性的基础上. 例如, $\sqrt{2}$ 的不足近似值构成的有理数列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots,$$

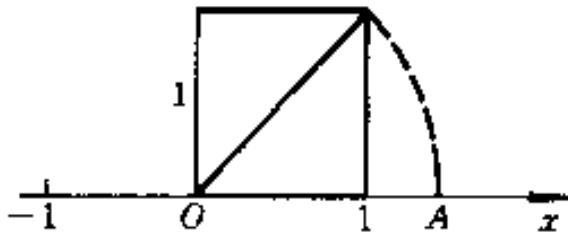


图 1.2

显然它任意逼近无理数 $\sqrt{2}$. 今后我们就说, $\sqrt{2}$ 是该数列的极限(极限严格的定义见第三节). 但是, $\sqrt{2}$ 不是有理数, 这说明有理数数列的极限不一定是有理数, 也就是说, 极限运算在有理数集中是不封闭的. 这件事与有理数没有完备性有关. 为了说明这个问题, 我们来介绍实数集确界的概念以及刻画实数集完备性的确界存在定理.

定义 1.1 设 A 为一非空实数集, 若

$$\exists L \in \mathbb{R}, \text{使得 } \forall x \in A, \text{都有 } x \leq L, \quad (1.6)$$

则称 A 有上界(或上有界), 称 L 为 A 的一个上界. 若

$$\exists l \in \mathbb{R}, \text{使得 } \forall x \in A, \text{都有 } x \geq l, \quad (1.7)$$

则称 A 有下界(或下有界), 称 l 为 A 的一个下界. 若 A 既有上界又有下界, 则称 A 有界, 否则, 称 A 无界.

由定义 1.1 易知:

- (1) A 有界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, M > 0$, 使得 $\forall x \in A$, 都有 $|x| \leq M$;
- (2) 有上界(下界)数集的上界(下界)不是唯一的.

例 1.1 $A = \{x \mid x = \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$ 是一个有界数集, $L = 1$ 是它的一个上界, $l = -1$ 是它的一个下界, 并且任何大于 1 的数也都是它的上界, 任何小于 -1 的数也都是它的下界.

例 1.2 $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ 也是有界数集, $L = 1$ 是它的上界, $l = 0$ 是它的下界, 而且它的上界与下界都有无穷多个.

上面两个例子说明, 如果数集 A 有上界, 那么它的上界有无穷多个. 在它的所有上界中, 最小的那个上界具有特别的重要性. 所谓 A 的最小上界 s 有两层含义: (1) s 是 A 的一个上界, 即对任何 $x \in A$ 都有 $x \leq s$; (2) s 是 A 的所有上界中最小的一个, 也就是说, 任何比 s 小的数都不是 A 的上界. 用精确的数学语言来表述, 就是对于任意的 $\epsilon > 0$, 不论如何小, 都存在 $x_0 \in A$, 使 $x_0 > s - \epsilon$. 由此得到如下定义.

定义 1.2 (确界) 设 $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. 若 $\exists s \in \mathbb{R}$, 满足: (1) $\forall x \in A$, 都有 $x \leq s$; (2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$, 使 $x_0 > s - \epsilon$, 则称 s 是 A 的上确界(或最小上界), 记作 $\sup A$.

类似地可以定义 A 的下确界(或最大下界), 记作 $\inf A$.

由定义 1.2 易见, 例 1.1 中, $\sup A = 1, \inf A = -1$; 例 1.2 中, $\sup B = 1, \inf B = 0$.

容易证明, 如果一个数集的上确界(下确界)存在, 那么它必定唯一(证明作

为习题留给读者).

应当注意, 一个数集的上(下)确界与它的最大(小)值是有区别的. 数集 A 的最大值(最小值)是指含于 A 中的所有实数的最大者(最小者), 记作 $\max A$ ($\min A$). 因此, 若 A 有最大值, 那么它就是 A 的上确界. 反之不一定成立, 因为上确界可能属于 A , 也可能不属于 A . 关于下确界与最小值有类似的结论. 在例 1.1 中, $\sup A = \max A + 1$, $\inf A = \min A - 1$; 在例 1.2 中 $\inf B = 0 \notin B$, B 没有最小值.

如果数集 A 没有上(下)界, 自然也没有上(下)确界, 对于这种情况, 我们规定 $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$). 如果数集 A 有上(下)界, 那么它是否一定有上(下)确界呢? 更确切地说, 如果 A 是有上(下)界的实数集, 那么它是否一定有实数的上(下)确界呢? 如果 A 是其他数集, 例如 A 是有上(下)界的有理数集, 那么它是否一定有有理数的上(下)确界呢? 这个问题的答案与 A 是什么数系中的数集有关. 对于实数集来说, 答案是肯定的.

设 A 是一个非空的有上界的实数集, 当 A 中的元素(实数)向大的方向增加时, 由于它是有上界的, 而且所有上界在数轴上是连续分布的实数, 因此, 直观上不难想象, 在数轴上必定存在一点, 在它的右边不再有 A 中的元素, 这个点所对应的实数便是 A 的上确界. 对于非空有下界的实数集也有同样的情况. 我们把这个事实不加证明地叙述如下, 并称之为确界存在定理.

定理 1.3 任一有上(下)界的非空实数集 A 必有上(下)确界.

确界存在定理仅对实数集成立, 在有理数集中不成立.

例 1.3 证明: 集 $A = \{r \mid r > 0, r^2 < 2, r \in \mathbb{Q}\}$ 有上界, 但在 \mathbb{Q} 内没有上确界.

证 显然, A 有上界, 例如 2 就是它的一个上界, 下面用反证法证明, 在 \mathbb{Q} 内 A 没有上确界. 事实上, 如果 $s \in \mathbb{Q}$ 是它的上确界, 那么, $s^2 \neq 2$. 因为, 若 $s^2 = 2$, 则 $s = \sqrt{2}$. 前面已经证明 $s = \sqrt{2}$ 是无理数, 这与假设 s 为有理数矛盾. 因此, 要么 $s^2 > 2$, 要么 $1 < s^2 < 2$.

设 $s^2 > 2$, 令 $\epsilon = \frac{s^2 - 2}{2s}$, 则 $0 < s - \epsilon < s$. 但是, 由于 $(s - \epsilon)^2 > s^2 - 2\epsilon s = 2$, 所以 $s - \epsilon$ 也是 A 的一个上界, 而且它比 s 还小, 这与 s 是 A 的上确界矛盾.

设 $1 < s^2 < 2$, 令 $\epsilon = \frac{2 - s^2}{2s + 1}$, 则 $0 < \epsilon < \frac{2 - s^2}{2s} < 1$, 并且

$$(s + \epsilon)^2 < s^2 + 2s\epsilon + \epsilon^2 = 2.$$

所以, $s + \epsilon \in A$, 这与 s 是 A 的上界相矛盾.

由上述讨论可知, 集 A 在 \mathbb{Q} 内没有上确界. ─

实际上, 例 1.3 中集 A 的上确界是无理数 $\sqrt{2}$. 这说明, 在有理数集中确界存

在定理之所以不成立,是因为有理数集的确界可能是无理数,有理数集不是完备的.

实数集的确界存在定理是区别实数集和有理数集的本质属性,它是实数完备性的表现,因此也可称为实数的完备性定理.利用确界存在定理,可以推证出刻画实数完备性的其他几种形式,我们在第三节再作介绍.

习题 1.1

(A)

1. 设 A, B 分别为下列两个给定的集合:

- (1) $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$;
- (2) A 为平面上平行四边形的全体, B 为矩形的全体;
- (3) $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}, B = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$.

试求 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

2. 已知 A 与 B 分别为下列两个给定的集合:

- (1) $A = \{x | 1 \leq x \leq 2\} \cup \{x | 5 \leq x \leq 6\} \cup \{3\}, B = \{y | 2 \leq y \leq 3\}$;
- (2) $A = \{x | -\infty < x < \infty\}, B = \{y | -1 \leq y \leq 1\} \cap \{y | \sin y = \frac{1}{2}\}$.

在平面直角坐标系内画出 $A \times B$.

3. 证明:

- (1) $A \cup (A \cap B) = A$;
- (2) $A \setminus B = A \cap B'$;
- (3) $A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$;
- (4) $B \subset A' \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

4. 判断下列结论是否成立:

- (1) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$;
- (2) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$;
- (3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
- (4) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

5. 设 p 为正整数,且 p^2 可被 2 整除,试证明 p 也可以被 2 整除.

6. 证明:如果一个数集的上确界(或下确界)存在,那么它必定唯一.

7. 写出 $A \subseteq \mathbb{R}$ 下无界、上无界的定义.

8. 设 $A \subseteq \mathbb{R}$, 证明 A 有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0$, 使得 $\forall x \in A$, 恒有 $|x| \leq M$.

9. 设 $A \subseteq \mathbb{R}$,写出 $\inf A$ 的定义.

10. 设 $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\}$, 求 $\sup A, \inf A$, 问 $\min A, \max A$ 存在吗?

11. 设 $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, 证明: $\sup A = \inf A \Leftrightarrow A$ 是仅由一个元素组成的集.

12. 设 $A, B \subseteq \mathbb{R}$, 若它们都是有界集, 证明: $A \cup B, A \cap B$ 也是有界集. 若 A, B 均无界, $A \cup B, A \cap B$ 也是无界集吗?

(B)

1. 证明: $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$, $(\bigcap_{i=1}^n A_i)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$, 其中 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是基本集 X 的子集.

2. 由非空集合 X 的所有子集构成的集合称为 X 的幂集, 记作 2^X .

(1) 设 $X = \{a, b, c\}$, 求 2^X ;

(2) 设 X 是由 n 个元素组成的有限集, 证明 2^X 中含有 2^n 个元素.

3. 设 A 与 B 是任意两个集合, 称集合 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的对称差. 证明:

$$(1) A \Delta B = B \Delta A;$$

$$(2) (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C);$$

$$(3) A \setminus B = A \Delta (A \cap B);$$

$$(4) A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

$$(5) A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C); \quad (6) A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C.$$

4. 设 $A, B \subseteq \mathbf{R}$ 是非空有界集, 证明:

$$(1) A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B;$$

$$(2) \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\};$$

(3) 如果 $\forall a \in A, \forall b \in B, |a - b| < \epsilon$, 则 $|\sup A - \sup B| \leq \epsilon, |\inf A - \inf B| \leq \epsilon$.

5. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 称 $\rho(x, y) = |x - y|$ 为 x 与 y 之间的距离. 证明: 对任意的 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 有

$$(1) \rho(x, y) \geq 0, \text{ 且 } \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(2) \rho(x, y) = \rho(y, x);$$

$$(3) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

第二节 映射与函数

映射是现代数学中的一个基本概念, 函数是微积分研究的对象. 本节我们在介绍映射及其有关概念的基础上, 讲解函数的概念及函数的运算.

2.1 映射

定义 2.1 (映射) 设 A, B 是两个非空集合. 若对每个 $x \in A$, 按照某种确定的法则 f , 有唯一确定的 $y \in B$ 与它相对应, 则称 f 为从 A 到 B 的一个映射. 记作

$$f: A \rightarrow B, \text{ 或 } f: x \mapsto y = f(x), x \in A.$$

其中, y 称为 x 在映射 f 下的象, x 称为 y 在映射 f 下的一个原象(或逆象). A 称为映射 f 的定义域, 记作 $D(f) = A$. A 中所有元素 x 的象 y 的全体所构成的集合称为 f 的值域, 记作 $R(f)$ 或 $f(A)$, 即

$$R(f) = f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}. \quad (2.1)$$

应当注意, 定义中 x 的象是唯一的, 但 y 的原象不一定是唯一的, 并且值域 $f(A) \subseteq B$.

设有映射 $f: A \rightarrow B$, 且 $B_0 \subseteq B$, 则称 A 中那些象在 B_0 中的元 x 全体所构成的集合为 B_0 在映射 f 下的原象, 记作

$$f^{-1}(B_0) = \{x \mid x \in A \text{ 且 } f(x) \in B_0\}.$$

映射的概念中有两个基本要素, 就是定义域和对应法则. 若 f, g 都是从 A 到 B 的映射, 并且 $\forall x \in A, f(x) = g(x)$, 则称映射 f 与 g 相等, 记作

$$f = g.$$

对应法则就是由 A 中的元 x 确定 B 中的对应元 y 的方法, 是两个集合 A 与 B 间对应关系的具体表现. 表示对应法则的方法很多, 但不论用什么方法表示, 都必须非常明确, 不能模棱两可, 含混不清.

例 2.1 设 A 表示某校全体学生所构成的集合. 用一个确定的方法给每个学生编一个学号, B 表示该校学生学号的集合, φ 表示编学号的方法, 于是它就确定了从 A 到 B 的一个映射 $\varphi: A \rightarrow B$.

例 2.2 用 A 表示平面 \mathbf{R}^2 上以坐标原点为中心的所有同心圆所构成的集合, 通过求圆面积公式 $S = \pi r^2$ (r 为圆的半径), 对于 A 中的每个圆确定了唯一的实数 $S \in \mathbf{R}$, 于是就确定了从 A 到 \mathbf{R} 的一个映射 $f: A \rightarrow \mathbf{R}$.

例 2.3 设 $A = \mathbf{R}^2, \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R} \times \{0\} \subseteq \mathbf{R}^2$ (其中, $\{0\}$ 表示仅由一个数 0 构成的集合. 仅由一个元素构成的集合称为单点集). 由对应法则

$$p: (x, y) \in \mathbf{R}^2 \rightarrow (x, 0) \in \mathbf{R} \times \{0\}$$

确定了一个从 \mathbf{R}^2 到 $\mathbf{R} \times \{0\}$ 的映射 p . 在几何上, 它就是平面上点到 x 轴上的投影.

映射又称为算子. 在映射的定义中, 若 B 是实数集, 则称映射 $f: A \rightarrow B$ 为泛函; 若 A, B 都是实数集, 则映射 $f: A \rightarrow B$ 就是通常的一元函数. 若 $A = B$, 则 f 是从 A 到自身的映射, 通常称这样的映射为 A 上的一个变换. 把集 A 中的每个元都映为自己的映射称为 A 上的恒等映射或单位映射, 记作 I_A 或 I , 即 $\forall x \in A, Ix = x$.

对于映射 $f: A \rightarrow B$, 若有 $R(f) = B$, 则称 f 是 A 到 B 上的映射或满射; 若 $R(f) \subseteq B$, 则称 f 是 A 到 B 内的映射或内射; 若对每个 $y \in R(f)$, 有唯一的原象 $x \in A$, 则称 f 是单射; 若 f 既是满射又是单射, 则称 f 是 A 到 B 上的一一映射或满单射(图 2.1), 此时我们说集合 A 与 B 是一一对应的.

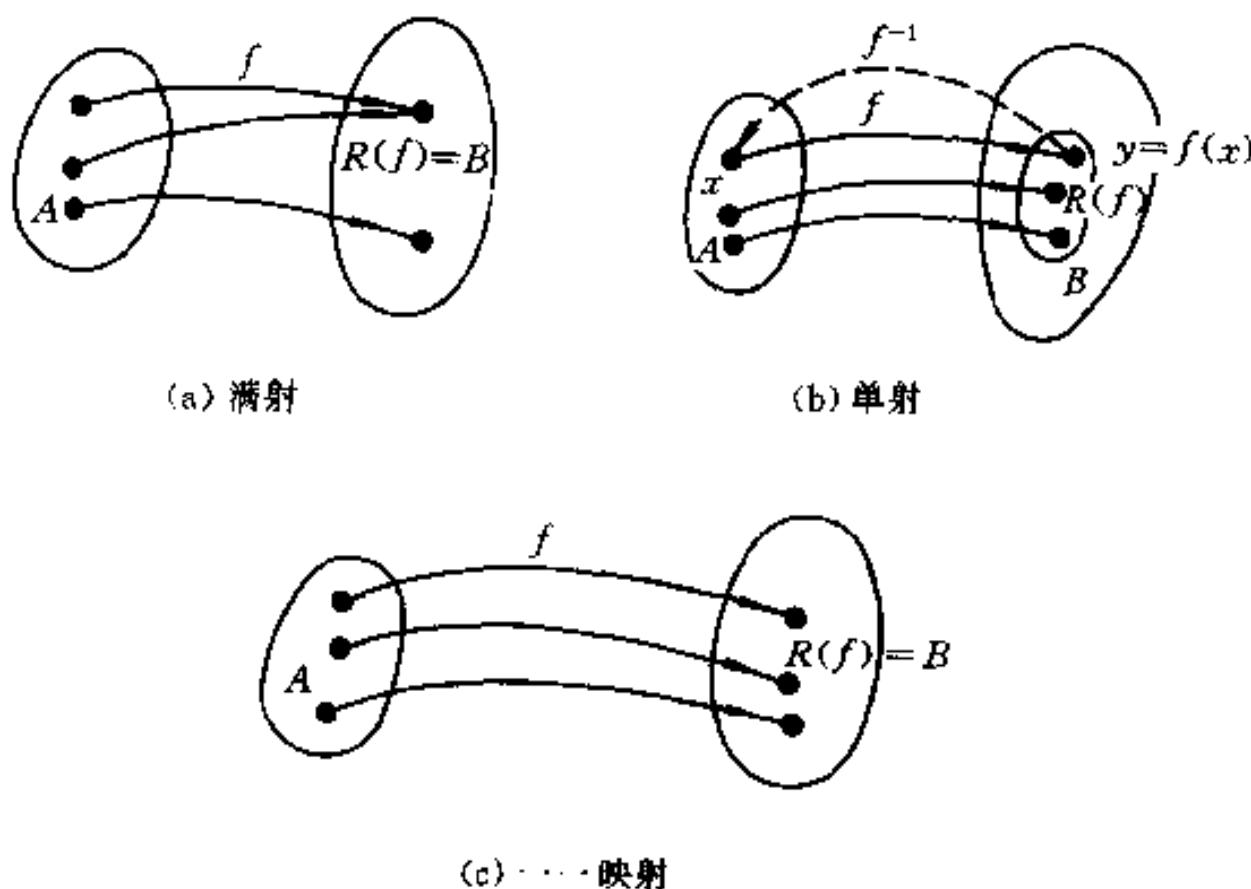


图 2.1

容易证明：

定理 2.1 设有映射 $f: A \rightarrow B$, 则下面三个论断是等价的:

- (1) $f: A \rightarrow B$ 是单射;
- (2) 若 $x_1, x_2 \in A$, 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- (3) 若 $x_1, x_2 \in A$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$.

下面, 我们介绍复合映射与逆映射的概念.

设有映射 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: B \rightarrow C$, 由

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)), x \in A$$

所确定的映射 $g \circ f: A \rightarrow C$ 称为 f 与 g 的复合映射(图 2.2), 其中 $y = f(x) \in B$ 称为中间元.

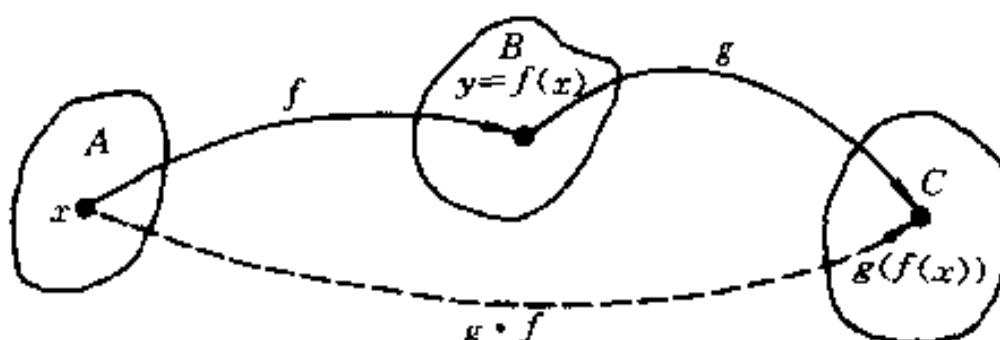


图 2.2

由定义易见, 任给两个映射 $f: A \rightarrow X$ 与 $g: B \rightarrow Y$, 当且仅当 $f(A) \subseteq B$ 时才存在复合映射 $g \circ f: A \rightarrow Y$.

例 2.1 中的映射 φ 既是单射又是满射, 因而是一一映射; 例 2.2 中的映射 f 是单射但不是满射; 例 2.3 中的映射 p 是满射但不是单射, 下面再举一个复合

映射的例子.

例 2.4 设 f 是平面 \mathbf{R}^2 上的平移变换, 即

$$f: (x, y) \mapsto (x', y'),$$

其中 $x' = x + x_0, y' = y + y_0$. 又 g 是平面 \mathbf{R}^2 上绕坐标原点逆时针方向旋转 θ 角的旋转变换, 即

$$g: (x', y') \mapsto (\bar{x}, \bar{y}),$$

其中 $\bar{x} = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \bar{y} = x' \sin \theta + y' \cos \theta$. 则它们的复合映射 $g \circ f$ 就是平面 \mathbf{R}^2 上的平移旋转变换, 即

$$g \circ f: (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}),$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x + x_0) \cos \theta - (y + y_0) \sin \theta = x \cos \theta - y \sin \theta + \bar{x}_0, \\ \bar{y} &= (x + x_0) \sin \theta + (y + y_0) \cos \theta = x \sin \theta + y \cos \theta + \bar{y}_0,\end{aligned}$$

而 $\bar{x}_0 = x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta, \bar{y}_0 = x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta$. ■

两个映射的复合也叫做映射的乘积, 不难将它推广到有限个映射的情形. 映射的复合满足结合律, 即若 f, g, φ 分别是 $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D$ 的映射, 则

$$\varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f.$$

事实上, 上式两端都是 A 到 D 的映射, 并且对任何 $x \in A$, 都有

$$\begin{aligned}[\varphi \circ (g \circ f)](x) &= \varphi[(g \circ f)(x)] = \varphi[g(f(x))] \\ &= (\varphi \circ g)(f(x)) = [(\varphi \circ g) \circ f](x),\end{aligned}$$

所以, 等式 $\varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f$ 成立.

设有映射 $f: A \rightarrow B$, 若存在一个映射 $g: B \rightarrow A$, 使

$$g \circ f = I_A, \quad f \circ g = I_B, \tag{2.2}$$

则称 f 是可逆映射, 并且称 g 是 f 的逆映射, 记作 $g = f^{-1}$.

由定义可知, 若 $f: A \rightarrow B$ 是可逆映射, 则 $g: B \rightarrow A$ 也是可逆映射, 并且 $g^{-1} = f$. 容易证明, 若 f 可逆, 则其逆映射 g 是唯一的, 证明留作习题.

定理 2.2 映射 $f: A \rightarrow B$ 可逆的充要条件为 f 是一一映射.

证 必要性 设 f 可逆, 则存在唯一的 $g: B \rightarrow A$, 使

$$g \circ f = I_A, \quad f \circ g = I_B.$$

于是对于每个 $y \in B$,

$$y = I_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y)).$$

由于 $g(y) \in A$, 这表明 B 中的每个元都是 A 中某个元在 f 下的象, 所以 f 是满射. 又若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则必有

$$\begin{aligned} x_1 &= I_A(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) \\ &= g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = I_A(x_2) = x_2, \end{aligned}$$

由定理 2.1, f 是单射, 从而 f 是一一映射.

充分性 因为 f 是一一映射, 所以对每个 $y \in B$, 存在唯一的 $x \in A$, 使 $f(x) = y$. 从而得到一个映射: $g: B \rightarrow A$, 使 $g(y) = x$, 现在证明它就是 f 的逆映射. 事实上, 对每个 $x \in A$, 都有

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x,$$

故 $g \circ f = I_A$. 类似可证 $f \circ g = I_B$. 因此 f 是可逆的, g 是 f 的逆映射. ■

最后, 我们简单介绍一下映射的图象概念.

设 $f: A \rightarrow B$ 是一个映射, 称集合

$$\text{Gr}f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B \quad (2.3)$$

为映射 f 的图象.

例如, 映射 $f: x \mapsto x^2$, ($x \in [-1, 1]$) 的图象

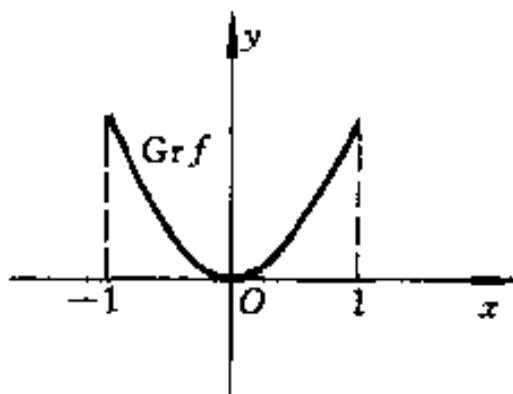


图 2.3

$$\text{Gr}f = \{(x, x^2) \mid x \in [-1, 1]\}$$

就是区间 $[-1, 1]$ 上的一条二次抛物线(图 2.3).

2.2 函数

现在, 我们利用映射的有关概念来研究函数.

定义 2.2 (函数) 设 A, B 是两个实数集, 称映射 $f: A \rightarrow B$ 为一元函数, 记作

$$f: x \mapsto y = f(x), x \in A.$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, $f(x)$ 表示函数 f 在 x 处的值, A 称为 f 的定义域, 记作 $D(f)$; $f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$ 称为 f 的值域, 记作 $R(f)$.

通常, “函数”一词指的是对应法则 f , 但是习惯上我们也用“ $y = f(x)$, $x \in A$ ”来表示定义在 A 上的函数, 此时应理解为“由对应关系 $y = f(x)$ 所确定的函数 f ”.

作为两个实数集之间的映射, 函数的定义中也有两个基本要素, 就是定义域与对应法则. 为了加深对函数概念的理解, 下面我们对这两个要素作一些简要的说明.

(1) 定义域 $D(f)$. 函数的定义域就是自变量所能取得的那些数构成的集合. 在实际问题中, 可以根据函数的实际意义来确定. 例如, 真空中的自由落体运动规律

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.4)$$

确定了 s 与 t 之间的一个函数关系, 其中自变量 t 的变化范围是从物体开始下落的时刻(设 $t=0$)到物体到达地面的时刻(设 $t=T$), 故该函数的定义域 $D(f) = [0, T]$. 在理论研究中, 如果函数是由数学表达式给出, 又无需考虑它的实际意义, 那么, 函数的定义域就是使该表达式有意义的自变量 x 的所有值构成的数集. 例如, 如果不考虑实际意义, 那么(2.4)式中函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 又如, 函数

$$y = \sqrt{1 - |x|} + \lg(2x - 1)$$

的定义域是由使右端两项都有意义的那些 x 所构成的数集, 所以 $D(f) = [-1, 1] \cap (\frac{1}{2}, +\infty) = (\frac{1}{2}, 1]$. 若函数的定义域是数轴上的区间, 此时定义域称为**定义区间**.

(2) 对应法则 f . 对应法则是因变量 y 与自变量 x 之间函数关系的具体表现, 它的表示方法很多, 常用的有三种: 列表法、图示法和公式法.

所谓列表法, 就是将自变量与因变量的对应数据列成表格, 它们之间的函数关系从表格上一目了然. 例如三角函数表、对数函数表等.

在很多生产部门中常采用图示法来表示函数关系. 例如, 气象站用仪表记录下的气温曲线来表示气温随时间的变化关系; 化工厂中用温度压力曲线来表示温度与压力之间的函数关系等.

理论研究中常用公式法, 就是写出函数的数学表达式和定义域. 此时, 对于定义域中每个自变量的值, 按照表达式中所给定的数学运算来确定因变量的值. 读者在中学已经学过很多具体的用数学表达式表示的函数, 这里不再重复. 值得注意的是, 在函数的定义中, 并不要求在整个定义域上只能用一个表达式来表示对应法则. 在很多问题中常常会遇到这种情况, 就是在定义域的不同子集上用不同的表达式来表示对应法则, 这种函数叫做**分段函数**. 下面举几个分段函数的例子.

例 2.5 在电子技术中经常遇到的三角波, 它的一个波形的表达式为

$$u = u(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2-t, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

它是一个分段函数,不能认为是两个函数(图 2.4).

例 2.6 符号函数(图 2.5)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

例 2.7 取整函数 $y = [x]$ ($x \in \mathbb{R}$), 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 因此, 对于每个 $x \in \mathbb{R}$ 的值, 由 $y = [x]$ 对应的 y 取不超过 x 的最大整数(图 2.6).

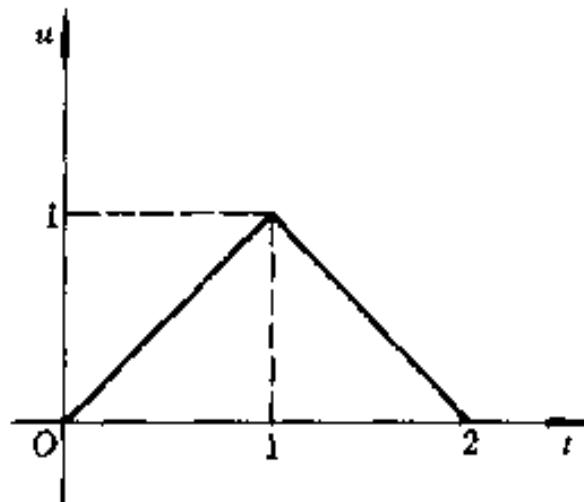


图 2.4

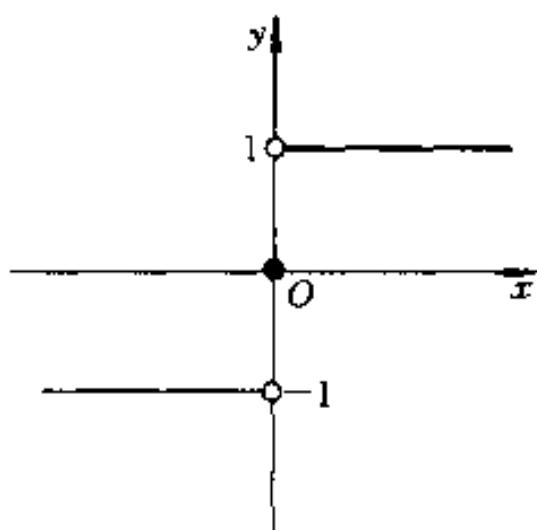


图 2.5

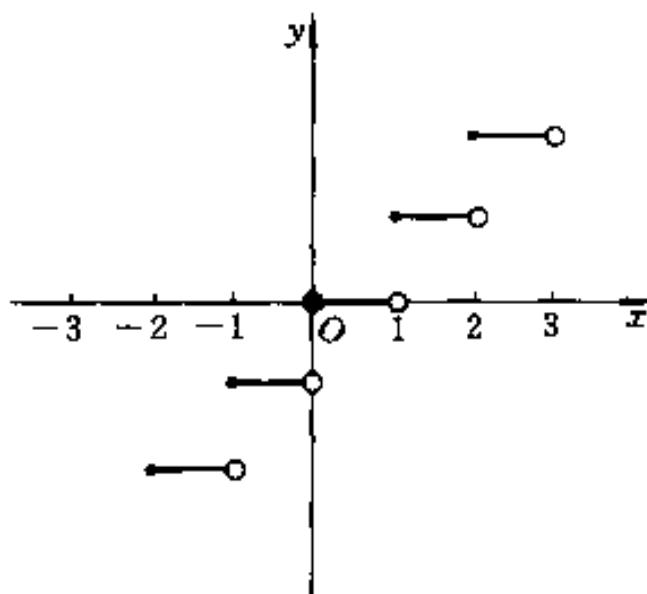


图 2.6

例 2.8 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

由于函数的值域是由它的定义域和对应法则确定的,因此,定义域与对应法则是函数定义中的两个基本要素. 如果两个函数的定义域相同,并且对于定义域内每个自变量的值,它们所对应的函数值也相同,则称这两个函数相等.

函数的运算

设 f 与 g 是定义域分别为 $D(f)$ 与 $D(g)$ 的一元函数, 则可定义 f 与 g 的和、差、积、商如下:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D(f) \cap D(g),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad x \in D(f) \cap D(g),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D(f) \cap D(g), g(x) \neq 0.$$

作为函数乘法的特例,数 $\lambda \in \mathbf{R}$ 与函数 f 的乘法定义为

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in D(f),$$

称为数乘.

除有理运算外,还可以定义函数的复合运算和逆运算.设有函数 $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ 与 $g: B \rightarrow \mathbf{R}$,若 $R(f) \subseteq B$,则称复合映射

$$\varphi = g \circ f: A \rightarrow \mathbf{R}$$

为 g 与 f 的复合函数.这就是说, $\forall x \in A$,通过函数 $u = f(x)$ 得到确定的 $u \in R(f)$ 与之对应.又由于 $R(f) \subseteq B$,对于这个 u ,通过 $y = g(u)$ 得到确定的 y 与之对应.这样, $\forall x \in A$,通过 u 得到确定的 y 与之对应,即有

$$y = \varphi(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)], \quad x \in A,$$

其中 u 称为中间变量,并称“ \circ ”为复合运算.

同复合映射一样,当且仅当 $R(f) \subseteq B$ 时, f 与 g 才能构成复合函数

$$\varphi = g \circ f: A \rightarrow \mathbf{R}.$$

例 2.9 设 $f: x \mapsto \sin x$, $g: x \mapsto \sqrt{x}$,由于 $R(g) = [0, +\infty) \subseteq D(f)$,故 f 与 g 能进行复合运算得到复合函数

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sin \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty).$$

反之,由于 $R(f) = [-1, 1] \not\subseteq D(g)$,故 g 与 f 不能复合.但若限制 f 的定义域 $D(f)$,例如,限制 $D(f) = [0, \pi]$,则 $R(f) = [0, 1] \subseteq D(g)$,从而 g 与 f 能够复合得到复合函数

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{\sin x}, \quad x \in [0, \pi].$$

读者还可进一步讨论 $f \circ f$ 与 $g \circ g$ 是否有意义.

作为逆映射的特例,我们来定义反函数的概念.设有函数 $f: A \rightarrow B = R(f)$,若存在着函数 $g: R(f) \rightarrow A$,使等式(2.2)成立,则称 f 是可逆的或存在反函数,且称 g 是 f 的反函数或逆函数,记作 $g = f^{-1}$.由 f 求 f^{-1} 的运算称为函数的逆运算.

根据定理 2.2,函数 $f: A \rightarrow B$ 是可逆的充要条件是 f 为一一映射,可逆函数的反函数是唯一的.

根据反函数的定义,函数 f 与其反函数 f^{-1} 的定义域和值域是互换的.并且 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 在 xOy 平面上表示同一条曲线.但习惯上,总以 x 作自变量,用 $y = f^{-1}(x)$ 表示 $y = f(x)$ 的反函数.这时,若 $P(x, f(x))$ 是 f 图象上

的点, 则

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A,$$

即

$$f^{-1}: f(x) \mapsto x, \quad f(x) \in R(f) = B,$$

故 $Q(f(x), x)$ 是 f^{-1} 的图象上的点. 反过来, 结论也成立, 因此 f 的图象与 f^{-1} 的图象关于直线 $y = x$ 是对称的(图 2.7).

初等函数

我们已经学习过常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数, 这六类函数是研究其他各种函数的基础, 统称为**基本初等函数**. 所谓**初等函数**是指可由基本初等函数经过有限次的有理运算与复合运算所产生的函数. 例如,

$$\frac{1+2^x \sin x}{\arccos x}, \quad \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

都是初等函数. 一般来说, 分段函数不是初等函数.

在工程技术中经常用到一种由指数函数 e^x 与 e^{-x} (其中底数 e 是常数, 它的定义在本章第三节中介绍) 构成的初等函数, 就是所谓**双曲函数**, 主要包括:

$$\text{双曲正弦 } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\text{双曲余弦 } \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\text{双曲正切 } \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

它们的图形如图 2.8 所示.

双曲函数与三角函数有许多类似的恒等公式, 这些公式列在下面由读者去证明:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

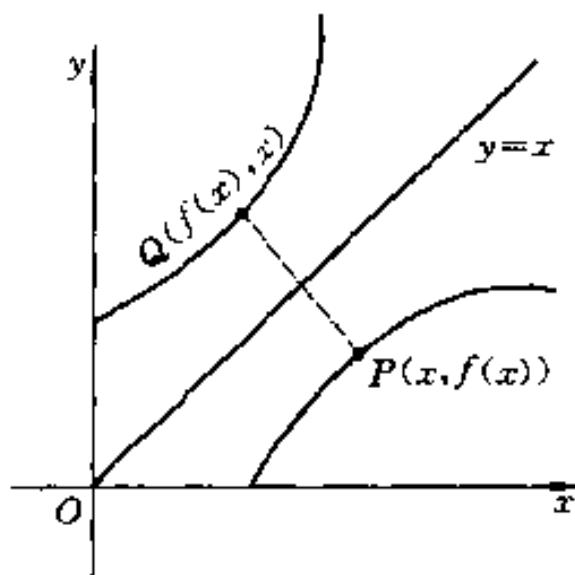


图 2.7

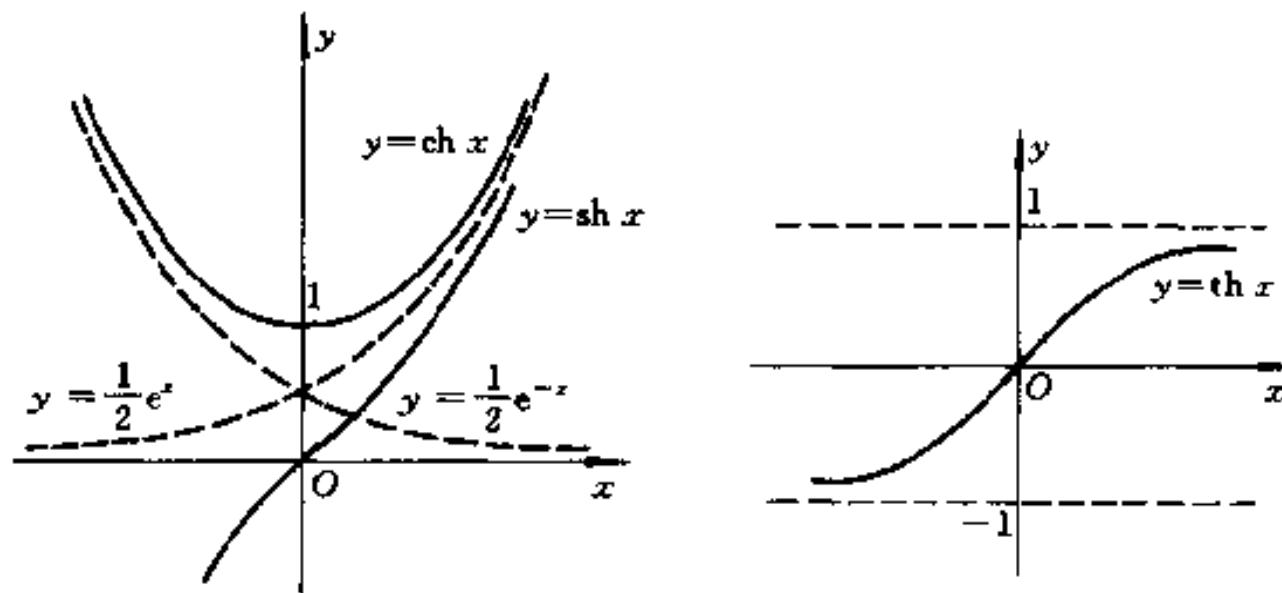


图 2.8

双曲函数的反函数称为反双曲函数, 容易推得如下表达式:

$$\text{反双曲正弦 } \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\text{反双曲余弦 } \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (1 \leqslant x < +\infty);$$

$$\text{反双曲正切 } \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

下面以反双曲正弦为例说明推导方法. 设 $y = \operatorname{arsh} x$, 则有

$$x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y}.$$

令 $e^y = u$, 则上式变为关于 u 的二次方程 $u^2 - 2xu - 1 = 0$. 解此方程可得

$$e^y = u = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

由于 $e^y > 0$, 故应舍去“-”号, 从而得

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

习题 1.2

(A)

1. 设映射 $f: A \rightarrow B$ 是可逆的, 证明: 它的逆映射是唯一的.
2. 设 f 和 g 都是 \mathbb{R} 到自身的映射:

$$f: x \mapsto x + a, \quad g: x \mapsto x - a, \quad x \in \mathbb{R},$$

证明: 它们互为逆映射.

3. 设 $f: x \mapsto x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$; $g: y \mapsto \sqrt{y}$, $y \in (0, +\infty)$, 试求 $D(g \circ f)$, $D(f \circ g)$, $g \circ f$ 与 $f \circ g$.

4. 设 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: B \rightarrow A$ 是两个任意映射. 若 $g \circ f = I_A$, 证明: f 是单射, g 是满射.
5. 设 p 是坐标平面 \mathbf{R}^2 到 x 轴上的投影映射, 问 p 是否单射或满射? 并求 $p^{-1}(p(1,1)), p(p^{-1}(1,0)), p^{-1}(1,0) \cap p^{-1}(3,0)$.
6. 证明定理 2.1.
7. 下列函数是否相等, 为什么?
- (1) $y = \frac{x^2}{x}$ 与 $y = x$;
 - (2) $y = x$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$;
 - (3) $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = |x|$;
 - (4) $y = x^2 + 1$ 与 $u = t^2 + 1$.
8. 设 $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+a}$, 证明: $x = f(y)$.
9. 下列函数中哪些是初等函数? 哪些不是?
- (1) $y = 2^{-x^2}$;
 - (2) $y = \sqrt{x} + \lg(\sin x)$;
 - (3) $y = [x]$;
 - (4) $y = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$
10. 证明下列恒等式:
- (1) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$;
 - (2) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;
 - (3) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;
 - (4) $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$;
 - (5) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$;
 - (6) $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.
- (B)
1. 设有映射 $f: X \rightarrow Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$. 证明:
- (1) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(X)$;
 - (2) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. 若 f 是单射, 则 $f^{-1}(f(A)) = A$;
 - (3) $f(f^{-1}(B)) = B \Leftrightarrow f$ 为满射.
2. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A, B \subseteq X$. 证明:
- (1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
 - (2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
 - (3) $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$;
 - (4) 若 f 为单射, 则(2),(3)两式都变为等式.
3. 设有映射 $f: X \rightarrow Y, A, B \subseteq Y$. 证明: 将上题第(1),(2),(3)小题中的 f 换成 f^{-1} , 则均有等式成立.
4. 设 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: B \rightarrow C$ 都是一一映射, 证明:
- (1) $g \circ f$ 也是一一映射;
 - (2) $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1}) \circ (g^{-1})$.
5. 凡与数集 \mathbf{N}_+ 一一对应的集合称为可数无穷集, 简称可数集. 证明:
- (1) 正偶数集与正奇数集都是可数集;
 - (2) 若 A, B 都是可数集, 则 $A \cup B$ 也是可数集;

(3) 整数集 \mathbf{Z} 是可数集.

6. 设 A, B 是两个集合, 若存在一个从 A 到 B 上的一一映射 f , 则称 A 与 B 等势(或有相同的基数), 记作 $A \sim B$. 证明: 区间 $[0, 1]$ 与区间 $[a, b]$ 等势, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

第三节 数列的极限

极限概念是深入研究函数变化性态最基本的一个概念, 极限方法是数学中最重要的一种思想方法. 本节讨论数列极限的概念、收敛数列的性质、判别数列收敛的方法以及数列极限的求法, 它们也是进一步学习函数极限和无穷级数的基础.

3.1 数列极限的概念

所谓数列, 就是从 \mathbf{N}_+ 到 \mathbf{R} 的一个映射 $f: n \mapsto f(n)$, $n \in \mathbf{N}_+$, 也就是定义在 \mathbf{N}_+ 上的一个函数(通常称为整标函数). 对于每个 $n \in \mathbf{N}_+$, 按自然数顺序将对应的函数值 $a_n = f(n)$ 排列出来:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

简单地记作 $\{a_n\}$, a_n 称为数列的第 n 项或通项, n 为脚标. 例如:

- (1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$
- (2) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots;$
- (3) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots;$
- (4) $\left\{(-1)^{n-1}\right\}$: $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots;$
- (5) $\{2^n\}$: $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots.$

仔细观察上面几个数列随 n 变化的趋势, 不难发现随着 n 的无限增大, 有的数列无限趋大; 有的数列没有确定的变化趋势; 有的数列则无限接近于一个常数 a . 具有第三种变化趋势的数列叫做有极限的数列, 常数 a 叫做该数列的极限. 例如, (2) 中的数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, 其各项的绝对值随着 n 的增大而变小, 当 n 无限增大时, 该数列无限接近于 0, 通常就说 0 是它的极限. 类似地, (3) 中数列的极限是 1. 这种朴素的极限思想在我国古代就已经产生. 战国时期梁国有位名叫惠施的宰相, 就曾说过“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭”(见庄子的《天下篇》). 用现在的语言来表述, 就是数列

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \quad a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \dots$$

的极限问题. 由于 $a_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 1 - \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 直观上不难看出, 当 n 无限增大时, a_n 无限接近于 1, 但永远不能达到 1, 1 是它的极限.

在上面的例子中, 我们都是用“无限增大”和“无限接近”来描述极限概念的. 然而, 仅仅停留于这种直观的描述是非常不够的. 例如, 能够凭借直观判定数列

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

的极限是多少吗? 显然不能. 为了深入地研究极限理论, 需要给极限概念一个确切的定义, 定义的关键在于要对“无限增大”和“无限接近”赋予确切的涵义.

仍以(2)中数列为例. 所谓当 n 无限增大时, 数列 $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ 无限接近于 0, 意思是说, 虽然对于不同的 n , 该数列的各项既可能取正值, 也可能取负值, 然而随着 n 的不断增大, 数列各项与 0 之差的绝对值 $\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right|$ (即数轴上点 $\frac{(-1)^n}{n}$ 与原点 O 之间的距离) 就可以任意小, 要多小就可以多小, 可以小于任意给定的正数. 为了精确地刻画“任意小”, “要多小就可以多小”, 我们引入任意给定的正数 ϵ . 就是说, 对于任意给定的正数 ϵ , 无论它有多小, 只要 n 足够大, 都可以使 $\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \epsilon$. 这里并不要求(也不需要)该数列所有的项都满足这个不等式, 只要其中脚标 n 足够大以后的所有项满足这个不等式就行了. 换句话说, 只要存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 对于 $n > N$ 的所有项都满足不等式 $\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \epsilon$ 就行了.

把这个例子中的思想和表述方式用简炼的数学语言表达出来, 就得到数列极限的定义.

定义 3.1 (数列极限) 设 $\{a_n\}$ 为一数列, 若存在一个常数 $a \in \mathbb{R}$, 对于任意给定的正数 ϵ , 存在正整数 N , 使得 $\forall n > N$, 恒有

$$|a_n - a| < \epsilon, \tag{3.1}$$

则称数列 $\{a_n\}$ 存在极限, 并称 a 为 $\{a_n\}$ 的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

此时, 也称 $\{a_n\}$ 为收敛数列, 不收敛的数列称为发散数列.

数列极限的定义常用逻辑符号来表述:

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall n > N, \text{恒有 } |a_n - a| < \epsilon,$

则称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限. 今后, 本书中也常用这种方式来表述其他一些定义.

定义3.1称为数列极限的 $\epsilon-N$ 定义. 在这个定义中, 正数 ϵ 是任意给定的、可以充分小, 它刻画 a_n 接近于 a 的程度. 正整数 N 与 ϵ 有关, 常记成 $N(\epsilon)$, 用 $n > N$ 刻画 n 足够大, 它是保证 $|a_n - a| < \epsilon$ 成立的条件. 对应于一个给定的 $\epsilon > 0$, N 不是唯一的. 用定义验证数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a 时, 关键在于设法由给定的 $\epsilon > 0$, 求出一个相应的 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|a_n - a| < \epsilon$ 成立.

例 3.1 用数列极限的定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

证 由观察易见, 数列 $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ 收敛于 1. 为了用定义验证这个事实, 只要对任意给定的正实数 ϵ , 求出使不等式(3.1)成立的 N 就够了. 任给 $\epsilon > 0$, 为使不等式

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

成立, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]^\odot$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \epsilon$. 由定义 3.1 便知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$. ■

例 3.2 设 $|q| < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

证 若 $q = 0$, 结论显然成立. 不妨假设 $0 < |q| < 1$. 任给 $\epsilon > 0$ (不妨设 $\epsilon < 1$), 为使 $|q^n - 0| = |q|^n < \epsilon$, 只需 $n \ln |q| < \ln \epsilon$, 即 $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$ (这里利用了 $\ln |q| < 0$). 取 $N = \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln |q|} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $|q^n - 0| < \epsilon$. 由定义 3.1 便知 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$). ■

例 3.3 用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$.

证 只要对任给的 $\epsilon > 0$ (不妨设 $\epsilon < 1$), 求出 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall n > N$, 恒有

$$\left| \frac{n}{3^n} - 0 \right| = \frac{n}{3^n} < \epsilon$$

就行了. 由于 $\frac{n}{3^n} < \frac{2^n}{3^n}$, 因此, 由不等式 $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \epsilon$ 解得 $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{2}{3}}$. 取 $N = \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{2}{3}} \right]$.

① 也可取大于 $\left[\frac{1}{\epsilon} \right]$ ($\left[\frac{1}{\epsilon} \right]$ 表示 $\frac{1}{\epsilon}$ 的整数部分) 的任何正整数作为 N .

则当 $n > N$ 时, 就有 $\left| \frac{n}{3^n} - 0 \right| < \left(\frac{2}{3} \right)^n < \epsilon$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$. ■

在例 3.3 中, 由于从不等式 $\frac{n}{3^n} < \epsilon$ 很难求得所需要的 N , 因此, 我们设法将不等式左端适当地放大, 然后再求出 N . 这是在利用定义验证数列极限时常用的技巧.

数列极限的定义还可以用邻域来表达. 在数轴上, 通常称开区间 $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ 为 x_0 的一个 ϵ 邻域, 简称邻域, 记作 $U(x_0, \epsilon)$ 或 $U(x_0)$. 称 $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$ 为 x_0 的一个去心 ϵ 邻域, 简称去心邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \epsilon)$ 或 $\dot{U}(x_0)$.

这样, (3.1) 式中的不等式可以写成

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon, \text{ 或 } a_n \in U(a, \epsilon).$$

从而数列极限定义也可以用邻域表述如下:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{ 使得 } \forall n > N, \text{ 恒有 } a_n \in U(a, \epsilon), \quad (3.2)$$

则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限.

这个定义有明显的几何意义. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则对任给的 $\epsilon > 0$, 无论它多么小, $\{a_n\}$ 中从第 $N+1$ 项开始以后所有各项全部落在 a 的 ϵ 邻域中,

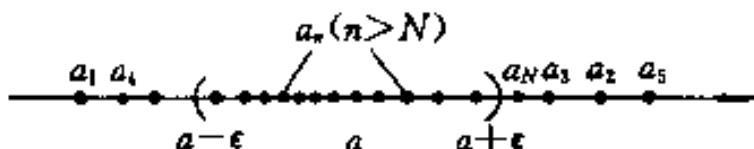


图 3.1

在这个邻域之外至多只能有 $\{a_n\}$ 的有限项 a_1, a_2, \dots, a_N (图 3.1). 由此可知, 数列的收敛性及其极限与它前面的有限项无关, 所以, 改变数列 $\{a_n\}$ 中有限项的值, 并不改变其收敛性和极限值.

在第一节中, 我们用十进制无穷小数来表示实数(特别是无理数), 其实质就是把实数看成是收敛有理数列的极限. 事实上, 设

$$a = a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots, \quad a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_i \in M = \{0, 1, 2, \dots, 9\},$$

作有理数列 $\{x_n\}$: $x_n = [a]_n = a_0.a_1a_2 \cdots a_n$, 则

$$|a - x_n| = |0.00 \cdots 0 a_{n+1} a_{n+2} \cdots| < \frac{1}{10^n}.$$

因此, $\forall \epsilon > 0$, 只要取 $N = [\lg \epsilon]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $|a - x_n| < \epsilon$ 成立, 故 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [a]_n$. 因此, 任何实数都是某个收敛有理数列的极限.

3.2 收敛数列的性质

对于给定的一个数列 $\{a_n\}$, 如何判别它是否收敛(即极限是否存在); 如果

收敛,又怎样求出它的极限,这是极限理论中至关重要的两个基本问题.在解决这两个问题之前,先讨论收敛数列的一些性质.

定理 3.1 (唯一性) 收敛数列的极限是唯一的.

证 用反证法.设 $\{a_n\}$ 是收敛数列,如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$,并且 $a \neq b$.不妨设 $a < b$.那么根据定义 3.1,对于 $\epsilon = \frac{b-a}{2}$,由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,所以 $\exists N_1 \in \mathbb{N}_+$,使得当 $n > N_1$ 时,恒有 $|a_n - a| < \epsilon$,或 $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon = \frac{a+b}{2}$.又由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$,所以 $\exists N_2 \in \mathbb{N}_+$,使得当 $n > N_2$ 时,恒有

$$\frac{a+b}{2} - \epsilon < a_n < b + \epsilon.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时,既有 $a_n > \frac{a+b}{2}$,又有 $a_n < \frac{a+b}{2}$,这是不可能的,故必有 $a = b$. ■

仿照数集的有界性可以定义数列的有界性.设 $\{a_n\}$ 是一个数列,若

$$\exists L > 0, \text{使得 } \forall n \in \mathbb{N}_+, \text{恒有 } a_n \leq L,$$

则称 $\{a_n\}$ 有上界(或上有界), L 称为它的一个上界.类似可定义数列 $\{a_n\}$ 有下界(或下有界)及下界.若 $\{a_n\}$ 既有上界也有下界,则称 $\{a_n\}$ 是有界数列.不是有界的数列称为无界数列.易证, $\{a_n\}$ 有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0$,使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$ 恒有 $|a_n| \leq M$.

定理 3.2 (有界性) 收敛数列是有界的.

证 设数列 $\{a_n\}$ 收敛,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.根据极限的定义,对于 $\epsilon = 1$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$,使得 $\forall n > N$,恒有 $|a_n - a| < 1$.从而,当 $n > N$ 时,

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

由于在数列 $\{a_n\}$ 的前 N 项中总可选出绝对值最大的一项,因此,令

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a| + 1\},$$

则 $\forall n \in \mathbb{N}_+$,都有 $|a_n| \leq M$,即 $\{a_n\}$ 是有界数列. ■

定理 3.2 表明,有界性是数列收敛的必要条件,所以,若数列 $\{a_n\}$ 无界,则 $\{a_n\}$ 必定发散.例如,数列 $\{2^n\}$, $\{n \cos \frac{n\pi}{2}\}$ 无界,因而是发散的.但是,有界不是数列收敛的充分条件,就是说,有界数列不一定收敛.例如,数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的,但却不收敛.

定理 3.3 (保号性) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \neq 0$,则 $\exists N \in \mathbb{N}_+$ 当 $n > N$ 时, a_n 与 a 同号.

证 不妨设 $a > 0$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 所以, 对于 $\epsilon = \frac{a}{2}$, 必 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall n > N$, 恒有 $|a_n - a| < \frac{a}{2}$. 从而有 $a_n - a > -\frac{a}{2}$, 故 $a_n > \frac{a}{2} > 0$. 类似地可以证明 $a < 0$ 的情形. ■

定理 3.4 (有理运算法则) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0).$$

证 我们仅证明(2), 其余留给读者. 任给 $\epsilon > 0$, 由已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 故

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_1, \text{ 恒有 } |a_n - a| < \epsilon.$$

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 故

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_2, \text{ 恒有 } |b_n - b| < \epsilon.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 必有 $|a_n - a| < \epsilon$, $|b_n - b| < \epsilon$. 因为

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - b_n a + b_n a - ab| \\ &\leq |b_n| |a_n - a| + |a| |b_n - b|; \end{aligned} \quad (3.3)$$

又由定理 3.2, 数列 $\{b_n\}$ 有界, 故 $\exists M > 0$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 恒有 $|b_n| \leq M$. 所以, 由(3.3)式, 当 $n > N$ 时, 都有

$$|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|) \epsilon.$$

由于 $(M + |a|) \epsilon$ 是一个任意小的正数, 故结论成立. ■

定理 3.4 中的(1)与(2)可以推广到有限个数列的情形, 并且由(2)还能得知: $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = ka$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^m = a^m$, 其中 $k \in \mathbb{R}$ 为常数, $m \in \mathbb{N}_+$.

根据数列极限的有理运算法则, 可以利用某些已知收敛数列的极限求出更多的比较复杂的数列极限.

例 3.4 设 $x_n = \frac{a_l n^l + a_{l-1} n^{l-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0}$, 其中 $a_l \neq 0, b_m \neq 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 因为

$$x_n = n^{l-m} \frac{a_l + \frac{a_{l-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{n^{l-1}} + \frac{a_0}{n^l}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m}},$$

利用定理 3.4 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \frac{a_l}{b_m}, & l = m, \\ 0, & l < m, \\ \infty, & l > m. \end{cases}$$

其中, 当 $l > m$ 时, $|x_n|$ 是无界的, 因而是发散数列. 又由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $|x_n|$ 无限趋大, 所以记作 ∞ ^①. ■

例 3.5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$.

解 由于 $\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$,

根据极限的有理运算法则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

例 3.6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

解 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \quad \blacksquare$$

定理 3.5 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$,

(1) (保序性) 若 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $a_n \leq b_n$, 则 $a \leq b$;

(2) (夹逼原理) 若 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $a_n \leq c_n \leq b_n$, 并且 $a = b$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

证 (1) 用反证法. 若 $a > b$, 则 $a - b > 0$. 由定理 3.4, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b > 0$. 根据保号性, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $a_n - b_n > 0$, 从而 $a_n > b_n$. 与已知条件矛盾, 故 $a \leq b$.

(2) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 并且 $a = b$, 由定理 3.1 的证明过程得知,

① 这种无限趋大的极限状态, 将在第五节中研究.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \text{ 且 } a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon,$$

从而

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon,$$

故 $\forall n > N$, 恒有 $|c_n - a| < \varepsilon$, 这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. ■

夹逼原理不但可以用来证明 $|c_n|$ 的收敛性, 而且还能同时求出它的极限. 应用中通常要对 c_n 适当地放大和缩小, 作出两个极限存在且相等的辅助数列 $|a_n|$ 与 $|b_n|$, 从某一项开始满足夹逼不等式 $a_n \leq c_n \leq b_n$.

例 3.7 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{1 + \frac{1}{n}} = 1, m \in \mathbb{N}_+;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1.$$

证 (1) 由于 $1 \leq \sqrt[m]{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$, 故由夹逼原理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

(2) 由于

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}},$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1,$$

由夹逼原理知结论成立. ■

例 3.8 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$.

证 当 $a = 1$ 时结论显然成立. 先设 $a > 1$, 令 $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$, 则 $x_n > 0$. 由二项式公式,

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2!} x_n^2 + \cdots + x_n^n > 1 + nx_n,$$

从而有

$$1 < \sqrt[n]{a} = 1 + x_n < 1 + \frac{a-1}{n},$$

由夹逼原理得知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 成立. 再证 $0 < a < 1$ 的情形. 在这种情况下, 由于 $\frac{1}{a} > 1$, 利用上面已证明的结果得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

综合上面三种情况可知, 对于任何 $a > 0$, 结论都成立. ■

用类似的方法可以证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3.3 数列收敛性的判别准则

我们已经介绍了数列极限的定义和收敛数列的基本性质. 然而, 极限的定义是验证性的, 需要先观察出数列的极限值, 然后才能用它来验证. 有理运算法则提供了求数列极限的方法, 但事先必须知道数列是收敛的, 而且需要利用一些极限是已知的数列. 夹逼原理虽然可以用来判断数列的收敛性, 但也需要借助于另外两个有相同极限的收敛数列, 能否直接通过数列自身的性态来判断它的收敛性呢? 这是一个非常重要的问题, 下面介绍几个利用数列自身性态来判别收敛性的方法. 值得注意的是, 这些判别方法都是建立在实数完备性的基础上的.

设有数列 $\{a_n\}$, 若对任何 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$), 则称 $\{a_n\}$ 是单调增(减)的; 若对任何 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$), 则称 $\{a_n\}$ 是严格单调增(减)的. 单调增与单调减(严格单调增与严格单调减)数列统称为单调(严格单调)数列.

如果数列 $\{a_n\}$ 是单调增(减)有上(下)界的, 那么, 在数轴上数列中各项所对应的点不断向右(左)方移动而不越过一个界限. 由于 $\{a_n\}$ 是无穷数列, 因此, 从某项以后所有项必定无限密集在某点的附近, 可以猜想该数列一定收敛, 而且极限就是它的上(下)确界. 事实上, 我们有下面的定理.

定理 3.6 (单调有界准则) 单调增(减)有上(下)界的数列必定收敛.

证 设 $\{a_n\}$ 是单调增有上界的数列. 由于 $\{a_n\}$ 有上界, 根据确界存在定理, 它必有上确界 $\sup \{a_n\} = a$. 下面我们来证明, a 就是数列 $\{a_n\}$ 的极限. 事实上, 由上确界的定义, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 恒有 $a_n \leq a$, 并且 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $a_N > a - \epsilon$. 又因为 $\{a_n\}$ 单调增, 所以, $\forall n > N$, $a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \epsilon$. 从而 $\forall n > N$, $|a_n - a| < \epsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

类似可以证明单调减有下界的情形. ■

由证明过程不难看出, 定理中要求数列 $\{a_n\}$ 具有单调增(减)性只要从某一项 n 开始满足就可以了.

单调有界准则是判别数列收敛性的一个常用方法.

例 3.9 设 $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是收敛的, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是任意的常数.

证 当 $\alpha = 0$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 显然收敛, 且极限为 0. 当 $\alpha > 0$ 时, 由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\alpha}{n+1}, \quad (3.4)$$

所以, 当 $n > \alpha - 1$ 时有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 故当 $n > \alpha - 1$ 时 $\{a_n\}$ 是严格单调减的. 又由

$a_n = \frac{\alpha^n}{n!} > 0$ 知 $\{a_n\}$ 有下界, 根据定理 3.6, $\{a_n\}$ 收敛.

为求 $\{a_n\}$ 的极限, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 由(3.4)式可知, $a_{n+1} = \frac{\alpha}{n+1} a_n$, 两边取极限得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{n+1} a_n = 0 \cdot a = 0,$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$.

若 $\alpha < 0$, 则由不等式

$$-\frac{|\alpha|^n}{n!} \leq \frac{\alpha^n}{n!} \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$$

与夹逼原理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$.

综上所述, 当 α 是任意常数时, 数列 $\{a_n\}$ 都收敛且极限为 0. ■

例 3.10 设 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 先证 $\{a_n\}$ 单调增. 由二项式公式,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &\quad + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

上式右端共有 $n+1$ 项且每项都是正的, 考察其中的一般项:

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

显然, 它的值随 n 的增大而增大, 因此, 当 n 增大时, 不但二项式的项数增加, 而且各项的值也随之增大, 所以 $\{a_n\}$ 是严格单调增的.

再证 $\{a_n\}$ 有上界. 在 a_n 的展开式中, 从第三项起用 1 代替每项中圆括号内的数并利用不等式 $2^{k-1} < k!$ ($k \geq 2$), 可知当 $n > 2$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \end{aligned}$$

根据单调有界准则, $\{a_n\}$ 是收敛数列. ■

设上例中数列 $\{a_n\}$ 的极限为 e , 从而得到一个常用的重要极限:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.} \quad (3.5)$$

可以证明, e 是一个无理数, 并且 $e = 2.71828128459\dots$. 值得注意的是, 数列 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 中的每一项都是有理数, 它的极限却是无理数 e . 它给出了有理数列的极限是无理数的又一个例子, 说明了有理数集对于极限运算是不封闭的, 极限理论必须在实数范围内研究. 单调有界准则在有理数范围内不成立, 它也是建立在实数完备性的基础上的重要定理. 事实上, 读者可能已经注意到, 它的证明主要利用了刻画实数完备性的确界存在定理.

利用单调有界准则容易证明下面的闭区间套定理.

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 如果满足条件:

(1) 它是递缩的, 即

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots; \quad (3.6)$$

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 区间长度数列 $|b_n - a_n|$ 趋于零, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0, \quad (3.7)$$

则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套.

直观上不难想象, 在实数轴上, 这样无穷多个不断收缩的闭区间必定有一个公共点. 下面证明, 公共点存在并且是唯一的.

定理 3.7 (闭区间套定理) 任何闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 必有唯一的公共点,

即存在唯一的 $\xi \in \mathbf{R}$, 使得 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$.

证 由闭区间套定义中的条件(1)知, $\{a_n\}$ 是单调增有上界 b_1 的数列, 而 $\{b_n\}$ 是单调减有下界 a_1 的数列, 因此它们都收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \eta$, 则 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $a_n \leq \xi \leq \eta \leq b_n$. 由条件(2),

$$\eta - \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

故 $\xi = \eta$ (这说明由闭区间套左、右端点分别构成的数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 具有相同的极限), 并且 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 都有 $a_n \leq \xi \leq b_n$, 从而有 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

再证 ξ 的唯一性. 若另有 $\tilde{\xi} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 则 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 都有 $a_n \leq \tilde{\xi} \leq b_n$, 令 $n \rightarrow \infty$, 得 $\tilde{\xi} = \xi$. 故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$. ■

关于这个定理, 读者应当注意:

(1) 它在有理数集内不成立. 就是说, 以有理数为区间端点的闭区间套, 其公共点不一定是有理数. 例如, 设 $a_n^2 < 2, b_n^2 > 2$, 且 $a_n, b_n \in \mathbf{Q}, 0 < a_n \rightarrow \sqrt{2}, 0 < b_n \rightarrow \sqrt{2} (n \rightarrow \infty)$, 则该闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 的唯一公共点 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 因此, 闭区间套定理也是刻画实数完备性的基本定理(它是利用单调有界准则来证明的);

(2) 定理中关于区间是闭的与区间长度数列极限为零这两个条件缺一不可. 就是说, 如果有一个不成立, 都不能保证定理结论成立.

例 3.11 设 $a_1 > b_1 > 0, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

证 我们知道, 任何两个数的几何平均值小于或等于它们的算术平均值. 因此, $\forall n \in \mathbf{N}_+, b_{n+1} \leq a_{n+1}$, 从而有

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n^2} = b_n.$$

故

$$a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}_+,$$

并且

$$a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq \dots \leq \frac{1}{2^n} (a_1 - b_1).$$

所以, $[b_1, a_1] \supseteq [b_2, a_2] \supseteq \cdots \supseteq [b_n, a_n] \supseteq \cdots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - b_{n+1}) = 0,$$

这说明 $\{[b_n, a_n]\}$ 是一个闭区间套. 根据闭区间套定理, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是收敛数列, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$ (ξ 是闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 的唯一公共点). ■

利用闭区间套定理还可证明著名的 Bolzano – Weierstrass 定理. 为此, 我们先引入子数列的概念.

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 任取正整数集 \mathbb{N}_+ 的一个无穷子集 $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$, 其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 由 $\{a_n\}$ 中相应的项:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

组成的数列称为 $\{a_n\}$ 的一个子数列, 简称子列, 记作 $\{a_{n_k}\}$. 例如, 分别由 $\{a_n\}$ 的偶数项与奇数项组成的数列 $\{a_{2k}\}$ 与 $\{a_{2k-1}\}$ 都是 $\{a_n\}$ 的子列. 由于 k 表示 a_{n_k} 是子列中的第 k 项, 而 n_k 表示 a_{n_k} 是原数列 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项, 因此 $n_k \geq k$, 并且若 $k' > k$, 则 $n_{k'} > n_k$.

数列 $\{a_n\}$ 与其子列 $\{a_{n_k}\}$ 的收敛性有如下关系.

定理 3.8 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的充要条件是对于 $\{a_n\}$ 的每个子列 $\{a_{n_k}\}$, 均有 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

证 充分性由 $\{a_n\}$ 也可以看成是自己的一个子列得到, 下面来证明必要性. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 故

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall n > N, \text{恒有 } |a_n - a| < \epsilon.$$

取 $K = N$, 则当 $k > K$ 时, 必有 $n_k > n_K \geq N$, 因此有 $|a_{n_k} - a| < \epsilon$, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. ■

由定理 3.8 推知, 若 $\{a_n\}$ 有一个发散子列或者有两个子列收敛于不同的极限, 则 $\{a_n\}$ 必发散. 例如, $\{\sin \frac{n\pi}{4}\}$ 是一个发散数列, 因为它的两个子列: $\{\sin \frac{4k\pi}{4}\}$ 与 $\{\sin \frac{(8k+2)\pi}{4}\}$ 分别收敛于 0 与 1.

我们知道, 收敛数列必定有界, 有界数列不一定收敛. 然而可以证明有界数列总有一个收敛子列.

定理 3.9(Bolzano – Weierstrass 定理) 有界实数列必有收敛子列.

证 设 $\{x_n\}$ 是有界数列, 则必存在 $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $x_n \in [a_1, b_1]$. 等分 $[a_1, b_1]$ 为两个子区间, 则至少有一个含 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 记该子区间为 $[a_2, b_2]$ (若两个子区间都含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 则可任取其一). 等分

$[a_2, b_2]$, 按照同样的方法又可得含 $\{x_n\}$ 无穷多项的子区间 $[a_3, b_3]$. 照此办理, 可得一个闭区间列 $\{[a_k, b_k]\}$, 满足:

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_k, b_k] \supseteq \cdots,$$

$$b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

因此它是一个闭区间套. 根据闭区间套定理, 存在唯一的 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{\xi\}, \text{ 并且 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} b_k = \xi.$$

由于每个闭区间都含数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 所以我们能在每个 $[a_k, b_k]$ 中选取 $\{x_n\}$ 的一项 x_{n_k} , 并使 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 从而得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足:

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \quad (\forall k \in \mathbb{N}_+).$$

根据夹逼原理, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$. ■

数列的任一收敛子列的极限称为该数列的极限点. 定理 3.9 表明, 有界数列一定有极限点. 该定理的进一步推广, 就是数集的所谓聚点原理(见习题 1.3(B) 第 9 题), 它们的证明方法是相同的.

定理 3.9 虽然并没有给出判别数列收敛的具体方法, 但是, 由于它也刻画了实数的完备性特征, 所以是数学分析中非常有用的重要定理, 在研究闭区间上连续函数的性质时我们将要多次使用它.

本节最后, 我们来介绍一个在理论和应用中都有重要价值的 Cauchy 收敛原理, 它反映了直观上一个很明显的事实: 一个收敛数列 $\{a_n\}$, 由于它是有界的, 因此, 随着 n 的增大, 它的各项在数轴上越来越靠近. 就是说, 当 n 充分大以后, 任意两项间的距离可以任意小; 反之也成立.

定义 3.2 (Cauchy 数列) 设 $\{a_n\}$ 为一实数列, 若满足下述条件:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{ 使得 } \forall m, n > N, \text{ 恒有 } |a_m - a_n| < \epsilon, \quad (3.8)$$

则称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列或基本数列, (3.8) 式称为 Cauchy 条件.

仿照证明收敛数列必有界, 不难证明, Cauchy 数列也是有界数列.

定理 3.10 (Cauchy 收敛原理) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件为它是 Cauchy 数列.

证 必要性 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 根据极限定义,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{ 使得 } \forall m, n > N, \text{ 恒有 } |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2}, |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \epsilon,$$

故 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.

充分性 设 $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 数列, 则 $\{a_n\}$ 是有界数列. 根据定理 3.9, $\{a_n\}$ 有一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 并设 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. 现在我们证明, 数列 $\{a_n\}$ 必收敛于 a . 事实上, 对任给的 $\epsilon > 0$, 由 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ 和极限定义知

$$\exists K \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall k > K, \text{恒有 } |a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.9)$$

又 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列, 它满足 Cauchy 条件, 所以, 对上面给定的 $\epsilon > 0$,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall m, n > N_1, \text{恒有 } |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.10)$$

取 $N = \max\{K, N_1\}$, 则由(3.9)式和(3.10)式, $\forall n > N$, 恒有

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{N+1}}| + |a_{n_{N+1}} - a| < \epsilon,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. ■

由于 Cauchy 收敛原理是判断数列收敛的充要条件, 因此, 它不但可以用来判断数列的收敛性, 而且也可以用来判断数列的发散性. 为了应用上的方便, Cauchy 条件常写成与其等价的另一种表达形式, 即

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall n > N \text{ 及 } p \in \mathbb{N}_+, \text{恒有 } |a_{n+p} - a_n| < \epsilon. \quad (3.11)$$

例 3.12 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证 为了证明 $\{a_n\}$ 收敛, 只要证明它满足 Cauchy 条件. 由于 $\forall n, p \in \mathbb{N}_+$,

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

所以, $\forall \epsilon > 0$, 只要取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则 $\forall n > N$, 及 $p \in \mathbb{N}_+$, 恒有 $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$, 故 $\{a_n\}$ 满足 Cauchy 条件, 所以收敛. ■

在利用 Cauchy 条件(3.11)式证明数列 $\{a_n\}$ 收敛时, 关键在于求出满足该式

的 N , 而且 N 只能与 ϵ 有关, 其中不能含有 p .

例 3.13 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 证明 $\{a_n\}$ 发散.

证 为了证明 $\{a_n\}$ 发散, 只要证明它不满足 Cauchy 条件(3.8). 也就是说, 只要证明 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists m, n > N$, 使 $|a_m - a_n| \geq \epsilon_0$ 就行了. 对于 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$, 取 $m = 2n$, 由于

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right| \\ &\geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 不满足 Cauchy 条件, 故发散. ■

前面我们是按照下面的逻辑顺序来讲解的: 确界存在定理 \Rightarrow 单调有界准则 \Rightarrow 闭区间套定理 \Rightarrow 收敛子列原理 \Rightarrow Cauchy 收敛原理, 也就是用前一个定理来推证后一个定理. 进一步还可以证明, 这几个定理都是等价的, 因此, 它们都是刻画实数完备性的等价命题. 特别是 Cauchy 收敛原理, 不但在经典分析中被广为应用, 而且是现代分析中定义抽象空间完备性的出发点(见第八章).

习题 1.3

(A)

1. 下列说法能否作为 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限的定义? 为什么?

(1) 对于无穷多个 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|a_n - a| < \epsilon$ 成立;

(2) 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有无穷多项 a_n , 使不等式 $|a_n - a| < \epsilon$ 成立;

(3) 对于给定的 $\epsilon_0 = 10^{-10}$, 不等式 $|a_n - a| < 10^{-10}$ 恒成立.

2. 说明下列表述都可作为 a 是 $\{a_n\}$ 极限的定义.

(1) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n \geq N$ 时, 不等式 $|a_n - a| < \epsilon$ 成立;

(2) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|a_n - a| \leq \epsilon$ 成立;

(3) 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|a_n - a| < k\epsilon$ 成立, 其中 k 是正常数;

(4) 对于任给的 $m \in \mathbb{N}_+$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|a_n - a| < \frac{1}{m}$ 成立;

(5) 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}_+$, 使不等式 $|a_{n+p} - a| < \epsilon$ 对于任意的自然数 p 都成立.

3. 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个发散数列, 它们的和与积是否发散? 为什么? 若其中一个收敛, 一个发散, 它们的和与积的收敛性又如何?

4. 下列计算方法是否正确? 为什么?

$$\begin{aligned}(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdots \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1;\end{aligned}$$

(3) 设 $q > 1$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = a$, 因为 $q^{n+1} = q \cdot q^n$, 两边取极限得 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = q \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = qa$, 从而必有 $a = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

5. 若把保序性中的条件 $a_n \leq b_n$ 改为 $a_n < b_n$, 是否能得到结论 $a < b$?

6. 下列结论是否正确? 若正确, 请给出证明; 若不正确, 请举出反例.

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$;

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ($A \neq 0$);

(3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$;

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A$;

(5) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$;

(6) 若对任何实数 a , $\lim_{n \rightarrow \infty} aa_n = aA$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

7. 用 $\epsilon-N$ 定义证明下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - n}) = \frac{1}{2}.$$

8. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ($a > 0$), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

9. 设由数列 $|a_n|$ 的奇数项与偶数项组成的两个子列收敛于同一个极限 a , 证明 $|a_n|$ 也收敛于 a .

10. 求下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n+4]{4} - \sqrt[n]{n});$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2} \sqrt[5]{2} \sqrt[7]{2} \cdots \sqrt[2n+1]{2});$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \sin^2 n};$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n} \right);$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n;$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n;$$

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-4} \right)^{n+4}.$$

11. 判别下列数列的收敛性:

$$(1) a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1};$$

$$(2) a_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n} \right);$$

$$(3) a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ 重}}, \dots;$$

$$(4) a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!};$$

$$(5) a_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2}.$$

12. 证明: Cauchy 数列是有界的.

13. 求下列数列的极限点:

$$(1) \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots;$$

$$(2) a_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n;$$

$$(3) a_n = \frac{n + (-1)^n n}{2} + \frac{1}{n}.$$

14. 设 $0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

15. 设 $a > 0$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.

16. 设 $\{a_n\}$ 单调增, $\{b_n\}$ 单调减, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. 证明: $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 并且有相同的极限.

(B)

1. 判别数列 $\{x_n\}$ 的收敛性, 其中

$$x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_n q^n (\lvert q \rvert < 1, \lvert a_k \rvert \leq M, k = 0, 1, 2, \dots).$$

2. 求下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 2}{x^n + 2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right];$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right); \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin^2 n + \cos^2 n};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{3n};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 1}{n^3 - 2} \right)^{4n^3}.$$

3. 证明:

$$(1) \text{若 } a_n \rightarrow 0, \text{则 } b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty);$$

$$(2) \text{若 } a_n \rightarrow a, \text{则 } b_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

4. 证明下列数列收敛, 并求其极限:

$$(1) x_n = \frac{n^k}{a^n} \quad (a > 1, k > 0);$$

$$(2) a_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}}_{n \text{ 重}} \quad (a > 0);$$

$$(3) 0 < x_1 < \sqrt{3}, x_{n+1} = \frac{3(1 + x_n)}{3 + x_n};$$

$$(4) a_1 = 1, a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1} + 1} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

5. 设 $\{a_n\}$ 为一单调增的数列, 若它有一个子列收敛于 a , 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

6. 设 $x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} (n \geq 3)$, 利用闭区间套定理证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限值.

7. 设 $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 数列, 证明它必有收敛子列, 而且它的任一子列也是 Cauchy 数列.

8. 设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 是一个数集, $a \in \mathbb{R}$. 若 a 的任何去心邻域内都含有 A 中的点, 则称 a 是集 A 的聚点. 证明:

(1) a 是 A 的聚点 \Leftrightarrow 存在 A 中由不同点(数)组成的点列(数列)收敛于 a ;

(2) (聚点原理) 有界无穷实数集至少有一个聚点.

9. 证明: a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限点 $\Leftrightarrow a$ 的任何邻域内含有 $\{a_n\}$ 的无穷多项.

第四节 函数的极限

本节我们将数列极限的概念、理论和方法推广到一元函数. 数列是定义在正整数集 \mathbb{N}_+ 上的整标函数, 数列 $\{a_n\}$ 的极限是研究当自变量 n “离散地”取正整数并且无限增大时函数值 $f(n) = a_n$ 变化趋势的. 然而在实际问题中, 更多的是要求讨论定义在区间上的函数当自变量 x 在定义区间上“连续地”变化时, 函数值 $f(x)$ 的变化趋势, 也就是要研究函数的极限问题. 二者的不同点主要表现在自变量的变化状态上, 前者是“离散变量”, 后者是“连续变量”. 因此, 在这一节中, 对于与数列极限相类似的地方只作简要的讨论, 而把重点放在函数极限的特殊性上.

4.1 函数极限的概念

研究函数极限时, 根据自变量 x 的变化状态, 可以分为以下两种情况来讨论.

(1) 自变量 x 无限趋大时的函数极限

所谓 x 无限趋大, 包括三种情况: x 取正值无限趋大, 这时也说 x 趋于 $+\infty$, 记作 $x \rightarrow +\infty$; x 取负值而 $|x|$ 无限趋大, 这时也说 x 趋于 $-\infty$, 记作 $x \rightarrow -\infty$; x 既可取正值又可取负值并且 $|x|$ 无限趋大, 这时也说 x 趋于 ∞ , 记作 $x \rightarrow \infty$.

我们重点讨论 $x \rightarrow +\infty$ 时函数极限的定义. 对于这种情况, 不妨假定 $D(f) = [a, +\infty) (a \in \mathbb{R})$. 直观上, 如果当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 无限接近于某个常数 a , 我们就称 a 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限. 类似于数列极限, 为了精确地给出上

述函数极限的定义, 关键在于刻画“ $x \rightarrow +\infty$ ”与“无限接近”. 显然, “无限接近”可以用与上一节中类似的不等式“ $\forall \epsilon > 0, |f(x) - a| < \epsilon$ ”来刻画. 而不等式 $|f(x) - a| < \epsilon$ 成立是以“ x 变得足够大”为条件的, 我们用“ \exists 实数 $M > 0$ (不一定是正整数), 当 $x > M$ 时”来刻画这个条件. 于是, 仿照数列极限定义 3.1, 可以给出下述定义.

定义 4.1(函数极限) 设 $f: [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ 是任一函数, $a \in \mathbf{R}$. 如果存在常数 $a \in \mathbf{R}$, 它与 f 满足如下关系:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \text{使得 } \forall x > M, \text{恒有 } |f(x) - a| < \epsilon, \quad (4.1)$$

那么称 a 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \text{ 或 } f(x) \rightarrow a (x \rightarrow +\infty).$$

此时, 我们说, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 存在极限.

设 $M > 0$, 称开区间 $(M, +\infty)$ 为 $+\infty$ 的邻域, $(-\infty, -M)$ 为 $-\infty$ 的邻域, $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ 为 ∞ 的邻域, 分别记作 $U(+\infty, M)$, $U(-\infty, M)$ 与 $U(\infty, M)$, 简记作 $U(+\infty)$, $U(-\infty)$ 与 $U(\infty)$. 定义 4.1 也可以用邻域来表述如下: 如果

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \text{使得 } \forall x \in U(+\infty), \text{恒有 } f(x) \in U(a, \epsilon), \quad (4.2)$$

那么称 a 是 f 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限.

上述定义的几何意义是: 对任意的 $\epsilon > 0$, 无论如何小, 总能在 x 轴上找到一点 M , 使得函数的图象

$$\text{Gr}f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in [\alpha, +\infty)\}$$

在直线 $x = M$ 右边的部分全部位于平面带形 $(M, +\infty) \times (a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内(图 4.1).

当 $x \rightarrow -\infty$ 时函数 $f: (-\infty, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ ($\beta \in \mathbf{R}$)的极限与当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f: (-\infty, \beta] \cup [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ 的极限可类似地定义, 由读者自己去完成. 不难证明:

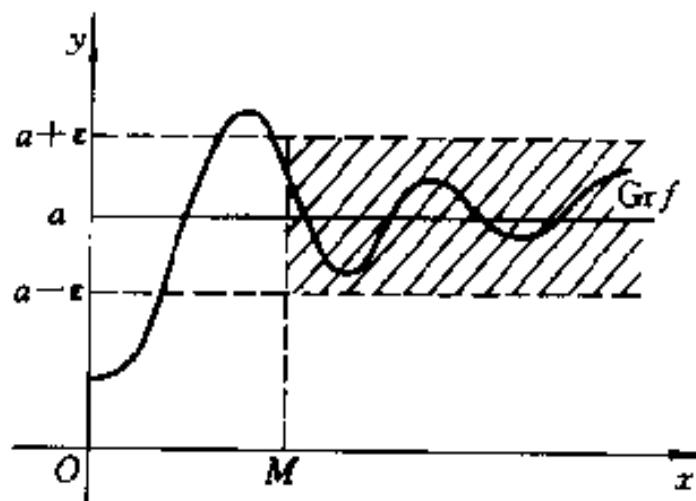


图 4.1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a.$$

例 4.1 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$.

证 不妨设 $x > 0$. 按定义, 只要对任给的 $\epsilon > 0$, 求得 $M > 0$, 使得 $\forall x > M$,

恒有 $|\sin \frac{1}{x} - 0| < \epsilon$ 就行了, 由于

$$\left| \sin \frac{1}{x} - 0 \right| + \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x},$$

因此, 只要取 $M = \frac{1}{\epsilon}$. 易见, 当 $x > M$ 时, 就有

$$\left| \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon,$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$. ■

(2) 自变量 x 趋于有限值时函数的极限

很多实际问题要求研究当自变量 x 趋于有限值 x_0 时函数的极限, 例如, 求变速直线运动的瞬时速度

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

就属于这类极限.

x 趋近于 x_0 也包括三种情形: $x > x_0$ 且 x 趋近于 x_0 , 它表示在数轴上 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0^+$; $x < x_0$ 且 x 趋近于 x_0 , 它表示在数轴上从 x_0 的左侧趋近于 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0^-$; x 既可大于 x_0 也可小于 x_0 且 x 趋近于 x_0 , 它表示在数轴上 x 可从 x_0 的左右两侧任意趋近于 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0$.

直观上, 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 a , 我们就说 a 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限. 为了给出函数极限的精确定义, 需要对“ $x \rightarrow x_0$ ”与“无限接近”赋予确切的涵义. 类似于前面的分析, 可以给出如下定义.

定义 4.2 (函数极限) 设 $f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ 是任一函数, 若存在一个常数 $a \in \mathbb{R}$, 它与 f 满足如下关系:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 且 } x \in U(x_0) \text{ 时, 恒有 } |f(x) - a| < \epsilon. \quad (4.3)$$

则称 a 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \text{ 或 } f(x) \rightarrow a (x \rightarrow x_0).$$

此时, 亦称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 存在极限.

与数列极限类似, 在这个定义中, 我们用 ϵ 的任意性来刻画 $f(x)$ 与 a 任意接近的程度, 用 δ 来刻画 x 趋近于 x_0 的程度. $0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $x \in U(x_0)$ (即 $x \in U(x_0, \delta) \cap U(x_0)$) 是保证不等式 $|f(x) - a| < \epsilon$ 成立的条件. 一般情况下, δ 随 ϵ 的变化而变化, 由 ϵ 来确定, 因此常记为 $\delta(\epsilon)$. 对于给定的 ϵ , δ 不是

唯一的.

值得注意的是, 在函数极限的上述定义中, 只要求函数 f 定义在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 中, 与 f 在 x_0 处是否有定义以及有定义时 f 在 x_0 处取值的大小无关. 这是因为函数极限的概念是讨论 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势的, 函数 f 在 x_0 处的状况丝毫不会影响它在 $x \rightarrow x_0$ 时的变化趋势. 而且常常遇到这种情况, 需要讨论当 $x \rightarrow x_0$ 时某函数的极限, 但该函数在 $x = x_0$ 处却无定义. 例如, 上面讲的瞬时速度 $v(t_0)$ 就是当 $t \rightarrow t_0$ 时 $\bar{v}(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ 的极限, 但 $\bar{v}(t)$ 在 $t = t_0$ 无定义.

因此, 在研究函数当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限时, 我们不需要, 有时也不可能知道函数 f 在 $x = x_0$ 处的状况, 这也是为什么在(4.3)式中我们刻画 x 趋近于 x_0 的程度时在不等式 $|x - x_0| < \delta$ 中加上 $0 < |x - x_0|$ 的原因.

定义 4.2 的几何意义是: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 总能求得一个 $\delta > 0$, 使得函数 f 的图象 $\text{Gr}f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in \dot{U}(x_0)\}$ 在宽为 2δ 的竖直带形内的部分全部落在长方形

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

内(图 4.2).

与数列类似, 利用定义来验证当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限是 a , 关键在于设法由任意给定的 $\epsilon > 0$, 求出相应的 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时, 不等式 $|f(x) - a| < \epsilon$ 恒成立. 在证明中常常需要利用不等式的放大技巧.

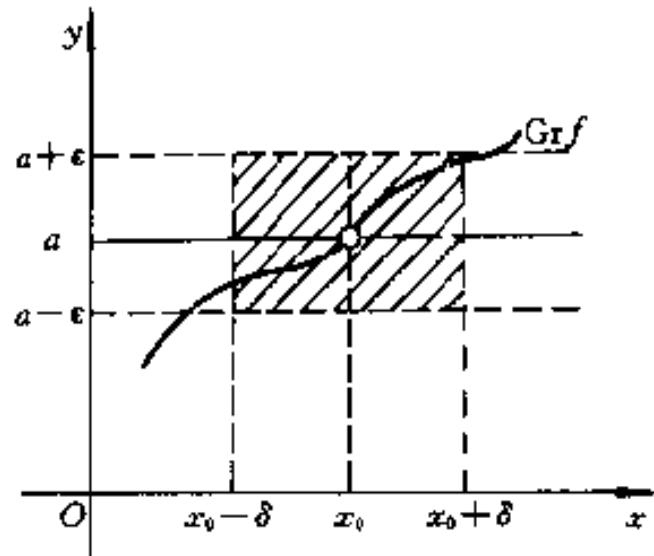


图 4.2

例 4.2 用定义验证 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

证 任给 $\epsilon > 0$, 为使

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x - 2| < \epsilon,$$

只要取 $\delta = \epsilon$ 就行了. 因此, 当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \epsilon$. 由定义知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$. ■

例 4.3 用定义验证 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$.

证 任给 $\epsilon > 0$, 由不等式

$$\left| \frac{x-2}{x^2-4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{|x-2|}{4|x+2|} < \epsilon$$

很难求出相应的 δ . 但是, 由于 $x \rightarrow 2$, 因此可以限制 x 在 $x_0=2$ 的一个小邻域内考察. 例如, 限定 $|x-2|<1$. 由此可得 $x>1$, 故 $|x+2|>3$. 这样就有

$$\left| \frac{x-2}{x^2-4} - \frac{1}{4} \right| < \frac{|x-2|}{12}.$$

因此, 只要 $\frac{1}{12}|x-2|<\epsilon$, 即 $|x-2|<12\epsilon$, 并且 $|x-2|<1$ 就行了. 取 $\delta=\min\{1, 12\epsilon\}$, 则当 $0<|x-2|<\delta$ 时, 就有

$$\left| \frac{x-2}{x^2-4} - \frac{1}{4} \right| < \epsilon,$$

所以结论成立. ■

类似地, 可以定义当 $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时函数的极限, 这就是所谓的单侧极限(即左极限与右极限).

设有函数 $f:(x_0-\alpha, x_0) \rightarrow \mathbf{R}$ (其中 $\alpha>0$ 是常数), 若存在常数 $a \in \mathbf{R}$, 它与 f 满足如下关系:

$$\forall \epsilon>0, \exists \delta \in (0, \alpha), \text{使得 } \forall x \in U_-(x_0, \delta), \text{恒有 } |f(x)-a|<\epsilon, \quad (4.4)$$

其中 $U_-(x_0, \delta) = (x_0-\delta, x_0)$, 则称 a 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记作

$$f(x_0-0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a, \text{或 } f(x) \rightarrow a (x \rightarrow x_0^-).$$

仿此, 读者不难定义函数 $f:(x_0, x_0+\beta) \rightarrow \mathbf{R}$ ($\beta>0$ 为常数)当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记作

$$f(x_0+0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a, \text{或 } f(x) \rightarrow a (x \rightarrow x_0^+).$$

与 $x \rightarrow \infty$ 时的情形一样, 也有如下结论:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a. \quad (4.5)$$

这就是说, 当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限是 a 的充要条件为 $f(x)$ 的左、右极限都存在, 而且都是 a . 如果其中有一个不存在, 或者虽然两个都存在但不相等, 那么当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

的极限不存在, 这是因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$, 左右极限存在但不相等.

在函数极限不存在的情况下, 有一种特别值得注意. 设 $f: \dot{U}(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$ 是任一函数, 若

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{使得当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 且 } x \in \dot{U}(x_0) \text{ 时, 恒有 } |f(x)| > M, \quad (4.6)$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限为无穷大, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

函数极限与数列极限之间存在着密切的联系, 下面的定理沟通了这种联系.

定理 4.1 (Heine 定理) 设 $f: \dot{U}(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$ 为一函数, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 的充要条件为对于 $\dot{U}(x_0)$ 中的任何数列 $\{x_n\}$, 只要 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 都收敛于 a .

证 必要性 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 由定义 4.2,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 且 } x \in \dot{U}(x_0) \text{ 时, 恒有 } |f(x) - a| < \epsilon. \quad (4.7)$$

又由于 $x_n \in \dot{U}(x_0)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 故对上面的 δ ,

$$\exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall n > N, \text{恒有 } 0 < |x_n - x_0| < \delta. \quad (4.8)$$

联合(4.7)式与(4.8)式可得

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall n > N, \text{恒有 } |f(x_n) - a| < \epsilon,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

充分性 用反证法. 假若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 不成立, 就是说, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 不以 a 为极限. 根据定义 4.2, 它可以描述如下:

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \text{都 } \exists x \in \dot{U}(x_0, \delta) \cap \dot{U}(x_0), \text{使得 } |f(x) - a| \geq \epsilon_0.$$

取 $\delta_n = \frac{1}{n} (n \in \mathbf{N}_+)$, 则

$$\forall n \in \mathbf{N}_+, \text{都 } \exists x_n \in \dot{U}(x_0, \delta_n) \cap \dot{U}(x_0), \text{使得 } |f(x_n) - a| \geq \epsilon_0.$$

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\delta_n \rightarrow 0$, 因此就得到 $\dot{U}(x_0)$ 中的一个数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ 却不成立. 这与已知条件相矛盾, 故必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. ■

由定理的证明过程可见, 该定理对于 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$ 及 $x \rightarrow +\infty, -\infty, \infty$ 等情形都成立.

例 4.4 证明函数

$$f: x \mapsto \sin \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时极限不存在.

证 取 $x_n^{(1)} = \frac{1}{n\pi}$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 则 $x_n^{(1)} \rightarrow 0$, 且 $x_n^{(1)} \neq 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n^{(1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0.$$

再取 $x_n^{(2)} = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 则 $x_n^{(2)} \rightarrow 0$, 且 $x_n^{(2)} \neq 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n^{(2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

故由 Heine 定理知, 当 $x \rightarrow 0$ 时 f 的极限不存在. ■

利用 Heine 定理不但可以判断某些函数的极限不存在, 而且下面将要看到, 它可以把许多函数极限的问题转化为数列极限的相应问题, 讨论起来比较简便. 因此, 也有书称它为归并原理.

4.2 函数极限的性质

函数极限有与数列极限相类似的一些性质, 这些性质既可以用证明数列极限相应性质的方法来证明, 也可以利用 Heine 定理转化为数列极限的相应命题来证明. 下面我们仅给出部分性质的证明, 大部分留给读者补证.

定理 4.2 (唯一性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则必唯一.

定理 4.3 (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 f 在 x_0 处是局部有界的, 即 $\exists M > 0$ 与 $\delta > 0$, 使得 $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 都有 $|f(x)| \leq M$.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 故由极限定义, 对于 $\epsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 恒有 $|f(x) - a| < 1$. 从而有 $|f(x)| = |f(x) - a + a| \leq |a| + |f(x) - a| \leq |a| + 1$, 故 f 在 x_0 处局部有界. ■

定理 4.4 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$,

1° (局部保号性) 若 $a \neq 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 都有 $f(x)$ 与 a 同号;

2° (局部保序性) 若 $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 都有 $f(x) \leq g(x)$, 则 $a \leq b$;

3° (夹逼原理) 若 $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta)$, 都有 $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, 且 $a = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$.

证 仅用 Heine 定理证明夹逼原理. 任取数列 $\{x_n\} \subset \dot{U}(x_0)$, 使 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 则对于已知条件中的 $\delta > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$, 恒有 $x_n \in \dot{U}(x_0, \delta)$. 根据已知条件, 我们有

$$f(x_n) \leq \varphi(x_n) \leq g(x_n),$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$. 故由数列极限的夹逼原理得知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = a$. 因为 $\{x_n\}$ 是 $\dot{U}(x_0)$ 内收敛于 x_0 的任一数列, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = a$. ■

定理 4.5 (有理运算法则) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, 则

$$1^\circ \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b;$$

$$2^\circ \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = ab;$$

$$3^\circ \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b}, \text{ 其中 } b \neq 0.$$

以上几个定理, 对于 $x \rightarrow \infty$ 的情形也成立.

定理 4.6 (复合运算法则) 设 $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 是由 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 复合而成的, 复合函数 $f \circ g$ 定义在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 中, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = a$, 并且 $\exists \delta_0 > 0$, 使得 $\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$, 都有 $g(x) \neq u_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = a = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u). \quad (4.9)$$

证 由于 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = a$, 故

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ 使得 } \forall u \in \dot{U}(u_0, \eta), \text{ 恒有 } |f(u) - a| < \epsilon. \quad (4.10)$$

又由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 故对上式中的 $\eta > 0$,

$$\exists \delta_1 > 0, \text{ 使得 } \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta_1), \text{ 恒有 } |g(x) - u_0| < \eta.$$

注意到已知条件: $\exists \delta_0 > 0$, 使得 $\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$, 都有 $g(x) \neq u_0$. 取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 则 $\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta)$, 恒有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$, 即 $g(x) \in \dot{U}(u_0, \eta)$, 从而由(4.10)式得

$$|f(g(x)) - a| < \epsilon.$$

故(4.9)式成立. ■

有了函数极限的上述性质和运算法则, 我们就可以来求一些函数的极限了.

例 4.5 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$.

解 当 $x \rightarrow 1$ 时, 由于分子与分母的极限都是 0, 因此不能直接利用有理运算法则 3°. 这类极限常称为 $\frac{0}{0}$ 型不定式. 之所以叫作不定式, 是因为对于这类极限, 它是否存在, 如果存在, 它的极限值是什么, 不能一概而论. 对 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 通常先设法消去分子与分母中极限为 0 的因子, 然后再用有理运算法则去求其极限值. 在本题中, 由于

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x+1}{x^2 + x + 1},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{3}. \quad ■$$

例 4.6 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + x + 4}$.

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 由于分子与分母的极限都为 $+\infty$, 因此也不能直接利用有理运算法则, 这类极限常称为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式. 由于

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + x + 4} = \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}},$$

根据有理运算法则,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} = 1. \quad ■$$

例 4.7 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$.

解 由于当 $x \rightarrow 2$ 时, 括号中的两项都以 ∞ 为极限, 因此不能直接利用减法法则, 这类极限称为 $\infty - \infty$ 型不定式. 对这类极限利用通分可以化为 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 然后再采用例 4.5 的方法求出极限. 计算如下:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{12}{x^3-8} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{x^3-8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

例 4.8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$ ($n \in \mathbf{N}_+$).

解 这个极限也属于 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 根据二项式公式,

$$\begin{aligned}\frac{(1+x)^n - 1}{x} &= \frac{nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n}{x} \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2!}x + \cdots + x^{n-1},\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n. \quad \blacksquare$$

例 4.9 证明: $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$.

证 先证 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$. 对于任给的 $\epsilon > 0$, 为使 $|e^x - 1| = e^x - 1 < \epsilon$, 只要 $x < \ln(1 + \epsilon)$. 取 $\delta = \ln(1 + \epsilon)$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, 就有 $|e^x - 1| < \epsilon$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$.

再证 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$. 由于 $x \rightarrow 0^-$ 等价于 $-x \rightarrow 0^+$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = \lim_{-x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-x}} = 1.$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$.

用类似的方法可以证明 $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ ($a > 0$). 又因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0},$$

令 $u = x - x_0$, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时 $u \rightarrow 0$, 故由复合运算法则得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{u \rightarrow 0} a^u = a^{x_0}. \quad \blacksquare \quad (4.11)$$

4.3 两个重要极限

下面介绍微积分中两个常用的重要极限公式, 读者应当牢记并能熟练地运用它们.

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(4.12)

证 先设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$. 作一单位圆如图 4.3, 由图易见:

$\triangle AOB$ 面积 < 扇形 AOB 的面积

< $\triangle AOC$ 的面积,

因而我们有

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

或

$$\sin x < x < \tan x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

因为 $\sin x > 0$, 上式两边同除以 $\sin x$, 得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ 或 } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

从而有

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

图 4.3

由于 $\frac{\sin x}{x}$ 与 x^2 都是偶函数, 所以当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, 不等式

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$$

也成立, 故此不等式对于满足 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 的所有 x 都成立. 由夹逼原理得

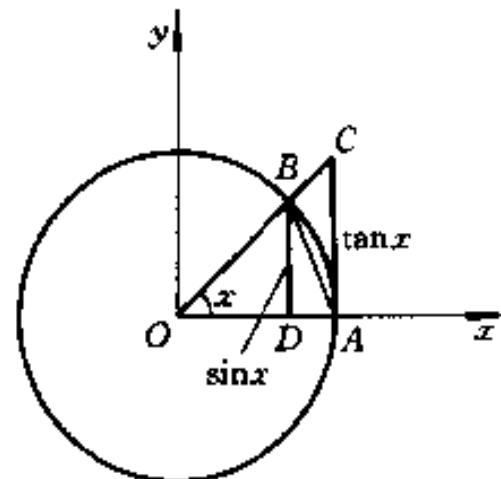
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0,$$

因而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)\right] = 1. \blacksquare$$

由上面的证明过程, 还可以得到不等式: $|\sin x| \leq |x|$, $0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$ ($0 < |x| < \frac{\pi}{2}$), 因而又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$



利用这个极限,我们容易得知:圆周上任一弦与其对应弧的长度之比当弧长趋于0时的极限值为1.事实上,在图4.3中,弧 $\widehat{AB} = x$,弦 $\overline{AB} = 2\sin \frac{x}{2}$,所以

$$\lim_{\widehat{AB} \rightarrow 0} \frac{\overline{AB}}{\widehat{AB}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$

例 4.10 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 1. \blacksquare$$

例 4.11 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 \stackrel{(t = \frac{x}{2})}{=} \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

例 4.12 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{n}{x}$ ($n \in \mathbb{N}_+$).

解 这个极限属于 $0 \cdot \infty$ 型不定式.令 $\arcsin \frac{n}{x} = t$, 则 $\sin t = \frac{n}{x}$.由于本题是求 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 所以可以限制 $|t| < \frac{\pi}{2}$. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sin t \rightarrow 0$, 故只能有 $t \rightarrow 0$.于是得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{n}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{nt}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{n}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{n}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}} = n. \blacksquare$$

$$(2) \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.} \quad (4.13)$$

证 先证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. 设 $n = [x]$, 则 $n \leq x \leq n+1$, 从而有

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $n \rightarrow +\infty$, 并且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

由夹逼准则立即可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

再证 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. 令 $t = -x$, 则当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $t \rightarrow +\infty$, 从而有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+t}\right)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t}\right) \right] \\ &= e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

综上所述即得我们所要证明的结果. ■

例 4.13 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$.

解 令 $x = -2t$, 则 $-\frac{2}{x} = \frac{1}{t}$, 从而当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow \infty$. 于是得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2} \\ &= e^{-2}. \quad ■ \end{aligned}$$

例 4.14 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $\frac{1}{x} = t$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow \infty$. 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e. \quad ■$$

4.4 函数极限的存在准则

在本节最后, 我们将数列极限中单调有界准则和 Cauchy 收敛原理推广到函数极限中来. 为此, 先介绍函数的有界性和单调性.

设有函数 $f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 如果它的值域 $R(f) = f(A)$ 有上(下)界, 我们称 f 在 A 上有上(下)界, 并且称 $R(f)$ 的上(下)界是 f 在 A 上的上(下)界, 称 $R(f)$ 的上(下)确界是 f 在 A 上的上(下)确界, 记作

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in A} R(f) \quad (\inf_{x \in A} f(x) = \inf_{x \in A} R(f)).$$

如果 f 在 A 上既有上界又有下界, 则称 f 在 A 上有界.

不难证明:

f 在 A 上有上(下)界 $\Leftrightarrow \exists M$, 使得 $\forall x \in A$, 恒有 $f(x) \leq M (\geq M)$;

f 在 A 上有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0$, 使得 $\forall x \in A$, 恒有 $|f(x)| \leq M$;

s 是 f 在 A 上的上(下)确界 $\Leftrightarrow \forall x \in A$, $f(x) \leq s (\geq s)$; 并且 $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$, 使得 $f(x_0) > s - \epsilon$ ($f(x_0) < s + \epsilon$).

设有函数 $f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 如果

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称 f 在 A 上单调增(减). 如果上式中“ \leq ”(“ \geq ”)改成“ $<$ ”(“ $>$ ”)仍成立, 则称 f 在 A 上严格单调增(减).

(严格)单调增与(严格)单调减函数统称(严格)单调函数, 严格单调函数是单调函数, 反之不成立.

今后, 我们用 I 表示任何有限或无限区间, 开或闭区间, 半开半闭区间.

定理 4.7 设函数 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ 是 I 上的单调函数, 则它在 I 内每一点的单侧极限存在.

证 仅就 f 是单调增的情形证明. 设 x_0 是 I 内的一点, 我们来证明 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在. 由于 f 单调增, 所以, 对于 x_0 的任一左邻域 $\dot{U}_-(x_0, \eta) \subseteq I$ 中的 x , 都有 $f(x) \leq f(x_0)$. 从而函数 f 在 $\dot{U}_-(x_0, \eta)$ ($\eta \in \mathbf{R}$) 上是有上界的, 故有上确界, 设 $a = \sup_{x \in \dot{U}_-(x_0, \eta)} f(x)$. 显然, $a \leq f(x_0)$. 下面证明, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$. 事实上,

根据上确界的定义, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \bar{x} \in \dot{U}_-(x_0, \eta)$, 使得 $f(\bar{x}) > a - \epsilon$. 取 $\delta = x_0 - \bar{x}$, 则 $0 < \delta < \eta$. 由于 f 是单调增的, 故有

$$\forall x \in \dot{U}_-(x_0, \delta), a - \epsilon < f(\bar{x}) \leq f(x) \leq a + \epsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \leq f(x_0)$.

同样可以证明 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 也存在. ■

在定理 4.7 中, 若 I 是半开半闭或闭区间, 则函数在闭的那个端点处的单侧极限也必存在.

定理 4.8 (Cauchy 收敛原理) 设 $f: \dot{U}(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$ 是任一函数, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充要条件为

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 使得 } \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(x_0, \delta), \text{ 恒有 } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \quad (4.14)$$

其中 $\dot{U}(x_0, \delta) \subseteq \dot{U}(x_0)$.

证 必要性 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(x_0, \delta)$, 恒

有

$$|f(x_1) - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |f(x_2) - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

从而

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \epsilon.$$

充分性 假定条件(4.14)成立, 我们利用 Heine 定理来证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在。为此, 任取 $\{x_n\} \subseteq U(x_0)$, $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$), 根据数列极限的定义, 对于(4.14)式的 $\delta > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, $\forall m, n > N$, 恒有 $x_m, x_n \in U(x_0, \delta)$ 。由于(4.14)式成立, 因而有 $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$ 。根据数列极限的 Cauchy 收敛原理知, $\{f(x_n)\}$ 是一个收敛数列, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ 。这样我们就证明了, 任取 $\{x_n\} \subseteq U(x_0)$, 只要 $x_n \rightarrow x_0$, 对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 都是一个收敛数列。下面还要证明, 对于 $U(x_0)$ 中任何一个与 $\{x_n\}$ 不同的数列 $\{\tilde{x}_n\} \subseteq U(x_0)$, 只要 $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$, 对应的函数值数列 $\{f(\tilde{x}_n)\}$ 的极限也是 a , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = a$ 。用反证法来证明。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = b \neq a$, 作一新数列:

$$x_1, \quad \tilde{x}_1, \quad x_2, \quad \tilde{x}_2, \quad \cdots, \quad x_n, \quad \tilde{x}_n, \quad \cdots,$$

它也包含在 $U(x_0)$ 中, 并且收敛于 x_0 (习题 1.3(A) 第 9 题), 但与该数列相对应的函数值数列

$$f(x_1), f(\tilde{x}_1), f(x_2), f(\tilde{x}_2), \cdots, f(x_n), f(\tilde{x}_n), \cdots$$

却不收敛(因为它的奇数项和偶数项构成的两个子列分别收敛于 a 与 b), 这与上面已证明的对于 $U(x_0)$ 中的任何 $\{x_n\}$, 只要 $x_n \rightarrow x_0$, 那么对应的 $\{f(x_n)\}$ 都收敛的结论相矛盾。因此, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = a$, 根据 Heine 定理得知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 。

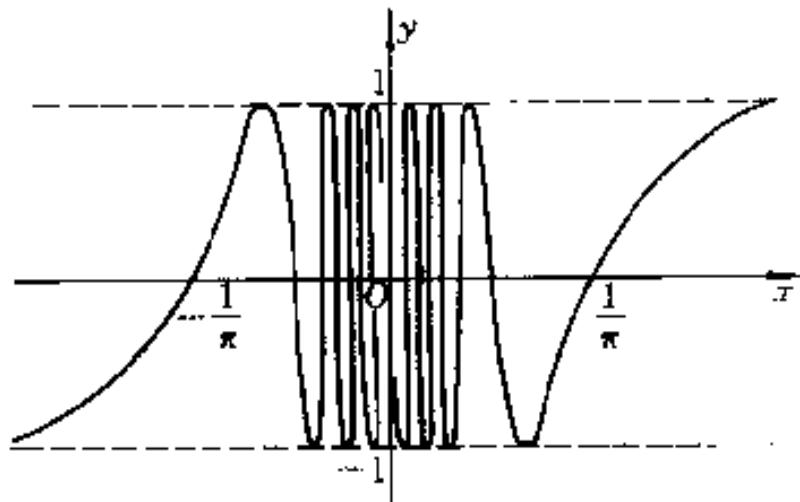


图 4.4

在几何上, Cauchy 收敛原理表明: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则在 x_0 附近, 函数 f 的图象如果振动, 则随着 $x \rightarrow x_0$, 其振幅趋近于零。例如, 函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) 的图象在 $x = 0$ 附近不停

地在 -1 与 1 之间振荡, 而且在 $x=0$ 的任意小的 ϵ 邻域内, 函数值既能取 1, 也能取 -1(图 4.4), 不满足 Cauchy 收敛原理, 因此, 当 $x \rightarrow 0$ 时 f 的极限不存在.

习题 1.4

(A)

1. 写出下列极限定义:

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$;
- (3) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x \rightarrow x_0^-}} f(x) = a$;
- (4) $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$.

2. 在函数极限的 $\epsilon-\delta$ 定义中, δ 随 ϵ 的变化而变化. 那么, δ 能不能说成是 ϵ 的函数?

3. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 且 $f(x)$ 在 x_0 有定义. 问在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, x 可否取到 x_0 ? 是否必有 $a = f(x_0)$?

4. 试用 $\epsilon-\delta$ 语言来表述当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 不收敛于 a .

5. 下列命题是否正确? 若正确, 请给出证明; 若不正确, 请举出反例.

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$;
- (2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^2 = a^2$;
- (3) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$;
- (4) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 都存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 存在;
- (5) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在;
- (6) 若在 x_0 的某邻域内 $f(x) > 0$, 并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 那么必有 $a > 0$.

6. 试问 $\lim_{x \rightarrow 3} (5 - 3x)^{1-x} = (-4)^{-2} = \frac{1}{16}$ 对吗? 为什么?

7. 证明:

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$.

8. 证明函数极限的唯一性、局部保号性与局部保序性.

9. 下列运算有无错误? 错在何处?

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow 0} x} = \frac{0}{0} = 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} = 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

10. 用极限定义证明下列各题:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = 4$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2}$.

11. 用 Heine 定理证明下列极限不存在:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \sin x)$.

12. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 3x + 2}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{a+x} - \sqrt{x})$ ($a \in \mathbf{R}$ 为常数);

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ ($m, n \in \mathbf{N}_+$);

(6) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$ ($m, n \in \mathbf{N}_+$);

(7) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$ ($n \in \mathbf{N}_+$, r 与 Δx 无关, 下同);

(8) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$;

(9) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$;

(10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ ($n \in \mathbf{N}_+$).

13. 利用两个重要极限求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow n\pi} \frac{\sin x}{x - n\pi}$ ($n \in \mathbf{N}_+$);

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{\frac{3x}{2}}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$;

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$;

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3^n} \right)^{3^n}$.

14. 讨论下列函数的极限是否存在.

(1) $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, \quad x \rightarrow 0$;

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \rightarrow 0, \\ (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \end{cases}$

(3) $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \infty$.

15. 用夹逼原理证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] = 1$, $[\cdot]$ 表示取整.

(B)

1. 证明 Dirichlet 函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ 在任何 $x \in \mathbf{R}$ 处的极限都不存在.

2. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期函数, 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则 $f(x) \equiv a$.
3. 设 $[a, b]$ 是一个有限闭区间, 如果 $\forall x_0 \in [a, b]$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.
4. 设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是无界函数, 证明: $\exists \{x_n\} \subseteq (a, b)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$.
5. 设 $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $\exists M > 0$, 使得 $\forall x_1, x_2 > M$, 恒有: $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.
6. 设 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调增函数, 证明下面三个命题是等价的:
- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在;
 - (2) $\{f(n)\}$ 是收敛数列;
 - (3) f 在 $[0, +\infty)$ 上有上界.

第五节 无穷小量与无穷大量

无穷小量与无穷大量是在今后应用中经常遇到的重要概念, 在极限理论中起着重要作用. 本节重点讲解无穷小量的概念与无穷小量的阶.

5.1 无穷小量及其阶

定义 5.1 (无穷小量) 当 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时, 以零为极限的函数 $a(x)$ 称为当 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时的无穷小量, 简称为无穷小.

例如, $x^2, \sin x, \tan x$ 都是当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小, 而 $\frac{1}{x}, \frac{\sin x}{x}$ 都是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

应当注意, 无穷小量是一个变量, 不能把它与绝对值很小的常数混为一谈. 任何非零常数, 不论其绝对值如何小, 都不是无穷小量.

一个函数是否为无穷小, 与自变量的变化趋势有关. 例如, $\frac{1}{x}$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小, 但当 $x \rightarrow x_0 \neq 0$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x_0}$, 不是无穷小; 而当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x}$ 的极限是无穷大.

今后, 如果极限符号下面未标明自变量的变化趋势, 那么表示它适合于 $x \rightarrow x_0$ 与 $x \rightarrow \infty$ 等各种情形.

定理 5.1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 的充要条件是 $f(x) = a + o(x)$, 其中 $o(x)$ 是一个无穷小量.

证 仅就 $x \rightarrow x_0$ 的情形来证明, 对于其他情形证法类似, 留给读者.

必要性 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - a] = 0$. 令 $o(x) = f(x) - a$, 则 $o(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 并且

$$f(x) = a + \alpha(x).$$

充分性 设 $f(x) = a + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [a + \alpha(x)] = a + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = a.$$

这个定理阐明了函数的极限与无穷小量间的密切关系. 根据这个定理, 可以从无穷小量出发来定义极限. Newton 和 Leibniz 就是以无穷小量为基础来建立微积分的.

利用极限的运算法则不难证明下面的定理 5.2.

定理 5.2 对于自变量相同变化趋势下的无穷小量有如下性质:

- (1) 有限个无穷小量的代数和是无穷小量;
- (2) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

定理 5.3 设 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, f 在 x_0 处是局部有界函数, 则 $\alpha(x)f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量.

证 由已知, f 在 x_0 处是局部有界的, 故 $\exists M > 0$, $\forall x \in \dot{U}(x_0)$, 恒有 $|f(x)| \leq M$. 从而, $\forall x \in \dot{U}(x_0)$,

$$|\alpha(x)f(x)| \leq M |\alpha(x)|,$$

即

$$-M |\alpha(x)| \leq \alpha(x)f(x) \leq M |\alpha(x)|.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)f(x) = 0$, 即 $\alpha(x)f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量. ■

类似的方法可以证明, 若定理 5.3 中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量, f 在 $\dot{U}(\infty)$ 内是有界函数(即 $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in \dot{U}(\infty)$, 恒有 $|f(x)| \leq M$), 则 $\alpha(x)f(x)$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量.

读者自然会问, 两个无穷小量的商(比)是否也是无穷小量呢? 由于两个无穷小量商的极限属于 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 因此这个问题没有肯定的答案. 例如 x, x^2 ,

$\sin x, x \sin \frac{1}{x}$ 都是当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小, 但它们的商当 $x \rightarrow 0$ 时的极限可能出现如下几种情况:

$$(1) \frac{x^2}{x} \rightarrow 0; \quad (2) \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1;$$

$$(3) \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}$$
 的极限不存在, 但它是有界的;

$$(4) \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow \infty.$$

出现上述不同情况说明了这些无穷小量趋近于 0 的快慢程度(速度)不同.为了从趋于 0 的速度来区分不同的无穷小量,人们引入了无穷小量阶的概念.

定义 5.2 (无穷小量的阶) 设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是无穷小,且 $\beta(x) \neq 0$.

(1) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小(或 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小), 用小 o 记号记作

$$\alpha(x) = o(\beta(x));$$

特别,一个无穷小量 $\alpha(x)$ 可记作 $o(1)$;

(2) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, c 是一个非零的常数, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小;

(3) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记作

$$\alpha(x) \sim \beta(x);$$

(4) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c$ (其中 $c \neq 0$ 是一常数, $k > 0$), 则称 $\alpha(x)$ 是关于 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小. 特别, 取 $\beta(x) = x - x_0$, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(x - x_0)^k} = c$, 则称 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的 k 阶无穷小;

(5) 若 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 在 x_0 处是局部有界的, 则用大 O 记号记作

$$\alpha(x) = O(\beta(x)).$$

若 $\alpha(x)$ 在 x_0 处是局部有界函数, 记作 $\alpha(x) = O(1)$.

易见, 若 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小, 或者 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 则都可记成 $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

例 5.1 当 $x \rightarrow 0$ 时, 试比较下列无穷小的阶:

$$(1) \alpha(x) = x^3 + 2x^2, \beta(x) = 2x^2; \quad (2) \alpha(x) = \sin x, \beta(x) = x;$$

$$(3) \alpha(x) = \tan x, \beta(x) = x; \quad (4) \alpha(x) = 1 - \cos x, \beta(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

解 (1) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{2x^2} = 1,$$

所以, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $x^3 + 2x^2$ 与 $2x^2$ 是等价无穷小, 即 $x^3 + 2x^2 \sim 2x^2$, 也可以说 $x^3 + 2x^2$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时的二阶无穷小.

(2) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

所以, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x$ 与 x 是等价无穷小, 即 $\sin x \sim x$.

与(2)类似可以证明(3),(4); 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$. ■

由上例中的(2)、(3)、(4)可得, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x \sim \tan x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2. \quad (5.1)$$

根据高阶无穷小的定义,(5.1)式中各等价无穷小还可以利用小 o 记号表示如下. 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\boxed{\sin x \sim x + o(x), \tan x = x + o(x), 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).} \quad (5.2)$$

例 5.2 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$.

证 利用分子有理化的方法得知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \left[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + 1 \right]} = \frac{1}{n},$$

因此, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$. ■

定理 5.4 设 $\alpha(x), \beta(x), \bar{\alpha}(x)$ 与 $\bar{\beta}(x)$ 都是无穷小, 若

$$\alpha(x) \sim \bar{\alpha}(x), \quad \beta(x) \sim \bar{\beta}(x),$$

并且 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 存在, 则 $\lim \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$ 也存在, 并且

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}.$$

证 由于

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{\bar{\alpha}(x)} \cdot \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)} \cdot \frac{\bar{\beta}(x)}{\beta(x)},$$

根据极限的乘法运算法则与已知条件可立即得到定理中的结论. ■

定理 5.4 称为无穷小等价代换定理, 它可用于计算 $\frac{0}{0}$ 型不定式的极限. 应用

时,对分子与分母中所含的无穷小因子直接进行无穷小的等价代换,往往可使所求极限变得简单而便于计算.

$$\text{例 5.3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{\arcsin \frac{x}{2} \arctan \frac{x}{3}}.$$

解 由例 5.2, 我们有

$$\sqrt{1+2x^2}-1 \sim \frac{1}{2} \cdot 2x^2 = x^2.$$

又由(5.1)式, 不难得知

$$\arcsin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}, \quad \arctan \frac{x}{3} \sim \frac{x}{3},$$

根据定理 5.4,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{\arcsin \frac{x}{2} \arctan \frac{x}{3}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}} = 6. \blacksquare$$

值得特别注意的是, 上面的等价代换只能对分子分母中的无穷小因子进行. 若所求极限表达式中含有函数的加减法运算, 则不能对其中的被加与被减函数进行, 否则就会产生错误(习题 1.5(A) 第 3(1) 题).

5.2 无穷大量

无穷大量与无穷小量的变化状态正好相反, 它是绝对值无限趋大的变量.

定义 5.3 (无穷大量) 设 $f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 简称无穷大.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$), 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的正无穷大(负无穷大). 类似, 还可以定义当 $x \rightarrow \infty$ 时无穷大及正(负)无穷大.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 在几何上, 称直线 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ (即 f 的图象) 的垂直渐近线(图 5.1(a)). 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则称直线 $y = a$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线(图 5.1(b)).

不难证明:

定理 5.5 (1) 若 $f(x)$ 是无穷小量, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大量; 若

$f(x)$ 是无穷大量, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小量;

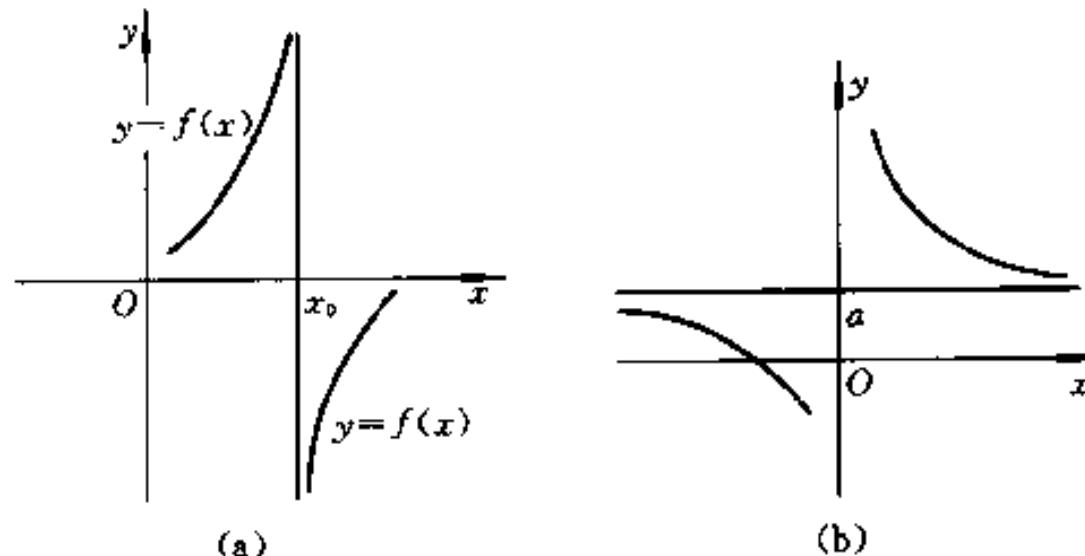


图 5.1

(2) 有限个无穷大量的乘积是无穷大量;

(3) 无穷大量与有界量之和是无穷大量.

然而, 两个无穷大量的代数和不一定是无穷大量, 因为可能出现 $\infty - \infty$ 型不定式的情况(例 4.7); 无穷大量与有界量的乘积也不一定是无穷大量, 因为可能出现 $0 \cdot \infty$ 型不定式的情况.

不同无穷大量趋于 ∞ 的速度也不相同, 因此与无穷小量类似, 对无穷大量也可进行阶的比较. 读者可以仿照无穷小量阶的定义 5.2 自己去讨论, 这里不再赘述.

习题 1.5

(A)

1. 用 $\varepsilon - \delta$ 语言给出当 $x \rightarrow x_0$ 时 $a(x)$ 是无穷小量的定义.

2. 下列说法是否正确? 为什么?

(1) 无穷小量是很小很小的数, 无穷大量是很大很大的数;

(2) 无穷小量就是数 0;

(3) 数 0 是无穷小量;

(4) 无穷大量一定是无界变量;

(5) 无界变量也一定是无穷大量;

(6) 无穷大量与有界量的乘积是无穷大量;

(7) 无限多个无穷小之和仍为无穷小.

3. 下列运算是否正确? 如有错误, 请指出错在何处.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数哪些是 x 的高阶无穷小? 哪些是 x 的同阶无穷小? 哪些是 x 的低阶无穷小? 并指出无穷小的阶数.

$$(1) x^4 + \sin 2x, x \in \mathbb{R}; \quad (2) \sqrt{x(1-x)}, x \in (0,1);$$

$$(3) \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}(1-x), x \in \mathbb{R}; \quad (4) 2x \cos x \sqrt[3]{\tan^2 x}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(5) \csc x - \cot x, x \in (0, \pi).$$

5. 证明下列关系式:

$$(1) \arcsin x = x + o(x) (x \rightarrow 0); \quad (2) \arctan x = x + o(x) (x \rightarrow 0);$$

$$(3) \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}x + o(x) (x \rightarrow 0); \quad (4) \sqrt{1+\tan x} = \sqrt{1+\sin x} = \frac{1}{4}x^3 (x \rightarrow 0);$$

$$(5) \sqrt{x} + \sqrt{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} (x \rightarrow +\infty); \quad (6) \sin \frac{1}{x} = O(1);$$

$$(7) x + x \sin x = o(x^2) (x \rightarrow \infty); \quad (8) x \arctan \frac{1}{x} = O(x) (x \rightarrow 0).$$

6. 利用无穷小的等价代换求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2(1 - \cos^2 x)}{3x^3 + 4\tan^2 x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1}{x \tan x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{\sin 2x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1 + \tan x} - 1)(\sqrt{1 + x^2} - 1)}{\tan x - \sin x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x}) \tan x}{(1 - \cos x)^{\frac{5}{2}}}.$$

(B)

1. 设 P 是曲线 $y = f(x)$ 上的动点, 若点 P 沿该曲线无限远离坐标原点时, 它到某定直线 L 的距离趋于 0, 则称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线. 若直线 L 的斜率 $k \neq 0$ 时, 称 L 为斜渐近线.

(1) 证明: 直线 $y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的斜(或水平)渐近线充分必要条件为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

(2) 求函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) 的斜渐近线方程.

2. 确定 a, b, c 的值, 使下列极限等式成立:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x} + 1 - ax + b) = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c - \sqrt{x^2 + 3}}{(x-1)^2} = 0.$$

3. 设 $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是两个函数, 且 $\forall x \in A, f(x) > 0$, 则称形如 $f(x)^{g(x)}$ 的函数为幂指函数. 若 $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$, 则称极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 属于 1^∞ 型不定式. 对于这类不定式, 一般利用等式

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

转化为讨论 $0 \cdot \infty$ 型不定式 $g(x) \ln f(x)$ 的极限问题.

(1) 设 $g_1(x) \sim g_2(x)$, 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g_1(x)}$ 存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g_2(x)}.$$

(2) 假定 $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$, 即对数函数 $y = \ln x$ 是连续的(见第六节), 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = a^b$.

(3) 求下列极限 1° $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$; 2° $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x$.

第六节 连续函数

连续函数是微积分研究的主要对象. 本节讨论连续函数的概念与基本性质、函数的间断点及其分类, 介绍闭区间上连续函数的一些重要性质(包括一致连续性). 最后利用 Cauchy 收敛原理及函数的连续性证明了直线 \mathbf{R} 上的压缩映射原理.

6.1 连续函数的概念与基本性质

在实际问题中所遇到的函数往往具有这样的特点: 因变量随自变量的变化而连续不断地变化. 例如, 细棒的长度随着温度的升高(降低)连续不断地增大(减小); 自由落体通过的位移随着时间的增长而连续不断地增大等. 具有这种特点的函数就是所谓连续函数. 怎样从数量关系上来刻画这种“连续不断地变化”的特点呢? 仔细分析上面的两个例子不难发现: 当自变量变化很小时, 函数值的变化也很小; 只要自变量改变的量充分靠近于零, 函数值改变的量就可以任意接近于零. 因此, 我们可以用极限来给出函数连续性的定义.

设函数 $y = f(x)$ 定义在 x_0 的某邻域内, 当自变量从 x_0 变到 x 时, 对应的函数值从 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$, 称 $\Delta x = x - x_0$ 为自变量的改变量,

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

为函数值的改变量或因变量的改变量, 习惯上也称 Δy 为函数的改变量.

定义 6.1 (连续性) 设有函数 $f: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. 若

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (6.1)$$

则称函数 f 在 x_0 处连续.

函数 f 在 x_0 处连续也可以用 $\epsilon - \delta$ 语言定义如下:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 使得 } \forall x \in U(x_0, \delta) \cap U(x_0), \text{ 恒有 } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \quad (6.2)$$

读者应当注意, 在函数连续性的定义中, 要求函数 f 在 x_0 处是有定义的, 这与极限的定义不同.

类似于左极限和右极限, 还可以定义函数在点 x_0 处左连续和右连续. 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)),$$

则称 f 在 x_0 处左连续(右连续), 左、右连续统称为单侧连续. 读者不难证明:

函数 f 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

若 f 在开区间 (a, b) 内每一点处连续, 则称它在开区间 (a, b) 内连续; 若 f 在有限区间 $[a, b]$ 内连续, 并且在左端点 a 右连续, 在右端点 b 左连续, 则称它在闭区间 $[a, b]$ 上连续. 类似地, 可定义 f 在半开半闭区间上的连续性. 一般, 若 f 在定义区间 I 上处处连续, 则称它是该区间上的连续函数. 区间 I 上连续函数的全体记作 $C(I)$. 在区间上的连续函数的图象在该区间上是一条连续不断的曲线.

例 6.1 证明: 幂函数 $x^n \in C(-\infty, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}_+$.

证 根据连续函数的定义, 只要证明 x^n 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处连续. 为此, 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 根据极限的乘法运算法则, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^n = x_0^n,$$

所以 x^n 在 x_0 处连续. 由于 x_0 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意一点, 因此, $x^n \in C(-\infty, +\infty)$. ■

例 6.2 证明: 正弦函数 $\sin x \in C(-\infty, +\infty)$.

证 与例 6.1 类似, 只要证明 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处连续就够了. 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 由和差化积公式得

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

从而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2} = 0,$$

故 $\sin x$ 在 x_0 处连续, 由 x_0 的任意性知 $\sin x \in C(-\infty, +\infty)$. ■

例 6.3 证明: 指数函数 $e^x, a^x \in C(-\infty, +\infty)$, 其中 $a > 0$.

证 根据例 4.9, $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0},$$

因此, a^x 与 e^x 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. ■

利用极限的有关性质, 容易证明连续函数的下列性质:

定理 6.1 设函数 $f, g: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 在 x_0 处连续, 则

(1) $f \pm g, fg, \frac{f}{g}$ ($g(x_0) \neq 0$) 都在 x_0 处连续;

(2) f 在 x_0 处是局部有界的.

定理 6.2 设 $y = f(g(x))$ 是由 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 复合而成, $x_0 \in D(f \circ g)$. 若 g 在 x_0 处连续, f 在对应的 $g(x_0)$ 处连续, 且 $u_0 = g(x_0)$, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 也在 x_0 处连续.

例 6.4 证明: 三角函数在它们的定义域上连续.

证 例 6.2 已经证明了 $\sin x \in C(-\infty, +\infty)$. 由于 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 可以看成 $\sin u$ 与 $u = \frac{\pi}{2} - x$ 的复合函数, 因此 $\cos x \in C(-\infty, +\infty)$. 又由

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

根据定理 6.1, 它们都是定义域上的连续函数. 类似可以证明 $\sec x$ 与 $\csc x$ 在定义域上的连续性. ■

下面讨论反函数的连续性. 从几何图象上易见(图 2.7): 定义在区间上的严格单调函数 f 的反函数 f^{-1} 必定存在, 而且它也是严格单调的; 若 f 还是该区间上的连续函数, 则 f^{-1} 也是连续函数. 关于反函数 f^{-1} 的存在性与严格单调性可以利用定理 2.2 来证明, 留给读者作为习题. 至于反函数的连续性, 由于证明比较复杂, 因而从略, 现在把这个结论叙述如下.

定理 6.3 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 是严格单调增(减)的连续函数, 则其反函数 f^{-1} 在区间 $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$) 上也是连续的.

例 6.5 证明: 反三角函数、对数函数和一般幂函数在它们各自的定义域上连续.

证 由于 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调增且连续, 故它的反函数 $x = \arcsin y$ 在 $[-1, 1]$ 上连续. 其他反三角函数在定义区间上的连续性可类似地证明.

由 a^x 与 e^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 的严格单调性及连续性, 故它们的反函数 $\log_a y$ 与 $\ln y$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上也是连续的.

又因为 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) 可以看成是连续函数 $y = e^u$ 与 $u = \alpha \ln x$ 的复合函数, 所以它在 $(0, +\infty)$ 上是连续函数. ■

由于常数(看作函数)是连续的, 再综合上面的例 6.1, 6.3, 6.4 和例 6.5 得知, 所有基本初等函数在它们各自的定义域上都是连续的. 再由定理 6.1 与定理 6.2 立即可得: 所有初等函数在它们的定义域内的区间上也是连续的.

根据连续函数的定义和定理 6.2, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(\lim_{x \rightarrow x_0} x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)).$$

因此,在计算连续函数极限的时候,极限符号与函数符号可以交换次序.

例 6.6 证明下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha (\alpha \in \mathbb{R}).$$

证 (1) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

利用对数函数的连续性, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 以及极限的复合运算法则, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

(2) 令 $e^x - 1 = t$, 则 $x = \ln(1+t)$, 并且当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$. 由(1)我们得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

(3) 令 $(1+x)^\alpha - 1 = t$, 则 $\alpha \ln(1+x) = \ln(1+t)$, 并且当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$. 于是有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha. \end{aligned}$$

由此例, 我们得到三个等价无穷小关系式: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$

(6.3)

6.2 函数的间断点及其分类

由定义 6.1 可知, 函数 f 在 x_0 处连续必须且只需同时满足下面三个条件:

- (1) f 在 x_0 处有定义;
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 即 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0)$ 存在且相等;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果其中有一个不满足, 也就是说, 如果或者 f 在 x_0 无定义; 或者 f 在 x_0 虽有

定义但在 x_0 的极限不存在;或者 f 在 x_0 有定义,极限也存在,但极限值不等于 $f(x_0)$,那么 f 在 x_0 处不连续.

使函数 f 不连续的点 x_0 称为 f 的间断点.

通常,函数的间断点分为两类:一类是左右极限都存在的间断点,称为第一类间断点;不是第一类的间断点,都称为第二类间断点.

例 6.7 考察函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. 由于它在 $x = 1$ 处无定义,所以 $x = 1$ 是间断点. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

所以,只要补充定义 $f(1) = 2$, 即令 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{cases}$ 那么函数 f 在 $x = 1$ 处就连续了.

类似地,若考察函数

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

虽然它在 $x = 1$ 处有定义,但由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \neq g(1),$$

故 $x = 1$ 仍是它的间断点. 如果改变它在 $x = 1$ 的值,即重新定义 $g(1) = 2$,那么函数 g 在 $x = 1$ 处就连续了. 这种间断点称为可去间断点.

一般,可去间断点有这样的特征:函数在该点处的左、右极限都存在且相等,但函数在该点或者无定义,或者虽有定义但极限值与该点函数值不相等.

例 6.8 考察符号函数(图 6.1)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1,$$

所以它在 $x = 0$ 处的左右极限不相等. 这种左右极限都存在但不相等的间断点称为跳跃间断点.

可去间断点与跳跃间断点都属于第一类间

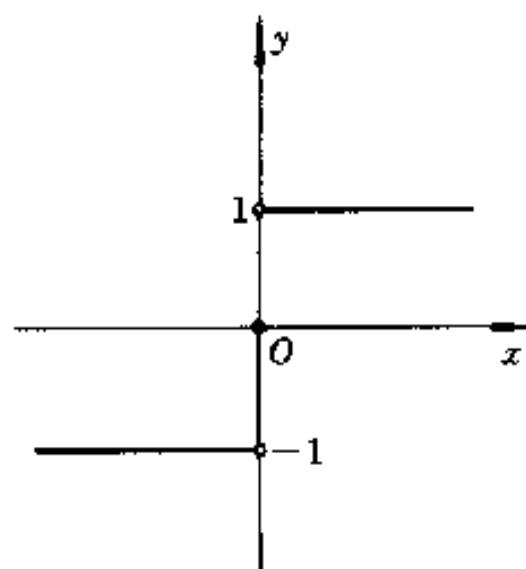


图 6.1

断点.

由定理 4.7 不难推知, 定义在区间 I 上的单调函数 f 在 I 上至多只能有一类间断点.

例 6.9 设 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \sin \frac{1}{x}$. 易见, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 这种使函数值趋于无穷大的间断点, 称为无穷间断点. 在第四节末已经指出, 函数 g 在 $x=0$ 处的极限不存在, 并且在 g 的定义域内取收敛于 0 的不同数列 $\{x_n\}$, 对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 可以收敛于 -1 与 1 之间的任何值. 这种间断点称为振荡间断点.

无穷间断点与振荡间断点都属于第二类间断点.

对于给定的函数, 我们应当学会利用已有的知识讨论它们的连续性, 指出它们在何处连续, 何处间断, 间断点是什么类型.

例 6.10 讨论函数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 的连续性, 并判断间断点的类型.

解 根据三角函数的连续性和定理 6.1, 除了使 $\tan x$ 无定义的点 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 以及使 $\tan x = 0$ 的点 $x = n\pi$ 之外, f 在 $(-\infty, +\infty)$ 内其余点均连续. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1,$$

所以 $x=0$ 是 f 的第一类间断点(可去间断点). 又

$$\lim_{x \rightarrow n\pi} \frac{x}{\tan x} = \pm \infty (n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

所以 $x=n\pi$ 是 f 的第二类间断点(无穷间断点). 最后, 因为

$$\lim_{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0 (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

所以 $x=n\pi + \frac{\pi}{2}$ 也是 f 的第一类间断点(可去间断点). ■

例 6.11 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

的连续性.

解 由于函数 f 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处无定义, 因此 $x=0$ 与 $x=1$ 是它的间

断点. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}} = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}} = -\infty,$$

故 $x=1$ 是第一类间断点(跳跃间断点), $x=0$ 是第二类间断点(无穷间断点).

除 $x=0, 1$ 外, f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. ■

6.3 闭区间上连续函数的性质

定义在闭区间上的连续函数有很多在理论和应用中都十分重要的性质, 本段将给予详细的介绍和论证. 其实, 这些性质的正确性在直观上是很明显的. 因此, 对于那些只对应用有兴趣的读者, 可以略去证明过程.

定理 6.4 (有界性) 设 $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界.

证 用反证法. 假定 f 在 $[a, b]$ 上无界, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, \exists x_n \in [a, b], \text{使得 } |f(x_n)| > n, \quad (6.4)$$

从而得一个有界数列 $\{x_n\} \subseteq [a, b]$. 根据 Bolzano-Weierstrass 定理, 必存在 $\{x_n\}$ 的一个收敛子数列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $x_{n_k} \rightarrow x_0 (k \rightarrow \infty)$. 由于 $a \leq x_{n_k} \leq b (k = 1, 2, \dots)$, 由保序性得知 $x_0 \in [a, b]$. 又因为 f 在 x_0 连续, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, 从而得知 $\{f(x_{n_k})\}$ 是有界数列. 这与(6.4)式相矛盾, 因此 f 在 $[a, b]$ 上有界. ■

定理 6.5 (最大最小值定理) 设 $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上一定能取得它的最大值与最小值, 即至少存在两点 $x_1, x_2 \in [a, b]$ (图 6.2), 使得

$$f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\},$$

$$f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}.$$

证 仅证 f 能在 $[a, b]$ 上取得最大值. 由于 $f \in C[a, b]$, 根据定理 6.4, f 在 $[a, b]$ 上有界, 即 $R(f)$ 是有界数集. 因而 $R(f)$ 必有上、下确界, 设它们分别为:

$$M = \sup R(f), \quad m = \inf R(f).$$

根据上确界的定义, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\exists \xi_n \in [a, b]$, 使得 $M - \frac{1}{n} < f(\xi_n) \leq M$, 由此得

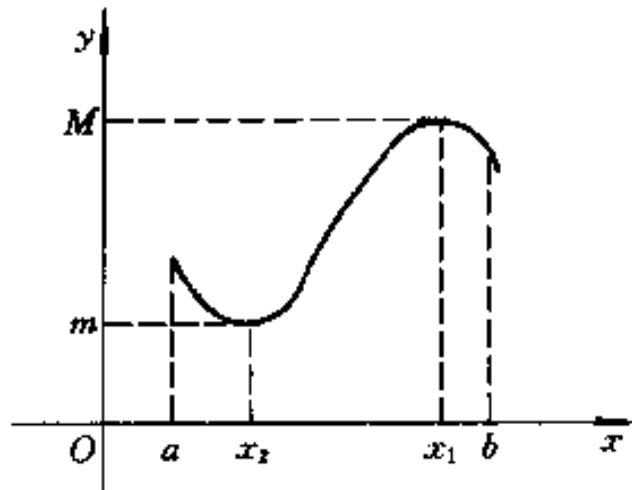


图 6.2

一有界数列 $\{\xi_n\} \subseteq [a, b]$, 由 Bolzano-Weierstrass 定理, $\{\xi_n\}$ 必有一收敛子列 $\{\xi_{n_k}\}$, 设 $\xi_{n_k} \rightarrow x_1 (k \rightarrow \infty)$, 则 $x_1 \in [a, b]$. 再利用 f 的连续性得 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\xi_{n_k}) = f(x_1)$. 又由

$$M - \frac{1}{n_k} < f(\xi_{n_k}) \leq M$$

及夹逼原理知 $f(x_1) = M$. 由于上确界 M 被 f 在 $x_1 \in [a, b]$ 取得, 所以它就是 f 在 $[a, b]$ 上的最大值.

类似可证, 存在 $x_2 \in [a, b]$, 使 $f(x_2) = m$. ■

应当指出, 这两个定理中, f 的定义域是闭区间以及 f 在 $[a, b]$ 上连续这两个条件, 如果有一个不满足, 那么定理中的结论不一定成立. 例如, $\tan x$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上连续, 但却无界, 也没有最大值与最小值. 又如函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

定义在闭区间 $[-1, 1]$ 上, 但不连续, 也无最大值.

定理 6.6 (零点存在定理) 设 $f \in C[a, b]$, 若 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

证 不妨设 $f(a) < 0, f(b) > 0$. 将 $[a, b]$ 二等分为两个子区间, 若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 则 $\xi = \frac{a+b}{2}$ 即为所求之点. 若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, 则它必与 $f(a)$ 或 $f(b)$ 异号. 故此时必有一子区间, 使 f 在该子区间两个端点的值异号, 设为 $[a_1, b_1]$, 并且假定 $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$. 再将 $[a_1, b_1]$ 二等分, 同样可得 $[a_1, b_1]$ 的一个子区间 $[a_2, b_2]$, 使 $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$. 如此继续等分下去, 可得一闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}: [a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{2^n} = 0,$$

并且 $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0 (n \in \mathbb{N})$. 根据闭区间套定理, 存在唯一的 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. 由 f 的连续性与极限的保号性得

$$f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0, f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0,$$

故必有 $f(\xi) = 0$. 由于 $\xi \neq a, \xi \neq b$, 所以 $\xi \in (a, b)$. ■

零点存在定理不但可以判定函数方程 $f(x) = 0$ 根的存在性, 而且它的证明过程也提供了一种求方程近似解的方法, 称之为二分法. 利用这种方法, 只要不

断等分区间 $[a, b]$, 使第 n 级子区间的长度 $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ 足够小, 就可以对方程求得所需精确度的近似解.

例 6.12 证明方程 $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ 的三个根都是实的, 并且都在区间 $(-3, 2)$ 内.

证 设 $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$, 由于 $f(-3) = -5 < 0, f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0, f(2) = 5 > 0$, 因此方程在 $(-3, 0), (0, 1), (1, 2)$ 内至少各有一个根. 又因为三次方程至多有三个根, 因此这三个根都是实的, 并且都在 $(-3, 2)$ 内.

■

利用二分法不难求得这三个实根的近似值. 例如, 为了求得在区间 $(0, 1)$ 内的根的近似值, 将区间 $[0, 1]$ 不断地二等分, 求出函数 f 在中点的值如下:

在 $[0, 1]$ 的中点 $\frac{1}{2}$ 处的函数值 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8} < 0$;

在 $[0, \frac{1}{2}]$ 的中点 $\frac{1}{4}$ 处的函数值 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{64} > 0$;

在 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 的中点 $\frac{3}{8}$ 处的函数值 $f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{227}{512} > 0$.

因此, 可取 $[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$ 的中点 $\frac{7}{16}$ 作为该方程在 $[0, 1]$ 内根的近似值, 其误差不超过该区间长度的一半, 即 $\frac{1}{16}$. 读者可以利用二分法在微机上求得该方程任意精度的近似根.

例 6.13 设函数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 连续, 证明存在 $t \in [0, 1]$, 使 $f(t) = t$.

证 设 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F \in C[0, 1]$, 并且 $F(0) = f(0) \geq 0, F(1) = f(1) - 1 \leq 0$. 若 $F(0) = 0$ (或 $F(1) = 0$), 则 $t = 0$ (或 $t = 1$) 就是所求之点. 若 $F(0) > 0$ 且 $F(1) < 0$, 则由零点存在定理, 存在 $t \in (0, 1)$ 使 $F(t) = 0$, 即 $f(t) = t$. ■

定理 6.7 (介值定理) 设 $f \in C[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$, 并且 μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一值, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \mu$.

证 设 $F(x) = f(x) - \mu$, 则 $F \in C[a, b]$, 且 $F(a) = f(a) - \mu$ 与 $F(b) = f(b) - \mu$ 异号. 由定理 6.6, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \mu$.

■

容易看出, 在定理 6.6 与定理 6.7 中, 如果函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上还是严格单调的, 那么点 ξ 是唯一的.

推论 6.1 设 $f \in C[a, b]$, 则 f 能在 $[a, b]$ 上取得介于它的最大值 M 与最小值 m 之间的任一值.

例 6.14 设 $f \in C(a, b)$, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, 则至少存在一点

$\xi \in (a, b)$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (6.5)$$

证 由于 $f \in C(a, b)$, 因此 $f \in C[x_1, x_n]$. 根据定理 6.5, 必存在 $\xi_1, \xi_2 \in [x_1, x_n]$, 使得

$$f(\xi_1) = m = \min_{x \in [x_1, x_n]} |f(x)|, f(\xi_2) = M = \max_{x \in [x_1, x_n]} |f(x)|.$$

为了得到所要证明的等式(6.5), 根据推论 6.1 只要证明(6.5)式右端的值介于 m 与 M 之间. 事实上, 由于

$$m \leq f(x_i) \leq M (i = 1, 2, \dots, n),$$

所以有

$$nm \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq nM,$$

从而得

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M.$$

根据推论 6.1, 至少存在一点 $\xi \in [x_1, x_n] \subseteq (a, b)$, 使 $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$. ■

6.4 函数的一致连续性

本段我们介绍一种比连续性要求更强的所谓一致连续性. 大家知道, 函数 f 在区间 I 上连续, 是指它在该区间的每一点 x_0 都连续. 用 ϵ - δ 语言来表达, 就是

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. (6.2)

值得注意的是, 上式中的 δ 不但与 ϵ 有关, 而且与 x_0 有关. 即使对于同

一个 ϵ , 当 x_0 在该区间内变化时, 一般情况下, δ 也随之变化, 这从图 6.3 中可以看得很明白. 对于同样大小的 ϵ , 在函数值变化平缓的部分所对应的 δ 的最大允许值^①比函数值变化剧烈的部分所对应的 δ 的最大允许值大得多. 那么, 对该

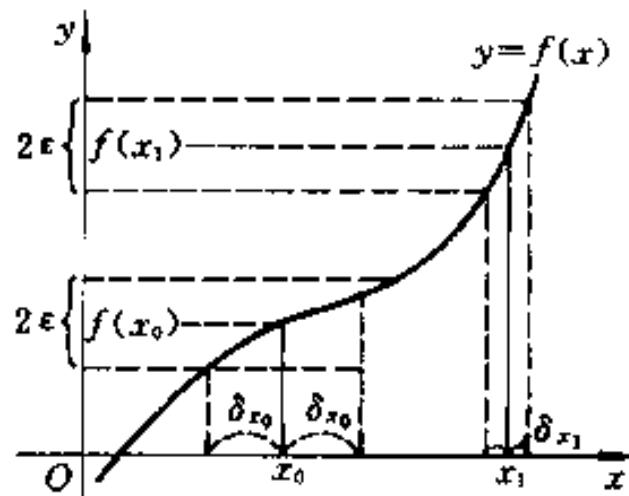


图 6.3

^① 对于给定的 $\epsilon > 0$, 使不等式(6.2)成立的 δ 的值有很多, δ 的最大允许值是指使该不等式成立的 δ 的最大值.

区间内的所有点,能否找到一个共同的 δ (即与 x_0 无关,仅与 ϵ 有关的 δ)呢? 这就是函数 f 在区间 I 上的一致连续性问题.

定义 6.2(一致连续函数) 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为任一函数,若

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得 } \forall x_1, x_2 \in I, \text{当 } |x_1 - x_2| < \delta \text{ 时,} \\ \text{恒有 } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon. \quad (6.6)$$

则称 f 是区间 I 上的一致连续函数,其中 δ 仅与 ϵ 有关,而与 x 无关.

函数 f 在区间 I 上连续与一致连续是两个不同的概念. 前者只要求对于 I 中的各点 x_0 ,能分别找到使不等式(6.2)成立的 δ 就行了,它刻画了函数的局部性态, f 在区间 I 上连续也叫做 f 在 I 上处处连续;后者则要求对于 I 中的所有点,能找到一个共同的 δ ,使不等式(6.6)成立,它刻画了函数的整体性态. 易见,如果函数 f 在 I 上一致连续,则 f 在 I 上处处连续,反之不一定成立.

例 6.15 证明: 正弦函数 $\sin x$ 与余弦函数 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致连续的.

证 由于 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 我们有

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2 \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \left| \cos \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \leq |x_1 - x_2|.$$

取 $\delta = \epsilon$, 则有

$$\forall \epsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty), \text{当 } |x_1 - x_2| < \delta \text{ 时, } |\sin x_1 - \sin x_2| < \epsilon.$$

因此 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. 类似可证 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. ■

例 6.16 证明: 函数 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上连续但却不一致连续.

证 由于 $\sin \frac{1}{x}$ 是初等函数, 因此它在 $(0, 1]$ 上是连续的. 下面证明它在 $(0, 1]$ 上不一致连续. 取 $x_n^{(1)} = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $x_n^{(2)} = \frac{1}{n\pi}$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 则

$$\sin \frac{1}{x_n^{(1)}} = 1, \quad \sin \frac{1}{x_n^{(2)}} = 0.$$

而且, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \rightarrow 0$. 因此, 对于 $\epsilon = \frac{1}{2}$ 及任何 $\delta > 0$, $\exists x_n^{(1)}, x_n^{(2)} \in (0, 1]$, 满足 $|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| < \delta$, 却有

$$\left| \sin \frac{1}{x_n^{(1)}} - \sin \frac{1}{x_n^{(2)}} \right| = 1 > \epsilon,$$

故 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上不一致连续。■

定理 6.8 设 $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上一致连续。

证 用反证法. 若 f 在 $[a, b]$ 上不一致连续, 则由定义 6.2,

$$\exists \epsilon_0 > 0, \text{ 对任何 } \delta_n = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}), \exists x_n^{(1)}, x_n^{(2)} \in [a, b],$$

$$\text{满足 } |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| < \frac{1}{n}, \text{ 使得 } |f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| \geq \epsilon_0.$$

由于 $\{x_n^{(1)}\} \subseteq [a, b]$ 是有界数列, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理, 它有收敛子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$, 设 $x_{n_k}^{(1)} \rightarrow x_0 \in [a, b]$. 在 $\{x_n^{(2)}\}$ 中取对应的子列 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$, 由于 $|x_{n_k}^{(1)} - x_{n_k}^{(2)}| < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k}^{(2)} - x_{n_k}^{(1)}) + \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(1)} = x_0$. 根据 f 的连续性, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x_{n_k}^{(1)}) - f(x_{n_k}^{(2)})] = f(x_0) - f(x_0) = 0$, 这与 $|f(x_{n_k}^{(1)}) - f(x_{n_k}^{(2)})| \geq \epsilon_0$ 相矛盾. 故 f 在 $[a, b]$ 上一致连续. ■

6.5 压缩映射原理与迭代法

作为极限理论与函数连续性的一个重要应用, 本段介绍近代数学中用于判定方程根的存在唯一性的重要原理——压缩映射原理(或称 Banach 不动点定理)——以及用于求解方程近似根的方法——迭代法.

设 f 是从集合 A 到自身的一个映射. 若存在一个 $x \in A$, 使 $f(x) = x$, 则称 x 是映射 f 的一个不动点. 易见, 映射 f 有一个不动点等价于方程 $f(x) = x$ 有一个根. 因此研究映射不动点的存在唯一性及其求法的问题实质上就是研究相应方程根的存在唯一性及其求法的问题.

若映射(函数) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足不等式

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad (6.7)$$

其中 $x, y \in \mathbf{R}, 0 < k < 1$, 则称 f 为压缩映射. 读者不难根据连续性的定义证明压缩映射 f 是连续的.

定理 6.9 (压缩映射原理) 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个压缩映射, 则 f 在 \mathbf{R} 上有唯一的不动点.

证 (1) 首先证明: 任取 $x_0 \in \mathbf{R}$, 利用压缩映射 f 作迭代数列 $\{x_n\}$:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots,$$

则 $\{x_n\}$ 是收敛数列. 事实上, 因为

$$|x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \leq k|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

$$\begin{aligned} & \because k |f(x_{n+2}) - f(x_{n+3})| \leq k^2 |x_{n+2} - x_{n+3}| \\ & \leq \cdots \leq k^{n-1} |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

所以,对于任何 $p \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| & \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ & \leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n) |x_1 - x_0| \\ & = \frac{k^n(1-k^p)}{1-k} |x_1 - x_0| < \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

由于 $k < 1$, 故 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| < \epsilon. \quad (6.8)$$

根据 Cauchy 收敛原理, $|x_n|$ 是收敛数列, 设 $x_n \rightarrow \bar{x}$ ($n \rightarrow \infty$).

(2) 其次证明: \bar{x} 是 f 的一个不动点. 事实上, 对迭代关系式 $x_n = f(x_{n-1})$ 两边取极限, 由 f 的连续性得

$$\bar{x} = f(\bar{x}),$$

因此, \bar{x} 是 f 的一个不动点, 即 \bar{x} 是方程 $x = f(x)$ 的一个根.

(3) 最后证明: f 的不动点是唯一的. 如果 f 有另一个不动点 \bar{x}_1 , 即 $\bar{x}_1 = f(\bar{x}_1)$, 那么

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}| = |f(\bar{x}_1) - f(\bar{x})| \leq k |\bar{x}_1 - \bar{x}|.$$

因为 $0 < k < 1$, 所以上式当且仅当 $|\bar{x}_1 - \bar{x}| = 0$ 时才成立, 故 $\bar{x}_1 = \bar{x}$.

综上所述, f 有唯一的不动点. ■

上面的定理不但证明了压缩映射 f 不动点的存在唯一性, 即方程 $f(x) = x$ 根的存在唯一性, 而且定理的证明过程还给出了求该方程近似根的一种方法. 在实际问题中所遇到的方程往往无法求得它的精确解(根), 需要借助于各种近似方法求出它的近似解. 由于定理证明中所作的迭代数列 $|x_n|$ 收敛于方程的精确解 \bar{x} , 因此, 迭代数列中的任何一项 x_n 都可以作为它的近似解, 而且 n 越大, 精度越高.

在(6.8)式中, 令 $p \rightarrow \infty$, 得

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| = \frac{k^n}{1-k} |f(x_0) - x_0|,$$

它就是经过 n 次迭代后得到的近似解 x_n 与精确解 \bar{x} 的误差估计式. 这种方法是方程求根中一种常用而且简便易行的近似解法, 称为迭代法. 只要编出简单的程序, 就可以在计算机上求出方程足够精确的近似解.

习题 1.6

(A)

1. 证明: 函数 f 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow f$ 在 x_0 既左连续又右连续.
2. 两个在 x_0 处不连续函数之和在 x_0 是否一定不连续? 若其中一个在 x_0 处连续, 一个在 x_0 处不连续, 则它们的和在 x_0 处是否一定不连续?
3. 证明: 若 f 连续, 则 $|f|$ 也连续. 逆命题成立吗?
4. 设 $f, g \in C[a, b]$, 记

$$\varphi(x) = \min_{x \in [a, b]} |f(x), g(x)|, \psi(x) = \max_{x \in [a, b]} |f(x), g(x)|$$

证明 $\varphi, \psi \in C[a, b]$.

5. 设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件:

$$\exists M > 0, \text{使得 } \forall x, y \in (-\infty, +\infty), \text{恒有 } |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,$$

证明: f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

6. 证明: 函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in I$ 处连续 $\Leftrightarrow \forall x_n \in I, x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

7. 试证明: 定义在区间 I 上的严格单调增(减)函数 f 的反函数 f^{-1} 必定存在, 而且也是严格单调增(减)的.

8. 设函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in I$ 连续, 且 $f(x_0) > 0$. 证明: 存在 x_0 的一个邻域, 在该邻域内, $f(x) \geq q > 0$.

9. 讨论下列函数在指定点处的连续性. 若是间断点, 说明它的类型:

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = \sqrt{x}, & x=1, \quad x=0; \\ (2) f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}, & x=2; \\ (3) f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}, & x=3; \\ (4) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} & x=0. \end{array}$$

10. 讨论下列函数的连续性. 若有间断点, 说明间断点的类型:

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ x^2+1, & x \geq 0; \end{cases} & (2) f(x) = e^{x-\frac{1}{x}}; \quad (3) f(x) = \frac{x}{\ln x}; \\ (4) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 2, & x=0; \end{cases} & (5) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2-1}, & x < 0, \\ \frac{x^2+1}{\cos \frac{\pi}{2}x}, & x \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

11. 求下列函数的极限:

$$\begin{array}{ll} (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x}{\sqrt{x+\ln x}}; & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}; \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{e^{2x}}{\sin x} \right); & (4) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}. \end{array}$$

12. 证明:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0}; \quad (2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^a - x_0^a}{\Delta x} = ax_0^{a-1} (x_0 > 0, a \in \mathbb{R}).$$

13. 试确定常数 a, b , 使下列函数在 $x=0$ 处连续:

$$(1) f(x) = \begin{cases} a+x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0; \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x < 0, \\ a + \sqrt{x}, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \\ \frac{1}{bx} \ln(1-3x), & x < 0. \end{cases}$$

14. 证明下列各题:

- (1) 方程 $x 2^x = 1$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个根;
- (2) 方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 在 $(1, 2.7)$ 内至少有一个根;
- (3) 设 $f \in C[a, b]$, 若 f 在 $[a, b]$ 上恒不为 0, 则 f 在 $[a, b]$ 上恒为正(或负);
- (4) 方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内至少有一个根.

15. 用介值定理证明: 当 n 为奇数时, 方程

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

至少有一个根, 其中 $a_i \in \mathbb{R}$ 为常数 ($i = 0, 1, \dots, n$), $a_n \neq 0$.

16. 证明推论 6.1.

(B)

1. 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足可加性, 即对任何 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 并且 f 在 $x=0$ 处连续, 证明 f 在 \mathbb{R} 上连续.

2. 设 $f \in C[a, +\infty)$, 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明 f 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

3. 设 $f \in C(a, b)$, 并且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在(包括有无穷极限)且异号, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

4. 设 $f \in C[a, b]$, 并且 $\forall x \in [a, b], \exists y \in [a, b]$, 使 $f(y) = \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = 0$.

5. 设 $f \in C[a, b]$, $\{x_n\} \subseteq [a, b]$ 是任一数列. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$, 证明方程 $f(x) = A$ 在 $[a, b]$ 内必有一个根.

6. 设 $f \in C(-\infty, +\infty)$, 并且 f 是奇函数, 证明方程 $f(x) = 0$ 至少有一个根. 若 f 是严格单调的, 则 $x=0$ 是它的唯一根.

7. 证明: 若 $a_n > |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$, 则方程

$$a_n \cos nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + a_0 = 0$$

在 $(0, 2\pi)$ 内至少有 $2n$ 个根.

8. 证明: 若 f 在有限区间 I 上一致连续, 则 f 在 I 上有界.

综合练习题

1. 设有一对新出生的兔子, 两个月之后成年, 从第三个月开始, 每个月产一对小兔, 且新生的每对小兔也在出生两个月之后成年, 第三个月开始每月生一对小兔. 假定出生的兔子均无死亡, (1)问一年后共有几对兔子? (2)问 n 个月之后有多少对兔子? (3)若 n 个月之后有 F_n 对兔子, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$ (题中所讲的一对兔子均是雌雄异性的).

说明: 该问题是意大利数学家 Fibonacci 于十三世纪初(1202 年)研究兔子繁殖过程中数量变化规律时提出来的, 其中的数列 F_n 被后人称为 Fibonacci 数列. 有趣的是, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ 正是“黄金分割”数, 在优选法及许多领域得到很多新的应用.

2. 所谓蛛网模型是在研究市场经济的一种循环现象中提出来的, 现以猪肉的产量与价格之间的关系为例来说明. 若去年猪肉的产量供过于求, 它的价格就会降低; 价格降低会使今年养猪者减少, 使猪肉的产量供不应求, 于是肉价上扬; 价格上涨又使明年猪肉产量增加, 造成新的供过于求, 如此循环下去. 设 x_n 为第 n 年的猪肉产量, y_n 为其价格, 由于当年的产量确定当年价格, 所以 $y_n = f(x_n)$, 称为需求函数, 而第 n 年的价格又决定第 $n+1$ 年的产量, 故 $x_{n+1} = g(y_n)$, 称为供应函数. 产销关系呈现出如下过程:

$$x_1 \rightarrow y_1 \rightarrow x_2 \rightarrow y_2 \rightarrow x_3 \rightarrow y_3 \rightarrow x_4 \rightarrow \cdots,$$

在平面直角坐标系中描出下面的点列:

$$\begin{aligned} &P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_1), \\ &P_3(x_2, y_2), \quad P_4(x_3, y_2), \\ &\cdots, \quad \cdots, \\ &P_{2k-1}(x_k, y_k), \quad P_{2k}(x_{k+1}, y_k) \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

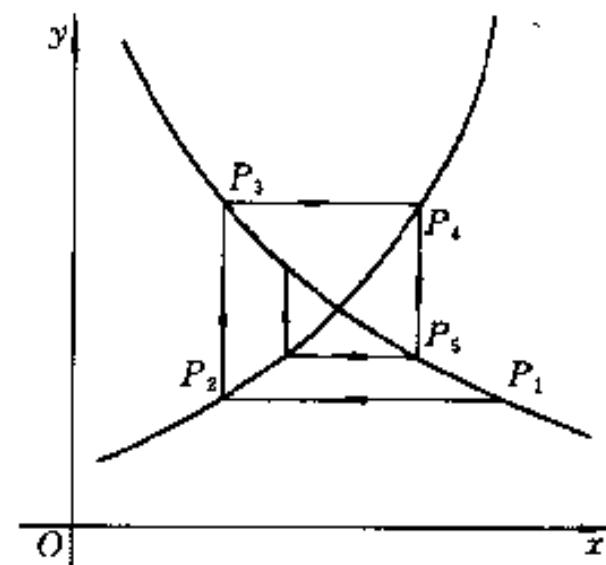
其中所有的 P_{2i} 都满足 $x = g(y)$, P_{2i-1} 满足 $y = f(x)$, 如图所示. 由于这种关系很像一个珠网, 所以称为蛛网模型.

据统计, 某城市 1991 年猪肉产量为 30 万吨, 肉价为 6 元/kg; 1992 年猪肉产量为 25 万吨, 肉价为 8 元/kg. 已知 1993 年的猪肉产量为 28 万吨. 若维持目前的消费水平和生产模式, 并假定猪肉当年的价格与当年的产量之间、来年的产量与当年的价格之间都是线性关系.

(1) 试确定需求函数 $y_n = f(x_n)$ 和供应函数 $x_{n+1} = g(y_n)$;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}$;

(3) 问若干年后猪肉的产量与价格是否会趋于稳定? 若能够稳定, 求出稳定的产量和价格.



(第 2 题图)

第二章 一元函数微分学及其应用

在第一章中,我们系统地讨论了极限理论,并用极限研究了函数的连续性与间断性.从本章开始将要介绍的一元函数的微分学和积分学,就是利用极限理论从局部和整体两个方面对函数变化性态进行的更深入的研究.本章讨论的微分学主要研究函数的局部性态,内容包括:(1) 导数与微分的概念和计算方法;(2) 利用导数来研究函数的单调性、极值和凸性等.在研究函数这些特性的时候,以 Lagrange 定理为中心的微分中值定理和 Taylor 公式起着非常重要的作用;(3) 利用函数的微分和 Taylor 公式来计算函数的近似值.微分是在局部用线性函数来近似替代非线性函数,而 Taylor 公式则是用高次多项式来近似替代非线性函数,这是数学中一个值得重视的思想方法.

第一节 导数的概念

本节通过几个实例引入导数的定义,讨论导数的几何意义以及可导与连续的关系,最后举例说明导数在各种不同学科中的具体含义.

1.1 导数的定义

在绪论中已经讲过变速直线运动的瞬时速度问题.当时间的改变量 Δt 很小时,变速直线运动可以近似看成匀速直线运动,在从 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 的时间间隔内物体的平均速度

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

就是物体在 t_0 时刻瞬时速度 $v(t_0)$ 的近似值. Δt 越小,这个近似值越精确,从而将求变速直线运动物体的瞬时速度归结为求平均速度的极限,即

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

还有很多实际问题都归结为求同样形式的极限,下面再举两个例子.

例 1.1 细棒的线密度问题

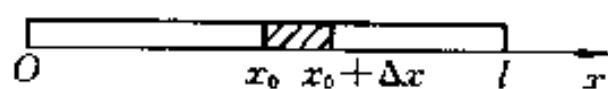
设有一物质非均匀分布的细棒,长为 L ,试求细棒上各点的线密度.

大家知道,如果细棒上物质的分布是均匀的,就是说细棒上单位长度的质量都相等,那么细棒上各点的线密度相同,只要用下列公式

$$\rho = \frac{M}{l}$$

就能求得,其中 M 为细棒的总质量.现在细棒上的物质是非均匀分布的,细棒上不同部位处单位长度的质量不相等,自然不能用上述公式来计算细棒上各点的线密度.为了求出细棒上各点的线密度,我们将细棒置于 x 轴上,左端点为坐标原点(图 1.1).设从左端点到 x 点一段细

棒的质量为



$$m = m(x), x \in [0, l],$$

图 1.1

则细棒从点 x_0 到点 $x_0 + \Delta x$ 那一小段的质量为

$$\Delta m = m(x_0 + \Delta x) - m(x_0),$$

从而

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}$$

就表示该小段细棒的平均密度.平均密度只是该小段内细棒上各点线密度的近似值,还不能表示各点线密度的精确值.但是,如果质量 m 随 x 的变化是连续的,那么, Δx 越小,上述近似值的精确度越高.因此,如果 $\Delta x \rightarrow 0$ 时平均密度的极限存在,那么该极限值就规定为细棒在 x_0 处的线密度,即

$$\rho(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}. \quad (1.2)$$

例 1.2 平面曲线的切线斜率问题

在很多实际问题中都提出求曲线的切线斜率问题,怎样定义曲线在一点处的切线呢?

设 Γ 为一条连续的平面曲线,它的方程是 $y = f(x)$ (图 1.2), f 是连续函数, A 是 Γ 上任一点, B 为另一点,联结 A 与 B 得一割线 AB ,它的倾角为 β ,则

$$\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

就是割线 AB 的斜率.当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,点 B 就沿着 Γ 趋向点 A ,割线 AB 将绕着点 A 转动.如果它的极限位置存在,设为直线 AT ,那么 AT 就称为曲线 Γ 在点 A 处的切线.

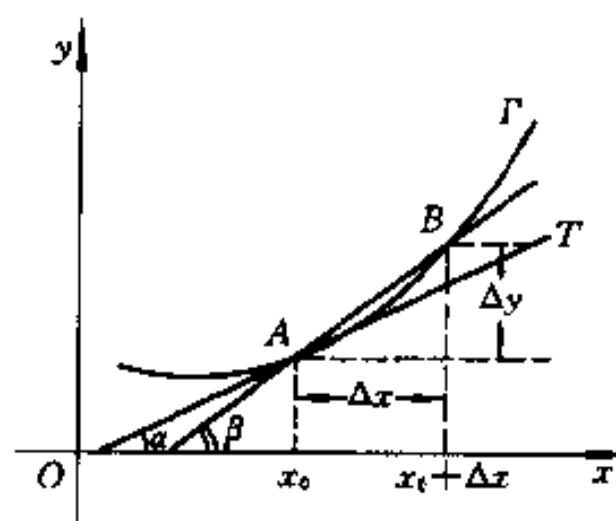


图 1.2

因此,当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,割线 AB 就转化成切线 AT ,割线的斜率就转化为曲线 Γ 在点 A 处切线的斜率:

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1.3)$$

由(1.1)~(1.3)式可见,很多不同实际问题的解决都归结为求一种形式相同的极限,即当自变量的改变量 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,函数改变量 Δy 与自变量改变量 Δx 之比的极限.因此,人们舍弃这些问题的具体含义,抽象出如下的定义.

定义 1.1 (导数) 设函数 f 定义在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内,在此邻域内,当自变量在 x_0 处有改变量 Δx 时,相应地函数有改变量 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.若当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时这两个改变量之比的极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.4)$$

存在,则称函数 f 在 x_0 处可导,并称该极限值为 f 在 x_0 处的导数,记作 $f'(x_0)$ 或 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$.

如果函数用 $y = f(x)$ 来表示,它在 x_0 处的导数也可以记作 $y' \Big|_{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$.此时,若记 $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,则(1.4)式也可以写成下面的形式:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

若极限(1.4)不存在,则称 f 在 x_0 处不可导,若极限(1.4)为无穷大,则称 f 在 x_0 处的导数为无穷大.

根据导数的定义,(1.1)~(1.3)式可以分别表示为:

$$v(t_0) = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad \rho(x_0) = \left. \frac{dm}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad \tan \alpha = f'(x_0).$$

也就是说,求瞬时速度、细棒在一点的线密度以及曲线在一点的切线斜率都归结为求某个函数在一点处的导数.

利用单侧极限可以定义函数的单侧导数.若右(左)极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

存在,则称此极限值是 f 在 x_0 处的右(左)导数,并称 f 在 x_0 右(左)可导,记作

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right). \quad (1.5)$$

利用极限与左、右极限的关系立即可得：

函数 $f: U(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$ 在 x_0 处可导的充要条件为 f 在 x_0 处的左、右导数都存在，并且 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

如果函数 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ 在 I 的每一点都可导（若 I 包含其端点，则在端点处是指在左端点右可导，在右端点左可导），则称函数 f 在区间 I 上可导。此时，对于 I 的每一点 x ，都对应着 f 的一个导数 $f'(x)$ ，因而 f 的导数 $f'(x)$ 是定义在 I 上的一个新函数，即

$$f': I \rightarrow \mathbf{R},$$

称它为 f 在 I 上的导函数，记作 $\frac{df}{dx}$ 或 $\frac{dy}{dx}$ 。不难看出，函数 f 在一点 x_0 处的导数

就是 f 的导函数 f' 在点 x_0 处的值，即 $f'(x_0) = f'(x) \Big|_{x=x_0}$ 。今后，在不致混淆的情况下，简称导函数为导数。

例 1.3 证明下列函数的导数公式：

(1) $(C)' = 0$ (C 为常数);	(2) $(e^x)' = e^x$ ($-\infty < x < +\infty$);
(3) $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1, -\infty < x < +\infty$);	
(4) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($\alpha \in \mathbf{R}, 0 < x < +\infty$);	
(5) $(\sin x)' = \cos x$ ($-\infty < x < +\infty$);	
(6) $(\cos x)' = -\sin x$ ($-\infty < x < +\infty$).	

证 利用导数的定义以及有关的极限运算法则很容易求得本题中的导数公式。例如，公式(2)、(4)可由第一章习题 1.6(A)中的第 12 题的结果得到，公式(5)、(6)可由第一章习题 1.4(A)中的第 12 题得到。下面仅证明公式(1)与(3)。由导数的定义，

$$(1) (C)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

$$(3) (a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

令 $a^{\Delta x} - 1 = t$ ，则 $\Delta x = \log_a(1+t) = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}$ 。易见，当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， $t \rightarrow 0$ ，故

$$(a^x)' = a^x \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \ln a = a^x \ln a,$$

其中最后一个等式利用了无穷小的等价代换 $\ln(1+t) \sim t (t \rightarrow 0)$. ■

例 1.4 考察函数 $f(x) = |x|, x \in (-\infty, +\infty)$ 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

解 由于

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

所以,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

从而 $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, 故 f 在 $x_0 = 0$ 处不可导. ■

在讨论分段函数与抽象函数(指未给出具体数学表达式的函数)可导性的时候,往往需要利用导数(包括单侧导数)的定义.

例 1.5 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处的连续性与可导性.

解 根据连续性的定义,由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以该函数在 $x = 0$ 处是连续的. 又因为

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\sin \frac{1}{\Delta x}$ 的极限不存在,故该函数在 $x = 0$ 处不可导. ■

例 1.6 设函数 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ 在 $x = 1$ 处可导,且

$$f(xy) = yf(x) + xf(y), \quad \forall x, y \in (0, +\infty). \quad (1.6)$$

证明: 函数 f 在 $(0, +\infty)$ 内处处可导,并且 $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + f'(1)$.

证 证明此题的关键在于如何充分利用条件(1.6). 根据导数的定义,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

为了利用条件(1.6), 将 $f(x + \Delta x) - f(x)$ 改写成

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f\left[x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right] - f(x),$$

将 $1 + \frac{\Delta x}{x}$ 看成(1.6)式中的 y , 从而可得

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{f\left[x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right] - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)f(x) + xf\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x)}{x} + \frac{f\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}. \end{aligned}$$

在(1.6)式中取 $x = y = 1$, 又得 $f(1) = 0$. 于是

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - f(1)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{f(x)}{x} + f'(1). \blacksquare$$

1.2 导数的几何意义

根据例 1.2 的讨论, 如果函数 f 在 x_0 处可导, 那么它在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上就表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

如果函数 f 在 x_0 处不可导, 但在该点处的单侧导数存在, 那么, 类似于例 1.2 的讨论可知, 左导数 $f'_-(x_0)$ (右导数 $f'_+(x_0)$) 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的左侧(右侧)切线的斜率(图 1.3). 若 f 在 x_0 处的左、右导数存在且相等, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 A 处的左侧和右侧切线合而为一, 即只有一条切线.

如果函数 f 在 x_0 处连续, 但导数 $f'(x_0)$ 为无穷大(含正、负无穷大), 那

么曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾角为 $\frac{\pi}{2}$, 因此, 它在点 A 处的切线平行于 y 轴(图 1.4).

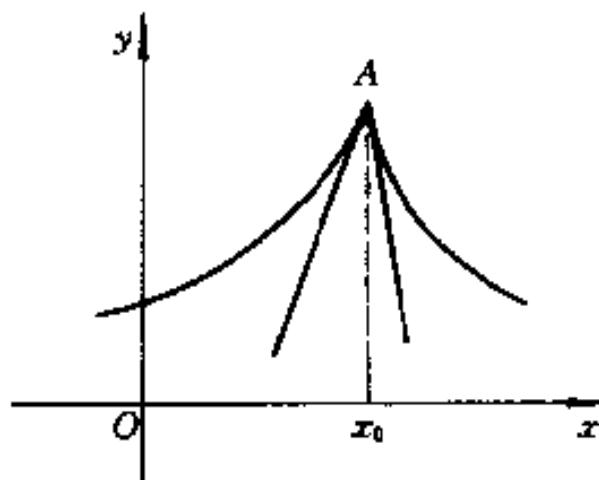


图 1.3

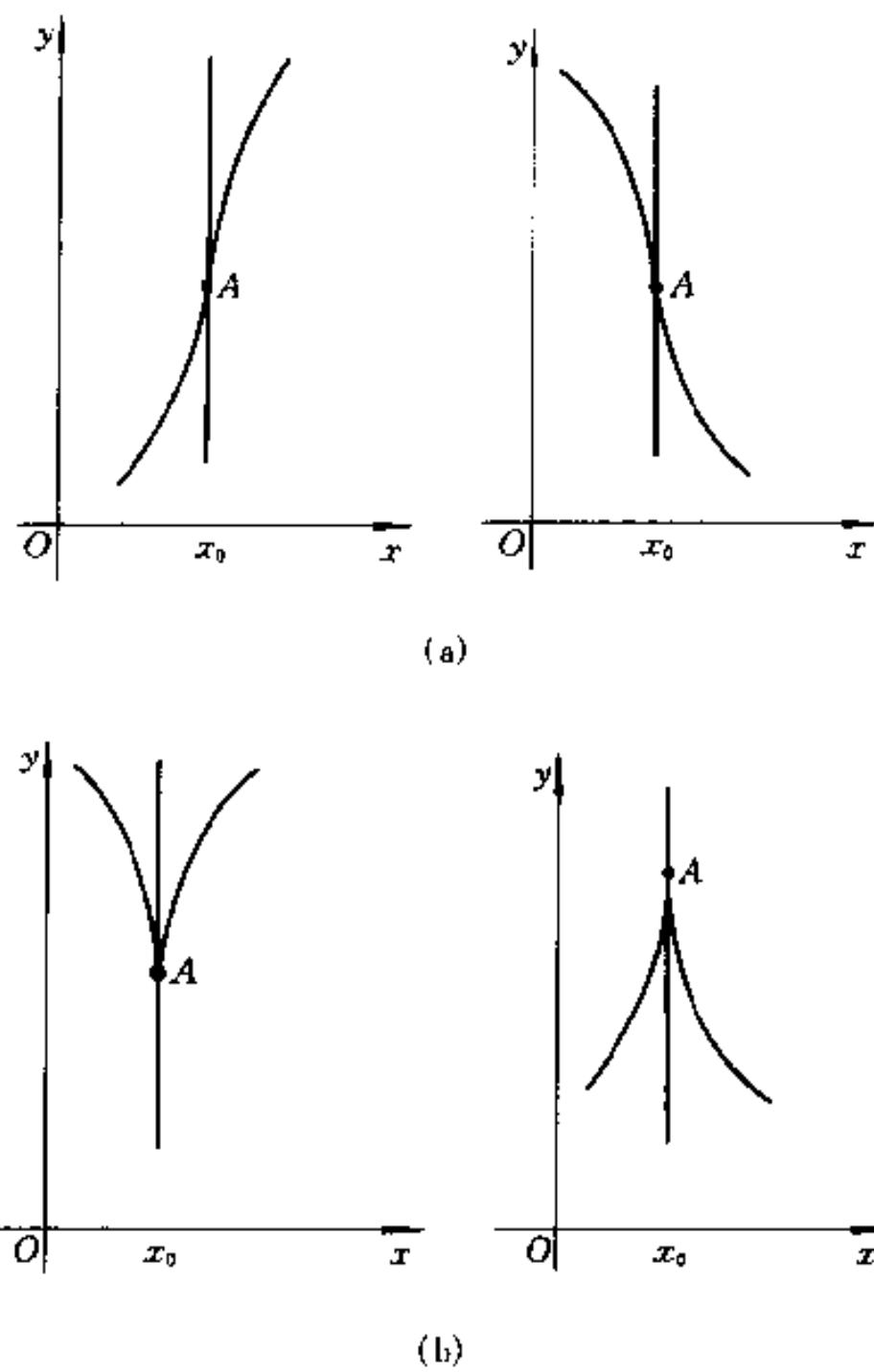


图 1.4

例 1.5 中的函数 f 在 $x = 0$ 处不可导.

从几何上来看(图 1.5), 当曲线 $y = f(x)$ 上的点沿曲线向原点移动时, 割线在直线 $y = x$ 与 $y = -x$ 之间摆动, 没有确定的极限位置, 因此, 该曲线在原点 $(0,0)$ 处没有切线.

根据导数的几何意义及平面直线的点斜式方程, 可以得到曲线 $y = f(x)$ 在 $A(x_0, f(x_0))$ 点处的切线方程

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1.7)$$

和法线方程

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (1.8)$$

例 1.7 抛物镜面的聚光问题

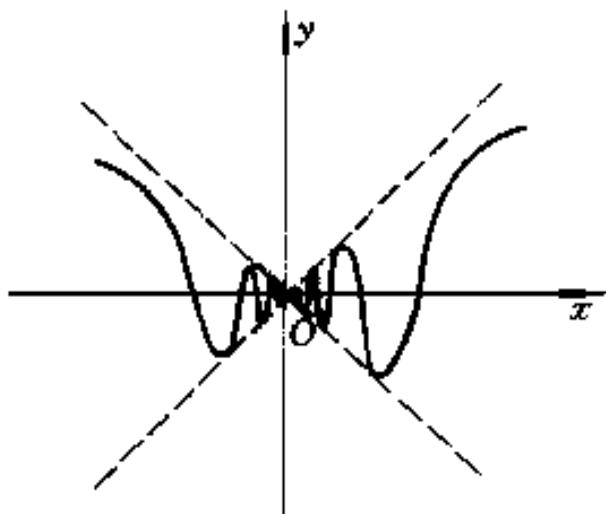


图 1.5

探照灯、反射式天文望远镜以及日常生活中使用的手电筒，它们的反光镜都采用所谓旋转抛物面，即抛物线绕对称轴旋转一周而成的曲面。这种反光镜有一个很好的光学特性，就是若把光源放在抛物线的焦点处，光线经镜面反射后能变成与对称轴平行的光束（图 1.6(a)），下面我们来证明这个性质。

考察抛物线所在平面并建立坐标系如图 1.6(b) 所示。设抛物线的方程为 $y^2 = 4x$ ，它的焦点为 $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ ，仅考虑它的一支 $y = \sqrt{x}$ ， $P(x, y)$ 是这支抛物线上任意一点。

根据光学原理，光线的入射角应等于反射角。设入射角为 β_1 ，过 P 作平行于 Ox 轴的直线 PM （图 1.6(b)），只要证明 $\beta_1 = \beta_2$ 就行了。过 P 点作抛物线的切线 PT ，问题就转化为证明 $\alpha_1 = \alpha_2$ 。

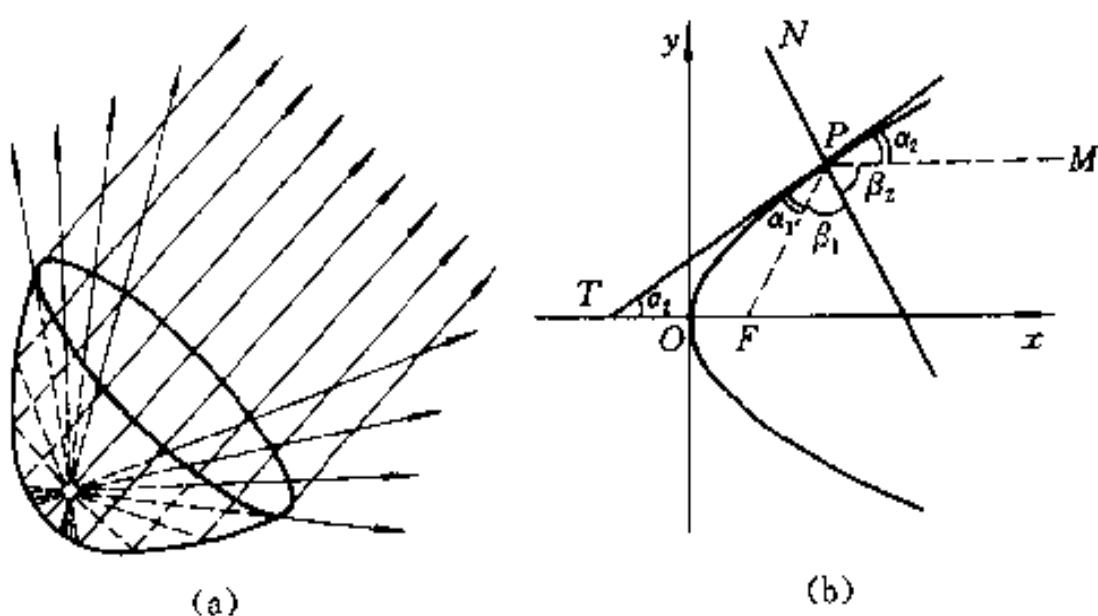


图 1.6

根据导数的几何意义，

$$\tan \alpha_2 = \frac{dy}{dx} = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

从而得 $\alpha_2 = \arctan \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 。又焦半径 FP 的斜率为

$$k = \frac{y - 0}{x - \frac{1}{4}} = \frac{4y}{4x - 1},$$

利用两直线的夹角公式便得

$$\tan \alpha_1 = \frac{\frac{4y}{4x - 1} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + \frac{4y}{4x - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

于是 $\alpha_1 = \arctan \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 所以 $\alpha_1 = \alpha_2$. ■

1.3 可导与连续的关系

根据导数的定义, 很容易证明下面的定理.

定理 1.1 设函数 $f: U(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$ 在 x_0 处可导, 则该函数必在 x_0 处连续.

证 由可导的定义

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

从而有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + o(\Delta x), \quad (1.9)$$

其中 $\Delta x \neq 0$, 并且 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} o(\Delta x) = 0$. 等式两边同乘以 Δx , 得

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\Delta x,$$

或

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad (1.10)$$

其中 $o(\Delta x) = o(\Delta x)\Delta x$, 所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 这就说明 f 在 x_0 处连续. ■

用类似的方法易证, 若 f 在 x_0 处右(左)可导, 则 f 在 x_0 处必右(左)连续(留作习题). 因此, 定理 1.1 对于区间也成立, 即若 f 在区间 I 上可导, 则 f 在 I 上连续. 但是它的逆定理不成立, 即若 f 在某点连续, 则 f 在该点不一定可导. 例 1.4 与例 1.5 中的函数在 $x_0 = 0$ 处都连续, 但在 $x_0 = 0$ 处却不可导. 不仅如此, 数学家还举出了在某一区间上处处连续但处处不可导的函数的例子. 由于这些例子比较复杂, 本书不能介绍. 作为定理 1.1 的应用, 下面再举一例.

例 1.8 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$ 证明函数 f 仅在 $x = 0$ 处连续且可导.

证 先证 f 在 $x = 0$ 处连续且可导. 由于

$$\left| \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \right| = \left| \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \right| \leq \left| \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} \right| = |\Delta x|,$$

或

$$-|\Delta x| \leq \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \leq |\Delta x|,$$

由夹逼原理得知 $f'(0) = 0$, 故 f 在 $x = 0$ 处可导, 由定理 1.1 知 f 在 $x = 0$ 处也

连续.

再证 f 在其余各点既不可导也不连续. 设 $x_0 \neq 0$, 根据有理数与无理数的稠密性, 可取 $x_n \in \mathbf{Q}, x_n \rightarrow x_0, y_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, y_n \rightarrow x_0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = x_0^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0.$$

由于 $x_0 \neq 0$, 故由 Heine 定理知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在. 因此, f 在 x_0 处不连续, 根据定理 1.1, f 在 x_0 处也不可导.

1.4 导数在其他学科中的含义——变化率

导数在许多学科中都有重要的应用, 为了把导数概念应用于其他学科领域, 还应对导数的概念作深入的剖析. 根据导数定义, 首先要理解 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的含义.

对于线性函数 $y = kx + b$ 而言, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示 x 改变一个单位量时 y 的改变量, 它显然就是常数 k . k 的大小反映了 y 随 x 变化的快慢程度, 称为 y 对 x 的变化率. 因此, 线性函数的导数就是它的变化率.

一般, 如果 $y = f(x)$ 是非线性函数, 那么

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

不是常数, 它是随 x_0 而变的, 即 y 随 x 变化的快慢程度随 x_0 的不同而不同. 因此, 为了精确地刻画这种快慢程度, 需要讨论它在每一点 x_0 处的变化率. 由于 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 仅表示长为 $|\Delta x|$ 的区间上 y 对 x 的平均变化率, 它只是该函数在这个区间上各点处变化率的近似值. 所以, 令 $\Delta x \rightarrow 0$, 通过取极限得到的导数 $f'(x_0)$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就是 $y = f(x)$ 在 x_0 处的变化率.

由上面的分析得知, 函数在一点的导数就表示它在该点的变化率. 因此, 凡是研究变化率的问题, 都需要利用导数去解决. 变化率(导数)在不同学科中的具体含义不尽相同. 例如, 在变速直线运动中, 位移 s 对时间 t 的变化率 $\frac{ds}{dt}$ 是瞬时速度; 在物质非均匀分布的细棒上, 质量 m 对棒上各点坐标 x 的变化率 $\frac{dm}{dx}$ 是细棒的线密度. 下面再举一些在不同学科中变化率的例子.

例 1.9 电流强度

我们知道, 在直流电路(恒定电流)中, 导线中通过的电量 $q = q(t)$ 随时间 t 的变化是均匀的, 因此单位时间内通过导线的电量 $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ (即电量对时间的变化率)

是常数,它就是电流强度.若电路中的电流是变动的,即电量 $q = q(t)$ 随时间 t 的变化是非均匀的,则

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$$

仅表示 Δt 时间内导线中的平均电流强度(即 q 对 t 的平均变化率).为了求 t_0 时刻的电流强度 $i(t_0)$,就要求 t_0 时刻 $q = q(t)$ 对 t 的变化率,所以

$$i(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t} = q'(t_0).$$

例 1.10 生物种群的增长率

设 $N = N(t)$ 表示某生物种群(例如鱼类等)在 t 时刻个体的数目.如果 $N(t)$ 是 t 的线性函数,就是说,个体的数目 $N(t)$ 随时间 t 均匀变化,那么单位时间内种群增加的个体数目

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t_0 + \Delta t) - N(t_0)}{\Delta t}$$

就表示种群的增长率.但一般说来,种群个体的数目 $N(t)$ 是随时间 t 非均匀变化的,这时,上式仅表示 Δt 时间内种群的平均增长率,也就是 N 对 t 的平均变化率.为了预测若干年后该种群个体数量的变化,必须确定任何 t_0 时刻 $N = N(t)$ 对 t 的变化率,即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t_0 + \Delta t) - N(t_0)}{\Delta t}.$$

它就是函数 $N = N(t)$ 在 t_0 时刻对 t 的导数 $N'(t_0)$,在生物学中,称为 t_0 时刻种群的增长率. ■

读者可能注意到,种群的个体数量 $N = N(t)$ 只能取正整数,因此 $N = N(t)$ 不是连续函数,怎能求导数呢?在用数学方法解决实际问题的时候,往往需要根据某种要求对问题进行必要的数学处理,建立问题的近似模型或理想模型.在上面的问题中,由于很多生物种群的繁殖是世代重迭的,而且种群个体的数量很大,因此,当时间改变量 Δt 很小时,由出生和死亡引起的种群个体数量的变化相对于个体总数来说也很小,所以,可把 $N = N(t)$ 近似看成是连续函数.事实上,利用 $\frac{dN}{dt}$ 作为增长率在研究很多生物种群的生态发展(包括研究人口的增长)中取得了令人满意的结果.这种情况在经济学中也经常碰到.

例 1.11 经济学中的边际成本

设 $p = p(x)$ 表示生产 x 个某种产品(例如轴承)的总成本.如果成本 p 随产品数量 x 是均匀变化的,那么 $\frac{p}{x}$ 就表示生产单位产品所需要的成本.实际上,

影响总成本的因素很多,关系也很复杂,因此, $p = p(x)$ 一般是非线性函数,产品的总成本 p 是随 x 非均匀变化的. 此时,

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p(x_0 + \Delta x) - p(x_0)}{\Delta x}$$

仅表示生产 Δx 个产品的平均成本. 为了确定是否要扩大(或缩小)该产品的生产规模, 必须确定该产品在任意产量 x_0 时的成本, 也就是要求 $x = x_0$ 时函数 $p = p(x)$ 对 x 的变化率

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x_0 + \Delta x) - p(x_0)}{\Delta x},$$

它就是函数 $p = p(x)$ 在 x_0 的导数 $p'(x_0)$, 在经济学中称为边际成本. ■

只要稍微留心就会发现, 在实际问题中需要应用变化率的例子很多很多. 读者应再列举一些应用实例, 并把它们归结为变化率问题.

习题 2.1

(A)

1. 用导数定义求下列函数的导数:

$$(1) f(x) = \cos x; \quad (2) f(x) = \ln x;$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \text{求 } f'(0); \quad (4) f(x) = x|x|, \text{求 } f'(0).$$

2. 已知函数 f 在 x_0 处可导, 求下列极限:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \quad (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) \right]; \quad (4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x - x_0}.$$

3. 设 f 是偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 证明 $f'(0) = 0$.

4. 设函数 φ 在 $x = a$ 处连续, $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, 证明: 函数 f 在 $x = a$ 处可导; 若 $g(x) = |x - a|\varphi(x)$, 函数 g 在 $x = a$ 处可导吗?

5. 试讨论函数的左(右)可导与左(右)连续的关系.

6. 问曲线 $y = x^{3/2}$ 上哪一点的切线与直线 $y = 3x - 1$ 平行?

7. 试确定常数 a, b 的值, 使函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

在 $x = 1$ 处连续且可导.

8. 已知

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

求 $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, 问 $f'(0)$ 是否存在.

9. 设物体绕定轴旋转, 转角 θ 是时间 t 的函数 $\theta = \theta(t)$. 若旋转是非匀速的, 试确定物体在 t_0 时刻的角速度.

10. 设质点在力的作用下所作的功 $W = f(t)$, 若功 W 随时间 t 的变化是非均匀的, 试求 t_0 时刻的瞬时功率.

11. 设 $N = N(x)$ 表示 x 个劳动力所生产的某产品的数量, 若每个劳动力生产的产品数量相同, 则 $\frac{N}{x}$ 是常数, 称为劳动生产率. 实际上, 产品的产量 N 并不是随劳动力 x 的增加而均匀增长的. 试求劳动力数量为 x_0 时的劳动生产率, 称为边际劳动生产率.

12. 证明: 双曲线 $xy=1$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形面积都等于 2.

13. 设有可导函数 $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $\forall x \in (a, b), f(x) \leq g(x)$, 则 $\forall x \in (a, b), f'(x) \leq g'(x)$, 对吗?

(B)

1. 若函数 f 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 试证 f 在 $x=0$ 处可导.

2. 设 f 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, $f(x) \neq 0, f'(0)=1$, 且

$$\forall x, y \in (-\infty, +\infty), \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

证明: f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) = f(x)$.

3. 设函数 f 在 $x=a$ 处可导, $f(a) \neq 0$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n$.

4. 设曲线 $y=f(x)$ 在原点与 $y=\sin x$ 相切, 试求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} \sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}$.

5. 设 $n \in \mathbb{N}_+$, 试讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性以及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

6. 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是任一函数, $x_0 \in I$, 证明 f 在 x_0 处可导的充要条件是: 存在一个函数 $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, 使

$$(1) \quad f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad \forall x \in I;$$

(2) φ 在 x_0 处连续.

此时, $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

7. 证明: Dirichlet 函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的任一点 x 处都不可导.

8. 设函数 $f, g, h: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足下列条件:

$$(1) f(x_0) = g(x_0) = h(x_0), f'(x_0) = g'(x_0);$$

$$(2) \forall x \in U(x_0), f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

证明: 函数 h 在 x_0 处可导, 并且 $h'(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0)$.

第二节 求导的基本法则

前一节中, 已经说明了导数的概念及其应用的广泛性, 因此, 怎样求一个已知函数的导数就是急待解决的重要问题. 虽然根据导数的定义可以求一些简单函数的导数, 但是, 当函数比较复杂时, 用定义来直接计算导数就相当困难了. 本节将利用极限理论推导出一些求导的基本法则, 特别是复合函数的求导法则, 从而使导数的计算系统化, 简单化.

2.1 函数和、差、积、商的求导法则

定理 2.1 (导数的有理运算法则) 设函数 $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ 都在 $x \in I$ 可导, 则它们的和、差、积、商(分母为零的点除外)都在 x 可导, 且

$$(1) (u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2) (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} (v(x) \neq 0).$$

特别有: $(cu)'(x) = cu'(x)$ ($c \in \mathbb{R}$ 为常数),

$$\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}.$$

证 仅对(2)及(3)加以证明, 其余留给读者.

(2) 设 $y = u(x)v(x)$, 则

$$\begin{aligned} \Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) \\ &\quad u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) \\ &\quad + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) \\ &= v(x + \Delta x)\Delta u + u(x)\Delta v. \end{aligned}$$

根据导数的定义,

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

已知 v 在 x 可导, 由定理 1.1, v 在 x 必连续, 故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$, 因而

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

(3) 设 $y = \frac{1}{v(x)}$, 则

$$\Delta y = \frac{1}{v(x + \Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = -\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{v(x)v(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta v}{v(x)v(x + \Delta x)}.$$

已知 v 在 x 可导, 故必在 x 连续, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$, 注意到 $v(x) \neq 0$, 从而

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) : \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \frac{1}{v(x)v(x + \Delta x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

故由(2)得

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{v}\right)'(x) &= u'(x) \frac{1}{v(x)} + u(x) \left(\frac{1}{v}\right)'(x) \\ &= \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \end{aligned}$$

定理中的(1)与(2)可以推广到有限个函数的情形.

例 2.1 已知 $y = 2^x + \sqrt{x} \ln x$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 根据定理 2.1 的(1), (2)及习题 2.1(A)的第 1 题得

$$\frac{dy}{dx} = (2^x)' + (\sqrt{x})' \ln x + \sqrt{x} (\ln x)' = 2^x \ln 2 + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

例 2.2 求正切函数 $y = \tan x$ 和余切函数 $y = \cot x$ 的导数.

解 根据两个函数商的求导法则, 我们有

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \end{aligned}$$

故得正切函数的导数公式:

$$(\tan x)' = \sec^2 x \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right).$$

类似可得余切函数的导数公式:

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

例 2.3 求正割函数 $y = \sec x$ 与余割函数 $y = \csc x$ 的导数.

解 根据定理 2.1, 我们有

$$\begin{aligned} (\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x, \end{aligned}$$

故得正割函数的导数公式:

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}).$$

类似可得余割函数的导数公式:

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}).$$

2.2 复合函数的求导法则

定理 2.2 (链式法则) 设函数 $u = g(x)$ 在 x 处可导, 函数 $y = f(u)$ 在对应的 u 处可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在 x 处可导, 并且

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x), \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}. \quad (2.1)$$

证 由于函数 $y = f(u)$ 在 u 处可导, 由(1.9)式,

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u) \quad (\text{其中 } \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0).$$

若 $\Delta u \neq 0$, 则

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u. \quad (2.2)$$

若 $\Delta u = 0$, 则 $\alpha(\Delta u)$ 无意义, 由于此时 $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = 0$, 规定当 $\Delta u \rightarrow 0$ 时, $\alpha(\Delta u) = 0$, 则(2.2)式仍然成立. 于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

已知 $u = g(x)$ 在 x 处可导, 它在 x 处必连续, 故当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta u \rightarrow 0$, 从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0$. 这样, 上式就变为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

定理得证. ■

复合函数求导公式(2.1)可以推广到任意有限个函数复合的情形. 使用该公式时, 关键在于弄清函数的复合关系, 善于将一个复杂函数分解为几个简单函数的复合, 由外向内, 一层一层地逐个求导, 不能脱节, 不能遗漏. 因此常把这个法则形象地叫做链式法则.

例 2.4 设 $y = \sin(2x + 3)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 由于函数 $y = \sin(2x + 3)$ 可以看成是由 $y = \sin u$ 与 $u = 2x + 3$ 复合而成, 所以按照公式(2.1), 我们有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 2 = 2\cos(2x + 3). \quad \blacksquare$$

例 2.5 求双曲函数的导数.

解 先求双曲正弦函数 $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的导数. 根据定理 2.1,

$$(\sinh x)' = \frac{1}{2}[(e^x)' - (e^{-x})'],$$

又 $u = e^{-x}$ 可以看成是 $u = e^t$, 与 $t = -x$ 的复合函数, 故

$$\frac{du}{dx} = (e^{-x})' = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^t \cdot (-1) = -e^{-x},$$

所以

$$(\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x.$$

类似可得 $(\cosh x)' = \sinh x$.

又

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

于是, 我们得到双曲函数的导数公式如下:

$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$	■
($-\infty < x < +\infty$)	

上面两个例子的计算我们写得比较详细. 一旦熟练之后, 就不必写出中间变量, 只要认清函数的复合层次, 默记在心, 然后一步一步逐层求导就行了.

例 2.6 设 $y = \sqrt[3]{(1 - 2x^2)}$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=-1}$.

解 根据链式法则,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= ((1 - 2x^2)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}(1 - 2x^2)^{-\frac{2}{3}}(1 - 2x^2)' \\ &= -\frac{4x}{3\sqrt[3]{(1 - 2x^2)^2}},\end{aligned}$$

所以

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=-1} = -\frac{4x}{3\sqrt[3]{(1 - 2x^2)^2}} \Big|_{x=-1} = \frac{4}{3}.$$

例 2.7 设 $y = \ln \tan \frac{x}{2}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 这个函数是由三个简单函数复合而成的, 仍然可以利用链式法则来求导.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \left(\tan \frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)' \\ &= \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin x} = \csc x.\end{aligned}$$

例 2.8 设 $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 根据链式法则,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (e^{\sin^2 \frac{1}{x}})' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\sin^2 \frac{1}{x} \right)' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \left(\sin \frac{1}{x} \right)' \\ &= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \right)' \\ &= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2} e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \sin \frac{2}{x}.\end{aligned}$$

2.3 反函数的求导法则

定理 2.3 (反函数求导法则) 设区间 I 上的严格单调连续函数 $x = f(y)$ 在点 y 处可导, 且 $f'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在对应的点 x 处可导, 并且

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}, \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad (2.3)$$

证 由第一章定理 6.3 及其前面的说明, f 的反函数 f^{-1} 也是严格单调的连续函数. 故当 $\Delta x \neq 0$ 时, $\Delta y = f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(x) \neq 0$, 并且 $\Delta x \rightarrow 0$ 时必有 $\Delta y \rightarrow 0$. 从而又有 $f^{-1}(x + \Delta x) = f^{-1}(x) + \Delta y = y + \Delta y$, 故 $x + \Delta x = f(y + \Delta y)$ 或 $\Delta x = f(y + \Delta y) - f(y)$. 因此

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{f(y + \Delta y) - f(y)} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{f(y + \Delta y) - f(y)} = \frac{1}{f'(y)}, \end{aligned}$$

定理证毕. ■

后面将会证明, 若在 I 上 $f'(x) \neq 0$, 则 f 是 I 上的严格单调的连续函数. 因此, 在定理 2.3 中, f 在 I 上严格单调连续的条件可以去掉.

例 2.9 求反三角函数的导数.

解 先求反正弦函数 $y = \arcsin x (x \in (-1, 1))$ 的导数. 由于它是正弦函数 $x \mapsto \sin y (y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right))$ 的反函数, 并且当 $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $(\sin y)' = \cos y \neq 0$, 所以定理 2.3 的所有条件满足. 由(2.3)式, 在区间 $(-1, 1)$ 内我们有

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \end{aligned}$$

即

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1).$$

类似可得

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1),$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, x \in (-\infty, +\infty).$$

例 2.10 求反双曲函数的导数.

解 我们仍以反双曲正弦函数 $y = \operatorname{arsh} x$ ($x \in (-\infty, +\infty)$) 为例. 由于它是双曲正弦 $x = \operatorname{sh} y$ 的反函数, 并且满足定理 2.3 的所有条件, 于是由(2.3)式, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上我们有

$$\begin{aligned} (\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \end{aligned}$$

即

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in (-\infty, +\infty).$$

类似可得

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

利用定理 2.3 及例 1.3 中的公式(3), 不难证明:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x \in (0, +\infty).$$

2.4 初等函数的求导问题

到现在为止, 我们已经求出了所有基本初等函数的导数. 由于初等函数是基本初等函数经过有限次的有理运算和复合运算构成的, 因此, 可以利用导数的有理运算法则(定理 2.1)、链式法则以及基本初等函数导数公式求出任何初等函数的导数. 从而得到如下结论: 一切初等函数的求导问题均已解决, 而且可导的初等函数的导数仍为初等函数.

为今后使用方便, 将基本初等函数的导数公式列成下面的基本导数表:

(1) $(C)' = 0$	(6) $(\cot x)' = -\csc^2 x$
(2) $(x^a)' = ax^{a-1}$	(7) $(\sec x)' = \sec x \tan x$
(3) $(\sin x)' = \cos x$	(8) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
(4) $(\cos x)' = -\sin x$	(9) $(a^x)' = a^x \ln a$
(5) $(\tan x)' = \sec^2 x$	(10) $(e^x)' = e^x$

$$(11) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(12) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(15) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(16) (\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

在所有的求导法则中,复合函数求导法则是最基本最重要的,这不仅是因为应用中经常碰到的函数是复合函数,而且这个法则也是后面介绍的其他求导法的基础.所以,我们应当熟练而准确地掌握它.下面再举几个例子.

例 2.11 证明: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

证 若 $x > 0$, 则 $\ln|x| = \ln x$, 故

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

若 $x < 0$, 则 $\ln|x| = \ln(-x)$, 故

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

综合上面两种情况得 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). ■

例 2.12 设 $y = \ln(1 + x + \sqrt{2x + x^2})$, 求 y' .

$$\text{解 } y' = \frac{1}{1 + x + \sqrt{2x + x^2}} \left(1 + \frac{2+2x}{2\sqrt{2x+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}.$$

例 2.13 设 $f(x) = \arccos(\cos x^2)$, 求 $f'(x)$.

解 由于 $(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ 仅对 $y \in (-1, 1)$ 成立, 所以当且仅当 $x^2 \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时函数 $f(x)$ 可导, 并且

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos x^2)^2}} (-\sin x^2) \cdot 2x \\ &= \frac{2x \sin x^2}{|\sin x^2|} = 2x \operatorname{sgn}(\sin x^2). \end{aligned}$$

例 2.14 设 $f(x) = u(x)^{v(x)}$, 其中 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 都是可导函数. 并且 $u(x) > 0$, 求 $f'(x)$.

解 由于

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)},$$

所以

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{v(x)u(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \right] \\ &= u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.5 高阶导数

我们知道,变速直线运动的物体在 t 时刻的速度 $v(t)$ 是位移函数 $s = s(t)$ 在时刻 t 的导数,即 $v(t) = s'(t)$. 而加速度 $a(t)$ 又是速度 $v(t)$ 对时间 t 的变化率,即速度函数 $v = v(t)$ 对时间 t 的导数,故 $a(t) = \frac{dv}{dt} = (s'(t))'$, 叫做 $s = s(t)$ 对 t 的二阶导数,记作 $a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$. 一般地,高阶导数的定义如下.

定义 2.1 设函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 可导. 如果它的导函数 $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x \in I$ 处可导, 则称 f 在 x 处二阶可导, f' 在 x 处的导数称为 f 在 x 处的二阶导数, 记作 $f''(x) = (f')'(x)$. 若 f 在 I 上处处二阶可导, 则称 f 在 I 上二阶可导, f'' 称为 f 在 I 上的二阶导函数. 一般地, 若 f 的 $n-1$ 阶导函数 $f^{(n-1)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x \in I$ 可导, 则称 f 在 x 处 n 阶可导, $f^{(n-1)}$ 在 x 处的导数称为 f 在 x 处的 n 阶导数, 记作 $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$. 若 f 在 I 上处处 n 阶可导, 则称 f 在 I 上 n 阶可导, $f^{(n)}$ 称为 f 在 I 上的 n 阶导函数.

若函数用 $y = f(x)$ 表示, 则它的 n 阶导数也记成 $y^{(n)}$ 或 $\frac{d^n y}{dx^n}$.

若 $f^{(n)}$ 在 I 上连续, 则称 f 在 I 上 n 阶连续可导, 或称 f 为 I 上的 $C^{(n)}$ 类函数, 记作 $f \in C^{(n)}(I)$. 若 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, f 在 I 上都是 $C^{(n)}$ 类的, 则称 f 在 I 上无限阶可导, 或称之为 C^∞ 类函数, 记作 $f \in C^\infty(I)$.

二阶或二阶以上的导数统称为高阶导数. 为统一起见, 习惯上把 f' 称为 f 的一阶导数, 把 f 本身称为 f 的 0 阶导数.

例 2.15 证明下列函数的 n 阶导数公式:

$$(1) (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$(2) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(3) (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(4) (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n} (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0);$$

$$(5) [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (x > -1).$$

证 仅证(2)与(5), 其余留给读者.

(2) 由于

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

假定 $(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ 成立, 则

$$\begin{aligned} (\sin x)^{(k+1)} &= [\sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)]' = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + (k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

由数学归纳法知(2)式对于任何 $n \in \mathbb{N}_+$ 都成立.

(5) 由于

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x},$$

$$[\ln(1+x)]'' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$[\ln(1+x)]^{(3)} = \left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]' = (-1)^2 \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3},$$

与(2)类似可由数学归纳法证明:

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}. \quad \blacksquare$$

由例 2.15 的证明过程可见,为了求得函数的高阶导数公式,在求导过程中善于发现和总结规律是非常重要的.

定理 2.4 设函数 u, v 都是 n 阶可导的, 则 $\alpha u + \beta v$ 与 uv 也是 n 阶可导的, 并且有:

(1) 线性性质: $(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(2) Leibniz 公式:

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \\ &= u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \cdots + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + u v^{(n)}. \end{aligned}$$

证明留给读者.

例 2.16 设 $f(x) = x^3 \sin x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解 取 $u = \sin x$, $v = x^3$, 根据 Leibniz 公式得:

$$f^{(n)}(x) = x^3 (\sin x)^{(n)} + n \cdot 3x^2 (\sin x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 6x (\sin x)^{(n-2)}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 6(\sin x)^{(n-3)} \\
 & x^3 \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 3nx^2 \sin\left[x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right] \\
 & + 3n(n-1)x \sin\left[x + (n-2) \cdot \frac{\pi}{2}\right] \\
 & + n(n-1)(n-2) \sin\left[x + (n-3) \cdot \frac{\pi}{2}\right]. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

2.6 隐函数求导法

前面研究的函数都可以表示为 $y = f(x)$ 的形式, 其中 $f(x)$ 是 x 的解析式, 称之为 **显函数**. 在实际问题中, 我们也常常碰到这样一类函数, 它的因变量 y 与自变量 x 间的对应法则是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的. 就是说, 如果存在一个定义在某区间上的函数 $y = f(x)$, 使 $F(x, f(x)) = 0$, 那么称 $y = f(x)$ 为由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的 **隐函数**.

对于给定的方程, 由它所确定的隐函数是否存在, 是一个相当复杂的问题. 我们将在第五章中讨论. 即使存在, 有的也不能化成显函数的形式. 例如, 方程 $2x - y + 3 = 0$ 对任何 $x \in \mathbf{R}$ 都确定了一个隐函数 y , 而且不难化成显函数形式 $y = 2x + 3$ (称它为隐函数的显化); 利用介值定理可以证明, 当 $x > 1$ 时, 方程 $e^y = y + x$ 至少有一个实根 y , 也就是说, 它能确定一个隐函数 $y = f(x)$, 但是却无法将它显化; 而方程 $x^2 + y^2 + 1 = 0$ 不能确定一个隐函数.

下面在隐函数存在且可导的前提下, 讨论隐函数的求导方法. 设 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数, 则 $F(x, f(x)) = 0$. 由于, 此式左端是将 $y = f(x)$ 代入到 $F(x, y)$ 所得到的复合函数, 因此根据链式法则将等式两边对 x 求导, 便可得到我们所要求的导数.

例 2.17 求由方程 $y^5 + 2y^3 - y + x = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的导数.

解 注意到方程中 y 是 x 的隐函数, 利用链式法则, 将方程两端同时对 x 求导得:

$$5y^4 y' + 6y^2 y' - y' + 1 = 0,$$

从而解得

$$y' = -\frac{1}{5y^4 + 6y^2 - 1}. \quad \blacksquare$$

例 2.18 求由方程 $e^y + xy = e$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的二阶导数.

解 注意到 y 是 x 的函数, 两端同时对 x 求导得

$$e^y \cdot y' + xy' + y = 0, \quad (2.4)$$

从而

$$y' = -\frac{y}{e^y + x}. \quad (2.5)$$

由于当 $x=0$ 时, 从所给方程求得 $y=1$, 所以

$$y'|_{x=0} = -\left.\frac{y}{e^y + x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{e}.$$

为了求出隐函数的二阶导数, 将方程(2.4)两端再对 x 求导, 注意到 $y' = f'(x)$ 仍是 x 的函数, 得

$$e^y(y')^2 + e^yy'' + xy'' + y' + y' = 0,$$

从而

$$y'' = -\frac{e^y(y')^2 + 2y'}{e^y + x}.$$

将(2.5)式代入上式, 解得

$$y'' = \frac{(2y - y^2)e^y + 2xy}{(e^y + x)^3}, \quad y''|_{x=0} = \frac{1}{e^2}.$$

此例中关于二阶导函数 y'' 的结果也可以由(2.5)式两边对 x 求导得到, 留给读者自己去完成.

2.7 由参数方程确定的函数的求导法则

在很多实际问题中, 常常用参数方程来表示物体的运动规律. 例如, 炮弹运动的轨迹(称为弹道曲线)在不计空气阻力的情况下可表示成参数方程:

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases} \quad (2.6)$$

其中 v_1, v_2 分别表示炮弹的水平和铅垂方向的初速度, g 为重力加速度, t 为时间, x 与 y 分别表示炮弹在铅垂平面内位置的横坐标与纵坐标(图 2.1).

在(2.6)式中, x 与 y 都是 t 的函数, 由第一式解出 t 代入第二式, 消去参数 t ,

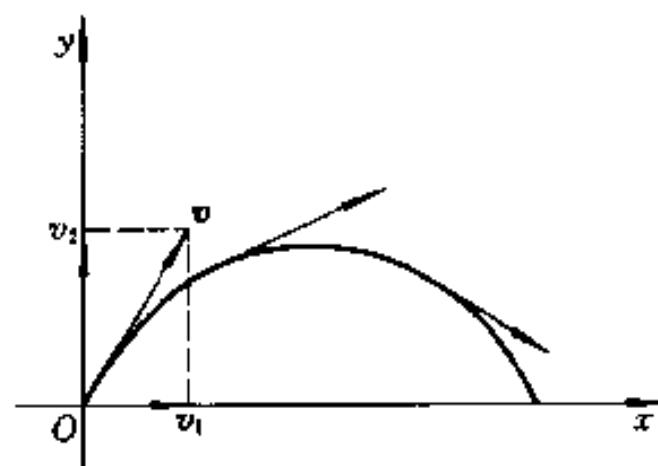


图 2.1

得

$$y = \frac{v_2}{v_1}x - \frac{g}{2v_1^2}x^2,$$

从而确定了 y 与 x 间的一个函数关系, 称之为由参数方程(2.6)所确定的函数.

一般地, 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

所确定的 y 与 x 间的函数, 称这为由参数方程(2.7)确定的函数. 如果参数方程比较复杂, 消去参数 t 比较困难, 怎样求该函数的导数呢? 下面的法则提供了直接求这种函数导数的方法.

定理 2.5 (参数方程求导法则) 设有参数方程(2.7),

(1) 若函数 $x = x(t)$ 与 $y = y(t)$ 在 (α, β) 内可导, 且 $\dot{x}(t) \neq 0$ (习惯上常用 \dot{x}, \ddot{x} 表示 $x = x(t)$ 对参数 t 的一阶和二阶导数 $x'(t), x''(t)$), 则

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}; \quad (2.8)}$$

(2) 若 $x = x(t)$ 与 $y = y(t)$ 二阶可导, 则

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{xy} - \dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}. \quad (2.9)}$$

证 (1) 由于 $x = x(t)$ 可导, 且 $\dot{x}(t) \neq 0$, 由定理 2.3 及其后面的说明, 它的反函数 $t = x^{-1}(x)$ 在与 t 对应的 x 处可导, 且

$$\frac{dt}{dx} = (x^{-1})'(x) = \frac{1}{\dot{x}(t)}.$$

将 $t = x^{-1}(x)$ 代入 $y = y(t)$, 得恒等式 $y \equiv y(x^{-1}(x))$. 将右端看成 $y = y(t)$ 与 $t = x^{-1}(x)$ 的复合函数, 两端对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

(2) 将上式两边继续对 x 求导, 注意到 $\frac{dy}{dx}$ 仍可看成关于 x 的复合函数, 中间变量 $t = x^{-1}(x)$, 从而得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right) \cdot \frac{1}{\dot{x}(t)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t))^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}(t)} \\ &= \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 2.19 已知摆线(图 2.2)的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

(1) 求摆线上任一点 P 处的切线和法线的斜率;

(2) 求由该参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 (1) 由(2.8)式可知, 摆线上点 P 处的切线和法线斜率分别为

$$k_{\text{切}} = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$k_{\text{法}} = -\frac{1 - \cos t}{\sin t}.$$

(2) 由(2.9)式,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{a(1 - \cos t) a \cos t - a \sin t a \sin t}{a^3(1 - \cos t)^3} \\ &= -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

若曲线 Γ 上每一点都有切线, 并且各点切线的方向是连续变化的, 则称 Γ 是一条光滑曲线. 因此, 若 f 是 $C^{(1)}$ 类函数, 则由方程 $y = f(x)$ 表示的曲线 Γ 是光滑曲线. 设曲线 Γ 由参数方程(2.7)表示, 若 $x = x(t)$ 与 $y = y(t)$ 有连续的导数, 并且 $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0$, 则由(2.8)式可知, $\frac{dy}{dx}$ (或 $\frac{dx}{dy}$) 是 t 的连续函数, 因而 Γ 上各点的切线方向是连续变化的, Γ 是光滑曲线. 如圆和椭圆等都是光滑曲线. 若曲线 Γ 在整个区间 (α, β) 上不是光滑的, 但将 (α, β) 分为若干子区间, Γ 上与各子区间对应的各弧段都是光滑的, 称这种曲线为分段光滑曲线. 如摆线的每一拱都是光滑的, 但在曲线上对应于 $t = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的点处切线斜率为无穷大, 所以摆线是一条分段光滑曲线.

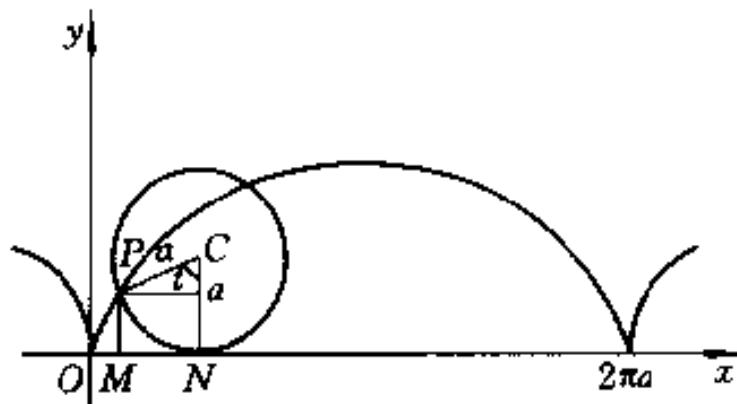


图 2.2

2.8 相关变化率问题

实际问题中还会提出这样一类问题: 在某变化过程中, 变量 x 与 y 都随另

变量 t 而变, 即 $x = x(t)$, $y = y(t)$, 而变量 x 与 y 之间又存在着相互依赖关系, 因而它们的变化率 $\dot{x}(t)$ 与 $\dot{y}(t)$ (假定存在) 也相互联系, 研究这两个变化率之间关系的问题称为相关变化率问题. 解决相关变化率问题可采用如下步骤: (1) 建立变量 x 与 y 之间的关系式 $F(x, y) = 0$; (2) 用链式法则将关系式 $F(x, y) = 0$ 两端对 t 求导, 得到 $\dot{x}(t)$ 与 $\dot{y}(t)$ 之间的关系式; (3) 从中解出所要求的变化率.

例 2.20 设有一深为 18 cm、顶部直径为 12 cm 的正圆锥形漏斗装满水, 下面接一直径为 10 cm 的圆柱形水桶(图 2.3), 水由漏斗流入桶内. 当漏斗中水深为 12 cm、水面下降速度为 1 cm/s 时, 求桶中水面上升的速度.

解 设在时刻 t 漏斗中水面的高度为 $h = h(t)$, 漏斗在高为 $h(t)$ 处的截面圆的半径为 $r(t)$, 桶中水面的高度为 $H = H(t)$.

(1) 建立变量 h 与 H 的关系.

由于在任何时刻 t , 漏斗中的与水桶中的水量之和应等于开始时装满漏斗的总水量, 设水的密度为 1, 则有

$$\frac{\pi}{3} r^2(t) h(t) + \pi H(t)^2 = 6^3 \pi.$$

又因为 $\frac{r(t)}{6} = \frac{h(t)}{18}$, 所以 $r(t) = \frac{1}{3} h(t)$, 代入上式得

$$\frac{\pi}{27} h^3(t) + 25\pi H(t)^2 = 6^3 \pi.$$

(2) 求 $\dot{h}(t)$ 与 $\dot{H}(t)$ 之间的关系. 将上式两边对 t 求导得

$$\frac{\pi}{9} h^2(t) \dot{h}(t) + 50\pi H(t) \dot{H}(t) = 0,$$

或

$$h^2(t) \dot{h}(t) + 9 \times 25 \dot{H}(t) = 0.$$

(3) 从(2)解得

$$\dot{H}(t) = -\frac{h^2(t)}{9 \times 25} \dot{h}(t).$$

由已知, 当 $h(t) = 12$ cm 时, $\dot{h}(t) = -1$ cm/s, 代入上式得

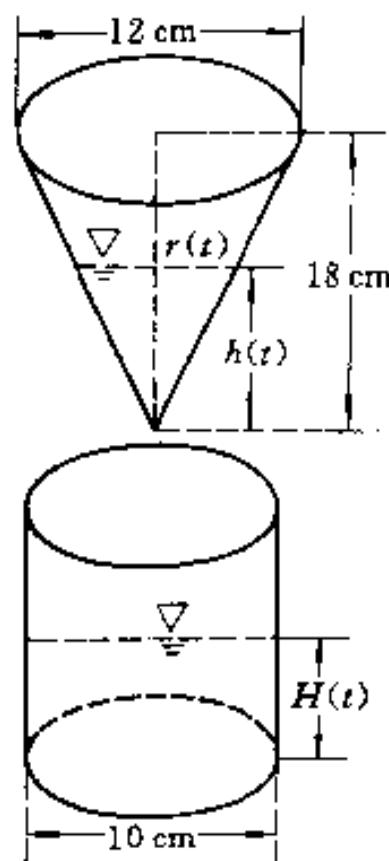


图 2.3

$$\dot{H}(t) = -\frac{12^2}{9 \times 25}(-1) = \frac{16}{25} \text{ (cm/s)}.$$

因此,当漏斗中水深为 12 cm、水面下降速度为 1 cm/s 时,桶中水面上升的速度为 $\frac{16}{25}$ cm/s. ■

例 2.21 在机械加工中,经常利用外圆磨床采用所谓切线磨削法来加工圆形工件,图 2.4 是切线磨削法的示意图。在磨削过程中,砂轮绕 O_1 轴旋转,工件中心在直线 L 上一面绕其中心 A 旋转,一面沿 L 向右平动。工件在前进过程中不断被砂轮磨削,最后磨出一个圆形工件来。随着工件的不断前进,其中心 A 与点 O 间的距离 x 不断减小,所以 x 是时间 t 的函数,称 $\frac{dx}{dt}$ 为工件的进给速度。由于砂轮的不断磨削,工件中心到砂轮中心 O_1 的距离 y 也不断减小,所以 y 也是时间 t 的函数,称 $v = \frac{dy}{dt}$ 为径向切入速度。求当工件以等速 v_0 进给时的径向切入速度。

解 为了寻求工件的进给速度与径向切入速度之间的关系,首先必须建立 x 与 y 之间的关系。由图 2.4 中的直角 $\triangle AOO_1$,易见

$$y^2 = x^2 + c^2,$$

将上式两边对 t 求导,根据链式法则,

$$2y \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt},$$

由于 x 是 t 的严格单调减函数,并且进给速度是常数 v_0 ,故 $\frac{dx}{dt} = -v_0$,从而可得

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}} v_0 = -\frac{v_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{x}\right)^2}}.$$

由上式可见,当 x 减少时,径向切入速度 v 的绝对值也随之减小,当 $x \rightarrow 0$ 时, $v \rightarrow 0$ 。这说明在工件等速进给的条件下,用切线磨削法可一次完成粗磨、精磨和无火花磨削三个阶段,因此,它是一种常用的磨削方法。

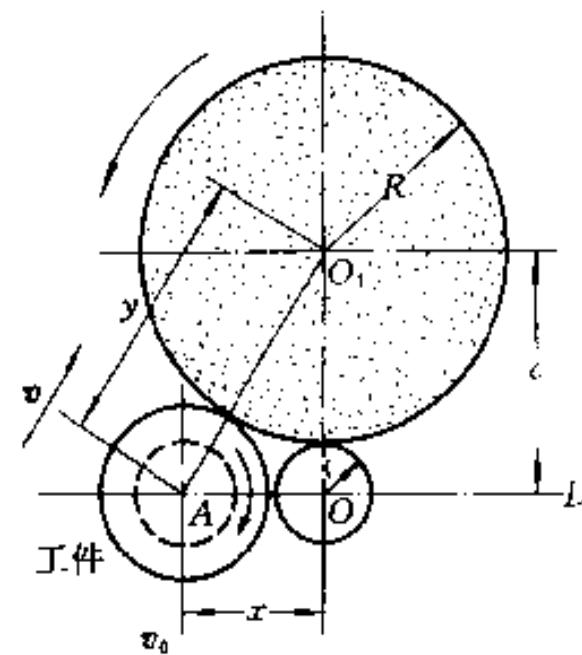


图 2.4

习题 2.2

(A)

1. 求下列函数的导数:

(1) $y = \sqrt[3]{x}(2 + \sqrt{x})$;

(2) $y = 3e^x \cos x$;

(3) $y = a^x(x^2 - 3x + 1)$ ($a > 0$);

(4) $y = \tan x \sec x$;

(5) $y = \frac{1}{1+x+x^2} + \ln 3$;

(6) $s = \frac{1+\sin t}{1+\cos t}$;

(7) $y = \frac{10^x - 1}{10^x + 1}$;

(8) $y = \frac{2\csc x}{1+x^2}$;

(9) $y = \sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$;

(10) $y = \frac{1+\cot x}{\sqrt[3]{x^2}} + \ln \sqrt{x}$;

(11) $y = \frac{1}{\sin x \cos x}$;

(12) $y = \frac{e^x \sec x + 1}{x^2 \log_a \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$.

2. 求下列函数的导数:

(1) $y = (2x+3)^5$;

(2) $y = e^{\alpha x} \sin(\omega x + \beta)$ ($\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}$);

(3) $y = \ln(x^2 + \cos x)$;

(4) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$;

(5) $y = \left(\arccos \frac{1}{x} \right)^2$;

(6) $y = \arctan(1+2x)^2$;

(7) $y = \operatorname{arccot} \sqrt{x^2 - 1}$;

(8) $y = \ln(\csc x - \cot x)$;

(9) $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

(10) $y = \sqrt[3]{x} e^{\sin \frac{1}{x}}$;

(11) $y = \ln \sqrt{x \sin x} - \sqrt{1-e^x}$;

(12) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$;

(13) $y = x^a + a^x + a^a$ ($a > 0$);

(14) $y = x + x^x + x^{x^x}$.

3. 已知 $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x) = \arctan x^2$, 试求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$.4. 设有分段函数 $f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq x_0, \\ \psi(x), & x < x_0, \end{cases}$ 函数 φ 与 ψ 均可导, 问 $f'(x) = \begin{cases} \varphi'(x), & x \geq x_0, \\ \psi'(x), & x < x_0 \end{cases}$ 是否成立.5. 求下列函数的导数(f, g 是可导函数):

(1) $y = f(x^2)$;

(2) $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$;

(3) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$;

(4) $y = f(e^x) e^{g(x)}$;

(5) $y = \begin{cases} 1-x, & -\infty < x < 1, \\ (1-x)(2-x), & 1 \leq x \leq 2, \\ -(2-x), & 2 < x < +\infty; \end{cases}$

(6) $y = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

6. 确定 a, b, c, d 的值, 使曲线 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$ 与 $y = 11x - 5$ 在点 $(1, 6)$ 相切, 经过点 $(-1, 8)$ 并在点 $(0, 3)$ 有一水平的切线.

7. 证明: 双曲线 $xy = a$ 上任一点处的切线介于两坐标轴间的一段被切点所平分.

8. 求下列函数指定阶的导数:

$$(1) f(x) = e^x \cos x, \text{求 } f^{(4)}(x); \quad (2) f(x) = x \sin x, \text{求 } f^{(100)}(x);$$

$$(3) f(x) = x^2 \sin 2x, \text{求 } f^{(50)}(x); \quad (4) f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, \text{求 } f^{(n)}(x).$$

9. 证明下列函数的 n 阶导数公式:

$$(1) \left(\frac{x^2}{x+1} \right)^{(n)} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, & n=1, \\ \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}, & n \geq 2; \end{cases}$$

$$(2) [(x^2 - 1)^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 n! (x+1)^{n-k} (x-1)^k.$$

10. 设 $f(x) = 3x^5 + x^2 |x|$, 试求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n .

11. 求由下列方程所确定的隐函数的导数:

$$(1) x^3 + y^3 = 3xy = 0, \text{求 } \frac{dy}{dx}; \quad (2) xy = e^{x+y}, \text{求 } \frac{dy}{dx};$$

$$(3) y = \sin(x+y), \text{求 } \frac{dy}{dx}; \quad (4) y = 1 + xe^y, \text{求 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}.$$

12. 对给定的函数两边取自然对数然后再求导的方法称为对数求导法. 例如, 对函数

$$y = 2^x \sin x \sqrt{1+x^2}$$

两边取自然对数, 得

$$\ln|y| = x \ln 2 + \ln|\sin x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

由此方程确定了 y 是 x 的隐函数, 应用隐函数求导法得

$$\frac{y'}{y} = \ln 2 + \cot x + \frac{x}{1+x^2}.$$

从而

$$\begin{aligned} y' &= y \left(\ln 2 + \cot x + \frac{x}{1+x^2} \right) \\ &= 2^x \sin x \sqrt{1+x^2} \left(\ln 2 + \cot x + \frac{x}{1+x^2} \right). \end{aligned}$$

试用对数求导法求下列函数的导数:

$$(1) y = \frac{(3-x)^4 \sqrt{x+2}}{(x+1)^5}; \quad (2) y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}};$$

$$(3) y = x^{\sin x}; \quad (4) y = (\tan 2x)^{\cot \frac{x}{2}}.$$

13. 求下列参数方程所确定的函数的导数:

$$(1) \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \text{求 } \frac{dy}{dx}; \quad (2) \begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \text{求 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{3}};$$

$$(3) \begin{cases} x = \frac{2at}{1-t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = 3e^{-t}, \\ y = 2e^t, \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = f(t), \\ y = tf(t) - f(t), \end{cases}$$

14. 设曲线 Γ 由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 所确定, 试求该曲线上任意一点的切线斜率, 并将所得公式用于求心形线 $r = a(1 - \cos\theta)$ ($a > 0$) 上任一点的斜率.

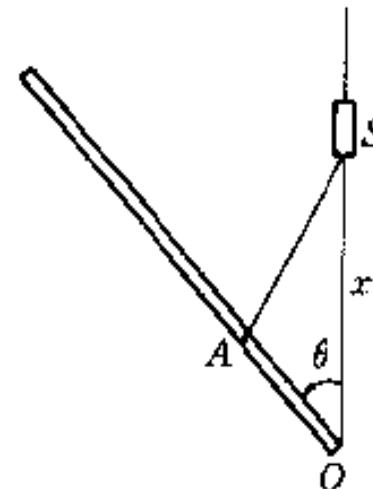
15. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程. 证明: 在它的任一点处的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

16. 落在平静水面上的石头使水面上产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大率为 6 m/s, 问在 2 s 末被扰动水面面积的增大率为多少?

17. 在中午 12 时, 甲船以 6 km/h 的速率向东行驶, 乙船在甲船之北 16 km 处以 8 km/h 的速率向南行驶, 求下午一时两船相离的速率.

18. 当油船破裂时, 有体积为 $V \text{ m}^3$ 的石油漏入海中, 假定石油在海面上以厚度均匀的圆形扩散开来, 已知油层的厚度随时间的变化规律为 $h(t) = \frac{k}{\sqrt{t}}$ ($t > 0$), 试求油层向外扩散的速率.

19. 一个开窗子的机构是由一些刚性细杆做成, 如右图. 其中 S 为滑块, 设 $AO = 3 \text{ cm}$, $AS = 4 \text{ cm}$, 求滑块的垂直速度 $\frac{dx}{dt}$ 与 θ 的角速度 $\frac{d\theta}{dt}$ 之间的关系.



(第 19 题图)

(B)

1. 设 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$ ($a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$) 且

$$|f(x)| \leqslant |\sin x|,$$

证明: $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$.

2. 设函数 $\varphi: (-\infty, x_0] \rightarrow \mathbf{R}$ 是二阶可导函数, 选择 a, b, c , 使

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \leqslant x_0, \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & x > x_0 \end{cases}$$

在 \mathbf{R} 上二阶可导.

3. 确定 a, b 的值, 使函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(1 - \cos ax), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \ln(b + x^2), & x > 0 \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处可导, 并求它的导函数.

4. 如果函数 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处可导, 而 $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处可导, 那么复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处可导, 这是大家所熟知的. 问下列三种情况是否成立? 为什么?

(1) 如果 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处不可导, 而 $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处可导, 那么复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导;

(2) 如果 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处可导, 而 $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处不可导, 那么复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导;

(3) 如果 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处不可导, $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处也不可导, 那么复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

5. 已知 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 试求 $f^{(n)}(x)$ ($n > 2$).

6. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$, 求 $f'(0)$ 及 $f^{(n+1)}(x)$.

7. 设 $f(x) = \arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

8. 利用恒等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

求出表示和式

$$S_n = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

的公式.

9. 设 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

其中 $x_0 \in \mathbb{R}$, 证明:

$$p_n(x) = p_n(x_0) + p'_n(x_0)(x - x_0) + \frac{p''_n(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{p_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

第三节 微 分

微分是与导数密切相关又有本质区别的一个重要概念. 本节主要介绍微分的概念、计算及简单应用, 说明在“微小局部”用线性函数近似代替非线性函数是微分学的一个基本思想方法.

3.1 微分的概念

在很多问题中, 常常要研究函数的改变量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ 与自变量改变量 Δx 之间的关系, 计算函数改变量的大小. 我们知道, 对于线性函数 $y = kx + b$ 而言, Δy 是 Δx 的线性函数, 即 $\Delta y = k\Delta x$. 对于非线性函数, 一般来

说, Δy 与 Δx 之间的关系要复杂得多. 自然要问, 能否用 Δx 的线性函数去近似代替 Δy 呢? 近似代替后所产生的误差是什么? 下面来研究这个问题.

若函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, 则由本章的(1.10)式,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

可见, Δy 是由两部分组成的, 即关于 Δx 的线性函数部分 $f'(x_0)\Delta x$ 和高阶无穷小部分 $o(\Delta x)$. 当 Δx 充分小时, 第二部分的绝对值比第一部分的绝对值小得多. 此时, Δy 的大小主要取决于第一部分, 称它为 Δy 的线性主部. 若用线性主部 $f'(x_0)\Delta x$ 近似代替 Δy , 则所产生的绝对误差 $|o(\Delta x)|$ 是 Δx 的高阶无穷小. 由此抽象出微分的概念.

定义 3.1 (微分) 设有函数 $f: U(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$. 若存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x) = a\Delta x$ ($a \in \mathbf{R}$ 为与 Δx 无关的常数), 使

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a\Delta x + o(\Delta x), \quad (3.1)$$

则称 f 在 x_0 处可微, 称 $a\Delta x$ 为 f 在 x_0 处的微分, 记作 $df(x_0) = a\Delta x$. 若函数用 $y = f(x)$ 表示, 则可记作 $dy|_{x=x_0} = a\Delta x$. 若 f 在区间 I 的每一点可微, 则称 f 在 I 上可微.

由定义 3.1 可知, 函数 f 在 x_0 处的微分就是在小区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ (或 $[x_0 + \Delta x, x_0]$) 上函数改变量 Δy 的线性主部 $a\Delta x$. 现在要问, f 可微的条件是什么? 常数 a 等于什么? 下面的定理回答了这个问题.

定理 3.1 函数 $f: U(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$ 在 x_0 处可微的充要条件是 f 在 x_0 处可导. 此时, $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

证 充分性由读者利用本章(1.10)式去证明, 下面证明必要性. 设 f 在 x_0 处可微, 由定义知(3.1)式成立, 从而

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 得

$$f'(x_0) = a,$$

故 f 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) = a$, 此时, $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. ■

我们规定, 自变量的微分等于自变量的改变量, 即 $dx = \Delta x$. 因此, 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的微分可写成 $df(x_0) = f'(x_0)dx$ 或 $dy = f'(x_0)dx$. $y = f(x)$ 在区间 I 任一点 x 处的微分可写成

$$dy = f'(x)dx. \quad (3.2)$$

定理 3.1 告诉我们,对于一元函数来说,函数可导性与可微性是两个等价的概念,今后我们不再区分它们.而且,求出函数的导数之后,只要再乘以 dx ,就得得到相应的微分.

用 dx 除(3.2)式两端,得

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

这就是说,函数的导数等于函数的微分与自变量微分之商.因此,导数又称为微商,这也是把系数记作 $\frac{dy}{dx}$ 的一个原因.

为了加深对微分概念的理解,我们来说明微分的几何意义.在图 3.1 中,函数 $y = f(x)$ 的图象是一条曲线,它在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是该曲线在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率 $\tan \alpha$.因此,

$$dy = f'(x_0)dx = \tan \alpha \cdot PN = NT.$$

这就是说,函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的微分在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在对应点 P 处切线的纵坐标改变量.

又因为 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 就是 NQ ,所以用微分近似代替改变量 Δy 产生的误差就是 TQ .当 $|\Delta x|$ 很小时, TQ 比 NT 小得多,故由(3.1)式及定理 3.1 知,当 $|\Delta x| = |x - x_0|$ 很小时,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3.3)$$

此式表明,用微分近似代替改变量 Δy ,就是在 x_0 附近(微小局部)用线性函数 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 近似代替函数 $y = f(x)$.在几何上就是在点 P 附近用切线 PT 去近似代替曲线 PQ .

在微小局部用线性函数近似代替给定的非线性函数,或者在几何上用切线近似代替曲线,是微分学的基本思想方法之一,通常称为非线性函数的局部线性化.这种思想方法在自然科学和工程问题的研究中也是非常重要的.

3.2 微分的运算法则

前面已经指出,要求微分,只要求出导数再乘以 dx 即可.因此,由函数的导数公式立即可以得到相应的微分公式,由基本导数表可以得到基本微分表.这里我们不再一一罗列出来,读者自己去默写一遍,像基本导数公式一样,要牢记在

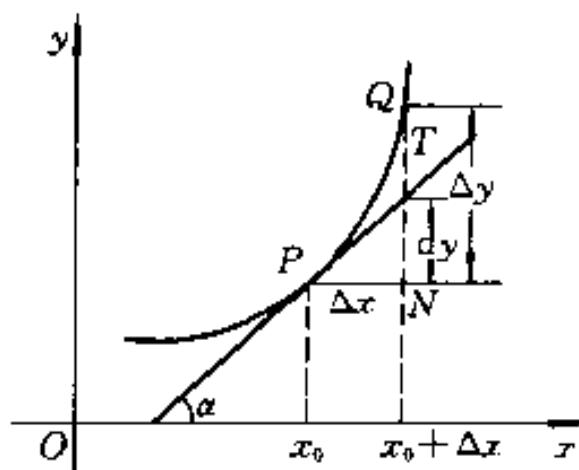


图 3.1

心。

同样,由导数的有理运算法则(定理 2.1)可以得到微分的有理运算法则,即

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \quad d(uv) = vdu + udv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vd u - u d v}{v^2} (v \neq 0).$$

下面介绍复合函数的微分运算法则。设有函数 $y = f(u)$, 若 u 是自变量, 根据微分的定义, 则有

$$dy = f'(u)du. \quad (3.4)$$

若 u 又是另一个变量 x 的可导函数 $u = g(x)$, 则由复合函数的求导法则, 复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分为

$$dy = f'(u)g'(x)dx.$$

因为 $g'(x)dx = du$, 故(3.4)式仍成立。这就是说, 无论 u 是自变量还是另一个变量的函数, 函数 $y = f(u)$ 的微分都保持由(3.4)式所表示的同一形式, 这一性质称为微分形式不变性。

因此, 复合函数的微分既可以利用链式法则求出函数的导数再乘以 dx 得到, 也可以利用微分形式不变性, 由(3.4)式直接求得。

例 3.1 求函数 $y = \sin(2x + 1)$ 的微分。

解 令 $u = 2x + 1$, 则由(3.4)式,

$$dy = \cos u du = \cos(2x + 1) \cdot 2dx = 2\cos(2x + 1)dx. \blacksquare$$

例 3.2 求函数 $y = \ln(1 + e^{x^2})$ 的微分。

解 同求复合函数导数一样, 求复合函数微分时也可不写出中间变量按如下步骤进行:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{1 + e^{x^2}} d(1 + e^{x^2}) = \frac{1}{1 + e^{x^2}} \cdot e^{x^2} d(x^2) \\ &= \frac{e^{x^2}}{1 + e^{x^2}} \cdot 2x dx = \frac{2x e^{x^2}}{1 + e^{x^2}} dx. \blacksquare \end{aligned}$$

由于函数的导数等于函数的微分与自变量微分之商, 因此, 也可利用微分形式不变性来求复合函数的导数。

3.3 高阶微分

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上一阶可导, 则它的微分 $dy = f'(x)dx$ 在区间 I

上是 x 的函数. 因此, 若该函数在 I 上二阶可导, 则对它的微分还可以再求微分, 从而得

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2.$$

其中, 第二个等式成立是由于 x 是自变量, $dx = \Delta x$ 与 x 无关, 称它为函数 f 在 I 上的二阶微分, 记作 d^2f 或 d^2y . 若把 $(dx)^2$ 记作 dx^2 , 则有

$$d^2f = d^2y = f''(x)dx^2.$$

此时, 称 f 在 I 上二阶可微.

类似地可以定义三阶微分, 四阶微分等等. 一般地, 若函数 $f: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ 阶可导, 则定义它在 I 上的 n 阶微分为

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = f^{(n)}(x)dx^n,$$

或

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)dx^n,$$

此时, 称 f 在 I 上 n 阶可微.

为统一起见, 函数的微分也称为函数的一阶微分, 二阶与二阶以上的微分统称为高阶微分.

显然, n 阶可导与 n 阶可微是两个等价的概念.

应当注意, 高阶微分没有微分形式不变性. 事实上, 设有函数 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$. 由于 $du = g'(x)dx$ 是 x 的函数, 根据乘积的微分运算法则, 我们有

$$\begin{aligned} d^2y &= d(f'(u)du) = [df'(u)]du + f'(u)d(du) \\ &= f''(u)du^2 + f'(u)d^2u. \end{aligned}$$

一般情况下, $d^2u \neq 0$, 故 $d^2y \neq f''(u)du^2$.

在 3.2 段中所讲的微分形式不变性称为一阶微分形式不变性.

3.4 微分在近似计算中的应用

用微分进行近似计算的基本思想是: 在微小局部将给定的函数线性化, 即在 x_0 的很小的邻域内, 利用近似等式(3.3)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

来近似计算 $f(x)$ 的值. 由于等式右端的线性函数之值容易计算, 因此, 它为近似计算函数 $y = f(x)$ 的值提供了方便.

例 3.3 求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 取 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 则由(3.3)式得

$$\sqrt[3]{x} \approx \sqrt[3]{x_0} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}(x - x_0).$$

令 $x_0 = 1, x = 1.02$, 于是

$$\sqrt[3]{1.02} \approx 1 + \frac{1}{3} \times 0.02 \approx 1.0067. \blacksquare$$

例 3.4 计算 $\sin 44^\circ$ 的近似值.

解 取 $f(x) = \sin x$, 则由(3.3)式得

$$\sin x \approx \sin x_0 + (x - x_0) \cos x_0.$$

令 $x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $x = 44^\circ = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}$, 于是

$$\sin 44^\circ \approx \sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{180} \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.6948. \blacksquare$$

在(3.3)式中, 取 $x_0 = 0$, 当 $|\Delta x| = |x|$ 充分小时, 有

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x.$$

由此, 我们可以得到一些常用的近似公式: 当 $|x|$ 充分小时,

$e^x \approx 1 + x, \quad \sin x \approx x, \quad \tan x \approx x,$ $(1 + x)^a \approx 1 + ax, \quad \ln(1 + x) \approx x.$	(3.5)
---	-------

例 3.5 计算 $\sqrt[5]{270}$ 的近似值.

解 由于

$$\sqrt[5]{270} = \sqrt[5]{243 + 27} = 3 \left(1 + \frac{27}{243}\right)^{\frac{1}{5}},$$

在近似公式 $(1 + x)^a \approx 1 + ax$ 中取 $x = \frac{27}{243}$, 得

$$\sqrt[5]{270} \approx 3 \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{27}{243}\right) \approx 3.0667. \blacksquare$$

习题 2.3

(A)

1. 说明函数在一点处导数与它在一点处的微分有什么区别和联系.
2. 设有一正方形 $ABCD$, 边长为 x , 面积为 y , 如图所示.

(1) 当边长由 x 增加到 $x + \Delta x$ 时, 正方形面积 y 所增加的量 $\Delta y = ?$ 这个量 Δy 在图形上表示哪块面积?

(2) Δy 的线性部分是什么? 这个线性部分在图形上表示什么?

(3) Δy 与这个线性部分相差多少? 这个差在图形上表示什么? 它是不是 Δx 的高阶无穷小?

(4) 面积 y 的微分 $dy = ?$ 在图形上表示什么?

3. 求下列函数的微分:

$$(1) y = x \sin 2x; \quad (2) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(3) y = e^{-x} \cos(3 - x); \quad (4) y = \arcsin \sqrt{1 - x^2};$$

$$(5) y = \tan^2(1 + 2x^2); \quad (6) y = \arctan \frac{1 - x^2}{1 + x^2};$$

$$(7) y = \sqrt[3]{\frac{1 - x}{1 + x}}; \quad (8) y = x^{\sin x}.$$

4. 将适当的函数填入下列括号内, 使等式成立:

$$(1) d(\quad) = ax^{a-1} dx (a \in \mathbb{R}); \quad (2) d(\quad) = -\sin x dx;$$

$$(3) d(\quad) = e^{-2x} dx; \quad (4) d(\quad) = \sec^2 3x dx;$$

$$(5) d(\quad) = \frac{dx}{x^2 + a^2} (a \in \mathbb{R}); \quad (6) d(\quad) = \frac{1}{3x+1} dx;$$

$$(7) d(\quad) = xe^{x^2} dx; \quad (8) d(\quad) = \frac{\ln|x|}{x} dx.$$

5. 计算下列函数的近似值:

$$(1) \cos 29^\circ; \quad (2) \tan 136^\circ;$$

$$(3) \sqrt{25.4}; \quad (4) \arcsin 0.5002;$$

$$(5) \ln 1.01; \quad (6) \sqrt{\frac{(2.037)^2 - 1}{(2.037)^2 + 1}}.$$

6. 如图, 一透镜的凸面半径是 R , 口径是 $2H$, $H \ll R$ (即 H 比 R 小得多, 可以忽略不计), 厚度是 δ .

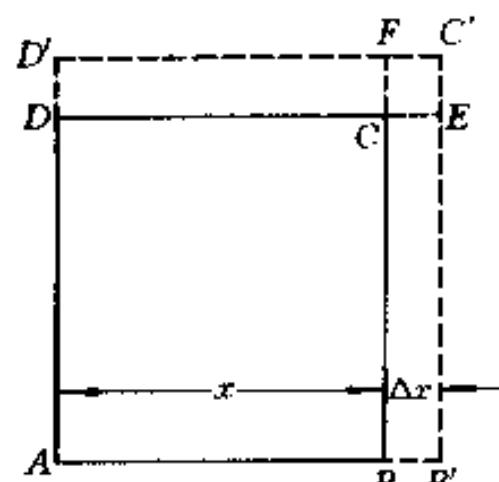
$$(1) \text{证明: } \delta \approx \frac{H^2}{2R};$$

(2) 设 $H = 25$ mm, $R = 100$ mm, 求 δ 的近似值;

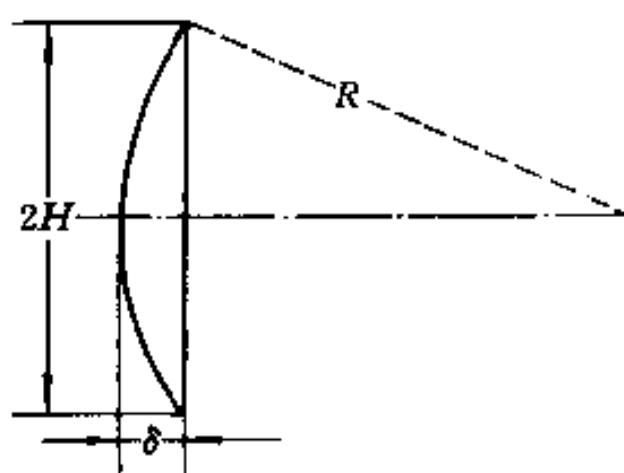
(3) 设 $R = 150$ mm, $\delta = 3$ mm, 求 H 的近似值.

7. 有一批半径为 1cm 的球, 为了提高球面的光洁度, 要镀上一层铜, 厚度为 0.01 cm. 试估计每只球需用多少克的铜. (铜的密度是 8.9 g/cm³)

8. 钟摆摆动的周期 T 与摆长 l 的关系是 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 g 是重力加速度. 现有一只挂钟, 当摆长为 10 cm 时走得很准确. 由于摆长没有校正好, 长了 0.01 cm, 问这只钟每天慢多少秒?



(第 2 题图)



(第 6 题图)

9. 求由方程 $e^{x+y} - xy = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的微分 dy .
10. 求由参数方程 $x = 3t^2 + 2t + 3$, $e^t \sin t - y + 1 = 0$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的微分 dy .

11. 求下列函数 y 关于自变量 x 的二阶微分:

$$(1) y = \frac{\sin x}{x};$$

$$(2) xy + y^2 = 1.$$

(B)

1. 有人说“若 $y = f(x)$ 在 x_0 点可导, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在 x_0 点的微分 dy 是 Δx 的同阶无穷小.”这种说法是否正确? 为什么?

2. 证明: 函数 $f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处可微(可导)的充要条件是存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x) = a\Delta x$, 使

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - L(\Delta x)|}{|\Delta x|} = 0.$$

第四节 微分中值定理及其应用

我们知道, 函数的导数反映了函数的局部变化性态, 为了研究函数在某一个区间上的变化性态, 本节将介绍几个微分中值定理. 微分中值定理把函数的导数与函数值在区间上的变化(函数的改变量)联系了起来, 使我们能应用反映函数的局部性态的导数去研究函数的整体性态(在一个区间上的性态), 因此它们是导数应用的理论基础.

4.1 函数的极值及其必要条件

设有函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 若 $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in U(x_0, \delta) \subseteq I$, 恒有 $f(x) \geq f(x_0)$ ($\leq f(x_0)$), 则称 f 在 x_0 取得极小(大)值 $f(x_0)$. f 的极小值与极大值统称为 f 的极值, 使 f 取得极值的点 x_0 称为 f 的极值点.

在图 4.1 中, 函数 f 在 x_1, x_3 与 x_5 分别取得极大值 $f(x_1), f(x_3)$ 与 $f(x_5)$, 在 x_2 与 x_4 分别取得极小值 $f(x_2)$ 与 $f(x_4)$.

应当注意函数的极大(小)值与最大(小)值的区别. 函数的极值是就一点的邻域来说的, 是局部性概念; 而最值(最大、最小值的简称)是对区间而言的, 是整体性概念. 因此, 函数在区间 I 内部取得的最值一定是

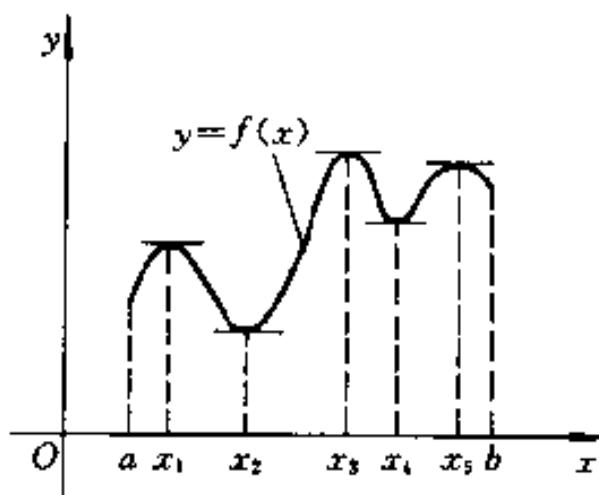


图 4.1

极值,反过来不一定成立.而且同一个函数的极小值有可能大于极大值.如图 4.1 所示,极小值 $f(x_4)$ 大于极大值 $f(x_1)$.

设函数 f 在 (a, b) 内可导,从图 4.1 易见,曲线 $y = f(x)$ 上与极值点 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 相对应的点处有水平切线,将这个事实抽象出来就得到可导函数取得极值的必要条件如下.

定理 4.1 (Fermat 定理) 若函数 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 处取得极值,且 f 在 x_0 处可导,则 $f'(x_0) = 0$.

证 不妨设 f 在 x_0 处取极大值,则

$$\exists \delta > 0, \text{使得 } \forall x \in U(x_0, \delta) \subseteq (a, b), \text{恒有 } f(x) \leq f(x_0).$$

若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

从而有

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0;$$

若 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

从而有

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

由于 f 在 x_0 处可导,故必有 $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$. ■

4.2 微分中值定理

微分中值定理包括 Rolle 定理、Lagrange 定理与 Cauchy 定理,下面先介绍 Rolle 定理.

Rolle 定理也是由一个简单的几何事实抽象出来的.设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图象是一条连续曲线,在区间的两个端点处函数值相等.曲线上与 (a, b) 内任一点 x 相对应的点处都有切线存在,且无与 x 轴垂直的切线,则该曲线上至少有一点具有水平切线(图 4.2).

定理 4.2 (Rolle 定理) 若函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 满足下列条件:

- (1) f 在 $[a, b]$ 上连续;
- (2) f 在 (a, b) 内可导;
- (3) $f(a) = f(b)$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f'(\xi) = 0.$$

证 根据定理 4.1, 只要证明 f 在区间 (a, b) 内有极值点就行了. 由已知, f 在 $[a, b]$ 上连续, 故存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 使

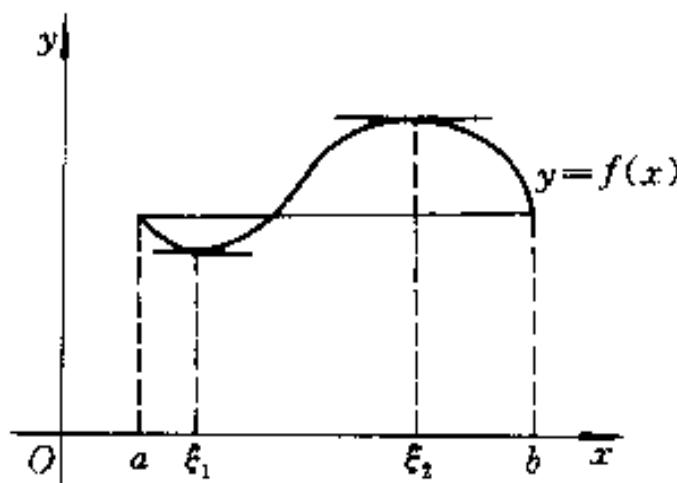


图 4.2

$$f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x) = M, \quad f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x) = m.$$

若 $M = m$, 则 f 为常数, 因此对于 (a, b) 中每个点 ξ 都有 $f'(\xi) = 0$.

若 $M \neq m$, 则 M 与 m 中至少有一个不等于 $f(a)$, 不妨设 $M \neq f(a)$. 由条件(3), $M \neq f(b)$, 故最大值 M 只能被 f 在 (a, b) 内取得, 即 $x_1 \in (a, b)$, 由定理 4.1, 取 $\xi = x_1$ 即可. ■

推论 4.1 可微函数 f 的任意两个零点之间至少有导函数 f' 的一个零点.

例 4.1 证明方程 $x^3 + 2x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有且仅有一个实根.

证 设 $f(x) = x^3 + 2x + 1$, 则 $f(-1) = -2 < 0, f(0) = 1 > 0$. 根据连续函数的零点定理, 在 $(-1, 0)$ 内 f 至少有一个零点, 即方程 $x^3 + 2x + 1 = 0$ 在 $(-1, 0)$ 内至少有一个根, 设其为 x_1 . 下面证明该方程在 $(-1, 0)$ 内只有一个根. 否则, 若它还有一个根 x_2 , 则按推论 4.1, 在 x_1 与 x_2 之间至少有一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$. 然而, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, 即 f' 在 $(-1, 0)$ 内没有零点, 从而得到矛盾. 所以, 在 $(-1, 0)$ 内该方程有且仅有一个实根. ■

例 4.2 设函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 并且 $f(1) = 0$, 则至少存在一个 $c \in (0, 1)$, 使

$$f'(c) = -\frac{f(c)}{c}.$$

证 在证明之前先作一简单的分析. 为了证明结论成立, 由于 $c \neq 0$, 只要证明 $cf'(c) + f(c) = 0$ 就行了. 又因为

$$cf'(c) + f(c) = [xf(x)]'|_{x=c},$$

所以只要证明 $F(x) = xf(x)$ 满足 Rolle 定理条件就行了. 显然, F 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 又 $F(0) = F(1) = 0$, 根据 Rolle 定理, 至少存在一点 $c \in (0, 1)$, 使 $F'(c) = 0$. 又 $F'(x) = xf'(x) + f(x)$, 故有

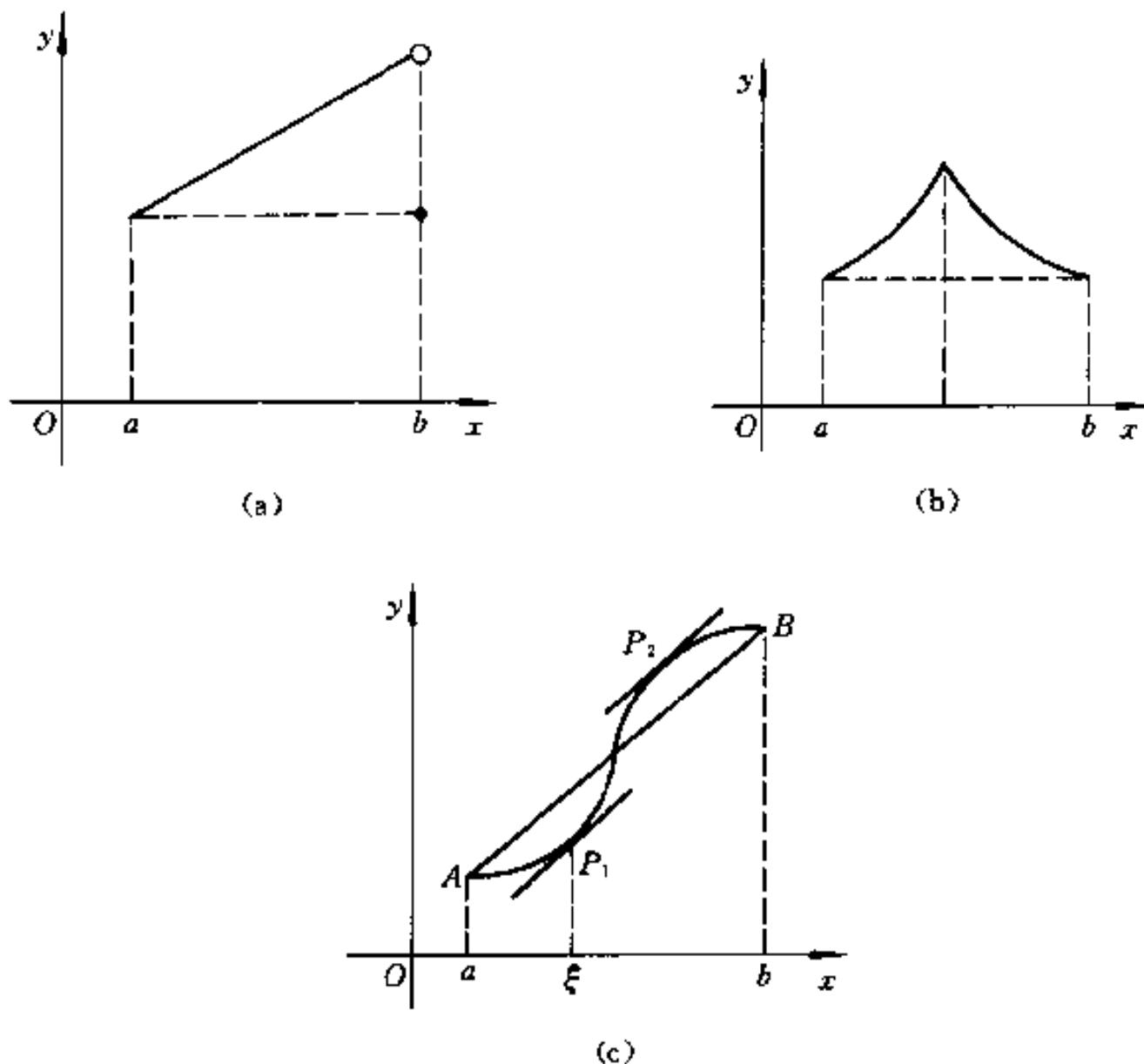


图 4.3

$$f'(c) = -\frac{f(c)}{c}. \blacksquare$$

注意,在 Rolle 定理的三个条件中只要有一个不满足,都不能保证定理的结论成立.例如,在图 4.3 的(a)、(b)与(c)中,分别画出了不满足条件(1)、(2)与(3)的三个函数的图象,显然,这三种情况都没有 \$\xi\$ 使定理结论成立.

在图 4.3 的(c)中,由于 \$f(a) \neq f(b)\$, 曲线 \$y=f(x)\$ 上没有一点的切线平行于 \$x\$ 轴.但是,不难看到,曲线上至少有一点(如点 \$P_1\$ 与 \$P_2\$)处的切线平行于弦 \$AB\$.由于弦 \$AB\$ 的斜率是 \$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\$,该曲线在点 \$P_1\$ 或 \$P_2\$ 处的斜率为 \$f'(\xi)\$,故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

由此,我们得到下面的重要定理.

定理 4.3 (Lagrange 定理) 若函数 \$f:[a, b] \rightarrow \mathbf{R}\$ 满足下列条件:

- (1) \$f\$ 在 \$[a, b]\$ 上连续;
- (2) \$f\$ 在 \$(a, b)\$ 内可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (4.1)$$

分析 为了证明结论成立, 由于 $b - a \neq 0$, 只要证明至少存在一点 ξ , 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(\xi) = 0$$

就行了. 又因为

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(\xi) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(x) \right]' \Big|_{x=\xi},$$

所以, 只要证明 $F(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(x)$ 满足 Rolle 定理的条件就行了. 由此启示我们用下面的方法来证明.

证 作辅助函数

$$F(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(x).$$

显然, 函数 F 满足 Rolle 定理的条件(1)与(2), 又

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a - f(a) = \frac{a[f(b) - f(a)] - f(a)(b - a)}{b - a} \\ &= \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b - f(b) = \frac{b[f(b) - f(a)] - f(b)(b - a)}{b - a} \\ &= \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}, \end{aligned}$$

故 $F(a) = F(b)$. 由 Rolle 定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(\xi) = 0,$$

从而有 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. ■

从上面的证明过程不难发现, 辅助函数的选取不是唯一的. 由于

$$\left[f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]' \Big|_{x=\xi} = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

因此, 也可用辅助函数

$$F(x) := f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

来证明这个定理,读者不妨一试,并说明该辅助函数的几何意义.

在 Lagrange 定理中,若 $f(a) = f(b)$, 则有 $f'(\xi) = 0$. 因此, Rolle 定理是 Lagrange 定理的特例,而 Lagrange 定理是 Rolle 定理的推广.

公式(4.1)称为 Lagrange 公式. 将两边同乘以 -1 得

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b),$$

这就是说,无论是 $a < b$ 还是 $a > b$, Lagrange 公式均成立.

Lagrange 公式还可以写成其他形式. 由于 $\xi \in (a, b)$, 所以 $0 < \frac{\xi - a}{b - a} < 1$. 令 $\theta = \frac{\xi - a}{b - a}$, 则 $\xi = a + \theta(b - a)$, 于是有

$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)](b - a) \quad (0 < \theta < 1). \quad (4.2)$$

如果取 $a = x, b = x + \Delta x$, Lagrange 公式又可写成

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x \quad (0 < \theta < 1), \quad (4.3)$$

常称(4.3)式为有限改变量公式. 它建立了函数 $y = f(x)$ 在区间上的改变量与导数之间的关系,使我们能够用导数研究函数在区间上的变化性态.

推论 4.2 设 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ 在 I 上连续,在 I 内可导,则在 I 内 $f' \equiv 0$ 的充要条件为 f 在 I 上是常数.

证 充分性是显然的,下面证明必要性.

任取 $x_1, x_2 \in I$, 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上对 f 应用 Lagrange 定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, 使

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

因此, $f(x_1) = f(x_2)$. 由 x_1, x_2 的任意性知 f 在 I 上是常数. ■

推论 4.3 设函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导,若 $x_0 \in (a, b)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A$ (有限或无限), 则

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A.$$

若 $x_0 \in (a, b]$, 则对左导数 $f'-(x_0)$ 有类似的结论.

证 根据 Lagrange 公式, 我们有

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1).$$

所以

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot A.$$

同理, 可证明关于左导数的结论. ■

前面曾经指出, 在研究分段函数的可导性时, 对于使定义域中函数有不同表达式的子区间的分界点处的可导性, 通常需要利用导数的定义来讨论. 如果函数满足推论 4.3 的条件, 那么, 利用该推论的结果来讨论比用导数定义更为简便, 下面举一个例子来说明.

例 4.3 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x \sin x, & x > 0, \end{cases}$$

求 $f'(x)$.

解 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 2x$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \sin x + x \cos x$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x + x \cos x) = 0$, 在区间 $[0, +\infty)$ 与 $(-\infty, 0]$ 上分别应用推论 4.3, 则有

$$f'_+(0) = 0, \quad f'_-(0) = 0.$$

故

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \sin x + x \cos x, & x > 0. \end{cases}$$

Lagrange 定理是最常用的一个微分中值定理, 具有重要的理论价值. 下面举例说明它在证明不等式、判断方程根的存在性等方面的应用.

例 4.4 证明: 当 $x > 0$ 时,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证 将题中的不等式变形为 $\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$, 由于

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0},$$

所以, 可取 $f(x) = \ln(1+x)$ 作为辅助函数. 容易验证 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 上满足 Lagrange 定理的条件, 因而至少存在 $\xi \in (0, x)$, 使

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0),$$

即

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}.$$

又因为 $\xi \in (0, x)$, 故有

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x,$$

从而有

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0). \blacksquare$$

也可取 $f(x) = \ln x$ ($x \in [1, 1+x]$) 作为辅助函数来证明此不等式, 读者不妨试一试.

例 4.5 设函数 $f: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ 可导, 并且 $\forall x \in (0, 1), f'(x) \neq 1$. 证明 f 有唯一的不动点 $x \in (0, 1)$.

证 令 $F(x) = f(x) - x$, 由于函数 f 与 $y = x$ 在 $[0, 1]$ 上都连续, 所以 F 在 $[0, 1]$ 上也连续, 且 $F(0) = f(0) > 0, F(1) = f(1) - 1 < 0$. 由零点定理, 至少存在一个 $x \in (0, 1)$, 使 $F(x) = 0$, 即 $f(x) = x$, 这说明 f 在 $(0, 1)$ 内至少有一个不动点.

再证明在 $(0, 1)$ 内 f 至多有一个不动点. 若存在两点 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 使 $f(x_1) = x_1, f(x_2) = x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上对 f 应用 Lagrange 定理, 那么, 至少存在一个 $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 1)$, 使

$$1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi),$$

这与在 $(0, 1)$ 内 $f'(x) \neq 1$ 相矛盾. 因此 f 在 $(0, 1)$ 内有唯一的不动点. \blacksquare

定理 4.4 (Cauchy 定理) 设 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足下列条件:

(1) f, g 在 $[a, b]$ 上连续;

(2) f, g 在 (a, b) 内可导, 并且 $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (4.4)$$

证 先证 $g(b) \neq g(a)$. 若 $g(b) = g(a)$, 则由 Rolle 定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $g'(\xi) = 0$, 这与假设在 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$ 相矛盾.

为证明定理中的结论成立, 作辅助函数

$$F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

(读者想想为什么这样作辅助函数,有没有别的作法)容易验证 $F(x)$ 满足 Rolle 定理的条件,因此,至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$F'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi) - [g(b) - g(a)]f'(\xi) = 0.$$

由于 $g'(\xi) \neq 0$, 将上式变形即得所要证明的等式(4.4). ■

在 Cauchy 定理中, 若 $g(x) = x$, 就变成 Lagrange 定理. 因此, Cauchy 定理是 Lagrange 定理的推广.

4.3 L'Hospital 法则

作为 Cauchy 中值定理的一个应用, 本段介绍一种求不定式极限的简单而有效的方法——L'Hospital 法则. 下面先讲求 $\frac{0}{0}$ 型不定式极限的 L'Hospital 法则.

定理 4.5 设函数 f, g 在区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ (其中 $\delta > 0$) 内满足下列条件:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0;$$

(2) f, g 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \quad (a \text{ 为有限实数或无穷大}),$$

则

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a.} \quad (4.5)$$

证 若 f, g 在 x_0 处不右连续, 可补充定义 $f(x_0) = g(x_0) = 0$, 使 f, g 在 x_0 右连续, 这样做并不影响极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ 的值.

取 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 则 f, g 在区间 $[x_0, x]$ 上满足 Cauchy 定理的条件, 故存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, 显然有 $\xi \rightarrow x_0^+$, 从而得

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = a. \quad ■$$

由证明过程不难看出, 定理 4.5 对于当 $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow x_0$ 等情形也可得到相应的结论. 如果 $x \rightarrow \infty (+\infty)$, 那么可通过变量代换 $x = \frac{1}{t}$ 化为 $t \rightarrow 0$ 的情形, 得到类似的结论. 这里不再一一叙述和推证.

在应用 L'Hospital 法则的时候,应注意检查 f, g 是否满足条件(1),(2). 经常遇到这种情况,用一次 L'Hospital 法则后,得到的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍然属于 $\frac{0}{0}$ 型不定式. 在这种情况下,只要 f', g' 仍满足定理 4.5 中的相应条件,还可继续使用该法则.

例 4.6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$.

解 显然,分子与分母在 $x=0$ 的邻域内满足条件(1),(2),应用 L'Hospital 法则,得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x}.$$

由于上式右端仍为 $\frac{0}{0}$ 型,且分子分母仍满足条件(1),(2),所以可以再次使用该法则,得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sec^2 x \cdot \tan x}{\sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 x = 2. \quad \blacksquare$$

读者可能注意到,上面第二个等式利用了当 $x \rightarrow x_0$ 时 $\tan x$ 与 $\sin x$ 是等价无穷小这个事实. 与通常求极限过程一样,在应用 L'Hospital 法则时,前面讲过的消去公因子与无穷小等价代换等方法可以同时使用. 如果式中含有极限不为零的因子,则可先求出该因子的极限值. 这样做可以使余下的不定式比较简单,便于继续使用该法则.

例 4.7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - e^x - 3x - 1}{(e^x - 1)^2 e^x}$.

解 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x \rightarrow 1$, 且 $e^x - 1 \sim x$, 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - e^x - 3x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - e^x - 3}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8e^{2x} - e^x}{1} \sim \frac{7}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

关于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式,我们有下面的定理(证明从略).

定理 4.6 设 f, g 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内满足定理 4.5 中的条件(2)与(3),条件(1)改为

$$(1') \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

则有同样的结论成立.

与定理 4.5 一样, 该法则对于 $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow \infty$ ($\pm \infty$) 等情形也成立.

例 4.8 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha}$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}}$ ($a > 1, \alpha, \beta > 0$).

解 这两个极限都属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式, 应用 L'Hospital 法则得:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} \log_a e}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha \ln a} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha} = 0; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta a^{\beta x} \ln a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\beta^2 a^{\beta x} (\ln a)^2} \\ &= \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{\beta^n a^{\beta x} (\ln a)^n} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{\beta^{n+1} a^{\beta x} (\ln a)^{n+1} x^{n+1-\alpha}} = 0,\end{aligned}$$

其中 $n = [\alpha]$. ■

由例 4.8 易见, 虽然当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\log_a x, x^\alpha, a^{\beta x}$ 都是无穷大量, 但是, x^α 是 $\log_a x$ 的高阶无穷大, $a^{\beta x}$ 又是 x^α 的高阶无穷大. 这反映了当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 它们趋近无穷大的速度不同, 指数函数 $a^{\beta x}$ 增大得最快, 幂函数 x^α 次之, 对数函数 $\log_a x$ 增大得最慢. 从这些函数的图象上也不难看到这个事实.

除了 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型之外, 还有 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ 等类型的不定式, 都可设法将它们化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式来计算. 例如, 0^0 表示当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)^{g(x)}$ 中的 $f(x) \rightarrow 0^+$, $g(x) \rightarrow 0$. 此时, 可将 $f(x)^{g(x)}$ 改写成 $e^{g(x) \ln f(x)}$, 从而求 0^0 型不定式的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$ 就转化为求 $0 \cdot \infty$ 型不定式的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)$, 下面举例说明.

例 4.9 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x); \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1} \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

解 (1) 这是 $\infty - \infty$ 型不定式, 由于

$$\sec x - \tan x = \frac{1 - \sin x}{\cos x},$$

当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, 它就转化成 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 应用 L'Hospital 法则,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\cos x}{-\sin x} \right) = 0.$$

(2) 这是一个数列的极限, 属于 $0 \cdot \infty$ 型不定式, 可以利用 Heine 定理将它转化为求相应函数的极限. 由于

$$x \left(\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x+1} \right) = \frac{\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}},$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 右端是 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 应用 L'Hospital 法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} \cos \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\cos \frac{1}{x} - \frac{x^2}{(x+1)^2} \cos \frac{1}{x+1} \right] = 0. \end{aligned}$$

根据 Heine 定理, 得知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1} \right) = 0.$$

(3) 此极限属于 0^0 型不定式, 由于

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)},$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\ln \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)}{\ln x}$ 属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式, 应用 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Big/ \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) \right] = -1. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{e}. \quad \blacksquare$$

例 4.10 求一个 n 次多项式 $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 使

$$e^x = P_n(x) + o(x^n).$$

解 为使 $e^x = P_n(x) + o(x^n)$, 就是要使

$$e^x - P_n(x) = o(x^n),$$

从而有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_n(x)}{x^k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

取 $k=0$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} [e^x - P_n(x)] = 0$, 得知 $a_0 = e^0 = 1$.

取 $k=1$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_n(x)}{x} = 0$, 应用 L'Hospital 法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_n(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} [(e^x)' - P'_n(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(e^x)' - (a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1})] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(e^x)' - a_1] = 0, \end{aligned}$$

从而 $a_1 = (e^x)'|_{x=0} = 1$.

取 $k=2$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_n(x)}{x^2} = 0$, 连续 2 次应用 L'Hospital 法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_n(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x)' - P'_n(x)}{2x} = \frac{1}{2!} \lim_{x \rightarrow 0} [(e^x)'' - P''_n(x)] \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{x \rightarrow 0} [(e^x)'' - [2! a_2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2}]] \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{x \rightarrow 0} [(e^x)'' - 2! a_2] = 0, \end{aligned}$$

从而 $a_2 = \frac{1}{2!} (e^x)''|_{x=0} = \frac{1}{2!}$.

由归纳法可证, $a_k = \frac{1}{k!} (e^x)^{(k)}|_{x=0} = \frac{1}{k!} \quad (k=3, 4, \dots, n)$.

因此, 我们有

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + o(x^n). \quad \blacksquare$$

若记 $f(x) = e^x$, 则系数 $a_k = \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$. 这时上式可写成如下形式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (4.6)$$

下一节我们将看到,(4.6)式具有一般性.

习题 2.4

(A)

1. 下列函数在给定的区间上是否满足 Rolle 定理中的条件? 如果满足, 求出定理中的 ξ ; 如果不满足, ξ 是否一定不存在?

$$(1) f(x) = \frac{3}{2x^2 + 1}, [-1, 1]; \quad (2) f(x) = 2 - |x|, [-2, 2];$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x < 0, \\ -x^2 + 2x + 1, & 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

2. 证明: 对函数 $f(x) = px^2 + qx + r$ 在某区间上应用 Lagrange 中值定理时所求得的点 ξ 是该区间的中点, 其中 p, q 与 r 是常数, $p \neq 0$.

3. 能否用下面的方法证明 Cauchy 定理? 为什么?

对 f, g 分别应用 Lagrange 定理得,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)(b-a)}{g'(\xi)(b-a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

4. 设 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 问方程 $f'(x) = 0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间.

5. 设 $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 并且满足 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, 证明: 方程 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

6. 设函数 $y = f(x)$ 二阶可导, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 其中 $x_1 < x_2 < x_3$, 证明至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_3)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

7. 设 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 并且 $\forall x \in (a, b), f'(x) = g'(x)$, 证明: 在 $[a, b]$ 上

$$f(x) = g(x) + C \quad (C \in \mathbb{R} \text{ 是常数}).$$

8. 证明: 在闭区间 $[-1, 1]$ 上,

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

9. 设 $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, $f(0) = 0$, $|f'(x)| \leq 1$, 证明: 在 $(-1, 1)$ 上, $|f(x)| \leq 1$.

10. 证明下列不等式:

$$(1) |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|;$$

$$(2) \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (a>b>0);$$

$$(3) e^x > xe \quad (x>1).$$

11. 设 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是可导函数, 且 $g' \neq 0$, 证明: 存在 $c \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(a) - f(c)}{g(c) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

12. 证明方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 有唯一的正根.

13. 在下列求极限的过程中都应用了 L'Hospital 法则, 解法有无错误?

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1} = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin x + x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x + 1}{1}, \text{ 极限不存在};$$

(3) 设 f 在 x_0 处二阶可导, 则

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + h) + f''(x_0 - h)}{2} = f''(x_0). \end{aligned}$$

14. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\arctan x - \frac{\pi}{2}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \ln \frac{1+x}{1-x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan^2 x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

$$15. \text{试用三种方法求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

16. 试确定常数 a, b , 使极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + a \cos 2x + b \cos 4x}{x^4}$$

存在, 并求出它的值.

17. 设函数 f 具有一阶连续导数, $f''(0)$ 存在, 且 $f'(0) = 0, f(0) = 0$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

- (1) 确定 a 使 $g(x)$ 处处连续；
 (2) 对以上所确定的 a , 证明 $g(x)$ 具有一阶连续导数.

(B)

1. 设函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$, 证明: 存在点 $x_0 \in (0, 1)$, 使

$$nf(x_0) + x_0 f'(x_0) = 0.$$

2. 设 f 在 $[a, b]$ 上可微, 且 a 与 b 同号, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$(1) 2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi);$$

$$(2) f(b) - f(a) = \xi \left(\ln \frac{b}{a} \right) f'(\xi).$$

3. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \exists c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = \lambda f(c)$.

4. 证明不等式: $\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$.

5. 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ 二阶可微, $f(0) = f(1), f'(1) = 1$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = 2$.

6. 设 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

7. 设 f 在 $x=0$ 的某邻域内 n 阶可导, $f(0) = f'(0) = \dots = f^{n-1}(0) = 0$, 试用 Cauchy 定理证明:

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n, \quad \theta \in (0, 1).$$

8. 设抛物线 $y = -x^2 + Bx + C$ 与 x 轴有两个交点 $x=a, x=b$ ($a < b$). 函数 f 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 并且曲线 $y = f(x)$ 与 $y = -x^2 + Bx + C$ 在 (a, b) 内有一个交点. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f''(\xi) = -2$.

9. 设 f 在 $[a, b]$ 上二阶可微, $f(a) = f(b) = 0, f'_+(a) f'_-(b) > 0$, 则方程 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个根.

10. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $a \geq 0$, 证明: 存在 $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, 使

$$f'(x_1) = (b+a) \frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2+ab+a^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

第五节 Taylor 定理

用简单函数逼近(近似表示)复杂函数是数学中的一种基本思想方法. 本节将要介绍的 Taylor 定理就是用高阶多项式来逼近具有一定可微性的函数所得到的一个基本定理, 它在理论研究和近似计算中有重要的应用.

5.1 Taylor 定理

第三节中曾经指出,如果函数 f 在 x_0 处可微,那么可用微分来近似计算函数 f 在 x_0 附近的值.也就是说,当 $|x - x_0|$ 很小时,可用线性函数(一次多项式)来近似表示 $f(x)$,即

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

这个近似公式具有形式简单、计算方便的优点,但也存在着精度不高、计算误差仅是 $x - x_0$ 的高阶无穷小 $o(x - x_0)$ 的不足.之所以会出现这样的缺点,从几何上看,是由于这个近似公式是用曲线 $y = f(x)$ 上与 x_0 相对应的点处的切线(直线)来代替该曲线得到的.我们自然会想到,用曲线来代替曲线比用直线代替曲线精确度可能更高.在曲线中,比较简单的是关于 $x - x_0$ 的高次多项式所表示的曲线,因为多项式也具有形式简单,计算方便(只用到加法和乘法运算)的优点.

现在的问题是:能否找到一个适当的 $n(n > 1)$ 次多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

来逼近 $f(x)$ 并使误差为 $(x - x_0)^n$ 的高阶无穷小? 如果能够找到,那么使等式

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad (5.1)$$

成立的 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 应满足什么条件? 上一节例 4.10 表明,对于指数函数 $f(x) = e^x$, (5.1) 式成立(其中 $x_0 = 0$),并且 $P_n(x)$ 的系数

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

这启示我们,如果 f 在 x_0 处 n 阶可微,并且 $P_n(x)$ 的系数

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

那么(5.1)式是否也能成立呢? 下面的定理对这个问题作了肯定的回答.

定理 5.1 (Taylor 定理) 设函数 f 在 x_0 处 n 阶可微,则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n). \quad (5.2)$$

证 记

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (5.3)$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (\text{称为 } f(x) \text{ 的余项}).$$

由于 f 在 x_0 处 n 阶可微, 因此, f 必在 x_0 的某邻域内 $n-1$ 阶可微. 从而易知, $R_n(x)$ 在此邻域内也 $n-1$ 阶可微, 并且

$$\left. \begin{aligned} R'_n(x) &= f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}, \\ R''_n(x) &= f''(x) - \sum_{k=2}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}, \\ &\dots\dots \\ R_n^{(n-1)}(x) &:= f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} R'_n(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} R_n^{(n-1)}(x) = 0.$$

为了证明 (5.2) 式成立, 只要证明 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ 或者证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ 就行了. 连续使用 $n-1$ 次 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{x-x_0}.$$

由于定理中仅假设 f 在 x_0 处 n 阶可微, 因而 $R_n(x)$ 也仅在 x_0 处 n 阶可微, 故上式中最后这个 $\frac{0}{0}$ 型不定式不满足 L'Hospital 法则的条件, 需要另想办法求出它的极限. 由 (5.4) 式中最后一个等式及导数的定义, 易得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] = 0,$$

从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, 即 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$. ■

称由 (5.3) 式所表示的多项式为函数 f 在 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式, 其系数称为 f 在 x_0 处的 Taylor 系数. 称公式 (5.2) 为 f 在 x_0 处的带 Peano 余项的 Taylor 公式, 而 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ 称为 f 的 Peano 余项, 它就是用 n 次 Taylor 多项式 $P_n(x)$ 来近似计算 $f(x)$ 所产生的误差. 但是, 用这个余项来估计误差, 仅能说明误差是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小, 还不能对误差的大小作具体的数值分析, 也不能说明用 $P_n(x)$ 来近似计算 $f(x)$ 的值达到怎样的精确度. 因而, 还需要研究余项 $R_n(x)$ 的更具体的表达式. 为此, 下面给出 Taylor 定理的另一表达形式.

定理 5.2 设函数 f 在区间 I 上 $n+1$ 阶可导, $x_0 \in I$, 则对任何 $x \in I$, 在 x 与 x_0 之间至少存在一点 ξ , 使

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (5.5)$$

证 为了证明(5.5)式成立, 只要证明

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

或

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

令 $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$, 则

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0, \quad g^{(n+1)}(x_0) = (n+1)!.$$

由余项 $R_n(x)$ 的表达式(5.4)不难验证

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \cdots = R^{(n)}(x_0) = 0, \quad R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

在以 x 与 x_0 为端点的区间上对 $R_n(x)$ 与 $g(x)$ 应用 Cauchy 定理, 得

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R'_n(\xi_1)}{g'(\xi_1)} \quad (\xi_1 \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间});$$

在以 x_0 与 ξ_1 为端点的区间上对 $R'_n(x)$ 与 $g'(x)$ 应用 Cauchy 定理, 又得

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} = \frac{R''_n(\xi_2)}{g''(\xi_2)} \quad (\xi_2 \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间});$$

上述步骤继续进行到 $n+1$ 次, 读者不难证明,

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{g(x)} &= \frac{R'_n(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{R''_n(\xi_2)}{g''(\xi_2)} = \cdots = \frac{R^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)} = \frac{R^{(n)}(\xi_n) - R^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(\xi_n) - g^{(n)}(x_0)} \\ &= \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x_0 与 ξ_n 之间, ξ_n 介于 x_0 与 ξ_{n-1} 之间, \cdots , ξ_1 介于 x_0 与 x 之间, 因而 ξ 也介于 x_0 与 x 之间, 从而定理得证. ■

(5.5)式称为 f 在 x_0 的邻域内带 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 公式, 其中余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

称为 Lagrange 余项. 它也可写成如下形式:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

在(5.2)式中, 取 $n=1$, 就得到一阶微分公式; 在(5.5)式中取 $n=0$, 就得到 Lagrange 公式. 因此, 带 Peano 余项的 Taylor 公式是一阶微分公式的推广, 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式是 Lagrange 公式的推广.

Lagrange 余项较之于 Peano 余项更便于对误差进行数值估计. 事实上, 如果 f 在区间 I 上 $n+1$ 阶可导, 并且存在常数 $M > 0$, 使得 $\forall x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M$, 那么

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

又若 I 的左、右端点分别是有限值 a 与 b , 则

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

这表明, 只要 $f^{(n+1)}$ 在有限区间 I 上有界, 用 n 次 Taylor 多项式 $P_n(x)$ 来近似代替 $f(x)$, 其绝对误差 $|R_n(x)|$ 随着 n 的增大可变得任意小, 从而可以选取适当的 n 使计算达到要求的任何精确度.

如果 $x_0=0$, 那么公式(5.5)就变成

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1), \end{aligned} \quad (5.6)$$

它常被称为 Maclaurin 公式, 是 Taylor 公式的一种常用的特殊情形.

5.2 几个初等函数的 Maclaurin 公式

下面, 利用(5.6)式求出几个常用初等函数在 $x_0=0$ 处的 Taylor 公式, 也就是它们的 Maclaurin 公式.

指数函数 $f(x)=e^x$ 的 Maclaurin 公式 根据例 2.15 中的 n 阶导数公式(1), $f^{(k)}(x)=e^x$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$), 从而有 $f^{(k)}(0)=1$, 代入(5.6)式便得

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \theta \in (0, 1).} \quad (5.7)$$

正弦函数 $f(x) = \sin x$ 的 Maclaurin 公式 根据例 2.15 中的 n 阶导数公式(2),

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

从而有: 当 $k = 2m$ 时, $f^{(2m)}(0) = 0$; 当 $k = 2m + 1$ 时, $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$, 代入公式(5.6)得

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \\ &\quad (-1)^m \frac{\cos \theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \theta \in (0, 1). \end{aligned} \tag{5.8}$$

类似可得余弦函数 $f(x) = \cos x$ 的 Maclaurin 公式:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \\ &\quad (-1)^{m+1} \frac{\cos \theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \theta \in (0, 1). \end{aligned} \tag{5.9}$$

对数函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 的 Maclaurin 公式 根据例 2.15 中的 n 阶导数公式(5),

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

从而有 $f^{(k)}(0) = (-1)^{(k-1)}(k-1)!$, 代入公式(5.6)便得

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n} + \\ &\quad (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad x \in (-1, +\infty), \theta \in (0, 1). \end{aligned} \tag{5.10}$$

幂函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) 的 Maclaurin 公式 根据例 2.15 中的 n 阶导数公式(4),

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

从而有 $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$, 代入公式(5.6)便得

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \\ &\quad \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}, \quad x \in (-1, +\infty), \theta \in (0, 1). \end{aligned} \tag{5.11}$$

特别地,当 $\alpha = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 时,得到三个常用的幂函数的 Maclaurin 公式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta_x)^{n+2}}; \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n} x^n + \\ &\quad (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n+2)} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta_x)^{n+\frac{1}{2}}}; \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n} x^n + \\ &\quad (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n+2)} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta_x)^{n+\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

在(5.7)~(5.11)式中,均采用 Lagrange 余项.若将余项用小 o 来表示,不难得到上面几个初等函数相应的带 Peano 余项的 Maclaurin 公式.例如,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}), \\ &\quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

其余由读者自行写出,不再一一罗列.

5.3 Taylor 公式的应用

(1) 用于近似计算 在近似计算函数值的时候,利用 Taylor 公式较之利用微分精确度更高,适用的范围更广,而且可以估计误差.如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, $R_n(x) \rightarrow 0$,那么可以把函数值计算到任何精确度.

例 5.1 近似计算 e 的值,并估计误差.

解 在 e^x 的 Taylor 公式(5.7)中取 $x=1$,得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0,1).$$

由于 $e^\theta < e < 3$,故

$$R_n(1) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此,只要 n 取得充分大,用近似公式

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

来计算 e 的近似值可以达到我们所需要的任意精确度. 例如, 要使误差小于 10^{-5} , 即要

$$R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5},$$

只要取 $n=8$ 就行了, 因为 $R_8(1) < \frac{3}{9!} < 10^{-5}$. 于是 e 的误差小于 10^{-5} 的近似值为

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.71828. \blacksquare$$

例 5.2 求方程

$$x^5 + \epsilon x - 32 = 0$$

的一个近似实根, 其中 ϵ 是一个很小的参数.

解 根据习题 1.6(A) 中的第 15 题, 此方程至少有一个依赖于 ϵ 的实根 $x = f(\epsilon)$. 但是, 五次方程没有精确的求根公式, 下面来求根的近似表达式. 大家知道, 数学中的方程是实际问题的近似抽象. 但在实际问题中, 对参数的测量总是有误差的. 在正常的情况下, 人们总希望参数的微小变化所引起的函数值的变化也很微小, 否则, 很难利用该方程对问题进行有效的研究. 因此, 可以假定由该方程所确定的隐函数 $x = f(\epsilon)$ 是连续的, 而且具有足够的可微性^①. 这样, 利用 Taylor 公式(5.6)就有(仅取 $n=2$)

$$x = f(\epsilon) \approx f(0) + f'(0)\epsilon + \frac{f''(0)}{2!}\epsilon^2. \quad (5.12)$$

现在来确定上式右端的诸系数. 由已知方程可见, 当 $\epsilon = 0$ 时, $x = 2$, 故 $f(0) = 2$. 为求 $f'(0)$, 利用隐函数求导法对原方程两边关于 ϵ 求导得

$$5x^4 \frac{dx}{d\epsilon} + \epsilon \frac{dx}{d\epsilon} + x = 0, \quad (5.13)$$

从而有

$$f'(0) = \left. \frac{dx}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = - \left. \frac{x}{5x^4 + \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = - \frac{1}{40}.$$

再对方程(5.13)关于 ϵ 求导得

$$(5x^4 + \epsilon) \frac{d^2x}{d\epsilon^2} + 20x^3 \left(\frac{dx}{d\epsilon} \right)^2 + 2 \frac{dx}{d\epsilon} = 0,$$

^① 利用第五章中的隐函数存在定理, 可以证明本例中的方程确定了一个可微的隐函数 $x = f(\epsilon)$.

从而解得

$$f''(0) = \frac{d^2x}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} = -\frac{20x^3 \left(\frac{dx}{d\epsilon}\right)^2 + 2 \frac{dx}{d\epsilon}}{5x^4 + \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{1600}.$$

于是我们得到所求方程实根的二次近似表达式：

$$x \approx 2 - \frac{\epsilon}{40} - \frac{\epsilon^2}{3200}.$$

根据实际问题的精度要求,还可以求出该方程更高次的近似根的表达式.这种利用 Taylor 公式求方程的关于小参数 ϵ 近似根的方法就是所谓振动法. ■

(2) 用于求极限 利用带 Peano 余项的 Taylor 公式来计算函数的极限也是求极限的一种很好的方法.

例 5.3 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

$$\text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^3} \right] = -\frac{1}{6}. \quad \blacksquare$$

例 5.4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_1(x^5) \right] - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o_2(x^4) \right]}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{12} + \frac{o_1(x^5)}{x^4} - \frac{o_2(x^4)}{x^4} \right] = -\frac{1}{12}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(3) 证明不等式

例 5.5 设 $f''(x) > 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 x 是等价无穷小, 证明: 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) > x$.

证 由于题目中含有二阶导数, 启示我们利用 Taylor 公式去解决可能更方便. 因为如果要利用 Lagrange 定理, 那么至少要用两次. 取 $x_0 = 0$, 由 Taylor 公式(5.5)得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \quad (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } 0 \text{ 之间}).$$

又已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 x 是等价无穷小, 故有 $f(x) = x + o(x)$. 将此式看成带 Peano 余项的 Taylor 公式(5.2)当 $n = 1$ 时的特殊情形, 从而得知 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 所以

$$f(x) = x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

又 $f''(x) > 0$, 因此当 $x \neq 0$ 时有 $f(x) > x$. ■

用同样的方法可证, 若 $f''(x) < 0$, 则有不等式 $f(x) < x$.

由例 5.5 及上面的结论容易得到下列不等式:

$$e^x > 1 + x (x \neq 0); \quad \sin x < x (0 < x \leq \pi);$$

$$\ln(1+x) < x (x > -1, x \neq 0); \quad \arcsin x > x (-1 < x < 1, x \neq 0) \text{ 等.}$$

Taylor 公式还有很多重要的应用, 例如, 下一节我们将用它来研究函数的极值问题.

习题 2.5

(A)

1. 设 $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 3$, 写出它在 $x_0 = 1$ 处的三阶 Taylor 多项式.

2. 写出下列函数的 Maclaurin 公式:

$$(1) f(x) = \frac{1}{1-x};$$

$$(2) f(x) = \ln(1-x);$$

$$(3) f(x) = \operatorname{ch} x;$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$$

3. 求下列函数在指定点处带 Peano 余项的 Taylor 公式:

$$(1) f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -1;$$

$$(2) f(x) = \ln x, x_0 = 1;$$

$$(3) f(x) = e^{2x}, x_0 = 1;$$

$$(4) f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

4. 证明: 当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, 按公式

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

计算 e^x 的近似值时所产生的误差小于 0.01; 并求 \sqrt{e} 的近似值, 使误差小于 0.01.

5. 应用三阶 Taylor 公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

$$(1) \sqrt[3]{30};$$

$$(2) \sin 18^\circ.$$

6. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^x - \sqrt{x^6 + 1} \right];$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2 \sin x^2}.$$

$$7. \text{ 设 } f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}.$$

(B)

1. 设函数 $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 并且满足 $|f(x)| \leq 1, |f'(x)| \leq 1$, 证明: 在

$[0,2]$ 上必有 $|f'(x)| \leq 2$.

2. 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 二阶可导, 并且 $|f(x)| < k_0$, $|f'(x)| < k_2$, k_0, k_2 为常数.

(1) 写出 $f(x+h)$ 与 $f(x-h)$ 的 Taylor 展开式 ($h > 0$);

(2) 证明: $\forall h > 0$, $|f'(x)| \leq \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2}k_2$;

(3) 求 $\varphi(h) = \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2}k_2$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值;

(4) 证明: $k_1 \leq \sqrt{2k_0k_2}$, 其中 $k_1 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)|$.

3. 设 $f \in C^{(3)}[0,1]$, $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $|f''(\xi)| \geq 24$.

4. 设函数 f 在 $x=0$ 的某邻域内有三阶导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3,$$

试求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

第六节 函数性态的研究

有了微分中值定理和 Taylor 公式, 就可以利用导数来研究函数在区间上的变化性态. 本节主要讨论函数的单调性、极值与最值、凸性等.

6.1 函数的单调性

单调性是函数的重要性态. 然而, 利用定义来讨论函数的单调性往往是非常困难的. 下面介绍一种利用 Lagrange 定理建立的判断可导函数单调性的简便方法.

定理 6.1 设 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ 在 I 上连续, 在 I 内可导, 则下述命题成立:

(1) f 在 I 上单调增(减)的充要条件是在 I 内 $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$);

(2) 若在 I 内 $f' > 0$ ($f' < 0$), 则 f 在 I 上严格单调增(减).

证 (1) 充分性 任取 $x_1, x_2 \in I$, 不妨设 $x_2 > x_1$, 根据 Lagrange 定理,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 (\leq 0), \quad \xi \in (x_1, x_2),$$

因此, f 在 I 上单调增(减).

必要性 设 f 在 I 上单调增(减), 对 I 内的任何 x , 取 Δx , 使 $x + \Delta x$ 仍在 I 内, 则有

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 (\leq 0),$$

从而

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0 (\leqslant 0).$$

(2) 的证明类似于(1)的充分性,由读者自己去完成. ■

应当注意,若 f 在 I 上严格单调增(减), f' 在 I 内不一定处处为正(负). 例如, $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格单调增的,但是 $f'(0) = 0$, 即在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在着导数为 0 的点. 因此,为了判定给定函数 f 的单调区间,应先求出方程 $f'(x) = 0$ 的根(若 f 有不可导的点,还应求出这些不可导的点),将 f 的定义区间分成若干子区间,然后再考虑 f' 在这些子区间上的符号,根据定理 6.1 判定 f 在各子区间上的单调性.

例 6.1 讨论函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的单调性.

解 由于 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, 解方程 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 f 在 $(-\infty, -1)$ 内严格单调增; 当 $x \in (-1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 f 在 $(-1, 3)$ 内严格单调减; 当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 f 在 $(3, +\infty)$ 内严格单调增. ■

利用函数的单调性,可以证明一些不等式.

例 6.2 证明:当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x > x$.

证 令 $f(x) = \tan x - x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

故 f 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调增. 又 $f(0) = 0$, 所以在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内,

$$f(x) = \tan x - x > f(0) = 0, \text{ 即 } \tan x > x. \quad ■$$

例 6.3 证明:当 $0 < x < 1$ 时, $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$.

证 为了证明此题中的不等式,只要证明

$$(1-x)e^{2x} < 1+x \quad (0 < x < 1).$$

令 $f(x) = (1-x)e^{2x} - 1 - x$, $x \in [0, 1)$, 则

$$f'(x) = (1-2x)e^{2x} - 1, \quad f''(x) = -4xe^{2x}.$$

由于在 $(0, 1)$ 内, $f''(x) < 0$, 故 f' 在 $[0, 1)$ 内严格单调减, 从而在 $(0, 1)$ 内 $f'(x) < f'(0) = 0$. 由此又知 f 在 $[0, 1)$ 内严格单调减, 得

$$f(x) < f(0) = 0, \quad \text{或 } (1-x)e^{2x} < 1+x,$$

因此原不等式成立. ■

6.2 函数的极值

由 Fermat 定理(定理 4.1)知,若函数 f 在 x_0 处可导,则 f 在 x_0 处取得极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$. 使 $f'(x)=0$ 的点称为 f 的驻点. 因此, 可导函数的极值点必定是它的驻点. 但是, 反过来不一定成立. 例如, $x=0$ 是 $f(x)=x^3$ 的驻点, 但不是 f 的极值点, 因为它是严格单调增函数.

哪些驻点才是极值点呢? 通常可用下面两个充分条件(定理 6.2 与定理 6.3)来判定.

定理 6.2 设 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内可导, 并且 $f'(x_0)=0$.

- (1) 若 $x < x_0$ 时, $f'(x) \geq 0$; $x > x_0$ 时, $f'(x) \leq 0$, 则 f 在 x_0 处取得极大值;
- (2) 若 $x < x_0$ 时, $f'(x) \leq 0$; $x > x_0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 则 f 在 x_0 处取得极小值;
- (3) 若 $f'(x)$ 在 x_0 的左右两侧同号, 则 f 在 x_0 处不取得极值.

证 (1) 由定理 6.1, 当 $x < x_0$ 时, f 单调增; 当 $x > x_0$ 时, f 单调减, 故 f 在 x_0 处取极大值.

(2)、(3) 的证法与(1)类似, 由读者补证. ■

由定理的证明过程易见, 若 f 在 x_0 的去心邻域内可导, 在 x_0 处连续, 则结论仍成立. 因此, 不可导点也可能是函数的极值点, 在研究函数极值的时候, 应当一并考虑.

由上述讨论, 我们得到确定函数极值的一种方法, 步骤如下:

- (1) 求出函数 f 在所讨论区间内的所有驻点与不可导的点;
- (2) 考察导函数 f' 在各驻点与不可导点左右两侧符号的变化, 判定它们是否为 f 的极值点, 是极大值点还是极小值点;
- (3) 求出 f 的极值.

例 6.4 求函数 $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ 的极值.

解 按照上述步骤, 我们有:

(1) $f'(x) = \frac{4-x}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(6-x)^2}}$, 由 $f'(x)=0$ 解得驻点 $x=4$, 并且易见 f 在 $x=0$ 与 $x=6$ 处连续但导数不存在.

(2) 将 f' 在驻点与不可导点两侧符号的变化与 f 的极值点列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	-	∞	+	0	-	∞	-
$f(x)$	严格单调减	极小	严格单调增	极大	严格单调减	非极值	严格单调减

(3) f 的极大值为 $f(4) = 2\sqrt[3]{4}$, 极小值为 $f(0) = 0$. ■

如果由函数 f 的导数 f' 的表达式不易确定它在驻点左右邻域内的符号, 但函数 f 在驻点处二阶可导, 则可利用下面的定理来判定该驻点是否为极值点.

定理 6.3 设 f 在 x_0 处二阶可导, 并且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, 则当 $f''(x_0) > 0 (< 0)$ 时, f 在 x_0 处取极小(大)值.

证 由于 f 在 x_0 处二阶可导, 所以在 x_0 的邻域内, 带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式成立, 即

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \end{aligned}$$

从而有

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

由于右端第二项是第一项的高阶无穷小, 因此, 在 x_0 的充分小的邻域内, $f(x) - f(x_0)$ 的符号取决于第一项. 所以, 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x) - f(x_0) > 0$, 即 $f(x) > f(x_0)$, f 在 x_0 取极小值. 类似可证明 $f''(x_0) < 0$ 的情况. ■

定理 6.3 提供了确定函数极值的第二种方法, 步骤如下:

- (1) 求出 f' 与 f'' , 由方程 $f'(x) = 0$ 解得 f 的所有驻点;
- (2) 考察 f'' 在各驻点处的符号, 判定它们是极大值点还是极小值点;
- (3) 求出 f 的极值.

例 6.5 求函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ 的极值.

解 由于 f 是以 2π 为周期的周期函数, 因此, 只要考察 f 在一个周期 $[0, 2\pi]$ 内的情况.

(1) $f'(x) = \cos x - \sin x, f''(x) = -(\sin x + \cos x)$, 解 $f'(x) = 0$ 得 f 的驻点 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

(2) 由于 $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0$, 所以 $x = \frac{\pi}{4}$ 为 f 的极大值点; 又由于 $f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0$, 所以 $x = \frac{5\pi}{4}$ 为 f 的极小值点.

(3) f 的极大值为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 极小值为 $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$. ■

如果在驻点 x_0 处, $f''(x_0) = 0$, 那么用定理 6.3 也不能判定 x_0 是否为极值点. 在这种情况下, 我们自然想到是否可求助于更高阶的导数. 事实上, 利用带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可以证明下面的定理.

定理 6.4 设函数 f 在 x_0 处 $n(n \geq 2)$ 阶可导, 并且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 而 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(1) 当 n 为偶数时, x_0 必为极值点. 若 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小值点; 若 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大值点;

(2) 当 n 为奇数时, x_0 不是极值点.

6.3 函数的最大(小)值

前面已经指出, 在闭区间上的连续函数一定能取得最大值与最小值. 在很多学科领域与实际问题中, 经常提出在一定条件下用料最省、成本最低、时间最短、效益最高等问题, 这类问题称为最优化问题. 在数学上, 它们常归结为求一个函数(称为目标函数)的最值问题. 这一段中, 我们仅研究一些最简单的最值问题.

根据闭区间上连续函数的性质以及函数取得极值的条件得知, 若 $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上必能取得最大(小)值, 并且最大(小)值点可能是:(1) f 在 (a, b) 内的极值点. 极值点可能是 f 的驻点, 也可能是 f 的不可导点;(2) 区间 $[a, b]$ 的端点. 因此, 我们只要求出 f 在 (a, b) 内的所有驻点与不可导点, 并将 f 在这些点上的值与端点值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 加以比较, 就可以得到 f 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值.

例 6.6 求函数 $f(x) = x^p + (1-x)^p$ ($p > 1$) 在 $[0, 1]$ 上的最值.

解 由于

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1},$$

解方程 $f'(x) = 0$, 得 f 的驻点 $x = \frac{1}{2}$. 又 f 没有不可导点, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1-p}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, 比较得知 f 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 2^{1-p} , 最大值为 1. ■

由此例立即可得下面的不等式:

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1 \quad (x \in [0, 1], p > 1). \quad (6.1)$$

在研究函数的最值问题的时候, 常常会遇到一些特殊情况. 此时, 上述步骤可以适当简化. 例如:(1) 若 f 是区间 $[a, b]$ 上的单调函数, 则其最大(小)值必然在区间 $[a, b]$ 的端点上取得;(2) 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 在 (a, b) 内有唯一的驻点 x_0 . 若 x_0 是极大(小)值点, 则 x_0 就是 f 在 $[a, b]$ 上的最大(小)值点;(3) 在实际问题中, 若目标函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且有唯一的驻点 x_0 . 如果能根据问题的实际意义, 判定 f 在 (a, b) 内必有最大(小)值, 那么 x_0 就是 f 的最大(小)值点.

例 6.7 用铁皮做成一个容积一定的圆柱形无盖的容器, 问应当如何设计.

才能使用料最省?

解 首先根据问题的要求建立目标函数. 依题意, 用料最省就是要容器的表面积最小. 设其表面积为 S , 高为 H , 底半径为 R , 则

$$S = 2\pi RH + \pi R^2 \quad (0 < H, R < +\infty).$$

又设容器的体积为 V , 容积一定, 就是要求 H 与 R 满足条件:

$$\pi R^2 H = V \quad (V \text{ 为常数}).$$

由此条件解得 $H = \frac{V}{\pi R^2}$, 代入 S 的表达式即得目标函数

$$S = \frac{2V}{R} + \pi R^2 \quad (0 < R < +\infty).$$

下面求 S 的最小值. 由于

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{2V}{R^2} + 2\pi R,$$

解方程 $\frac{dS}{dR} = 0$, 得驻点 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. 又

$$\frac{d^2S}{dR^2} = \frac{4V}{R^3} + 2\pi > 0,$$

故 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 是极小值点. 由于 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 是函数 $S = \frac{2V}{R} + \pi R^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内的唯一的驻点(没有不可导点), 而且是极小值点, 所以它就是最小值点.

将 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 代入 $H = \frac{V}{\pi R^2}$, 易得 $H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = R$. 因此, 当高 H 和底面半径 R 相等时, 用料最省. ■

例 6.8 设海岛 A_1 与陆上城市 A_2 到海岸线(假设为直线)的垂直距离分别为 b_1 km 与 b_2 km, 它们之间的水平距离为 a km(图 6.1), 需要建立它们之间的运输线. 如果轮船的航速为 v_1 km/h, 陆上汽车的速度为 v_2 km/h ($v_1 > v_2$). 问转运站 P 设在海岸线上何处才能使运输时间最短?

解 先建立目标函数. 设 $MP = x$, 则海上运输时间为

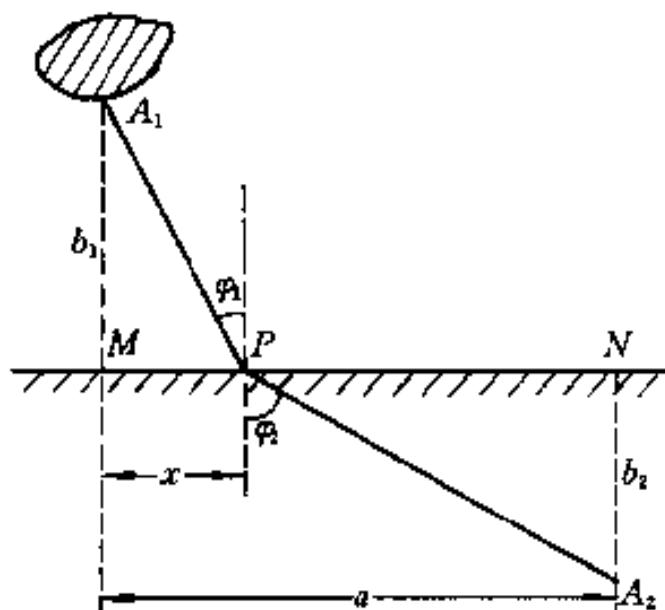


图 6.1

$$T_1 = \frac{1}{v_1} \sqrt{b_1^2 + x^2},$$

陆上运输时间为

$$T_2 = \frac{1}{v_2} \sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}.$$

因此,问题的目标函数为

$$T(x) = \frac{1}{v_1} \sqrt{b_1^2 + x^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{b_2^2 + (a-x)^2} \quad (0 \leq x \leq a).$$

下面求 $T(x)$ 的最小值. 由于

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{a-x}{\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}}, \quad (6.2)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{1}{v_1} \frac{b_1^2}{(b_1^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{v_2} \frac{b_2^2}{[b_2^2 + (a-x)^2]^{3/2}},$$

显然,在 $[0, a]$ 上, $\frac{d^2 T}{dx^2} > 0$, 所以 $\frac{dT}{dx}$ 严格单调增, 并且

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{a}{v_2 \sqrt{b_2^2 + a^2}} < 0, \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=a} = \frac{a}{v_1 \sqrt{b_1^2 + a^2}} > 0.$$

根据零点定理, 必有唯一的 $\xi \in (0, a)$, 使

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=\xi} = 0. \quad (6.3)$$

由于 $x = \xi$ 是 $T(x)$ 的唯一的驻点, 根据定理 6.3, 它就是 $T(x)$ 的最小值点.

但是, 由于直接从(6.3)式求驻点 $x = \xi$ 比较麻烦, 因此, 我们引入两个辅助角 φ_1, φ_2 . 由图 6.1 易知,

$$\sin \varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{b_1^2 + x^2}}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{a-x}{\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}}.$$

代入(6.2)式并解方程(6.3)可得 $\frac{1}{v_1} \sin \varphi_1 - \frac{1}{v_2} \sin \varphi_2 = 0$, 即

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (6.4)$$

这就是说, 当 P 点取在使(6.4)式成立之处, 从 A_1 到 A_2 的运输时间最短. ■

(6.4)式就是光学中的折射定理.根据光学中的 Fermat 原理,光线在两点之间传播必取时间最短的路线.若光线在两种不同媒质中的速度分别为 v_1 和 v_2 ,则光由一种媒质传播到另一种媒质所用时间最短的路线由(6.4)式确定.本例中,由于在海上与陆上的两种不同的运输速度相当于光线在两种不同传播媒质中的速度,因而所得结论也与光的折射定理相同.这说明,有很多属于不同学科领域的问题,虽然它们的具体意义不同,但在数量关系上却可以用同一数学模型来描述.

6.4 函数的凸性

凸性也是函数变化的重要性态.例如,函数 $f(x) = x^3$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上是向下凸的,在 $(-\infty, 0)$ 上则是向上凸的.我们把函数图象向上凸或向下凸的性质,叫做函数的凸性.通常把图象向下凸的函数叫做凸函数,图象向上凸的函数叫做凹函数.为了用分析的语言给出凸(凹)函数的严格定义,先从几何直观来分析.

在图 6.2 中画出了一个定义在区间 I (左、右端点分别为 a 与 b) 上的凸函数 f 的图象.读者不难发现,凸函数的图象有这样的特征:对于区间 I 内的任意两点 x_1 与 x_2 (不妨设 $x_1 < x_2$), f 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的图象都在弦 AB 的下方,点 A 的坐标为 $(x_1, f(x_1))$, 点 B 的坐标为 $(x_2, f(x_2))$.由于弦 AB 的方程为

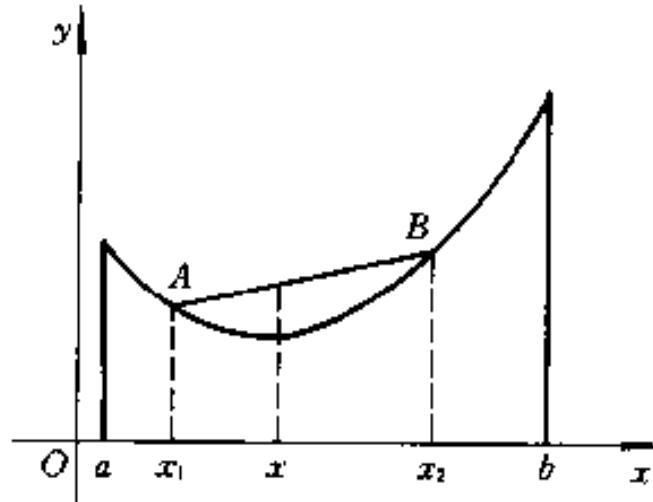


图 6.2

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1),$$

所以,函数 f 在 $[x_1, x_2]$ 上的图象在弦 AB 的下方可以用不等式来表示:
 $\forall x \in [x_1, x_2],$

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1). \quad (6.5)$$

对上式稍作整理,它就变为

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2). \quad (6.6)$$

令 $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, 则 $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1 - \lambda$, $\lambda \in [0, 1]$. 于是(6.6)式

就变为

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (6.7)$$

由于上述过程中每一步都是等价变换,因此,可以给出凸函数的分析定义如下:

定义 6.1 (凸函数) 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$, 不等式(6.7)成立, 则称 f 为 I 上的凸函数. 若 $\forall \lambda \in (0, 1), x_1 \neq x_2$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad (6.8)$$

则称 f 为 I 上的严格凸函数. 若(6.7)与(6.8)式中不等号反向, 则分别称 f 为 I 上的凹函数与严格凹函数.

显然, f 是(严格)凹的 $\Leftrightarrow f$ 是(严格)凸的. 因此, 只要研究凸函数的性质, 就不难得到凹函数的相应性质.

直接利用定义来判断函数的凸性是比较困难的. 下面的定理及其推论表明, 对于可微函数而言, 可以利用函数的一阶或二阶导数来判断.

定理 6.5 设 f 在区间 I 上可微, 则下列命题等价:

- (1) f 在 I 上是凸的;
- (2) $\forall x_1, x_2 \in I, f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$; (6.9)
- (3) f' 在 I 上单调增.

证 为了证明三个命题相互等价, 只要按照 $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ 的程序逐一推证即可.

$(1) \Rightarrow (2)$ 设 f 在 I 上是凸的, 由(6.5)式, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 则有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$

令 $x \rightarrow x_1$, 得

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

从而知不等式(6.9)成立.

若 $x_1 > x_2$, 类似可证(6.9)式仍然成立.

$(2) \Rightarrow (3)$, $\forall x_1, x_2 \in I$, 由(6.9)式可得

$$f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

交换(6.9)式中 x_1 与 x_2 的位置, 又得

$$f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

从而, 当 $x_2 > x_1$ 时, 有

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_1),$$

这说明在 I 上 f' 是单调增的.

(3) \Rightarrow (1) 设 f' 单调增, 为了证明 f 是凸函数, 只要证明不等式(6.7)成立. $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$, 令 $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 \leq x_0 \leq x_2$. 在 $[x_1, x_0]$ 与 $[x_0, x_2]$ 上分别用 Lagrange 定理, 存在满足 $x_1 < \xi < x_0 < \eta < x_2$ 的 ξ 与 η , 使得

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(x_0) + f'(\eta)(x_2 - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0), \\ f(x_1) &= f(x_0) + f'(\xi)(x_1 - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0). \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) &\geq (\lambda + 1 - \lambda)f(x_0) + \\ &\quad f'(x_0)[\lambda(x_1 - x_0) + (1 - \lambda)(x_2 - x_0)]. \end{aligned}$$

由于 $\lambda(x_1 - x_0) + (1 - \lambda)(x_2 - x_0) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_0 = 0$, 故

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

因此, f 是 I 上的凸函数. ■

注意到在(6.9)式中 x_1, x_2 是 I 内的任意两点. 因此, 该式在几何上表示 f 的图象(即曲线 $y = f(x)$)在它的任一点处的切线上方. 所以, 定理 6.5 说明: f 在 I 上是凸函数的充要条件为 f 的图象在其任一点处切线的上方, 这是一个明显的几何事实.

仿照定理 6.5 可以证明:

定理 6.6 设 f 在 I 上可微, 则下列命题等价:

- (1) f 在 I 上是严格凸的;
- (2) $\forall x_1, x_2 \in I, x_2 \neq x_1, f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$; (6.10)
- (3) f' 在 I 上严格单调增.

推论 6.1 设 f 在 I 上二阶可微, 则

- (1) f 是 I 上凸函数的充要条件为 $f'' \geq 0$;
- (2) 若在 I 上 $f'' > 0$, 则 f 在 I 上严格凸.

证 (1) 可由定理 6.5 中的命题(3)与定理 6.1 中的命题(1)直接得到; (2) 可由定理 6.6 中的命题(3)与定理 6.1 中的命题(2)得到. ■

例 6.9 研究下列函数的凸性:

- (1) $f(x) = x^\alpha$ ($x > 0, \alpha > 1$); (2) $f(x) = \ln x$ ($x > 0$).

解 (1) 由于当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} > 0,$$

故幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上是严格凸的.

(2) 由于当 $x > 0$ 时,

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

所以对数函数 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是严格凹的. ■

利用数学归纳法将不等式(6.7)加以推广, 不难得到函数 f 为凸函数的一个充要条件, 也就是下面的定理(证明从略).

定理 6.7 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是 I 上的凸函数的充要条件为对于任何 $x_i \in I$ 及 $\lambda_i \in [0, 1]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 并且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 有

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).} \quad (6.11)$$

不等式(6.11)称为 **Jensen 不等式**. 若 f 是 I 上的凸函数, 由 Jensen 不等式易知, $\forall x_i \in I$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)],$$

其中 $n \in \mathbb{N}_+$.

利用 Jensen 不等式, 可以证明著名的 **Cauchy-Schwarz 不等式**:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2},} \quad (6.12)$$

其中 a_i, b_i 为任意实数. 事实上, 由例 6.9 知 $f(x) = x^2$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的凸函数, 利用 Jensen 不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \quad (6.13)$$

为了证明不等式(6.12), 将它等价变形为^①

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{|a_i b_i|}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} \right\}^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^2}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}, \quad (6.14)$$

并将(6.14)式与(6.13)式比较可知, 只要在(6.13)式中取

^① 由于当 b_i 全为零时, 不等式(6.12)恒成立, 故等价变形时可假定 b_i 不全为零.

$$\lambda_i = \frac{|b_i|^2}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}, \quad x_i = \frac{|a_i|}{|b_i|},$$

(显然, $\lambda_i \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$) 就得到(6.14)式, 从而就证明了不等式(6.12).

在本节最后, 简要介绍一下关于曲线拐点的概念. 上面已经说过, 若函数 f 在某区间上是凸的, 则曲线 $y = f(x)$ (即 f 的图象) 在该区间上是向下凸的; 若 f 在某区间上是凹的, 则曲线 $y = f(x)$ 在该区间上是向上凸的. 曲线上使曲线由向下(上)凸变为向上(下)凸的转变点称为该曲线的拐点. 例如, 点 $(0, 0)$ 是曲线 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上唯一的拐点. 拐点的严格定义如下.

定义 6.2 (拐点) 设函数 f 在定义区间 I 内的点 x_0 处连续, 若存在 $\delta > 0$, 使曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 上向下(上)凸, 在 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上向上(下)凸, 则称 $(x_0, f(x_0))$ 为该曲线的一个拐点.

习题 2.6

(A)

1. 单调可微函数的导函数仍为单调可微函数, 对吗?

2. 证明定理 6.1(2).

3. 求下列函数的单调区间:

$$(1) y = 2x + \frac{8}{x} (x > 0); \quad (2) y = 2x^2 - \ln x;$$

$$(3) y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}; \quad (4) y = x + |\sin 2x|.$$

4. 证明下列不等式:

$$(1) \arctan x \leqslant x \quad (x \geqslant 0); \quad (2) \ln(1+x) \geqslant \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x \geqslant 0);$$

$$(3) \frac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right); \quad (4) e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 0).$$

5. 证明定理 6.2 的(2)与(3).

6. 如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处取得极值, 是否一定有 $f'(x_0) = 0$?

7. 求下列函数的极值:

$$(1) f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 21; \quad (2) f(x) = \frac{x}{1+x^2};$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}; \quad (4) f(x) = |x+1|;$$

$$(5) f(x) = \left(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}; \quad (6) f(x) = |x| e^{-|x-1|}.$$

8. 试问 a 为何值时, 函数

$$f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 是极大值还是极小值? 并求出此极值.

9. 求下列函数的单调区间与极值:

$$(1) f(x) = x - \ln(1 + x^2);$$

$$(2) f(x) = x^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x^2 - 1};$$

$$(3) f(x) = \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{x+1};$$

$$\begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \cos x - 1, & \pi \leq x < 0, \\ (x+2+\pi), & x < -\pi. \end{cases}$$

10. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值:

$$(1) f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \in [0, 4];$$

$$(2) f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x, \quad x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}];$$

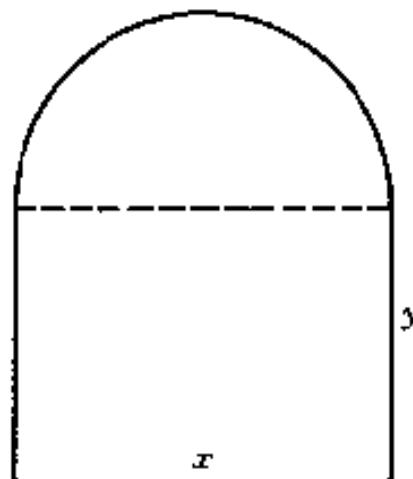
$$(3) f(x) = x + \sqrt{1-x}, \quad x \in [-5, 1]; \quad (4) f(x) = \max \{x^2, (1-x)^2\}, \quad x \in [0, 1].$$

11. 证明下列不等式:

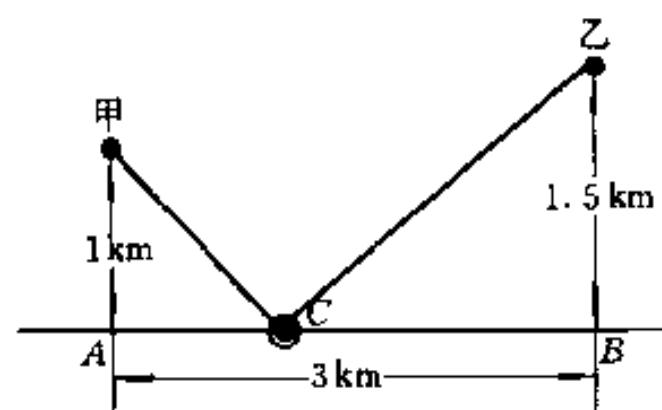
$$(1) e^x \leq \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-\infty, 1);$$

$$(2) |3x - x^3| \leq 2, \quad x \in [-2, 2];$$

$$(3) x^x \geq e^{-\frac{1}{x}}, \quad x \in (0, +\infty).$$



(第 12 题图)



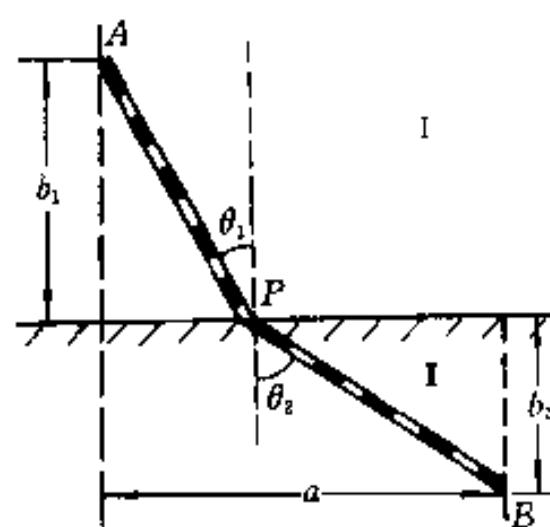
(第 13 题图)

12. 某铁路隧道的截面拟建成矩形加半圆的形状如图, 截面积为 $a \text{ m}^2$, 问底宽 x 为多少时, 才能使建造时所用的材料最省?

13. 甲乙两用户共用一台变压器(见图), 问变压器设在输电干线何处时, 所需输电线最短?

14. 在 A, B 两城市间铺设铁路, 如果两城市间为两种地质区, 分界线为直线(见图). 在区域 I 内铁路造价为 C_1 元/km, 在区域 II 内的造价为 C_2 元/km. A, B 与直线的垂直距离分别为 b_1 km 与 b_2 km, A, B 间的水平距离为 a km, 问 P 点选在何处造价最低?

15. 设某银行中的总存款量与银行付给存户利率的平方成正比, 若银行以 20% 的年利率把总存款的 90% 贷出, 问它给存户支付的年利率定为多少时才能



(第 14 题图)

获得最大利润?

16. 已知轮船的燃料费与速度的立方成正比, 当速度为 10 km/h, 每小时的燃料费为 80 元, 又其他费用每小时需 480 元, 问轮船的速度多大时, 才能使 20 km 航程的总费用最少? 此时每小时的总费用等于多少?

17. 曲线 $y = 4 - x^2$ 与 $y = 2x + 1$ 相交于 A, B 两点, C 为弧段 AB 上的一点, 问 C 点在何处时 $\triangle ABC$ 的面积最大? 并求此最大面积.

18. 用仪器测量某零件的长度 n 次, 得到 n 个略有差别的数: a_1, a_2, \dots, a_n , 证明: 用算术平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

作为该零件的长度 x 的近似值, 能使

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$$

达到最小.

19. 证明: $f(x) = x \arctan x (-\infty < x < +\infty)$ 与 $g(x) = x \ln x (x > 0)$ 都是凸函数.

20. 求下列曲线的凸凹区间与拐点:

$$(1) f(x) = x^3(1-x); \quad (2) f(x) = x + \sin x;$$

$$(3) f(x) = \frac{x}{1+x^2}; \quad (4) f(x) = \ln(1+x^2).$$

21. 设 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \pi$, 证明:

$$\sin\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) > \frac{1}{n}(\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n).$$

22. 利用 $f(x) = -\ln x (x > 0)$ 是凸函数(因而 $\ln x$ 为凹函数)证明:

$$(1) x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad (\text{其中 } x_i > 0, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1);$$

(2) 当 $x_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

(B)

1. 证明定理 6.4.

2. 证明下列不等式:

$$(1) 1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x} \quad (x > 0);$$

$$(2) 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0);$$

$$(3) \sin x + \tan x > 2x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(4) \frac{|a+b|}{\pi + |a+b|} \leq \frac{|a|}{\pi + |a|} + \frac{|b|}{\pi + |b|} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

3. 证明: 方程 $\sin x = x$ 只有一个实根.

4. 设 $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq \pi$, 证明

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} > \frac{\sin x_3 - \sin x_2}{x_3 - x_2}.$$

5. 设 $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $g(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $g(x_0) \neq 0$. 问 $f(x)$ 在 x_0 处有无极值?

6. 求半径为 R 的球的外切正圆锥的最小体积.

7. 证明:(1) 设 f, g 都是 I 上的凸函数, 则 $\alpha f + \beta g$ 也是 I 上的凸函数, 其中 α 与 β 为正常数;

(2) 设 f, g 是 I 上的非负凸函数, 并且 f 与 g 在 I 上同是单调增(或单调减)的, 则 fg 是 I 上的凸函数;

(3) 设 $f: I_1 \rightarrow I_2$ 与 $g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 都是凸函数, 并且 g 单调增, 则 $g \circ f$ 是 I_1 上的凸函数.

8. 设某产品的成本函数为 $C = aq^2 + bq + c$, 需求函数为

$q = \frac{1}{e}(d - p)$, 其中 C 为成本, q 为需求量(即产量), p 为单价; a, b, c, d, e 都是正的常数, 且 $d > b$. 求使利润最大的产量及最大的利润.

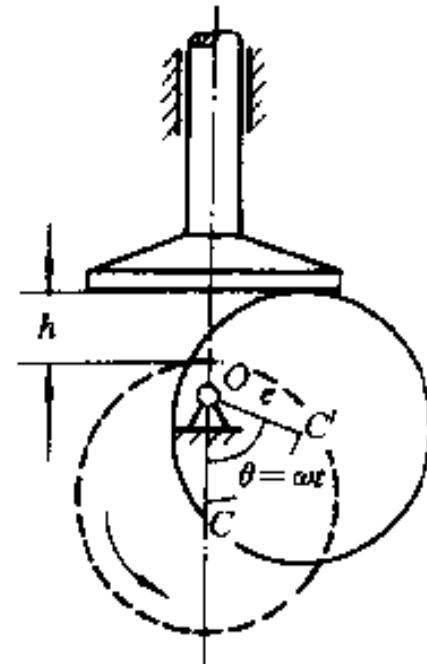
9. 一平底从动杆圆弧凸轮机构如图, 当偏心轮以角速度 ω 绕 O 旋转时, 从动杆上升的距离为 $h = e(1 - \cos \theta)$, 其中 e 为偏心距, 转角 $\theta = \omega t$. 试求:

(1) $h(\theta)$ 的最大值和最小值;

(2) 转角 θ 为多少时, 从动杆速度最大? θ 为多少时, 从动杆速度最小?

(3) θ 为多少时, 从动杆加速度最大? θ 为多少时, 从动杆加速度最小?

10. 有人说“若 $f'(x_0) > 0$, 则在 x_0 处存在某邻域, 在此邻域内 $f(x)$ 单调增”. 这种说法正确吗? 如果正确, 请给出证明; 如果不正确, 请举例说明并给出正确结论.



(第 9 题图)

综合练习题

1. 最优生产周期问题.

设某工厂既是生产型的又是销售型的, 它的任务是把进来的原料加工成产品, 再销售出去. 为保证生产就必须库存一定数量的原料, 为保证销售就必须库存一定数量的产品. 设该厂生产线运转时产品的生产速率为 K (常数), 产品销售速率为 r ($r < K$). 每开动一次生产线的成本为 C , 每件产品单位时间的储存费为 S_1 , 生产一件产品所需原料单位时间的储存费为 S_2 . 工厂的一个生产周期是指从开始生产起到所生产的产品全部销售完所需要的时间. 试分别就下列情形讨论如何确定一个最优的生产周期 T , 使得在单位时间内生产的总费用 W 最少.

(1) 仓库只存放产品不存放原料. 在这种情况下, 开始一段时间内工厂边生产边销售, 到

某时刻 t 只销售不生产, 直至库存量 Q 减少为零;

(2) 仓库既存放产品, 又存放原料, 并且一个周期生产所需的原料在开始生产时就一次备足;

(3) 仓库既存放产品, 又存放原料, 并且开始生产时就一次备足 p 个周期生产所需的原料.

2. 在圆桶状的炮弹筒内要装填三块相同的截面为椭圆的直立药柱, 为使装填药量尽可能的多, 问应如何设计药柱截面的尺寸?

第三章 一元函数积分学及其应用

本章讨论一元函数积分学,与微分学不同,它是研究函数整体性态的.内容包括:在分析实例的基础上,建立定积分的概念、存在条件和性质;通过微积分基本定理和 Newton - Leibniz 公式,阐明微分与积分的联系,将定积分的计算转化为求原函数或不定积分;介绍两种基本积分法——换元法与分部积分法;讲解应用定积分解决实际问题的常用方法——微元法.另外,本章还包含了两类反常积分与简单微分方程的解法和应用方面的内容.

第一节 定积分的概念、存在条件与性质

本节通过几个实例引出定积分的定义,利用定积分的几何意义讲解定积分的存在条件,最后介绍定积分的几个常用性质.

1.1 定积分问题举例

在绪论中已经讲过求变速直线运动物体的位移问题.通过任意分割时间区间 $[a, b]$ 为若干小区间,将每个小区间内物体的运动近似看成匀速的,求出位移的近似值,再将各小区间内通过的位移近似值相加,并让最大小区间的长度 $d \rightarrow 0$,通过取极限,从而将求速度 $v = v(t)$ 已知的变速直线运动物体在时间区间 $[a, b]$ 内通过的总位移 s 归结为求下面形式的极限:

$$s = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k. \quad (1.1)$$

在实际问题中,还有很多几何量与物理量的计算都归结为求与(1.1)式具有同样形式的极限,下面再举两个例子.

例 1.1 曲边梯形的面积问题 如何计算曲边形的面积是一个古老而有实际意义的问题.大家知道,由平面上任一闭曲线所围成的曲边形(图 1.1)都可用一些互相垂直的直线将它划分为若干个如图 1.2 所示的所谓曲边梯形,即由曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a, x = b$ 及 x

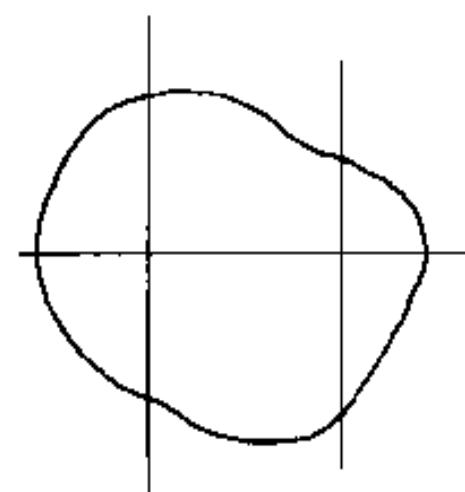


图 1.1

轴所围成的平面图形^D(其中 f 是 $[a, b]$ 上的非负连续函数). 因此, 求曲边形面积的问题就归结为求曲边梯形的面积问题.

如果在区间 $[a, b]$ 上, $f(x) = H$ (H 为正常数), 那么, 上面所说的曲边梯形便是一个高为 H 的长方形, 它的面积 A 的大小仅与底边长度有关, 随底边长度的变化而均匀变化. 因此, 只要用乘法就能求得面积 A :

$$A = \text{底} \times \text{高} = (b - a)H. \quad (1.2)$$

然而, 如果 $f(x)$ 不恒为常数, 此时曲边梯形的“高” $f(x)$ 随 x 的变化而变化, 因此, 它的面积随底边长度的变化是非均匀的(即在不同点 x 处, 底边长度的改变量 Δx 相同时, 相应的曲边梯形面积的改变量 ΔA 不尽相同), 不能直接用公式(1.2)来计算. 怎么办呢? 经过很多数学家的努力, 终于找到了一种解决方法. 这种方法的基本思路是: 将曲边梯形分割成若干小曲边梯形(图 1.2), 从而 $[a, b]$ 也被分割为若干子区间. 由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, 所以在每个小曲边梯形中, “高” $f(x)$ 随 x 的变化很小, 可以近似地看成常数. 这样, 每个小曲边梯形就可近似地看成小矩形, 用小矩形的面积作为小曲边梯形面积的近似值. 于是, 所求曲边梯形的面积就近似地等于所有小矩形面积之和. 不难看出, $[a, b]$ 被分割得越细, 近似的程度就越好. 在 $[a, b]$ 被无限细分, 每个小曲边梯形底边的长度都趋于零的情况下, 这个近似值的极限就规定为曲边梯形面积的精确值. 上述思路可以分解为下列四个具体求解步骤:

分 在区间 $[a, b]$ 内任意插入 $n - 1$ 个分点:

$$a : x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把 $[a, b]$ 分割成 n 个子区间, 第 k 个子区间的长度为:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

过各分点作平行 y 轴的直线, 相应地曲边梯形就被分成 n 个小曲边梯形;

匀 在第 k 个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上任取一点 ξ_k , 对应小曲边梯形的面积 ΔA_k 用底为 Δx_k 、高为 $f(\xi_k)$ 的小矩形面积近似替代(图 1.2), 则有

$$\Delta A_k \approx f(\xi_k) \Delta x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

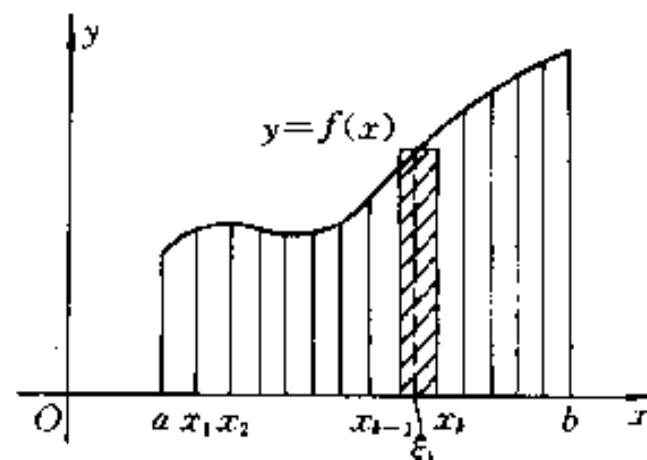


图 1.2

^D) 若曲边梯形的一条底边退缩为一点, 则称之为曲边三角形.

合 将所有小曲边梯形面积的近似值加起来就得到曲边梯形面积 A 的近似值:

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k;$$

精 当 n 越大并且每个子区间的长度越小时, 上面的表达式越精确. 因此, 当所有子区间长度的最大值(记作 $d = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta x_k|$)趋于零时, 上面和式的极限就规定为曲边梯形面积 A 的精确值, 即

$$A = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (1.3)$$

例 1.2 物质非均匀分布的细棒质量问题 设有一质量非均匀分布的细棒, 长为 l . 若已知细棒上各点的线密度 ρ , 如何求该细棒的质量 m 呢?

如果物质在细棒上的分布是均匀的, 就是说, 细棒上各点的线密度 ρ 都一样, 即 ρ 为常数, 那么细棒的质量可以用乘法求得, 即

$$m = \text{线密度} \times \text{棒长} = \rho l.$$

问题的主要困难在于物质是非均匀分布的, 密度 ρ 随点的变化而变化, 不是常数, 因而细棒的质量不能用上述乘法公式求得. 为了解决这个困难, 建立坐标系如图 1.3. 此时, $\rho = \rho(x)$, 设它在 $[0, l]$ 上是连续函数. 类似于例 1.1 的思路, 将 $[0, l]$ 分割为若干子区间, 在每个子区间上线密度 ρ 的变化很小, 可以近似地看成是常数, 求出在每个子区间内细棒质量的近似值, 相加并通过取极限便可得到质量 m 的精确值. 这个思路也可分解为与例 1.1 类似的四步:

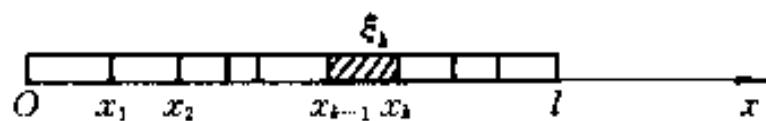


图 1.3

分 在 $[0, l]$ 内任意插入 $n - 1$ 个分点:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = l,$$

则 $[0, l]$ 被分割成 n 个子区间. 第 k 个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 的长度为

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n;$$

匀 任取 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 则该段细棒质量 Δm_k 的近似值为

$$\Delta m_k \approx \rho(\xi_k) \Delta x_k, k = 1, 2, \dots, n;$$

合 将各段细棒质量的近似值相加, 得到所求细棒总质量 m 的近似值为

$$m \approx \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k) \Delta x_k;$$

精 令 $d = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta x_k| \rightarrow 0$, 上述和式的极限就规定为细棒总质量的精确值, 即

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k) \Delta x_k. \quad (1.4)$$

上面几个问题尽管实际意义完全不同, 但它们计算的方法和步骤却完全一样, 而且最终都归结为求一个具有完全相同数学结构的和式极限。不仅如此, 在物理、力学及其它众多学科领域中, 还有许多重要的量都可用同样的方法和步骤归结为具有同样数学结构的和式极限来计算。抛开各个问题的具体含义, 仅保留其数学结构, 便抽象出定积分的定义。

1.2 定积分的定义

定义1.1(定积分) 设函数 f 定义在区间 $[a, b]$ 上, 在区间 $[a, b]$ 内任意插入 $n - 1$ 个分点:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把 $[a, b]$ 分割成 n 个子区间, 第 k 个子区间的长度为

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

任取 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 作乘积

$$f(\xi_k) \Delta x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

把所有这些乘积相加得到和式

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

如果无论区间 $[a, b]$ 怎样划分及点 ξ_k 怎样选取, 当 $d = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta x_k| \rightarrow 0$ 时, 该和式都趋于同一个常数, 则称函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积, 且称此常数为 f 在区间 $[a, b]$ 上的定积分, 记作 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (1.5)$$

称 f 为被积函数, x 为积分变量, $f(x) dx$ 为被积式, $[a, b]$ 为积分区间, a, b 分

别称为积分下限与积分上限, \int 是积分符号.

对这个定义, 还应注意以下几点:

(1) 在定义中, 当所有子区间长度的最大值 $d \rightarrow 0$ 时, 所有子区间的长度都趋于零, 因而子区间的个数 n 必然趋于无穷大. 但我们不能用 $n \rightarrow \infty$ 来代替 $d \rightarrow 0$. 这是因为对区间的分割是任意的, $n \rightarrow \infty$ 并不能保证每一个子区间的长度都趋于零.

(2) 在构造定义中的和式 $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ 时, 包含了两个任意性, 即对区间的分割与 ξ_k 的选取都是任意的. 显然, 对于区间的不同分割和 ξ_k 的不同选取, 得到的和式一般都不相同. 定义要求无论区间如何分割以及点 ξ_k 怎样选取, 只要 $d \rightarrow 0$, 所有这些和式都要趋于同一个数, 这样才说函数 f 在 $[a, b]$ 上可积. 换句话说, 如果对区间的某两种不同分割或 ξ_k 的两种不同选取得到的和式趋于不同的数, 那么 f 在该区间上不可积. 例如, Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在区间 $[0, 1]$ 上不可积. 事实上, 将区间 $[0, 1]$ 任意分割为 n 个子区间. 若取 ξ_k 为子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的有理数, 则 $D(\xi_k) = 1$, 从而有

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n D(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = 1;$$

若取 ξ_k 为 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的无理数, 则 $D(\xi_k) = 0$, 从而有

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n D(\xi_k) \Delta x_k = 0.$$

因此, $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不可积.

由此可见, 定积分定义中的和式极限(1.5)既不同于前面讲过的数列极限, 也不同于函数的极限.

(3) 函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 是一个确定的数, 它的值仅与被积函数 f 与积分区间 $[a, b]$ 有关, 而与积分变量无关. 因此, 若积分变量 x 改用其他字母(例如用 t)来表示, 它的值不会改变, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

根据定积分的定义, 例 1.1 中的曲边梯形的面积可表示为定积分

$$A = \int_a^b f(x) dx;$$

例 1.2 中细棒的质量可表示为定积分

$$m = \int_0^l \rho(x) dx;$$

变速直线运动物体在时间区间 $[a, b]$ 内通过的位移也可用定积分

$$s = \int_a^b v(t) dt$$

来计算.

最后, 对定积分再作两点补充规定:

(1) 当积分上限 b 小于下限 a 时, 规定

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

这就是说, 互换定积分的上、下限, 它的值要改变正负号.

(2) 当 $a = b$ 时, 规定 $\int_a^a f(x) dx = 0$.

这样, 对定积分上、下限的大小就没有什么限制了.

定积分的几何意义 由例 1.1 可知, 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$ 时, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值等于由曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积(图 1.4(a)), 即

$$\int_a^b f(x) dx = A.$$

如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq 0$, 那么由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成的曲边梯形位于 x 轴下方(图 1.4(b)). 此时, 积分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

中的每一项 $f(\xi_k) \Delta x_k$ 的值为负, 并且它的绝对值表示一个小曲边梯形面积的近似值. 由于曲边梯形的面积总是正的, 所以

$$\int_a^b f(x) dx = -A.$$

当 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上变号时, 以图 1.4(c) 为例, 不难看出, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值等于三个曲边梯形面积的代数和, 即

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3.$$

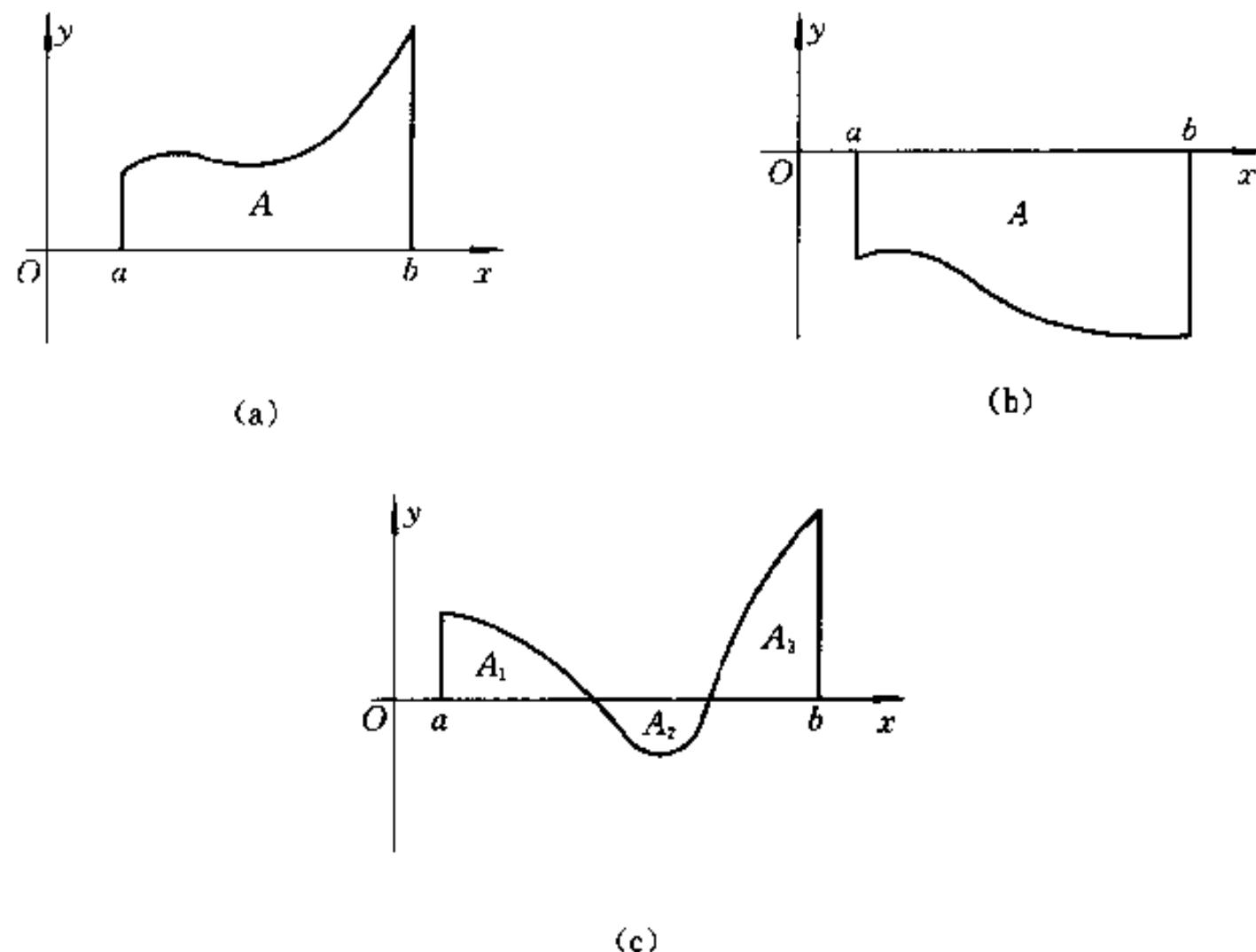


图 1.4

1.3 定积分的存在条件

我们自然要问, 定义在区间 $[a, b]$ 上的函数满足什么条件才一定可积呢? 首先给出函数可积的必要条件.

定理 1.1 (可积的必要条件) 函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积的必要条件是 f 在 $[a, b]$ 上有界.

证 用反证法. 若 f 在 $[a, b]$ 上无界, 任意分割 $[a, b]$, 则必存在一个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$, 使 f 在该子区间上无界. 因此, 对无论怎样大的正数 M , 总能找到 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 使

$$|f(\xi_k)| \Delta x_k > M,$$

从而可使 $\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right|$ 任意大. 故和式极限(1.5)不存在, 即 f 在 $[a, b]$ 上不可积. ■

有界是函数可积的必要条件, 但不是充分条件. 例如, 上面已经指出, Dirichlet 函数在区间 $[0, 1]$ 上是有界的, 但在 $[0, 1]$ 上却不可积. 因此, 还需要进一步寻

找函数可积的条件.

根据定理 1.1, 不妨设 f 是定义在区间 $[a, b]$ 上的有界函数. 将 $[a, b]$ 任意分割为 n 个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$), f 在 $[a, b]$ 上的定积分就是形如 (1.5) 式的和式极限. 设 f 在子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的上、下确界分别为 M_k 及 m_k , 即

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

称 $\omega_k = M_k - m_k$ 为 f 在子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅, 和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k, \quad s_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

分别称为 f 关于该分割的 Darboux 大和与 Darboux 小和. 如果在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 那么 Darboux 大和 S_n 在几何上就表示在子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上以 M_k 为高所作的 n 个小矩形构成的阶梯形的面积, Darboux 小和则表示在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上以 m_k 为高所作的 n 个小矩形构成的阶梯形的面积, 分别是以曲线 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形的外包与内含的两个阶梯形面积. 它们的差

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k$$

就是这两个阶梯形面积之差(图 1.5 中的阴影部分面积). 根据定义 1.1, 函数 f 在 $[a, b]$ 上可积, 在几何上就表示该曲边梯形的面积可以求得, 并且等于当 $[a, b]$ 被无限细分时上述外包与内含两个阶梯形面积的共同极限, 也就是说, 这两个阶梯形面积之差的极限应为零. 由此启发, 得到如下定理.

定理 1.2 (可积的充要条件) 设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上有界, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $d < \delta$ 时,

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k < \varepsilon. \quad (1.6)$$

(证明见参考文献[9])

直接利用定理 1.2 来判别函数 f 的可积性是比较困难的, 但若仔细分析条件(1.6)不难发现, 在下面两种情况下, 可使(1.6)式成立.

第一种情况是, 任意分割 $[a, b]$, 使最大子区间的长度 d 充分小, f 在每个

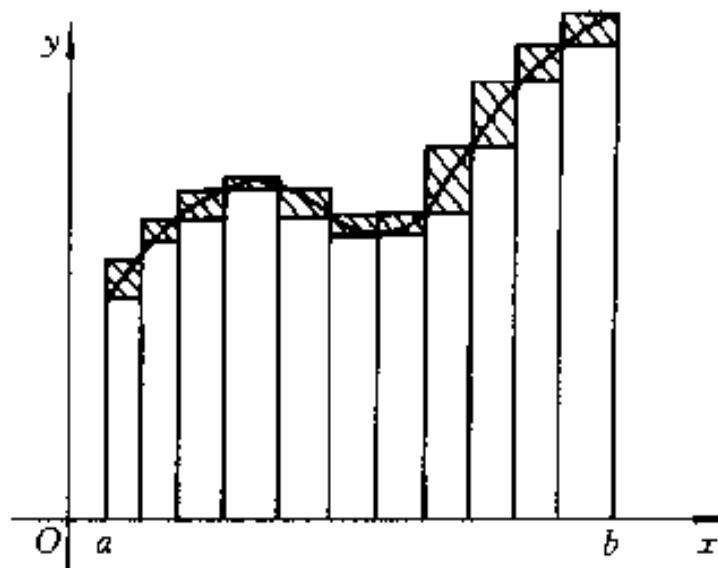


图 1.5

子区间上的振幅 ω_k 都能任意小, 小于任意给定的 $\epsilon > 0$. 例如, 当 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数时就属于这种情况. 事实上, 我们有

定理 1.3 若 $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

证 因为 f 在 $[a, b]$ 上连续, 所以它在 $[a, b]$ 上一致连续. 从而 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in [a, b]$, 当 $|x^{(1)} - x^{(2)}| < \delta$ 时, 必有

$$|f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \epsilon.$$

任意分割 $[a, b]$ 为 n 个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$), 使 $d < \delta$. 根据闭区间上连续函数的性质, $\exists \xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)} \in [x_{k-1}, x_k]$, 使

$$f(\xi_k^{(1)}) = M_k, f(\xi_k^{(2)}) = m_k,$$

从而有 $\omega_k = f(\xi_k^{(1)}) - f(\xi_k^{(2)}) < \epsilon, \forall k = 1, 2, \dots, n$.

故当 $d < \delta$ 时, 必有

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k < \epsilon \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \epsilon(b-a),$$

即条件(1.6)成立, 因此 f 在 $[a, b]$ 上可积. ■

第二种情况是, 当 d 充分小时, 虽然 f 在每个子区间上的振幅 ω_k 不能都任意小, 但使 ω_k 不能任意小的子区间长度之和可以小于任意给定的正数. 例如, f 在 $[a, b]$ 上只有有限个第一类间断点或者 f 是 $[a, b]$ 上的单调函数都属于这种情况. 事实上, 可以证明(证明见参考文献[9])下面的定理.

定理 1.4 如果 f 在区间 $[a, b]$ 上只有有限个第一类间断点或者在 $[a, b]$ 上单调, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

上面的讨论表明, 要使函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积, 那么它在 $[a, b]$ 上函数值的变化不能“太快”, 至少使函数值发生急剧变化的点不能“太多”. 也就是说, f 或者是 $[a, b]$ 上的连续函数或者是间断点“不太多”的函数. 在第八章中, 将进一步说明间断点“不太多”的确切含义.

根据定积分的定义, 如果函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积, 那么, 无论区间怎样分割及 ξ_k 怎样选取, 当 $d \rightarrow 0$ 时, 所得到的不同和式 $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ 都趋于同一个数, 这个数就是定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值. 因此, 在利用定义计算可积函数定积分的时候, 对区间 $[a, b]$ 可以采用某种特殊的分割方法, 对 ξ_k 也可以采用某种特殊的选取方法.

例 1.3 用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

解 由于 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 因而可积. 将 $[0, 1]$ 分割为 n 个长度相等的子区间 $[x_{k-1}, x_k]$, 选取 ξ_k 为每个子区间的右端点, 则有

$$\Delta x_k = \frac{1}{n}, \quad \xi_k = \frac{k}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k^2 \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

在例 1.3 中, 尽管被积函数 f 相当简单, 然而计算过程却已比较复杂. 由此可见, 利用定义计算定积分是相当困难的. 因而, 研究定积分的性质, 寻求简单可行的积分方法, 就是本章的主要任务之一.

1.4 定积分的性质

上面所介绍的定积分的定义是由德国数学家 Riemann 给出的, 因而通常称它为 **Riemann 积分**, 简称为 **R 积分**. 为方便起见, 将在区间 $[a, b]$ 上 Riemann 可积(即 Riemann 积分存在)的函数全体构成的集合记作 $\mathcal{R}[a, b]$. 下面介绍 R 积分的几个常用的重要性质.

性质 1.1 (线性性质) 设 $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 则 $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$, 并且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (1.7)$$

这个性质可由定积分的定义和极限的运算法则直接得到, 证明留给读者完成.

不难看出, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 实际上是从 $\mathcal{R}[a, b]$ 到 \mathbf{R} 的一个映射(或 $\mathcal{R}[a, b]$ 上的一个泛函), 性质 1.1 说明, 它还是一个线性映射或线性泛函. 若记

$$x^*(f) = \int_a^b f(x) dx, \quad f \in \mathcal{R}[a, b],$$

则线性性质可表示为

$$x^*(\alpha f + \beta g) = \alpha x^*(f) + \beta x^*(g).$$

性质 1.2 (单调性) 设 $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, 且

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

这个性质也可由定积分的定义直接得到,由此还可立即得到下面的推论.

推论 1.1 设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, 且

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b],$$

其中 m, M 是常数, 则 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

性质 1.3 设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, 则 $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$, 且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (1.8)$$

证 任意分割区间 $[a, b]$, 用 $\omega_k(f)$ 与 $\omega_k(|f|)$ 分别表示 f 与 $|f|$ 在子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅. 由于

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|, \quad \forall x, y \in [x_{k-1}, x_k],$$

并且不难证明

$$\omega_k(f) = \sup \{ |f(x) - f(y)|; \quad x, y \in [x_{k-1}, x_k] \},$$

所以 $\omega_k(|f|) \leq \omega_k(f)$, 从而有

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(|f|) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k.$$

又因为 f 在 $[a, b]$ 上可积, 由定理 1.2 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $d < \delta$ 时, 必有

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k < \varepsilon,$$

从而

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(|f|) \Delta x_k < \varepsilon,$$

故 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上可积.

为了证明不等式(1.8), 只要注意到不等式

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [a, b],$$

利用性质 1.2 可得

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

从而得知(1.8)式成立. ■

性质1.4(对区间的可加性) 设 I 是一个有限闭区间, $a, b, c \in I$. 若 f 在 I 上可积, 则 f 在 I 的任一个子区间上都可积, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (1.9)$$

证 利用定理 1.2 不难证明, f 在区间 I 的任一个子区间上都可积. 证明留给读者完成. 下面仅证明等式(1.9).

设 c 在 (a, b) 内. 由于 f 在 $[a, b]$ 上可积, 根据定义, 任意分割区间 $[a, b]$ 所作的和式都趋于同一个数. 因此, 可以始终把 c 作为一个分点. 这样, f 在 $[a, b]$ 上的和式就等于它在 $[a, c]$ 上的和式与 $[c, b]$ 上的和式之和, 即

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{[a, c]} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{[c, b]} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

令 $d \rightarrow 0$ 就得到等式(1.9).

若 c 在 $[a, b]$ 外, 不妨设 $a < b < c$, 则由上面已证明的结论有

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

从而得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

对于其他情况, 可用同样的方法证明. ■

性质 1.5(积分中值定理) 设 $f \in C[a, b]$, $g \in \mathcal{R}[a, b]$, 且 g 在 $[a, b]$ 上不变号. 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (1.10)$$

证 不妨设在 $[a, b]$ 上 $g(x) \geq 0$, $M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$, $m = \min_{x \in [a, b]} |f(x)|$, 则 $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. 从而

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

故有

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (1.11)$$

若 $\int_a^b g(x) dx > 0$, 上式两边除以 $\int_a^b g(x) dx$, 得

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

由连续函数的介值定理知,至少存在一点 $\xi \in [a, b]$,使

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

若 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 则由(1.11)式, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. 因此, 对于任何 $\xi \in [a, b]$, 等式(1.10)都成立. ■

在性质 1.5 中取 $g(x) = 1$ 即得下面的推论.

推论 1.2 设 $f \in C[a, b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a). \quad (1.12)$$

当 $f(x) \geq 0$ 时, 推论 1.2 有着简单的几何意义(图 1.6). 它表明, 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则在区间 $[a, b]$ 中至少能找到一点 ξ , 使得高为 $f(\xi)$ 底边长为 $b - a$ 的矩形面积恰好等于以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积.

通常称

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

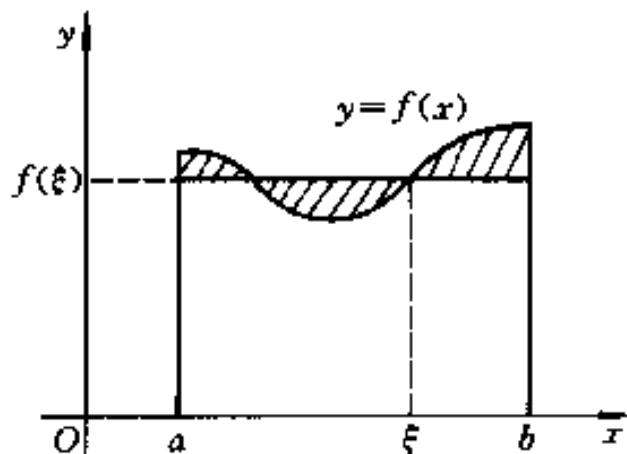


图 1.6

为函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的积分中值, 因此很多书上也称推论 1.2 为积分中值定理, 而把性质 1.5 称为广义积分中值定理.

积分中值也叫积分均值, 它是有限个数的算术平均值概念对连续函数的推广. 大家知道, n 个数 y_1, y_2, \dots, y_n 的算术平均值为

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k.$$

但是,在很多实际问题中,仅仅会求 n 个数的平均值是不够的,还需要求出某个函数 $y = f(x)$ 在某一区间 $[a, b]$ 上的平均值.例如,求一周内的平均气温,一段时间内气体的平均压强,交流电的平均电流等等.如何定义并求出连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值呢?

设 $f \in C[a, b]$, 则 $f \in \mathcal{R}[a, b]$. 将 $[a, b]$ 分割为 n 个等长的子区间:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

每个子区间的长度为 $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, 取 ξ_k 为各子区间的右端点 x_k ($k = 1, 2, \dots, n$), 则对应的 n 个函数值 $y_k = f(x_k)$ 的算术平均值为

$$\begin{aligned}\bar{y}_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k.\end{aligned}$$

显然, n 增大, \bar{y}_n 就表示函数 f 在 $[a, b]$ 上更多个点处函数值的平均值. 令 $n \rightarrow \infty$, \bar{y}_n 的极限自然就定义为 f 在 $[a, b]$ 上的平均值 \bar{y} , 即

$$\bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (1.13)$$

因此, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值就等于该函数在 $[a, b]$ 上的积分中值.

例 1.4 求正弦交流电流 $i(t) = I_m \sin \omega t$ 在它的半个周期(即从 $t=0$ 到 $t=\frac{\pi}{\omega}$)内的平均值.

解 根据(1.13)式, 电流的平均值为

$$\bar{I} = \frac{1}{\frac{\pi}{\omega} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} i(t) dt = \frac{\omega I_m}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t dt.$$

为了求得平均值 \bar{I} 的具体数值, 必须计算右端的定积分. 但是, 利用定义来求此定积分是比较复杂的(读者可在 $\omega=1$ 的情况下用定义来计算). 因此, 寻求简洁的积分法势在必行!

习题 3.1

(A)

- 用定积分的定义求下列积分的值;

(1) $\int_0^1 x dx$;

(2) $\int_0^1 e^x dx$.

2. 设有一直的金属丝位于 x 轴上从 $x=0$ 到 $x=a$ 处, 其上各点 x 处的密度与 x 成正比, 比例系数为 k , 求该金属丝的质量.

3. 放置于坐标原点的一个带电量为 Q 的点电荷形成一个静电场. 在电场力的作用下, 另一个带电量为 q 的点电荷沿 x 轴从 $x=a$ 移动到 $x=b$ 处, 试用积分式表达该电场力所作的功.

4. 水库的一个矩形闸门铅直立于水中, 设其高为 H m, 宽为 L m, 当水面与闸门顶部相齐时, 写出该闸门所受到的水压力的积分表达式.

5. 设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, 根据定积分的几何意义说明:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f \text{ 为奇函数,} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f \text{ 为偶函数.} \end{cases}$$

6. 设 f 是周期为 T 的周期函数, 且在任一有限区间上可积, 根据定积分的几何意义说明:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx,$$

其中 a 为任一常数.

7. 设 $f \in C[a, b]$, 试说明任意改变 f 在有限个点上的值不影响它的可积性和积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值.

8. 设 $f, g \in C[a, b]$.

(1) 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 且 $f(x) \not\equiv 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx > 0;$$

(2) 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 证明 $f(x) \equiv 0$;

(3) 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$, 且 $f(x) \not\equiv g(x)$, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

9. 判别下列积分的大小:

(1) $\int_0^1 e^x dx$ 和 $\int_0^1 e^{x^2} dx$;

(2) $\int_1^2 2\sqrt{x} dx$ 和 $\int_1^2 \left(3 - \frac{1}{x}\right) dx$;

(3) $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ 和 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$.

10. 证明下列不等式:

(1) $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$;

$$(2) 84 < \int_{-6}^8 \sqrt{100 - x^2} dx < 140.$$

11. 利用定理 1.2 证明: 若有界函数 f 在有限区间 I 上可积, 则 f 在 I 的任一子区间上也可积.

(B)

1. 设函数 f 与 g 在任一有限区间上可积.

(1) 如果 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, 那么 f 与 g 在 $[a, b]$ 上是否相等?

(2) 如果在任意一个区间 $[a, b]$ 上都有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx,$$

那么 f 是否恒等于 g ?

(3) 如果(2)中的 f 与 g 都是连续函数, 那么又有怎样的结论?

2. 证明性质 1.1 与 1.2.

3. 设 f 与 g 在区间 $[a, b]$ 上连续, 证明 Cauchy 不等式:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4. 设 f 与 g 在区间 $[a, b]$ 上连续, 利用 Cauchy 不等式证明 Minkowski 不等式:

$$\left(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. 设 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 利用 Cauchy 不等式证明:

$$\int_a^b e^{f(x)} dx \int_a^b e^{-f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

第二节 微积分基本公式与基本定理

在第一节中已经指出, 利用定义计算定积分是相当困难的. 本节将在讲解微积分基本公式(即 Newton-Leibniz 公式)与微积分基本定理的基础上, 阐述微分与积分的关系, 将定积分的计算问题转化为求被积函数的原函数或不定积分的问题, 并说明求积分是求微分的逆运算.

2.1 微积分基本公式

为了寻求一种计算定积分的简便易行的方法, 我们再来讨论已知速度求位移问题. 第一节中已经讲过, 如果已知变速直线运动的速度 $v = v(t)$, 那么物体从时刻 $t = a$ 到时刻 $t = b$ 所通过的位移为

$$s = \int_a^b v(t) dt.$$

另一方面,如果已知物体运动的位移函数 $s = s(t)$,那么在时间区间 $[a, b]$ 内物体所通过的位移应为

$$s = s(b) - s(a).$$

因此,如果能从已知的速度函数 $v(t)$ 求出位移函数 $s(t)$,那么就有

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a).$$

也就是说,定积分 $\int_a^b v(t) dt$ 的值可由函数 $s = s(t)$ 在 $t = b$ 的值与在 $t = a$ 的值之差得到.问题的关键在于如何从 $v(t)$ 求得 $s(t)$.由于 $s'(t) = v(t)$,所以由 $v(t)$ 求 $s(t)$ 是求导运算的逆运算.

受上面问题的启发,人们得到计算定积分的一个新方法.为了说明这种新方法,先引入下面的概念.

定义 2.1 (原函数) 如果在区间 I 上, $F'(x) = f(x)$, 那么称 F 是 f 在 I 上的一个原函数.

由于 $s'(t) = v(t)$, 所以位移函数 $s(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 在 $[a, b]$ 上的原函数.有了原函数的概念,就可以将上面物理模型中的结果抽象出来,得到下面的著名定理.

定理 2.1 (Newton - Leibniz 公式) 设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, 且 f 在区间 $[a, b]$ 上有一个原函数 F , 则

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.} \quad (2.1)$$

证 在区间 $[a, b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

那么 $[a, b]$ 被分割为 n 个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$). 设 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, 根据 Lagrange 中值定理, 必存在 $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, 使

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k) \Delta x_k,$$

所以

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^n F'(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \end{aligned}$$

由于 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, 在上式中令 $d = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta x_k| \rightarrow 0$, 即得

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \blacksquare$$

Newton-Leibniz 公式(2.1)将定积分的计算问题归结为求被积函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数问题. 由定义 2.1 知, 求 f 在 $[a, b]$ 上的原函数 F 是求导运算的逆运算. 因此, 该公式为定积分提供了一个有效而简便的计算方法, 常被称为微积分基本公式.

例 2.1 求下列定积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

解 (1) 由于 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, 所以 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数.

根据 Newton-Leibniz 公式,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 由于 $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$, 并且 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数, x 是 1 的一个原函数, 根据定积分的性质和 Newton-Leibniz 公式, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \blacksquare \end{aligned}$$

为了求出上一节例 1.4 中的平均电流 \bar{I} , 必须计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t dt$. 由于

$$\left(-\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right)' = \sin \omega t,$$

所以 $-\frac{1}{\omega} \cos \omega t$ 是 $\sin \omega t$ 的一个原函数. 根据 Newton-Leibniz 公式, 得知

$$\bar{I} = \frac{\omega I_m}{\pi} \left(-\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2}{\pi} I_m.$$

为了使用 Newton-Leibniz 公式计算定积分, 被积函数 f 必须有原函数存在并且能求出它的原函数. 自然要问, 当 f 满足什么条件时才有原函数呢? 如

何求出 f 的原函数呢? 下面首先讨论第一个问题.

2.2 微积分基本定理

设函数 $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ 可积, 则对任意的 $x \in [a,b]$, f 在 $[a,x]$ 上也可积. 当 x 在区间 $[a,b]$ 上任取一值时, 定积分 $\int_a^x f(t) dt$ 就有唯一确定的值与它相对应. 因此, 该积分在区间 $[a,b]$ 上确定了一个函数 $\Phi:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$, 即

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

注意, 这个积分中的积分上限 x 与积分变量 t 的涵义不同. 积分上限 x 表示积分区间 $[a,x]$ 的右端点, 而积分变量 t 则是区间 $[a,x]$ 中的变量. 为避免混淆起见, 常把积分变量改用其他字母表示. 例如换成 t , 则上式变为

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a,b]. \quad (2.2)$$

通常称这个积分为变上限积分.

定理 2.2 (微积分第一基本定理) 设 $f \in C[a,b]$, 则由(2.2)式所确定的函数 $\Phi:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上可导, 并且

$$\boxed{\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),}$$

(2.3)

其中, 若 x 为区间 $[a,b]$ 的端点, 则 $\Phi'(x)$ 是单侧导数.

证 设 $x \in (a,b)$, 由于

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt, \end{aligned}$$

根据积分中值定理, 在 x 与 $x + \Delta x$ 之间至少存在一个 ξ , 使得

$$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x.$$

已知 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 所以

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x).$$

若 x 是区间 $[a,b]$ 的端点, 则可类似地证明. ■

定理 2.2 的重要意义在于它揭示了微分(导数)与积分之间的联系. 它表明, 变上限积分是上限的一个函数, 该积分对上限的导数等于被积函数在上限处的

值. 由这个定理容易得到原函数存在的一个充分条件如下:

推论 2.1 设 $f \in C[a, b]$, 则 f 在区间 $[a, b]$ 上必有原函数, 且变上限积分(2.2)就是它的一个原函数.

例 2.2 设 $\Phi(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$, 求 $\Phi'(x)$.

解 由于函数 $\Phi(x)$ 可以看作 $g(u) = \int_0^u \cos t^2 dt$ 与 $u = \varphi(x) = \sqrt{x}$ 的复合函数, 根据链式法则与定理 2.2 得

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= g'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{d}{du} \left(\int_0^u \cos t^2 dt \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos u^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x.\end{aligned}$$

一般, 若 $\varphi(x)$ 是可导函数, f 连续, 则用例 2.2 的方法易得

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right) = f(\varphi(x))\varphi'(x). \quad (2.4)$$

根据原函数的定义可知, 如果 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数, C 是任意常数, 那么 $F + C$ 也是 f 在 I 上的原函数. 因此, 如果 f 在 I 上有原函数, 它的原函数就不止一个, 而且由 C 的任意性可知, f 的原函数有无穷多个. 试问, $F + C$ (C 为任意常数) 是否包含了 f 的所有原函数呢? 下面的定理回答了这个问题.

定理 2.3(微积分第二基本定理) 设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数, C 为任意常数, 则 $F + C$ 就是 f 在 I 上的所有原函数.

证 用 A 表示 f 在 I 上的一切形如 $F + C$ 的原函数构成的集合, 即

$$A = \{F + C \mid F \text{ 是 } f \text{ 在 } I \text{ 上的一个原函数}, C \text{ 为任意常数}\},$$

B 表示 f 在 I 上所有原函数构成的集合, 即

$$B = \{G \mid G'(x) = f(x), x \in I\}.$$

要证明此定理, 只需证明 $A = B$. 事实上, $A \subseteq B$ 是显然的, 下面证明 $B \subseteq A$. 任取 $G \in B$, 由于

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = 0, \quad x \in I,$$

所以 $G(x) - F(x)$ 在 I 上是一个常数, 即

$$G(x) - F(x) = C, \quad x \in I,$$

或 $G(x) = F(x) + C$, 故 $G \in A$, 从而 $B \subseteq A$.

根据集合相等的定义知 $A = B$. ■

微积分第二基本定理给出了 f 在 I 上所有原函数的一般表达式. 只要求出 f 的一个原函数 F , 其他原函数都可由表达式 $F + C$ 通过适当选择常数 C 得到.

例 2.3 求 $f(x) = 2x$ 的一个原函数 $F(x)$, 使它满足条件 $F(0) = 1$.

解 由于 x^2 是 $2x$ 的一个原函数, 所以 $2x$ 的所有原函数可表达为

$$F(x) = x^2 + C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

代入条件 $F(0) = 1$, 得 $1 = 0 + C$, 所以 $C = 1$, 所求原函数为

$$F(x) = x^2 + 1. \blacksquare$$

应当注意, 如果被积函数 f 在区间 $[a, b]$ 上是分段连续的(即除去有限个第一类间断点外, f 在 $[a, b]$ 上连续), 那么, 虽然 f 在 $[a, b]$ 上可积(定理1.4), 但是, 可以证明它在 $[a, b]$ 上不存在原函数^①. 因此, Newton-Leibniz 公式不能直接应用. 在这种情况下, 可在每个分段子区间上分别应用 Newton-Leibniz 公式, 再利用定积分关于区间的可加性, 就可得到所求的定积分.

例 2.4 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1], \\ 1+x, & x \in [1, 2], \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x) dx$.

解 根据定积分关于区间的可加性和 Newton-Leibniz 公式, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (1+x) dx \\ &= \left. \frac{1}{3}x^3 \right|_0^1 + \left. \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \right|_1^2 = 2\frac{5}{6}, \end{aligned}$$

其中第二个等号之所以成立, 是因为改变函数在有限个点上的值, 并不改变函数的可积性和积分值(见习题3.1(A)第7题). \blacksquare

2.3 不定积分

前面已经知道, 若 f 是连续函数, 则它必有原函数, 而且, 若 F 是 f 的一个原函数, 则 $F + C$ (C 为任意常数) 就是 f 所有原函数的一般表达式.

定义2.2(不定积分) 函数 f 在区间 I 上所有原函数的一般表达式称为 f 在 I 上的不定积分, 记作 $\int f(x) dx$, 其中 f 称为被积函数, $f(x) dx$ 称为被积式.

若 F 是 f 在 I 上的一个原函数, 则

^① 证明参看高等学校工科数学课程教学指导委员会本科组编《高等数学释疑解难》, 高等教育出版社, 1992

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

其中任意常数 C 称为积分常数. 例如,

$$\int 2x dx = x^2 + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

前面已经指出, 求导数与求不定积分(或原函数)是两种互逆运算, 前者是由原函数求导函数, 后者是由导函数求原函数. 以变速直线运动为例, 前者是已知物体的运动规律(位移函数 $s = s(t)$)求变化率(速度函数 $v = v(t)$), 而后者则是已知变化率求运动规律. 不定积分的下述性质进一步揭示了这种互逆性.

性质 2.1 $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, 或 $d\int f(x)dx = f(x)dx$; (2.5)

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \text{ 或 } \int df(x) = f(x) + C. \quad (2.6)$$

读者不难根据不定积分的定义证明这个性质.

由性质 2.1 容易看出, 在不考虑积分常数 C 的情况下, 积分符号“ \int ”与导数符号“ $'$ ”(或微分符号“ d ”)交替使用恰好互相抵消, 这是两种运算互逆关系的反映. 因此, 可以在求导公式和运算法则(有理运算与复合求导运算法则)的基础上反过来得到对应的积分公式和积分法则, 从而解决积分的计算问题.

首先, 可以从常用的一些初等函数的导数公式(见第二章中的基本导数表). 立即得到下面的基本积分表.

$\int k dx = kx + C$ (k 为常数)	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	

这些基本积分公式是求不定积分的基础,读者必须熟记,不要与求导公式混淆.

其次,与导数的线性运算法则相对应,我们有不定积分的线性运算法则.

性质 2.2 设 f 与 g 在区间 I 上的原函数存在,则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx, \quad (2.7)$$

其中 α 与 β 为任意常数.

证 根据不定积分的定义,只要证明等式(2.7)两边求导后所得到的函数相同即可.事实上,由性质 2.1,

$$\begin{aligned} \left(\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx \right)' &= \alpha f(x) + \beta g(x), \\ \left(\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx \right)' &= \alpha \left(\int f(x) dx \right)' + \beta \left(\int g(x) dx \right)' \\ &= \alpha f(x) + \beta g(x), \end{aligned}$$

故

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx. \quad \blacksquare$$

例 2.5 求 $\int \frac{2x + \sqrt{x} + 1}{x} dx$.

解 由性质 2.2 和基本积分表得

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + \sqrt{x} + 1}{x} dx &= 2 \int dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \frac{1}{x} dx \\ &= 2x + 2\sqrt{x} + \ln|x| + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 2.5 中的积分被分为三项后,每一个不定积分的结果中都应有一任意常数,由于三个任意常数之和仍是一个任意常数,所以最后的结果只写一个任意常

数就行了.今后遇到这种情况均照此办理,不再一一说明,但应切记千万不能丢掉任意常数 C !

例 2.6 求 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$.

解 由于 $1+2x^2 = x^2 + (1+x^2)$, 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= \arctan x - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

例 2.7 求 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

解 根据三角恒等式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 得:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx = \tan x - \cot x + C. \end{aligned}$$

应当指出,不定积分与定积分是两个不同的概念.定积分是由一个和式极限来定义的,其结果是一个数;而不定积分是被积函数所有原函数的一般表达式.另一方面,二者又有密切的联系,而且它们的计算都归结为求被积函数的原函数.因而,求定积分和不定积分的方法统称为积分法.

习题 3.2

(A)

1. 函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的定积分与原函数有何区别与联系? 试通过在区间 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x) = x$ 的定积分与原函数说明之.

2. 证明: $\sin^2 x$, $-\cos^2 x$ 与 $-\frac{1}{2}\cos 2x$ 都是同一个函数的原函数. 你能解释为什么同一个函数的原函数在形式上的这种差异吗?

3. 用 Newton-Leibniz 公式计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 4x^2 dx$;

(2) $\int_1^r \frac{dx}{x}$;

(3) $\int_0^\pi \sin x dx$;

(4) $\int_{-1}^1 |x| dx$;

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) dx$;

(6) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$ 求 $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

4. 求下列各函数的导数:

(1) $f(x) = \int_0^x \arctan t dt;$

(2) $f(x) = \int_x^b \frac{dt}{1+t^4};$

(3) $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt;$

(4) $F(x) = \int_{\sin x}^0 \frac{t}{1-t^2} dt;$

(5) $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln(1+t^6) dt;$

(6) 设 $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt$, $f \in C[a, b]$, φ 可微, 且 φ 的值域包含在 $[a, b]$ 中:

(7) $y = \int_{x^2}^{x^3} (x+t) \varphi(t) dt$, 其中 φ 为连续函数.

5. 指出下列运算中有无错误, 错在何处:

(1) $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} \sqrt{t+1} dt \right) = \sqrt{x^2+1};$

(2) $\int_0^{x^2} \left(\frac{d}{dt} \sqrt{t+1} \right) dt = \sqrt{x^2+1};$

(3) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^1 = 0;$

(4) $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2 x} dx = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = 0.$

6. 求由参数方程

$$x = \int_0^t \sin^2 u du, \quad y = \int_0^t \cos \sqrt{u} du$$

所确定的函数 $y = f(x)$ 的一阶导数.

7. 求由方程

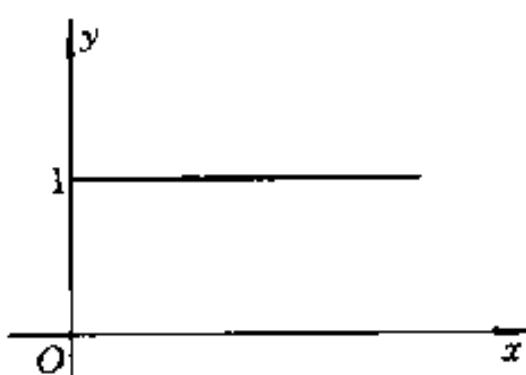
$$\int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^x te^t dt = 0$$

所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的一阶导数.8. 设 $y = f(x)$ 的图象如下图所示, 画出函数

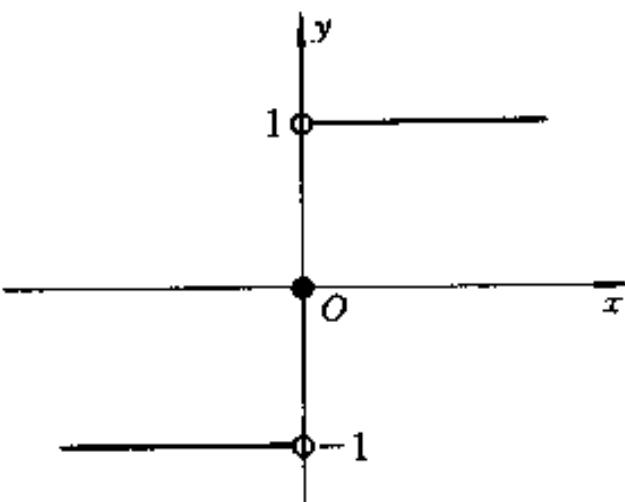
$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

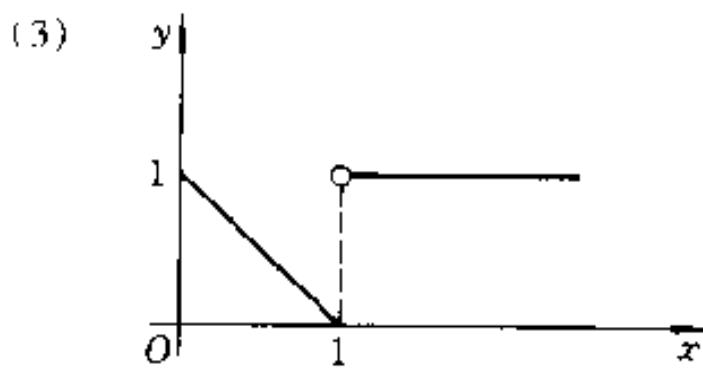
的图象.

(1)

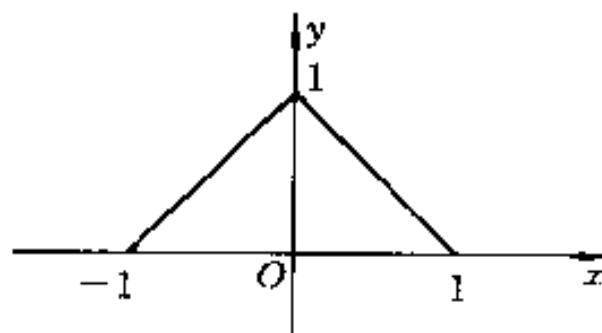


(2)





(4)



(第 8 题图)

9. 求函数 $y = \int_0^x \sqrt{t}(t-1)^3 dt$ 的定义域, 单调区间和极值点.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$

(1) 求函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$;

(2) 讨论函数 $F(x)$ 连续性和可导性.

11. 如果函数 f 在有限区间 I 上连续, F 为 f 在 I 上的一个原函数, 试问下列式子哪些正确? 哪些不正确? 为什么?

(1) $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$ (其中 a 为 I 中一点, C 为一个常数);

(2) $\frac{d}{dx} \int f(t)dt = F'(x);$

(3) $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$, (C 为任意常数);

(4) $\frac{d}{dx} \int f(t)dt = \frac{d}{dx} \int f(x)dx;$

(5) $\int_a^x F'(x)dx = \int F'(x)dx;$

(6) $\int_a^x F'(x)dx = F(x).$

12. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{3x+5}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(2) \int \frac{x^2+1}{x-1} dx;$$

$$(3) \int \frac{3x^2}{1+x^2} dx;$$

$$(4) \int 2^{x-1} e^x dx;$$

$$(5) \int \tan^2 x dx;$$

$$(6) \int \frac{\cos 2t}{\cos^2 t \sin^2 t} dt.$$

(B)

1. 设 f 在区间 $[a, b]$ 上可积, 证明函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

在 $[a, b]$ 上连续.

2. 试确定 a, b 的值, 使

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{\frac{t^2}{a+t}} dt}{bx - \sin x} = 1.$$

3. 设函数 f 在 $x=1$ 的邻域内可导, 且 $f(1)=0, \lim_{x \rightarrow 1} f'(x)=1$, 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \left(t \int_t^1 f(u) du \right) dt}{(1-x)^3}.$$

4. 设 $f, g \in C[a, b]$, 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使:

$$f(\xi) \int_\xi^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^\xi f(x) dx.$$

第三节 两种基本积分法

利用不定积分的性质和基本积分表, 只能计算少量简单函数的不定积分, 因此, 还需要进一步研究计算不定积分的其他方法. 本节介绍两种基本的积分方法, 即换元法与分部积分法, 它们分别对应于求导法则中的复合函数求导法则与两个函数乘积的求导法则, 是其他各种积分方法的基础, 读者应当熟练掌握.

3.1 换元积分法

换元积分法是将复合函数求导法则反过来用于求不定积分所得到的积分法则, 它是计算积分的最重要的方法, 通常分为两类.

1. 换元积分法(I)

设 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数, 即 $F'(u) = f(u)$. 若 $u = \varphi(x)$ 可微, 根据复合函数求导法则,

$$(F[\varphi(x)])' = f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

从而得

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C.$$

又因为

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

所以

$$\left(\int f(u) du \right)_{u=\varphi(x)} = F[\varphi(x)] + C : \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx.$$

于是得到下述定理:

定理 3.1 设函数 f 存在原函数, φ 可微, 且 φ 的值域含于 f 的定义域中, 则

$$\boxed{\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left(\int f(u) du \right)_{u=\varphi(x)}} \quad (3.1)$$

定理 3.1 表述的就是换元法则(I). 按照这个法则, 如果给定的积分 $\int g(x) dx$ 能够表示成(3.1)式左端的形式, 也就是被积式 $g(x) dx$ 能变成 $f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = f[\varphi(x)] d\varphi(x)$ 的形式, 那么通过变量代换 $u = \varphi(x)$, 给定的积分就等于(3.1)式右端的形式. 如果积分 $\int f(u) du = F(u) + C$ 容易求得, 那么将 $u = \varphi(x)$ 代入 $F(u)$ 便知所求积分

$$\int g(x) dx = F[\varphi(x)] + C.$$

为了将 $g(x) dx$ 变成 $f[\varphi(x)] d\varphi(x)$ 的形式, 常常设法将 $g(x)$ 分解成两个因子的乘积, 使其中一个因子与 dx 的乘积凑成微分 $d\varphi(x)$, 而将另一个因子化成 $\varphi(x)$ 的函数 $f[\varphi(x)]$, 必要时可以添加常数. 因此, 换元法则(I)也称为凑微分法. 用这种方法求积分并无一般的规律可循, 读者应在熟记基本积分公式的基础上, 通过不断练习、总结经验, 才能灵活运用.

例 3.1 求下列积分:

$$(1) \int \cos(3x+1) dx; \quad (2) \int (ax+b)^2 dx (a \neq 0, a \neq -1);$$

$$(3) \int \frac{dx}{a^2+x^2} (a>0); \quad (4) \int \frac{dx}{x^2+2x+3};$$

$$(5) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} (a>0); \quad (6) \int \frac{dx}{a^2-x^2} (a>0).$$

解 (1) 由于基本积分表中只有公式 $\int \cos x dx = \sin x + C$, 因此为了求出这个积分, 按照换元积分法则(I), 将它变成如下形式:

$$\int \cos(3x+1) dx = \frac{1}{3} \int \cos(3x+1) d(3x+1).$$

令 $u = 3x+1$, 得

$$\int \cos(3x+1)dx = \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{1}{3} \sin u + C.$$

再将 $u = 3x + 1$ 代入上式, 便得

$$\int \cos(3x+1)dx = \frac{1}{3} \sin(3x+1) + C.$$

(2) 在基本积分表中只有公式 $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, 为了求出这个积分, 将它变成

$$\int (ax+b)^a dx = \frac{1}{a} \int (ax+b)^a d(ax+b).$$

令 $u = ax + b$, 得

$$\begin{aligned} \int (ax+b)^a dx &= \left(\frac{1}{a} \int u^a du \right)_{u=ax+b} \\ &= \left(\frac{1}{(a+1)a} u^{a+1} + C \right)_{u=ax+b} \\ &= \frac{(ax+b)^{a+1}}{(a+1)a} + C. \end{aligned}$$

(3) 为了应用积分公式 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$, 将所求积分变为

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

令 $u = \frac{x}{a}$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \left(\frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2} \right)_{u=\frac{x}{a}} \\ &= \left(\frac{1}{a} \arctan u + C \right)_{u=\frac{x}{a}} \\ &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

(4) 由于

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{2+(x+1)^2},$$

仿照上题的方法有

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{1+u^2} \right)_{u=\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan u + C \right)_{u=\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.
 \end{aligned}$$

在比较熟练之后,解题步骤可以写得简单点.例如,变量代换 $u = \varphi(x)$ 可以不写出来,只需默记在脑中.

$$(5) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

(6) 由于 $\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$, 所以

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{d(a+x)}{a+x} - \int \frac{d(a-x)}{a-x} \right] \\
 &= \frac{1}{2a} (\ln|a+x| - \ln|a-x|) + C \\
 &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

为了更好地掌握积分技术,读者在作题过程中应当不断积累经验,总结规律.

例 3.2 求下列积分:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx; & (2) \int \tan x dx; \\
 (3) \int \sin^3 x dx; & (4) \int \sin^2 x dx; \\
 (5) \int \sin x \cos 2x dx.
 \end{array}$$

解 (1) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C.$

$$(2) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C.$$

$$(3) \int \sin^3 x dx = - \int (1 - \cos^2 x) d \cos x = - \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

$$\begin{aligned} (4) \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

(5) 根据积化和差公式得

$$\sin x \cos 2x = \frac{1}{2} (\sin 3x - \sin x),$$

所以

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 3x - \sin x) dx \\ &= -\frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 3.2 中的五个积分被积函数都是三角函数, 在使用换元法时, 大都利用三角恒等式先将被积函数适当地变形, 然后再进行变量代换. 实际上, 要熟练掌握积分技术, 初等数学中已学过的各种代数和三角运算技巧都是不可少的, 读者在解题中应注意运用.

例 3.3 求下列积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}; \quad (2) \int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1 + x^2} dx;$$

$$(3) \int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)} dx.$$

$$\text{解 } (1) \int \frac{dx}{x(1 + \ln x)} = \int \frac{d(1 + \ln x)}{1 + \ln x} = \ln |1 + \ln x| + C.$$

$$(2) \int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1 + x^2} dx = \int \sqrt{\arctan x} d \arctan x = \frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(3) 表面上看, 这个积分似乎很复杂, 但是, 如果读者对微分公式 $d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ 与 $d \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 很熟悉, 那么这个积分便可以按如下步骤求解:

$$\begin{aligned} \int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)} dx &= 2 \int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x} \\ &= 2 \left(\int \frac{\arccos u}{\sqrt{1-u^2}} du \right)_{u=\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \left(\int \arccos u \, d\arccos u \right)_{u=\sqrt{x}} \\
 &= -(\arccos \sqrt{x})^2 + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

在解第(3)小题时,用了两个变量代换: $u = \sqrt{x}$, $v = \arccos u$,但第二个代换在解题过程中没有写出.

例 3.4 求 $\int \csc x \, dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解法一} \quad \int \csc x \, dx &= \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} \, dx \\
 &= - \int \frac{d\cos x}{1 - \cos^2 x} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + C,
 \end{aligned}$$

其中最后一步利用了例 3.1 中第(6)题的结果.

$$\begin{aligned}
 \text{解法二} \quad \int \csc x \, dx &= \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\
 &\sim \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) \\
 &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法三} \quad \int \csc x \, dx &= \int \frac{\csc x (\csc x + \cot x)}{\csc x + \cot x} \, dx \\
 &= - \int \frac{d(\csc x + \cot x)}{\csc x + \cot x} \\
 &= -\ln |\csc x + \cot x| + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

在这个例子中,我们用三种解法得到了三种形式不同的答案.同一个不定积分,为什么答案不同呢?读者自己去解释这个问题.

2. 换元积分法(Ⅱ)

换元积分法(I)实际上就是将(3.1)式左端的积分通过变量代换 $u = \varphi(x)$ 化为右端的积分来计算的.反过来,如果左端的积分容易求出,那么右端的积分 $\int f(x) \, dx$ 就可以通过适当的变量代换 $x = \varphi(t)$ 化为左端的形式来计算,即

$$\int f(x) \, dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt.$$

这就是换元法则(Ⅱ),现叙述如下.

定理 3.2 设 f 是连续函数, φ 有连续的导数,且 φ' 定号,则

$$\boxed{\int f(x) \, dx = \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt \right)_{t=\varphi^{-1}(x)}} \quad (3.2)$$

其中 φ^{-1} 是 φ 的反函数.

证 由于 φ' 定号, 故 φ 存在反函数 φ^{-1} , 并且 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$. 对等式(3.2)两端分别关于 x 求导, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) &= f(x), \\ \frac{d}{dx} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right) &= \frac{d}{dt} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right) \frac{dt}{dx} \\ &= f[\varphi(t)] \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= f[\varphi(t)] = f(x),\end{aligned}$$

所以(3.2)式成立. ■

使用换元法则(II)的关键在于选择满足定理 3.2 中条件的变换 $x = \varphi(t)$, 使所求积分变为(3.2)式右端的积分, 并且右端积分容易积出. 如何选择这个变换, 与被积函数的形式有关. 例如, 如果被积函数中含有根式函数, 那么可以选择变换 $x = \varphi(t)$ 消去根式, 使积分得到化简, 变得容易积分.

例 3.5 求 $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$ ($a > 0$).

解 为了消去被积函数中的根式, 令 $x = a \sin t$ ($t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$), 则 $dx = a \cos t dt$, 于是

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \int \frac{dt}{a^2 \cos^2 t} = \frac{1}{a^2} \tan t + C.$$

由图 3.1 知, $\tan t = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, 所以

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \quad ■$$

例 3.6 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ($a > 0$).

解 为了消去根式, 令 $x = a \sec t$ ($t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 或 $t \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$), 则 $dx = a \sec t \tan t dt$, 于是

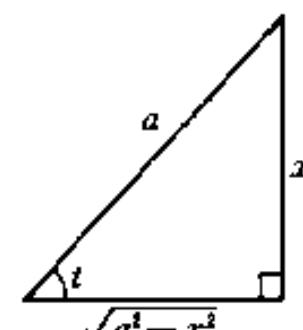


图 3.1

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C_1,$$

其中第二个等式可利用例 3.4 的解法三得到.

由图 3.2 知, $\sec t = \frac{x}{a}$, $\tan t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C_1 \\ &\therefore \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C,\end{aligned}$$

其中 $C = C_1 - \ln a$. ■

例 3.7 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ ($a > 0$).

解 为了消去被积函数中的根式, 令 $x = a \tan t$ ($t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$), 则 $dx = a \sec^2 t dt$, 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C_1,$$

由图 3.3 知, $\tan t = \frac{x}{a}$, $\sec t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$,

$$\begin{aligned}\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} &= \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right| + C_1 \\ &\therefore \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,\end{aligned}$$

其中 $C = C_1 - \ln a$. ■

一般来说, 如果被积函数中含有:

- 1) $\sqrt{a^2 - x^2}$, 可作变换 $x = a \sin t$ (或 $x = a \cos t$);
- 2) $\sqrt{x^2 + a^2}$, 可作变换 $x = a \tan t$ (或 $x = a \sinh t$);
- 3) $\sqrt{x^2 - a^2}$, 可作变换 $x = a \sec t$ (或 $x = a \cosh t$).

今后在作题时, 不再指明变换 $x = \varphi(t)$ 的适用范围, 总认为变换是在满足定理 3.2 中条件的区间内作的.

如果被积函数中含有根式 $\sqrt[n]{ax + b}$, 则可直接令 $\sqrt[n]{ax + b} = t$, 将根式消去.

例 3.8 求 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}}$.

解 令 $\sqrt[3]{x+2} = t$, 则 $x = t^3 - 2$, $dx = 3t^2 dt$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}} &= \int \frac{3t^2 dt}{1 + t} = 3 \int \left[t - 1 + \frac{1}{1+t} \right] dt \\ &= 3 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| \right) + C \\ &\therefore \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{x+2} + \ln|1+\sqrt[3]{x+2}| + C.\end{aligned}$$

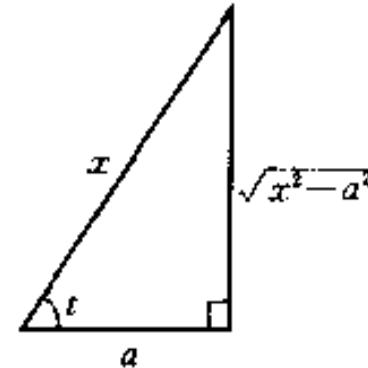


图 3.2

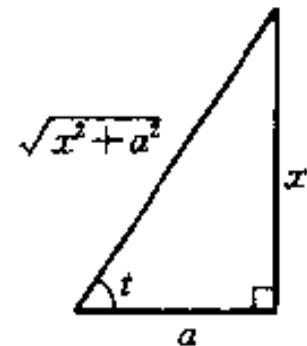


图 3.3

例 3.9 求 $I = \int \frac{\sin x}{5 + 4\cos x} dx$.

解 令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则由半角公式得

$$\sin x = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$dx = d(2\arctan t) = \frac{2}{1 + t^2} dt.$$

代入所求积分并化简得

$$\begin{aligned} I &= 4 \int \frac{t}{(1 + t^2)(9 + t^2)} dt = \frac{1}{2} \left(\int \frac{t}{1 + t^2} dt - \int \frac{t}{9 + t^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{4} [\ln(1 + t^2) - \ln(9 + t^2)] + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1 + t^2}{9 + t^2} + C \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left(1 + 8\cos \frac{2x}{2} \right) + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

此例中所用的变量代换称为半角代换, 它适用于求解三角有理函数(即由正弦和余弦函数经过有限次的有理运算构成的函数)的积分.

3. 定积分换元法

第二节中已经指出, 为了利用 Newton-Leibniz 公式计算定积分, 只要求出被积函数的原函数. 如果被积函数比较复杂, 自然可以先用换元法求出它的原函数, 再代入积分上、下限从而求出积分的值. 然而, 在许多理论和实际问题中, 还需要直接利用下面的定积分换元法.

定理 3.3 设函数 f 在有限区间 I 上连续, $x = \varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数, 并且 φ 的值域 $R(\varphi) \subseteq I$, 则

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,} \quad (3.3)$$

其中 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (图 3.4).

证 设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3.4)$$

另一方面, 由于

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)] = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

所以 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在 $[a, \beta]$ 上的一个原函数, 故

$$\begin{aligned} \int_a^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt &= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(a)] \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned} \quad (3.5)$$

于是由(3.4)与(3.5)两式知等式(3.3)成立. ■

例 3.10 求 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

解 令 $x = \sin t \left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$, 则 $dx = \cos t dt$, 且当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=1$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

利用定积分换元法时应当注意, 积分变量 x 通过代换 $x = \varphi(t)$ 换成 t 后, 积分上、下限必须同时换成对应的 t 的上、下限. 定积分换元法还可以用来证明一些积分等式.

例 3.11 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ (n 为正整数).

证 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right) (-dt) \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 3.12 设 $f \in C[0, \pi]$, 证明 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$, 并由此计算定积分 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

解 令 $x = \pi - t$, 则

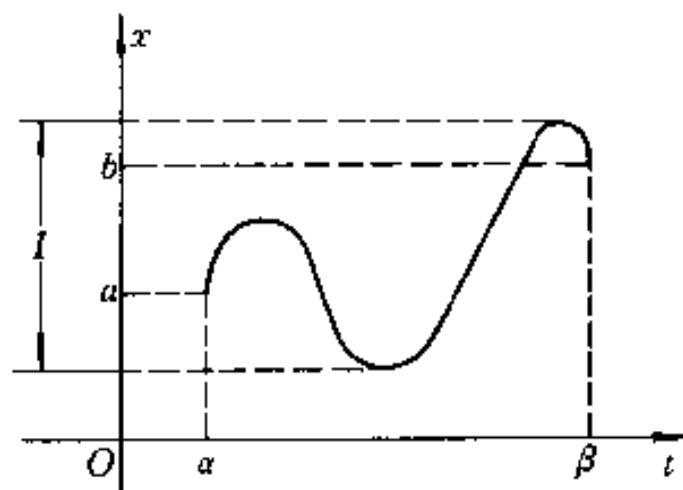


图 3.4

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi xf(\sin x)dx &= \int_\pi^0 (\pi - t)f[\sin(\pi - t)](-dt) \\
 &= \int_0^\pi (\pi - t)f(\sin t)dt \\
 &= \pi \int_0^\pi f(\sin t)dt - \int_0^\pi tf(\sin t)dt.
 \end{aligned}$$

注意到积分与积分变量无关, 移项可得

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

利用这个等式我们有

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\
 &= -\frac{\pi}{2} \arctan(\cos x) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.
 \end{aligned}$$

在使用定积分换元法时, 必须注意定理中的条件, 否则会得到错误的结论.

3.2 分部积分法

与微分学中乘积的求导法则相对应的, 是另一种基本的积分法则——分部积分法.

设 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 都是可微函数, 则

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \text{或} \quad d(uv) = vdu + udv,$$

移项得

$$udv = d(uv) - vdu.$$

若进而假定 u' 与 v' 都是连续的, 对上式两端求不定积分, 并将右端第一项的积分常数合并到第二项的不定积分中, 立即可得

$\int u dv = uv - \int v du,$

(3.6)

称它为分部积分公式. 它表明, 若积分 $\int u dv$ 不易求得, 而 $\int v du$ 容易求得, 则可利用该公式来计算 $\int u dv$. 使用时, 关键在于恰当地选择 u 和 dv , 使所求积分的被积式 $f(x)dx = u dv$, 并且 $\int v du$ 容易求出.

例 3.13 求下列积分:

$$(1) \int x \cos x dx; \quad (2) \int x e^x dx;$$

$$(3) \int x^2 e^x dx.$$

解 (1) 令 $u = x, \cos x dx = dv$, 则 $v = \sin x$. 根据公式(3.6)得

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int x d(\sin x) - x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

有的读者可能会问,此题能否选择 $u = \cos x, x dx = dv$ (则 $v = \frac{x^2}{2}$) 呢? 不妨试一下. 此时我们有

$$\int x \cos x dx = \int \cos x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx.$$

不难看到,上式的右端反而比原积分更复杂了(幂函数的次数增大了),照这样继续作下去是无法得到结果的,因此这种选择不恰当.

(2) 令 $u = x, e^x dx = dv$, 则 $v = e^x$, 于是我们有

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= \int x de^x = x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C. \end{aligned}$$

读者还可试一下, u 与 dv 有无其它选择方法. 当方法掌握得比较熟练之后, 在解题中 u 与 dv 的选择不必具体写出.

$$\begin{aligned} (3) \int x^2 e^x dx &= \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C, \end{aligned}$$

其中第三个等式利用了(2)题中的结果. ■

做了上面三个题目以后, 读者想一想, 对于下列类型的积分:

$$\int x^n e^{ax} dx, \int x^n \sin ax dx, \int x^n \cos ax dx$$

(其中 $n \in \mathbb{N}_+$, $a \in \mathbb{R}$ 为常数) 应当如何选择 u 和 dv 呢?

例 3.14 求下列积分:

$$(1) \int x^2 \ln x dx; \quad (2) \int x \arctan x dx;$$

$$(3) \int \arcsin x dx.$$

$$\text{解 } (1) \int x^2 \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

$$\begin{aligned}(2) \int x \arctan x dx &= \int \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

例 3.15 求 $\int e^x \sin x dx$.

解 根据分部积分公式(3.6),

$$\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

对上式右端的积分再次应用分部积分法, 又得

$$\int e^x \cos x dx = \int \cos x de^x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx,$$

从而有

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$$

移项并将等式两端的不定积分中的任意常数合并移至等式右端可得

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x (\sin x - \cos x) + C. \quad \blacksquare$$

例 3.16 求 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, (n \in \mathbb{N}_+)$.

解 根据分部积分公式(3.6), 我们有 $\left(\text{取 } u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, v = x \right)$

$$\begin{aligned}I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\&= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \\
 &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}.
 \end{aligned}$$

从而得到一个递推公式:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n-1)I_n \right] \quad (n \in \mathbb{N}_+).$$

当 $n=1$ 时得

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) + C,
 \end{aligned}$$

代入递推公式可以求得任何 I_n . ■

例 3.17 求 $I = \int \frac{x^4 + 2x^2 - x + 1}{x^5 + 2x^3 + x} dx$.

解 由于

$$\frac{x^4 + 2x^2 - x + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{(x^2 + 1)^2 - x}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2},$$

所以

$$I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \ln|x| - \frac{1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \arctan x + C,$$

其中第二个积分直接利用了例 3.16 的结果. ■

对于定积分,也有相应的分部积分法.

定积分分部积分公式 设函数 u, v 在区间 $[a, b]$ 上有连续的导数, 则

$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$

(3.7)

证明由读者完成.

例 3.18 求 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$.

解 令 $\sqrt{x} = t$, 则

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 t e^t dt = 2 \int_0^1 t de^t \\
 &= 2 \left(t e^t \Big|_0^1 - e^t \Big|_0^1 \right) = 2.
 \end{aligned}$$

例 3.19 求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

解 根据定积分分部积分公式(3.7),

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= - \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x d\sqrt{1-x^2} \\ &= - \sqrt{1-x^2} \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 3.20 (1) 计算 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx (n=0,1,2,\dots)$;

(2) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx$;

(3) 计算 $\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx$.

解 (1) 当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x \\ &= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n, \end{aligned}$$

所以

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n=2,3,\dots).$$

当 n 为奇数时,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} I_1;$$

当 n 为偶数时,

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0.$$

又因为

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \quad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

故

$$I_n = \begin{cases} \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为奇数;} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

(2) 利用(1)中的结果, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}. \end{aligned}$$

(3) 令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$, 于是

$$\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt = \frac{\pi}{32}. \blacksquare$$

3.3 初等函数的积分问题

由上面的例子可以看到, 求积分比求微分要困难得多. 有些积分要用很高的技巧才能算出; 有些积分计算很麻烦; 还有许多积分, 即使被积函数很简单, 也无法积出. 例如,

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \text{等等.}$$

虽然这些积分的被积函数都是初等函数, 它们在定义域内是连续的, 因此原函数一定存在, 但是, 原函数却不能用初等函数表示出来, 这与微分法中“任何可导的初等函数的导数仍是初等函数”是不同的. 通常把被积函数的原函数能用初等函数表示的积分叫做积得出的, 否则, 叫做积不出的. 究竟哪些积分积得出, 哪些积分积不出, 这是一个很复杂的问题, 没有一般的判别方法. 为了应用的方便, 人们已将积得出的常用初等函数的积分编成积分表, 供科技人员查阅. 随着计算机科学的发展, 现在计算机已能进行符号运算, 可以利用数学软件包在微机上直接计算积得出的积分. 对于积不出的, 也可用数值方法求出其近似值. 但是, 不能认为就不需要掌握积分法了. 在今后的继续学习和工作中, 常常会碰到积分的演算和推导, 需要较熟练地掌握一些基本的积分方法, 特别是换元法与分部积分法. 况且, 如果不掌握这些积分法, 连积分表也无法查用.

习题 3.3

(A)

1. 利用换元积分法(I)计算下列不定积分:

- $$(1) \int \sin(\omega t + \varphi) dt (\omega, \varphi \text{ 为常数}); \quad (2) \int \frac{10}{\sqrt[3]{3+5x}} dx;$$
- $$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}; \quad (4) \int x^2(3+2x^3)^{\frac{1}{6}} dx;$$
- $$(5) \int \frac{3x^3+x}{1+x^4} dx; \quad (6) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$$
- $$(7) \int \frac{\cos|\ln|x||}{x} dx; \quad (8) \int \frac{\ln|\ln x|}{x \ln x} dx (x > e);$$
- $$(9) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx; \quad (10) \int \cos^4 x dx;$$
- $$(11) \int \sin^2 x \cos^2 x dx; \quad (12) \int \sec^4 x dx;$$
- $$(13) \int \csc^3 x \cot x dx; \quad (14) \int \frac{dx}{e^x + 1};$$
- $$(15) \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}; \quad (16) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\sqrt{1+x^2}} dx;$$
- $$(17) \int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx; \quad (18) \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2} \arccos \frac{x}{2}}.$$

2. 证明下列各式($m, n \in \mathbb{N}_+$):

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n; \end{cases}$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n; \end{cases}$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$$

3. 利用换元积分法(II)计算下列不定积分:

- $$(1) \int x \sqrt{3-2x} dx; \quad (2) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}};$$
- $$(3) \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}; \quad (4) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} (a > 0);$$
- $$(5) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+9}}; \quad (6) \int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^{3/2}};$$
- $$(7) \int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2} dx; \quad (8) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}};$$
- $$(9) \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx; \quad (10) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{3e^x-2}} dx.$$

4. 求下列定积分的值:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\cos x} dx;$

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$

(3) $\int_{-1}^e \frac{2+3\ln x}{x} dx;$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx;$

(5) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$

(6) $\int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$

(7) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx.$

5. 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 利用定积分的换元法证明:

(1) 如果 $f(x)$ 为奇函数, 那么 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

(2) 如果 $f(x)$ 为偶函数, 那么 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$;

(3) 计算 $\int_{-1}^1 |x| \left(x^2 + \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} \right) dx$.

6. 设 $f(x)$ 为连续的周期函数, 其周期为 T , 利用定积分的换元法证明:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad (a \text{ 为常数}).$$

7. 利用分部积分法计算下列积分:

(1) $\int x \sin 3x dx;$

(2) $\int x^3 \cosh x dx;$

(3) $\int x^2 \arctan x dx;$

(4) $\int x \ln(1+x^2) dx;$

(5) $\int \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx;$

(6) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

(7) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx;$

(8) $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx;$

(9) $\int_0^{e-1} \ln(1+x) dx;$

(10) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx.$

8. 证明下列递推公式($n=2, 3, \dots$):

(1) 设 $I_n = \int \tan^n x dx$, 则 $I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$;

(2) 设 $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$, 则 $I_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$.

9. 计算下列积分:

(1) $\int \frac{dx}{x^4 + 3x^2};$

(2) $\int \frac{t}{t^4 + 10t^2 + 9} dt;$

(3) $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx;$

(4) $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx;$

(5) $\int \frac{dx}{3+2\cos x};$

(6) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx;$

(7) $\int \frac{x^2}{a^2 - x^6} dx \quad (a > 0);$

(8) $\int \frac{x^{11}}{x^8 + 4x^4 + 5} dx;$

(9) $\int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx;$

(10) $\int \frac{\cos 2x}{1 + \sin x \cos x} dx;$

$$(11) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx; \quad (12) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$(13) \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx; \quad (14) \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

10. 证明下列积分等式:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = (b-a) \left[f(a) + (b-a)x \right] dx, \text{ 其中 } f \text{ 为连续函数};$$

$$(2) \int_0^1 x^n (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx;$$

$$(3) \int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x) dx, \text{ 其中 } f \text{ 为连续函数}.$$

(B)

$$1. \text{ 证明: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cdot \cos^m x dx = \frac{1}{2^m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx \quad (m \in \mathbb{N}_+).$$

$$2. \text{ 计算 } \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin 2x} dx \quad (n \in \mathbb{N}_+).$$

$$3. \text{ 计算 } \int_0^{10\pi} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} dx.$$

$$4. \text{ 计算 } \int_0^{\pi/2} x |\sin x| dx \quad (n \in \mathbb{N}_+).$$

$$5. \text{ 计算 } \int_{-\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx.$$

$$6. \text{ 计算 } \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx.$$

第四节 定积分的应用

在科学技术中有很多量都需要用定积分来表达. 本节重点阐述建立这些量的积分表达式的常用方法——微元法, 通过几何与物理方面的例子说明运用这种方法的思想和步骤.

4.1 建立积分表达式的微元法

应用定积分解决实际问题, 需要解决两个问题: 第一, 用定积分来表达的量应具备哪些特征? 第二, 怎样建立这些量的积分表达式?

在本章第一节中我们已经看到, 曲边梯形的面积 A 、物质细棒的质量 m 以及作变速直线运动物体的位移 s 等都可用定积分来表达. 这些量具有如下共同特征: (1)都是区间 $[a, b]$ 上的非均匀连续分布的量; (2)都具有对区间的可加性, 即分布在 $[a, b]$ 上的总量等于分布在各子区间上的局部量之和. 一般情况下, 凡用定积分描述的量都应具备这些特征.

在第一节中,上述诸量的积分表达式都是通过“分”、“匀”、“合”、“精”四个步骤来建立的,例如,对于区间 $[a, b]$ 上以 $y = f(x)$ ($f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$)为曲边的曲边梯形,通过这四步得到的面积 A 的积分表达式为

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

这是建立所求量积分表达式的基本方法。但是,这几个步骤书写繁琐,不便于应用。分析这种方法实质,不难将四个步骤简化为两步。第一步,包含“分”、“匀”两个步骤的主要内容,也就是通过将 $[a, b]$ 分割为子区间,在每个子区间上用均匀变化近似代替非均匀变化,求得局部量的近似值:

$$\Delta A_k \approx f(\xi_k) \Delta x_k,$$

它对应着积分表达式中的被积式 $f(x)dx$;第二步,就是将“合”、“精”两个步骤合而为一,通过将各个局部近似值相加并取极限得到整体量的精确值,即对被积式 $f(x)dx$ 作积分:

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

上述简化过程具有一般性。设 $f \in C[a, b]$, Q 为由 $y = f(x)$ 所确定的在区间 $[a, b]$ 上非均匀连续分布的量,并且对区间具有可加性。为简单起见,省略各子区间的下标 k ,把第 k 个子区间记为 $[x, x + dx]$ 。由于 f 为连续函数,可取子区间的左端点为 ξ_k ,这时建立所求量 Q 的积分表达式的步骤就可归纳为如下两步:

(1) 任意分割区间 $[a, b]$ 为若干子区间,任取一个子区间 $[x, x + dx]$,求 Q 在该区间上局部量 ΔQ 的近似值

$$dQ = f(x)dx;$$

(2) 以 $f(x)dx$ 为被积式,在 $[a, b]$ 上作积分即得总量 Q 的精确值

$$Q = \int_a^b dQ = \int_a^b f(x)dx. \quad (4.1)$$

这种建立积分表达式的方法,通常称为微元法。其中, $dQ = f(x)dx$ 称为积分微元,简称微元。

上述两步中,求子区间 $[x, x + dx]$ 上局部量 ΔQ 的近似值是微元法的关键一步。怎样才能求得局部量 ΔQ 所需要的近似值呢?为了说明这个问题,我们把分布在区间 $[a, x]$ ($x \in [a, b]$)上的量 Q 记作 $Q(x)$,对比(4.1)式可知

$$Q(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, 根据微积分学第一基本定理, 函数 $Q(x)$ 的微分为

$$dQ = f(x)dx. \quad (4.2)$$

而 ΔQ 就是 $Q(x)$ 在区间 $[x, x + dx]$ 上的改变量, 因而局部量 ΔQ 所需要的近似值就是由(4.2)式所表示的 $Q(x)$ 的微分, 这就为寻求 ΔQ 所需要的近似值确立了标准. 根据改变量 ΔQ 与微分的关系, 只要能找到与 dx 成线性关系并且与 ΔQ 之差为 dx 高阶无穷小的量 $dQ - f(x)dx$, 那么, 它就是 ΔQ 所需要的近似值. 在实际应用中, 通过在子区间 $[x, x + dx]$ 上把非均匀变化的量近似看成是均匀的, 或者把子区间 $[x, x + dx]$ 近似看成一点, 用乘法所求得的近似值往往就符合上述要求, 可以作为 ΔQ 所需要的近似值, 即为所寻求的积分微元 $dQ = f(x)dx$. 下面再通过一些实例来说明微元法.

4.2 定积分在几何中的应用举例

例 4.1 求由抛物线 $y = x^2 - 1$ 与 $y = 7 - x^2$ 所围成的平面图形(图 4.1)的面积 A .

解 联立两抛物线的方程, 容易求得它们的交点的横坐标为 $x = \pm 2$.

前面已经指出, 所求面积 A 是非均匀连续分布在区间 $[-2, 2]$ 上且对区间具有可加性的量, 因此, 可以用定积分来计算.

根据微元法, 为求面积微元 dA , 任意分割 $[-2, 2]$, 任取子区间 $[x, x + dx]$. 在此子区间上, 图形(可以看成由两个小曲边梯形构成)的高可以近似看成不变的, 它的面积 ΔA 可以用以 MN 为高, dx 为底的小矩形面积近似代替, 从而得

$$\begin{aligned}\Delta A &\approx [(7 - x^2) - (x^2 - 1)]dx \\ &= 2(4 - x^2)dx.\end{aligned}$$

可以证明(从略), 小矩形面积与 ΔA 之差是关于 dx 的高阶无穷小, 因而它就是所求的面积微元 dA , 即

$$dA = 2(4 - x^2)dx.$$

将面积微元在区间 $[-2, 2]$ 上作积分, 便得所求图形面积

$$A = \int_{-2}^2 dA = 2 \int_{-2}^2 (4 - x^2)dx = \frac{64}{3}. \blacksquare$$

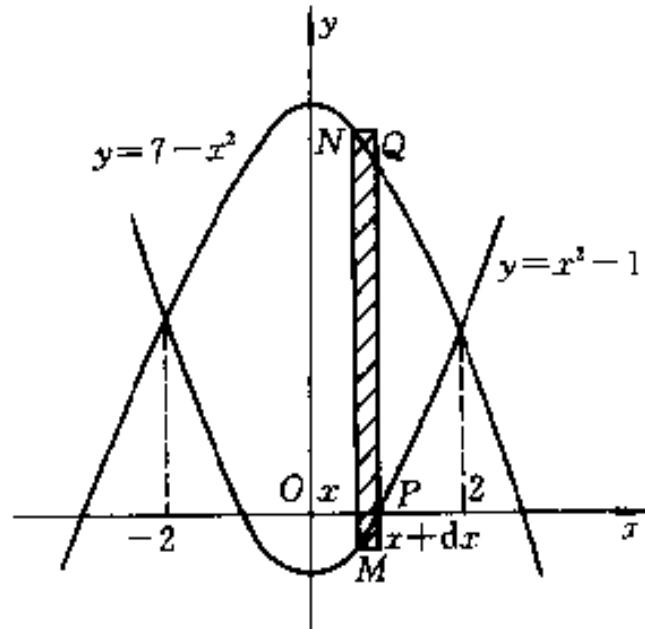
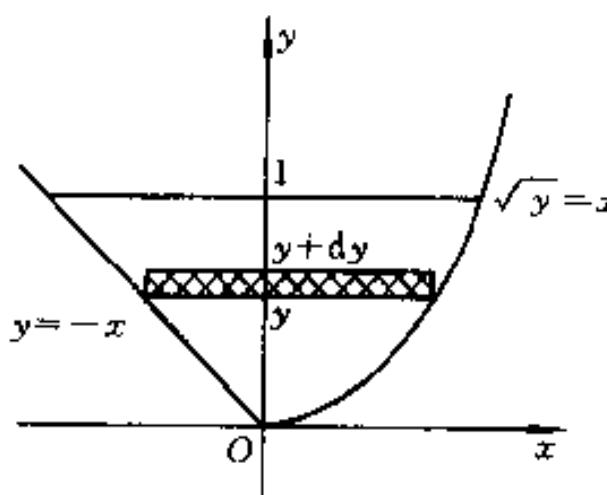


图 4.1

例 4.2 求由抛物线 $\sqrt{y} = x$, 直线 $y = -x$ 及 $y = 1$ 围成的平面图形(图 4.2)的面积.

解 此图形的面积可以看作是非均匀分布在 y 轴上 $[0, 1]$ 区间上的量 A .



分割 y 轴上的区间 $[0, 1]$, 任取一个子区间 $[y, y + dy]$. 在此子区间上将变化很小的宽度近似看作是不变的, 均用 y 点处所对应的宽度来代替. 则面积微元(图 4.2 中阴影部分的面积)为

$$dA = (\sqrt{y} + y)dy,$$

在区间 $[0, 1]$ 上积分即得所求图形的面积为

图 4.2

$$A = \int_0^1 dA = \int_0^1 (\sqrt{y} + y)dy = \frac{7}{6}. \blacksquare$$

例 4.3 求心形线 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 所围成图形(图 4.3)的面积.

解 由图形的对称性知, 所求面积等于上半平面部分的面积的 2 倍.

由于心形线的方程是用极坐标给出的, 它上面每点处的极径 ρ 随 θ 而变, 故其所围成图形的面积可以看作是非均匀分布在关于量 θ 的区间 $[0, \pi]$ 上.

以 θ 作积分变量, 分割区间 $[0, \pi]$, 任取子区间 $(\theta, \theta + d\theta)$. 在该子区间上, 可以把 ρ 的值近似看成不变的, 也就是把分布在该子区间上的图形近似看成以 $\rho(\theta)$ 为半径, 圆心角为 $d\theta$ 的圆扇形(图 4.3 中的阴影部分), 从而面积微元为

$$dA \approx \frac{1}{2} \rho^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta.$$

所以, 所求图形的面积为

$$A = 2 \int_0^\pi dA = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2(\theta) d\theta = a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2. \blacksquare$$

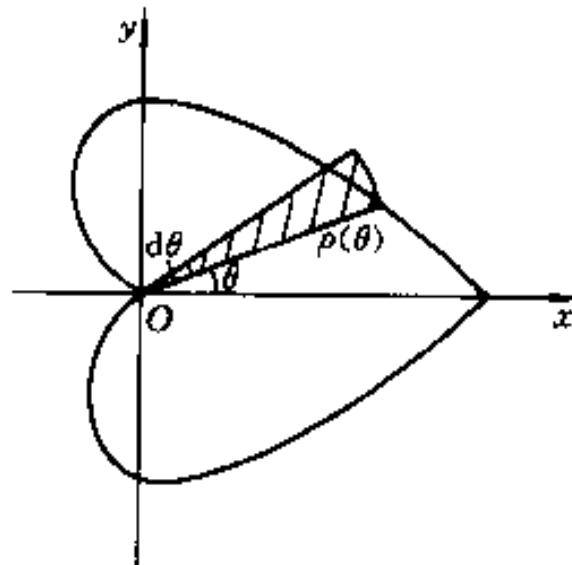


图 4.3

例 4.4 两个半径为 R 的圆柱体中心轴垂直相交, 求这两个圆柱体公共部分的体积 V .

解 由对称性, 我们只画出该图形的 $1/8$ 并建立坐标系如图 4.4 所示. 过 x

轴上区间 $(0, R)$ 中任一点 x 处作垂直于 x 轴的横截面, 则该截面为一个正方形(图 4.4 中阴影部分), 其边长为

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

其面积为

$$A(x) = y^2 = (R^2 - x^2).$$

容易看出, 该图形在第一卦限中部分的体积 V_1 是非均匀分布在区间 $[0, R]$ 上的量, 并且关于区间具有可加性, 因此可以用定积分来计算.

分割区间 $[0, R]$, 任取子区间 $[x, x + dx]$. 过子区间 $[x, x + dx]$ 的两端点分别作垂直于 x 轴的平面, 则介于这两个平面间的“薄片”的上、下底面均为正方形. 当 dx 很小时, 由于“薄片”的上、下底面的面积近似相等, 因而可把该“薄片”近似看成一个柱体, 其体积微元

$$dV = A(x)dx = (R^2 - x^2)dx,$$

从而

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^R A(x)dx \\ &= \int_0^R (R^2 - x^2)dx = \frac{2}{3}R^3. \end{aligned}$$

整个立体体积是该部分体积的 8 倍, 因而

$$V = 8V_1 = \frac{16}{3}R^3. \blacksquare$$

例 4.5 一个平面图形由双曲线 $xy = a$ ($a > 0$) 与直线 $x = a$, $x = 2a$ 及 x 轴围成(图 4.5(a)). 计算该图形绕下列直线旋转一周所产生的旋转体体积:

- (1) 绕 x 轴(图 4.5(b));
- (2) 绕直线 $y = 1$ (图 4.5(c));
- (3) 绕 y 轴(图 4.5(d)).

解 此题也是求立体体积问题, 类似于例 4.4 的分析, 它也能用定积分来计算.

(1) 分割区间 $[a, 2a]$, 任取子区间 $[x, x + dx]$. 过点 x 与 $x + dx$ 分别作垂直于 x 轴的平面, 则该立体被这两个平面截出一个“薄片”. 由于“薄片”的上、下

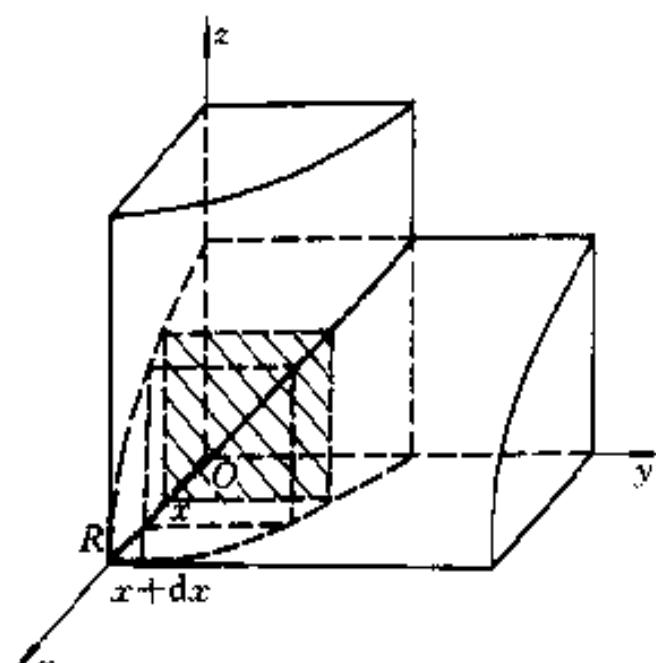


图 4.4

底面积近似相等, 所以可以把它近似地看成一圆柱体, 其底面积为

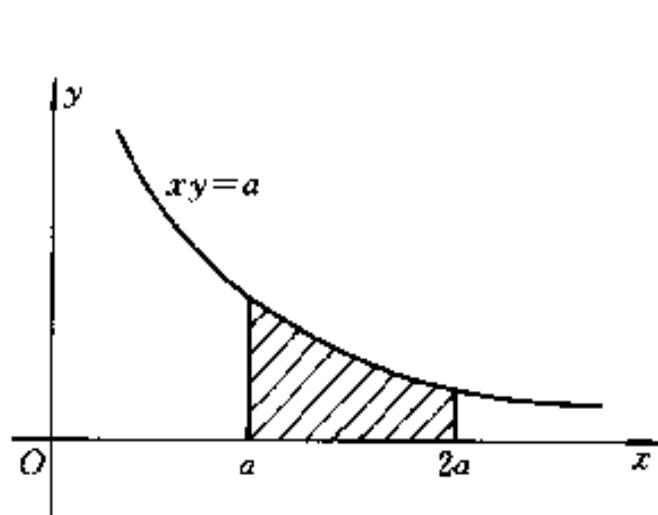
$$A(x) = \pi y^2 = \pi \left(\frac{a}{x} \right)^2,$$

高为 dx , 于是体积微元

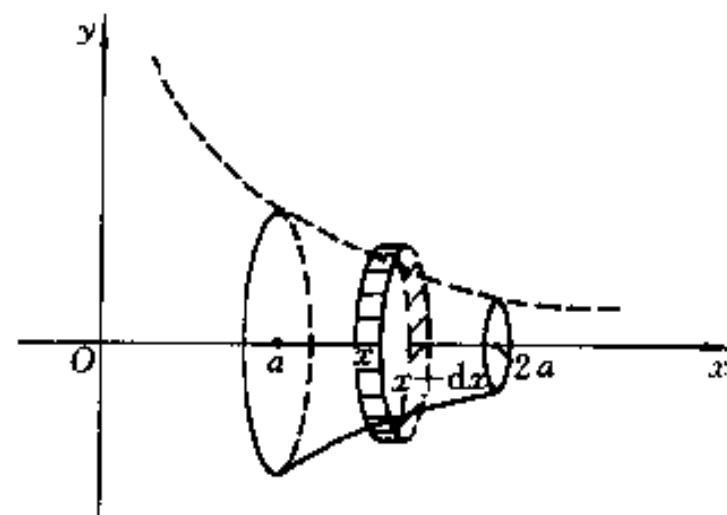
$$dV = A(x)dx = \pi \left(\frac{a}{x} \right)^2 dx,$$

所求旋转体的体积为

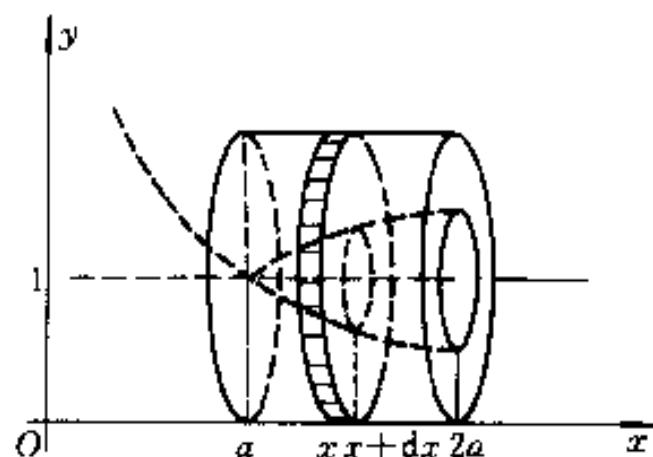
$$V_1 = \int_a^{2a} dV = \int_a^{2a} A(x)dx = \pi \int_a^{2a} \left(\frac{a}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi a}{2}.$$



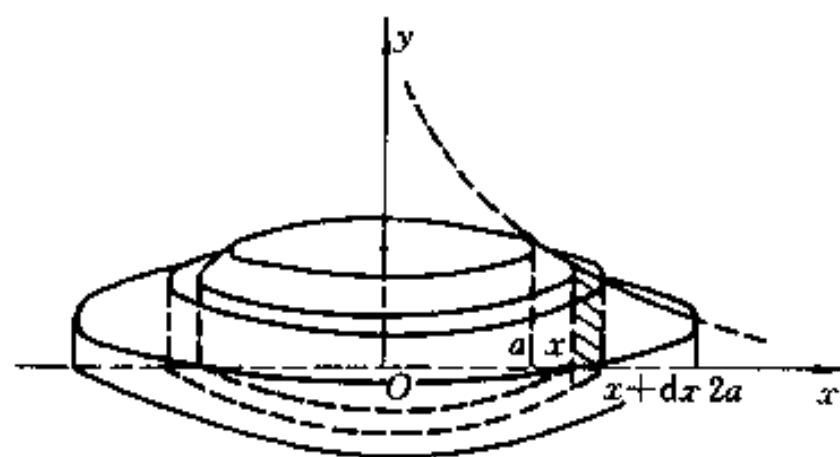
(a)



(b)



(c)



(d)

图 4.5

(2) 过 x 与 $x+dx$ 且垂直于 x 轴的两平面截出该立体的一块“薄片”, 该薄片上、下底面均为圆环, 它们的面积可以近似地看成相等, 因此该“薄片”体积的近似值, 即所求的体积微元为

$$\begin{aligned} dV &= A(x)dx = \left[\pi \cdot 1^2 - \pi \left(1 - \frac{a}{x} \right)^2 \right] dx \\ &= \pi \left(2 \frac{a}{x} - \frac{a^2}{x^2} \right) dx, \end{aligned}$$

积分即得所求旋转体的体积

$$V_2 = \int_a^{2a} A(x)dx = \pi \int_a^{2a} \left(2 \frac{a}{x} - \frac{a^2}{x^2} \right) dx = \pi a \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

(3) 分割区间 $[a, 2a]$, 任取子区间 $[x, x+dx]$, 把该子区间对应的小曲边梯形近似地看成是小矩形(图 4.5(d)中阴影部分). 因而它绕 y 轴旋转一周产生的立体可以看成是一个内半径为 x , 外半径为 $x+dx$, 高为 $y = \frac{a}{x}$ 的“圆柱壳”. 从而所求的体积微元为

$$dV = 2\pi xydx = 2\pi adx,$$

积分得所求立体的体积

$$V_3 = \int_a^{2a} dV = \int_a^{2a} 2\pi adx = 2\pi a^2.$$

4.3 定积分在物理中的应用举例

例 4.6 有一等腰梯形闸门, 其上底长 10 m, 下底长 6 m, 高为 20 m. 该闸门所在的面与水面垂直, 且上底与水面相齐. 求该闸门一侧所受到的水的压力.

解 首先建立坐标系如图 4.6 所示, 则图中直线段 AB 的方程为

$$y = 5 - \frac{x}{10}.$$

这个问题中闸门受到的压力不能直接用公式“压强 \times 受力面积”来计算, 其主要原因在于闸门上各点处压强随该闸门在水下的深度不同而变化. 也就是说, 闸门所受的水压力在区间 $[0, 20]$ 上的分布是非均匀的, 并且关于区间具有可加性, 因此, 闸门所受到的水压力可用定积分来计算. 对深度区间 $[0, 20]$ 进行分割, 把闸门分成许多水平细条. 由于各细条上的点到水面的距离近似相等, 因而细条上各点处压强也近似相等, 可用公式“压强 $P \times$ 受力面积 A ”算出各细条所受压力的近似

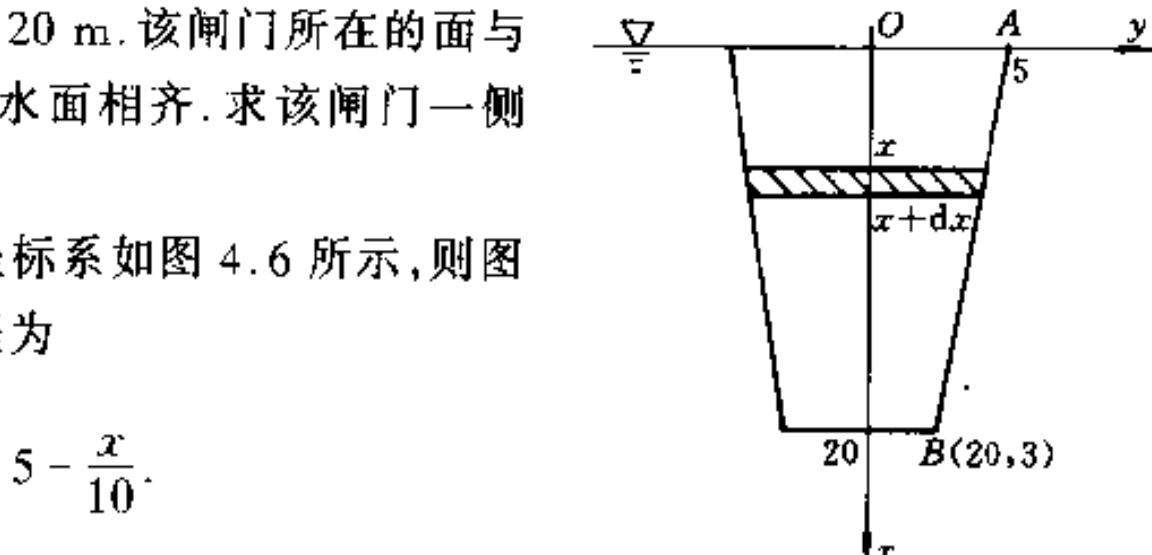


图 4.6

值,将其积分即得整个闸门所受的压力.具体作法如下:

(1) 分割 x 轴上的区间 $[0, 20]$,任取子区间 $[x, x + dx]$. 该子区间所对应的闸门上的水平细条可近似看作是宽为 $2y$,高为 dx 的小矩形,其上各点到水面的距离可近似地看作为 x . 于是该细条所受到水压力的近似值(即压力微元)为:

$$\begin{aligned} dF &= PdA = \rho g x \cdot 2y dx \\ &= 2gx \left(5 - \frac{x}{10}\right) dx, \end{aligned}$$

其中 P 为该细条上各点处压强的近似值,它等于 ρg (ρ 为液体密度, g 为重力加速度. 此处 $\rho = 1 \text{ t/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$)乘深度 x , $dA = 2y dx$ 为该细条面积的近似值.

(2) 在 $[0, 20]$ 上作积分就得到整个闸门所受的压力

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{20} dF = \int_0^{20} 2gx \left(5 - \frac{x}{10}\right) dx \\ &= \frac{44}{3} \times 10^6 (\text{N}). \blacksquare \end{aligned}$$

例 4.7 一个半球形容器,其半径为 R ,容器中盛满了水,现将容器中水全部从容器口抽出,需作功多少?

解 我们知道,在 $K \text{ N}$ 的力作用下物体通过的位移为 $H \text{ m}$ 时,力所作的功为 $W = KH \text{ J}$.

由于不同深度的水层与容器口的距离不同,从而抽出各层水所作的功也就不同.也就是说,抽完水需要作的功在 $[0, R]$ 上的分布是非均匀的,并且关于区间具有可加性,因此,不能直接利用上述乘法公式,而要采用积分的方法. 在过该容器球心的断面上建立坐标系如图4.7所示,则该断面边界上半圆弧的方程为

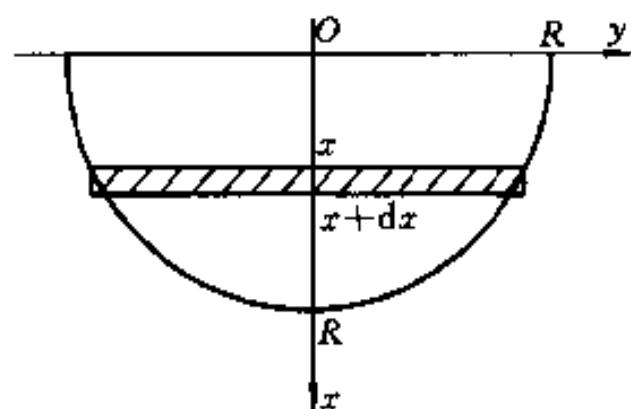


图 4.7

$$x^2 + y^2 = R^2 (x \geq 0).$$

分割 x 轴上的区间 $[0, R]$,取子区间 $[x, x + dx]$. 则与该子区间对应的一薄层水体积的近似值为

$$dV = \pi y^2 dx = \pi(R - x^2) dx.$$

水的密度 $\rho = 1(\text{t/m}^3)$,将这一薄层水抽到容器口所经过的位移可近似地看作是相同的,均为 $-x$. 因而把这一薄层水抽到容器口克服重力所作的功微元为

$$dW = (-x)(-\rho g dV) = x \cdot g \pi y^2 dx = x \cdot g \pi (R^2 - x^2) dx,$$

在区间 $[0, R]$ 上积分便得抽完水所需要作的功(取 $g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$W = \int_0^R dW = g \pi \int_0^R x(R^2 - x^2) dx = \frac{\pi R^4}{4} \cdot 10^4 (\text{J}).$$

例 4.8 有一长为 l 的均匀带电直导线, 电荷线密度(即单位长度导线的带电量)为 δ , 与该导线位于同一直线上相距为 a 处放置一个带电量为 q 的点电荷, 求它们之间的作用力.

解 根据 Coulomb 定律, 两个分别带电量为 q_1, q_2 且相距为 r 的点电荷之间的作用力为

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

现在与点电荷 q 作用的是一段带电直导线, 其上各点与电点荷 q 的距离不同, 作用力将随点在导线上的位置不同而变化. 也就是说, 作用力在 $[a, a + l]$ 上是非均匀分布的, 并且关于区间具有可加性, 因此不能直接运用 Coulomb 定律, 而必须用定积分来计算. 建立坐标系如图 4.8 所示, 分割区间 $[a, a + l]$, 把子区间 $[x, x + dx]$ 上一小段导线近似地看成是一个点电荷, 其带电量近似等于 δdx . 应用 Coulomb 定律, 这一小段导线与点电荷 q 之间作用力的近似值(作用力微元)为

$$dF = k \frac{q \cdot \delta dx}{x^2},$$

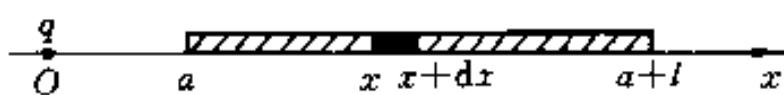


图 4.8

在 $[a, a + l]$ 上作积分得到整个导线与点电荷 q 的作用力为:

$$\begin{aligned} F &= \int_a^{a+l} kq\delta \frac{1}{x^2} dx \\ &= kq\delta \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right). \end{aligned}$$

例 4.9 在例 4.8 中, 如果点电荷 q 位于导线的中垂线上, 且与导线相距为 a (图 4.9), 求它们之间的作用力.

解 建立坐标系如图 4.9 所示. 类似于例 4.8 中的分析可知, 若分割 x 轴上的区间 $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$, 则子区间 $[x, x + dx]$ 上一小段导线与点电荷 q 的作用力

的大小近似等于

$$\begin{aligned} dF &= k \frac{q \cdot \delta dx}{r^2} \\ &= kq \cdot \delta \frac{dx}{a^2 + x^2}. \end{aligned}$$

值得注意的是,不能直接对上式作积分求导线与点电荷之间的作用力.这是因为各小段与点电荷作用力的方向不在同一直线上,因而它们的合力应是“向量和”而不是“代数和”.也就是说,所求作用力对区间已不具有可加性了.对这种情况一般的处理方法是,把各小段与 q 的作用力都沿 x 轴与 y 轴分解,由于两分力都具有对区间的可加性,分别把各小段与 q 的作用力的分力相加,从而求出合力在两坐标轴上的分力.由对称性不难看出,合力 F 在 x 轴上的分力 $F_x = 0$,因而,只要计算 F 在 y 轴上的分力 F_y 即可.由于

$$\begin{aligned} dF_y &= dF \cdot \cos \theta = kq \delta \frac{dx}{a^2 + x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ &= kq \delta a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

积分得所求作用力为

$$\begin{aligned} F = F_y &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dF_y = kq \delta a \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= 2kq \delta a \frac{l}{\sqrt{4a^2 + l^2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

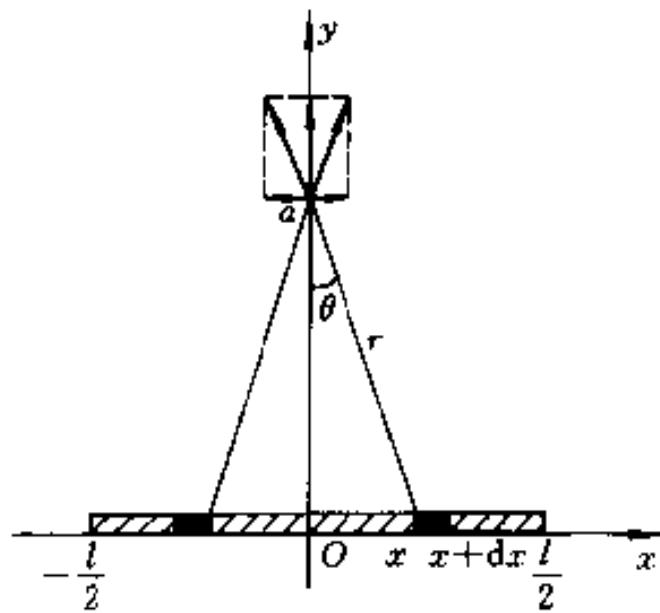


图 4.9

习题 3.4

(A)

1. 求由下列各曲线所围成平面图形的面积:

- (1) 曲线 $y = 9 - x^2$, $y = x^2$ 与直线 $x = 0$, $x = 1$;
- (2) 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 与直线 $3x - 2y - 4 = 0$;
- (3) 曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 与坐标轴;
- (4) 曲线 $y = e^x$, $y = e^{2-x}$ 与直线 $y = 2$;
- (5) $y = x(x-1)(x-2)$ 与直线 $y = 3(x-1)$;

- (6) 闭曲线 $y^2 = x^2 - x^4$;
- (7) 双纽线 $\rho^2 = 4 \sin 2\theta$;
- (8) 双纽线 $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$ 与圆 $\rho = 1$ 围成图形的公共部分;
- (9) 摆线 $\begin{cases} x = a(t + \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与 x 轴;
- (10) 星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 外, 圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 内的部分.

2. 求下列各曲线所围成的图形按指定轴旋转所产生的旋转体的体积:

- (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 分别绕 x 轴与 y 轴;
- (2) $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴, 分别绕 x 轴、 y 轴与直线 $y = 1$;
- (3) $x^2 + y^2 = a^2$ 绕直线 $x = -b$ ($b > a > 0$);
- (4) 心形线 $\rho = 4(1 + \cos \theta)$ 、射线 $\theta = 0$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 绕极轴;
- (5) 摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与 x 轴, 绕 y 轴.

3. 立体底面为抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = 1$ 围成的图形, 而任一垂直于 y 轴的截面都分别是:

- (1) 正方形; (2) 等边三角形; (3) 半圆形. 求各种情况下立体的体积.

4. 两质点的质量分别为 M 和 m , 相距为 a . 现将质点 m 沿两质点连线向外移动距离 l , 求克服引力所作的功.

5. 有一直角三角形板, 其直角顶点到斜边的高为 h , 将其铅直放入水中.

- (1) 如果直角顶点在水面, 斜边在水下且与水面平行;
(2) 如果斜边与水面相齐.

分别求出这两种情况下该板一侧所受到的水压力.

6. 有一椭圆板, 长、短半轴分别为 a 与 b . 将其铅直放入水中, 且长为 $2a$ 的轴与水面平行.

- (1) 如果水面刚好淹没该板的一半; (2) 如果水面刚好淹没该板.
分别求两种情况下该板一侧受到的水压力.

7. 以下各种容器中均装满水, 分别求把各容器中的水全部从容器口抽出克服重力所做的功.

- (1) 容器为圆柱形, 高为 H , 底半径为 R ;
(2) 容器为圆锥形, 高为 H , 底半径为 R ;
(3) 容器为圆台形, 高为 H , 上底半径为 R , 下底半径为 r , 且 $R > r$;
(4) 容器为抛物线 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 2$) 的弧段绕 y 轴旋转所产生的旋转面.

8. 一圆柱形物体, 底半径为 R , 高为 H , 该物体铅直立于水中, 且上底面与水面相齐. 现将它铅直打捞出来, 试对下列两种情况分别计算使该物体刚刚脱离水面时需要作的功.

- (1) 该物体的密度 $\mu = 1$ (与水的密度相等);
(2) 该物体的密度 $\mu > 1$.

9. 一个半径为 R 的半圆环导线, 均匀带电, 电荷密度为 δ . 在圆心处放置一个带电量为

q 的点电荷, 求它们之间的作用力.

10. 一个半径为 R 的圆环导线, 均匀带电, 电荷密度为 δ . 在过圆心且垂直于环所在平面的直线上与圆心相距为 a 之处有一个带电量为 q 的点电荷. 求导线与点电荷之间的作用力.

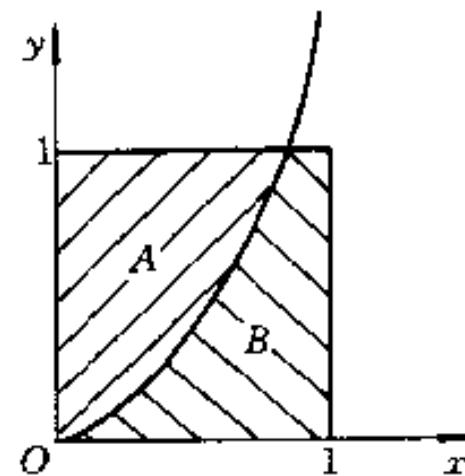
11. 曲线 $a^2y = x^2$ ($0 < a < 1$) 将图中边长为 1 的正方形分成 A, B 两部分.

(1) 分别求 A 绕 y 轴旋转一周与 B 绕 x 轴旋转一周所得两旋转体的体积 V_A 与 V_B ;

(2) 当 a 取何值时, $V_A = V_B$?

(3) 当 a 取何值时, $V_A + V_B$ 取得最小值?

12. 设有立体, 用过 x 轴上点 x ($a \leq x \leq b$) 处作垂直于 x 轴的平面截该立体的截面面积为已知连续函数 $S(x)$, 立体两端点处的截面(可以缩为一点)分别对应于 $x = a$ 与 $x = b$. 证明: 该立体的体积 $V = \int_a^b S(x) dx$.



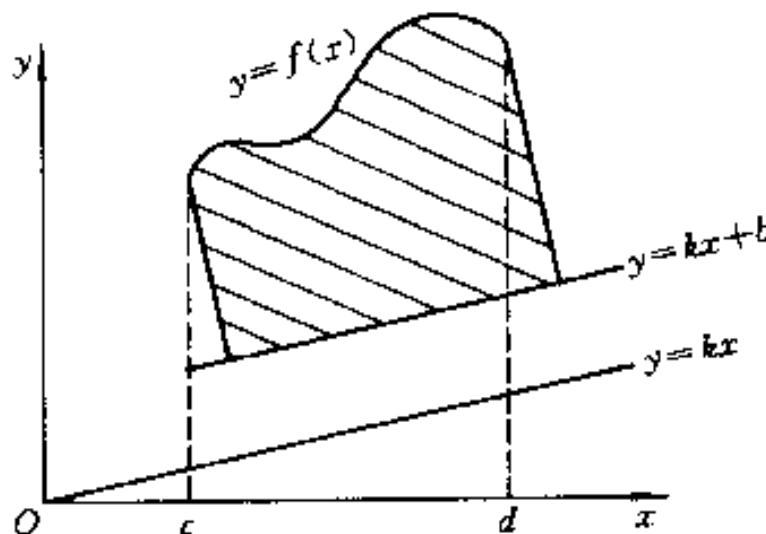
(第 11 题图)

(B)

1. 由曲线 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), $x = a$, $x = b$ 与 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转一周产生一个旋转体, 试用微元法推导出该旋转体的体积公式.

2. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[c, d]$ 上有连续的导数, 证明: 由曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), $y = -\frac{1}{k}x + b_1$, $y = -\frac{1}{k}x + b_2$ ($b_1 < b_2$) 所围成的曲边梯形(如图)绕直线 $y = kx + b$ 旋转一周所产生的立体的体积为

$$V = \frac{\pi}{(1+k^2)^{3/2}} \int_c^d [f(x) - kx - b]^2 |1 + kf'(x)| dx.$$



(第 2 题图)

3. (人口统计模型) 我们知道, 一般来说城市人口的分布密度 $P(r)$ 随着与市中心距离 r 的增加而减小. 设某城市 1990 年的人口密度为 $P(r) = \frac{4}{r^2 + 20}$ (10 万人/ km^2), 试求该市距市中心 2 km 的范围内的人口数.

第五节 几类简单的微分方程

为了研究事物的运动变化规律,必须建立描写运动变化规律的函数关系.然而在许多实际问题中,与问题有关的变量之间的函数关系往往不能直接建立,只能根据问题的具体含义和有关知识,得到未知函数及其导数(或微分)的一个关系式,这样的关系式就是微分方程,由微分方程求出满足该方程的未知函数就是解微分方程.前面讲过的已知导函数 $f(x)$ 求其原函数 $y = F(x)$ (或不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$) 的问题,实际上就是求解最简单的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

的问题.在实际问题中所遇到的微分方程大都比较复杂,因此,研究微分方程理论及其求解方法就是我们面临的一个重要问题.关于这方面的知识,在第七章中还要进行较为系统的介绍,本节只讨论几类能直接利用积分方法求解的简单微分方程及其应用.

5.1 几个基本概念

通过两个简单的例子来说明有关微分方程的几个基本概念.

例 5.1 设一平面曲线通过 xOy 平面上的点 $(1, 2)$,曲线上任一点 (x, y) 处的切线斜率为 $2x$,求该曲线的方程.

解 根据导数的几何意义,所求曲线 $y = y(x)$ 应满足

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (\text{或 } dy = 2x dx),$$

这是一个含未知函数 $y = y(x)$ 的导数(或微分)的关系式.两端对 x 积分得

$$y = \int 2x dx = x^2 + C,$$

其中 C 是任意常数.根据题目要求,它还应满足附加条件:

$$y|_{x=1} = 2.$$

将此条件代入上式即得 $C = 1$,因此所求曲线的方程为

$$y = x^2 + 1.$$

例 5.2 设质量为 m 的质点从高为 H 的地方自由下落(图 5.1),其初速度为 v_0 ,不考虑空气的阻力,试求质点

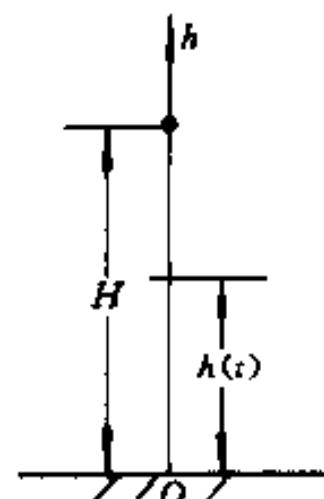


图 5.1

在下落过程中高度 h 与时间 t 的关系.

解 设质点开始下落的时刻为 $t = 0$, 在任意时刻 t , 质点的高度为 $h = h(t)$, 则由 Newton 第二定律, h 应满足

$$m \frac{d^2h}{dt^2} = -mg, \quad \text{或} \quad \frac{d^2h}{dt^2} = -g.$$

两次积分可得

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2,$$

其中 C_1 与 C_2 是两个任意常数. 根据题意, 还应满足两个附加条件:

$$h|_{t=0} = H, v = \frac{dh}{dt} \Big|_{t=0} = v_0.$$

将它们代入上式可得 $C_1 = v_0$, $C_2 = H$, 因此所求的 $h(t)$ 应为

$$h(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 + v_0t. \blacksquare$$

一般, 我们称含有未知函数的导数(或微分)的方程为微分方程, 上面两个例子中的方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 与 $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$ 就是两个简单的微分方程. 又如

$$ydx + xdy = 0, \quad y'' + 2y' + 3y = e^x, \\ y'' + (y')^3 = x$$

等都是微分方程. 如果方程中的未知函数 y 是 x 的一元函数, 则称该方程为常微分方程^①.

微分方程中所含未知函数的最高阶导数(或微分)的阶数, 称为该方程的阶. 例如, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $ydx + xdy = 0$ 都是一阶微分方程, 而 $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$, $y'' + 2y' + 3y = e^x$ 与 $y'' + (y')^3 = x$ 都是二阶微分方程.

满足微分方程的函数 $y = y(x)$ 称为该方程的解. 换句话说, 如果将函数 $y = y(x)$ 及其导数(或微分)代入微分方程, 能使它变为恒等式, 那么, 函数 $y = y(x)$ 称为该方程的解. 例如 $y = x^2 + C$ 与 $y = x^2 + 1$ 都是方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的解; 而 $h = H - \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ 与 $h = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$ 都是方程 $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$ 的解.

^① 如果方程中未知函数是多个自变量的函数, 其导数是所谓偏导数(见第五章), 则称该方程为偏微分方程. 本书只研究常微分方程.

如果微分方程的解中含有任意常数，并且其中独立的任意常数的个数等于该方程的阶数，则称这样的解为微分方程的通解。两个任意常数称为是独立的，是指它们不能通过运算合并成一个。例如， $y = x^2 + C$ 与 $h = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$ 分别是方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 与 $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$ 的通解。不难验证， $h = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$ 虽然都是二阶方程 $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$ 的解，但不是通解。这是因为前者只含一个任意常数，后者形式上虽然含有两个任意常数，但它们不独立，只要令 $C = C_1 + 2C_2$ 就合并成为一个任意常数了。

微分方程的通解反映了由该方程所描写的某一类运动过程的一般变化规律（例 5.2 中的通解反映了自由落体运动在物体下落过程中高 h 随时间 t 的一般变化规律），要确定某一具体运动过程的特定规律（例 5.2 中质点自高为 H 处以初速度 v_0 自由下落的运动规律），还必须根据问题的具体情况，提出一些附加条件来确定通解中的任意常数，这种附加条件叫做定解条件。像例 5.2 与例 5.1 中的那种反映运动初始状态或曲线在某一点特定状态的定解条件，叫做初值条件。一般， n 阶微分方程的初值条件有 n 个，就是当自变量 x 取某确定的值 x_0 时，未知函数及其从一阶直到 $n-1$ 阶导数的值，即

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_1, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{n-1}.$$

微分方程的不含任意常数的解，称为特解。一般，它可利用定解条件（例如初值条件）由通解确定出其中的任意常数后得到。例如， $y = x^2 + 1$ 是方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 满足初值条件 $y|_{x=1} = 2$ 的特解，而 $h = H - \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ 是方程 $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$ 满足初值条件 $h|_{t=0} = H$ 与 $\frac{dh}{dt}|_{t=0} = v_0$ 的特解。

5.2 可分离变量的一阶微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (5.1)$$

的一阶微分方程称为变量分离方程。对于这类方程，如果 $g(y) \neq 0$ ，那么就可写成

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \quad (5.2)$$

此时,变量 x 与 y 已被分离在等号两边.

设 f 与 g 都是连续函数, $y = y(x)$ 是原方程的任一解, 将它代入(5.2)式, 则有

$$\frac{y'(x)dx}{g[y(x)]} = f(x)dx,$$

两端对 x 积分, 得

$$\int \frac{y'(x)}{g[y(x)]} dx = \int f(x)dx + C.$$

(在解微分方程时, 为了突出任意常数 C , 我们常把 $\int f(x)dx$ 中所含的任意常数 C 明确写出来) 根据换元积分法(I), 得

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad (5.3)$$

由上式所确定的隐函数 $y = y(x)$ 就是方程(5.2)的通解. 事实上, 将它两边微分即得(5.2)式, 并且其中含有一个任意常数 C . 又因为, 凡方程(5.2)的解都是方程(5.1)的解, 所以(5.3)式就是原方程(5.1)的通解. 这种通过分离变量来求解微分方程的方法叫做分离变量法.

如果存在常数 y_0 , 使 $g(y_0) = 0$, 那么, $y = y_0$ 显然也是原方程(5.1)的解. 如果 $y = y_0$ 包含在(5.3)式中(即它可由(5.3)式中 C 取某特定常数得到), 那么, 我们也把包含 $y = y_0$ 的(5.3)式理解为方程(5.1)的通解.

例 5.3 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解.

解 该方程是变量分离方程. 设 $y \neq 0$, 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = 2x dx,$$

两端积分,

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx + C_1,$$

从而得

$$\ln|y| = x^2 + C_1.$$

故

$$|y| = e^{x^2 + C_1} = e^{C_1} e^{x^2},$$

或者

$$y = Ce^{x^2},$$

其中, $C = \pm e^{C_1}$ 是非零的任意常数.

由于 $y=0$ 也是原方程的解, 只要允许 C 可以取 0, 那么此解就可以包含在 $y = Ce^{x^2}$ 中. 因此, 所求方程的通解可以写成 $y = Ce^{x^2}$, 其中 C 为任意常数. ■

例 5.4 求微分方程 $xydx + (x^2 + 1)dy = 0$ 满足初值条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

解 先求方程的通解. 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{x^2 + 1} dx,$$

两端积分得

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C_1,$$

所以

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(其中 $C = \pm e^{C_1}$) 就是所求方程的通解. 将初值条件代入, 得知 $C = 1$, 故 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 即为所求特解. ■

5.3 一阶齐次微分方程

在一阶微分方程中, 有些方程虽然不能直接分离变量, 但可以通过适当的变量代换, 化为变量分离方程, 齐次微分方程就是其中一种.

所谓齐次微分方程是指形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (5.4)$$

的一阶微分方程, 其中 f 是连续函数. 作变量代换

$$u = \frac{y}{x}, \quad \text{即} \quad y = ux,$$

则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入(5.4)式便得

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u),$$

或

$$x \frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

这是一个变量分离方程, 利用分离变量法求出它的通解后, 再把 $u = \frac{y}{x}$ 代回即得齐次微分方程的通解.

例 5.5 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} - y = 2\sqrt{xy}$ 的通解.

解 将方程两边同除以 x , 得

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入上式, 得

$$x \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u}. \quad (5.5)$$

分离变量,

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{dx}{x},$$

两端积分得

$$\sqrt{u} = \ln|x| + C_1,$$

即

$$e^{\sqrt{u}} = Cx.$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入便得所求方程的通解:

$$e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = Cx.$$

易见 $u = 0$ 是方程(5.5)的一个解, 也就是说, $y = 0$ 是原方程的一个解, 但它不包含在通解的表达式中. ■

5.4 一阶线性微分方程

未知函数及其导数都是一次的一阶微分方程称为一阶线性微分方程, 它的一般形式是

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (5.6)$$

若 $Q(x) \equiv 0$, 上式变为

$$y' + P(x)y = 0, \quad (5.7)$$

称为与方程(5.6)对应的齐次线性微分方程, 而(5.6)式称为非齐次线性微分方程.

齐次线性微分方程(5.7)是变量分离方程, 分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

两端积分即得其通解为

$$\ln|y| = - \int P(x)dx + C_1,$$

或

$$y = C e^{-\int P(x)dx}. \quad (5.8)$$

下面讨论如何求对应的非齐次线性微分方程(5.6)的解. 设方程(5.6)的解为 $y = y(x)$, 则

$$y(x)/e^{-\int P(x)dx}$$

是 x 的函数, 记之为 $h(x)$. 因此, 只要将齐次线性微分方程通解(5.8)中的常数 C 换成某一适当的函数 $h(x)$, 那么它必能满足方程(5.6). 因此, 令

$$y = h(x)e^{-\int P(x)dx}, \quad (5.9)$$

将它代入(5.6)式, 让它满足该方程, 从而求出 $h(x)$. 由于

$$y' = h'(x)e^{-\int P(x)dx} - h(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = h'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)y,$$

代入(5.6)式, 得

$$h'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)y + P(x)y = Q(x),$$

从而有

$$h'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

所以

$$h(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

就是我们所需要的 $h(x)$. 将它代入(5.9)式,便得到非齐次线性微分方程(5.6)的通解:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)}, \quad (5.10)$$

上述通过齐次线性微分方程的通解去求对应非齐次线性微分方程通解的方法通常称为常数变易法. 如果将通解公式(5.10)写成如下形式:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx,$$

那么易见,其中第一项就是齐次线性微分方程(5.7)的通解,第二项是非齐次线性微分方程(5.6)的一个特解(因为它可由在(5.10)式中令 $C=0$ 得到). 从而得知,非齐次线性微分方程的通解等于它的一个特解与它所对应的齐次线性微分方程的通解之和.

在求解非齐次线性微分方程的时候,最好不要套用通解公式(5.10),而直接使用常数变易法.

例 5.6 求微分方程 $\frac{dx}{dt} + x = t$ 的通解.

解 由分离变量法易得对应的齐次线性微分方程

$$\frac{dx}{dt} + x = 0$$

的通解为

$$x = Ce^{-t}.$$

再用常数变易法求非齐次线性微分方程的通解. 设其通解为

$$x = h(t)e^{-t}, \quad (5.11)$$

则

$$\frac{dx}{dt} = h'(t)e^{-t} - h(t)e^{-t}.$$

代入原方程并化简得

$$h'(t) = te^t.$$

从而有

$$h(t) = \int te^t dt = te^t - e^t + C.$$

将它代入(5.11)式,得原方程的通解

$$x = (t e^t - e^t + C) e^{-t} = C e^{-t} + t - 1. \quad \blacksquare$$

例 5.7 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^3 + x}$ 的通解.

解乍一看来,此方程并非线性微分方程.但是,如果把 y 看作是自变量, x 看作是因变量,而把方程改写成

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 + x}{y} = \frac{1}{y}x + y^2, \quad (5.12)$$

那么,就得到一个关于未知函数 x 的一阶非齐次线性微分方程了.

先求解对应的齐次线性微分方程

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}x.$$

分离变量后积分得

$$\ln|x| = \ln|y| + \ln|C| \text{ ①},$$

从而得齐次线性微分方程的通解为

$$x = Cy.$$

再用常数变易法求非齐次线性微分方程的通解.令

$$x = h(y)y,$$

则

$$\frac{dx}{dy} = h'(y)y + h(y).$$

代入方程(5.12)并化简,得

$$h'(y) = y,$$

从而

$$h(y) = \frac{1}{2}y^2 + C,$$

于是原方程通解为

① 把积分常数写成 $\ln|C|$ 是为了合并后形式简洁.

$$x = \frac{1}{2}y^3 + Cy. \blacksquare$$

例 5.8 求微分方程 $yy' + 2xy^2 - x = 0$ 满足条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

解 这个方程不是线性微分方程, 但若将它改写为

$$\frac{1}{2}(y^2)' + 2xy^2 - x = 0,$$

并令 $y^2 = u$, 它便成了关于 u 的一阶线性微分方程

$$u' + 4xu = 2x.$$

容易解得对应齐次线性微分方程的通解为

$$u = Ce^{-2x^2}.$$

再利用常数变易法, 令 $u = h(x)e^{-2x^2}$, 可求得非齐次线性微分方程的通解为

$$u = Ce^{-2x^2} + \frac{1}{2}.$$

于是原方程的通解为

$$y^2 = Ce^{-2x^2} + \frac{1}{2}.$$

把初值条件 $y(0) = 1$ 代入得

$$C = \frac{1}{2}.$$

于是所求特解为

$$y^2 = \frac{1}{2}(e^{-2x^2} + 1). \blacksquare$$

例 5.9 求微分方程 $\frac{dx}{dt} - tx = t^3x^2$ 的通解.

解 这也不是一个线性微分方程, 将方程改写为

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} - t\frac{1}{x} = t^3,$$

或

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right) - t\left(\frac{1}{x}\right) = t^3.$$

若令 $\frac{1}{x} = u$, 则原方程就变为关于 u 的线性微分方程

$$\frac{du}{dt} + tu^{-\frac{1}{2}} = t^3.$$

按线性微分方程的求解方法得其通解为

$$u = 2 - t^2 - Ce^{-\frac{1}{2}t^2},$$

从而原方程的通解为

$$x = \frac{1}{2 - t^2 - Ce^{-\frac{1}{2}t^2}}.$$

形如例 5.9 中的方程称为 **Bernoulli 方程**, 它的一般形式为

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1, n \in \mathbb{R}. \quad (5.13)$$

对于这类方程, 像例 5.9 那样, 先将它变为如下形式:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

然后再令 $u = y^{1-n}$, 就可将其化为关于 u 的一阶线性微分方程.

5.5 可降阶的高阶微分方程

一般来说, 方程的阶数越高, 求解也越复杂. 下面仅以二阶微分方程为主, 介绍可以用降阶法求解的三类特殊的可降阶微分方程.

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型方程

这类方程的特征是右端仅含自变量 x , 因此, 通过 n 次积分就能得到它的通解. 应当注意的是, 每次积分都要出现一个任意常数, 因而通解中含有 n 个独立的任意常数. 例 5.2 中的方程就属于这种类型, 我们不再举例.

2. $y'' = f(x, y')$ 型方程

这类方程的特征是方程中不显含未知函数 y , 因此, 只要作变量代换 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$, 原方程就化成以 p 为未知函数的一阶微分方程

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

若能求出其通解 $p = F(x, C_1)$, 代入 $\frac{dy}{dx} = p$ 便得

$$\frac{dy}{dx} = F(x, C_1),$$

再积分一次即得原方程的通解

$$y = \int F(x, C_1) dx + C_2.$$

例 5.10 求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足初值条件

$$y|_{x=0}=1, \quad y'|_{x=0}=3$$

的特解.

解 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$, 代入方程得

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx} = 2xp.$$

分离变量得

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2} dx,$$

两端积分, 得

$$\ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|,$$

从而

$$p = C_1(1+x^2),$$

即

$$\frac{dy}{dx} = C_1(1+x^2).$$

两端再次积分, 得

$$y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2.$$

代入初值条件, 得 $C_1=3, C_2=1$, 故所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1. \blacksquare$$

3. $y'' = f(y, y')$ 型方程

这类方程的主要特征是方程中不显含自变量 x . 作变换 $y' = p$, 以 p 为未知函数, y 为自变量, 则由复合函数求导法则,

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

于是原方程化为关于 p 与 y 的一阶微分方程

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

若能求出它的通解 $p = F(y, C_1)$, 代入 $y' = p$, 得

$$\frac{dy}{dx} = F(y, C_1),$$

解此方程就可以得到原方程的通解.

例 5.11 求微分方程 $yy'' - (y')^2 = 0$ 的通解.

解 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程得

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0,$$

即

$$p \left(y \frac{dp}{dy} - p \right) = 0.$$

由 $p = 0$ 解得 $y = C$. 由方程 $y \frac{dp}{dy} = p$ 通过分离变量法解得 $p = C_1 y$. 再次使用分离变量法可以求得

$$y = C_2 e^{C_1 x},$$

它就是原方程的通解 ($y = C$ 包含在该通解中). ■

例 5.12 求微分方程 $y'y''' - 2(y'')^2 = 0$ 的通解.

解 此方程既不含未知函数 y , 也不含自变量 x , 因此可用解第 2、3 两种类型方程的两种不同方法求解. 但在解题过程中应当根据具体情况, 灵活运用所学过的方法.

先令 $y' = p$, 按照解第 2 种类型方程的方法, 则有

$$y'' = \frac{dp}{dx}, \quad y''' = \frac{d^2 p}{dx^2},$$

代入方程得

$$p \frac{d^2 p}{dx^2} - 2 \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 = 0. \quad (5.14)$$

它是不显含 x 的第 3 种类型的方程, 因此令 $\frac{dp}{dx} = q$, 则 $\frac{d^2 p}{dx^2} = q \frac{dq}{dp}$, 代入 (5.14) 式, 得

$$pq \frac{dq}{dp} - 2q^2 = 0.$$

当 $q = \frac{dp}{dx} = y'' \neq 0$ 且 $p \neq 0$ 时, 则有

$$\frac{dq}{q} = \frac{2dp}{p},$$

解之易得 $q(p) = \tilde{C}_1 p^2$. 再由

$$\frac{dp}{dx} = q(p) = \tilde{C}_1 p^2$$

可以解得 $p = \frac{1}{C_1 x + C_2}$, 其中 $C_1 = -\tilde{C}_1$. 最后, 由方程

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{1}{C_1 x + C_2}$$

就能求得原方程的通解

$$y = \frac{1}{C_1} \ln |C_1 x + C_2| + C_3. \quad (5.15)$$

当 $q = \frac{dp}{dx} = y'' = 0$ 时, 则知

$$y = A_1 x + A_2 \quad (\text{其中 } A_1, A_2 \text{ 为任意常数}) \quad (5.16)$$

也是原方程的解. 若 $p = y' = 0$, 则有 $y = A$ (任意常数), 它包含在解(5.16)中.

值得注意的是, 如果要求例 5.12 中方程的特解, 那么, 当初值条件 $y'' \neq 0$ 时, 应当将它代入(5.15)式来求; 当 $y'' = 0$ 时, 则应代入(5.16)式来求.

5.6 微分方程应用举例

用微分方程解决实际问题的一般步骤如下:

(1) 根据问题的实际背景, 利用数学和有关学科的知识, 建立微分方程与定解条件;

(2) 根据方程的类型, 用适当的方法求出方程的通解, 并根据定解条件确定特解;

(3) 对所得结果进行具体分析, 解释它的实际意义. 如果它与实际相差甚远, 那么就应修改模型, 重新求解.

上述步骤中的关键和难点是第(1)步, 就是建立问题的数学模型问题. 因为没有一般的方法可以遵循, 所以读者应在不断的练习和实践中, 逐步培养综合运

用所学的知识分析和解决实际问题的能力.至于第(3)步,由于它与有关学科知识密切相关,这里不能多作讨论.下面举一些例子.

例 5.13 (放射性同位素的蜕变与考古问题) 根据原子物理学理论,放射性同位素碳-14(记作 ^{14}C)在 t 时刻的蜕变速度与该时刻 ^{14}C 的含量成正比.活着的生物通过新陈代谢不断地摄取 ^{14}C ,使得生物体内的 ^{14}C 与空气中的 ^{14}C 百分含量相同.生物死亡后即停止摄取 ^{14}C ,并且尸体中的 ^{14}C 开始蜕变.假定生物死亡时体内 ^{14}C 的含量为 x_0 ,试求死亡生物体内 ^{14}C 含量随时间 t 的变化规律.

解 (1) 建立微分方程与定解条件.设 t 时刻死亡生物体内 ^{14}C 的含量为 $x(t)$,则 t 时刻 ^{14}C 的蜕变速度为 $\frac{dx}{dt}$.根据假设

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

其中 $k > 0$ 为比例常数,负号表示 ^{14}C 的含量是不断递减的.又设生物死亡时间为 $t=0$,初值条件为 $x|_{t=0} = x_0$.

(2) 求解方程.分离变量得

$$\frac{dx}{x} = -k dt,$$

两边积分可得方程的通解为 $x = C e^{-kt}$,代入初值条件便得所求特解为

$$x = x_0 e^{-kt}.$$

(3) 由所得结果可知,死亡生物体内 ^{14}C 的含量随时间 t 按指数规律不断衰减.据此,人们既可以由生物死亡的时间估算出某时刻尸体内 ^{14}C 的含量,也可以由死亡生物尸体内 ^{14}C 的现有量估算生物死亡的时间,下面来讨论后面这个问题.

设 ^{14}C 的半衰期(给定数量的 ^{14}C 衰减到一半所需的时间)为 T ,即 $x(T) = \frac{x_0}{2}$.将它代入到 $x(t) = x_0 e^{-kt}$ 中得 $k = \frac{\ln 2}{T}$,故

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}.$$

由此解得死亡生物尸体内 ^{14}C 的存量与死亡时间 t 的关系为

$$t = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{x_0}{x}.$$

由于 x_0 与 x 不便于测量,因此,常改用下面的办法来求时间 t .

由于

$$x'(t) = -kx_0 e^{-kt} = -kx(t), x'(0) = -kx(0) = -kx_0,$$

所以

$$\frac{x'(0)}{x'(t)} = \frac{x_0}{x},$$

代入 t 的表达式, 得

$$t = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{x'(0)}{x'(t)}.$$

考古学家与地质学家就是利用上面的公式来估算文物或化石的年代的. 例如, 长沙马王堆一号墓于 1972 年 8 月出土时, 测得出土木炭标本中 ^{14}C 平均原子蜕变速度为 29.78 次/min. 人在死亡前体内所含 ^{14}C 平均原子蜕变速度与新砍伐木材烧成的木炭中 ^{14}C 的平均原子蜕变速度相同, 为 38.37 次/min. 又知 ^{14}C 的半衰期为 5568(a), 将它们代入上式, 可以算得

$$t = \frac{5568}{\ln 2} \ln \frac{38.37}{29.78} \approx 2036 (\text{a}),$$

因此马王堆一号墓大约是 2000 多年前的汉墓. ■

例 5.14 (减肥问题) 减肥的问题实际上是减少体重的问题. 假定某人每天的饮食可产生 A J 热量, 用于基本新陈代谢每天所消耗的热量为 B J, 用于锻炼所消耗的热量为 C J/d·kg. 为简单计, 假定增加(或减少)体重所需热量全由脂肪提供, 脂肪的含热量为 D J/kg. 求此人体重随时间的变化规律.

解 (1) 建立微分方程与定解条件. 设 t 时刻(单位: d(天))的体重为 $w(t)$, 根据热量平衡原理, 在 dt 时间内,

人体热量的改变量 = 吸收的热量 - 消耗的热量,

即

$$Ddw = [A - B - Cw(t)]dt.$$

记 $a = \frac{A - B}{D}$, $b = \frac{C}{D}$, 则得方程

$$\frac{dw}{dt} = a - bw(t).$$

设开始减肥时刻为 $t = 0$, 体重为 w_0 , 于是初值条件为

$$w(t)|_{t=0} = w_0.$$

(2) 解微分方程. 由分离变量法容易解得方程的通解为

$$w(t) = e^{-bt} \left(C + \frac{a}{b} e^{bt} \right),$$

代入初值条件可得特解为

$$w(t) = \frac{a}{b} + \left(w_0 - \frac{a}{b} \right) e^{-bt}.$$

(3) 由上面的结果易得如下结论:

1° 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \frac{a}{b}$, 因此, 随着时间的增加体重将逐渐趋于常数 $\frac{a}{b}$. 又 $\frac{a}{b} = \frac{A - B}{C}$, 因此只要节制饮食, 加强锻炼, 调节新陈代谢, 使体重达到你所希望的值是可能的.

2° 若 $a = 0$, 即 $A = B$, 则 $w = w_0 e^{-bt}$. 这就是说, 如果吃得太少, 摄取的热量仅够维持新陈代谢的需要, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$, 时间长了, 就有生命危险!

3° 若 $b = 0$, 即 $C = 0$, 则方程变为 $\frac{dw}{dt} = a$, 解得 $w = at + w_0$. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $w \rightarrow \infty$. 这表明, 如果只吃饭, 不活动, 不锻炼, 身体就会越来越胖, 也是非常危险的!

4° 可以进一步讨论限时减肥(例如举重运动员参赛前体重要降到规定的数值)或限时增肥(例如养猪场要在一定时间内使猪的重量达到一定值)问题. 这就是要设计出 a 与 b 的最佳组合, 使体重在限期 $t = T$ 时达到允许的体重 \tilde{w} , 即

$$\tilde{w} = \frac{a}{b} + \left(w_0 - \frac{a}{b} \right) e^{-bT}.$$

这个问题比较复杂, 我们不再详细讨论. ■

例 5.15 生物种群繁殖的数学模型

1. Malthus 模型

1798 年, Malthus 对生物种群的繁殖规律提出一种看法. 他认为, 一种群中个体数量的增长率与该时刻种群的个体数量成正比. 设 $x(t)$ 表示该种群在 t 时刻个体的数量, 则其增长率

$$\frac{dx}{dt} = rx(t), \quad (5.17)$$

或相对增长率

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = r,$$

其中常数 $r = B - D$, B 、 D 分别为该种群个体的平均生育率与死亡率.

模型(5.17)是一个很简单的微分方程,用分离变量法可求得其满足初值条件 $x(0) = x_0$ 的特解为

$$x(t) = x_0 e^{rt}. \quad (5.18)$$

由(5.18)式可见,个体的数量 $x(t)$ 将随 t 呈指数形式增长,这一变化规律,在短时期内是与实验数据大致符合的,但当 $t \rightarrow +\infty$ 时,则有 $x(t) \rightarrow +\infty$, 这与客观现实不符,因此,需要分析原因,修改数学模型.

2. Logistic 模型

1838 年 Verhulst 指出,导致上述不符合现实情况的主要原因在于 Malthus 模型未能考虑“密度制约”因素.事实上,种群生活在一定的环境中,在资源给定的情况下,个体数目越多,每一个体所获得资源就越少,这将抑制其生育率,增加其死亡率,因而相对增长率 $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ 不应是一常数 r ,而应该是 r 乘上一个“密度制约”因子,这个因子是一个随 x 而单调减小的函数,设其为 $\left(1 - \frac{x}{k}\right)$,其中 k 称为环境的容纳量,它反映资源的丰富程度.于是 Verhulst 提出下述的 Logistic 模型:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad (5.19)$$

这也是一个可分离变量的微分方程.

分离变量后积分得

$$\int r dt = \int \frac{dx}{x \left(1 - \frac{x}{k}\right)} = \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{k} \int \frac{1}{1 - \frac{x}{k}} dx,$$

从而可求得方程(5.19)的通解为

$$x = \frac{k}{1 + Ce^{-rt}}.$$

设初值条件为 $x(0) = x_0$, 则相应的特解为

$$x = \frac{kx_0}{(k - x_0)e^{-rt} + x_0}. \quad (5.20)$$

由(5.20)式可见,当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(t) \rightarrow k$. 这说明随着时间的增长,此种群个体数量将最终稳定为 k , 它就是环境对该种群的容纳量. ■

习题 3.5

(A)

1. 用分离变量法求下列微分方程的解:

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y};$

(2) $x dy - y \ln y dx = 0;$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}};$

(4) $\frac{x}{1+y} dx - \frac{y}{1+x} dy = 0, \quad y|_{x=0} = 1;$

(5) $(xy^2 + x) dx + (y - x^2 y) dy = 0;$

(6) $\arctan y dy + (1 + y^2) x dx = 0.$

2. 求下列齐次微分方程的解:

(1) $(2x^2 - y^2) + 3xy \frac{dy}{dx} = 0;$

(2) $xy' = y \ln \frac{y}{x};$

(3) $(x^3 + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0;$

(4) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y|_{x=-1} = 2.$

3. 求下列一阶线性微分方程的通解:

(1) $y' - 2y = x + 2;$

(2) $xy' - 3y = x^4 e^x;$

(3) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2;$

(4) $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x;$

(5) $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0;$

(6) $xy' - y = \frac{x}{\ln x},$

4. 求下列微分方程的通解:

(1) $y' - x^2 y^2 = y;$

(2) $3y^2 y' - y^3 = x + 1;$

(3) $y' = \frac{1}{e^y + x};$

(4) $(\cos y - 2x)' = 1;$

(5) $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2;$

(6) $y' = \sin^2(x - y + 1);$

(7) $yy' - y^2 = x^2;$

(8) $xy' + y = y(\ln x + \ln y).$

5. 设有微分方程 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$, 其中 $\varphi(u)$ 为连续函数, a, b, c, d, e, f 为常数.(1) 若 $ae \neq bd$, 证明: 可适当选取常数 h 与 k , 使变换 $x = u + h, y = v + k$ 把该方程化为齐次微分方程;(2) 若 $ae = bd$, 证明: 可用一适当的变换把该方程化为变量分离方程;

(3) 用(1)或(2)中的方法分别求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x - y - 6} \quad \text{与} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + x - y}{x - y}$$

的通解.

6. 求下列微分方程的通解:

(1) $y'' = \frac{1}{1+x^2};$

(2) $y'' = y' + x;$

$$(3) y''' = y''; \quad (4) y'' = 1 + (y')^2;$$

$$(5) xy'' + 1 = (y')^2.$$

7. 设一曲线过点 $(1, 0)$, 曲线上任一点 $P(x, y)$ 处的切线在 y 轴上的截距等于原点到 P 点的距离, 求此曲线方程.

8. 一曲线经过点 $(2, 8)$, 曲线上任一点到两坐标轴的垂线与两坐标轴构成的矩形被该曲线分为两部分, 其中一部分的面积恰好是另一部分面积的两倍, 求该曲线的方程.

9. 设有质量为 m 的降落伞以初速 v_0 开始降落, 若空气的阻力与速度成正比, 求降落伞下降的速度与时间的关系.

10. 容器内装有 10 L 盐水, 其中含盐 1 kg . 现以 $3\text{ L}/\text{min}$ 的速度注入净水, 同时以 $2\text{ L}/\text{min}$ 的速度抽出盐水. 试求 1 h 后容器内溶液的含盐量.

11. 由经济学知, 市场上的商品价格的变化率与商品的过剩需求量(即需求量与供给量的差)成正比. 假设某种商品的供给量 Q_1 与需求量 Q_2 都是价格 p 的线性函数:

$$Q_1 = -a + bp, \quad Q_2 = c - dp,$$

其中 a, b, c, d 都是正常数, 试求该商品价格随时间的变化规律.

(B)

1. 研究肿瘤细胞增殖动力学, 能为肿瘤的临床治疗提供一定的理论依据. 试按下列两种假设分别建立肿瘤生长的数学模型并求解.

(1) 设肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率与 V^b 成正比, 其中 b 为常数(称为形状参数). 开始测得肿瘤体积为 V_0 , 试分别求当 $b = \frac{2}{3}$ 与当 $b = 1$ 时 V 随时间变化的规律, 以及当 $b = 1$ 时肿瘤体积增加一倍所需的时间(称为倍增时间).

(2) 设肿瘤体积 V 随时间 t 增大的速率与 V 成正比, 但比例系数 k 不是常数, 它随时间 t 的增大而减少, 并且减小的速率与当时 k 的值成正比, 比例系数为常数. 试求 V 随时间 t 的变化规律、倍增时间及肿瘤体积的理论上限值.

2. 位于坐标原点的我舰向位于点 $A(1, 0)$ 处的敌舰发射制导鱼雷, 设鱼雷永远对准敌舰. 已知敌舰以最大速度 v_0 在直线 $x = 1$ 上行驶, 鱼雷的速度为 $5v_0$, 求鱼雷的航迹曲线方程. 又敌舰行驶多远时将被鱼雷击中?

3. (冷却定律与破案问题) 按照 Newton 冷却定律, 温度为 T 的物体在温度为 T_0 ($T_0 < T$) 的环境中冷却的速度与温差 $T - T_0$ 成正比. 你能用该定律确定张某是下面案件中的嫌疑犯吗? 某公安局于晚上 7 时 30 分发现一具女尸, 当晚 8 时 20 分法医测得尸体温度为 32.6°C . 一小时后, 尸体被抬走时又测得尸体温度为 31.4°C . 假定室温在几个小时内均为 21.1°C . 由案情分析得知张某是此案的主要嫌疑犯, 但张某矢口否认, 并有证人说: “下午张某一直在办公室, 下午 5 时打了一个电话后才离开办公室”. 从办公室到凶案现场步行需 5 min, 问张某是否能被排除在嫌疑犯之外?

第六节 反常积分

根据定积分的定义, 要使函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的定积分有意义, 至少要满

足两个条件:(1)积分区间 $[a, b]$ 是有限的;(2) f 是 $[a, b]$ 上的有界函数.如果这两个条件有一个不满足,那么定积分要么没有意义,要么不存在.但是,在许多理论和实际问题的研究中,往往要求把定积分的概念加以推广,研究无穷区间上或者无界函数的积分问题,这种积分称为反常积分.反常积分有两种,它们都可以通过对定积分再取一次极限得到.本节讨论上述两种反常积分的概念及其收敛准则.

6.1 无穷区间上的积分

例 6.1 在一个由带电量为 Q 的点电荷形成的电场中,求与该点电荷相距为 a 处的电位.

解 根据物理学中的知识,该点处的电位 V_a 等于该点处的单位正电荷移至无穷远处电场力所作的功.不妨设点电荷 Q 位于坐标原点,单位正电荷在 x 轴上,它与坐标原点相距为 a (图 6.1).则当单位正电荷由 x 移至 $x + dx$ 处,电场力 $F(x)$ 所作功的近似值为

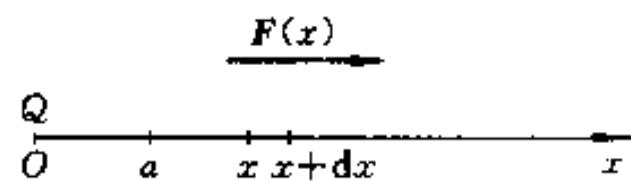


图 6.1

$$dW = F(x)dx = k \frac{Q}{x^2}dx,$$

其中 k 为常数.该电荷从 $x = a$ 移至 $x = b$ 处电场力所作的功为

$$W = \int_a^b k \frac{Q}{x^2}dx = kQ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

令 $b \rightarrow +\infty$, 则电场在 $x = a$ 处的电位为

$$V_a = \lim_{b \rightarrow +\infty} W = \lim_{b \rightarrow +\infty} kQ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{kQ}{a},$$

即

$$V_a = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b F(x)dx = \frac{kQ}{a}. \quad (6.1)$$

(6.1)式左端是一个定积分的极限,可以把它看作是 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的积分,称为 $F(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的积分.

定义 6.1 (无穷积分) 设函数 f 定义在 $[a, +\infty)$ 上,若对任何 $b > a$, f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积,则称 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ 为 f 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的积

分,简称无穷积分,记作

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (6.2)$$

若极限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

存在,则称 f 在 $[a, +\infty)$ 上的积分收敛,此时,称这个极限为 f 在 $[a, +\infty)$ 上积分的值.如果极限不存在,则称 f 在 $[a, +\infty)$ 上的积分发散.收敛性与发散性统称为敛散性.

类似地,可以定义 f 在 $(-\infty, b]$ 上的积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 及其敛散性. f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 定义如下:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx, \quad (6.3)$$

其中 c 为任一实数, a 与 b 各自独立地分别趋于 $-\infty$ 与 $+\infty$.若极限

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx \text{ 与 } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

同时存在,则称 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分收敛,它不依赖于 c 的选择.若(6.3)式右端两个极限有一个不存在,则称左端的积分发散.

例 6.2 证明积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ($p > 0$) 在 $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散.

证 当 $p \neq 1$ 时,

$$\int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} x^{-p+1} \Big|_1^b = \frac{1}{1-p} (b^{-p+1} - 1),$$

所以

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} (b^{-p+1} - 1).$$

当 $p < 1$ 时,该极限为正无穷大,故积分发散;当 $p > 1$ 时,该极限为 $\frac{1}{p-1}$,故积分收敛,并且

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \quad (p > 1).$$

当 $p = 1$ 时,由于

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln b,$$

所以,当 $b \rightarrow +\infty$ 时,它的极限为 $+\infty$,故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 发散.

综上所述,该积分在 $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散. 习惯上,常称此积分为 p 积分. ■

例 6.3 求 $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$.

解 由于

$$\int_{-b}^0 xe^x dx = [xe^x - e^x] \Big|_{-b}^0 = \frac{b+1}{e^b} - 1,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 xe^x dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^0 xe^x dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b+1}{e^b} - 1 \right) = -1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 6.4 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

解 在(6.3)式中,取 $c=0$,则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan x \Big|_0^b \\ &= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

为了书写简便,经常省略极限符号,直接把 $+\infty$ (或 $-\infty$)作上(下)限代入. 按照这样做法,例 6.3 的运算过程可改写为:

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = [xe^x - e^x] \Big|_{-\infty}^0 = -1,$$

其中将下限 $-\infty$ 代入的含意就是:求 $x \rightarrow -\infty$ 时函数 $xe^x - e^x$ 的极限.

无穷区间上的积分有简单的几何意义. 设在区间 $[a, +\infty)$ 上, $f(x) \geq 0$. 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 它的值就是曲边梯形(图

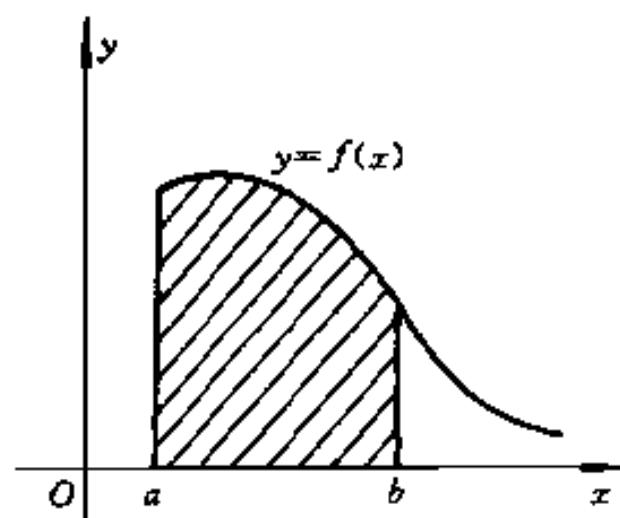


图 6.2

6.2 中的阴影部分)的面积 $\int_c^b f(x)dx$ 当 $b \rightarrow +\infty$ 时的极限,也就是图 6.2 中阴影部分沿 x 轴正向向右无限伸展的平面图形的面积,是个有限值;若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散,则上述无限伸展的平面图形没有有限的面积.

无穷区间上的积分有与定积分相类似的性质,例如,线性性质,对区间的可加性等. 定积分中的换元法与分部积分法也可推广到这种反常积分,此处均不一一罗列.

6.2 无界函数的积分

定义 6.2 (无界函数的积分) 设函数 f 定义在区间 $(a, b]$ 上, f 在 a 附近无界(此时称 a 为 f 的奇点), 并且对任意的 $\epsilon > 0$, f 在 $[a + \epsilon, b]$ 上 Riemann 可积, 则称 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ 为无界函数 f 在 $(a, b]$ 上的积分, 记作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx. \quad (6.4)$$

若极限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

存在, 则称无界函数 f 在 $(a, b]$ 上的积分收敛, 此时, 称这个极限为无界函数 f 在 $(a, b]$ 上积分的值; 若极限不存在, 则称该积分发散. 收敛性与发散性统称为敛散性.

若 f 定义在 $[a, b)$ 上, b 为 f 的奇点, 可类似地定义无界函数 f 在 $[a, b)$ 上的积分 $\int_a^b f(x)dx$ 及其敛散性.

设 f 定义在 $[a, c) \cup (c, b]$ 上, c 为 f 的奇点, 定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x)dx, \quad (6.5)$$

其中 ϵ 与 δ 为任意的不同正数, 并且各自独立地趋于零. 若极限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx \text{ 与 } \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

同时存在, 则称无界函数 f 在 $[a, b]$ 上的积分收敛; 若上述两个极限中有一个不存在, 则称(6.5)式左端的积分发散.

无穷区间上的积分与无界函数的积分统称为反常积分.

例 6.5 求积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0)$.

解 由于 a 是 $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 的奇点, 所以题中所给的是一个无界函数的积分. 由定义,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{a-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^{a-\epsilon} \right) = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 6.6 讨论积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ ($a < b, p > 0$) 的敛散性.

解 由于 a 是 $\frac{1}{(x-a)^p}$ 的奇点, 所以题中所给的是无界函数的积分. 当 $p \neq 1$ 时, 对于任意的 $\epsilon > 0$,

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \ln(x-a) \Big|_{a+\epsilon}^b = \ln(b-a) - \ln \epsilon,$$

由于当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 此定积分的极限不存在, 故积分 $\int_a^b \frac{dx}{x-a}$ 发散. 当 $p \neq 1$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{(x-a)^{1-p}}{1-p} \Big|_{a+\epsilon}^b \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{\epsilon^{1-p}}{1-p} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p < 1, \\ +\infty, & p > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

所以当 $p < 1$ 时, 积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 收敛, 并且其值为 $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$; 当 $p > 1$ 时, 该积分发散.

综合上面的讨论得知: 当 $p < 1$ 时, 该积分收敛; 当 $p \geq 1$ 时, 该积分发散. \blacksquare

类似的讨论可知, 积分 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ ($a < b, p > 0$) 当 $p < 1$ 时收敛, 当 $p \geq 1$ 时发散.

通常也把这两个积分叫做无界函数的 p 积分.

无界函数的积分也有简单的几何意义, 读者可参照无穷区间上积分的几何意义去讨论, 此处不再赘述. 另外, 定积分的性质以及定积分的换元法和分部积分法, 也能推广到无界函数的积分中来.

为了书写简单起见,对于无界函数的积分,也可以用类似于定积分的 Newton-Leibniz 公式的表达形式来讨论它的敛散性,计算收敛积分的值,现说明如下. 设 $f \in C[a, b]$, $x = b$ 为它的奇点, F 为 f 的一个原函数. 由于

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(F(x) \Big|_a^{b-\epsilon} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(b-\epsilon) - F(a),$$

所以, 积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛的充要条件是 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(b-\epsilon) = F(b-0)$ 存在. 故若原函数 F 在 $x = b$ 处的左极限存在, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a). \quad (6.6)$$

特别地, 若原函数 F 在 $x = b$ 处左连续, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (6.7)$$

例如, 在例 6.5 中, 由于 $\arcsin \frac{x}{a}$ 是被积函数的一个原函数, 并且它在 $x = a$ 处左连续, 故例 6.5 的运算过程可直接写成:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = \frac{\pi}{2}.$$

例 6.7 计算 $\int_0^1 \ln x dx$.

解 由分部积分法容易求得 $\ln x$ 的一个原函数 $x \ln x - x$, 它在 $x = 0$ 处没有定义, 但是利用 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) = 0,$$

故

$$\int_0^1 \ln x dx = x(\ln x - 1) \Big|_{0+0}^1 = -1. \quad \blacksquare$$

如果函数 f 的奇点在 $[a, b]$ 之内, 或者在 $[a, b]$ 上同时有几个奇点, 除这些奇点外均连续, 只要 f 的原函数 F 在这些点上都连续, 那么公式(6.7)仍然成立.

例 6.8 计算积分 $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

解 $x = 0$ 是被积函数的奇点, 但由于原函数 $F(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$ 在该点连续, 故

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^8 = \frac{9}{2}. \blacksquare$$

6.3 无穷区间上积分的审敛准则

上面已经看到,利用定义来判断反常积分的敛散性是比较困难的.因为用这种方法不但要求被积函数的原函数,而且还要求极限.当原函数不能用初等函数来表示时,这种方法就更加无能为力了.因此,需要直接从被积函数的性态来判定反常积分的敛散性.为了简便,我们只讨论无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的积分,所得结论不难推广到其他情况.

首先,当被积函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上非负时,有以下两个比较准则.

定理 6.1 (比较准则 I) 设 f, g 在 $[a, +\infty)$ 连续,并且

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, +\infty), \quad (6.8)$$

则

(1) 当 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;

(2) 当 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散.

证 (1) 对任意大于 a 的实数 b ,由 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ 得

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

由于不等式右边的积分 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛,因而函数 $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ 上有界.又因为 $f(x) \geq 0$,所以 $F(b)$ 是 b 的单调增函数,根据习题 1.4(B) 第 6 题知极限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

存在,即 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

(2) 结论(2)可用反证法直接从结论(1)得到. \blacksquare

容易看出,若将不等式(6.8)成立的区间换成 $[c, +\infty)$,其中 c 为大于 a 的任一实数,结论仍然成立.

例 6.9 证明无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 收敛.

证 由于 $x > 1$ 时, $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$,而积分

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = e^{-1}$$

收敛, 所以 $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 收敛, 从而无穷积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

也收敛. ■

定理 6.2 (比较准则 II) 如果 f, g 在 $[a, +\infty)$ 连续, 而且 $g(x) > 0$, 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda (\text{有限或}\infty), \text{那么}$$

(1) 当 $\lambda \neq 0$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, 若 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛;

(3) 当 $\lambda = \infty$ 时, 若 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也发散.

证 (1) 不妨设 $\lambda > 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, 所以存在正数 $c \geq a$, 使当 $x \geq c$ 时, 恒有

$$-\frac{\lambda}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \frac{\lambda}{2}.$$

从而有

$$0 < \frac{\lambda}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} \lambda g(x).$$

由比较准则 I 易知, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 同敛散.

(2) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 故 $\forall \epsilon > 0$, \exists 正数 $c \geq a$, 使当 $x \geq c$ 时, 恒有

$$-\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon,$$

从而有

$$-\epsilon g(x) < f(x) < \epsilon g(x).$$

为了利用比较准则 I, 在上式中同加 $\epsilon g(x)$, 得

$$0 < f(x) + \epsilon g(x) < 2\epsilon g(x).$$

由于 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 故由比较准则 I 知积分 $\int_a^{+\infty} [f(x) + \epsilon g(x)] dx$ 也收敛, 又因为

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} [f(x) + \varepsilon g(x)] dx - \int_a^{+\infty} \varepsilon g(x) dx,$$

所以 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

(3) 证明留给读者. ■

由于 p 积分的敛散性已经知道, 因而在利用比较准则 II 时, 经常取 $\frac{1}{x^p}$ 作为 $g(x)$ 来判定积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 的敛散性.

例 6.10 判定下列积分的敛散性:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}; \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{3x + \sqrt{x} + 2}.$$

解 (1) 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = 1,$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ 也收敛.

(2) 设 $f(x) = \frac{1}{3x + \sqrt{x} + 2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 发散, 所以 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{3x + \sqrt{x} + 2}$ 也发散. ■

下面我们再考虑 f 变号的情况.

定理 6.3 (绝对收敛准则) 如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛. (此时称积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛.)

证 由于 $0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$, 又已知

$$\int_a^{+\infty} 2|f(x)| dx = 2 \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

收敛, 所以

$$\int_a^{+\infty} [|f(x)| - f(x)] dx$$

也收敛, 从而知

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} |f(x)| dx - \int_a^{+\infty} [|f(x)| - f(x)] dx$$

也收敛。■

例 6.11 判断 $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$ 的敛散性。

解 由于 $|e^{-x} \sin x| \leq e^{-x}$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ 收敛, 所以 $\int_0^{+\infty} |e^{-x} \sin x| dx$ 收敛, 即原积分绝对收敛。■

6.4 无界函数积分的审敛准则

与无穷积分的审敛准则类似, 可以得到无界函数积分的审敛准则, 具体证明读者可仿照无穷积分的相应准则完成。为了简便, 我们仅讨论 f, g 在 $(a, b]$ 连续, a 为奇点的无界函数的积分。

定理 6.4 (比较准则 I) 设 f, g 在 $(a, b]$ 连续, a 是它们的奇点, 并且在 $(a, b]$ 上有

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

则

(1) 当 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛时, $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

(2) 当 $\int_a^b f(x) dx$ 发散时, $\int_a^b g(x) dx$ 发散。

定理 6.5 (比较准则 II) 设 f, g 在 $(a, b]$ 连续, a 是它们的奇点, 且 $g(x) > 0$. 又 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ (有限或 ∞), 则

(1) 当 $\lambda \neq 0$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 与 $\int_a^b g(x) dx$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, 若 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 也收敛;

(3) 当 $\lambda = \infty$ 时, 若 $\int_a^b g(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 也发散。

定理 6.6 (绝对收敛准则) 若 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 也收敛。

(此时称 $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛。)

例 6.12 判定下列积分的敛散性:

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1); \quad (2) \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{dx}{(\sqrt{x})^2 + 3x^2}; \quad (4) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx.$$

解 (1) 当 $x \in [0, 1)$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \end{aligned}$$

而积分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

收敛,由比较准则 I 知原积分收敛.

(2) 取 $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

又 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 收敛,由比较准则 II 知原积分收敛.

(3) 取 $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{x})^3 + 3x^2}$, $g(x) = \frac{1}{(\sqrt{x})^3}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{3/2}}{x^{3/2} + 3x^2} = 1.$$

又 $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}} dx$ 发散,由比较准则 II 知原积分发散.

(4) 设 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$, 则 $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. 而 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 收敛,由比较准则 I 知 $\int_0^1 |f(x)| dx$ 收敛,因而原积分绝对收敛. ■

6.5 Γ 函数

作为反常积分的一个具体例子,我们来介绍在工程技术中有重要应用的一个特殊函数—— Γ (Gamma)函数,它是用含有参数的反常积分来定义的非初等函数.

在说明什么是 Γ 函数之前,先证明含参数 α 的反常积分 $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 当 $\alpha > 0$ 时收敛.

事实上,由于这个反常积分的积分区间 $[0, +\infty)$ 是无穷的,并且当 $\alpha - 1 < 0$ 时, $x = 0$ 是 $x^{\alpha-1} e^{-x}$ 的奇点,因此,它既是无穷积分,又是无界函数的积分.为了讨论它的收敛性,将它改写成

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

对于积分 $\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, 当 $\alpha \geq 1$ 时为定积分, 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 由于反常积分 $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx$ 收敛(它属于例 6.6 中的无界函数 p 积分), 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1,$$

由无界函数积分的比较审敛准则Ⅱ可知, 当 $\alpha > 0$ 时, 积分 $\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 收敛.

又因为无穷积分 $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$ 显然收敛, 而对任何实数 α ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = 0,$$

由无穷积分的比较准则Ⅱ可知, 对于任何实数 α , 积分 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 都收敛.

综上所述, 当 $\alpha > 0$ 时, 反常积分 $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 收敛.

定义 6.3 (Γ 函数) 由反常积分 $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内确定的以 α 为自变量的函数, 称为 Γ 函数, 记作

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha \in (0, +\infty). \quad (6.9)$$

利用分部积分法不难得知, Γ 函数满足如下的递推关系:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha). \quad (6.10)$$

事实上,

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx = -x^\alpha e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

在递推关系式(6.10)中取 $\alpha = n \in \mathbb{N}_+$, 并连续使用 n 次得

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = \cdots = n! \Gamma(1).$$

而

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1,$$

故

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!.$$

习题 3.6

(A)

1. 利用无穷积分的定义判定下列无穷积分的敛散性, 如果收敛, 计算它的值.

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}};$$

$$(2) \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x(x+15)};$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx;$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx;$$

$$(5) \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$$

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

2. 利用无界函数积分的定义判定下列无界函数积分的敛散性, 如果收敛, 计算它的值.

$$(1) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(2) \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2};$$

$$(3) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx;$$

$$(4) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3};$$

$$(5) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b);$$

$$(6) \int_0^1 \ln x dx;$$

$$(7) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 + (\ln x)^2}};$$

$$(8) \int_1^3 \ln \sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}} dx.$$

3. 利用定义判定下列反常积分的敛散性, 如果收敛, 计算它的值.

$$(1) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx;$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}}.$$

4. 当 k 取何值时, 反常积分 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛? 又 k 为何值时它发散?

5. 利用各种判别法, 讨论下列无穷积分的敛散性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 + x^2 + 1};$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x+1}};$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt[3]{x}};$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos x dx \quad (k > 0).$$

6. 利用各种判别法, 讨论下列反常积分的敛散性:

$$(1) \int_0^2 \frac{dx}{\ln x};$$

$$(2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$(3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^2}};$$

$$(4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2};$$

$$(5) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

7. 判定积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ 的敛散性时, 下列两种做法哪一种是错误的? 为什么?

解法一

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{x}{1+x^2} dx \\&= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_{-a}^a \\&= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (\ln(1+a^2) - \ln[1+(-a)^2]) = 0,\end{aligned}$$

故该积分收敛.

解法二

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \\&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^b,\end{aligned}$$

由于两个极限都不存在, 所以该积分发散.

8. 判定积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx$ 的敛散性时, 下列两种做法哪一种是错误的? 为什么?

解法一

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx \\&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{1+x} \Big|_1^b = \ln 2,\end{aligned}$$

因而收敛.

解法二

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b - \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(1+x) \Big|_1^b,$$

两个极限都不存在, 因而发散.

(B)

1. 设 f 在 $[a, c) \cup (c, b]$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$, 那么反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 能否用极限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right\}$$

来定义? 为什么? 讨论积分

$$\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$$

的敛散性.

2. 讨论下列反常积分的敛散性:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} \quad (p, q > 0); \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \quad (p, q > 0);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx \quad (n \text{ 为正数}); \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

3. 证明: 当 $p > 0, q > 0$ 时反常积分 $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ 收敛. 此时, 该积分是参数 p, q

的函数,称为 Beta 函数,记作

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p > 0, q > 0).$$

进而证明 Beta 函数有下列性质:

$$(1) B(p, q) = B(q, p);$$

$$(2) \text{当 } q > 1 \text{ 时}, B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1);$$

$$\text{当 } p > 1 \text{ 时}, B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q);$$

$$(3) \text{若 } m, n \in \mathbb{N}_+, \text{ 则 } B(n, m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)},$$

综合练习题

1. 为了控制人口的增长,需要由当前的人口统计数预测若干年后的人口数. 假设某城市在 t 时刻净增人口(指出生人口)以每年 $r(t) = 5 \times 10^4 + 10^5 t$ 的速率增长, 考虑到人口的死亡和迁移, 在 t_1 时刻的人口数 $N(t_1)$ 只有一部分在 t_2 ($t_2 > t_1$) 时刻存在, 设为 $h(t_2 - t_1)N(t_1)$, 其中 $h(t) = e^{-\frac{t}{40}}$. 如果已知 1990 年该市人口数为 10^7 , 试求 2000 年该市的人口数.

2. 将放射性核废料装在密封的圆桶内并沉入水深约 91 m 的海底是美国原子能委员会设计的处理核废料的一种方法. 试验证明, 当圆桶到达海底时的速度超过 12.2 m/s 时, 圆桶会因碰撞破裂而造成核泄漏. 设圆桶的体积为 0.208 m^3 , 质量为 239.456 kg , 海水的浮力为 $10.054.2 \text{ N/m}^3$. 圆桶下沉时的阻力与下沉的速度成正比, 比例系数 $k = 1.176$. 又圆桶下沉的初速度为 0, 试求圆桶下沉的速度与下沉的深度之间的关系. 又圆桶到达海底时会因碰撞而破裂吗? (取重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$)

3. 某工厂生产某产品经过两道工序, 第一道工序在甲车间进行, 第二道工序在乙车间进行, 甲车间的产品作为乙车间的原料. 甲车间的生产速度为每月 500 件, 乙车间的生产速度为每月 100 件. 由于受到乙车间生产能力的限制, 甲车间要进行等周期的有间断的生产, 同时还必须保证乙车间不停工待料. 甲的产品运送到乙之前要包装, 平均每批产品(即一个周期内生产的产品)的包装费为 5 元. 如果甲车间的产品运送到乙车间后暂时来不及加工, 则要花储存费用, 每件产品每天的储存费为 0.006 元.

(1) 试将一个月内用于包装和储存产品的总费用 y 表示为生产周期 T (天)的函数:
 $y = f(T)$;

(2) 求最优生产周期 T_0 , 使 $f(T)$ 最小; 并求甲车间在一个周期 $[0, T_0]$ 内的实际生产天数 t_0 .

第四章 无穷级数

无穷级数是数学分析的一个重要内容,无论在数学理论本身或者在科学技术的应用中都是一个有力工具.本章主要研究常数项级数的概念与收敛准则;函数项级数的处处收敛性,一致收敛性;幂级数的收敛性与函数展开为幂级数问题以及将周期函数展开为 Fourier 级数的问题.

第一节 常数项级数

本节讨论常数项级数的概念、性质与收敛准则.在学习这部分内容的时候,应当特别注意它与数列极限相应内容之间的关系.

1.1 常数项级数的概念、性质与收敛原理

例 1.1 设有弹性小球自高为 H m 处无初速地下落,落下后又弹起.若每次弹起的高度为前次下落高度的一半,如此往复不已.问小球是否会停止跳动?

大家知道,弹性小球的跳动次数是无穷的,它是否会停止跳动,关键在于小球完成无穷次跳动所用的时间是否是有限的.若所用的时间有限,则小球必定停跳,否则不会.根据自由落体的运动规律 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 得:

小球从高为 H m 处落到地面所用时间为 $T_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ (s),

小球从地面向跳到 $\frac{1}{2}H$ m 的高处后再落到地面所用的时间为 $T_1 = 2\sqrt{\frac{H}{2g}}$ (s),

小球第 2 次从地面向跳再落到地面所用时间为 $T_2 = 2\sqrt{\frac{H}{2^2g}}$ (s),
.....

小球第 n 次从地面向跳再落到地面所用时间为 $T_n = 2\sqrt{\frac{H}{2^{n-1}g}}$ (s),

于是小球完成无穷多次跳动所用的时间为:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{H}{2g}} + 2\sqrt{\frac{H}{2^2g}} + \cdots + 2\sqrt{\frac{H}{2^{n-1}g}} + \cdots \\ &= \sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{H}{g}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} + \cdots \right) (\text{s}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

等式右端是无穷多个数用加号连接起来的一个表达式.为了回答这个问题,自然要问,无穷多项“相加”的涵义是什么?能否像有限项相加那样定义它的“和”呢?下面先来研究这个问题.

一般,将已给数列 $\{a_n\}$ 的各项依次用加号连接起来的表达式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots, \text{或 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.2)$$

称为常数项无穷级数,简称为常数项级数或级数, a_n 称为该级数的通项.

定义 1.1 级数(1.2)的前 n 项之和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

称为它的部分和.若部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛,则称级数(1.2)收敛,并称

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

为它的和,记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$;否则,称级数(1.2)发散.级数(1.2)的收敛性与发散性统称为敛散性.收敛级数的和与其部分和之差 $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为该级数的余项.

例 1.2 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性.

解 该级数的部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

当 $|q| < 1$ 时,由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

故该级数收敛,且其和为 $\frac{a}{1-q}$;当 $|q| > 1$ 时,由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在,故该级数发散.显然,当 $q = 1$ 时级数也发散.再考察 $q = -1$ 时的情况,此时,级数变为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots,$$

由于它的部分和

$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ a, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

显然是一个发散数列, 所以该级数发散.

综上所述, 当 $|q| < 1$ 时, 等比级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$; 当 $|q| \geq 1$ 时, 等比级数发散. ■

利用本例的结果就能回答例 1.1 中的问题. 事实上, 例 1.1 中的级数是公比 $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的一个等比级数, 所以

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{H}{g}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = (4 + 3\sqrt{2})\sqrt{\frac{H}{g}} (\text{s}).$$

由此得知, 小球完成无穷次跳动所用的时间 T 是有限的, 因此, 小球的跳动一定会停止.

例 1.3 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

收敛, 且其和 $S = 1$.

证 由于级数的部分和数列

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, 故级数收敛, 且其和 $S = 1$. ■

由定义 1.1 可见, 判别级数的敛散性实质上就是判别它的部分和数列的敛散性, 求级数的和实质上就是求部分和数列的极限. 因此, 将级数的问题转化为它的部分和数列的相应问题, 是研究级数的一个基本思想方法.

例 1.4 证明: 调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

是发散的.

证 由于该级数的部分和数列为

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}_+),$$

在第一章例 3.13 中, 已经证明这是一个发散数列, 故知调和级数是发散级数. ■

利用数列极限的有关性质, 不难证明级数的一些基本性质.

性质 1.1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \tilde{S}$, 则

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S \pm \tilde{S};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} Ca_n = C \sum_{n=1}^{\infty} a_n = CS, \text{ 其中 } C \in \mathbb{R} \text{ 为常数};$$

$$(3) \text{ 若 } a_n \leq b_n, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

性质 1.2 删去或添加有限项不影响级数的敛散性.

性质 1.3 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

性质 1.3 中的(1)与(2)都是级数收敛的必要条件, 由于(1)比较容易验证, 因此常被用来证明级数的发散性. 即若 $|a_n|$ 不收敛, 或者虽收敛但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必定发散. 例如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 都是发散的.

性质 1.4 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛级数, 则不改变它的各项次序任意加入括号后所得到的新级数仍收敛, 并且和不变.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, 部分和数列为 $\{S_n\}$. 在其中任意加入括号, 得一新级数:

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots \\ & + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots. \end{aligned}$$

记它的部分和数列为 $\{\tilde{S}_k\}$, 则

$$\tilde{S}_1 = S_{n_1}, \tilde{S}_2 = S_{n_2}, \cdots, \tilde{S}_k = S_{n_k}, \cdots.$$

因此 $\{\tilde{S}_k\}$ 为原级数部分和数列 $\{S_n\}$ 的一个子列 $\{S_{n_k}\}$, 从而有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k} = S. \blacksquare$$

性质 1.4 说明,任何收敛级数都具有结合性质,但它的逆命题不一定成立.例如,级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

是收敛的,但不加括号的级数 $1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$ 却发散.

与数列类似,对于级数也需要研究两个基本问题:第一,它是否收敛?第二,如果收敛,如何求出它的和?第二个问题比较困难,但第一个问题更重要.因为如果级数发散,那么它无和可言;如果级数收敛,即使无法求出其和的精确值,也可利用部分和求出它的近似值.而且根据性质 1.3 的(2),近似值可以达到任意的精确度,从而满足实际问题的需要.因此,判断敛散性是级数理论的首要问题,也是我们要重点研究的问题.

将判断数列收敛性的 Cauchy 原理转化到级数中来,就得到判断级数敛散性的一个基本原理.

定理 1.1 (Cauchy 收敛原理) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall p \in \mathbb{N}_+, \text{当 } n > N \text{ 时, 恒有 } \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon. \quad (1.3)$$

例 1.5 利用 Cauchy 收敛原理证明:

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛; (2) 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证 (1) 由于 $\forall n, p \in \mathbb{N}_+$, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ & < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} \\ & = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

因此, $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时,

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} < \epsilon,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

(2) 为了证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 根据 Cauchy 收敛原理, 只要证明 $\exists \epsilon_0 > 0$, $\exists p \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \geq \epsilon_0$ 就行了. 由于 $\forall n$

$\in \mathbb{N}_+$, 我们有

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以该级数发散. ■

像数列的 Cauchy 收敛原理一样, 级数的 Cauchy 收敛原理的重要性在于它的理论价值.

1.2 正项级数的收敛准则

若 $a_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 正项级数的一个显著特点是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增, 因此, 根据判定数列收敛的单调有界准则, 立即可以得到下面的判定正项级数收敛性的基本定理.

定理 1.2 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

定理 1.2 的重要性主要不在于利用它来判别正项级数的收敛性, 而在于它是证明下面许多收敛准则的基础.

定理 1.3 (第一比较准则) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 并且 $\forall n \in \mathbb{N}_+, a_n \leq b_n$.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

证 证明的基本思路与无穷积分的比较准则] 相同. 由于(2)是(1)的逆否命题, 因此只要证明(1). 由已知, $\forall n \in \mathbb{N}_+, a_n \leq b_n$, 所以

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k = \tilde{S}_n.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\{\tilde{S}_n\}$ 有上界, 从而 $\{S_n\}$ 也有上界, 故由定理 1.2, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. ■

根据性质 1.2, 定理 1.3 中的条件 “ $\forall n \in \mathbb{N}_+, a_n \leq b_n$ ” 可改为“对于脚标 n 充分大以后的所有项, $a_n \leq b_n$ ”.

定理 1.4 (第二比较准则) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 并且 $\forall n \in \mathbb{N}_+, b_n > 0$, 记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

(1) 若 $\lambda \neq 0$, 则两个级数同时收敛或同时发散;

(2) 若 $\lambda = 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(3) 若 $\lambda = +\infty$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 证明的基本思路与无穷积分的比较准则Ⅱ相同, 由读者自己完成. ■

例 1.6 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - n - 3}.$$

解 (1) 利用第一比较准则, 由于 $\sin \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 是收敛级数, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ 也是收敛的.

(2) 由于

$$\frac{n+1}{n^2 - n - 3} > \frac{n+1}{n^2 - n - 2} = \frac{1}{n-2} (n > 2),$$

而调和级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}$ 发散, 所以 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - n - 3}$ 也发散. ■

这两个级数的敛散性也可以用第二比较准则来判别. 事实上, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{2^n} / \frac{\pi}{2^n} \right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2 - n - 3} / \frac{1}{n} \right) = 1,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 从而得到与上面相同的结论.

用比较准则来判别级数的敛散性, 关键在于选择一个敛散性已知的级数作为比较级数. 第二比较准则为我们提供了选择比较级数的思路. 由性质 1.3, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项 $a_n \neq 0 (n \rightarrow \infty)$, 那么该级数必发散; 如果 $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

根据第二比较准则, 通过分析 $\{a_n\}$ 的无穷小阶数, 可选择通项 b_n 与 a_n 同阶, 低阶或高阶无穷小的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 作为比较级数. 这就需要熟记一些敛散性已知的

级数，常用来作比较级数的是等比级数与例 1.8 中将要介绍的 p 级数。

例 1.7 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$ 的敛散性。

解 利用 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的二阶 Taylor 公式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 与 $\frac{1}{n^2}$ 是同阶无穷小 ($n \rightarrow \infty$)。而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数也收敛。■

定理 1.5 (积分准则) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一正项级数。若存在一个单调减的非负连续函数 $f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ，使 $f(n) = a_n$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同时收敛或同时发散。

证 由已知，当 $k \leq x \leq k+1$ ($k \in \mathbb{N}_+$) 时，

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) = a_k,$$

从而有

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} a_k dx = a_k,$$

故

$$S_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_{n-1}.$$

由此可知，若 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛，则部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ 存在。从而对任意的 $b \in (1, +\infty)$ ，取 $n = [b]$ ，则

$$\int_1^n f(x) dx \leq \int_1^b f(x) dx \leq \int_1^{n+1} f(x) dx.$$

根据夹逼原理， $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx$ 存在，故积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛。■

例 1.8 讨论 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性 ($p > 0$).

解 取 $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ($1 \leq x < +\infty$), 则 f 是定义在 $[1, +\infty)$ 上的非负连续的单调减函数. 由于 p 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散, 因此, 根据定理 1.5, p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散. ■

定理 1.5 中用来作比较的无穷积分也可换成 f 在无穷区间 $[N, +\infty)$ 上的积分, 其中 N 是任意的正整数.

例 1.9 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ ($p > 0$) 的敛散性.

解 取 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ ($p > 0$), 则 f 在 $[2, +\infty)$ 上满足积分准则的条件. 当 $p = 1$ 时, 无穷积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \left[\ln \ln x \right]_2^{+\infty} = +\infty$$

是发散的; 当 $p \neq 1$ 时

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \frac{1}{1-p} (\ln x)^{1-p} \Big|_2^{+\infty} = \begin{cases} \frac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

因此, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时发散. ■

无论是比较准则, 还是积分准则, 在使用的时候都必须借助于敛散性已知的级数或反常积分, 因此很不方便, 有时甚至非常困难. 下面介绍的另外两个审敛准则, 都是利用已知(级数)本身的条件来判断该级数敛散性的.

定理 1.6 (D'Alembert 准则) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, $a_n > 0$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda.$$

(1) 若 $\lambda < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lambda > 1$ (含 $\lambda = +\infty$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 (1) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda < 1$, 选取 $q \in \mathbf{R}$, 使 $\lambda < q < 1$, 则由保号性, 必

$\exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. 从而

$$a_{n+1} = a_{N+1} \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} < a_{N+1} q^{n-N},$$

由于等比级数 $\sum_{n=N+1}^{\infty} q^{n-N}$ 是收敛的, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必定收敛.

(2) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda > 1$ (含 $\lambda = +\infty$), 选取 $q \in \mathbb{R}$, 使 $\lambda > q > 1$, 则必 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall n > N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1$, 从而 $a_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. ■

用类似的方法不难证明(由读者自己完成):

定理 1.7 (Cauchy 准则) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$.

(1) 若 $\lambda < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lambda > 1$ (含 $\lambda = +\infty$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

D'Alembert 准则与 Cauchy 准则又分别称为检比法与检根法.

例 1.10 用适当的方法判定下列正项级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (x > 0); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}.$$

解 (1) 用检比法. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1,$$

故该级数收敛.

(2) 用检根法. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1,$$

故该级数发散.

(3) 用第二比较准则. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \pi,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 故该级数也收敛.

(4) 用第一比较准则. 由于

$$0 < a_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2^n},$$

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ 是收敛的, 故该级数也收敛. ■

应当注意, 无论是检比法还是检根法, 当 $\lambda = 1$ 时, 级数的敛散性都没有确定的结论. 就是说, 级数可能收敛, 也可能发散. 此时应采用其他方法来判断它的敛散性. 例如, 对于 p 级数, 由于对于任何 $p > 0$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} = 1,$$

所以这两种方法对于 p 级数敛散性的判别都是无能为力的.

上面介绍了判别正项级数敛散性的五个审敛准则, 它们都是充分条件. 如果用其中的某一个准则不能判定所给级数的敛散性, 那么就要尝试用其他准则以及级数收敛与发散的定义、收敛级数的性质等去判别. 除了这五个准则之外, 还有一些更精细的判别方法, 有兴趣的读者可参阅有关的书籍. 但这几种方法对于判别常见级数的敛散性已经够用了, 读者应通过练习不断总结各种方法优劣及适用范围, 熟练而灵活地使用它们.

由于对负项级数中每一项都乘以 -1 就变成正项级数, 因此, 正项级数的所有审敛准则都可用于负项级数. 正项级数与负项级数统称为同号级数.

1.3 变号级数的审敛准则

若级数中有无穷多项为正, 无穷多项为负, 则称这类级数为变号级数. 变号级数中最简单的是所谓交错级数, 即各项的正负号交替变化的级数, 它可以表示成如下形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots, \quad (1.4)$$

其中 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N}_+)$.

定理 1.8 (Leibniz 准则) 设 $\forall n \in \mathbb{N}_+, a_n \geq a_{n+1}$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

则交错级数(1.4)收敛,并且其部分和 S_n 与和 S 的绝对误差

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} (\forall n \in \mathbb{N}). \quad (1.5)$$

证 首先证明级数(1.4)的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列 $\{S_{2k}\}$ 是单调增有上界的.事实上,

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}),$$

由于 $\{a_n\}$ 是单调减的,上式中每个括号内的数都是非负的,故 $\{S_{2k}\}$ 是单调增的.又

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k},$$

所以 $S_{2k} < a_1$,即 $\{S_{2k}\}$ 有上界.从而得知 $\{S_{2k}\}$ 是收敛数列,设 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S$. 又由 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} + a_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S$,根据第一章习题 1.3(A)第 8 题, $\{S_n\}$ 收敛于 S ,故知级数(1.4)收敛.

上面已经证得 $0 < S_{2k} < a_1$,两边取极限,得

$$0 \leq S \leq a_1.$$

就是说,若交错级数满足 Leibniz 准则的条件,则其和 S 不超过它的首项 a_1 . 将这个结论应用于级数

$$S - S_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots)$$

(右端括号内也是一个满足 Leibniz 准则的交错级数)便得

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}. \blacksquare$$

估计式(1.5)在近似计算中是很有用的.它告诉我们,对于满足 Leibniz 准则条件的交错级数,如果用其部分和 S_n 作为和的近似值,绝对误差不超过余项中第一项的绝对值.

例 1.11 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ ($p > 0$) 的敛散性.

解 显然,该级数满足 Leibniz 准则的条件,因此,当 $p > 0$ 时收敛.特别地,当 $p = 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 也是收敛的. \blacksquare

下面证明例 1.11 中当 $p = 1$ 时的交错级数之和为 $\ln 2$,并利用(1.5)式来估计用该级数的部分和近似代替和所产生的误差.在 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 公式(见第二章第五节)中取 $x = 1$,则有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} +$$

$$(-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} (0 < \theta < 1).$$

易见上式右端的前 n 项之和就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的部分和 S_n , 并且

$$|S_n - \ln 2| < \frac{1}{n+1},$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的和 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2$. 根据估计式(1.5), 如果用 S_n 作为 $\ln 2$ 的近似值, 绝对误差不超过 $\frac{1}{n+1}$. 因此只要取 n 足够大, 就可求得 $\ln 2$ 的满足精度要求的近似值.

利用 Leibniz 准则不能解决所有交错级数的审敛问题, 更不能判别更一般的变号级数的敛散性. 判别变号级数敛散性的一个常用方法是下面的所谓绝对收敛准则.

定理 1.9 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛原理, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall n, p \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon$. 从而有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. ■

注意, 定理 1.9 的逆命题不成立. 例如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 但其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却发散.

若绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

例 1.12 讨论下列级数的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!}{n^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

解 (1) 由于

$$\left| \frac{\sin n!}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n!}{n^2} \right|$ 也收敛, 因此, 原级数绝对收敛.

(2) 由例 1.10(1) 知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 对任何 $x \neq 0$ 都收敛, 因而对于任何 $x \in \mathbb{R}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 都绝对收敛(当 $x = 0$ 时级数显然是绝对收敛的).

(3) 由于

$$\left| (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty),$$

所以, 原级数的绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 是发散的. 但是, 因为

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) (\forall n \in \mathbb{N}_+),$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$, 由 Leibniz 准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 收敛, 因而是条件收敛的. ■

例 1.13 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}} (p \geq 1)$ 的敛散性.

解 由于

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}} = \frac{1}{n^p + (-1)^{n-1}} - \frac{1}{n^p} (n \rightarrow \infty),$$

所以当 $p > 1$ 时, 原级数绝对收敛; 当 $p = 1$ 时, 原级数的绝对值级数发散. 又因为

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n + (-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{n[n + (-1)^{n-1}]},$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[n + (-1)^{n-1}]}$ 均收敛(为什么?), 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + (-1)^{n-1}}$ 收敛. 从而知当 $p = 1$ 时原级数是条件收敛的. ■

绝对收敛级数与条件收敛级数有着很大的差异, 这主要表现在关于有限和的某些运算性质对条件收敛的级数不成立, 但对绝对收敛级数却仍然成立. 在本

节最后, 我们简单介绍绝对收敛级数的可交换性与两个绝对收敛级数乘积的收敛性.

定理 1.10 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 那么任意交换它的各项次序所得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n$ (称它为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排) 也绝对收敛, 而且它们的和相等.

证 (1) 先证 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n$ 绝对收敛, 并且绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{a}_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的和相等. 设 $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\bar{a}_1 = a_{n_1}, \bar{a}_2 = a_{n_2}, \dots, \bar{a}_k = a_{n_k},$$

令 $K = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, 则 $K \geq k$,

$$\sum_{i=1}^k |\bar{a}_i| \leq \sum_{i=1}^K |a_i| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (1.6)$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{a}_n|$ 的部分和有上界. 根据定理 1.2, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n$ 绝对收敛. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的和为 S , $\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{a}_n|$ 的和为 \tilde{S} , 由不等式(1.6)得知 $\tilde{S} \leq S$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也可以看作是 $\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{a}_n|$ 的一个重排, 按照上面证明的结论, 又有 $S \leq \tilde{S}$, 故 $S = \tilde{S}$.

(2) 再证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n$ 的和相等. 根据本章习题 4.1(A) 第 22 题, 任一绝对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 都可以表示为两个收敛的正项级数之差, 故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = S^+ - S^-,$$

其中 S^+ 与 S^- 分别为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 的和. 由(1)知 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n$ 绝对收敛, 也应有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n^-,$$

并且 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n^-$ 分别是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 的重排, 故由(1)又应有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n^+ = S^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n^- = S^-,$$

从而得知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n^- = S^+ - S^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \blacksquare$$

定理 1.10 表明, 绝对收敛级数具有可交换性. 又由性质 1.4, 它还具有可结合性. 绝对收敛级数同时具有这两个性质为计算它的和带来了很大的方便.

对于条件收敛的级数来说, 可交换性不一定成立. 就是说, 它的重排级数不一定收敛, 即使收敛, 其和也不一定等于原级数的和. 例如, 我们已经知道, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots$$

是它的一个重排. 由于

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right),$$

所以它的前 $3n$ 项部分和

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{3n} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}, \end{aligned}$$

其中 S_{2n} 为原级数的前 $2n$ 项部分和. 从而得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_{3n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{S}_{3n} + \frac{1}{4n} \right) = \frac{1}{2} \ln 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{S}_{3n} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \frac{1}{2} \ln 2,$$

因此这个重排级数的和 $\tilde{S} = \frac{1}{2} \ln 2$.

定理 1.11 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛, 它们的和分别为 A, B .

那么, 它们各项相乘得到的所有可能的乘积项 $a_i b_j$ 按任何次序排列所得的级数

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也绝对收敛,且其和为 AB .

定理的证明从略.如定理中所说,两个级数相乘,它们所有的乘积项排列次序不同,所得到的乘积级数也不尽相同.按对角线方法排列是最常用的一种,它将下列方阵中位于同一对角线上的各乘积项相加作为乘积级数的一项:

	b_1	b_2	b_3	\cdots	b_{n-1}	b_n	\cdots
a_1	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	\cdots	$a_1 b_{n-1}$	$a_1 b_n$	\cdots
a_2	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$	\cdots	$a_2 b_{n-1}$	$a_2 b_n$	\cdots
a_3	$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$	\cdots	$a_3 b_{n-1}$	$a_3 b_n$	\cdots
\vdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots
a_{n-1}	$a_{n-1} b_1$	$a_{n-1} b_2$	$a_{n-1} b_3$	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots
a_n	$a_n b_1$	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots
\vdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots

从而得到乘积级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的通项为

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1.$$

例如,我们知道,当 $|x| < 1$ 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 绝对收敛,且其和为 $\frac{1}{1-x}$.将该级数与自己相乘,并按对角线方法排列可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}. \end{aligned}$$

根据定理 1.11,当 $|x| < 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 绝对收敛,并且它的和为 $\frac{1}{(1-x)^2}$.

习题 4.1

(A)

1. 试用级数的理论解释《庄子》中所说的“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

2. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和 S_n 如下，试写出该级数并求出它的和：

(1) $S_n = \frac{2^n}{n+1}$;

(2) $S_n = \frac{3^n - 1}{3^n}$.

3. 利用级数收敛的定义判别下列级数的敛散性，并对收敛级数求其和：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 1}{q^n}$ ($q > 3$);

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$.

4. 证明：数列 $|a_n|$ 收敛 \Leftrightarrow 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛。这个结论说明，也能将研究数列的敛散性问题转化为研究级数的敛散性问题。5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 必发散。若这两个级数都发散，上述结论是否成立？6. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和。7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 $2n$ 项之和 $S_{2n} \rightarrow A$, 并且 $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)，证明该级数收敛且其和为 A 。

8. 利用级数的性质判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right)$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \left(1 + \frac{x}{n^2} \right)$ ($x \in \mathbb{R}$).

9. 试求在第 i 点钟到第 $i+1$ ($i=1, 2, \dots, 11$) 点钟之间的什么时间，时钟上的分针恰好与时针重合。10. 试用 Cauchy 收敛原理证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

11. 下列命题是否正确？若正确，给出证明；若不正确，举出反例。

(1) 若 $a_n \leq b_n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛；(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 必收敛；

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $a_n > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda < 1$;

(4) 若数列 $|a_n|$ 单调减, 且 $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛;

(5) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必发散;

(6) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 必收敛.

12. 判别下列正项级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha \in \mathbb{R});$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 - \ln n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{n!};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt[3]{2} + (-1)^{n-1}]}{3^n}.$$

13. 设 $|r| < 1$, 利用级数理论证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$.

14. 讨论下列交错级数的敛散性, 并对收敛级数说明是绝对收敛还是条件收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3^n \cdot n!}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \ln n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a > 0, a \neq 1).$$

15. 下列级数是否交错级数? 是否满足 Leibniz 准则的条件? 是否收敛?

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

16. 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p} \quad (p > 0, |a| \neq 1);$$

$$(2) a + \frac{b}{2} + \frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \cdots + \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n} + \cdots \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$$

17. 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$ 和的近似值, 使绝对误差小于 10^{-3} .

18. 下列级数中哪些是绝对收敛的? 哪些是条件收敛的?

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n \sqrt{n}};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{n}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2 - 4}}.$$

19. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的一个子列, 证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ 收敛.

20. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 且 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

21. 设 $a_n > 0$, 证明:

(1) 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda < 1$ (或 $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda < 1$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ (或 $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

22. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 绝对收敛, 令

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, & a_n > 0, \\ 0, & a_n \leq 0; \end{cases} \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} -a_n, & a_n < 0, \\ 0, & a_n \geq 0. \end{cases}$$

则 a_n^+ 与 a_n^- 分别称为 a_n 的正部和负部. 证明:

(1) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛;

(2) 任一绝对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 都可以表示为两个收敛的正项级数之差:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

(B)

1. 设 $a_n > 0, b_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

2. 设 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln a_n}{\ln n} = q$. 证明:

(1) 若 $q > 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (2) 若 $q < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

4. 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{1+\alpha}} (\alpha > 0);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(5+n^3)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n+1}\right)^n (\alpha > 0);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \tan(\sqrt{n^2+1}\pi);$$

$$(5) \sqrt{3} + \sqrt{3-\sqrt{6}} + \sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6}}} + \cdots + \sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}} + \cdots.$$

第二节 函数项级数

所谓函数项级数, 是指它的每一项都是函数的无穷级数. 本节主要讨论一般

的函数项级数的收敛性问题,包括处处收敛和一致收敛以及一致收敛的函数项级数所具有的重要性质.

2.1 函数项级数的处处收敛性

设 $\{u_n\}$ 是定义在集合 $D \subset \mathbb{R}$ 上的一列函数(称为函数列),将它的各项依次用加号联结起来所得到的表达式:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \text{或} \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (2.1)$$

称为集合 D 上的函数项级数, u_n 称为它的通项,前 n 项之和 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ 称为它的部分和.

函数项级数(2.1)的部分和是定义在集合 D 上的一个函数列 $\{S_n\}$,为了研究函数项级数的收敛性与和的概念,先定义函数列的收敛性与它的极限等概念.

定义 2.1 设 $\{f_n\}$ 是定义在集合 $D \subset \mathbb{R}$ 上的一个函数列,若对某个 $x_0 \in D$,数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛,则称 x_0 是 $\{f_n\}$ 的一个收敛点,由收敛点的全体所构成的集合称为 $\{f_n\}$ 的收敛域.若 $\forall x \in D$,数列 $\{f_n(x)\}$ 都收敛,则称 $\{f_n\}$ 在 D 上处处收敛(或逐点收敛).此时,称由

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), x \in D$$

所定义的函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 叫做函数列 $\{f_n\}$ 的处处(或逐点)极限,记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ 或 } f_n \rightarrow f (n \rightarrow \infty).$$

利用函数列的处处收敛性与处处极限的概念,立即可以定义函数项级数(2.1)的处处收敛性与和函数的概念.

定义 2.2 (函数项级数的处处收敛性与和函数) 若 $x_0 \in D$ 是级数(2.1)部分和函数列 $\{S_n\}$ 的收敛点,则称 x_0 为该级数的收敛点,由收敛点的全体所构成的集合称为该级数的收敛域.若 x_0 不是收敛点,则称它为级数的发散点,由发散点的全体所构成的集合称为级数的发散域.若 $\forall x \in D$,级数(2.1)都收敛,则称该级数在 D 上处处收敛(或逐点收敛).此时,称由

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad x \in D$$

定义的函数 $S: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为级数(2.1)的和函数,简称为和.

若级数(2.1)在 D 上处处收敛,则称

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

为该级数的余项，并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 (x \in D)$.

例 2.1 研究等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n + \cdots$$

的收敛性，并求其和函数(其中 $a \neq 0$).

解 由例 1.2 知，当 $|x| < 1$ 时，该级数收敛；当 $|x| \geq 1$ 时，该级数发散. 所以它的收敛域是 $(-1, 1)$. 在此收敛域上，它的和函数为

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}, x \in (-1, 1).$$

它的发散域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. ■

例 2.2 研究级数

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$$

的收敛性，并求其和函数.

解 由于

$$S_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) = x^n,$$

故当 $|x| < 1$ 时， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ ；当 $x = 1$ 时， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1) = 1$ ；当 $x = -1$ 时， $S_n(-1) = (-1)^n$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时它的极限不存在；当 $|x| > 1$ 时， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \pm \infty$ ，故知该级数的收敛域为 $(-1, 1]$. 在收敛域上，它的和函数为

$$S(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

该级数的发散域为 $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$. ■

我们知道，有限个函数之和仍保持各相加函数许多重要的分析性质. 例如：

(1) 有限个连续函数之和仍为连续函数；(2) 有限个可导函数之和仍为可导函数，并且它的导数等于各个函数的导数之和；(3) 有限个可积函数之和仍为可积函数，并且它的积分等于各函数的积分之和. 那么，无限多个函数之和(即函数项级数的和函数)是否也有这些类似的性质呢？在例 2.2 中，级数的每一项在 $(-1, 1]$ 上都是连续而且可导的，但它的和函数在 $(-1, 1]$ 上却不连续，自然也不可导. 这说明，在处处收敛的情况下，函数项级数不具备有限个函数之和的上述性质，这是非常遗憾的事！因为，如果上述性质仍然成立，那么函数项级数的分析运算就非常方便. 因此，研究在什么条件下函数项级数才能保持各相加函数的分析性质就是一个非常重要的问题. 人们发现，函数项级数一致收敛的概念对研

究这个问题是至关重要的.

2.2 函数项级数的一致收敛性概念与判别方法

为了说明什么叫函数项级数的一致收敛性, 需要先讨论函数列的一致收敛性.

由定义 2.1, 如果 $\forall x \in D$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

那么函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上处处收敛于函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. 用 $\epsilon - N$ 语言来表述, 就是 $\forall x \in D, \forall \epsilon > 0, \exists N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N(x, \epsilon)$ 时, 恒有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \quad (2.2)$$

其中, 将 N 写成 $N(x, \epsilon)$ 是为了强调 N 不仅与 ϵ 有关, 而且与 x 有关, 即使对于同一个 ϵ , 当 x 不同时, 所求出的 N 也不相同.

例 2.3 设 $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}, n \geq 1, 2, \dots$. 显然,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, x \in [0, 1].$$

下面, 我们由给定的 $\epsilon > 0$ 来求使(2.2)式成立的 $N \in \mathbb{N}_+$. 为了使

$$|f_n(x) - 0| = |x^n| < \epsilon,$$

只需 $n \ln x < \ln \epsilon$ ^①, 由此解得 $N = \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln x} \right]$, 它不仅与 ϵ 有关, 而且与 x 有关. 在图 2.1 中可以清楚地看到, 对于固定的 ϵ , 在点 $x = x_1$ 处, 只要 $n \geq 2$, 曲线 $f_n(x) = x^n$ 上的对应点就落到关于极限函数 $f(x) = 0$ 图象对称的宽为 2ϵ 的带形域中; 而在点 $x = x_2$ 处, 需要 $n \geq 10$ 才行. 而且不论 n 取多大, 曲线 $f_n(x) = x^n$ 与 $[0, 1]$ 相对应的部分始终不能全部都落在这个带形域内. 换句话说, 使不等式 $|x^n - 0| < \epsilon$ 成立的 N 对于不同的 x 是不一致的. ■

如果对于所有的 $x \in D$, 能找到一个共同的 N , 它仅与 ϵ 有关, 使不等式(2.2)成立, 那么就说 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f .

定义 2.3 (函数列的一致收敛性) 设 $\{f_n\}$ 是定义在 $D \subset \mathbb{R}$ 上的一个函数列, 如果存在一个函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, 满足:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+, \text{当 } n > N(\epsilon) \text{ 时, } \forall x \in D, \text{ 恒有 } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad (2.3)$$

^① 此处只要考虑对 $x > 0$ 的情况求 N . 因为当 $x = 0$ 时, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 不等式(2.2)均成立.

那么就称 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f , 称 f 为 $\{f_n\}$ 的一致极限. 其中, $N(\epsilon)$ 表示 N 仅与 ϵ 有关, 而与 x 无关.

函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f 的几何意义是: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 所有函数 f_n 的图象都落到关于函数 f 图象对称的宽为 2ϵ 的带形域之中(图 2.2).

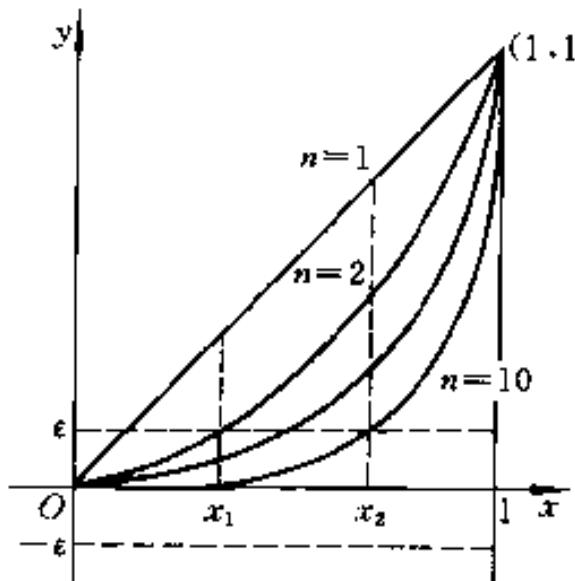


图 2.1

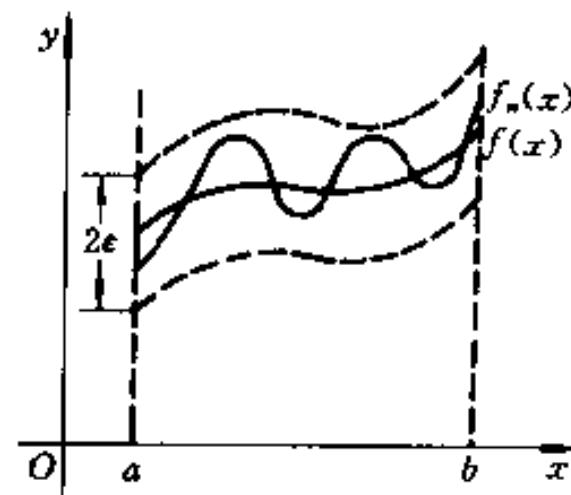


图 2.2

将函数列一致收敛性应用于级数(2.1)的部分和函数列 $\{S_n\}$ 就得到下面的定义.

定义 2.4 (函数项级数的一致收敛性) 若函数项级数(2.1)的部分和函数列 $\{S_n\}$ 在 D 上一致收敛于函数 $S: D \rightarrow \mathbb{R}$, 即

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+, \text{当 } n > N(\epsilon) \text{ 时}, \forall x \in D, \text{ 恒有 } |S_n(x) - S(x)| < \epsilon. \quad (2.4)$$

则称该级数在 D 上一致收敛于 S .

例 2.4 证明: 函数项级数

$$\frac{x}{1+x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{x}{1+n^2x^2} - \frac{x}{1+(n-1)^2x^2} \right]$$

在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

证 由于该级数的部分和函数列为 $S_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$, 即在 $[0,1]$ 上该级数处处收敛于 $S(x) = 0$. 下面证明它在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0. 由于

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{x}{1+n^2x^2} - \frac{x}{1+n^2x^2} \right| = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n},$$

因此,对于任给的 $\epsilon > 0$, 要使 $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{2n} < \epsilon$ 就行了. 取

$N = \lceil \frac{1}{2\epsilon} \rceil$, 当 $n > N$ 时, $\forall x \in [0, 1]$, 恒有 $|S_n(x) - 0| < \epsilon$. 根据定义 2.4, 该级数在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0. ■

例 2.5 证明: 例 2.2 中的函数项级数在区间 $(-1, 1)$ 上不一致收敛.

证 由例 2.2 知, 该级数在 $(-1, 1)$ 上处处收敛于和函数

$$S(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

为了证明它在 $(-1, 1)$ 上不一致收敛于 $S(x)$, 只要证明 $\exists \epsilon_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\exists x_0 \in (-1, 1)$, 使 $|S_n(x_0) - S(x_0)| \geq \epsilon_0$ 就行了. 由于级数的部分和 $S_n(x) = x^n$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 点 $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in (0, 1]$, 故有

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right)^n - 0 = \frac{1}{2}.$$

因此, 只要取 $\epsilon_0 \leq \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 在点 x_n 处都有 $|S_n(x_n) - S(x_n)| \geq \epsilon_0$, 从而就证明了题中的结论. ■

由定义 2.4 易知, 若级数(2.1)在 D 上一致收敛于 S , 则它必处处收敛于 S ; 反之, 结论不一定成立, 例 2.5 中的级数就属于这种情况.

用定义来判断一致收敛性是比较困难的, 下面介绍两个判别方法.

定理 2.1 (Cauchy 一致收敛原理) 函数项级数(2.1)在 D 上一致收敛的充要条件是

$\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall n, p \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, $\forall x \in D$, 恒有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \epsilon. \quad (2.5)$$

证 必要性 设级数(2.1)在 D 上一致收敛于 $S: D \rightarrow \mathbb{R}$, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall n, p \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, $\forall x \in D$, 恒有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |S_{n+p}(x) - S(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

从而有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq |S_{n+p}(x) - S(x)| + |S_n(x) - S(x)| < \epsilon.$$

充分性 设不等式(2.5)成立, 则由数列的 Cauchy 收敛原理, 对于任意固定

的 $x \in D$, 部分和数列 $\{S_n(x)\}$ 收敛, 即级数(2.1)的部分和函数列 $\{S_n\}$ 在 D 上处处收敛, 设其极限函数为 $S: D \rightarrow \mathbb{R}$. 在不等式(2.5)中令 $p \rightarrow \infty$, 便得: 当 $n > N(\epsilon)$ 时, $\forall x \in D$,

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \epsilon,$$

由定义 2.3, $\{S_n\}$ 在 D 上一致收敛于 S , 故级数(2.1)在 D 上一致收敛于 S . ■

推论 2.1 设级数(2.1)在 $D \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛, 则函数列 $\{u_n\}$ 在 D 上一致收敛于 0.

Cauchy 一致收敛原理给出了判别一致收敛的充要条件, 虽然应用起来并不方便, 却有着重要的理论意义. 下面我们利用 Cauchy 原理推出一致收敛性的一个常用的判别准则——Weierstrass 准则或称 **M 判别准则**.

定理 2.2 (M 判别准则) 如果存在一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 以及 $\forall x \in D$, 恒有 $|u_n(x)| \leq M_n$, 那么级数(2.1)在 D 上一致收敛.

证 由于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 根据常数项级数的 Cauchy 收敛原理, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall n, p \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 恒有

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+p} < \epsilon.$$

又已知 $\forall n \in \mathbb{N}_+$ 以及 $\forall x \in D$, $|u_n(x)| \leq M_n$, 故得

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| &\leq |u_{n+1}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)| \\ &\leq M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+p} < \epsilon. \end{aligned}$$

根据定理 2.1, 级数(2.1)在 D 上一致收敛. ■

应用 M 判别准则时, 关键在于通过对级数(2.1)的通项进行估计, 得到不等式 $|u_n(x)| \leq M_n$, 并且证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛. 通常称 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 为级数(2.1)的优级数或控制级数.

例 2.6 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证 由于 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 不等式

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}_+)$$

成立, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的, 根据 M 判别准则, 原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. ■

例 2.7 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在区间 $[\delta, +\infty)$ (其中 $\delta > 0$) 上一致收敛, 而在区间 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

证 由于 $\forall x \in [\delta, +\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$,

$$|u_n(x)| = n e^{-nx} \leq n e^{-n\delta},$$

记 $M_n = n e^{-n\delta}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} e^{-\delta} = e^{-\delta} < 1.$$

由检比法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 根据 M 判别准则(定理 2.2), 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在区间 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛.

为了证明该级数在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛, 根据推论 2.1, 只要证明它的通项函数列 $\{u_n\}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛于 0. 事实上, 对于 $\epsilon_0 = \frac{1}{e}$, 取 $x_n = \frac{1}{n} \in (0, +\infty)$, 则

$$|u_n(x_n)| = n e^{-n \frac{1}{n}} = n \geq \frac{1}{e} = \epsilon_0,$$

故 $\{u_n\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛于 0. ■

2.3 一致收敛级数的性质

现在证明, 具有一致收敛性的函数项级数的和函数保持了各相加函数的一些重要分析性质, 读者不难对具有一致收敛性的函数列写出相应的性质并证明之.

定理 2.3(和函数的连续性) 设 $u_n \in C(I)$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 I 上一致收敛于 $S: I \rightarrow \mathbb{R}$, 则和函数 $S \in C(I)$.

证 为证明 S 在 I 上连续, 只要证明 S 在任意一点 $x_0 \in I$ 处连续. 根据连续的定义, 也就是要证明: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in U(x_0, \delta) \cap I$ 时, 恒有

$$|S(x) - S(x_0)| < \epsilon.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 I 上一致收敛于 S , 根据定义 2.4, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall x \in I$, 恒有

$$|S(x) - S_N(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (2.6)$$

因而,对于任意的 $x_0 \in I$,也有

$$|S(x_0) - S_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (2.7)$$

又由 $u_n \in C(I)$ 得知,部分和 $S_N = \sum_{k=1}^N u_k$ 在 x_0 处连续,故对于上述 $\epsilon > 0$,必 $\exists \delta > 0$,使得 $\forall x \in U(x_0, \delta) \cap I$,有

$$|S_N(x) - S_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (2.8)$$

综合不等式(2.6),(2.7)与(2.8),就有: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使得当 $x \in U(x_0, \delta) \cap I$ 时,

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &\leq |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - S(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

从而定理得证. ■

由定理 2.3 得知

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) : S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x). \quad (2.9)$$

定理 2.4 (和函数的可积性) 设 $u_n \in C[a, b]$ ($n \in \mathbb{N}_+$),若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,则和函数 S 在区间 $[a, b]$ 上可积,且 $\forall x \in [a, b]$,

$$\int_a^x S(t) dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt. \quad (2.10)$$

证 由定理 2.3, $S \in C[a, b]$, 所以 S 在 $[a, b]$ 上可积.为了证明(2.10)式,由于 $\forall x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^x u_k(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x \sum_{k=1}^n u_k(t) dt \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x S_n(t) dt,$$

所以只要证明

$$\int_a^x S(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x S_n(t) dt$$

就行了. 由于

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x S(t) dt - \int_a^x S_n(t) dt \right| &= \left| \int_a^x [S(t) - S_n(t)] dt \right| \\ &\leq \int_a^x |S(t) - S_n(t)| dt \leq \int_a^b |S(t) - S_n(t)| dt, \end{aligned}$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 S , 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}_+$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, $\forall x \in [a, b]$ 恒有 $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, 因而当 $n > N(\varepsilon)$ 时,

$$\left| \int_a^x S(t) dt - \int_a^x S_n(t) dt \right| < \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon(b-a).$$

由 ε 的任意性得

$$\int_a^x S(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x S_n(t) dt. \quad \blacksquare$$

定理 2.5 (和函数的可导性) 设 $u_n \in C^{(1)}(I)$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 I 上处处收敛于函数 $S: I \rightarrow \mathbf{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 在 I 上一致收敛于 $\sigma: I \rightarrow \mathbf{R}$, 则和函数 $S \in C^{(1)}(I)$, 并且

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sigma(x). \quad (2.11)$$

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 在 I 上一致收敛于 σ , 且 u'_n 在 I 上连续, 根据定理 2.3, $\sigma \in C(I)$. 又由定理 2.4, $\forall x_0, x \in I$,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \sigma(t) dt &= \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u'_n(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x) - S(x_0). \end{aligned}$$

在上式中固定 x_0 , 对积分上限 x 求导得

$$\sigma(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x \sigma(t) dt \right) = S'(x).$$

因此, $S' \in C(I)$, 即 $S \in C^{(1)}(I)$, 并且

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \blacksquare$$

等式(2.9),(2.10)与(2.11)表明, 在相应定理的条件下, 对级数可以逐项求极限、逐项求积分与逐项求导数. 换句话说, 求极限、求积分与求导数都可以与求和交换次序, 关键的条件是一致收敛性. 但是, 一致收敛仅是保证这些结论成立的充分条件, 而不是必要条件.

例如, 例 2.7 已经证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛, 但它的和函数 S 在 $(0, +\infty)$ 上却是连续的. 事实上, 任取 $x_0 \in (0, +\infty)$, 必存在 $\delta > 0$, 使 $x_0 \in [\delta, +\infty)$. 由于该级数在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛, 因此, S 在 $[\delta, +\infty)$ 上连续, S 当然也在 x_0 连续. 根据 x_0 的任意性得知 $S \in C(0, +\infty)$.

例 2.8 证明: 函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续的导数, 并且 $f'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

证 只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足定理 2.5 的条件即可.

由于 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$,

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3},$$

并且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛, 根据 M 判别准则, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收

敛, 因而处处收敛. 又 $u_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3} \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛(例 2.6), 由定理 2.5, $f \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$, 并且

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^3} \right)' = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}. \blacksquare$$

习题 4.2

(A)

1. 说明函数项级数的逐点收敛与一致收敛的区别和联系，并且用 $\epsilon - N$ 语言表述级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在集合 $D \subset \mathbb{R}$ 上不收敛于函数 $S: D \rightarrow \mathbb{R}$.
2. 证明：若函数列 $\{f_n\}$ 在 $D \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛于 f ，则 $\{|f_n|\}$ 在 D 上一致收敛于 $|f|$.
3. 设 $|f_n|$ 在 D 上一致收敛于 f , $|g_n|$ 在 D 上一致收敛于 g ，证明 $\{f_n \pm g_n\}$ 在 D 上一致收敛于 $f \pm g$.
4. 证明： $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上逐点收敛于 0，但不一致收敛于 0.
5. 证明： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛，并求它的和函数.
6. 证明推论 2.1.
7. 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性：
- (1) $\frac{1}{1+x} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$, $x \in [0, 1]$;
 - (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$, $x \in (0, \infty)$;
 - (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;
 - (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}}$, $x \in [-1, 1]$;
 - (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} 2^{-nx}$, 1° $x \in [\delta, +\infty]$ ($\delta > 0$); 2° $x \in (0, +\infty)$;
 - (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$, $x \in [-\delta, \delta]$ ($\delta > 0$).
8. 证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.
9. 证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $[-q, q]$ ($0 < q < 1$) 上一致收敛，并且
- (1) $\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$, $|x| < 1$;
 - (2) $\frac{1}{(1-x)^2} - 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$, $|x| < 1$.
10. 证明： $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导数，并且
- $$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

11. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $D \subset \mathbb{R}$ 上处处收敛于 S , 并且在 D 上一致收敛, 证明: 该级数在 D 上必一致收敛于 S .

12. (函数列的 Cauchy 一致收敛原理) 设 $\{f_n\}$ 是集合 D 上的一个函数列, 证明: $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛的充要条件为 $\{f_n\}$ 是 D 上的基本列, 即

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall m, n > N, \forall x \in D, \text{恒有 } |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

(B)

1. 对函数列 $\{f_n\}$ 写出与定理 2.3、定理 2.4 和定理 2.5 相对应的定理, 并证明之.

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在开区间 (a, b) 内的任一闭子区间上一致收敛, 则称该级数在 (a, b) 上内闭一致收敛. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 (a, b) 上内闭一致收敛, 则它在 (a, b) 内逐点收敛.

3. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n} \right)^n$, 证明:

- (1) 该级数的收敛区域为 $(-1, 1)$;
- (2) 该级数在 $(-1, 1)$ 上内闭一致收敛;
- (3) 该级数的和函数在 $(-1, 1)$ 内连续.

4. 证明: 若把定理 2.3 中在区间 I 上一致收敛的条件改为在 I 上内闭一致收敛, 则结论仍然成立.

5. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

6. 如果 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调函数, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 的端点绝对收敛, 证明它在 $[a, b]$ 上绝对一致收敛(即绝对值级数一致收敛).

第三节 幂 级 数

在本节和下一节中将研究两类常用的函数项级数——幂级数与 Fourier 级数. 本节研究幂级数的收敛性、幂级数在收敛区间内的性质以及函数展开为幂级数的问题.

3.1 幂级数及其收敛半径

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (3.1)$$

或者

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \quad (3.2)$$

的函数项级数称为幂级数,其中 x_0 与系数 a_n ($n=0,1,2,\dots$) 都是实常数. 在级数(3.2)中,令 $u=x-x_0$, 它就变成(3.1)式的形式. 因此,只要讨论形如(3.1)的幂级数就行了.

幂级数是常用的一类函数项级数,它除了具有函数项级数的共同性质外,由于它的通项是幂函数,因此,还有一些特殊的性质和优点. 例如,幂级数(3.1)的部分和 $S_n(x)=\sum_{k=0}^n a_k x^k$ 是关于 x 的一个 n 次多项式,如果在集合 $D \subset \mathbb{R}$ 上, $\{S_n\}$ 处处收敛于和函数 S ,那么, $\forall x \in D$,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

这样,就像在第二章第五节中所指出的那样,可以用 n 次多项式 $S_n(x)$ 任意逼近和函数 $S(x)$,在函数逼近理论和近似计算中,这是一件很有意义的事.

我们首先研究幂级数的收敛性有些什么特点.

显然,当 $x=0$ 时,幂级数(3.1)必定收敛,就是说,幂级数总有收敛点. 进一步的研究发现幂级数的收敛性还有下面的重要性质.

定理 3.1 (Abel 定理) 对于幂级数(3.1),下列命题成立:

- (1) 若它在点 $x_0 \neq 0$ 处收敛,则当 $|x| < |x_0|$ 时,该级数绝对收敛;
- (2) 若它在点 $\tilde{x}_0 \neq 0$ 处发散,则当 $|x| > |\tilde{x}_0|$ 时,该级数发散.

证 (1) 由已知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$, 因而数列 $|a_n x_0^n|$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 恒有 $|a_n x_0^n| \leq M$. 于是当 $|x| < |x_0|$ 时, 有

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

由于 $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, 所以等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛. 根据比较准则, 当 $|x| < |x_0|$ 时, 级数(3.1)绝对收敛.

(2) 用反证法. 假定存在 x_1 ($|x_1| > |\tilde{x}_0|$), 使级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛, 由(1)得知, 级数(3.1)在 \tilde{x}_0 处绝对收敛, 这与假设相矛盾. ■

从 Abel 定理可以看到, 幂级数(3.1)的收敛区间具有关于原点 $x=0$ 的对称性. 利用这个定理, 可以进一步讨论它的收敛性的具体情况. 由于幂级数(3.1)在 $x=0$ 处收敛, 因此, 它的收敛域是非空的. 如果它在任何 $x \neq 0$ 处都发散, 那么

它的收敛域仅由原点 $x=0$ 组成;如果存在 $x_0 \neq 0$,使该级数在 x_0 处收敛,则由 Abel 定理,它在开区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内绝对收敛.使级数(3.1)收敛的点可能很多,令

$$D = \{ |x| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 收敛} \}.$$

若 D 无上界,则 $\forall x \in \mathbf{R}, \exists x_0: |x_0| \in D$, 使 $|x| < |x_0|$. 由于级数(3.1)在 x_0 处收敛,根据 Abel 定理,它在 x 处也收敛.因此,级数(3.1)在任何 $x \in \mathbf{R}$ 处都收敛.

若 D 有上界,则必有上确界,设 $\sup D = R$. 如果 $R = 0$,即 $D = \{0\}$,这就是前面已指出的收敛域仅由 $x=0$ 组成的情况.如果 $R > 0$,那么由 Abel 定理,当 $|x| > R$ 时,级数发散;当 $|x| < R$ 时,级数必绝对收敛.事实上,取 $\epsilon = R - |x|$,由上确界的定义,必存在 $x_0: |x_0| \in D$,使 $|x_0| > R - \epsilon = |x|$. 由于级数(3.1)在 x_0 处收敛,根据 Abel 定理,它在 x 处绝对收敛.故当 $|x| < R$ 时,级数绝对收敛.

由以上讨论可得:

定理 3.2 幂级数(3.1)的收敛性仅有三种可能:

- (1) 对于任何 $x \in \mathbf{R}$ 它都收敛,并且绝对收敛;
- (2) 仅在 $x=0$ 点收敛;
- (3) 存在一个正数 R ,当 $|x| < R$ 时绝对收敛,当 $|x| > R$ 时发散.

定义 3.1 定理 3.2 中的正数 R 称为幂级数(3.1)的收敛半径,对应的开区间 $(-R, R)$ 称为它的收敛区间.

上面已经指出,幂级数(3.1)在收敛区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛,在收敛区间之外发散(图 3.1).为统一起见,对于定理 3.2 中的情况(1),我们说(3.1)的收敛半径 $R = +\infty$,收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$;对于情况(2), $R = 0$,收敛域 $D = \{0\}$;对于情况(3),收敛区间为 $(-R, R)$.至于在两个端点 $x = \pm R$ 处级数的敛散性如何,定理 3.2 没有给出任何结论,需要对具体幂级数作具体分析.读者还应注意,不要把收敛区间(指开区间 $(-R, R)$)与收敛域混为一谈.对幂级数而言,收敛域可能是包含收敛区间端点的闭区间或半开半闭区间,甚至可能是仅由 $x=0$ 构成的单点集.

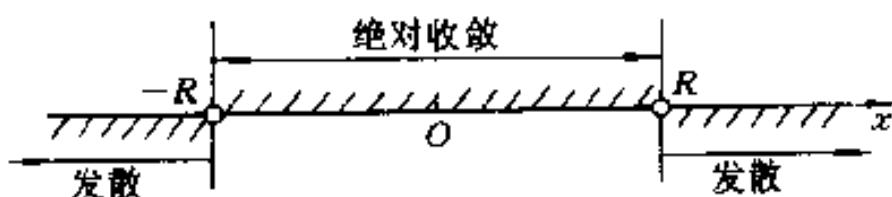


图 3.1

收敛区间为开区间 $(-R, R)$ ($R = 0$ 除外) 是幂级数收敛性的一大优点, 要求幂级数的收敛区间, 只要求收敛半径就行了. 那么, 如何计算幂级数的收敛半径呢? 下面仅介绍一个常用的方法.

定理 3.3 设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若 $a_n \neq 0$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ 存在或为 $+\infty$, 则收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (3.3)$$

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = L$, 利用正项级数的检比法, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (3.4)$$

(1) 若 $0 < L < +\infty$, 则 $\forall x \neq 0$, (3.4) 式的右端等于 $\frac{|x|}{L}$, 故当 $|x| < L$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 当 $|x| > L$ 时, 该级数发散, 因此 $R = L$.

(2) 若 $L = 0$, 则 $\forall x \neq 0$, (3.4) 式右端等于 $+\infty$, 因此除 $x = 0$ 外, 该级数都发散, 故 $R = 0 \leq L$.

(3) 若 $L = +\infty$, 则 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, (3.4) 式右端等于 0. 因此, 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛, 故 $R = +\infty = L$. ■

例 3.1 求下列幂级数的收敛区间与收敛域:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)3^n}; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-1)^n.$$

解 (1) 由于

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)3^{n+1}}{(n+2)3^n} = 3,$$

所以它的收敛区间为 $(-3, 3)$. 又在 $x = \pm 3$ 处, 级数分别变为两个常数项级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+2} + \cdots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+2} + \cdots,$$

并且前者发散, 后者收敛. 所以原级数的收敛域为 $[-3, 3]$.

(2) 由于

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty,$$

所以该级数的收敛区间与收敛域都是 $(-\infty, +\infty)$.

(3) 由于

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{n+1}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n (-2)} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

所以该级数的收敛区间为 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

在 $x = \frac{2}{3}$ 处, 级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n},$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 也收敛(利用检比法), 故原级数在 $x = \frac{2}{3}$ 处收敛.

在 $x = \frac{4}{3}$ 处, 级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n},$$

它可以看成是发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 之和, 所以是发散级数.

因此, 原级数的收敛域为 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. ■

在定理 3.3 中, 要求所给级数所有项的系数 $a_n \neq 0$. 如果其中有无穷多项的系数 $a_n = 0$, 它就叫做缺项级数. 此时, 收敛半径 R 不能用公式(3.3)求得, 但可直接应用常数项级数中的检比法来确定.

例 3.2 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n(n+1)^2}$ 的收敛区间与收敛域.

解 该级数仅含偶次幂项, 即 $a_{2k-1} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). 记 $u_n(x) = \frac{x^{2n}}{4^n(n+1)^2}$, 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{4^{n+1}(n+2)^2} \cdot \frac{4^n(n+1)^2}{x^{2n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 \frac{|x|^2}{4} = \frac{|x|^2}{4},\end{aligned}$$

根据根比法, 当 $|x| < 2$ 时, 级数绝对收敛; 当 $|x| > 2$ 时, 级数发散. 因此, 所给级数的收敛半径 $R = 2$, 收敛区间为 $(-2, 2)$.

又在 $x = \pm 2$ 处, 级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, 由于它是收敛的, 所以原级数收敛域为 $[-2, 2]$. ■

3.2 幂级数的运算性质

根据常数项级数的性质 1.1 和定理 1.11, 易得幂级数下面的运算性质.

定理 3.4 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2 , 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则在它们公共的收敛区间 $(-R, R)$ 上, 有:

(1) 级数 $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 收敛, 并且

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n \quad (\text{其中 } \alpha, \beta \in \mathbb{R});$$

(2) 它们的乘积级数收敛, 并且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$.

两个收敛幂级数的相加减或相乘所得到的幂级数, 其收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$. 例如, 考察幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+2^n)x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-2^n)x^n$, 它们的收敛半径分别为

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^n}{1+2^{n+1}} = \frac{1}{2}, \quad R_2 = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1-2^n}{1-2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

而将它们相加所得到的级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(1+2^n) + (1-2^n)] x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

其收敛半径 $R = 1$, 故 $R > \min\{R_1, R_2\}$.

为了研究幂级数的分析性质(连续性、可积性与可导性等), 先证明幂级数的一致收敛性定理.

定理 3.5 (内闭一致收敛性) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , $0 < R \leq +\infty$, 则它在其收敛区间 $(-R, R)$ 内的任何闭子区间 $[a, b]$ 上都是一致收敛的.

证 令 $r = \max\{|a|, |b|\}$, 由于 $[a, b] \subset (-R, R)$, 所以 $0 < r < R$. 根据定理 3.2, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 绝对收敛, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ 收敛. 又当 $|x| \leq r$ 时, $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 由 M 判别准则, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上一致收敛. 因为 $-r \leq a < b \leq r$, 所以它在 $[a, b]$ 上一致收敛. ■

应当注意, 幂级数在它的整个收敛区间 $(-R, R)$ 上不一定一致收敛. 例如, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在其收敛区间 $(-1, 1)$ 上不是一致收敛的, 这是因为它的通项 x^n 在 $(-1, 1)$ 内不一致收敛于 0(见例 2.5).

定理 3.6 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $S(x)$, 收敛半径为 R , 则下列命题成立:

- (1) $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是连续的, 即 $S(x) \in C(-R, R)$;
- (2) $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内有连续的导数, 并且可以逐项求导, 即 $\forall x \in (-R, R)$, 有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad (3.5)$$

求导后所得幂级数(3.5)与原级数有相同的收敛半径;

- (3) $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可积, 并且可以逐项积分, 即 $\forall x \in (-R, R)$, 有

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (3.6)$$

积分后所得幂级数(3.6)与原级数有相同的收敛半径.

证 仅证明命题(1), 关于命题(2)与(3)的证明, 可参看参考文献[10]. 为了证明 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续, 只要证明它在任一点 $x_0 \in (-R, R)$ 连续就行了. 由于 $x_0 \in (-R, R)$, 故必存在 $r > 0$, 使 $|x_0| < r < R$. 由定理 3.5, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上一致收敛于 $S(x)$. 又由于级数的每一项 $a_n x^n$ 都是连续

函数,根据定理 2.3,和函数 $S(x)$ 在 $[-r, r]$ 上连续,因而在 x_0 处连续. ■

综上所述,幂级数的和函数不但具有在收敛区间内的连续性、可导性(实际上任意阶可导的)与可积性,而且能像多项式一样地进行加法和乘法运算,可以逐项求导,逐项积分.这些性质在幂级数求和以及将函数展开为幂级数等问题中都有十分重要的应用.

例 3.3 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

的和函数与收敛域.

解 由于

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

对上式两端逐项积分,得

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

又当 $x=1$ 时,级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, 它是收敛的,并且它的和为 $\ln 2$ (见本章例 1.11),因此,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的和函数为 $\ln(1+x)$,其收敛域为 $(-1, 1]$.
从而可知

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1]. \quad (3.7)$$

例 3.4 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数.

解 设该级数的和函数为 $S(x)$,则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$

两边逐项求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

所以该级数的和函数 $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$. ■

例 3.5 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的和函数.

解 在例 3.1 中已经求出该级数的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$. 设其和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

对上式两边逐项求导得

$$\frac{dS(x)}{dx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = S(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

用分离变量法解此一阶微分方程得

$$\ln |S(x)| = x + C_1,$$

或 $S(x) = Ce^x$ (C 为待定常数, $C = \pm e^{C_1}$).

由于 $S(0) = 1$, 代入上式得 $C = 1$, 所以 $S(x) = e^x$ 便是所求的和函数. 从而有

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (3.8)$$

3.3 函数展开成幂级数

将函数 f 展开为幂级数的问题, 就是在 x_0 的某邻域内将 f 表示为一个收敛的幂级数的问题, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R). \quad (3.9)$$

由于幂级数形式简单, 在收敛区间内具有像多项式一样的运算性质, 因此, f 如能展开为幂级数, 那么在收敛区间内就能用关于 $x - x_0$ 的多项式来逼近 f . 研究函数的性质, 研究函数 f 能否展开为幂级数, 需要解决两个问题: 一是如果 f 能展开为 $x - x_0$ 的幂级数, 系数 a_n 如何确定; 二是(3.9)式右端的幂级数收敛于 f 的条件是什么?

先讨论第一个问题. 假定 f 能展开为 $x - x_0$ 的幂级数, 即(3.9)式成立. 根

据幂级数的性质, f 在收敛区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内任意阶可导, 并且可对(3.9)式两端逐项求导, 从而, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 都有:

在以上诸式中令 $x = x_0$, 便得

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0), \dots, a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0), \dots$$

将求得的系数代入(3.9)式,得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R). \quad (3.10)$$

从而得知,如果函数 f 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内能展开成 $x - x_0$ 的幂级数,那么, f 在 x_0 处具有任意阶导数,即 f 是 C^∞ 类函数,并且该级数的系数 a_n 由下式唯一确定:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n=0,1,2,\dots. \quad (3.11)$$

因为由(3.11)式所确定的系数 a_n 就是 f 在 x_0 处的 Taylor 系数, 所以称(3.10)式右端的幂级数为 f 在 x_0 处的 Taylor 级数.

以上讨论说明,如果 f 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内能展开为 $x - x_0$ 的幂级数,那么该级数就是 f 在 x_0 的 Taylor 级数,而且只要 f 属于 C^∞ 类函数,就可形式地写出它的 Taylor 级数,即

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

该级数是否收敛于 $f(x)$ 呢? 在什么条件下收敛于 $f(x)$ 呢? 这就要讨论第二个问题. 在第二章中已经讲过 Taylor 公式, 即若 f 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内 $n+1$ 阶可导, 则 $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x),$$

其中, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (ξ 介于 x_0 与 x 之间).

将 f 在 x_0 处的 Taylor 公式与 f 在 x_0 处的 Taylor 级数加以比较, 易见, Taylor 公式中关于 $x - x_0$ 的 n 次多项式就是 f 在 x_0 处 Taylor 级数的部分和 $S_{n+1}(x)$. 因此, 若 $f: (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbf{R}$ 是 C^∞ 类函数, 则 f 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内能展开为它在 x_0 处的 Taylor 级数的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}(x) = f(x), \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R),$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

从而得

定理 3.7 设 $f: (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbf{R}$ 是 C^∞ 类函数, 则 f 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内能展开为它在 x_0 处的 Taylor 级数的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

利用定理 3.7, 不难得到函数展开为幂级数的一个充分条件, 证明由读者完成.

推论 3.1 设 $f: (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbf{R}$ 是 C^∞ 类函数, 如果 $|f^{(n)}|$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内是一致有界的, 即 $\exists K > 0$, 使得 $\forall n \in \mathbf{N}$ 与 $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 都有 $|f^{(n)}(x)| \leq K$, 那么 f 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内必能展开为它在 x_0 处的 Taylor 级数.

如果函数 $f: (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbf{R}$ 能展开成它在 x_0 处的 Taylor 级数, 即等式(3.10)成立, 则称该等式为 f 在 x_0 处的 Taylor 展开式. f 在 $x_0 = 0$ 处的 Taylor 展开式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

称为 f 的 Maclaurin 展开式, 右端的级数称为 Maclaurin 级数.

下面给出几个常用初等函数的 Maclaurin 展开式.

指数函数 e^x 的展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

这个等式已由例 3.5 建立(见(3.8)式). 由于

$$f^{(n)}(0) = (e^x)^{(n)}|_{x=0} = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

所以上式中的系数就是 e^x 在 $x=0$ 处的 Taylor 系数. 根据函数展开为幂级数的唯一性, 它就是 e^x 的 Maclaurin 展开式.

正弦函数 $\sin x$ 的展开式

设 $f(x) = \sin x$, 由于

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

所以

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

又因为 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, 由推论 3.1 得

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

余弦函数 $\cos x$ 的展开式 对上式逐项求导得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

对数函数 $\ln(1+x)$ 的展开式 由例 3.3 中的(3.7)式及函数展开为幂级数的唯一性得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

归纳上面求得几个初等函数 Maclaurin 展开式所用的方法, 大体上可分为两类:(1) 基本方法. 就是直接算出 f 的 Taylor 系数, 得到它的 Taylor 级数. 然后验证 f 满足定理 3.7 或推论 3.1 的条件. 例如, 求正弦函数的展开式用的就是这种方法. 如果 f 是比较复杂的函数, 用基本方法往往比较困难.(2) 间接方法. 根据函数展开为幂级数的唯一性, 从某些已知的函数展开式, 利用对收敛幂级数进行四则运算, 逐项求导, 逐项积分以及变量代换等, 求得所给函数的 Taylor 展开式. 例如, 求余弦函数展开式用的就是这种方法. 间接方法较为方便快捷, 是求函数的 Taylor 展开式的常用方法.

例 3.6 将 $f(x) = \frac{1}{1-x-2x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解 由于

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right),$$

而

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 2^2 x^2 + \cdots + 2^n x^n + \cdots, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3} x^n, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 3.7 求函数 $\arctan x$ 的 Maclaurin 展开式.

解 由于

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

令 $x = t^2$, 则

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, \quad t \in (-1, 1).$$

逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

幂函数 $(1+x)^\alpha$ 的展开式 ($\alpha \in \mathbb{R}$) 设 $f(x) = (1+x)^\alpha$, 则

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), \cdots, \\ f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \cdots, \end{aligned}$$

从而得知 f 的 Maclaurin 级数为

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots.$$

利用公式(3.3)求得它的收敛半径 $R=1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$. 假设在 $(-1, 1)$ 内它的和函数为 $S(x)$, 即

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \\ &\quad x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} S'(x) &= \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots \\ &\quad + \alpha[1 + (\alpha-1)x + \cdots + \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots]. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} (1+x)S'(x) &= \alpha \left\{ 1 + [(\alpha-1)+1]x + \cdots + \left[\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \right] x^n + \cdots \right\} \\ &= \alpha [1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots] \\ &= \alpha S(x), \end{aligned}$$

所以 $S(x)$ 满足一阶微分方程：

$$S'(x) = \frac{\alpha}{1+x}S(x)$$

及初值条件 $S(0)=1$. 解之可得 $S(x)=(1+x)^\alpha$, 因此,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

上式右端的级数称为二项式级数. 当 α 是正整数时, 它就是通常的二项式公式.

在上面的展开式中取 α 为不同的值, 就可以得到不同幂函数的 Maclaurin 展开式. 例如, 取 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2(2!)}x^2 - \cdots + \\ &(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n(n!)}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2(2!)}x^4 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n(n!)}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1),$$

上式两端逐项积分又得

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot (2!)} \frac{x^5}{5} + \cdots + \\ \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n (n!)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

3.4 幂级数的应用举例

幂级数的应用是很广泛的,它可以用于近似计算函数值,近似计算定积分,也是求解微分方程的一种有效方法.例如,在无线电技术中经常遇到的 Bessel 函数、Legendre 函数等都是用幂级数方法求得的相应的微分方程的解,而且它们都是用幂级数表示的特殊函数.某些实际问题还可以直接利用幂级数理论解决.本段主要说明它在近似计算中的应用.

前面已经指出,如果函数 f 能展开为幂级数,那么在收敛区间内就能用级数的部分和(即 n 阶 Taylor 多项式)来近似表示函数 f ,多项式的项数越多,精度越高.由于级数收敛于 f ,所以无论精度要求多高,只要项数足够多,总是可以达到的.

例 3.8 计算 $\ln 2$ 的近似值,使误差不超过 10^{-4} .

解 由于对数函数 $\ln(1+x)$ 的展开式在 $x=1$ 也成立,所以有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \cdots.$$

如果用右端级数的前 n 项之和作 $\ln 2$ 的近似值,根据交错级数理论(定理 1.8),为使绝对误差小于 10^{-4} ,需要算一万项,计算量太大.这是由于这个级数的收敛速度太慢.利用 $\ln \frac{1+x}{1-x}$ 的展开式可以加快收敛速度.在 $\ln(1+x)$ 的展开式中,将 x 换成 $-x$,得

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots, \quad x \in (-1, 1),$$

所以

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \right), \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

令 $\frac{1+x}{1-x} = 2$, 则 $x = \frac{1}{3}$, 代入上式得

$$\ln 2 = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} \right)^7 + \cdots + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{3} \right)^{2n-1} + \cdots \right].$$

由于

$$|R_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{2k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} < \frac{1}{3n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} < \frac{1}{n \cdot 9^n},$$

易见,只要取 $n=4$,就有 $|R_n| < 10^{-4}$,达到所要求的精度,并且由此可求得

$$\ln 2 \approx 0.693\ 14.$$

例 3.9 计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 的近似值,精确到 10^{-4} .

解 由于被积函数 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数,所以该积分无法用 Newton - Leibniz 公式计算. 然而因为

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

两端逐项积分,得

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{13 \cdot 6!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \cdots.$$

又因为 $\frac{1}{15 \cdot 7!} < 10^{-4}$,根据交错级数理论,只要取前七项就可以达到精度要求. 经计算可得

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.746\ 84.$$

例 3.10 某君要在银行存入一笔钱,希望在第 n 年末提出 n^2 元 ($n=1, 2, \dots$),并且永远按此规律提取,问事先需要存入多少本金?

解 目前国内银行尚无这种存款与付款方式,它属于财务管理中不等额现金流现值的计算问题.

设本金为 A ,年利率为 i ,按复利的计算方法,第 1 年末的本利和(即本金与利息之和)为 $A(1+i)$,第 n 年末的本利和为 $A(1+i)^n$ ($n=1, 2, \dots$). 假定存 n 年的本金为 A_n ,则第 n 年末的本利和应为 $A_n(1+i)^n$ ($n=1, 2, \dots$).

为保证某君的要求得以实现,即第 n 年末提取 n^2 元,那么,必须要求第 n 年末的本利和最少应等于 n^2 元,即 $A_n(1+i)^n = n^2$ ($n=1, 2, \dots$). 也就是说,应当满足如下条件:

$$A_1(1+i)=1, \quad A_2(1+i)^2=4, \quad A_3(1+i)^3=9, \dots.$$

因此,第 n 年末要提取 n^2 元时,事先应存入的本金 $A_n = n^2(1+i)^{-n}$. 如果还要求此种提款方式能永远继续下去,则事先需要存入的本金总数应等于

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1+i)^{-n} = \frac{1}{1+i} + \frac{4}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{n^2}{(1+i)^n} + \cdots.$$

读者不难验证,此级数是收敛的,因此,为了求得本金总数,需要计算它的和.

由于上述常数项级数是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的和函数在 $x = \frac{1}{1+i}$ 处的值,因此,应当先求该幂级数的和函数. 由于

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1),$$

逐项求导得

$$-\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

从而

$$-\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad x \in (-1, 1),$$

对上式两端再逐项求导,得

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1, 1).$$

在上式中取 $x = \frac{1}{1+i}$ 便得所求的本金总数,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1+i)^{-n} = \frac{(1+i)(2+i)}{i^3}.$$

假定年利率为 10%, 不难算得需事先存入 2 310 元本金. ■

在例 3.10 中, 如果换一种提款方式, 例如, 第 n 年末提取 n 元或 n^3 元等等, 也可求得事先应存入的本金数. 但是, 并非按任何提款方式都是可以实现的. 例如, 第 n 年末提取 $(1+i)^n$ 元, 永远按此规律提取是不能实现的. 因为这时需要存入的本金数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n (1+i)^{-n} = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots,$$

该级数是发散的, 本金数为无穷大.

最后, 我们证明一个今后常用的 Euler 公式:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

其中, $x \in \mathbf{R}$, $i = \sqrt{-1}$ 是虚单位.

前面介绍的级数理论都是在实数集内讨论的, 实际上, 它们都可以推广到复数集中. 由于篇幅所限, 不能仔细讨论, 有兴趣的读者可以阅读复变函数方面的书.^①

由于

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

将它推广到复数集内, 我们定义

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < +\infty,$$

右端的幂级数在复平面内处处绝对收敛. 令 $z = ix$, 则

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \cdots. \end{aligned}$$

由于绝对收敛级数具有可交换性, 所以, 将上式右端重排便得

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

类似地,

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

将它们相加, 又有

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

这两个等式也称为 Euler 公式.

^① 参阅西安交通大学高等数学教研室编《复变函数》(第四版), 高等教育出版社, 1996

习题 4.3

(A)

1. 为什么说 Abel 定理是研究幂级数收敛性的一个基本定理? 设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$, 它在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=3$ 处发散, 这可能吗?

2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛, 你能确定该幂级数的收敛半径吗?

3. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$, 有人采用下面的方法求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

的收敛半径, 你认为对吗? 若不对, 指出错在何处:

由于 $R=1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1,$$

从而得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

4. 求下列幂级数的收敛区间与收敛区域:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n+1} x^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \sqrt{n}} x^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} (x+2)^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n-1};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (2x+1)^n.$$

5. 指出下列推导有什么错误?

由于

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

$$\frac{-x}{1-x} = -\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n} + \cdots,$$

两式相加得

$$\cdots + \frac{1}{x^n} + \cdots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 0.$$

6. 求下列函数的 Maclaurin 展开式:

(1) $x e^{-x^2}$;

(2) $\sin^2 x$;

(3) $\operatorname{ch} \frac{x}{2}$;

(4) $\arcsin x$;

(5) $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$;

(6) $\frac{x}{1+x+2x^2}$;

(7) $\ln(1-3x+2x^2)$;

(8) $\sqrt[3]{27-x^3}$.

7. 设 $f(x) = x^3 e^{-x^2}$, 求 $f^{(n)}(0)$ ($n=2,3,\dots$).

8. 求下列函数在给定点 x_0 处的 Taylor 展开式:

(1) $e^x - 1$, $x_0 = 2$;

(2) $\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

(3) $\ln x$, $x_0 = 1$;

(4) $\frac{x}{x^2 - 5x + 6}$, $x_0 = 5$;

(5) $\frac{1}{x^2}$, $x_0 = 3$;

(6) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = 0$;

(7) $\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x = x$, $x_0 = 0$;

(8) $\frac{x}{(1-x^2)^2}$, $x_0 = 0$.

9. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n+1) \frac{x^{2n}}{3^{2n-1}}$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}$.

10. 利用幂级数求下列常数项级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{n-1}}$;

(2) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)n2^n}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 - n + 1) \frac{1}{2^n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$.

11. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1} x^{n-1}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 内连续;

(2) 计算 $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x) dx$.

12. 说明函数 f 在 x_0 处的 Taylor 公式, Taylor 级数以及 Taylor 展开式有什么区别和联系?

13. 求下列各数的近似值, 精确到 10^{-4} :

(1) e ;

(2) $\cos 10^\circ$;

(3) $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$;

(4) $\int_0^4 \sqrt{1+x^3} dx$.

14. 利用 Euler 公式将 $e^x \cos x$ 与 $e^x \sin x$ 展开成 x 的幂级数.

(B)

1. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-R, R)$, $0 < R < +\infty$, 并且在 $x = -R$ 处绝对收敛, 证明它在 $[-R, R]$ 上一致收敛.
2. 证明: 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的和函数在 x_0 的邻域内恒等于 0, 那么它的所有系数 a_n 都等于 0.
3. 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1, 1)$ 上连续.

第四节 Fourier 级数

本节讨论另一类在理论上和应用中都有重要价值的函数项级数——三角级数, 它的一般形式是

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4.1)$$

其中系数 a_0, a_n 和 b_n ($n = 1, 2, \dots$) 都是实常数. 由于三角级数的通项是具有周期性的三角函数(正弦与余弦函数), 因此, 它是研究具有周期性物理现象的重要数学工具. 本节主要讨论怎样将一个已知函数表示为三角级数的问题, 也就是将函数展开为 Fourier 级数的问题.

4.1 周期函数与三角级数

在科学技术中, 常常会遇到各种各样的周期现象, 凡周期现象在数学上都可用周期函数来描述. 最简单的周期函数是正弦函数(或余弦函数), 也就是物理中的所谓正弦波或谐波

$$y = A \sin(\omega x + \varphi),$$

其中 A, ω 和 φ 分别叫做振幅、频率和初位相. 它的周期是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 当 $\omega = 1$ 时, $T = 2\pi$.

考虑如下一列正弦波:

$$A_1 \sin(x + \varphi_1), A_2 \sin(2x + \varphi_2), \dots, A_n \sin(nx + \varphi_n), \dots,$$

它们的共同周期为 2π . 易见, 两个周期为 2π 的正弦波的迭加是一个周期为 2π 的非正弦周期波. 一般, n 个周期为 2π 的正弦函数与常数 A_0 之和

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(kx + \varphi_k)$$

(称为 n 次三角多项式)也是一个以 2π 为周期的周期函数. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$, 也就是说, 级数

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n)$$

收敛于 $S(x)$, 那么和函数 $S(x)$ 也是以 2π 为周期的周期函数.

现在自然要提如下相反的问题: 能否把一个给定的以 2π 为周期的周期函数 $f(x)$ 表示(展开)成一列正弦函数之和呢? 也就是说表示式

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n) \quad (4.2)$$

能否成立呢? 如果能, 那么就可以通过简单的正弦函数来研究复杂的周期函数 $f(x)$ 的性质, 用 n 次三角多项式来任意逼近周期函数 $f(x)$. 在物理上, 就可以用简单的正弦波的迭加来研究各种复杂的周期现象, 这是一件非常有意义的事情. 下面来讨论这个问题. 由于

$$\begin{aligned} A_n \sin(nx + \varphi_n) &= A_n (\sin nx \cos \varphi_n + \cos nx \sin \varphi_n) \\ &= a_n \cos nx + b_n \sin nx, \end{aligned}$$

其中 $a_n = A_n \sin \varphi_n$, $b_n = A_n \cos \varphi_n$ ($n = 1, 2, \dots$). 为与今后得到的系数公式统一见, 记 $A_0 = \frac{a_0}{2}$, 那么 (4.2) 式右端的级数就变成三角级数 (4.1) 的形式了. 因此, 上面的问题就变为能否将一个周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 展开为形如 (4.1) 式的三角级数. 为了研究这个问题, 必须解决两个问题:

- (1) $f(x)$ 满足什么条件时, 才能展开成三角级数 (4.1)?
- (2) 如果 $f(x)$ 能展开成三角级数, 展开式中的系数 a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) 如何计算?

4.2 三角函数系的正交性与 Fourier 级数

首先讨论问题(2). 我们知道, 三角级数 (4.1) 是由函数系

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$$

构成的, 通常称之为 **三角函数系**. 这个函数系有一个非常重要的性质: 其中任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分等于零, 而任一函数的平方在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都不等于零, 即 $\forall n, m \in \mathbb{N}_+$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0; \\
 & \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, \quad |(m \neq n) \\
 & \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0; \\
 & \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi.
 \end{aligned}$$

读者不难用积分法直接证明上述等式,而且,根据三角函数的周期性,它们在任一长为一个周期的区间上也成立. 三角函数系数的这个性质称之为正交性.

利用三角函数的正交性可以解决问题(2). 设 f 是以 2π 为周期的函数,由于周期性,只要在 $[-\pi, \pi]$ 上讨论就可以了. 假定 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上能展开为三角级数,即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (4.3)$$

并且右端级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 f . 在(4.3)式两端同乘以 $\cos kx$ ($k = 0, 1, 2, \dots$),在 $[-\pi, \pi]$ 上逐项积分,得

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right).
 \end{aligned}$$

根据正交性,当 $k = 0$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi a_0,$$

从而得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

当 $k \neq 0$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi a_k,$$

从而得

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

类似地,用 $\sin kx$ 同乘(4.3)式两端,并逐项积分可得

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k=1,2,\dots).$$

将上面的结果合并起来就得到系数公式：

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k=0,1,2,\dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k=1,2,\dots).$$

(4.4)

称(4.4)式为 Euler - Fourier 公式, 系数由这个公式确定的三角级数称为 f 的 Fourier 级数, 这些系数称为 f 的 Fourier 系数.

系数公式(4.4)是在 f 能展开为(4.3)式并且右端的三角级数一致收敛于 f 的条件下求得的. 但从公式本身来看, 只要 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 就可以按此公式计算出系数 a_k 与 b_k , 并唯一地写出 f 的 Fourier 级数, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

至于这个级数是否收敛, 如果收敛, 是否收敛于 f 的问题还需要进一步研究. 一旦证明了该级数收敛, 而且收敛于 f 之后, 就可以把符号“ \sim ”换成等号“ $=$ ”. 因此, 下面我们来研究问题(1).

4.3 周期函数的 Fourier 展开

函数的 Fourier 级数的收敛性问题是一个相当复杂的理论问题, 至今还没有便于应用的判别收敛性的充要条件, 下面我们不加证明地给出一个应用较为广泛的充分条件. 为此, 先说明什么叫分段单调函数. 设有函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 如果在 $[a, b]$ 内插入 $n-1$ 个分点:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

能使 f 在每个开子区间 (x_{k-1}, x_k) 上都单调, 那么就称 f 在 $[a, b]$ 上分段单调(图 4.1).

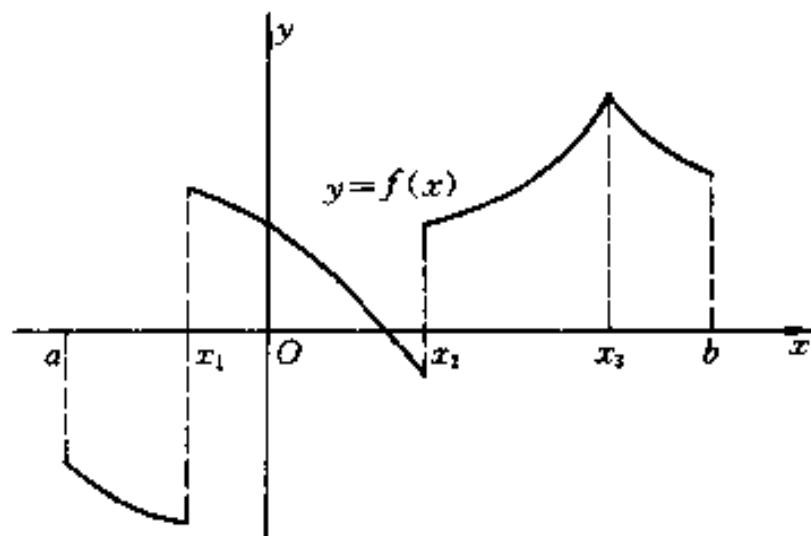


图 4.1

Dirichlet 定理 设函数 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段单调, 而且除有限个第一类间断点外是连续的, 那么它的 Fourier 级数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上收敛, 其和函数为:

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 是 } f \text{ 的连续点,} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 是 } f \text{ 的间断点,} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm \pi. \end{cases}$$

为方便计, 定理中的三种收敛情形都说是 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于 f , 或者 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上被展开为 Fourier 级数.

定理中的条件通常称为 **Dirichlet 条件**, 它是判别收敛性的一个充分条件. 在实际应用中, 很多函数都能满足这个条件.

还应当指出的是, 虽然定理中的 f 仅定义在 $[-\pi, \pi]$ 上, 但由于 Fourier 级数的各项是以 2π 为周期的函数, 所以它的和函数也是以 2π 为周期的函数. 只要将 f 按照周期 2π 向左右作周期延拓, 即在每个区间 $[(2n-1)\pi, (2n+1)\pi] (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 上重复取它在 $[-\pi, \pi]$ 上的值, 那么它的 Fourier 级数就在整个数轴上都收敛于 f 了. 这样, 就可以将符号“~”换成等号“=”, 即有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

此时, 我们就说 f 在整个数轴上被展开为 Fourier 级数, 上式右端的级数也称为 f 的 Fourier 展开式.

特别, 如果 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上是奇函数, 那么由于 $f(x) \cos nx$ 也是奇函数, 而 $f(x) \sin nx$ 是偶函数, 所以

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

从而, 它的 Fourier 级数变为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

由此可见, 奇函数的 Fourier 级数只含正弦项, 称这种级数为 f 的 Fourier 正弦级数.

类似可知, 如果 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上是偶函数, 那么它的 Fourier 级数只含余弦项, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

其中 $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$,

称它为 f 的 Fourier 余弦级数.

例 4.1 设 f 是以 2π 为周期的函数, 它在 $(-\pi, \pi]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

求 f 的 Fourier 展开式.

解 函数 f 的图象如图 4.2 所示. 显然, 它在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 Dirichlet 条件. 根据系数公式(4.4)得:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right] \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} = \begin{cases} -\frac{2}{n^2 \pi}, & n \text{ 为奇数;} \\ 0, & n \text{ 为偶数,} \end{cases} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ 为奇数,} \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases} \end{aligned}$$

因此, 根据 Dirichlet 定理, 当 $x \in (-\pi, \pi)$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) \\ &\quad + \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(2k-1)^2 \pi} \cos (2k-1)x + \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx \right]; \end{aligned}$$

当 $x = \pm \pi$ 时, f 的 Fourier 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)] = \frac{\pi}{2}$.

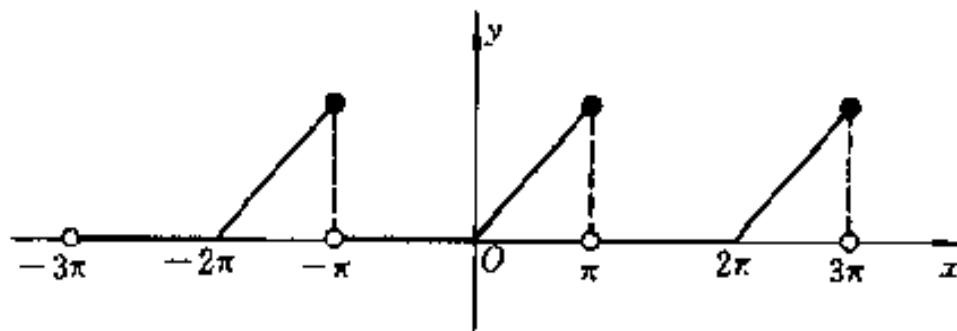


图 4.2

易见,在整个数轴上,函数 f 的 Fourier 级数除了在点 $x = n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 3, \dots$) 处收敛于 $\frac{\pi}{2}$ 外,在其余各点 x 处都收敛于 $f(x)$. ■

在此例中,由于 f 的 Fourier 级数在 $x = n\pi$ 处收敛于 $\frac{\pi}{2}$,将它们代入 f 的 Fourier 级数,便得到了一个常数项级数的和,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

例 4.2 设 $f(x)$ 的周期为 2π ,它在 $(-\pi, \pi)$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的 Fourier 级数及此 Fourier 级数的和函数 $S(x)$.

解 显然 f 满足 Dirichlet 条件,根据系数公式(4.4),

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n \text{ 为奇数,} \\ 0, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

所以, $f(x)$ 的 Fourier 级数为 $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$. 根据 Dirichlet 定理,它在 $(-\pi, \pi]$ 上收敛于和函数:

$$S(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pm \pi. \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 所以它的 Fourier 级数在除去 $x = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的点处都收敛于 $f(x)$, 在点 $x = n\pi$ 处收敛于 $\frac{1}{2}$.

在上面两个例子中我们看到, Dirichlet 定理中所讲的 $f(x)$ 的 Fourier 级数并非处处收敛于 $f(x)$, 更不一致收敛于 $f(x)$. 从例 4.2 中 Fourier 级数的部分和

$$S_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x, \quad S_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right),$$

$$S_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right)$$

的图象(图 4.3)易见, 在某些点上(如 $x = 0, \pm \pi$ 等) $S_n(x)$ 与 $f(x)$ 的值相差甚大, 但就整体而言, 随着 n 的增大, $S_n(x)$ 的图象越来越逼近于 $f(x)$ 的图象. 它

们的误差可以用 $\left(\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ 来刻画, 也就是用在 $[-\pi, \pi]$ 中各点处, $S_n(x)$ 近似代替 $f(x)$ 产生的误差 $|f(x) - S_n(x)|$ 平方的无限累加后再开方来度量, 这就是在第八章中将要介绍的平均平方逼近.

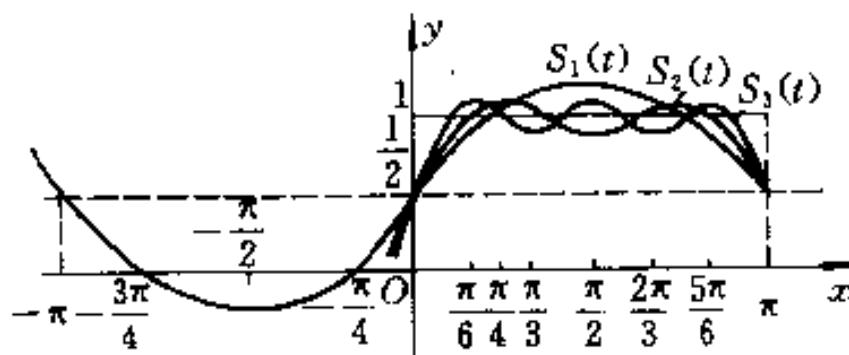


图 4.3

例 4.3 设 f 是以 2π 为周期的函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的定义为:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{A}{\pi}x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{A}{\pi}x, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

求 f 的 Fourier 展开式, 其中 A 为常数.

解 函数 f 的图象如图 4.4 所示, 电子学中称之为三角波. 显然, 它在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 Dirichlet 条件(以后所给函数均满足此条件, 不再一一说明). 由于它是偶函数, 所以 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). 而

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{A}{\pi}x dx = A,$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi A \frac{x}{\pi} \cos nx dx \\
 &= \frac{2A}{\pi^2} \left[\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n} dx \right] \\
 &= \frac{2A}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{4A}{n^2 \pi^2}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

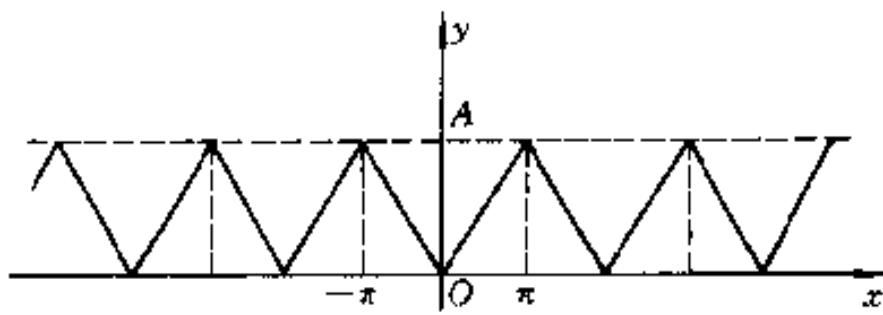


图 4.4

从而得 f 的 Fourier 展开式为:

$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

下面讨论周期为 $2l$ (l 为任意实数) 的函数如何展开为 Fourier 级数的问题。设 f 是周期为 $2l$ 的函数, 并且在 $[-l, l]$ 上满足 Dirichlet 条件。为了求得它的 Fourier 展开式, 作变量代换 $x = \frac{l}{\pi}t$, 则 $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ 。若记 $g(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, 不难验证 g 就是一个周期为 2π 的函数, 并且在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 Dirichlet 条件。根据 Dirichlet 定理, g 的 Fourier 级数收敛于 g (此处收敛的含义也包含该定理中的三种收敛情形), 即

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt - b_n \sin nt),$$

其中,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos nt dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

再将变量换回到 x 便得 f 在 $[-l, l]$ 上的 Fourier 展开式:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (4.5)$$

其中系数 a_n 与 b_n 可由下面的公式求得:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0,1,2,\dots), \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1,2,\dots). \end{cases} \quad (4.6)$$

若 f 定义在有限区间 $[-l, l]$ 上, 关于对 f 作周期延拓以及 f 为奇函数或偶函数的情形如何展开等问题与 f 为以 2π 为周期的函数类似, 不再一一重述.

例 4.4 将以 4 为周期, 在 $[-2, 2]$ 上定义为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta}, & |x| < \delta, \\ 0, & \delta \leq |x| \leq 2 \end{cases}$$

的函数 f 展开为 Fourier 级数.

解 f 的图象如图 4.5 所示, 电子学中称之为矩形脉冲. 由于它是偶函数, 所以 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 而

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \int_0^\delta \frac{1}{2\delta} dx = \frac{1}{2}, \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \int_0^\delta \frac{1}{2\delta} \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{n\pi\delta} \sin \frac{n\pi\delta}{2} \quad (n=1,2,\dots). \end{aligned}$$

因此, 当 $x \in [-2, -\delta] \cup (-\delta, \delta) \cup (\delta, 2]$ 时,

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\delta}{2} \cos \frac{n\pi x}{2};$$

当 $x = \pm\delta$ 时, 它的 Fourier 级数收敛于 $\frac{1}{4\delta}$. ■

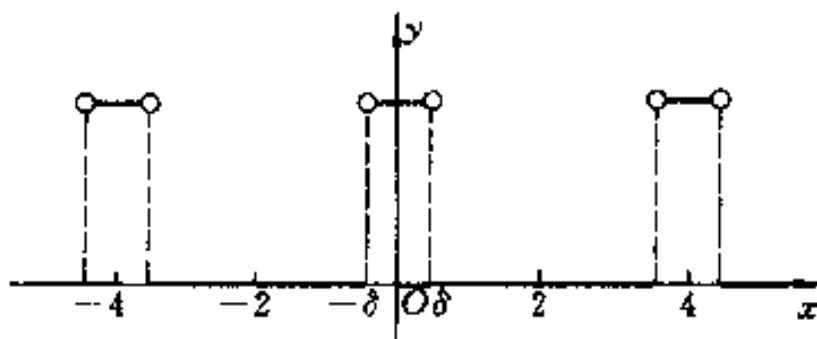


图 4.5

4.4 定义在 $[0, l]$ 上函数的 Fourier 展开

设函数 f 定义在区间 $[0, l]$ 上, 并且满足 Dirichlet 条件. 为了求它的 Fourier

展开式,将它任意延拓到区间 $[-l, 0]$ 上,即在 $[-l, 0]$ 上任意补充定义,得到一个定义在 $[-l, l]$ 上的辅助函数 F ,使得 F 在 $[-l, l]$ 上满足 Dirichlet 条件,并且在 $[0, l]$ 上等于 f .如果我们将 F 在 $[-l, l]$ 上展开为 Fourier 级数,那么就得到 f 在 $[0, l]$ 上的 Fourier 展开式.

在理论上,延拓的方式有无穷多种,可以根据不同的要求采用不同的延拓方式,但常用的是下面两种:

(1) 偶延拓 如果要求将 f 在 $[0, l]$ 上展开成 Fourier 余弦级数,可采用偶延拓的方式,就是使 F 是 $[-l, l]$ 上的偶函数,即

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ f(-x), & -l \leq x < 0. \end{cases}$$

将 F 在 $[-l, l]$ 上展开为 Fourier 级数,得

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

从而可知

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

就是 f 在 $[0, l]$ 上的 Fourier 余弦展开式.

(2) 奇延拓 如果要求将 f 在 $[0, l]$ 上展开为 Fourier 正弦级数,可采用奇延拓的方式,就是使 F 是 $[-l, l]$ 上的奇函数,即

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ -f(-x), & -l \leq x < 0. \end{cases}$$

根据奇函数的定义,必须有 $f(0) = 0$.如果 f 不满足这个条件,那么首先应当改变它在 $x = 0$ 的值,使它符合这个要求.然后再将 F 在 $[-l, l]$ 上展开,得

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

从而可知 f 在 $[0, l]$ 上的 Fourier 正弦展开式就是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

无论是偶延拓还是奇延拓,在计算展开式的系数时,只要用到 f 在 $[0, l]$ 上的值.所以,在解题过程中并不需要具体作出辅助函数 F ,只要指明采用哪一种

延拓方式就够了.

例 4.5 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

在 $[0, 2]$ 上展开为 Fourier 正弦级数.

解 根据要求, 本题应采用奇延拓. 因此有:

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left(x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) \\ &\quad - \frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 + \frac{2}{n\pi} \left(x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 - \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k \frac{8}{n^2\pi^2}, & n = 2k+1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

从而得

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}, \quad x \in [0, 2]. \quad \blacksquare$$

4.5 Fourier 级数的复数形式

在实际应用中, 将 Fourier 级数化成复数形式更为方便.

设 f 是在 $[-l, l]$ 上满足 Dirichlet 条件、周期为 $2l$ 的函数, 那么, 它可以展开为形如(4.5)式的 Fourier 级数, 系数 a_n 与 b_n 由(4.6)式确定. 令 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 则由 Euler 公式,

$$\cos \frac{n\pi x}{l} = \cos n\omega x = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}),$$

$$\sin \frac{n\pi x}{l} = \sin n\omega x = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}),$$

代入(4.5)式得

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) - \frac{b_n i}{2} (e^{inx} - e^{-inx}) \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right).$$

把上式中各项系数分别记成

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

那么, f 的 Fourier 展开式就可以写成如下的简洁形式:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} e^{-inx}, \quad (4.7)$$

其中

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx, \\ C_{\pm n} &= \frac{a_n \mp ib_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) (\cos n\omega x \mp i \sin n\omega x) dx \\ &\therefore \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\pm in\omega x} dx \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

也能写成统一的形式:

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.8)$$

这样, f 的 Fourier 级数(4.5)就化成了复数形式. 它与实数形式没有本质上的差异, 但应用上常常更为方便. 例如, 在电子技术中, 可以利用它来作频谱分析. 本节开始就曾指出, 为了研究复杂的周期现象, 常常将一个描写该周期现象的周期函数 f 展开为 Fourier 级数. 在物理上就是将一个复杂的周期波 f (非正弦波) 分解为一系列不同频率的简单正弦波(谐波)的迭加, 这些正弦波的频率通常称为 f 的频率成分. 在工程应用中, 经常需要分析各种频率成分的正弦波振幅的大小, 称之为频谱分析.

在 f 的 Fourier 展开式中, $\frac{a_0}{2}$ 称为非正弦波 f 的直流分量, 与 f 同频率的正弦波 $a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x$ 称为基波, 而 $a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x = A_n \sin(n\omega x + \varphi_n)$ (其中 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$) 称为 n 阶谐波. 在复数形式(4.7)中, 由于

$$|C_n| = |C_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n,$$

因此, 系数 C_n 与 C_{-n} 直接反映了 n 阶谐波振幅 A_n 的大小. 通常称 A_n 为周期波(或信号) f 的振幅频谱, 简称为频谱. 在作频谱分析时, 就可以把各阶谐波的振

幅与频率之间的函数关系画出相应的频谱图. 例如, 考察例 4.4 中的矩形脉冲, 将它的 Fourier 级数与 Fourier 系数化成复数形式, 得

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{4},$$

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2n\pi\delta} \sin \frac{n\pi\delta}{2} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi\delta} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\delta}{2} e^{inx}, x \in [-2, 2] \setminus [-\delta, \delta].$$

有了 C_n , 就容易画出它的频谱图. 取脉冲宽度 $2\delta = \frac{T}{3}$, 即 $\delta = \frac{T}{6} = \frac{2}{3}$ (本题中 $T = 4$), 则

$$|C_n| = \frac{3}{4\pi|n|} \left| \sin \frac{n\pi}{3} \right| \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

列表如下:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$ C_n $	$\frac{1}{4}$ (直流分量)	$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}, \frac{1}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}, \frac{1}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}, \frac{1}{5}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}, \frac{1}{7}$...

画出矩形脉冲的频谱图如图 4.6 所示, 它是一条一条离散的谱线, 随着谐波阶数 n 的增大, 振幅很快减小, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时趋近于 0.

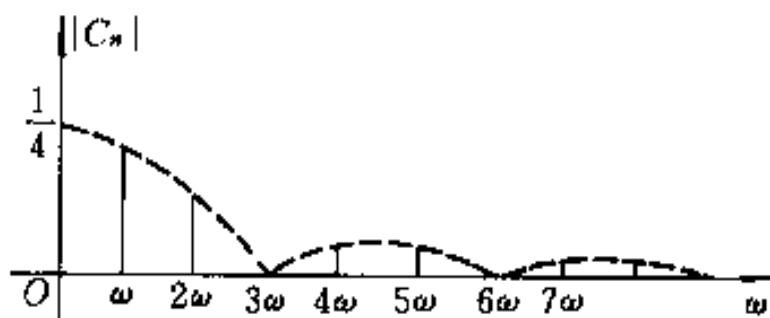


图 4.6

例 4.6 设 f 是以 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的函数, 它在 $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$ 上定义为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{\omega} \leq t < 0, \\ E \sin \omega t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}, \end{cases}$$

求 f 复数形式的 Fourier 展开式.

解 函数 f 的图象如图 4.7 所示. 电子学中它表示一个交变电压 $E \sin \omega t$ 经整流后所得到的周期波形, 称为半波整流.

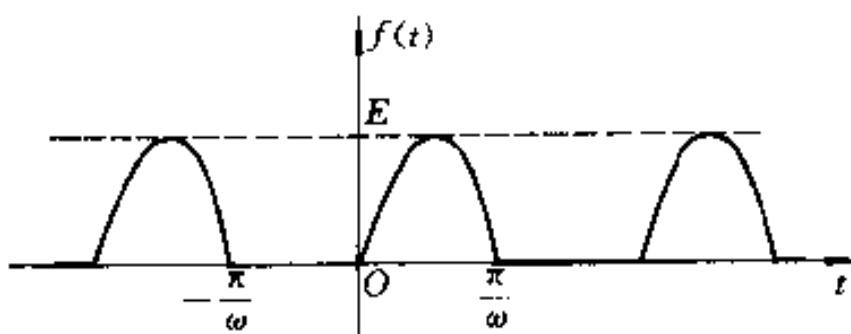


图 4.7

由系数公式(4.8)得

$$C_0 = \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{\omega}} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t dt = \frac{\omega E}{2\pi} \left(-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{E}{\pi},$$

$$C_n = \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{\omega}} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t e^{-in\omega t} dt \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $n \neq \pm 1$ 时, 利用 Euler 公式上式又可化为

$$C_n = \frac{\omega E}{4\pi i} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [e^{-i(n-1)\omega t} - e^{-i(n+1)\omega t}] dt$$

$$= \frac{E}{4\pi} \left[\frac{e^{-i(n-1)\omega t}}{n-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} - \frac{e^{-i(n+1)\omega t}}{n+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \right]$$

$$= \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^2 - 1} = \begin{cases} -\frac{E}{\pi} \frac{1}{(2k)^2 - 1}, & n = 2k; \\ 0, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

而

$$C_{\pm 1} = \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t e^{\mp i\omega t} dt$$

$$= \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (\sin \omega t \cos \omega t \mp i \sin^2 \omega t) dt$$

$$= \frac{\omega E}{2\pi} \left[\left(-\frac{\cos 2\omega t}{4\omega} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mp i \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \right] = \mp \frac{E}{4} i$$

因此, 我们有

$$f(t) = \frac{E}{\pi} - \frac{Ei}{4} e^{i\omega t} + \frac{Ei}{4} e^{-i\omega t} - \frac{E}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} e^{2k\omega t i}$$

$$= \frac{E}{\pi} - \frac{E}{2} \sin \omega t - \frac{E}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} e^{2k\omega t}, \quad t \in (-\infty, +\infty). \blacksquare$$

与矩形脉冲类似,读者不难对半波整流画出相应的频谱图,进行频谱分析.

习题 4.4

(A)

1. 什么叫做正交函数系? 证明函数系:

$$\{\sin \omega t, \sin 2\omega t, \dots, \sin n\omega t, \dots\}, \quad t \in [0, \frac{T}{2}], \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

是所给区间上的正交函数系.

2. 函数 f 满足什么样的条件就存在着相应的 Fourier 级数? f 的 Fourier 级数一定收敛吗? 若收敛,一定收敛于 f 本身吗?

3. 设函数 f 在区间 $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 上满足 Dirichlet 条件,如何求 f 在 $[a, b]$ 上的 Fourier 展开式? 试写出它的 Fourier 系数公式.

4. 设 $S(x)$ 是周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数. $f(x)$ 在一个周期内的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 2 < |x| \leq \pi, \\ x, & |x| \leq 2, \end{cases}$$

写出 $S(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式.

5. 求下列函数的 Fourier 级数,它们在一个周期内分别定义为:

$$(1) f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi;$$

$$(2) f(x) = 2 \sin \frac{x}{3}, -\pi \leq x < \pi;$$

$$(3) f(x) = e^x + 1, -\pi \leq x < \pi;$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0; \end{cases}$$

$$(5) f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi;$$

6. 把下列函数展开为 Fourier 级数,它们在一个周期内的定义分别为:

$$(1) f(x) = x(t+x), x \in [-t, t];$$

$$(2) f(x) = 1 - |x|, x \in [-1, 1];$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in [0, 4], \\ x-6, & x \in [4, 8]; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x \in [-2, -1] \cup [1, 2]; \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} \pi x + x^2, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi x - x^2, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

并求级数的和函数在 $x = \pi, \frac{3\pi}{2}, -10$ 各点处的值.

7. 将下列函数展开为指定的 Fourier 级数:

$$(1) f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), x \in [0, \pi], \text{正弦级数};$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases} \text{余弦级数};$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \\ \frac{\pi}{2}, & x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right], \\ \frac{3}{2}(\pi - x), & x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right], \end{cases} \text{正弦级数};$$

$$(4) f(x) = x - 1, \quad x \in [0, 2], \text{余弦级数. 并求常数项级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 的和.}$$

8. 证明: 在 $[0, \pi]$ 上成立

$$(1) x(\pi + x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}; \quad (2) x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}.$$

9. 利用上题证明:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

10. 将下列函数展开为复数形式的 Fourier 级数, 并画出它们的频谱图.

$$(1) \text{锯齿波 } f(t) = \frac{h}{T}t, t \in [0, T], \text{周期为 } T;$$

$$(2) \text{全波整流波 } f(t) = |E \sin \omega t|, t \in \left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right], \text{周期为 } \frac{2\pi}{\omega}.$$

(B)

1. 设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积并且平方可积, 证明 Bessel 不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

成立, 其中 a_0, a_n 与 b_n ($n = 1, 2, \dots$) 是 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 系数.

2. 设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数一致收敛于 f , 并且 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上平方可积, 证明 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

成立, 其中 a_0, a_n 与 b_n 是 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 系数.

综合练习题

在热辐射理论中, 会遇到反常积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$ 的计算问题(见吴百诗主编《大学物理》下册, 西安交通大学出版社, 222 页-224 页), 试利用无穷级数的知识计算 I 的值.

习题答案与提示

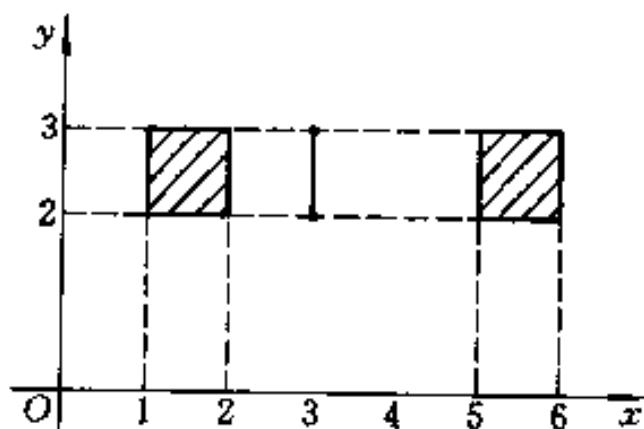
第一章

习题 1.1

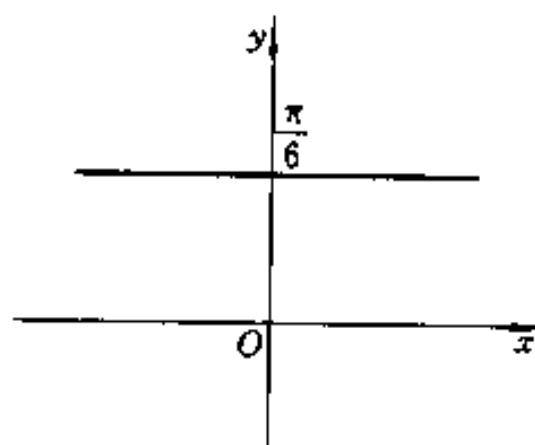
(A)

1. (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{8\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}$;
- (2) 平行四边形的全体, 矩形的全体, 除矩形之外的平行四边形的全体, \emptyset ;
- (3) $A, B, \{0\}, \emptyset$.

2. (1)



(2)



4. (1) 否; (2) 否; (3) 是; (4) 是.

10. $\sup A = 1, \inf A = \frac{1}{2}, \min A = \frac{1}{2}, \max A$ 不存在.

12. $A \cup B$ 无界; $A \cap B$ 未必.

(B)

2. (1) $2^x = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$;
- (2) $1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

习题 1.2

(A)

3. $\mathbb{R}, (0, +\infty), \sqrt{x^2+1}, y+1$.
 5. 非单射, 是满射. $\{(1, y) | y \in \mathbb{R}^2\}, (1, 0), \emptyset$.
 7. (1)、(2)不等, 因定义域不同, (3)、(4)相等.
 9. (1)、(2)是, (3)、(4)不是.

(B)

6. 提示: $x = \frac{t-a}{b-a}$.

习题 1.3

(A)

1. 不能, 不符合定义.
 3. 不一定, 如 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}, a_n + b_n = 0, a_n b_n = -1$; 和发散(证明), 积不一定(举反例).
 4. 不正确.
 5. 不能, 如 $a_n = \frac{1}{n} < b_n = \frac{2}{n}$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
 6. (1) 正确(给出证明); (2) 不正确, 如 $a_n = (-1)^n$; (3) 正确; (4) 正确;
 (5) 不正确, 如 $a_n = \frac{1}{n!}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \neq 1$;
 (6) 正确. 设 $\alpha > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha a_n + \frac{1}{\alpha} \right) = \alpha A + \frac{1}{\alpha} = A$.
 7. (1) 提示: $\left| \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} - 0 \right| \leqslant \frac{1}{n}$;
 (2) 提示: $\left| n - \sqrt{n^2 - n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2n}$.
 8. 提示: $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left| \frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} |a_n - a|, n > N_0$.

10. (1) $\frac{1}{5}$; (2) $\frac{1}{3}$; (3) $-\frac{1}{2}$; (4) 2; (5) 2; (6) 1; (7) $\frac{1}{3}$; (8) e; (9) $\frac{1}{e}$; (10) e.
 11. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛; (5) 收敛.
 13. (1) 0, 1; (2) 5, 1; (3) 0.

14. $x_{n+1} = 1 - (1 - x_1)^{1/2^n} \rightarrow 0, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x_n}} \rightarrow \frac{1}{2}, n \rightarrow \infty$.

15. $x_{n+1} \geq \sqrt{x_n + \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \leq 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$,

$$A^2 = \frac{1}{2}(A^2 + a), \quad A = \sqrt{a}.$$

16. 可先证 $|a_n|$ 有上界, 且 $|b_n|$ 有下界, 进而完成证明.

(B)

1. 提示: 利用 Cauchy 收敛原理.

2. (1) $x > 1, 1; |x| < 1, -1; x = 1, \frac{1}{3}; x = -1$, 发散.

(2) $\frac{3}{4}$; (3) $\frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$; (4) 1; (5) e^{-3} ; (6) e^4 .

4. (1) 0; (2) 可先证 a_n 单调增, 有上界 $\sqrt{a} + 1$, 进而知其收敛, 极限值为 $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a})$; (3) $|x_{n+1} - \sqrt{3}| = \left| \frac{(3-\sqrt{3})(x_n - \sqrt{3})}{x_n + 3} \right| \leq \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n |x_1 - \sqrt{3}|, x_n \rightarrow \sqrt{3}, n \rightarrow \infty$; (4) $\sqrt{2}$.

习题 1.4

(A)

2. 不能. 3. 可以; 未必.

5. (1) 不正确, 如 $f_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbf{Q}; \end{cases}$

(2) 正确; (3) 不正确, 如(1)中 $f_0(x)$; (4) 正确;

(5) 不正确, 如 $f(x) = x, g(x) = f_0(x)$ (见(1)), $x_0 = 0$;

(6) 不正确, 如 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0, a = 0$.

6. 不对. 在 3 的任一邻域内, 函数有无穷多个点无定义.

9. (1) 错, 分母极限为零;

(2) 错, 分子极限不存在;

(3) 错, 第二因式无极限.

11. (1) $x_k = \frac{1}{2k\pi}, y_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, k \rightarrow \infty$.

(2) $x_k = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, y_k = 2k\pi, k \rightarrow \infty$.

12. (1) -3; (2) -1; (3) $\frac{a}{2}$; (4) $\sqrt{2}$; (5) $\frac{1}{2}mn(n+m)$; (6) $\frac{m-n}{2}$; (7) nx^{n-1} ; (8) $\cos x$; (9) $-\sin x$; (10) $\frac{1}{n}$.

13. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $(-1)^n$; (4) $\frac{2}{\pi}$; (5) e^{-6} ; (6) e^{-2} ; (7) π ; (8) e^2 .

14. (1) 不存在; (2) 不存在; (3) 0.

(B)

1. 提示:选取有理点列 $\{x_k\}$ 和无理点列 $\{y_k\}$, 分别考察极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} D(x_k)$ 和 $\lim_{k \rightarrow \infty} D(y_k)$.
 3. 提示:反证. 若无界, 则 $\exists [x_k] \subseteq [a, b]$, $f(x_k) \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. 进而有子列 $\{x_{k_l}\} \subseteq \{x_k\}$, $x_{k_l} \rightarrow x_0$, 考察 $f(x_{k_l})$, 导致矛盾.

习题 1.5

(A)

2. (1) 不正确; (2) 不正确; (3) 正确; (4) 正确; (5) 不正确; (6) 不正确; (7) 不正确.
 3. (1) 错; (2) 正确. 4. (1) 同阶无穷小, 阶数为 1; (2) 低阶无穷小, 阶数为 $\frac{1}{2}$;
 (3) 同阶无穷小, 阶数为 1; (4) 高阶无穷小, 阶数为 $\frac{5}{3}$; (5) 同阶无穷小, 阶数为 1.
 6. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{3}{4}$; (3) $\frac{1}{2}$; (4) $\frac{1}{2}$; (5) $\frac{1}{3}$; (6) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(B)

1. (1) 提示: 从 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$ 可推得.
 (2) $k = 1, b = -1$.
 2. (1) $a = 1, b = -\frac{1}{2}$; (2) $a = \frac{3}{16}, b = \frac{1}{2}, c = 2$.
 3. (3) 1° e^{-1} ; 2° $e^{-\frac{1}{2}}$.

习题 1.6

(A)

2. 不一定; 一定. 3. 不. 8. 提示: 可选 $\epsilon_0 = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, 用 $\epsilon - \delta$ 定义证明之.
 9. (1) 连续; (2) 间断点, 可去; (3) 间断点, 第二类; (4) 间断, 跳跃.
 10. (1) $x = 0$ 为跳跃间断点;
 (2) $x = 0$ 为第二类间断点;
 (3) $x = 1$ 为无穷间断点;
 (4) $x = 0$ 为可去间断点;
 (5) $x = -1$ 为第二类间断点; $x = 0$ 为跳跃间断点; $x = 1$ 为可去间断点; $x = 3, 5, 7, \dots$ 为第二类间断点.

11. (1) $\frac{\pi}{4}$; (2) $\frac{2}{3}$; (3) -2 ; (4) $e^{-\frac{1}{2}}$.

13. (1) $a = 0$; (2) $a = -\frac{\pi}{2}$; (3) $a = 2$; $b = -\frac{3}{2}$.

15. 提示: 利用 $f(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n} \right)$ 及零点存在定理.

(B)

7. 提示: 令 $f(x) = a_n \cos nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + a_0$.

考察 $f\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $f\left(\frac{2\pi}{n}k + \frac{\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

综合练习题

1. $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, 可解得 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$. (1) 233;

(2) F_n ; (3) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. (1) $y_n = -\frac{2}{5}x_n + 18$, $x_{n+1} = \frac{3}{2}y_n + 16$;

(2) $x_{n+1} = -\frac{3}{5}x_n + 43$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{43}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{215}{8} = 26\frac{7}{8}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 7\frac{1}{4}$;

(3) $26\frac{7}{8}$ (万吨), $7\frac{1}{4}$ (元/kg).

第二章

习题 2.1

(A)

1. (1) $f'(x) = -\sin x$; (2) $f'(x) = \frac{1}{x}$;

(3) $f'(0) = 0$; (4) $f'(0) = 0$.

2. (1) $-f'(x_0)$; (2) $2f'(x_0)$;

(3) $f'(x_0)$; (4) $x_0 f'(x_0) - f(x_0)$.

4. 对 $g(x) = |x-a| \varphi(x)$, 当 $\varphi(a) = 0$ 时, $g(x)$ 在 $x=a$ 处可导; 当 $\varphi(a) \neq 0$ 时, $g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

5. 左(右)可导 \Leftrightarrow 左(右)连续.

6. (4, 8).

7. $a=2$, $b=-1$.

8. $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = -1$, $f'(0)$ 不存在.

9. $\theta'(t_0)$.

10. $f'(t_0)$.

11. $N'(x_0)$.

13. 不对.

(B)

3. $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$; 4. $\sqrt{2}$.

5. 当 $n \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; 当 $n \geq 2$ 时, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处可导; 当 $n \geq 3$ 时, $f''(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

6. 提示: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$

8. 提示: 利用导数定义和极限的夹逼原理.

习题 2.2

(A)

1. (1) $\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{6}\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$; (2) $3e^x(\cos x + \sin x)$;
- (3) $a^x[x^2 \ln a + (2 - 3 \ln a)x + \ln a - 3]$; (4) $\sec^3 x + \tan^2 x \sec x$;
- (5) $\frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$; (6) $\frac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}$;
- (7) $\frac{210^x \ln 10}{(10^x+1)^2}$; (8) $\frac{-2\csc x[2x+(1+x^2)\cot x]}{(1+x^2)^2}$;
- (9) $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;
- (10) $\frac{-\csc^2 x \cdot \sqrt{x^2} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(1+\cot x)}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{2x}$;
- (11) $-4\csc 2x \cot 2x$;
- (12) $\frac{-3[(e^x \sec x + e^x \sec x \tan x)x^2 \log_a x - \left(2x \log_a x + \frac{x}{\ln a}\right)(e^x \sec x + 1)]}{x^4 \log_a^2 x}$.
2. (1) $10(2x+3)^4$; (2) $e^{ix}(\alpha \sin(\omega x + \beta) + \omega \cos(\omega x + \beta))$;
- (3) $\frac{2x-\sin x}{x^2+\cos x}$; (4) $\frac{-2}{3(x^2-1)}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$;
- (5) $2\arccos \frac{1}{x} \cdot \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$; (6) $\frac{4(1-2x)}{1+(1-2x)^4}$;
- (7) $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; (8) $\csc x$;
- (9) $\frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{1+x}{2x}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; (10) $e^{\sin \frac{1}{x}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{5}{3}}\cos \frac{1}{x}\right)$;
- (11) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \cot x + \frac{e^x}{2(e^x-1)}\right)$; (12) $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$;
- (13) $a^x x^{a^x-1} + a^{x^a-1} x^{a-1} \ln a + a^{x^a-a} \ln^2 a (a>0)$;

(14) $1+x^x(1+\ln x)+x^x x^{x'}\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)(x>0).$

3. $\frac{3\pi}{4}.$

5. (1) $2xf'(x^2);$ (2) $\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}};$

(3) $[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]\sin 2x;$ (4) $f'(e^x)e^{g(x)+1}+f(e^x)e^{g(x)}g'(x);$

(5) $y'=\begin{cases} -1, & -\infty < x < 1, \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & 2 < x < +\infty; \end{cases}$ (6) $y'=\begin{cases} e^x\left(1+\frac{1}{x}\right)+1, & x \neq 0, \\ \text{不存在}, & x=0. \end{cases}$

6. $a=3, b=-1, c=1, d=3.$

8. (1) $-4e^x \cos x;$ (2) $x \sinh x + 100 \cosh x;$

(3) $2^{50}x^2 \sin\left(2x+50 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 100 \cdot 2^{49}x \sin\left(2x+49 \cdot \frac{\pi}{2}\right) +$
 $50 \cdot 49 \cdot 2^{48} \sin\left(2x+48 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$

(4) $(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right].$

10. $n=2.$

11. (1) $\frac{x^2-y}{x+y^2};$ (2) $\frac{y(x-1)}{x(1-y)};$

(3) $-\frac{y}{[1-\cos(x+y)]^3};$ (4) $2e^2.$

12. (1) $\frac{(3-x)^4 \sqrt{x+2}}{(x+1)^5} \left[\frac{4}{x-3} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{5(x+1)} \right];$

(2) $\frac{1}{5} \sqrt[5]{\frac{x-5}{x^2+2}} \left[\frac{1}{x-5} - \frac{2x}{3(x^2+2)} \right];$

(3) $x^{\sin x} \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right];$

(4) $(\tan 2x)^{\cot \frac{x}{2}} \left[-\frac{1}{2} \csc^2 \frac{x}{2} \cdot \ln \tan 2x + 2 \cot \frac{x}{2} \sec^2 2x \right].$

13. (1) $-\tan t;$ (2) $\sqrt{3}-2;$

(3) $-2;$ (4) $\frac{12}{x^3};$

(5) $\frac{[f'(t)]^2 - f''(t)f(t)}{[f'(t)]^3} + \frac{1}{f'(t)}.$

14. $k = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta};$ $\frac{\sin^2\theta + \cos\theta \cdot \cos^2\theta}{2\sin\theta \cos\theta - \sin^2\theta}.$

16. $144\pi.$

17. $-\frac{14}{5}.$

18. $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{V}{\pi k}} \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}.$

19. $(x-3\cos\theta) \frac{dx}{dt} + 3x\sin\theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$

(B)

1. 提示: 利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数定义证明.

2. $a = \frac{\varphi''(x_0)}{2}$, $b = \varphi'(x_0)$, $c = \varphi(x_0)$.

3. $a = \pm\sqrt{2}$, $b = 1$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{x \sin \sqrt{2}x - 1 + \cos \sqrt{2}x}{x^2}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{2x^2 - (1+x^2)\ln(1+x^2)}{x^2(1-x^2)}, & x > 0. \end{cases}$

4. (1) 不成立; (2) 不成立; (3) 不成立.

5. $n! [f(x)]^{n+1}$.

6. $f'(0) = (-1)^n n!$, $f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

7. 当 $n=2m$ 时, $f^{(2m)}(0)=0$;

当 $n=2m+1$ 时, $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!$.

8. $S_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x$.

习题 2.3

(A)

3. (1) $dy = (\sin 2x + 2x \cos 2x)dx$;

(2) $dy = \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$;

(3) $dy = e^{-x} [\sin(3-x) - \cos(3-x)]dx$;

(4) $dy = \frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx$;

(5) $dy = 8x \tan(1+2x^2) \sec^2(1+2x^2)dx$;

(6) $dy = \frac{-2x}{x^4+1}dx$;

(7) $dy = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{2}{3(x^2-1)}dx$;

(8) $dy = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) dx$.

4. (1) $x^a + C$; (2) $\cos x + C$;

(3) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$; (4) $\frac{1}{3}\tan 3x + C$;

(5) $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$, ($a \neq 0$),

$-\frac{1}{x} + C$, ($a=0$);

(6) $\frac{1}{3} \ln |3x+1| + C$; (7) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$;

(8) $\frac{1}{2} \ln^2|x| + C$.

5. (1) 0.874 7; (2) -0.965;
 (3) 5.04; (4) 0.523 8;
 (5) 0.01; (6) 0.792 899.

6. (2) $\delta \approx 3.125$ mm; (3) $H \approx 30$ mm.

7. 1.118 g.

8. 43.2 s.

$$9. dy = \frac{y - e^{x^4} v}{e^{x^4} x} dx,$$

$$10. dy = \frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)} dx.$$

$$11. (1) \frac{(2+x^2)\sin x}{x^3} - 2x\cos x dx^2; \quad (2) \frac{2}{(x+2y)^3} dx^2.$$

(B)

1. 不正确.

2. 提示: 利用微分定义证明.

习题 2.4

(A)

1. (1) 满足 Rolle 定理条件, $\xi = 0$;

(2) 不满足 Rolle 定理条件, ξ 不存在;

(3) 不满足 Rolle 定理条件, ξ 存在, $\xi = 1$.

4. 三个实根分别在区间 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 中.

13. (1) 有错误. 原题所给极限不是 $\frac{0}{0}$ 型, 也不是 $\frac{\infty}{\infty}$, 不能用 L'Hospital 法则.

(2) 有错误. 用了 L'Hospital 法则后极限不存在不能推知原式的极限不存在.

(3) 有错误. 由原题设知 $f(x)$ 仅在 x_0 点二阶可导, 所以, 只能用一次 L'Hospital 法则, 然后用导数定义, 即可得到正确结果.

$$14. (1) 2; \quad (2) -\frac{1}{8};$$

$$(3) -1; \quad (4) -\frac{2}{3};$$

$$(5) 2; \quad (6) \frac{1}{3};$$

$$(7) 1; \quad (8) e^{-1};$$

$$(9) e^{-\frac{1}{6}}; \quad (10) \frac{e}{2};$$

$$(11) e^{-\frac{1}{2}};$$

$$15. e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$16. a = -\frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}, \frac{8}{3}.$$

习题 2.5

(A)

1. $-1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3;$

2. (1) $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{(-1)^{n+2}}{(\theta x - 1)^{n+3}} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1);$

(2) $\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} \right) + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(\theta x - 1)^{n+1}} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1);$

(3) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\sin \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (0 < \theta < 1);$

(4) $1 + x + \frac{3}{2!} x^2 + \frac{3 \cdot 5}{3!} x^3 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \sqrt{(1-2\theta x)^{2n+3}} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$

3. (1) $\frac{1}{x} = -[1 + (x+1) + (x+1)^2 + \dots + (x+1)^n] + o((x+1)^n) \quad (x \rightarrow -1);$

(2) $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + o((x-1)^n) \quad (x \rightarrow 1);$

(3) $e^{2x} = e^2 \left[1 + 2(x-1) + \frac{2^2(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{2^n(x-1)^n}{n!} + o((x-1)^n) \right] \quad (x \rightarrow 1);$

(4) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^{2n+1} + o \left(\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^{2n+1} \right), \right. \\ \left. \left(x \rightarrow \frac{\pi}{4} \right) \right].$

4. $\sqrt{e} \approx 1.65.$

5. (1) 3.1072, 误差小于 10^{-4} ;

(2) 0.3090, 误差小于 10^{-4} .

6. (1) $\frac{1}{3}; \quad (2) \frac{1}{6};$

(3) $\frac{1}{2}; \quad (4) \frac{1}{8}.$

7. 1.

(B)

4. $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=4; e^2.$

习题 2.6

(A)

1. 不对.

3. (1) 在 $(0, 2)$ 上单调减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调增;(2) 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调减, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调增;(3) 在 $(-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right), (1, +\infty)$ 上单调减, 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调增;(4) 在 $\left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{3}\right), \left(k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调增;在 $\left(k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \left(k\pi + \frac{5\pi}{6}, (k+1)\pi\right)$ 上单调减 (k 为整数).6. 不一定. 例如 $f(x) = |x|$ 在 $x=0$ 有极小值, 但 $f'(0)$ 不存在.7. (1) $f(x)$ 在 $x=-1$ 取极大值 28; 在 $x=2$ 取极小值 1;(2) $f(x)$ 在 $x=-1$ 取极小值 $-\frac{1}{2}$; 在 $x=1$ 取极大值 $\frac{1}{2}$;(3) $f(x)$ 在 $x=0$ 取极小值 0; 在 $x=2$ 取极大值 $2e^{-2}$;(4) $f(x)$ 在 $x=-1$ 取极小值 0;(5) 当 n 为奇数时, $f(x)$ 在 $x=0$ 取极大值 1, 当 n 为偶数时, $f(x)$ 无极值;(6) $f(x)$ 在 $x=-1$ 取极大值 e^{-2} ; 在 $x=0$ 取极小值 0; 在 $x=1$ 取极大值 1.8. $a=2$ 时 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{3}$ 有极大值 $\sqrt{3}$.9. (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增;(2) $f(x)$ 单调增区间: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f(x)$ 单调减区间: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$,在 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 有极大值 $\sqrt{4}$, 在 $x=0$ 有极小值 1;(3) $f(x)$ 的单调增区间: $(-5, -1)$, $f(x)$ 的单调减区间: $(-\infty, -5), (-1, 1), (1, +\infty)$,在 $x=-1$ 有极大值 0, 在 $x=-5$ 有极小值 $-\frac{4^{\frac{2}{3}}}{6}$;(4) $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\pi, +\infty)$, $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty, -\pi)$, 在 $x=-\pi$ 有极小值 -2 .10. (1) 最大值 $\frac{3}{5}$, 最小值 -1 ; (2) 最大值 1, 最小值 0;(3) 最大值 $\frac{5}{4}$, 最小值 $\sqrt{6}-5$; (4) 最大值 1, 最小值 $-\frac{1}{4}$.12. $\sqrt[2]{\frac{2a}{4+\pi}}$

13. 变压器应设在距 A 1.8 km 处.

14. $\frac{C_1}{C_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$.

15. 12%.

16. $v \approx 10\sqrt{3}$ km/h, 720 元.

17. $C(-1,3)$, $S_{\max} = 8$.

20. (1) $(-\infty, 0)$ 凹, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 凸, $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 凹; 拐点 $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$;

(2) $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ 凹, $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$ 凸;

拐点 $(2k\pi, 2k\pi)$, $(2k\pi + \pi, 2k\pi + \pi)$;

(3) $(-\infty, -\sqrt{3})$ 凹, $(-\sqrt{3}, 0)$ 凸, $(0, \sqrt{3})$ 凹, $(\sqrt{3}, +\infty)$ 凸;

拐点 $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0,0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$;

(4) $(-1, 1)$ 凸, $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 凹, 拐点 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$.

(B)

5. 当 n 为奇数时, $f(x)$ 在 x_0 无极值. 当 n 为偶数时 $f(x)$ 在 x_0 有极值. 若 $g(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 有极小值; 若 $g(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 有极大值.

6. $V_{\text{max}} = \frac{8}{3}\pi R^3$.

8. $q = \frac{d-b}{2(e+a)}$ 时利润最大, 最大利润为 $\frac{(d-b)^2}{4(e+a)} - c$.

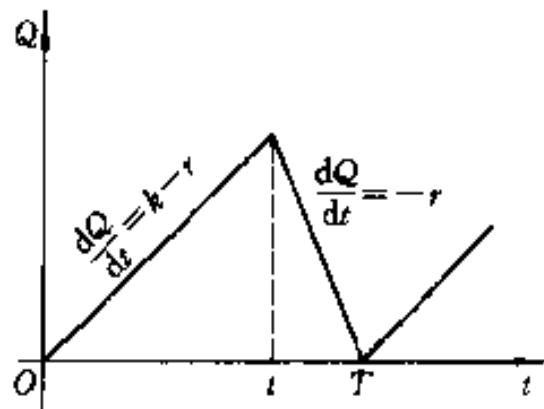
9. (1) 最大值 $2e$, 最小值 0.

(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 时, 速度绝对值最大, 为 $e\omega$; $\theta = 0$ 和 π 时, 速度绝对值最小, 为 0.

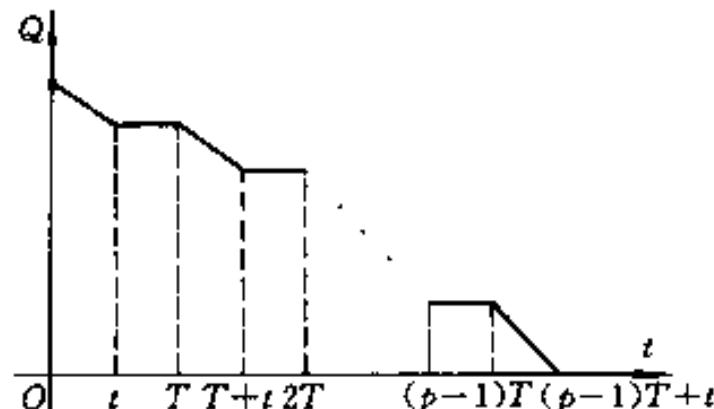
(3) $\theta = 0$ 和 π 时, 加速度绝对值最大, 为 $e\omega^2$; $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3}{2}\pi$ 时加速度绝对值最小, 为 0.

综合练习题

1. (1) 仓库内的产品库存量 Q 随时间 t 的变化规律如图(1)所示.



图(1)



图(2)

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{C}{B}}, W_{\min} = 2\sqrt{BC}, \text{其中 } B = \frac{S_1 r(K-r)}{2K};$$

$$(2) T_{\min} = \sqrt{\frac{C}{B_1}}, B_1 = B + \frac{S_2 r^2}{2K};$$

(3) 仓库内的原料库存量 Q 随 t 的变化规律如图(2)所示. 当 $S_1 \leq S_2$ 时, 则 T_{\min} 尽可能地大, 即 $p=1$; 当 $S_1 > S_2$ 时, $T_{\min} = \sqrt{\frac{2CK}{r(K-r)(S_1-S_2)}}$.

2. 图(3)表示圆心在坐标原点, 半径为 R , 以 y 轴为对称轴且圆心角为 $\frac{2}{3}\pi$ 的扇形. 所求椭圆在扇形中以 $(0, \frac{R}{\sqrt{3}})$ 为 中 心, 以 点 $(-\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}), (\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}})$ 为两焦点, 长半轴为 $\frac{R}{\sqrt{2}}$, 短半轴为 $\frac{R}{\sqrt{6}}$. 该椭圆方程为

$$\frac{x^2}{\frac{R^2}{2}} + \frac{\left(y - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2}{\frac{R^2}{6}} = 1.$$

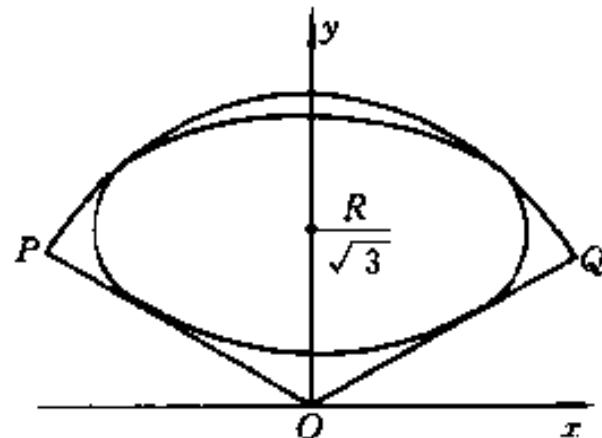


图 (3)

它与圆周相切于 $(\pm \frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}R)$, 与 OQ 相切于 $(\frac{R}{2}, \frac{R}{2\sqrt{3}})$, 与 OP 相切于 $(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2\sqrt{3}})$.

第三章

习题 3.1

(A)

1. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $e-1$, 2. $\frac{1}{2}ka^2$.

3. $W = \int_a^b k \frac{Q \cdot q}{x^2} dx$. 4. $\mathbf{F} = gL \int_0^H x dx$.

9. (1) $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 e^{x^2} dx$; (2) $\int_1^2 2\sqrt{x} dx > \int_1^2 \left(3 - \frac{1}{x}\right) dx$;

(3) $\int_0^1 \ln(1+x) dx > \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$.

(B)

1. (1) 不一定, (2) 不一定, (3) 相等.

3. 提示: 因为 $\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 dx \geq 0 (\lambda \in \mathbb{R})$, 并利用二次三项式判定.

习题 3.2

(A)

3. (1) $\frac{4}{3}$; (2) 1; (3) 2; (4) 1; (5) $\frac{1}{2}$; (6) $-\frac{1}{6}$.

4. (1) $\arctan x$; (2) $-\frac{1}{1+x^4}$; (3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x$;

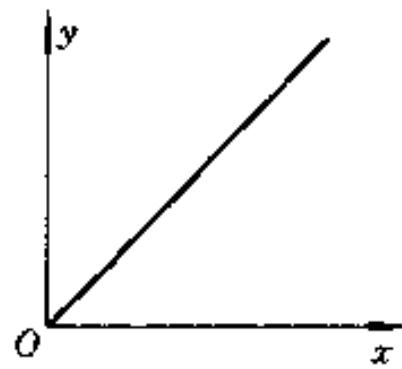
(4) $-\tan x$; (5) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+x^3)$; (6) $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$;

(7) $\int_{x^2}^{x^3} \varphi(t)dt + 3x^3(1+x^2)\varphi(x^3) - 2x^2(1+x)\varphi(x^2)$.

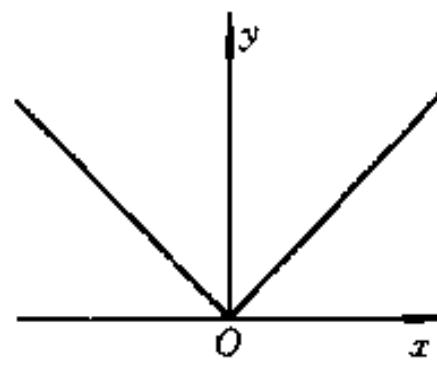
6. $\frac{dy}{dx} = 2t \cdot \cot t \cdot \csc t$.

7. $y' = -2x^3 e^{x^2-y^2}$.

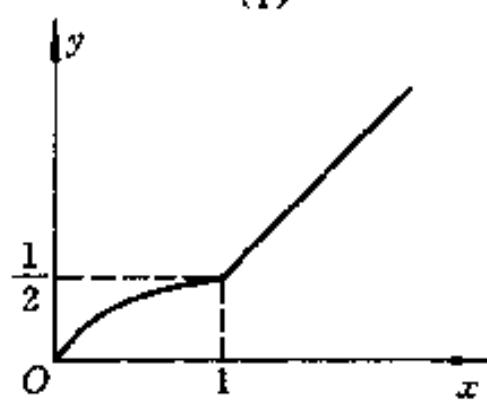
8.



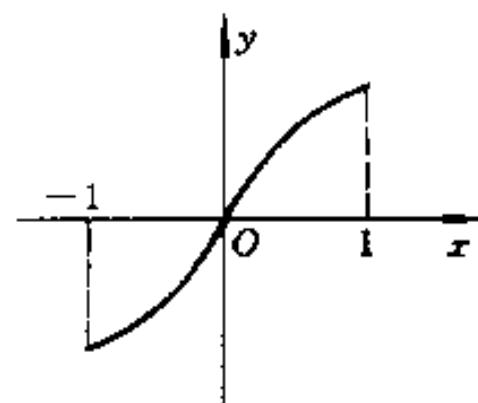
(1)



(2)



(3)



(4)

9. 定义域 $[0, +\infty)$; 单调减区间为 $(0, 1)$; 单调增区间为 $(1, +\infty)$; 极小值点为 $x=1$.

10. (1) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & x \leq 0, \\ 1 - \cos x, & x > 0; \end{cases}$

(2) $F(x)$ 处处可导.

11. (1) 正确, (2) 不正确, (3) 正确, (4) 不正确, (5) 不正确, (6) 不正确.

12. (1) $2x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}} + C$; (2) $\frac{x^2}{2} + x + C$;

(3) $3(x - \arctan x) + C$; (4) $\frac{2^{x-1}e^x}{\ln(2e)} + C$;

(5) $\tan x = x + C;$

(6) $-\cot t = \tan t + C.$

(B)

1. 提示: 利用可积的必要条件与连续的定义.

2. $a = 4, b = 1.$

3. $\frac{1}{6}.$

4. 提示: 考察 $F(x) = \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt$, 并利用 Rolle 定理.

习题 3.3

(A)

1. (1) $-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + C;$

(2) $-3(3 - 5x)^{\frac{2}{3}} + C;$

(3) $\frac{1}{4} \arcsin 4x + C;$

(4) $\frac{1}{7}(3 + 2x^3)^{\frac{7}{6}} + C;$

(5) $\frac{3}{4} \ln(1 + x^4) + \frac{1}{2} \arctan x^2 + C;$

(6) $\frac{4}{3}(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C;$

(7) $\sin \ln|x| + C;$

(8) $\frac{1}{2}(\ln \ln x)^2 + C;$

(9) $-\frac{1}{\sin x} - \sin x + C;$

(10) $\frac{1}{32}(12x + 8\sin 2x + \sin 4x) + C;$

(11) $\frac{1}{32}(4x - \sin 4x) + C;$

(12) $\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C;$

(13) $-\frac{1}{3} \csc^3 x + C;$

(14) $-\ln(1 + e^{-x}) + C;$

(15) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C;$

(16) $-e^{-\sqrt{1+x^2}} + C;$

(17) $\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}} + C;$

(18) $-\ln \left| \arccos \frac{x}{2} \right| + C.$

3. (1) $-\frac{1}{5}(3 - 2x)^{\frac{3}{2}}(1 + x) + C;$

(2) $2[\sqrt{1+x} - \ln(1 + \sqrt{1+x})] + C;$

(3) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C;$

(4) $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C;$

(5) $\frac{1}{9} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C;$

(6) $\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C;$

(7) $-2\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1} \right| + C;$

(8) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + 2x + 3}}{|1+x|} + C;$

(9) $2\sqrt{1+\ln x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1} \right| + C;$

- (10) $\frac{2}{27}\sqrt{3e^x-2}(3e^x+4)+C.$
4. (1) $\frac{2}{3};$ (2) $\arctan e-\frac{\pi}{4};$ (3) $\frac{7}{2};$ (4) $\frac{4}{3};$ (5) $2(2-\ln 3);$ (6) $1-\frac{\pi}{4};$
 (7) $\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$
5. (3) $\frac{1}{2}.$
7. (1) $\frac{1}{9}(\sin 3x - 3x \cos 3x) + C;$
 (2) $(x^3 + 6x)\sin x - (3x^2 + 6)\cos x + C;$
 (3) $\frac{1}{6}[2x^3 \arctan x - x^2 + \ln(1+x^2)] + C;$
 (4) $\frac{1}{2}(1-x^2)\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + C;$
 (5) $-\frac{x}{1+e^x} - \ln(e^{-x}+1) + C;$
 (6) $4\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x}\arcsin x + C;$
 (7) $x\tan x + \ln|\cos x| + C;$
 (8) $(4-2x)\cos\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + C;$
 (9) 1; (10) $-2\pi.$
9. (1) $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C;$
 (2) $\frac{1}{16}\ln\frac{t^2+1}{t^2+9} + C;$
 (3) $-\frac{1}{(x+1)^{99}}\left[\frac{1}{97}(x+1)^2 + \frac{1}{49}(x+1) + \frac{1}{99}\right] + C;$
 (4) $\ln|x| - \frac{2}{7}\ln|1+x^7| + C;$
 (5) $\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tan\frac{x}{2}\right) + C;$
 (6) $\ln|\cos x + \sin x| + C;$
 (7) $\frac{1}{6a}\ln\left|\frac{a+x^3}{a-x^3}\right| + C;$
 (8) $\frac{1}{4}[x^4 - 2\ln(x^8+4x^4+5) + 3\arctan(x^4+2)] + C;$
 (9) $-\frac{1}{2}(\ln \tan x)^2 + C;$
 (10) $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C;$ (11) $x\tan\frac{x}{2} + C;$
 (12) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C;$ (13) $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C;$
 (14) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C.$

(B)

2. $2\sqrt{2}\pi.$ 3. 0. 4. $\pi^2\pi.$ 5. $\frac{3}{2}-e^{\frac{5}{2}},$ 6. $\frac{e^x}{1+x}+C.$

习题 3.4

(A)

1. (1) $\frac{25}{3}$; (2) $\frac{1}{3}$; (3) $\frac{a^2}{6}$; (4) $\ln 2 - \frac{1}{2}$; (5) 8; (6) $\frac{4}{3}$; (7) 4; (8) $\frac{\pi}{3} + 2 - \sqrt{3}$;

(9) $3\pi a^2$; (10) $\frac{5}{8}\pi a^2$.

2. (1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$, $\frac{4}{3}\pi a^2 b$; (2) $\frac{\pi^2}{2}, 2\pi^2, \pi\left(4 - \frac{\pi}{2}\right)$; (3) $2\pi^2 a^2 b$; (4) 160π ; (5) $5\pi^2 a^3$.

3. (1) 2; (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (3) $\frac{\pi}{4}$.

4. $kMm\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right)$.

5. (1) $g \frac{h^2}{3} \sqrt{a^2 + b^2}$; (2) $g \frac{h^2}{6} \sqrt{a^2 + b^2}$.

6. (1) $\frac{2}{3}gab^2$; (2) πgab^2 .

7. (1) $\frac{1}{2}\pi gR^2 H^2$; (2) $\frac{1}{12}\pi gR^2 H^2$;

(3) $\frac{1}{12}\pi gH^2(R^2 + 2Rr + 3r^2)$; (4) $\frac{32}{3}\pi g$.

8. (1) $\frac{1}{2}\pi gR^2 H^2$; (2) $\frac{1}{2}\pi gR^2 H^2(2\mu - 1)$.

9. $\frac{2kq\delta}{R}$.

10. $\frac{2\pi kq\delta R}{(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$.

11. (1) $V_A = \frac{\pi a^2}{2}$, $V_B = \pi\left(1 - \frac{4}{5}a\right)$;

(2) $a = \frac{\sqrt{66} + 4}{5}$; (3) $a = \frac{4}{5}$.

(B)

1. $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

3. $4\pi \ln \frac{6}{5} \approx 2.291$ (万人).

习题 3.5

(A)

1. (1) $x^2 - y^2 = C$; (2) $y = e^{Cx}$;
 (3) $\arcsin y = \arcsin x + C$;
 (4) $2(x^3 - y^3) + 3(x^2 - y^2) + 5 = 0$;
 (5) $1 + y^2 = C(1 - x^2)$;
 (6) $x^2 + \arctan^2 y = C$.
2. (1) $(x^2 + y^2)^3 = Cx^2$; (2) $y = xe^{Cx+1}$;
 (3) $x^3 - 2y^3 = Cx$; (4) $y^2 = 2x^2(\ln x + 2)$.
3. (1) $y = Ce^{2x} + \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$; (2) $y = x^3(e^x + C)$;
 (3) $y = (x^2 + 1)(x + C)$; (4) $y = (\tan x - 1) + Ce^{-\tan x}$;
 (5) $y = \frac{1}{2}\ln x + \frac{C}{\ln x}$; (6) $y = Cx + x\ln \ln x$.
4. (1) $y^{-1} = Ce^{-x} - x^2 + 2x - 2$; (2) $y^3 = Ce^x - x - 2$;
 (3) $x = e^y(y + C)$; (4) $\cos y - 3x = C$;
 (5) $y = \tan(x + C) - x$; (6) $\tan(x - y + 1) = x + C$;
 (7) $y^2 = Ce^{2x} - x^2 - x - \frac{1}{2}$; (8) $y = \frac{1}{x}e^{Cx}$.
5. (3) $\arctan \frac{y+5}{x-1} - \frac{1}{2}\ln[(x-1)^2 + (y+5)^2] = C$ 与 $2x + (x-y)^2 = C$.
6. (1) $y = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1x + C_2$; (2) $y = C_1e^x + C_2 - \frac{x^2}{2} - x$; (3) $y = C_1e^x + C_2x + C_3$; (4) $y = -\ln \cos(x + C_1) + C_2$;
 (5) 当 $|y'| < 1$ 时, $y = C_1 \sin\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right)$; 当 $|y'| > 1$ 时, $y = C_1 \operatorname{sh}\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right)$; 当 $|y'| > 1$ 时, $y = -C_1 \operatorname{sh}\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right)$.
7. $x^2 + 2y = 1$.
8. $y = 2x^2$ 或 $y^2 = 32x$.
9. $v = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}$. 10. $\frac{1}{49}\text{kg}$.
11. $p = \frac{a+c}{b+d} + Ce^{-k(b+d)t}$.

(B)

1. (1) $b = \frac{2}{3}$ 时, $V^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}kt + V_0^{\frac{1}{3}}$; $b = 1$ 时, $V = V_0 e^{kt}$, 倍增时间 $t_d = \frac{\ln 2}{k}$.
 (2) $V = V_0 e^{\frac{A}{a}} (1 - e^{-at})$ (其中 a, A, V_0 均为常数, 且 V_0 为 $t=0$ 时的 V 值, A 为 $t=0$ 时的 k 值).
2. $y = \frac{5}{24} [2(1-x)^{\frac{6}{5}} - 3(1-x)^{\frac{4}{3}} + 1]$, $y|_{x=1} = \frac{5}{24}$.
3. 死亡时间大约在下午 5:23, 因此张某不能被排除在嫌疑犯之外.

习题 3.6

(A)

1. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{1}{15} \ln 4$; (3) 2; (4) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$; (5) π ; (6) 发散.
2. (1) 1; (2) 发散; (3) $\frac{8}{3}$; (4) 发散; (5) π ; (6) -1; (7) $\frac{\pi}{2}$; (8) $\ln(\pi+1)$.
3. (1) 发散; (2) π .
4. $k \leq 1$ 时发散, $k > 1$ 时收敛.
5. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛.
6. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 发散; (5) 收敛.
7. 解法一错.
8. 解法二错.

(B)

1. 不能.
2. (1) $p < 1$ 且 $q < 1$ 时收敛, 其它情形发散;
- (2) $p > 1$ 且 $q < 1$ 时收敛, 其它情形发散;
- (3) $1 < n < 2$ 时收敛; (4) 收敛.
3. (2) 提示: 利用分部积分法及等式 $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$.

综合练习题

1. 约 1.28×10^7 .2. 圆桶下沉的速度 v 与深度 y 之间的关系为

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{v}{k} + \frac{mg - B}{k^2} \ln \frac{mg - B - kv}{mg - B},$$

其中, m 为圆桶的质量, B 为浮力. 圆桶到达海底时的速度为 $v \approx 13.64 \text{ m/s}$, 因此, 圆桶会因碰撞而破裂.

3. (1) 利用微元法可得一个生产周期 $[0, T]$ 内的储存费为 $0.008T^2$,

$$f(T) = 30 \left(\frac{5}{T} + 0.008T \right);$$

$$(2) T_0 = 25(\text{d}), t_0 = 5(\text{d}).$$

第四章

习题 4.1

(A)

2. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1$.

3. (1) 收敛, $\frac{2q(q-2)}{(q-1)(q-3)}$; (2) 收敛, $\frac{1}{3}$;
 (3) 收敛, $1 - \sqrt{2}$; (4) 发散.

6. 8.

8. (1) 发散; (2) 发散; (3) 发散;
 (4) $x=0$ 时收敛, $x \neq 0$ 时发散.

9. $i + \frac{i}{11}$ 点伸 ($i = 1, 2, \dots, 11$).

11. (1) 否; (2) 否, 可考虑 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 与 $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$; (3) 否; (4) 否; (5) 否;
 (6) 是.

12. (1) 收敛; (2) 发散; (3) $\alpha > \frac{1}{2}$ 时收敛, $\alpha \leq \frac{1}{2}$ 时发散; (4) 收敛; (5) 收敛;
 (6) 收敛.

14. (1) 绝对收敛; (2) 条件收敛;

- (3) 条件收敛 (当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n - \ln n} \sim \frac{1}{n}$; 当 $x > 1$ 时 $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x - \ln x}) < 0$);
 (4) 条件收敛.

15. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛.

16. (1) $|a| < 1$ 时绝对收敛, $|a| > 1$ 时发散;
 (2) $a = b$ 时条件收敛, $a \neq b$ 时发散.

17. 0.8417.

18. (1) 绝对收敛; (2) 绝对收敛; (3) 条件收敛; (4) 条件收敛.

(B)

1. 注意 $\frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1}$.

2. 由极限定义, 若 $q > 1$, 则对于满足 $q - \epsilon = r > 1$ 的正数 ϵ , 存在自然数 N_0 , 使当 $n > N_0$ 时有 $\frac{-\ln a_n}{\ln n} > r$.

3. 利用 Taylor 公式及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内有界.

4. (1) 收敛; (2) 发散; (3) $a \leq 1$ 时收敛, $a > 1$ 时发散; (4) 发散; (5) 收敛.

习题 4.2

(A)

$$5. S(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ \frac{-x^2}{2+x^2}, & x \neq 0. \end{cases}$$

7. (1) 一致收敛; (2) 逐点收敛; (3) 一致收敛; (4) 一致收敛; (5) 1° 一致收敛, 2° 逐点收敛; (6) 一致收敛.

9. (1) 对 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ 利用定理 2.4.

(2) 先证明 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ 在 $|x| \leq q$ ($0 < q < 1$) 上一致收敛, 再对 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 利用定理 2.5.

(B)

5. 先证明 $u > 0$ 时 $e^u > \frac{u^2}{2}$ 成立, 从而有 $e^{-u} < \frac{2}{u^2}$, 再利用 M 判别法.

6. 利用 $|u_n(x)| \leq \max\{|u_n(a)|, |u_n(b)|\} \leq |u_n(a)| + |u_n(b)|$.

习题 4.3

(A)

3. 例如, 研究 $a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$.

4. 收敛域为: (1) $x = 0$; (2) $-\infty < x < +\infty$; (3) $-1 < x \leq 1$;

(4) $-4 \leq x < 0$; (5) $|x| < \sqrt{e}$; (6) $-\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3}$.

6. (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+1}, -\infty < x < +\infty$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, -\infty < x < +\infty$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{4^n} x^{2n}, -\infty < x < +\infty$;

(4) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}, |x| \leq 1$;

(5) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n! 4^n} x^n, -2 \leq x \leq 2$;

(6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} 2^n}{3} x^n, |x| < \frac{1}{2}$;

(7) $- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n} x^n, -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$;

(8) $3 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot (1+3) \cdot (1+6) \cdots [1+3(n-1)]}{81^n \cdot n!} x^{3n}, |x| < 3$.

7. 利用 $f(x)$ 的 Maclaurin 展开式, $f^{(2m)}(0) = 0$,

$$f^{(2m+1)}(0) = (-1)^{m+1} \frac{(2m+1)!}{(m+1)!} \quad (m=1, 2, \dots).$$

8. (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-2)^n, -\infty < x < +\infty$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{n!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n, -\infty < x < +\infty$;

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n, 0 < x \leq 2;$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}} \right) (x-5)^n, |x-5| < 2;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3^{n+1}} (x-3)^{n+1}, 0 < x < 6;$$

$$(6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{2^n}{n!} x^n, -\infty < x < +\infty;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1}, |x| < 1;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}, |x| < 1.$$

$$9. (1) \frac{2}{(1+x)^3}, |x| < 1; \quad (2) \frac{x(x-1)}{(x+1)^3}, |x| < 1;$$

$$(3) \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln(1-x), & |x| < 1, x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(4) x \arctan \frac{x}{3}, |x| \leq 3;$$

$$(5) \frac{1+x}{(1-x)^2}, |x| < 1; \quad (6) \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right), & -2 \leq x < 2, x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

$$10. (1) \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1); \quad (2) \frac{5}{16} + \frac{3}{8} \ln 2;$$

$$(3) \frac{22}{27}; \quad (4) 4.$$

$$11. (2) \frac{1}{5}.$$

$$13. (1) 2.71828; (2) 0.99846; (3) 0.76354; (4) 0.25049.$$

$$14. e^x \cos x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

习题 4.4

(A)

$$4. S(x) = \begin{cases} 1, & x = -2, \\ x, & |x| < 2, \\ 1, & x = 2, \\ 0, & 2 < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

$$5. (1) f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx, |x| \leq \pi;$$

$$(2) f(x) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{9n^2 - 1} \sin nx, |x| < \pi;$$

$$(3) f(x) = 1 + \frac{\sin \pi}{\pi} + \frac{2 \sin \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx), |x| < \pi;$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x), 0 < |x| < \pi.$$

$$(5) f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x), |x| \leq \pi.$$

$$6. (1) f(x) = -\frac{1}{3}l^2 + \frac{2l^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2}{n^2\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \right), |x| < l;$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\pi x), |x| \leq 1;$$

$$(3) f(x) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{4}, 0 \leq x \leq 8;$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)[4-(2n-1)^2]} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2},$$

|x| \leq 2;

$$(5) f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin((2n-1)x), |x| \leq \pi, S(\pi) = 0, S\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4},$$

$$S(-10) = (4\pi - 10)(10 - 3\pi).$$

$$7. (1) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, 0 < x \leq \pi;$$

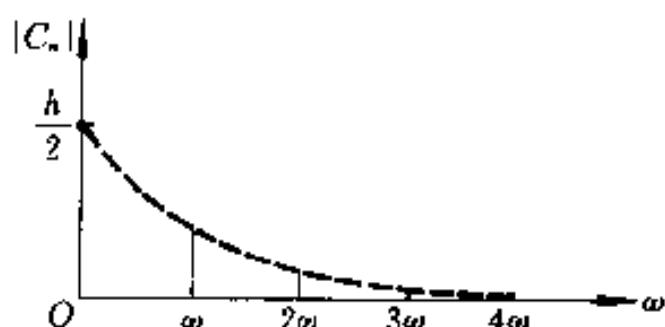
$$(2) f(x) = \frac{\pi}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi} \left((-1)^n + \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right] \cos nx, 0 \leq x < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi;$$

$$(3) f(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi}{6} \sin((2n-1)x), 0 \leq x \leq \pi;$$

$$(4) f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}, 0 \leq x \leq 2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

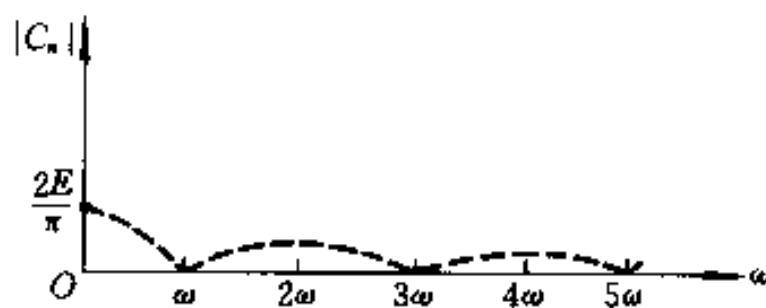
$$10. (1) f(t) = \frac{h}{2} + \sum_{n=1, n \neq 0}^{+\infty} \frac{hi}{2n\pi} e^{int} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right).$$



(第 10(1) 题图)

n	0	1	2	3	4	\dots
$ C_n $	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2\pi}$	$\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{1}{4}$	\dots

$$(2) f(t) = \frac{2E}{\pi} - \frac{2E}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{i2\omega nt}.$$



(第 10(2) 题图)

n	0	1	2	3	4	5	\dots
$ C_n $	$\frac{2E}{\pi}$	0	$\frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{3}$	0	$\frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{15}$	0	\dots

(B)

1. 利用 $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \geq 0$, 其中 $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0$, 其中 $S_n(x)$ 同上题.

综合练习题

$\frac{1}{15}\pi^4$. 将 $\frac{1}{e^x - 1}$ 展成 e^{-x} ($x > 0$) 的幂级数. 利用逐项求积分的方法, 并利用 $f(x) = |x|$ 的 Parseval 等式求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 的和.

参 考 文 献

- [1] 朱公谨编.高等数学 上册.北京:高等教育出版社,1956
- [2] R. 柯朗, F. 约翰著.微积分与数学分析引论 第一卷第一分册.张鸿林,周民强译.科学出版社,1979
- [3] R. 柯朗, F. 约翰著.微积分与数学分析引论 第一卷第二分册.刘嘉善,戴维等译.科学出版社,1982
- [4] 西安交通大学高等数学教研室编.高等数学 上册,第二版.北京:高等教育出版社,1987
- [5] 欧阳光中,朱学炎,秦曾复编.数学分析 上册.上海:上海科学技术出版社,1983
- [6] C. M. 尼柯尔斯基著.数学分析教程 第一卷第一分册.刘远图,郭思旭,高尚华译.北京:人民教育出版社,1980
- [7] C. M. 尼柯尔斯基著.数学分析教程 第一卷第二分册.高尚华,郭思旭,刘远图译.北京:人民教育出版社,1981
- [8] 朱自清主编.工科用数学分析 上册.武汉:华中理工大学出版社,1994
- [9] 刘玉琏,傅沛仁编.数学分析讲义 上册.北京:高等教育出版社,1992
- [10] 刘玉琏,傅沛仁编.数学分析讲义 下册.北京:高等教育出版社,1992
- [11] 李心灿主编.高等数学应用 205 例.北京:高等教育出版社,1997

目 录

第五章 多元函数微分学及其应用	1
第一节 n 维 Euclid 空间点集拓扑初步	1
1.1 n 维 Euclid 空间 \mathbf{R}^n	1
1.2 \mathbf{R}^n 中点列的极限	2
1.3 \mathbf{R}^n 中的开集与闭集	4
1.4 \mathbf{R}^n 中的紧集与区域	9
习题 5.1	10
第二节 多元函数的极限与连续性	11
2.1 多元函数的概念	11
2.2 多元函数的极限与连续性	13
2.3 多元连续函数的性质	17
习题 5.2	18
第三节 多元数量值函数的导数与微分	20
3.1 方向导数与偏导数	20
3.2 全微分	25
3.3 梯度及其与方向导数的关系	33
3.4 高阶偏导数和高阶全微分	37
3.5 多元复合函数的偏导数和全微分	39
3.6 由一个方程确定的隐函数的微分法	46
习题 5.3	48
第四节 多元函数的 Taylor 公式与极值问题	51
4.1 多元函数的 Taylor 公式	52
4.2 无约束极值, 最大值与最小值	55
4.3 有约束极值, Lagrange 乘数法	65
习题 5.4	68
第五节 多元向量值函数的导数与微分	69
5.1 向量值函数的方向导数与偏导数	69
5.2 向量值函数的导数与微分	71
5.3 微分运算法则	75
5.4 由方程组所确定的隐函数的微分法	77
习题 5.5	82
第六节 多元函数微分学在几何上的简单应用	83

6.1 空间曲线的切线与法平面	83
6.2 弧长	89
6.3 曲面的切平面与法线	93
习题 5.6	101
第七节 空间曲线的曲率与挠率	103
7.1 Frenet 标架	103
7.2 曲率	107
7.3 挠率	115
7.4 Frenet 公式	118
习题 5.7	119
综合练习题	120
第六章 多元函数积分学及其应用	121
第一节 多元数量值函数积分的概念与性质	121
1.1 物体质量的计算	121
1.2 多元数量值函数积分的概念	123
1.3 积分存在的条件和性质	126
习题 6.1	127
第二节 二重积分的计算	127
2.1 二重积分的几何意义	127
2.2 直角坐标系下二重积分的计算法	128
2.3 极坐标系下二重积分的计算法	135
2.4 曲线坐标下二重积分的计算法	140
习题 6.2	145
第三节 三重积分的计算	148
3.1 化三重积分为单积分与二重积分的累次积分	148
3.2 柱面与球面坐标下三重积分的计算法	152
习题 6.3	161
第四节 重积分的应用	162
4.1 重积分的微元法	163
4.2 应用举例	166
习题 6.4	170
第五节 含参变量的积分与反常重积分	171
5.1 含参变量的积分	171
5.2 含参变量的反常积分	175
5.3 反常重积分	178
习题 6.5	181
第六节 第一型线积分与面积分	182

6.1 第一型线积分.....	182
6.2 第一型面积分.....	186
习题 6.6	191
第七节 第二型线积分与面积分	193
7.1 场的概念.....	194
7.2 第二型线积分.....	196
7.3 第二型面积分.....	202
习题 6.7	210
第八节 各种积分的联系及其在场论中的应用	213
8.1 Green 公式	213
8.2 平面线积分与路径无关的条件.....	218
8.3 Stokes 公式与旋度	226
8.4 Gauss 公式与散度	232
8.5 几种重要的特殊向量场.....	239
习题 6.8	245
综合练习题	247
第七章 常微分方程.....	249
第一节 常微分方程的基本知识	249
1.1 微分方程与微分方程组.....	249
1.2 微分方程及其解的几何解释.....	254
1.3 可积组合与首次积分.....	257
习题 7.1	264
第二节 线性微分方程组	265
2.1 齐次线性微分方程组.....	266
2.2 非齐次线性微分方程组.....	271
习题 7.2	275
第三节 常系数线性微分方程组	276
3.1 常系数齐次线性微分方程组的求解.....	277
3.2 常系数非齐次线性微分方程组的求解.....	286
习题 7.3	294
第四节 高阶线性微分方程	295
4.1 高阶线性微分方程解的结构.....	296
4.2 高阶常系数线性微分方程的求解.....	297
4.3 高阶变系数线性微分方程的求解问题.....	310
习题 7.4	314
第五节 微分方程的定性分析方法初步	316
5.1 自治系统与非自治系统.....	316

5.2 稳定性的基本概念.....	318
5.3 判定稳定性的 Liapunov 函数法	320
5.4 由线性近似系统判定稳定性.....	326
习题 7.5	339
综合练习题	340
第八章 无限维分析入门	342
第一节 从有限维空间到无限维空间	342
1.1 多维空间概念的现实基础.....	342
1.2 为什么要研究无限维空间.....	344
1.3 数学中空间概念的含义.....	347
第二节 赋范线性空间与压缩映射原理	348
2.1 内积空间.....	348
2.2 赋范线性空间.....	351
2.3 赋范线性空间的收敛性与拓扑结构.....	354
2.4 空间的完备性.....	358
2.5 压缩映射原理及其应用.....	361
习题 8.2	365
第三节 Lebesgue 积分与 $L^p([a,b])$ 空间	367
3.1 从 R 积分到 L 积分	367
3.2 点集的 Lebesgue 测度与可测函数	369
3.3 Lebesgue 积分	374
3.4 $L^p([a,b])$ 空间	380
习题 8.3	382
第四节 Hilbert 空间与最佳逼近问题	383
4.1 正交投影与正交分解.....	383
4.2 最佳逼近问题.....	387
4.3 Hilbert 空间的正交系与 Fourier 展开	390
4.4 $L^2([a,b])$ 空间的 Fourier 展开与最佳均方逼近	394
习题 8.4	397
习题答案与提示	398
参考文献	420

第五章 多元函数微分学及其应用

在上册中,我们讨论了一元函数微积分,研究的对象是仅依赖于一个自变量的一元函数.然而,在实际问题中常会遇到依赖于两个或两个以上自变量的所谓多元函数,因此,还需要讨论多元函数的微积分.多元函数微积分的基本概念、理论和方法是一元函数微积分中相应概念、理论和方法的推广与发展,它们既有许多相似之处,又有许多本质上的不同.读者在学习多元函数微积分的时候,要善于将它与一元函数微积分进行比较,既要注意它们的共同点和相互联系,更要注重它们之间的区别,研究所出现的新情况和新问题.这样,才能深刻理解,融会贯通.

本章讨论多元函数微分学.首先简要介绍 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 中点集拓扑的初步知识,在此基础上将极限、连续的概念推广到多元函数.然后重点讲解多元函数(包括多元数量值函数与多元向量值函数)的导数、微分与微分法以及它们的应用,包括利用多元函数微分讨论曲线和曲面的一些基本性质.

第一节 n 维 Euclid 空间点集拓扑初步

由于多元函数的定义域是 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 中的子集,因此,本节先介绍 \mathbb{R}^n 中点集拓扑的初步知识.

1.1 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n

在线性代数中已经学习过 n 维 Euclid 空间及有关的概念,现就其中主要之点概述如下.

我们称一个 n ($n \geq 2$) 元有序实数组

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n)$$

为一个 n 维实向量,记 n 维实向量全体所构成的集合为

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义两个向量的加法为

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad (1.1)$$

向量与数 $a \in \mathbb{R}$ 的乘法为

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n), \quad (1.2)$$

则 \mathbb{R}^n 构成一个 n 维实向量空间(或 n 维实线性空间).

在 n 维实向量空间中定义两个向量 x 与 y 的内积为

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (1.3)$$

则 \mathbb{R}^n 按照内积(1.3)构成一个 n 维 Euclid 空间.

n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 中的向量也称为点, 向量 x 的第 i 个分量 x_i 也称为点 x 的第 i 个坐标. \mathbb{R}^n 中的点(向量)常用小写黑体英文字母 x, y, a, b 等表示, 有时也用大写英文字母 P, Q 等来表示 \mathbb{R}^n 中的点.

\mathbb{R}^n 中向量 x 的长度(或范数)定义为

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \quad (1.4)$$

两点 x 与 y 之间的距离定义为

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \quad (1.5)$$

\mathbb{R}^n 中上述概念是三维空间 \mathbb{R}^3 中相应概念的直接推广.

1.2 \mathbb{R}^n 中点列的极限

现在, 我们仿照数列(即 \mathbb{R} 中的点列)极限概念和有关性质来讨论 \mathbb{R}^n 中的点列极限概念和有关性质.

定义 1.1 (点列的极限) 设 $\{x_k\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一个点列, $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是 \mathbb{R}^n 中的一点, 若当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\rho(x_k, a) \rightarrow 0$, 即

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall k > N, \text{恒有 } \|x_k - a\| < \epsilon, \quad (1.6)$$

则称点列 $\{x_k\}$ 的极限存在, 且称 a 为它的极限, 记作

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \quad \text{或} \quad x_k \rightarrow a (k \rightarrow \infty).$$

这时也称点列 $\{x_k\}$ 收敛于 a .

定理 1.1 设点列 $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, 点 $a \in \mathbb{R}^n$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ 的充要条件是 $\forall i = 1, 2, \dots, n$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i$.

证 由于 $\forall i = 1, 2, \dots, n$, 恒有

$$|x_{k,i} - a_i| \leq \|x_k - a\|.$$

根据定义 1.1 立即可证明必要性. 下面证明充分性. 设 $\forall i = 1, 2, \dots, n$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i$, 则

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_i \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall k > N_i, \text{恒有 } |x_{k,i} - a_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$, 则 $\forall k > N$, 必有

$$|x_{k,i} - a_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} (i = 1, 2, \dots, n).$$

从而 $\forall k > N$, 我们有

$$\|x_k - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{k,i} - a_i)^2} < \epsilon,$$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. ■

定理 1.1 表明, \mathbb{R}^n 中点列 $\{x_k\}$ 收敛于 a 等价于该点列的各个坐标(或分量)所构成的数列 $\{x_{k,i}\}$ 分别收敛于点 a 的相应坐标(或分量) a_i . 因此, 它把研究 \mathbb{R}^n 中点列的收敛问题转化为实数列的收敛问题. 这样, 第一章中所讨论过的收敛数列的许多性质就可以利用该定理很容易地推广到 \mathbb{R}^n 中的收敛点列. 读者不难证明下面的定理.

定理 1.2 设 $\{x_k\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的收敛点列, 则

- (1) $\{x_k\}$ 的极限是唯一的;
- (2) $\{x_k\}$ 是有界点列, 即 $\exists M (\in \mathbb{R}) > 0$, 使得 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 恒有 $\|x_k\| \leq M$;
- (3) 若 $x_k \rightarrow a, y_k \rightarrow b$, 则 $x_k \pm y_k \rightarrow a \pm b, ax_k \rightarrow ab, \langle x_k, y_k \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, 其中 $a \in \mathbb{R}$;
- (4) 若 $\{x_k\}$ 收敛于 a , 则它的任一子列也收敛于 a .

由于 \mathbb{R}^n 中的向量不能比较大小, 也不能相除, 因此, 数列极限中与单调性、保序性、确界以及商有关的概念与命题不能推广到 \mathbb{R}^n 中的点列. 但是, 闭区间套定理、Bolzano-Weierstrass 定理与 Cauchy 收敛原理在 \mathbb{R}^n 中仍然成立.

设 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, 称点集

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为 \mathbb{R}^n 中的 n 维闭区间, 记作 $[a, b]$. 显然,

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

当 $n=1$ 时, 它就是直线 \mathbf{R} 上的闭区间 $[a_1, b_1]$; 当 $n=2$ 时, 它是平面 \mathbf{R}^2 上的闭矩形 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$; 当 $n=3$ 时, 它是空间 \mathbf{R}^3 中的闭长方体 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. 下面证明 \mathbf{R}^n 中的闭区间套定理.

定理1.3(闭区间套定理) 设 $\{[a_k, b_k]\}$ 是 \mathbf{R}^n 中一个闭区间套, 即

- (1) $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_k, b_k] \supseteq \cdots$;
- (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|b_k - a_k\| = 0$, 其中 $a_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbf{R}^n$, $b_k = (b_{k,1}, b_{k,2}, \dots, b_{k,n}) \in \mathbf{R}^n$, 则存在唯一的 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$, 使

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{\xi\}.$$

证 由于每个 $\{[a_{k,i}, b_{k,i}]\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 都是直线 \mathbf{R} 上的闭区间套, 因此根据直线上的闭区间套定理, 对于每个 $i=1, 2, \dots, n$, 都存在唯一的实数

$$\xi_i \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_{k,i}, b_{k,i}]. \text{令 } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \text{则 } \xi \in \mathbf{R}^n, \text{且 } \xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]. \blacksquare$$

利用定理 1.3, 仿照第一章中定理 3.9 的证法容易证明下面的定理.

定理1.4(Bolzano – Weierstrass 定理) \mathbf{R}^n 中的有界点列必有收敛子列. (\mathbf{R}^n 中点列 $\{x_k\}$ 的收敛子列的极限也称为 $\{x_k\}$ 的极限点.)

设 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的点列, 若

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall k > N \text{ 及 } p \in \mathbf{N}_+, \text{恒有 } \|x_{k+p} - x_k\| < \epsilon,$$

则称 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的基本点列或 Cauchy 点列. 类似于定理 1.1 不难证明, $\{x_k\}$ 是 Cauchy 点列的充要条件是 $\forall i=1, 2, \dots, n$, $\{x_{k,i}\}$ 都是 Cauchy 数列. 根据第一章中所介绍的数列的 Cauchy 收敛原理, 立即可以得到 \mathbf{R}^n 中点列的 Cauchy 收敛原理如下.

定理1.5(Cauchy 收敛原理) \mathbf{R}^n 中点列 $\{x_k\}$ 收敛于 \mathbf{R}^n 中点的充要条件为 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的 Cauchy 点列.

这个定理刻画了空间 \mathbf{R}^n 的完备性, 就是说, \mathbf{R}^n 中的 Cauchy 点列必收敛于 \mathbf{R}^n 中的点. 现代数学中就是以此作为抽象空间完备性定义的, 关于这个问题在第八章中再作进一步说明.

1.3 \mathbf{R}^n 中的开集与闭集

本段简要地介绍 \mathbf{R}^n 中点集的基本知识, 包括开集、闭集与区域等. 虽然这些概念都是在空间 \mathbf{R}^n 中定义的, 但读者可以在平面 \mathbf{R}^2 中去理解它们.

定义1.2 设 A 是 \mathbf{R}^n 中的一个点集, $a \in \mathbf{R}^n$. 若存在 A 中的点列 $\{x_k\}$,

$x_k \neq a$ ($k = 1, 2, \dots$), 使得 $x_k \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$), 则称 a 是 A 的一个聚点. A 的所有聚点构成的集合称为 A 的导集, 记作 A' . 集合 $\bar{A} = A \cup A'$ 称为 A 的闭包. 若 $a \in A$, 但 $a \notin A'$, 则称 a 为 A 的孤立点. 若 $A' \subseteq A$, 则称 A 为闭集.

由定义易见, 集 A 的聚点不一定属于 A . 若 A 的所有聚点都属于 A , 则 A 是闭集. 因此, 若 A 是闭集, $\{x_k\}$ 是 A 中的任一点列, 且 $x_k \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$), 则 $a \in A$. 反之亦真. 这说明闭集对于极限运算是封闭的.

例如, 设 $A = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \mid k \in \mathbb{N}_+ \right\}$ 是一平面点集, 则点 $(0, 0)$ 是 A 的唯一聚点, 它不属于 A , 并且 $A' = \{(0, 0)\}$, $\bar{A} = A \cup \{(0, 0)\}$, A 中的所有点都是它的孤立点. A 不是闭集, 但 $\bar{A} = A \cup \{(0, 0)\}$ 是闭集.

定义 1.3 设 $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, 称点集

$$U(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\}$$

为以 a 为中心、 δ 为半径的开球或点 a 的 δ 邻域, 称

$$\dot{U}(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$$

为点 a 的去心 δ 邻域. 它们分别简记为 $U(a)$ 与 $\dot{U}(a)$.

在直线 \mathbb{R} 上, 开球 $U(a, \delta)$ 就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$; 在平面 \mathbb{R}^2 上, 开球 $U(a, \delta)$ 就是以 $a = (a_1, a_2)$ 为圆心, δ 为半径的圆周 $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = \delta^2$ 内的所有点构成的集合(称为开圆盘); 在空间 \mathbb{R}^3 中, 它就是以 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 为圆心, δ 为半径的球面 $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = \delta^2$ 内的所有点构成的集合, 也就是通常所说的开球.

与数列极限类似, \mathbb{R}^n 中点列收敛的概念也可以用邻域来刻画. 设 $\{x_k\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一个点列, 若

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall k > N, \text{恒有 } x_k \in U(a, \epsilon),$$

则称点列 $\{x_k\}$ 收敛于 a , a 是 $\{x_k\}$ 的极限.

定理 1.6 设 A 是 \mathbb{R}^n 中的一个点集, $a \in \mathbb{R}^n$, 则 $a \in A'$ 的充要条件为 $\forall \epsilon > 0, \dot{U}(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. 这就是说, a 为 A 的聚点当且仅当 a 的任何 ϵ 邻域中都含有 A 中除 a 之外的点.

证 必要性 设 $a \in A'$, 根据定义 1.2, 存在 A 中的点列 $\{x_k\}$, $x_k \neq a$ ($k = 1, 2, \dots$), 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. 用邻域来表示, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall k > N$, 恒有 $x_k \in \dot{U}(a, \epsilon)$. 由于 $\{x_k\} \subseteq A$, 从而得知, $\forall \epsilon > 0, \dot{U}(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

充分性 若 $\forall \epsilon > 0, \dot{U}(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, 则 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 取 $\epsilon_k = \frac{1}{k}$, 必存在点 $x_k \in \dot{U}(a, \epsilon_k) \cap A$. 这就是说, 存在 A 中的点列 $\{x_k\}$, $x_k \neq a$ ($k = 1, 2, \dots$), 并且

$\|x_k - a\| < \epsilon_k = \frac{1}{k}$, 从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, 故 $a \in A'$. ■

由定义 1.2, 若 $A' = \emptyset$, 则 A 为闭集. 因此, 单点集和有限点集都是闭集.

定义 1.4 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.

(1) 若存在 $\delta > 0$, 使 $U(a, \delta) \subseteq A$, 则称 a 是集 A 的内点. 由 A 的所有内点构成的集称为 A 的内部, 记作 A° 或 $\text{int } A$;

(2) 若存在 $\delta > 0$, 使 $U(a, \delta) \cap A = \emptyset$, 则称 a 是集 A 的外点. A 的所有外点构成的集称为 A 的外部, 记作 $\text{ext } A$;

(3) 若对任何 $\delta > 0$, $U(a, \delta)$ 中既含有 A 中的点, 也含有 A 的余集 A^c 中的点, 则称 a 为集 A 的边界点. A 的所有边界点构成的集称为 A 的边界, 记作 ∂A .

由定义易见, \mathbb{R}^n 中的任一点是且仅是 A 的内点、外点与边界点中的一种, 即

$$\mathbb{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup \text{ext } A,$$

且右端三个点集互不相交(图 1.1).

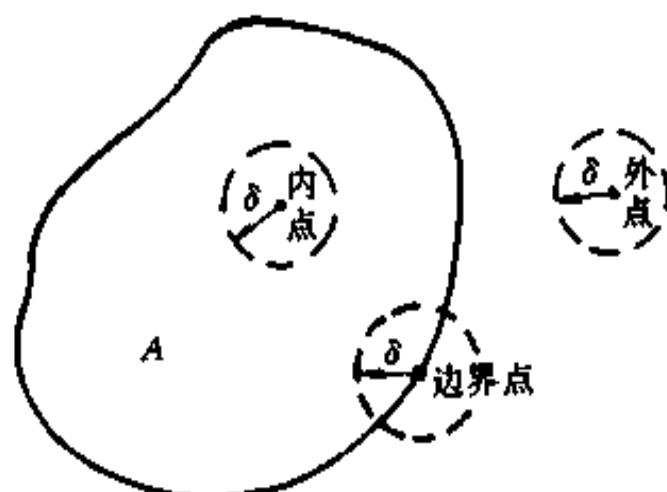


图 1.1

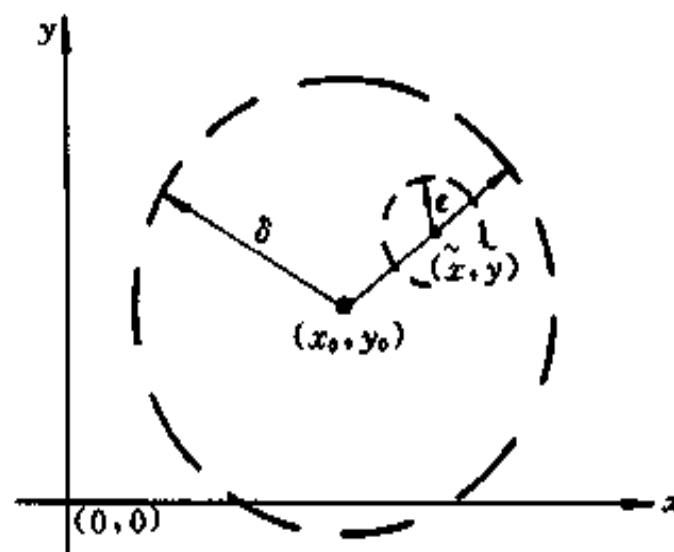


图 1.2

例 1.1 设 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$, 证明 $A^\circ = A$,

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta^2\};$$

$$\bar{A} = A \cup \partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2\}.$$

证 题中关于边界 ∂A 和闭包的结论是显然的, 下面证明 $A^\circ = A$. 由定义知 $A^\circ \subseteq A$, 因此只要证明 $A \subseteq A^\circ$. 设 $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in A$, 取 $\epsilon < \delta - \sqrt{(\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2}$, 则点 (\tilde{x}, \tilde{y}) 的 ϵ 邻域 $U((\tilde{x}, \tilde{y}), \epsilon) \subseteq A$, 因而 (\tilde{x}, \tilde{y}) 是 A 的内点(图 1.2), 故 $A \subseteq A^\circ$. ■

由定义易见, 对于 \mathbb{R}^n 中的任一点集 A , 必有

$$\bar{A} = A \cup \partial A.$$

特别地, 称开球与它的边界之并为闭球, 记作

$$\overline{U}(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq \delta\}.$$

例1.2 设 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0, 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$. 由定义 1.4 易知, $A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, $\text{ext } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 > 4\}$, $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(0, 0)\}$, 原点 $(0, 0)$ 是 A 的孤立点, $\overline{A} = A \cup \partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ (图 1.3).

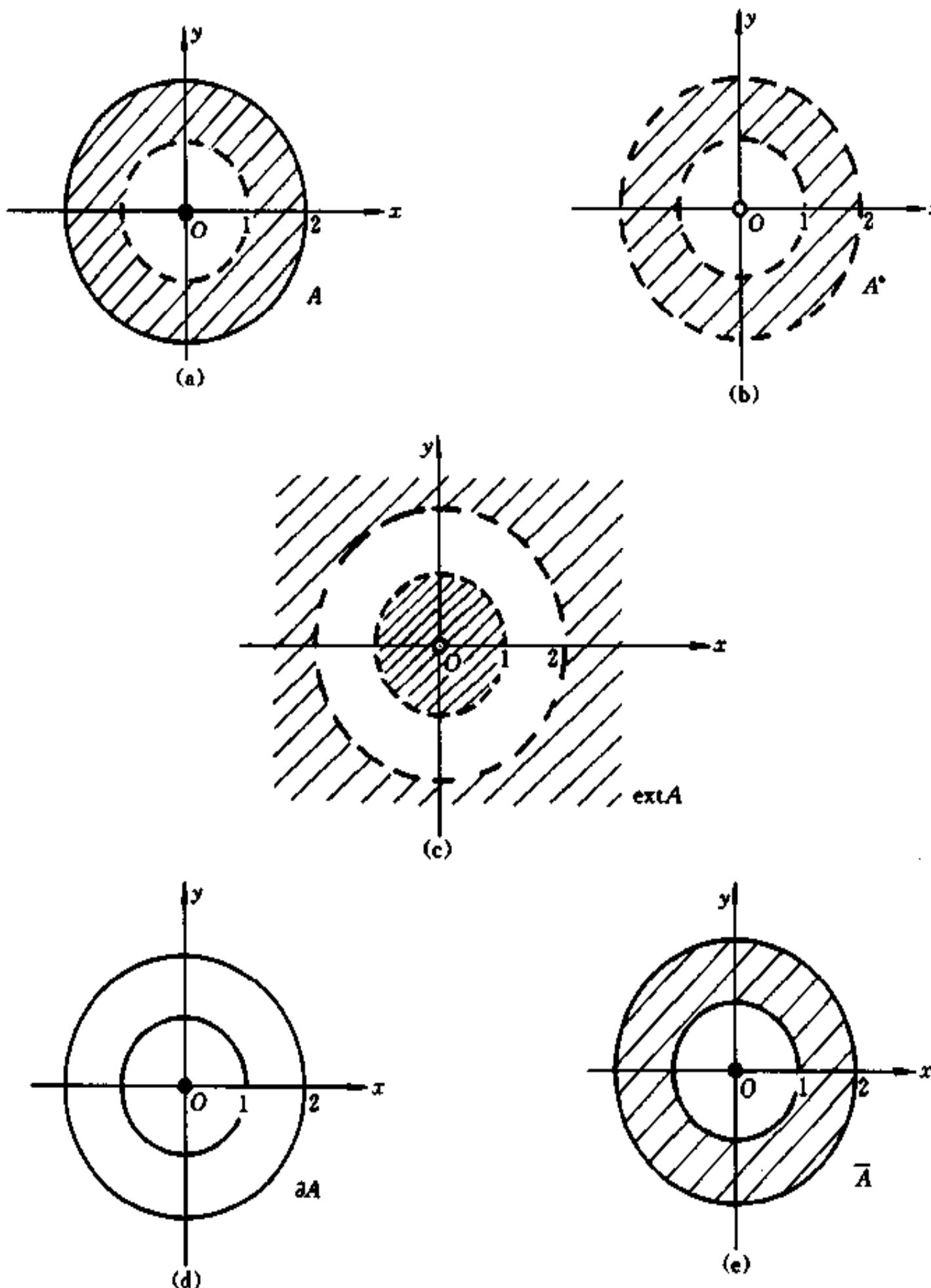


图 1.3

定义1.5 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 $A^\circ = A$, 即 A 中的点全是 A 的内点, 则称 A 为

开集.

下面的定理刻画了开集与闭集的关系.

定理1.7 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集的充要条件为 A^c 是闭集.

证 必要性 设 A 是开集, 故 $A^\circ = A$. 为了证明 A^c 是闭集, 只要证明 $(A^c)^\circ \subseteq A^c$. 若 $(A^c)^\circ = \emptyset$, 则显然有 $(A^c)^\circ \subseteq A^c$. 若 $(A^c)^\circ \neq \emptyset$, 设 $x \in (A^c)^\circ$, 则 $\forall \epsilon > 0$,

$$\dot{U}(x, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$

由内点的定义知 $x \in \overline{A^\circ} = A$, 即 $x \in A^c$, 故 $(A^c)^\circ \subseteq A^c$.

充分性 设 A^c 是闭集, 则 $(A^c)^\circ \subseteq A^c$. 为了证明 A 是开集, 由于 $A^\circ \subseteq A$, 所以只要证明 $A \subseteq A^\circ$. 设 $x \in A$, 则 $x \in \overline{A^c}$. 又因 A^c 为闭集, 故有 $(A^c)^\circ \subseteq A^c$, 所以有 $x \in (A^c)^\circ$. 根据定理 1.6, 必 $\exists \delta_0 > 0$, 使 $\dot{U}(x, \delta_0) \cap A^c = \emptyset$, 故 $\dot{U}(x, \delta_0) \subseteq A$, 即 $x \in A^\circ$, 所以 $A \subseteq A^\circ$. ■

例1.3 \mathbb{R}^n 中的开球 $U(a, \delta)$ 与开区间

$$(a, b) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

都是开集. 闭球 $\bar{U}(a, \delta)$ 与闭区间

$$[a, b] = \{x \in (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

都是闭集. 例 1.2 中的 A° 与 $\text{ext } A$ 都是开集, ∂A 与 \bar{A} 是闭集.

读者应当注意, 开集与闭集是常常碰到的两类点集, 但是还存在着很多其他类型的点集. 例如, 直线 \mathbb{R} 上的有理点集与无理点集既不是开集, 又不是闭集, 因为它们都没有内点, 而且实数都是它们的聚点. 因此, 不能说一个点集“非开即闭”.

下面的定理刻画了开集的特征.

定理1.8 在 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 中, 开集有如下性质:

- (1) 空集 \emptyset 与全空间 \mathbb{R}^n 是开集;
- (2) 任意多个开集的并是开集;
- (3) 有限多个开集的交是开集.

证 根据定义, 性质(1)显然成立.

(2) 设 $A_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\alpha \in \Lambda$, Λ 称为指标集) 是一族开集. 任取 $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, 则必

$\exists \alpha_0 \in \Lambda$ 使 $x \in A_{\alpha_0}$. 由于 A_{α_0} 是开集, 所以 $\exists \delta > 0$, 使 $U(x, \delta) \subseteq A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$,

即 x 是 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ 的内点, 故 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ 是开集.

(3) 设 $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ ($k = 1, 2, \dots, m$) 是开集, 任取 $x \in \bigcap_{k=1}^m A_k$, 则 $x \in A_k$ ($k = 1,$

$2, \dots, m$). 由于 A_k 是开集, 所以 $\forall k = 1, 2, \dots, m, \exists \delta_k > 0$, 使 $U(x, \delta_k) \subseteq A_k$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$, 则

$$U(x, \delta) \subseteq U(x, \delta_k) \subseteq A_k (k = 1, 2, \dots, m).$$

因此, $U(x, \delta) \subseteq \bigcap_{k=1}^m A_k$, 即 x 是 $\bigcap_{k=1}^m A_k$ 的内点, 故 $\bigcap_{k=1}^m A_k$ 是开集. ■

由此定理, 读者不难利用对偶原理(第一章定理 1.2)证明闭集的三个对应的基本性质:

- (1) 空集 \emptyset 和全空间 \mathbf{R}^n 是闭集;
- (2) 任意多个闭集的交是闭集;
- (3) 有限多个闭集的并是闭集.

1.4 \mathbf{R}^n 中的紧集与区域

设 A 是 \mathbf{R}^n 中的一个点集, 如果存在一个常数 $M > 0$, 使得对于所有的 $x \in A$, 都有 $\|x\| \leq M$, 则称 A 是有界集, 否则称为无界集. 显然, 有界集的几何含义是它能包含在 \mathbf{R}^n 中一个以原点 0 为中心、 M 为半径的闭球 $\bar{U}(0, M)$ 中.

定义 1.6 若 A 中任何点列都有收敛子列, 则称 A 是列紧的(或相对紧的). 若 A 是列紧闭集, 则称 A 为紧集.

根据 Bolzano - Weierstrass 定理, \mathbf{R}^n 中的有界点集 A 必为列紧集. 因而, 若 A 是有界闭集, 则 A 必为紧集. 反之不难证明, 若 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是紧集, 则 A 必为有界闭集.

定义 1.7 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一个点集, 如果 A 中的任意两点 x 与 y 都能用完全属于 A 的有限个线段联结起来, 则称 A 是连通集. 连通的开集称为区域. 区域与它的边界之并称为闭区域.

显然, \mathbf{R}^2 中的开圆盘是区域, 闭圆盘是闭区域. 图 1.4(a)中的集合是区

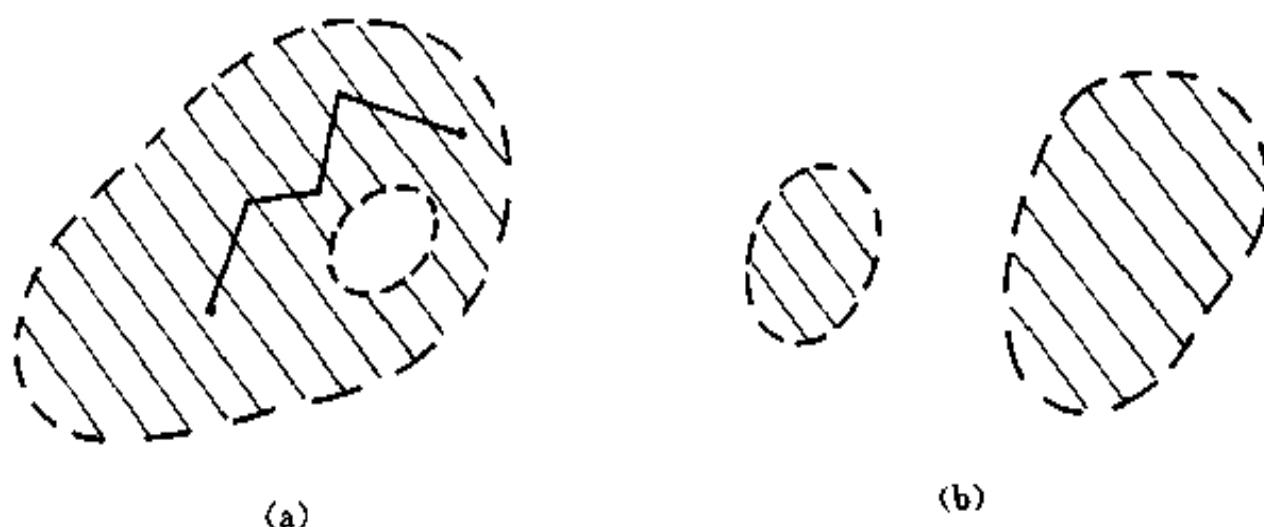


图 1.4

域,图 1.4(b)中的集合不是区域.在开圆盘中去掉任意一条直径后所得到的集合也不是区域,因为它破坏了集合的连通性.

设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$,若联结 A 中任意两点的线段都属于 A ,即若 $x_1, x_2 \in A$,则 $\forall t \in [0, 1], tx_1 + (1-t)x_2 \in A$,则称 A 是 \mathbb{R}^n 中的凸集.由定义 1.7 得知,任何凸集都是连通的,因而任何凸开集都是区域.

习题 5.1

(A)

1. 设 $\{x_k\}$ 为 \mathbb{R}^n 中的点列, $a \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, 证明: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|a\|$.

2. 求平面 \mathbb{R}^2 中下列点列的极限(其中 $n \in \mathbb{N}_+$):

$$(1) \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{n}{n+1} \right); \quad (2) \left(\frac{n^2+1}{n^2-n-1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right).$$

3. 证明定理 1.2 中的(2),(4).

4. 求下列各集的导集,闭包,并说明是否为闭集:

$$(1) A = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 2\}; \quad (2) A = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \mid m, n \in \mathbb{N}_+ \right\};$$

$$(3) A = \{(x, y) | x, y \text{ 为整数}\}; \quad (4) A = \{(x, y) | x, y \text{ 为有理数}\}.$$

5. 下列集合是开集还是闭集,求出它们的内部、边界和闭包:

$$(1) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\};$$

$$(2) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y < x^2\};$$

$$(3) A = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| = 1\};$$

$$(4) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 < x < 1, y = 0\}.$$

6. 第 5 题中的集合是否为区域? 有界还是无界?

7. 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个点集, 证明:

(1) A° 与 $\text{ext } A$ 是开集;

(2) $A^\circ, \partial A$ 是闭集;

(3) A 为开集 $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset$.

8. 说明下列集合是紧集:

$$(1) \text{有限点集}; \quad (2) A = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\};$$

$$(3) \mathbb{R}^n \text{ 中的闭区间}; \quad (4) \mathbb{R}^n \text{ 中的单位球面 } \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| = 1\}.$$

(B)

1. 证明聚点原理: \mathbb{R}^n 中的有界无限点集至少有一个聚点.

2. 设 a 是 \mathbb{R}^n 中的一个常向量, $c \in \mathbb{R}$ 为一常数, 证明:

(1) 半空间 $\{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x \rangle < c\}$ 是开凸集, 因而是区域;

(2) 半空间 $\{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x \rangle \geq c\}$ 是闭凸集, 因而是闭区域;

(3) 超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = c\}$ 是闭凸集, 因而是闭的连通集.

3. 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, 称 $\text{diam } A = \sup \{ \|x - y\| \mid x, y \in A\}$ 为集 A 的直径. 若 $\{F_k\} (k \in \mathbb{N}_+)$ 是 \mathbb{R}^n 中的有界非空闭集套, 即

- (1) $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_k \supseteq \cdots$;
- (2) $\text{diam } F_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$.

证明: 存在唯一的 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 使 $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \{\xi\}$.

第二节 多元函数的极限与连续性

本节首先介绍多元数量值函数与多元向量值函数的概念, 然后将极限和连续性概念推广到多元函数, 并讨论多元连续函数的性质.

2.1 多元函数的概念

在实际问题中常常要研究多个变量之间的关系. 例如, 理想气体状态方程式 $p = R \frac{T}{V}$ (R 为常数) 表示气体的压强 p 对体积 V 与绝对温度 T 的依赖关系, 可以看成两个自变量 V 和 T 与一个因变量 p 之间的关系. 又如, 将点电荷 q 置于空间 \mathbb{R}^3 的坐标原点处, 根据 Coulomb 定律, 它在空间 \mathbb{R}^3 中任一点 $r(x, y, z)$ 处产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = kq \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = kq \frac{xi + yj + zk}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = E_x i + E_y j + E_z k.$$

它表示电场强度向量 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ 对空间位置的坐标 x, y, z 的依赖关系, 可以看作是三个自变量 x, y, z 与三个因变量 E_x, E_y, E_z 之间的关系, 也可看成是三个变量 x, y, z 与一个向量 \mathbf{E} 之间的关系. 理想气体状态方程式中压强 p 就是 V, T 的一个数量值函数, 而电场强度向量 \mathbf{E} 就是 x, y, z 的一个向量值函数. 因此, 多元函数有多元数量值函数与多元向量值函数之分.

定义 2.1 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个点集, 称映射 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在 A 上的一个 n 元数量值函数, 简称为 n 元函数, 也可记作

$$w = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ 称为自变量, $D(f) = A$ 称为 f 的定义域, w 称为因变量, $R(f) = \{w \mid w = f(x), x \in D(f)\}$ 称为 f 的值域.

习惯上, 二元函数常记成 $z = f(x, y), (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, 三元函数常记成

$$u = f(x, y, z), (x, y, z) \in A \subseteq \mathbb{R}^3.$$

例2.1 求下列函数的定义域 D :

$$(1) z = \ln(1 - x^2 - 2y^2);$$

$$(2) z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1};$$

$$(3) w = \frac{1}{\sqrt{z - x^2 - y^2}}.$$

解 (1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 1\}$, 它是 xOy 平面上以椭圆 $x^2 + 2y^2 = 1$ 为边界的有界区域(图 2.1(a)中阴影部分).

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \geq 1\}$, 它表示 xOy 平面上的两个无界闭区域(图 2.1(b)中阴影部分).

(3) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > x^2 + y^2\}$, 它表示三维空间 \mathbb{R}^3 中以抛物面 $z = x^2 + y^2$ 为边界的无界区域(图 2.1(c)中阴影部分). ■

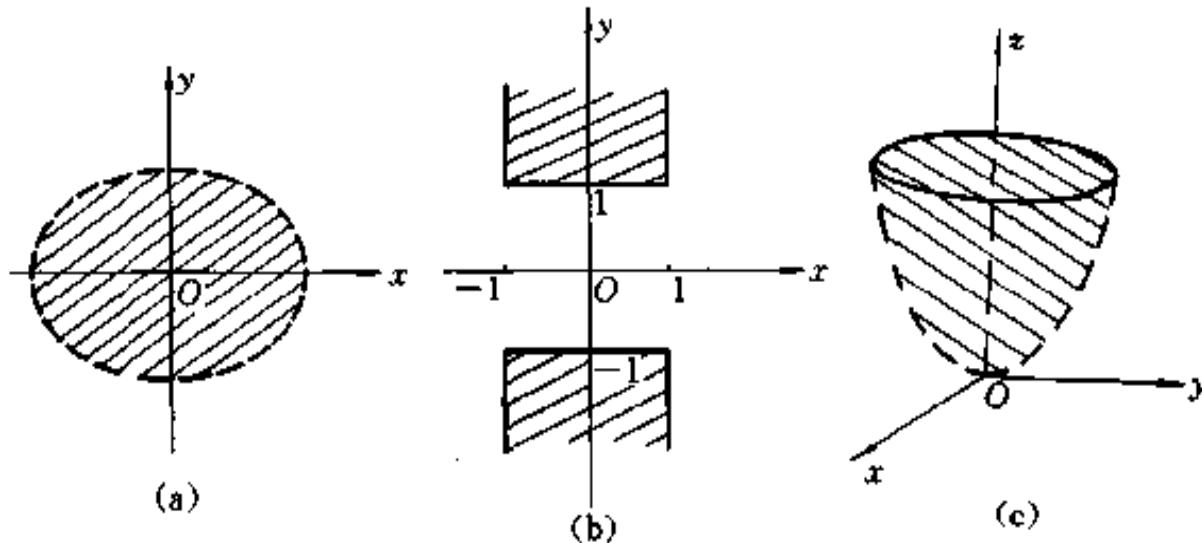


图 2.1

二元函数 $z = f(x, y)$ ($(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$) 的图象

$$\text{Gr}f = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$$

是 \mathbb{R}^3 中的点集, 通常是 \mathbb{R}^3 中的曲面. 一般, n 元函数 $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$) 的图象

$$\text{Gr}f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, w) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A, w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

是 \mathbb{R}^{n+1} 中的点集, 通常是 \mathbb{R}^{n+1} 中的超曲面. 例如, 函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) 的图象是 \mathbb{R}^3 中的圆锥面, 线性函数

$$w = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

是 \mathbb{R}^{n+1} 中的超平面, 其中 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 是常向量.

定义2.2 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个点集, 称映射 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$) 为定义在 A 上

的一个 n 元向量值函数,也可记作 $y = f(x)$, $x \in A$, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ 是自变量, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ 是因变量, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$.

显然,一个 n 元向量值函数 $y = f(x)$ 对应于 m 个 n 元数量值函数:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

为了运算方便起见,有时把 \mathbb{R}^n 与 \mathbb{R}^m 中的向量写成列向量. 在这种情况下,可把 n 元向量值函数写成如下形式:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$.

例2.2 我们知道,空间 \mathbb{R}^3 中曲线的参数方程为:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R},$$

它可以看成是从 $[\alpha, \beta]$ 到 \mathbb{R}^3 的一个映射,即一元向量值函数

$$r = r(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

其中 $r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. 本段开始提到的电场强度 $E(r) = E(x, y, z)$ 可以看成是从 \mathbb{R}^3 到 \mathbb{R}^3 的三元向量值函数.

2.2 多元函数的极限与连续性

与一元函数一样,为了建立多元函数微积分,必须将极限与连续性概念推广到多元函数. 这两个概念从一元推广到二元会有本质上的变化,而从二元推广到 n ($n > 2$) 元没有任何实质性的困难,因此,下面主要讨论二元函数.

设 A 是平面 \mathbb{R}^2 上的一个点集, (x_0, y_0) 是 \mathbb{R}^2 中的一点. 我们仿照一元函数极限的定义来定义二元数量值函数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 的极限. 在讨论一元函数 f 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限定义时,要求函数 f 定义在 x_0 的某去心邻域上. 这是由于: 一方面极限是用来研究当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 变化趋势的,它与 f 在 x_0 处是否有定义,以及在 x_0 处函数值 $f(x_0)$ 的大小无关,也就是说,与 x_0 是否在 f 的定义域中无关; 另一方面,为了反映 $f(x)$ 变化的趋势,还应要求在 x_0 的

任何邻域内都含有 f 的定义域中点 x . 因此, 要求 f 定义在 x_0 的某去心邻域中, 实际上就是要求 x_0 是 f 的定义域的聚点. 基于同样的理由, 在定义二元函数 $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 的极限时, 也应当要求 (x_0, y_0) 是定义域 A 的一个聚点. 于是, 便得到如下定义.

定义2.3(二重极限) 设有点集 $A \subseteq \mathbf{R}^2$, $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个二元数量值函数, (x_0, y_0) 是 A 的一个聚点, $a \in \mathbf{R}$ 是常数. 若

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得 } \forall (x, y) \in \dot{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A, \text{恒有 } |f(x, y) - a| < \epsilon. \quad (2.1)$$

则称当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 有极限, 且称 a 为当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限, 记作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = a \text{ 或 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a,$$

这个极限也称为二重极限. 否则, 称当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 没有极限.

在上面的定义中, 由于 f 的定义域是一个集合 A , 因此, 在(2.1)式中要求 $(x, y) \in \dot{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A$.

二重极限的定义在形式上与一元函数极限定义并无多大差异, 因此, 一元函数极限的有关性质(如唯一性、局部有界性、局部保号性、夹逼准则以及 Heine 定理等)和运算法则都可以推广到二重极限中来, 这里不再一一重述.

但是, 在二重极限中, 由于自变量的增多, 产生了一些与一元函数极限的本质差异. 在一元函数极限中, 点 x 只能在数轴上从 x_0 左右趋近于 x_0 ; 在二重极限中, 点 (x, y) 在平面集合 A 中趋近于 (x_0, y_0) 的方式可能是多种多样的, 方向可以任意多, 路径也可以是千姿百态的. 所谓 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = a$ 是指当点 (x, y) 在集 A 中从 (x_0, y_0) 的四面八方以可能有的任何方式和任何路径趋于 (x_0, y_0) 时, $f(x, y)$ 都趋于同一个常数 a . 因此, 如果 (x, y) 以两种不同的方式或路径趋于 (x_0, y_0) 时 $f(x, y)$ 趋于不同的数, 或者 (x, y) 按某一方式或路径趋于 (x_0, y_0) 时 $f(x, y)$ 不趋于一个确定的数, 那末就可以断定 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的极限不存在.

例2.3 用定义证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

证 因为函数 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ 的定义域 $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, 并且

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}.$$

所以, 对任给的 $\epsilon > 0$, 只要取 $\delta = \epsilon$, 当 $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

时(即 $\forall (x, y) \in U((0,0), \delta) \cap A$), 就有

$$|f(x, y) - 0| < \epsilon,$$

根据定义 2.3 知 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$. ■

例 2.4 设 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 讨论二重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 是否存在.

解 设点 (x, y) 沿着直线 $y = kx$ 趋向于 $(0,0)$, 则

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

上式说明, 若 k 不同, 即当 (x, y) 沿着不同的直线 $y = kx$ 趋向于 $(0,0)$ 时, $f(x, y)$ 趋于不同的常数, 因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在. ■

明白了二元函数极限的概念, 就不难讨论二元函数的连续性问题. 与一元函数的连续性类似, 可以定义二元函数连续性如下:

定义 2.4 (二元连续函数) 设有点集 $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个二元数量值函数, (x_0, y_0) 是 A 的聚点, 并且 $(x_0, y_0) \in A$, 若当 $(x, y) \in A$ 时有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (2.2)$$

则称函数 f 在点 (x_0, y_0) 处连续, 否则, 称 f 在点 (x_0, y_0) 处间断. 若 f 在 A 中的每一点处连续, 则称 f 在集合 A 上连续. 此时, 我们说 f 是 A 上的连续函数.

函数的连续性也可用 $\epsilon - \delta$ 语言来描述. 若

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得 } \forall (x, y) \in U((x_0, y_0), \delta) \cap A, \\ \text{恒有 } |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon, \end{aligned} \quad (2.3)$$

则称 f 在点 (x_0, y_0) 处连续.

像一元函数一样, 二元连续函数的和、差、积、商(除去分母为零的点)与复合仍为二元连续函数.

例如, 函数 $z = \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ 可看成是由 $z = \sin u$ 与 $u = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ 复合而成的, 而 $z = \sin u$ 是连续函数, $u = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ 除圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点之外在平面 \mathbb{R}^2 上处处连续, 因而复合函数 $z = \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ 在它的定义域 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ 上是连续的, 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点都是间断点, 称该圆周是函数的间断线.

又如, 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

由于 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在(例 2.4), 因此, 点 $(0,0)$ 是 f 的间断点. 除此之外, 它在平面 \mathbf{R}^2 上处处连续.

再来考察函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

的连续性. 该函数在平面 \mathbf{R}^2 上除两坐标轴外处处(包含坐标原点)有定义. 易见, 它在平面 \mathbf{R}^2 中不包含坐标轴的那个部分上是连续的. 又因为坐标原点 $(0,0)$ 是定义域的聚点, 并且

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ xy \neq 0}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = 1 = f(0,0),$$

所以该函数在坐标原点 $(0,0)$ 也连续. 因此, 函数 $f(x, y)$ 在它的定义域上是连续的.

二元函数的极限和连续性概念可以很容易地推广到 n ($n > 2$) 元数量值函数与向量值函数, 简要叙述如下.

设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一点集, $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个 n 元数量值函数, $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$ 是 A 的聚点, $a \in \mathbf{R}$ 是一个常数. 若

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得 } \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U(x_0, \delta) \cap A, \\ \text{恒有 } |f(x) - a| < \epsilon, \quad (2.4)$$

则称 a 为当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow a (x \rightarrow x_0),$$

也可记成

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})} f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_{0,1} \\ \vdots \\ x_n \rightarrow x_{0,n}}} f(x_1, \dots, x_n) = a.$$

这个极限也称为 n 重极限.

关于 n 元向量值函数的极限也可类似定义.

设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为一点集, $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbf{R}^m$ 是一个 n 元向量值函数,

$x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$ 是 A 的一个聚点, $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ 是一个常向量. 若

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \dot{U}(x_0, \delta) \cap A$,

$$\text{恒有 } \|f(x) - a\| < \varepsilon, \quad (2.5)$$

其中,

$$\|f(x) - a\| = [(f_1(x) - a_1)^2 + \dots + (f_m(x) - a_m)^2]^{\frac{1}{2}},$$

则称 a 为当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \text{ 或 } f(x) \rightarrow a (x \rightarrow x_0).$$

不难证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = a_k \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (2.6)$$

这就是说, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限等于 a 的充要条件是: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 它的每个分量 $f_k(x)$ 的极限等于向量 a 的对应分量 a_k ($k = 1, 2, \dots, m$). 因此, 研究向量值函数的极限可以转化为研究它的各个分量(数量值函数)的极限.

关于 n 元数量值函数和向量值函数连续性的定义可参照定义 2.4 由读者自己写出来, 并且可以证明: n 元向量值函数 $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在点 x_0 处连续 \Leftrightarrow 每个分量 f_k 在点 x_0 处连续 ($k = 1, 2, \dots, m$). 因此, 研究向量值函数的连续性也可转化为研究它的各个分量(数量值函数)的连续性.

2.3 多元连续函数的性质

在第一章中已经指出, 在闭区间上的一元连续函数有许多很好的性质, 它们在理论上和应用中都有重要的价值. 本段我们将这些性质推广到多元函数, 它们的证明方法也与一元函数类似.

定理 2.1 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧集, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 是 A 上的连续函数, 则

- (1) (有界性) f 在 A 上有界;
- (2) (最大最小值定理) f 在 A 上能取得它的最大值与最小值.

证 (1) 用反证法. 假定 f 在 A 上无界, 那末,

$$\forall k \in \mathbb{N}_+, \exists x_k \in A, \text{ 使得 } |f(x_k)| > k.$$

由已知 A 是紧集, 因而 A 是列紧闭集, 故存在 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_{k_i}\}$, 使 $x_{k_i} \rightarrow x_0$ ($i \rightarrow \infty$), 且 $x_0 \in A$. 由于 f 是 A 上的连续函数, 故 $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{k_i}) = f(x_0)$, 因而数列 $\{f(x_{k_i})\}$ 有界, 这与 $|f(x_{k_i})| > k_i$ 的假定相矛盾, 所以 f 在 A 上有界.

(2) 由(1)知 $f(A)$ 是 \mathbb{R} 中的有界集, 因此, $f(A)$ 必有上(下)确界, 设

$\alpha = \sup f(A)$. 根据上确界的定义,

$$\forall k \in \mathbb{N}_+, \exists x_k \in A, \text{使得 } \alpha - \frac{1}{k} < f(x_k) \leq \alpha,$$

从而有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \alpha$. 因为 A 为紧集, 故 A 是列紧闭集, 所以存在 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_{k_i}\}$, $x_{k_i} \rightarrow x_0$ ($i \rightarrow \infty$), 且 $x_0 \in A$. 再利用 f 的连续性, 即得到 $f(x_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{k_i}) = \alpha$. 这就证明了 f 在 x_0 处取得最大值 α (此时上确界 α 就是 f 在 A 上的最大值). 类似可以证明 f 在 A 上也能取得最小值. ■

定理 2.2(介值定理) 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一有界连通闭集, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 在 A 上连续, m 与 M 分别是 f 在 A 上的最小值与最大值. 如果常数 μ 是介于 m 与 M 之间的任一数: $m < \mu < M$, 则必 $\exists x_0 \in A$, 使 $f(x_0) = \mu$.

(证明从略)

定理 2.3(一致连续性) 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个紧集, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 则 f 在 A 上一致连续, 即

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \text{使得 } \forall x_1, x_2 \in A, \text{当 } \|x_1 - x_2\| < \delta \text{ 时}, \\ \text{恒有 } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon. \end{aligned} \quad (2.7)$$

(证明从略)

由于有界闭区域是连通的紧集, 所以, 上述所有定理对于有界闭区域上的连续函数也都成立.

习题 5.2

(A)

1. 确定并画出下列函数的定义域:

- | | |
|---|--|
| (1) $z = x + \sqrt{y}$; | (2) $z = \arccos \frac{y}{x}$; |
| (3) $z = \sqrt{\frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - x}}$; | (4) $z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$; |
| (5) $u = e^z + \ln(x^2 + y^2 - 1)$; | (6) $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. |

2. 指出下列函数图象的名称:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------------|
| (1) $z = x + 2y - 1$; | (2) $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$; |
| (3) $z = xy$; | (4) $z = e^{-(x^2 + y^2)}$; |
| (5) $z = 3 - 2x^2 - y^2$; | (6) $z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$. |

3. 用定义证明下列二重极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin \frac{x}{x^2 + y^2} = 0; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + y^2) = 2;$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} (3x - 4y) = 1; \quad (4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \frac{1}{2}.$$

4. 证明:(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在; (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$ 不存在.

5. 求下列二重极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x - \sin y}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}; \quad (4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2).$$

6. 讨论下列函数的连续性:

$$(1) f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \quad (2) f(x,y) = \frac{x-y}{x+y};$$

$$(3) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$(4) f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

7. 设 $f(x,y) = \frac{1}{xy}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $D_1 = \{(x,y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{k}x \leq y \leq kx, k > 1 \text{ 为常数}\}$, $D_2 = \{(x,y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$.

(1) $\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in D_1}} f(x,y)$ 是否存在? 为什么?

(2) $\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in D_2}} f(x,y)$ 是否存在? 为什么?

$$8. \text{ 设函数 } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明:当 (x,y) 沿过点 $(0,0)$ 的每一条射线 $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha (0 < t < +\infty)$ 趋于点 $(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限等于 $f(0,0)$, 即 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0,0)$, 但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

9. 设 $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $f(x,y)$ 在区域 D 内对变量 x 连续, 对变量 y 满足 Lipschitz 条件, 即对 D 内任意两点 $(x,y'), (x,y'')$, 有

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \leq L |y' - y''|,$$

其中 L 为常数, 证明: $f(x,y)$ 在 D 内连续.

10. 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一点集, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 n 元向量值函数. 证明: f 在 A 上连续等价于它的每个分量在 A 上连续.

11. 设 f 是集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的 n 元向量值函数, 证明: f 在 $x_0 \in A$ 连续 \Leftrightarrow 对于 A 中任何收敛于 x_0 的点列 $\{x_k\}$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$.

12. 设 f 为集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的 n 元数量值函数. 证明: 若 f 在 $x_0 \in A$ 连续, 且 $f(x_0) > 0$, 则

$$\exists \delta > 0, \forall x \in U(x_0, \delta) \cap A, \text{ 都有 } f(x) \geq q > 0.$$

其中 q 为正常数.

(B)

1. 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一点集, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 n 元向量值函数. 试用邻域的语言表述 f 在点 $x_0 \in A$ 处连续的定义, 并证明下列命题是等价的:

- (1) f 在 A 上连续;
- (2) $W \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开集, 则 W 关于 f 的原象 $f^{-1}(W) = \{x \mid x \in A, f(x) \in W\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的开集;
- (3) $W \subseteq \mathbb{R}^m$ 是闭集, 则 W 关于 f 的原象 $f^{-1}(W)$ 是 \mathbb{R}^n 中的闭集.

2. 设有二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

证明: $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上不一致连续.

3. 设 f 是集 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的 n 元向量值函数, 并且满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L \geq 0$, 使对所有 $x, y \in A$, 均有 $\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$, 证明: f 在 A 上一致连续.

4. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是 n 元数量值连续函数, $c \in \mathbb{R}$ 是一个常数. 证明:

- (1) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > c\}$ 与 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < c\}$ 均为开集;
- (2) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq c\}$ 与 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c\}$ 均为闭集;
- (3) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$ 是闭集.

第三节 多元数量值函数的导数与微分

本节将把一元函数的导数与微分推广到多元数量值函数. 我们将以二元函数为主讲解概念, 然后推广到 n 元函数. 先介绍多元数量值函数的导数与全微分以及与其相关的梯度; 再介绍高阶偏导数与高阶全微分, 以及复合函数的链式法则; 最后介绍隐函数及其微分法.

3.1 方向导数与偏导数

我们知道, 一元函数在一点的导数表示函数在该点的变化率, 它反映了在该点处函数值随自变量变化的快慢程度. 对于二元函数 $z = f(x, y)$ 来说, 当然也需要研究它的变化率问题. 但是由于自变量多了一个, 点 (x, y) 在 xOy 平面上变化, 情况要复杂得多. 一般来说, 动点 (x, y) 过定点 (x_0, y_0) 在平面上沿不同方

向变化时,函数值 $f(x, y)$ 的变化快慢是不同的,因而就需要考察函数在一点处沿不同方向的变化率(即导数).例如,在大气气象学中,就需要研究温度、气压沿不同方向的变化率.这就是所谓的方向导数.

设点 $x_0 \in \mathbb{R}^2$, \mathbf{l} 是平面上某一向量,其单位向量记为 e_l , $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. 我们来讨论 f 在点 x_0 处沿 \mathbf{l} 方向的变化率(记作 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{x_0}$). 过点 x_0 作与 \mathbf{l} 平行的直线 L (图 3.1),它的方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_l, t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

点 x_0 把直线 L 分为两侧,当 $t > 0$ 时,

点 \mathbf{x} 位于直线 L 上与 \mathbf{e}_l 同向的一侧.

当 $t < 0$ 时,点 \mathbf{x} 位于 L 上与 \mathbf{e}_l 反向的一侧. $f(\mathbf{x})$ 在点 x_0 沿方向 \mathbf{l} 的变化率,就是当点 \mathbf{x} 在直线 L 上变化时 $f(\mathbf{x})$ 在点 x_0 处的变化率.在 x_0 与 \mathbf{e}_l 固定的情况下,当点 \mathbf{x} 在 L 上变化时,

函数

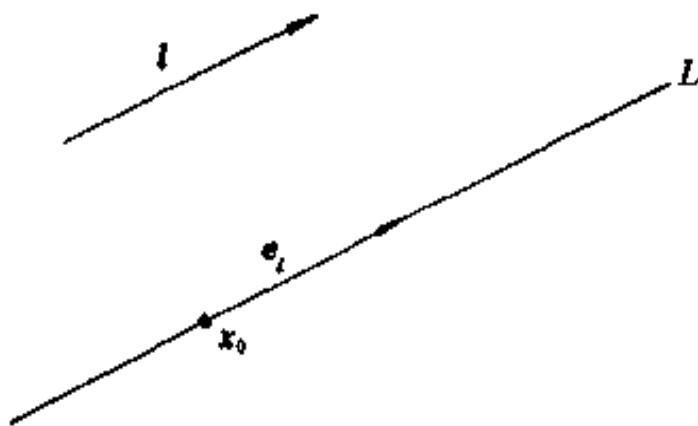


图 3.1

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_l)$$

实际上是自变量 t 的一元函数,记作

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_l).$$

因此, $f(\mathbf{x})$ 在点 x_0 沿方向 \mathbf{l} 的变化率,也就是一元函数 $F(t)$ 在 $t=0$ 处的导数,即

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_l) - f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

由此,我们给出以下定义.

定义 3.1(方向导数) 设点 $x_0 \in \mathbb{R}^2$, \mathbf{l} 是平面上一向量,其单位向量为 e_l . $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. 在 $U(x_0)$ 内让自变量 \mathbf{x} 由 x_0 沿与 e_l 平行的直线变到 $x_0 + t\mathbf{e}_l$,从而对应的函数值有改变量 $f(x_0 + t\mathbf{e}_l) - f(x_0)$.若

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\mathbf{e}_l) - f(x_0)}{t}$$

存在,则称此极限为 f 在点 x_0 沿 \mathbf{l} 方向的方向导数.记作

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\mathbf{e}_l) - f(x_0)}{t}. \quad (3.2)$$

方向导数的几何意义 过直线 $L: x = x_0 + te_l$ 作平行于 z 轴的平面 π (图 3.2), 它与曲面 $z = f(x, y)$ 所交的曲线记作 C . 在平面 π 上考察曲线 C . 容易看出, 当 $t > 0$ 时, $\overrightarrow{P_0 P}$ 的方向与 l 的方向相对应, $\frac{f(x_0 + te_l) - f(x_0)}{t}$ 表示曲线 C 的割线向量 $\overrightarrow{P_0 P}$ 与向量 l 交角的正切值, 即 $\overrightarrow{P_0 P}$ (关于 l 的方向) 的斜率; 当 $t < 0$ 时, P 在曲线 C 上位于 P_0 的另一侧, $\frac{f(x_0 + te_l) - f(x_0)}{t}$ 表示割线向量 $\overrightarrow{PP_0}$ 的斜率. 当 $t \rightarrow 0$ 时, $x \rightarrow x_0$, 割线转化为切线. (3.2) 式中极限的存在, 意味着当点 x 沿方向 l 从 x_0 的两侧分别趋向点 x_0 时, 极限存在且相等, 即曲线 C 在点 P_0 仅有唯一的切线 T , 它关于 l 方向的斜率就是方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{x_0}$.

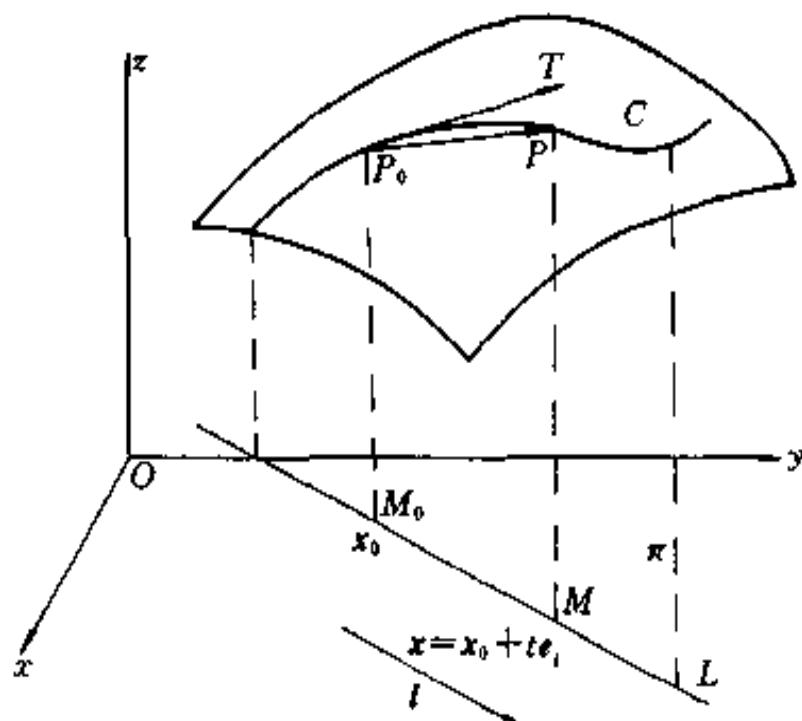


图 3.2

相应于一元函数的左(右)导数, 对于方向导数, 也可以按 $t \rightarrow 0^+$ 与 $t \rightarrow 0^-$ 讨论单侧方向导数.

例 3.1 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

求 f 在点 $(0, 0)$ 沿方向 $e_l = (\cos \theta, \sin \theta)$ 的方向导数.

解 当 $\cos \theta \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \theta \cdot \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + t^2 \sin^4 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta};$$

当 $\cos \theta = 0$ 时, 由于 $f(t \cos \theta, t \sin \theta) = 0$, 从而 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial l} = 0$. ■

由例 3.1 可知, 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 当 $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi$ 时, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial l} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 可见, f 在点 $(0,0)$ 处沿方向 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 的方向导数与沿 $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi$ 的方向导数的绝对值相等但符号相反. 一般地, 由方向导数的定义容易看出,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial (-l)} \right|_{x_0} = - \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{x_0}.$$

这是由于当 l 反向为 $-l$ 时, f 沿 $-l$ 的方向导数是相应的切线与向量 $-l$ 交角的正切.

在方向导数中, 一种特别重要的情形是沿坐标轴正向的方向导数, 即所谓偏导数.

定义 3.2(偏导数) 设函数 f 在点 (x_0, y_0) 的邻域 $U(x_0, y_0)$ 内有定义, f 在点 (x_0, y_0) 处沿 x 轴 (y 轴) 正向的方向导数称为 f 在点 (x_0, y_0) 处对 x (对 y) 的偏导数. 记作 $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$ 或 $f_x(x_0, y_0) (f_y(x_0, y_0))$.

若在对 x 的偏导数中, 改记 $t = \Delta x$, 由于此时 $e_t = (1, 0)$, 从而由方向导数的定义表达式(3.2)可得

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (3.3)$$

同理

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \quad (3.4)$$

由(3.3)式可见, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 实际上就是把 y 固定在 y_0 时, 一元函数 $f(x, y_0)$ 在 x_0 处的导数; 同理, 偏导数 $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ 就是一元函数 $f(x_0, y)$ 在 y_0 处的导数.

与一元函数类似, 若 f 在区域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 内有定义, 我们可以定义偏导函数为

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

其中 $(x, y) \in D, (x + \Delta x, y) \in D, (x, y + \Delta y) \in D$. 在不致混淆时, 偏导函数也简称为偏导数.

例 3.2 设二元函数 $z = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 把 y 看作常数, 对 x 求导得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

把 x 看作常数, 对 y 求导得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \blacksquare$$

由方向导数的几何意义立即可知, $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数就是曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的交线

$$C_x: \begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0 \end{cases}$$

在点 $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处切线 T_x 的斜率(图 3.3), 即

$$f_x(x_0, y_0) = \tan \alpha,$$

同理

$$f_y(x_0, y_0) = \tan \beta.$$

应当指出, 与一元函数不同, 对二元函数 f 来说, 在一点处它的两个偏导数均存在, 甚至沿任一 l 方向, 它的方向导数均存在, 并不能保证 f 在此点连续. 例如, 例 3.1 中的函数在点 $O(0, 0)$ 沿任何方向的方向导数均存在, 但它在点 $O(0, 0)$ 却不连续. 事实上, 令点 (x, y) 沿 $x = y^2$ 趋向点 O , 有

$$f(x, y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

其原因在于, 在点 $O(0, 0)$ 偏导数存在只保证了 $f(x, y)$ 沿坐标轴在点 O 连续, 即将 (x, y) 限制在坐标轴上变化时, $f(x, y)$ 连续. 在点 $O(0, 0)$ 沿任一方向的方向导数存在只保证了函数在点 O 沿相应直线连续, 但 $f(x, y)$ 在点 O 的连续性要求 (x, y) 在 $f(x, y)$ 的定义域内以任何方式趋向点 O 时 $f(x, y)$ 的极限值均等于 $f(0, 0)$. 例 3.1 表明: 虽然 $f(x, y)$ 在点 O 沿任一直线连续, 但沿 $y^2 = x$ 却不连续.

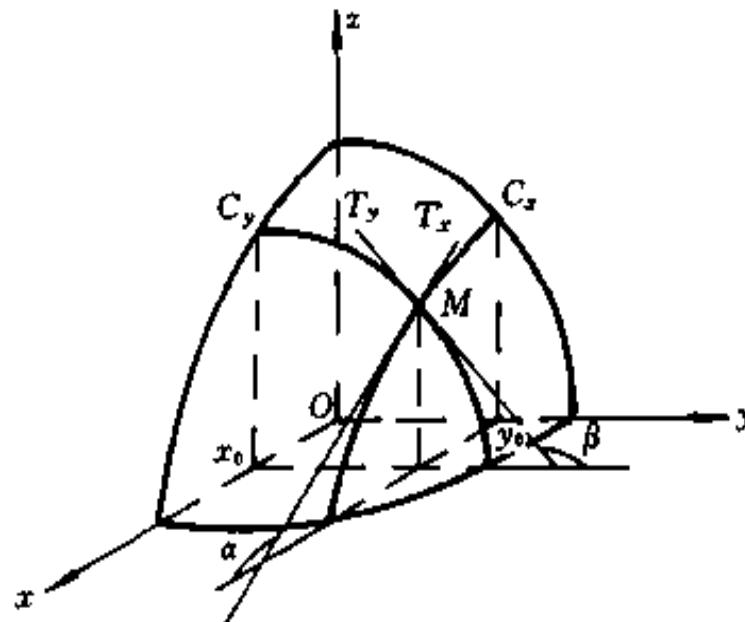


图 3.3

n 元函数的方向导数与偏导数 方向导数与偏导数的概念均可直接推广到 *n* 元函数. 设 e_l 是 \mathbb{R}^n 中的一个单位向量, 用其方向余弦可表示为 $e_l = (\cos\theta_1, \cos\theta_2, \dots, \cos\theta_n)$, $\|e_l\| = \sqrt{\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \dots + \cos^2\theta_n} = 1$. $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ 是 \mathbb{R}^n 的一个标准正交基; $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 则 $u = f(x)$ 在点 x_0 处沿 l 方向的方向导数仍形如(3.2)式所示. 而 $u = f(x)$ 在点 x_0 处对 x_i 的偏导数就是它在点 x_0 沿方向 e_i ($i = 1, \dots, n$) 的方向导数, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{x_0} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t},$$

其中 $(x_1, \dots, x_n) = x$. 若记 $t = \Delta x_i$ 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_i e_i) - f(x_0)}{\Delta x_i} \\ &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_{0,1}, \dots, x_{0,i-1}, x_{0,i} + \Delta x_i, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})}{\Delta x_i}, \end{aligned}$$

其中 $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$. 故求偏导数 $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ 就是求关于 x_i 的一元函数 $f(x_{0,1}, \dots, x_{0,i-1}, x_i, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n})$ 在 $x_{0,i}$ 的导数

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = \frac{d}{dx_i} f(x_{0,1}, \dots, x_{0,i-1}, x_i, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n}) \Big|_{x_i=x_{0,i}}$$

例 3.3 设三元函数 $u(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, 求 u 对各个变量的偏导数及 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{z} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{z}-1} \left(-\frac{y}{x^2} \right); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{z}-1} \frac{1}{x};$
 $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{z}} \ln \left(\frac{y}{x} \right) \left(-\frac{1}{z^2} \right);$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{1}{z} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{z}-1} \left(-\frac{y}{x^2} \right) \Big|_{(1,1,1)} = -1.$$

或 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{d}{dx} u(x, 1, 1) \Big|_{x=1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \Big|_{x=1} = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1.$ ■

3.2 全微分

在一元函数中我们知道, 对 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 若存在一个关于 Δx 的线性

函数 $L(\Delta x) = \alpha \Delta x$, 使函数的改变量可表示为

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \alpha \Delta x + o(\Delta x),$$

其中 $o(\Delta x)$ 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时是 Δx 的高阶无穷小, 则称 f 在 x_0 可微, 且称函数改变量的线性主部 $\alpha \Delta x$ 为 f 在 x_0 处的微分.

对于多元函数, 也可相应地讨论函数改变量的线性主部问题. 例如, 二元函数

$$u = f(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

当 $x = (x_1, x_2)$ 在 $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2})$ 有改变量 $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2)$ 时, 函数 f 相应的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= (x_1 + \Delta x_1)^2 + (x_2 + \Delta x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) \\ &= 2(x_1 \Delta x_1 + x_2 \Delta x_2) + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2.\end{aligned}$$

易见, 当 $\rho = \|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2} \rightarrow 0$ 时, $\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2$ 是 ρ 的高阶无穷小, 而当 $\|\Delta x\|$ 充分小时, 线性函数

$$L(\Delta x) = 2x_1 \Delta x_1 + 2x_2 \Delta x_2 = \langle 2x, \Delta x \rangle$$

是 Δu 的线性主部.

类似于一元函数微分定义, 可以给出下列多元函数全微分的定义.

定义 3.3 (全微分) 设 n 元函数 $u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ 在点 x_0 的邻域 $U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ 内有定义, 如果 $\forall x = x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 存在一关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x) = \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n = \langle \alpha, \Delta x \rangle$, 其中 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 是与 Δx 无关的常向量, $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, 使得函数 f 在点 x_0 的改变量 Δu 可以表示成

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x) - f(x_0) = L(\Delta x) + o(\rho) \\ &= \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n + o(\rho),\end{aligned}$$

其中 $\rho = \|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$, $o(\rho)$ 当 $\rho \rightarrow 0$ 时是 ρ 的高阶无穷小, 那末称 $f(x)$ 在点 x 处可微, 且称 $L(\Delta x) = \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n = \langle \alpha, \Delta x \rangle$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 处关于自变量改变量 Δx 的(一阶)全微分. 记作

$$du|_{x=x_0} = df(x_0) = L(\Delta x) = \langle \alpha, \Delta x \rangle.$$

当 $\|\Delta x\|$ 充分小时, 全微分就是 $f(x)$ 在 x_0 处改变量的线性主部.

由全微分的定义容易看出: 当 f 在点 x_0 可微时, 函数 f 必在点 x_0 连续. 事

实际上,当 f 在 x_0 可微时有

$$f(x) - f(x_0) = \langle \alpha, \Delta x \rangle + o(\rho).$$

由 Cauchy 不等式知

$$|\langle \alpha, \Delta x \rangle| \leq \|\alpha\| \|\Delta x\|,$$

从而当 $\rho \rightarrow 0$ 时有

$$f(x) = f(x_0) + \langle \alpha, \Delta x \rangle + o(\rho) \rightarrow f(x_0).$$

对于一元函数,在一点可微必在此点可导,而且

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x,$$

下述定理表明,对于多元函数也有类似的结论.

定理 3.1(可微的必要条件) 如果函数 $u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ 在点 x_0 可微, 那末 $f(x)$ 在点 x_0 沿任意 l 方向的方向导数存在. 特别地, f 在点 x_0 处所有偏导数均存在,且 f 在点 x_0 的全微分可用其偏导数表示为

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0)\Delta x_i. \quad (3.5)$$

证 过点 x_0 作平行于任一单位向量 e_l 的直线 L , 在 L 上任取一点 $x_0 + \Delta x$ (图 3.4). 由于 $f(x)$ 在点 x_0 可微, 故存在线性函数 L , 使

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L(\Delta x) + o(\rho). \quad (3.6)$$

令 $\Delta x = x_0 + \Delta x - x_0 = te_l$.

从而(3.6)式可改写成

$$\begin{aligned} f(x_0 + te_l) - f(x_0) &= L(te_l) + o(\rho) \\ &= tL(e_l) + o(\rho). \end{aligned} \quad (3.7)$$

由 $\rho = \|\Delta x\| = |t|$ 可见 $\rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$.

用 t 除(3.7)式的两端得

$$\frac{f(x_0 + te_l) - f(x_0)}{t} = L(e_l) + \frac{o(\rho)}{t}.$$

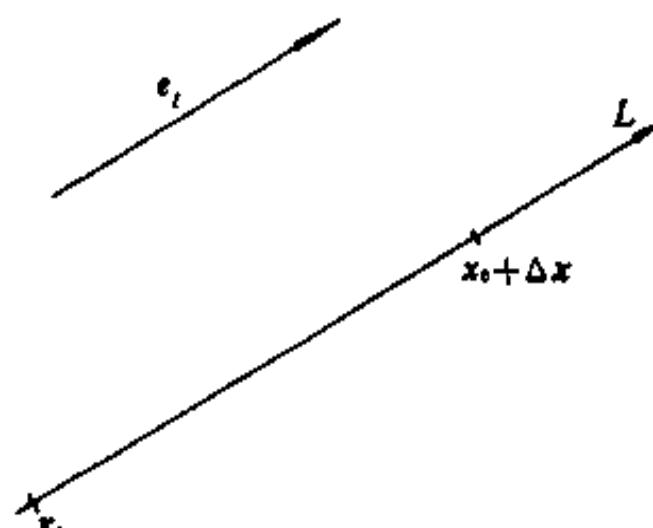


图 3.4

令 $t \rightarrow 0$ 两端取极限得

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_l) - f(x_0)}{t} = L(e_l). \quad (3.8)$$

这就证明了当 f 在点 x_0 可微时, f 在 x_0 处沿任意 l 方向的方向导数均存在. 特别地有

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = L(e_i) = \langle \alpha, e_i \rangle = \alpha_i, (i = 1, 2, \dots, n)$$
(3.9)

其中 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. 即 f 在点 x_0 的所有偏导数均存在, 从而有

$$df(x_0) = \langle \alpha, \Delta x \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0) \Delta x_i.$$

由定理 3.1 可知, 当 $u = f(x)$ 在 x_0 可微时, f 在 x_0 的改变量必可表示为

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0) \Delta x_i + o(\rho),$$
(3.10)

其中 $o(\rho)$ 当 $\rho \rightarrow 0$ 时是 ρ 的高阶无穷小. 反之, 若 Δu 可表为 (3.10) 式, 则由全微分定义可知 f 在 x_0 点可微.

(3.5) 式给出了全微分的计算公式. 由此式可以看到, 与一元函数的微分类似, n 元函数的全微分不仅与 f 在点 x_0 的各个偏导数有关, 还与 $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ 有关. 如果 f 在区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 的每一点均可微, 那末称 f 是 Ω 内的可微函数. 此时, 全微分可简记成 df 或 du .

规定自变量的微分等于自变量的改变量, 即

$$dx_i = \Delta x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

从而全微分也可写成

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

在一元函数中, 我们知道函数在一点可导也必在此点可微, 换句话说, 对一元函数来讲, 可导与可微是等价的. 对于多元函数, 函数在一点的所有偏导数均存在是否一定在此点可微呢? 例 3.1 已经给出了否定的答案. 在例 3.1 中, 函数 $f(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 甚至沿任何方向的方向导数都存在, 但是它却在 $O(0, 0)$ 点不连续, 当然更不可微了. 下面再给出一个例子.

例 3.4 证明: 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

在点 $O(0, 0)$ 存在偏导数但却不可微.

证 由于

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

同理可得

$$f_y(0,0) = 0,$$

故 f 在点 $O(0,0)$ 的两个偏导数均存在.

假定 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 可微, 则由可微定义及定理 3.1 可知,

$$\Delta f = df(O) + o(\rho) = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + o(\rho),$$

其中 $o(\rho)$ 是当 $\rho \rightarrow 0$ 时关于 ρ 的高阶无穷小. 因此, 极限 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\rho}$ 存在且为 0. 但

$$\Delta f = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

由第二节例 2.4 可知, 极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \text{ 不存在,}$$

这一矛盾, 就证明了 f 在点 O 不可微. ■

既然偏导数存在未必可微, 那末怎样加强条件才能保证函数可微呢? 下面的定理给出了一个充分条件.

定理 3.2(可微的充分条件) 设 $u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ 在点 x_0 的邻域内存在偏导数 $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, 且所有偏导数均在点 x_0 连续, 则 f 在点 x_0 可微.

证 为书写简明起见, 仅就 $n=3$ 情况加以证明. 我们将证明此时函数的改变量 Δu 可以表成(3.10)式, 证明的思想是通过插项的方法把三元函数化为一元函数来处理. $u = f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ 在 $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})$ 的改变量可写成

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x_1, x_2, x_3) - f(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}) = [f(x_1, x_2, x_3) - f(x_{0,1}, x_2, x_3)] \\ &\quad + [f(x_{0,1}, x_2, x_3) - f(x_{0,1}, x_{0,2}, x_3)] \\ &\quad + [f(x_{0,1}, x_{0,2}, x_3) - f(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})], \end{aligned}$$

上式中每一方括号内都是一元函数的改变量, 利用偏导数可将其中第一个写成

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(x_{0,1}, x_2, x_3) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(x_{0,1}, x_2, x_3)} \Delta x_1 + o(\Delta x_1)$$

现将 $\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(x_{0,1}, x_2, x_3)}$ 看作是 x_2, x_3 的二元函数, 由于它在点 $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})$ 连续, 所以

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(x_{0,1}, x_2, x_3)} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_0} + \alpha(\Delta x_2, \Delta x_3).$$

其中 α 当 $\rho = \|\Delta x\| \rightarrow 0$ 时是一无穷小. 于是

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(x_{0,1}, x_2, x_3) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + o_1(\rho),$$

其中 $o_1(\rho) = \alpha \Delta x_1 + o(\Delta x_1)$, 当 $\rho = \|\Delta x\| \rightarrow 0$ 时是 ρ 的高阶无穷小.

同理可得

$$f(x_{0,1}, x_2, x_3) - f(x_{0,1}, x_{0,2}, x_3) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + o_2(\rho),$$

$$f(x_{0,1}, x_{0,2}, x_3) - f(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_3} \Delta x_3 + o_3(\rho).$$

于是

$$\Delta u = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_3} \Delta x_3 + o(\rho),$$

其中 $o(\rho) = o_1(\rho) + o_2(\rho) + o_3(\rho)$ 显然是当 $\rho \rightarrow 0$ 时关于 ρ 的高阶无穷小.
由定义可知 f 在点 x_0 可微.

例 3.5 求二元函数 $z = e^{xy}$ 在点 $(0,1)$ 当 $\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2$ 时的改变量 Δz 及全微分 dz .

解 记 $z = f(x, y) = e^{xy}$, 则

$$\Delta z = f(0 + 0.1, 1 + 0.2) - f(0, 1) = e^{0.12} - 1.$$

由于 $z = e^{xy}$ 的偏导数连续, 由定理 3.2 知全微分存在, 再由(3.5)式得

$$dz = f_x(0, 1)dx + f_y(0, 1)dy = 1 \times 0.1 + 0 \times (0.2) = 0.1. \blacksquare$$

例 3.6 求 $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 的全微分.

解 由全微分的表达式(3.5)知

$$\begin{aligned} df &= f_x dx + f_y dy + f_z dz \\ &= -\frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \blacksquare \end{aligned}$$

应当指出, 定理 3.2 的条件只是一充分条件, 即偏导数连续时函数必可微;
但函数可微时, 其偏导数未必连续.

例 3.7 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在原点 $O(0,0)$ 处可微, 但 $f_x(x, y)$, 及 $f_y(x, y)$ 在 $O(0,0)$ 处间断.

证 易求得 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. 因此函数改变量与微分之差为

$$\begin{aligned}\Delta f - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] &= f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) \\ &= (\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2} = o(\rho),\end{aligned}$$

故 f 在点 $O(0,0)$ 可微.

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 有

$$f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$,

而 $\lim_{\substack{y=x \\ x \rightarrow 0}} \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cos \frac{1}{2x^2}$ 不存在,

所以 $f_x(x, y)$ 在 $O(0,0)$ 间断. 同法可证 $f_y(0,0)$ 在 $O(0,0)$ 点也间断. ■

全微分在近似计算和误差估计中的应用 我们知道, 当 f 在点 x_0 可微时有

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + o(\rho),$$

从而当 $\rho = \|\Delta x\| \ll 1$ 时,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0) \Delta x_i,$$

或

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0)(x_i - x_{0,i}). \quad (3.11)$$

可见与一元函数情况类似, 当 $\rho \ll 1$ 时用函数的全微分近似表示函数的改变量, 就是在点 x_0 的邻域内把一个非线性函数 $f(x)$ 近似地线性化. (3.11) 式右端称为 $f(x)$ 的一次近似或线性逼近. 这种线性逼近的思想可以用来解决以下两类问题:

1° 函数值的近似计算

例 3.8 求 $\sqrt{(1.97)^3 + (1.01)^3}$ 的近似值.

解 令 $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $\Delta x = -0.03$, $\Delta y = 0.01$, 则

$$f_x(2, 1) = \left. \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \right|_{(2,1)} = 2, \quad f_y(2, 1) = \left. \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \right|_{(2,1)} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(1.97)^3 + (1.01)^3} &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) \\ &= f(2, 1) + f_x(2, 1)\Delta x + f_y(2, 1)\Delta y = 2.945.\end{aligned}$$

2° 误差估计

设量 z 由公式 $z = f(x, y)$ 确定, 如果 x 和 y 的近似值 x_0 和 y_0 分别有绝对误差 δ_x 和 δ_y , 即 $|\Delta x| < \delta_x$, $|\Delta y| < \delta_y$, 那末用近似值 x_0 和 y_0 代入公式 $z = f(x, y)$ 所得的值 $z_0 = f(x_0, y_0)$ 也是 z 的近似值. 由于 $|\Delta x|$ 和 $|\Delta y|$ 都很小, 所以可用公式 $\Delta z \approx dz$ 估计 z_0 的绝对误差:

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\approx |dz| = |f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y| \\ &\leq |f_x(x_0, y_0)| |\Delta x| + |f_y(x_0, y_0)| |\Delta y| \\ &< |f_x(x_0, y_0)| \delta_x + |f_y(x_0, y_0)| \delta_y, \end{aligned}$$

从而可取 z 的绝对误差为

$$\delta_z = |f_x(x_0, y_0)| \delta_x + |f_y(x_0, y_0)| \delta_y, \quad (3.12)$$

由此得 z_0 的相对误差为

$$\frac{\delta_z}{|z_0|} = \left| \frac{f_x(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} \right| \delta_x + \left| \frac{f_y(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} \right| \delta_y. \quad (3.13)$$

例 3.9 设 $z = xy$, 求由测量值 x_0, y_0 计算 z 所产生的绝对误差与相对误差.

解 由于 $z_x = y, z_y = x$ 代入公式(3.12)与(3.13)得

$$\text{绝对误差} \quad \delta_z = |y_0| \delta_x + |x_0| \delta_y,$$

$$\text{相对误差} \quad \frac{\delta_z}{|z_0|} = \frac{\delta_x}{|x_0|} + \frac{\delta_y}{|y_0|}.$$

由此可见, 乘积的相对误差等于各个因子的相对误差之和. ■

同理可证, 商的相对误差等于分子与分母的相对误差之和.

例 3.10 肾的一个重要功能是清除血液中的尿素. 临幊上用公式 $C = \frac{\sqrt{V}}{P} u$ 来计算尿素标准清除率, 其中 u 表示尿中的尿素浓度(单位: mg/l), V 表示每分钟排出的尿量(单位: ml/min), P 表示血液中的尿素浓度(单位: mg/l). 某病人的实际测量值为 $u = 5000, V = 1.44, P = 200$, 从而算得 $C = 30$ (正常人的 C 值约为 54). 如果该测量值 u, V, P 的绝对误差分别为 50, 0.014, 4, 2, 试估算由测量值的误差对 C 值所带来的绝对误差和相对误差.

$$\text{解 } \frac{\partial C}{\partial u} = \frac{\sqrt{V}}{P}, \quad \frac{\partial C}{\partial V} = \frac{u}{2P\sqrt{V}}, \quad \frac{\partial C}{\partial P} = -\frac{u\sqrt{V}}{P^2},$$

当 $u = 5000, V = 1.44, P = 200$ 时,

$$\frac{\partial C}{\partial u} = 0.006, \quad \frac{\partial C}{\partial V} = \frac{125}{12}, \quad \frac{\partial C}{\partial P} = -0.15,$$

故 C 值的绝对误差为

$$\begin{aligned}\delta_C &= \left| \frac{\partial C}{\partial u} \right| \delta_u + \left| \frac{\partial C}{\partial V} \right| \delta_V + \left| \frac{\partial C}{\partial P} \right| \delta_P \\ &= 0.006 \times 50 + \frac{125}{12} \times 0.0144 + 0.15 \times 2 = 0.75,\end{aligned}$$

C 的相对误差为

$$\frac{\delta_C}{|C|} = \frac{0.75}{30} = 2.5\%. \quad \blacksquare$$

3.3 梯度及其与方向导数的关系

下面再来讨论方向导数. 由定理 3.1 知道, 若函数 f 在点 x_0 可微, 则 f 在点 x_0 沿任意 l 方向的方向导数都存在. 但是, 它的计算问题, 除了直接使用定义, 尚未介绍过其它方法. 实际上, 定理 3.1 的证明中已经蕴含着方向导数的计算规则. 由(3.8)式,

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = L(e_l).$$

设单位向量 $e_l = (\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n) = \cos \theta_1 e_1 + \dots + \cos \theta_n e_n$, 则

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = L(e_l) = \cos \theta_1 L(e_1) + \dots + \cos \theta_n L(e_n).$$

由(3.9)式,

$$L(e_i) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i},$$

故可得方向导数的计算公式

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \cos \theta_i = \langle g, e_l \rangle, \quad (3.14)$$

其中向量 $g = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right)$.

这样一来, 当函数在点 x_0 可微时, 它在此点的方向导数的存在性及计算问题都得到了解决. 这时, 求 f 在点 x_0 沿 l 的方向导数, 关键在于求出 f 在点 x_0 的所有偏导数, 在得到以这些偏导数为坐标的向量 g 后, 要求 f 在点 x_0 沿 l 方向的方向导数, 只需将 g 在 l 方向投影即可, 即

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = \langle g, e_l \rangle = \|g\| \cos(g, e_l).$$

不仅如此,由上式还可看到,当 e_l 与 g 的方向一致时, $\cos(g, e_l) = 1$, 方向导数将取得最大值, 其值为 $\|g\|$. 换句话说, f 的值在点 x_0 沿 g 的方向增大得最快, 其变化率就是 $\|g\|$. 研究变化率最大的方向及其值在自然科学和实际问题中是非常重要的一一个问题. 例如, 当热由热源向四周扩散时, 往往需要知道温度变化最快的方向, 以及此方向上温度的变化率. 因此向量 g 有着特别重要的意义, 我们称它为梯度.

定义 3.4(梯度) 设函数 $u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ 在点 x_0 处可微, 则称向量 $\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right)$ 为 f 在点 x_0 的梯度向量, 简称梯度, 记为 $\text{grad } f(x_0)$ 或 $\nabla f(x_0)$, 即

$$\text{grad } f(x_0) = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right),$$

其中 **grad** 是英文 gradient 的简写, **N** 是 Nabla 算符, 也称为向量微分算子

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

它本身没有意义, 将 **N** 作用于函数 f 就得到一向量, 其意义为

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right).$$

有了梯度, 方向导数就可以表示成梯度与 e_l 的内积

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = \langle \text{grad } f(x_0), e_l \rangle = \langle \nabla f(x_0), e_l \rangle.$$

如上所述, 函数 f 在 x_0 的梯度是一个向量, 它的方向指向 f 的值在点 x_0 增长最快(即方向导数最大)的那个方向; 它的模就等于这个最大方向导数的值.

记 $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$, 则利用梯度可将 $f(x)$ 在点 x 处的全微分写成

$$df(x) = \langle \nabla f(x), dx \rangle.$$

例 3.11 求二元函数 $u = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(-1, 1)$ 沿方向 $e_l = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ 的方向导数, 并指出 u 在该点沿哪个方向的方向导数最大? 这个最大的方向导数值是多少? u 沿哪个方向减小得最快? 沿哪个方向 u 的值不变化?

$$\begin{aligned} \text{解 } \nabla u \Big|_{(-1,1)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{(-1,1)} = (2x - y, 2y - x) \Big|_{(-1,1)} = (-3, 3), \\ \frac{\partial u(-1,1)}{\partial l} &= \langle \nabla u \Big|_{(-1,1)}, e_l \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(-6 + 3) = -\frac{3}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

方向导数取得最大值的方向即梯度方向为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$, 方向导数的最大值即

$\|\nabla u|_{(-1,1)}\|=3\sqrt{2}$. u 沿梯度的负向, 即 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ 的方向减小得最快. 为求

使 u 的变化率为零的方向, 令 $e_t = (\cos \theta, \sin \theta)$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(-1,1)} = \langle \nabla u \Big|_{(-1,1)}, e_t \rangle = -3\cos \theta + 3\sin \theta = 3\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

令 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, 得 $\theta=\frac{\pi}{4}, \pi+\frac{\pi}{4}$, 故在点 $(-1, 1)$ 处沿 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\pi+\frac{\pi}{4}$, 函数 u 的值不变化. ■

梯度的运算法则 根据梯度的定义, 求函数 $u=f(x)$ 的梯度实际上是求偏导数. 故由已知的求导法则, 可以得知梯度具有类似于求导法则的一些简单运算法则(其中的 C_1, C_2 为任意常数, 函数 u, v 及 f 均可微):

$$(1) \quad \text{grad}(C_1u + C_2v) = C_1\text{grad}u + C_2\text{grad}v, \text{ 或}$$

$$\nabla(C_1u + C_2v) = C_1\nabla u + C_2\nabla v;$$

$$(2) \quad \text{grad}(uv) = u\text{grad}v + v\text{grad}u, \text{ 或 } \nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u;$$

$$(3) \quad \text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}[v\text{grad}u - u\text{grad}v], \text{ 或 } \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}[v\nabla u - u\nabla v], \\ (v \neq 0);$$

$$(4) \quad \text{grad}f(u) = f'(u)\text{grad}u, \text{ 或 } \nabla f(u) = f'(u)\nabla u.$$

现证(4), 其余法则的证明留给读者. 设 $u=u(x)=u(x_1, \dots, x_n)$, 由一元函数的链式法则, 我们有

$$\begin{aligned} \nabla f(u) &= \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(u)}{\partial x_n} \right) = \left(f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \\ &= f'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = f'(u)\nabla u. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 3.12 设点电荷 q 放在坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 处, 则在其周围将产生电场, 且任一点 $M(x, y, z)$ 的电位与电场强度分别为

$$u = \frac{q}{4\pi\epsilon r}, \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r}, \quad (r \neq 0),$$

其中 ϵ 为介电系数, r 为点 M 的向径, $r = \|\mathbf{r}\|$, 求电位函数 u 的梯度.

解

$$\begin{aligned} \nabla u &= \nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} \right)' \nabla r \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \nabla r, \end{aligned}$$

而

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

故

$$\nabla u = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r} = -\mathbf{E}.$$

因此,电位梯度的方向与电场强度 \mathbf{E} 的方向相反,即沿向径的负方向电位 u 增长最快. ■

例 3.13 一条鲨鱼在发现血腥味时,总是沿血腥味最浓的方向追寻. 在海面上进行试验表明,如果把坐标原点取在血源处,在海平面上建立直角坐标系,那么点 (x, y) 处血液的浓度 C (每百万份水中所含血的份数) 的近似值为 $C = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$. 求鲨鱼从点 (x_0, y_0) 出发向血源前进的路线.

解 设鲨鱼前进的路线为曲线 $\Gamma: y = f(x)$, 我们首先来建立 $f(x)$ 应满足的方程. 鲨鱼追踪最强的血腥味, 所以每一瞬时它都将按血液浓度变化最快, 即 C 的梯度方向前进, 由梯度的计算公式得

$$\begin{aligned}\nabla C &= \left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y} \right) \\ &= 10^{-4} e^{-(x^2+2y^2)/10^4} (-2x, -4y).\end{aligned}$$

取鲨鱼前进的方向为曲线 Γ 的正向, 相应方向的切线为正切线, 正切线与 x 轴正向的交角为 θ (图 3.5), 则在 Γ 上点 (x, y) 处 Γ 的正切线上的方向向量 τ 可表示为 $(\cos \theta, \sin \theta)$, 或

$$(1, \tan \theta) = \left(1, \frac{dy}{dx} \right),$$

从而也可表示为 $\tau = (dx, dy)$.

显然, τ 必与 ∇C 平行同向, 从而有

$$\frac{dx}{-2x} = \frac{dy}{-4y},$$

于是可得 $y = f(x)$ 应满足微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{y}{x}. \quad (3.15)$$

由于鲨鱼的初始位置为 (x_0, y_0) , 即初值条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$.

方程 (3.15) 是一个一阶可分离变量的微分方程, 容易求得其通解为

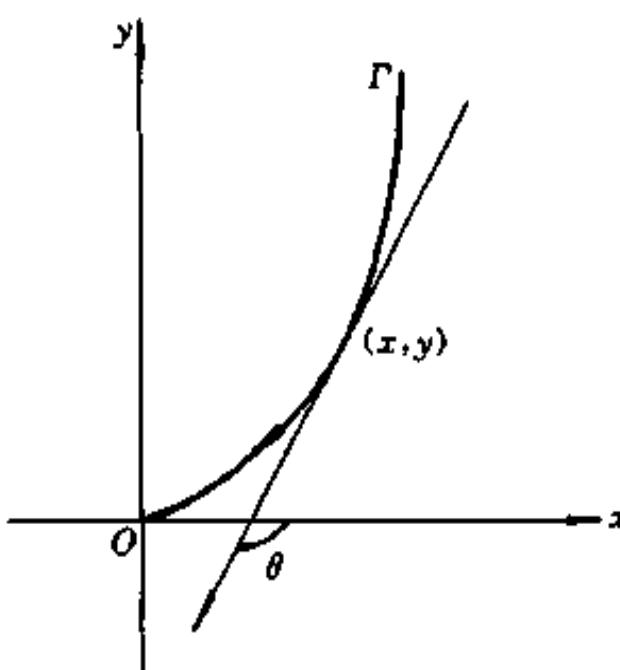


图 3.5

$$y = Ax^2,$$

A 为任意常数. 代入初值条件 $y|_{x=x_0} = y_0$, 得 $A = \frac{y_0}{x_0^2}$. 于是鲨鱼从 (x_0, y_0) 出发进攻的路线是

$$y = \frac{y_0}{x_0^2} x^2. \blacksquare$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

如果 n 元函数 $u = f(x)$ 的偏导函数 $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ 在点 x_0 对变量 x_j 的偏导数存在, 则称这个偏导数为 f 在点 x_0 先对变量 x_i 再对变量 x_j 的二阶偏导数, 记为 $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{x=x_0}$, 或 $f_{x_i x_j}(x_0)$ 或 $f_{ij}^{(2)}(x_0)$, 其中 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

例如, 二元函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数共有四个:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}, \end{aligned}$$

并称 f_{xy} 和 f_{yx} 为二阶混合偏导数.

类似地, 可由 $n-1$ 阶偏导函数的偏导数来定义 n 阶偏导数, 例如, $f_{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} \right)$. 二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数. 容易看出, 高阶偏导数的运算实质上也还是一元函数的导数运算.

例 3.14 求二元函数 $z = x^y$ ($x > 0$) 的所有二阶偏导数.

解 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$, 再分别关于变量 x, y 求偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = y^{y-1} + yx^{y-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = x^y (\ln x)^2. \blacksquare$$

上例中混合偏导数 $z_{xy} = z_{yx}$, 即在此例中, 混合偏导数与求导的先后次序是

无关的,但并非总是如此.

例 3.15 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

证明: $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

证 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时利用求导法则,当 $x^2 + y^2 = 0$ 时根据偏导数定义,可以求得

$$f_x(x, y) = \begin{cases} y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right], & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} x \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right], & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

因此有, $f_x(0, y) = -y$, $f_y(x, 0) = x$. 再由偏导数定义可得

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(\Delta x, 0) - f_y(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

所以 $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. ■

我们看到,此例中的两个二阶混合偏导数并不相等. 一般来说, f_{xy} 与 f_{yx} 是有区别的,前者是先对 x 求导然后对 y 求导,后者是先对 y 求导再对 x 求导,求导的次序是不同的. 但是可以证明:当 f_{xy} 和 f_{yx} 都在点 P 处连续时,则在点 P 处有 $f_{xy} = f_{yx}$, 即二阶混合偏导数与求导次序无关.

对于高阶偏导数,一般地可以证明:如果所有的 m 阶偏导数在点 P 处连续,则在点 P 处的 m 阶偏导数与求导次序无关. 例如,如果三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 P 处的所有三阶偏导数连续,则在点 P 处有

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}.$$

高阶全微分 我们知道,当函数 $u = f(x)$ 在区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 内每一点均可微时,则在 Ω 内 u 的全微分为

$$du = \langle \nabla f, \Delta x \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

如果把 $\Delta x (= dx)$ 看作固定不变, 那末 du 就是 x 的函数, 如果函数 du 仍在 Ω 内可微, 那末把这个函数 du 再对 x 求全微分就称为 u 的二阶全微分, 记作 $d^2 u = d(du)$. 为了简明起见, 我们仅以二元函数 $u = f(x, y)$ 为例来导出 u 的二阶全微分表达式.

设 f 的各阶偏导数都存在且连续, 则由

$$du = f_x dx + f_y dy$$

再求全微分可得

$$\begin{aligned} d^2 u &= d(du) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy) dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy) dy \\ &= f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2. \end{aligned}$$

引进算符运算记号

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2,$$

上式左端相当于将右端按二项式公式形式地展开, 则二阶全微分也可简洁地写成

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f.$$

类似地可以定义

$$d^3 u = d(d^2 u), \quad d^n u = d(d^{n-1} u).$$

而且不难验证

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{n-1} f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f,$$

其中 $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$ 表示将算符 $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)$ 自乘 n 次后再作用到 f 上.

3.5 多元复合函数的偏导数和全微分

在一元函数的求导法中, 复合函数的链式法则发挥了非常重要的作用. 本段将把链式法则推广到多元函数. 为了论述简洁, 我们先讨论三元函数与三个二元函数的复合情形.

定理 3.3 设 $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, $w = \chi(x, y)$ 均在点 (x, y) 处可

微,而 $z = f(u, v, w)$ 在对应的点 (u, v, w) 处可微,则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y), \chi(x, y)]$ 在点 (x, y) 处也必可微,且其全微分为

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy. \quad (3.16)$$

证 让自变量 x, y 分别有改变量 $\Delta x, \Delta y$, 相应地函数 φ, ψ, χ 分别有改变量 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, 从而函数 f 有改变量 Δz . 由于 φ, ψ, χ 均在点 (x, y) 可微, 故有

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o_1(\rho), \quad (3.17)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o_2(\rho), \quad (3.18)$$

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + o_3(\rho), \quad (3.19)$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. 又由于函数 f 在 (x, y) 所对应的点 (u, v, w) 处可微, 故有

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial z}{\partial w} \Delta w + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}). \quad (3.20)$$

将(3.17)~(3.19)代入(3.20)式并加以整理, 则复合函数

$$z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y), \chi(x, y)]$$

的改变量可以写成

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Delta y + a,$$

其中

$$a = \frac{\partial z}{\partial u} o_1(\rho) + \frac{\partial z}{\partial v} o_2(\rho) + \frac{\partial z}{\partial w} o_3(\rho) + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}).$$

要证明(3.16)式, 只需证明

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{a}{\rho} = 0. \quad (3.21)$$

由于

$$\frac{o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2})}{\rho} = \frac{o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2})}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}}{\rho},$$

而当 ρ 充分小时由(3.17)式可见

$$\frac{|\Delta u|}{\rho} \leq \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \frac{|\Delta x|}{\rho} + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{|\Delta y|}{\rho} + \frac{|o_1(\rho)|}{\rho} < \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| + 1,$$

故 $\frac{\Delta u}{\rho}$ 有界. 同理, $\frac{\Delta v}{\rho}$ 与 $\frac{\Delta w}{\rho}$ 也有界. 于是

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2})}{\rho} = 0.$$

再注意到 $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$ 均与 ρ 无关, 因此(3.21)式成立. ■

由复合函数的全微分表达式(3.16)可见, 复合函数有下列链式法则:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \left\langle \nabla f(u, v, w), \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\rangle, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = \left\langle \nabla f(u, v, w), \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\rangle.\end{aligned}\quad (3.22)$$

例 3.16 求函数 $z = \ln[e^{2(x+y^2)} + (x^2 + y) + \sin(1+x^2)]$ 对 x 与 y 的偏导数.

解 令 $u = e^{(x+y^2)}$, $v = x^2 + y$, $w = \sin(1+x^2)$, 则 $z = \ln(u^2 + v + w)$, 应用公式(3.22)得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2u}{u^2 + v + w} e^{(x+y^2)} + \frac{1}{u^2 + v + w} 2x + \frac{2x \cos(1+x^2)}{u^2 + v + w}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{4yu}{u^2 + v + w} e^{(x+y^2)} + \frac{1}{u^2 + v + w}.\end{aligned}$$

多元函数的复合可以有多种不同情况, 读者应善于分析函数间的复合关系, 把公式(3.22)运用到各种场合. 例如:

(1) 设 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ 均分别可微, 则复合以后是 x 的一元函数 $z = f[\varphi(x), \psi(x)]$, 应用公式(3.22)得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx},$$

它称为复合函数 z 对 x 的全导数.

(2) 设 $w = f(u)$, $u = \varphi(x, y, z)$ 均可微, 应用公式(3.22)得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}.$$

(3) 设 $u = f(x, y, z)$, $z = \varphi(x, y)$ 均可微, 应用公式(3.22)得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

应当注意,这里的复合关系是:一方面 u 直接依赖于 x 和 y ,另一方面又通过中间变量 z 而依赖于 x 和 y .因而在上述对 x 的偏导数公式中,左端的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 表示复合之后的函数 u 对 x 的偏导数;而右端的 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示尚未复合之前 u 对 x 的偏导数,不可混为一谈.

例 3.17 设 $z = f(x, xy)$, 其中 $z = f(u, v)$ 可微, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由于 $u = x, v = xy$, 显然可微, 故复合函数可微, 应用公式(3.22)得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial v}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

把 $f(x, xy)$ 中的 x 看作是第一个变量, xy 看作是第二个变量, 有时采用下面的记号更为方便清晰:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 + yf_2.$$

其中 f_1 表示 f 对第一个变量的偏导数, f_2 表示 f 对第二个变量的偏导数.

例 3.18 设 $u = \varphi(x^2 + y^2)$, 其中 φ 可导, 求证 $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

证 把 $u = \varphi(x^2 + y^2)$ 看作是由函数

$$u = \varphi(z) \text{ 及 } z = x^2 + y^2$$

复合而成, 分别对 x 与 y 求导得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(z) \cdot 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(z) \cdot 2y,$$

从而

$$x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy\varphi'(z) - 2xy\varphi'(z) = 0. \quad \blacksquare$$

例 3.19 设 $z = f(u, x, y)$, 其中 f 具有对各变量的连续的二阶偏导数, $u = xe^y$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 根据复合函数的链式法则(3.22)得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 e^y + f_2.$$

注意到 f_1 与 f_2 都是 u, x, y 的三元函数, 再由复合函数链式法则得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_1)e^y + f_1 e^y + \frac{\partial}{\partial y}(f_2) \\ &= (f_{11}xe^y + f_{13})e^y + f_1 e^y + f_{21}xe^y + f_{23}.\end{aligned}$$

在解决物理、力学等问题时, 常常需要通过坐标变换把在一种坐标系下的偏导数关系式, 通过复合函数的链式法则, 变成另一种坐标系下的表达式, 下面举例说明.

例 3.20 求 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在极坐标系中的表达式, 其中 $u = F(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数.

解 令 $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$, 从而

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad (3.23)$$

$$u = F(x, y) = F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \equiv \bar{F}(\rho, \varphi) = \bar{F}\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}\right).$$

这样一来, 就可以把 $u = F(x, y)$ 看作是由 $u = \bar{F}(\rho, \varphi)$ 与 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ 复合而成. 显然 $\bar{F}(\rho, \varphi)$ 同样具有连续的一阶偏导数. 应用链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3.24)$$

由(3.23)式有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho} = \cos \varphi, & \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho} = \sin \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho}.\end{aligned} \quad (3.25)$$

把它们代入(3.24)式得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho}. \quad (3.27)$$

两式平方后相加得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

将(3.26)式两端再对 x 求偏导数, 应用链式法则, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

把(3.25)中有关表达式代入并化简后得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho}.$$

类似地, 将(3.27)式两端再对 y 求偏导并化简后可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho},$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}. \quad \blacksquare$$

多元复合函数的链式法则(3.22)与全微分表达式(3.10)均不难推广到 n 元函数.

设 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, n 元数量值函数 $u_i = \varphi_i(x)$ 在 x 处可微 ($i = 1, \dots, m$), 而数量值函数 $y = f(u)$ 在对应的 $u = u(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ 处可微, 则复合函数 $y = F(x) = f[u(x)]$ 在 x 处也必可微, 从而 $F(x)$ 关于各个变量 x_1, \dots, x_n 的偏导数均存在, 且有

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \left\langle \nabla f(u), \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right\rangle, i = 1, \dots, n.$$

$$dy = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) dx_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) dx_n,$$

即

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_m} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{vmatrix}. \quad (3.28)$$

一阶全微分形式的不变性 在一元函数中, 一阶微分具有形式不变性. 下面来证明多元函数的一阶全微分也具有形式不变性.

设有 m 元函数 $y = f(u) = f(u_1, \dots, u_m)$ 与 m 个 n 元函数 $u_i = u_i(x) = u_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$ 复合. 若 f 在 u 可微, 且 u 在 x 也可微, 则由(3.28)

式知,复合函数的全微分可写成

$$\begin{aligned} dy &= \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_m} \right) \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_1}{\partial x_i} dx_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_m}{\partial x_i} dx_i \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_m} \right) \begin{Bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_m \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

即

$$dy = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} du_m. \quad (3.29)$$

这一全微分的形式与把 $y = f(u_1, \dots, u_m)$ 中的中间变量 $u_i (i = 1, \dots, m)$ 看作是自变量时的全微分形式完全一样,这一性质称为一阶全微分形式不变性.换句话说,对于 m 元函数 $y = f(u_1, \dots, u_m)$ 来说,无论 $u_i (i = 1, \dots, m)$ 是自变量还是中间变量,其一阶全微分(若存在的话)均可写成(3.29)式的形式.

由一阶全微分形式不变性,容易得到

全微分的有理运算法则

- (1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
- (2) $d(uv) = vdu + udv$;
- (3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(vdu - udv), v \neq 0$.

例 3.21 设 $f(u, v)$ 可微,求 $z = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ 的偏导数.

解 利用一阶全微分形式不变性得

$$\begin{aligned} dz &= f_1 d\left(\frac{x}{y}\right) + f_2 d\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= f_1 \frac{ydx - xdy}{y^2} + f_2 \frac{x dy - y dx}{x^2} \\ &= \left(\frac{1}{y} f_1 - \frac{y}{x^2} f_2 \right) dx + \left(-\frac{x}{y^2} f_1 + \frac{1}{x} f_2 \right) dy, \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} f_1 - \frac{y}{x^2} f_2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_1 + \frac{1}{x} f_2. \quad \blacksquare$$

应当指出,高阶全微分不具有微分形式不变性(见本节习题(B)中的第 7 题).

3.6 由一个方程确定的隐函数的微分法

我们常常会碰到一些函数,其因变量与自变量的关系是以方程形式联系起来的.例如在球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

中,如果把 x 和 y 看作是自变量,那末此球面方程在平面闭区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上确定了两个连续的二元函数

$$z = \pm \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

一般地,设有方程

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \quad (3.30)$$

如果存在一个 n 元函数 $y = \varphi(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (Ω 为一集合)使得将 $y = \varphi(x)$ 代入(3.30)后成为恒等式

$$F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0,$$

则称 $y = \varphi(x)$ 是由方程(3.30)所确定的隐函数.

我们在上册中已讲过如何不经过显化而直接由方程 $F(x, y) = 0$ 求出由它所确定的隐函数的导数的方法.现在利用偏导数给出一个隐函数存在的充分条件和隐函数的导数公式.

定理 3.4(隐函数存在定理) 如果二元函数 $F(x, y)$ 满足:

- (1) $F(x_0, y_0) = 0$;
- (2) 在点 (x_0, y_0) 的某邻域中有连续的偏导数;
- (3) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$,

则方程 $F(x, y) = 0$ 在 x_0 的某一邻域中唯一确定了一个具有连续导数的函数 $y = f(x)$, 它满足 $y_0 = f(x_0)$ 及 $F[x, f(x)] \equiv 0$, 并且

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \quad (3.31)$$

这个定理的证明从略,下面仅在由方程 $F(x, y) = 0$ 已经确定了具有连续导数的函数 $y = f(x)$ 的假定下,来推出公式(3.31). 将 $y = f(x)$ 代入 $F(x, y) = 0$ 得

$$F[x, f(x)] \equiv 0,$$

由链式法则,上式两端对 x 求导得

$$F_x + F_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

由于 F_y 连续且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 所以存在点 (x_0, y_0) 的一个邻域, 在这个邻域中 $F_y \neq 0$, 于是

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

如果 $F(x, y)$ 的二阶偏导数连续, 则由链式法则, 对(3.31)的两端关于 x 再求导, 就得到了二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

隐函数的求导方法可以推广到多元函数. 例如, 若一个三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3.32)$$

确定了一个二元函数 $z = f(x, y)$, 则将 $z = f(x, y)$ 代入(3.32), 得

$$F(x, y, f(x, y)) = 0,$$

应用链式法则, 将上式两端分别对 x 和 y 求导, 得

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

从而在 $F_z \neq 0$ 处有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \quad (3.33)$$

例 3.22 设 $\varphi(u, v)$ 具有连续的一阶偏导数, 方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 确定了函数 $z = z(x, y)$, 求 $az_x + bz_y$.

解 令 $u = cx - az, v = cy - bz$, 显然复合函数 $\varphi(cx - az, cy - bz)$ 有对 x, y, z 的连续一阶偏导数. 由隐函数求导公式(3.33)得

$$\begin{aligned} z_x &= -\frac{\varphi_x}{\varphi_z} = -\frac{c\varphi_1}{-a\varphi_1 - b\varphi_2} = \frac{c\varphi_1}{a\varphi_1 + b\varphi_2}, \\ z_y &= -\frac{\varphi_y}{\varphi_z} = -\frac{c\varphi_2}{-a\varphi_1 - b\varphi_2} = \frac{c\varphi_2}{a\varphi_1 + b\varphi_2}, \end{aligned}$$

故

$$az_x + bz_y = c. \blacksquare$$

例 3.23 设方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 确定了函数 $z = z(x, y)$, 求点

(1, 0, -1) 处的全微分 dz .

解法一 直接利用求导公式得

$$\begin{aligned} z_x &= -\left(yz + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \Big/ \left(xy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \\ z_y &= -\left(xz + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \Big/ \left(xy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right). \end{aligned}$$

在点 (1, 0, -1) 处, $z_x = 1$, $z_y = -\sqrt{2}$, 从而 $dz = dx - \sqrt{2}dy$.

解法二 利用一阶全微分形式不变性, 由给定方程两端求全微分得

$$yzdx + xzdy + xydz + \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

将 $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$ 代入上式得

$$-dy + \frac{1}{\sqrt{2}}(dx - dz) = 0.$$

从而,

$$dz|_{(1,0,-1)} = dx - \sqrt{2}dy. \quad \blacksquare$$

习题 5.3

(A)

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = xy + \frac{x}{y}; \quad (2) z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(3) z = \arctan(x - y^2); \quad (4) z = (1 + xy)^z;$$

$$(5) z = x^y y^x; \quad (6) u = \left(\frac{x}{y}\right)^z;$$

$$(7) u = x^{\frac{y}{z}}; \quad (8) u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$(9) u = xze^{\sin(yz)}; \quad (10) u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}.$$

2. (1) 设 $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $f_x(x, 1)$;

(2) 设 $f(x, y) = \frac{\cos(x-2y)}{\cos(x+y)}$, 求 $f_y\left(\pi, \frac{\pi}{4}\right)$.

3. 求曲线 $\begin{cases} z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2), \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 (2, 4, 5) 处的切线与 x 轴正向所成的倾角.

4. 设 $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

研究 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 是否存在偏导数 $f_x(0, 0)$ 及 $f_y(0, 0)$.

5. 证明: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 连续但偏导数不存在.

6. 设 $f(x, y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$. 证明:(1) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 只有沿两个坐标轴的正、负方向上存在方向导数;(2) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 连续.

7. 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在点 $(1, 2)$ 的全微分.

8. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 在点 $(2, 1)$ 当 $(\Delta x, \Delta y) = (0.1, -0.2)$ 时的改变量与全微分.

9. 设 $du = 2x dx - 3y dy$, 求函数 $u(x, y)$.

10. 试说明二元函数 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 连续、偏导数存在、沿任一方向 ℓ 的方向导数存在、可微及一阶偏导数连续几个概念之间的关系.

11. 设 $f(x, y)$ 在区域 D 内具有一阶连续偏导数且恒有 $f_x = 0$ 及 $f_y = 0$, 证明: f 在 D 内为一常量函数.

12. 设 x, y 的绝对值都很小, 利用全微分概念推出下列各式的近似计算公式:

$$(1) (1+x)^m(1+y)^n; \quad (2) \arctan \frac{x+y}{1+xy}.$$

13. 近似计算下列数值:

$$(1) \sin 29^\circ \cdot \tan 46^\circ; \quad (2) (0.97)^{1.05}.$$

14. 有一圆柱体, 受压后发生变形, 它的半径由 20 cm 增大到 20.05 cm , 高度由 100 cm 减少到 99 cm , 求其体积改变量的近似值.

15. 单摆的周期 T 由公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 确定, 其中 l 是摆长, g 是重力加速度. 证明: T 的相对误差约等于 l 与 g 的相对误差的算术平均值.

16. 有一物体, 测得它的质量为 $0.100 (\pm 0.0005) \text{ kg}$, 将它置于水中, 受到水对它的浮力为 $0.12 (\pm 0.008) \text{ N}$. 试求该物体密度的近似值, 并估计近似值的绝对误差与相对误差(取重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$).

17. 证明梯度的下列运算法则(其中 u, v 为可微函数, C_1, C_2 为任意常数):

$$(1) \nabla(C_1 u + C_2 v) = C_1 \nabla u + C_2 \nabla v;$$

$$(2) \nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u;$$

$$(3) \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v \nabla u - u \nabla v) (v \neq 0).$$

18. 求 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3, -2, 2)$ 的方向导数.

19. 求 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处沿方向 $e_l = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{3}\right)$ 的方向导数.

20. 设 $u = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$, 其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, 求 ∇u ; 并指出在空间哪些点处成立 $\|\nabla u\| = 1$.

21. 设 $u = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, 问 u 在点 (a, b, c) 处沿哪个方向增大最快? 沿哪个方向减小最快? 沿哪个方向变化率为零?

22. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求 ∇r 及 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r \neq 0$).

23. 验证下列给定函数满足指定的方程:

$$(1) z = \frac{xy}{x+y} \text{ 满足 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z;$$

$$(2) z = \frac{y}{x} \arcsin \frac{x}{y} \text{ 满足 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$(3) u = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \text{ 满足 } u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0;$$

$$(4) T = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4a^2 t}} \text{ 满足 } \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

24. 证明: 如果函数 $u = f(x, y)$ 满足方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

式中 A, B, C 都是常数, 且 $f(x, y)$ 具有连续的三阶偏导数, 那末函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 也满足这个方程.

25. 求下列函数的高阶偏导数(假定函数 f 具有二阶连续偏导数):

$$(1) z = e^x (\cos y + x \sin y), \text{ 所有二阶偏导数};$$

$$(2) z = x \ln(xy), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2};$$

$$(3) z = f(xy^2, x^2y), \text{ 所有二阶偏导数};$$

$$(4) u = f(x^2 + y^2 + z^2), \text{ 所有二阶偏导数}.$$

26. 已知方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 有形如 $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的解. 试求出这个解来.

27. 设用变换 $t = \sqrt{x}$ 可将微分方程 $4x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2(1 - \sqrt{x}) \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ 化成常系数微分方程 $a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$ (其中 a, b, c 为常数), 求 a, b, c 的值.

28. 利用一阶全微分形式不变性和微分运算法则, 求下列函数的全微分和偏导数(设 φ 与 f 均可微):

$$(1) z = \varphi(xy) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right); \quad (2) z = e^{xy} \sin(x + y);$$

$$(3) u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad (4) u = f(x^2 - y^2, e^{xy}, z).$$

29. 求下列方程所确定的隐函数 y 的一阶与二阶导函数:

$$(1) \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}; \quad (2) y = 2x \arctan \frac{y}{x}.$$

30. 求下列方程所确定的隐函数 z 的一阶与二阶偏导数:

$$(1) \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}; \quad (2) x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0.$$

31. 设 $f(x, y, z) = xy^2 z^3$, 而 x, y, z 又同时满足方程(*): $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$.

(1) 设 z 是由方程(*)所确定的隐函数, 求 $f_z(1, 1, 1)$;

(2) 设 y 是由方程(*)所确定的隐函数, 求 $f_x(1, 1, 1)$.

32. 求由下列方程确定的隐函数 z 的全微分, 其中 F 具有一阶连续偏导数, f 连续可导:

$$(1) F(x - az, y - bz) = 0; \quad (2) x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right).$$

33. 设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都具有一阶连续偏导数, 证明:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

(B)

1. 设 $f(x, y)$ 在点 P_0 可微 $\mathbf{l}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{l}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{l}_1} = 1$, $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{l}_2} = 0$, 确定 \mathbf{l} 使 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{l}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$.

2. 设 $f(x, y)$ 在 $P_0(2, 0)$ 处沿 $\mathbf{l}_1 = (2, -2)$ 的方向导数是 1, 沿 $\mathbf{l}_2 = (-2, 0)$ 的方向导数是 -3. 求 f 在 P_0 处沿 $\mathbf{l} = (3, 2)$ 的方向导数.

3. 设 e_1, \dots, e_n 是 \mathbb{R}^n 的一个标准正交基, $f(x_1, \dots, x_n)$ 是可微函数, 证明:

$$(1) \text{若 } \mathbf{l} \text{ 为单位向量, 则 } \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{l}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial e_i} \cos(\mathbf{l}, e_i);$$

$$(2) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial e_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)^2.$$

4. 设二元函数 f 在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内的偏导数 f_x 与 f_y 都有界. 证明: f 在 $U(P_0)$ 内连续.

5. 设 n 元函数 f 在点 x_0 连续, n 元函数 g 在点 x_0 可微且 $g(x_0) = 0$, 证明: $f(x)g(x)$ 在点 x_0 可微, 且有

$$d(f(x)g(x))|_{x=x_0} = f(x_0)dg(x_0).$$

6. 设 n 元函数 f 在 \mathbb{R}^n 的有界区域 $\Omega: \{x | \|x\| < r\}$ (r 为正常数) 内可微, 且 $f(\mathbf{0}) = 0$. 证明:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial y_i} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{tx}} dt,$$

其中 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

7. 设 $u = x \sin y$.

(1) 当 x, y 为自变量时, 求二阶全微分 $d^2 u$;

(2) 当 $x = \varphi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$ 时, 求二阶全微分 $d^2 u$;

(3) $\varphi \neq a_1 s + b_1 t + c_1$, $\psi \neq a_2 s + b_2 t + c_2$ 时, 说明(2)中的 $d^2 u$ 与(1)中的 $d^2 u$ 不相同.

第四节 多元函数的 Taylor 公式与极值问题

本节中, 我们首先把一元函数的 Taylor 公式推广到多元函数, 然后讨论多

元函数的极值问题和最大、最小值问题. 本节与其后第五节中的向量均写成列向量.

4.1 多元函数的 Taylor 公式

回顾一元函数的 Taylor 公式, 它是用 $x - x_0$ 的 n 次多项式去逼近函数 $f(x)$, 即

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n,$$

其中 R_n 可以写成 Lagrange 余项, 也可以写成 Peano 余项.

同样, 对于 n 元函数 $f(x)$, 我们也可以用由 $x - x_0$ 的分量所构成的多项式去逼近它. 为此, 先介绍 $C^{(m)}$ 类函数的概念.

定义 4.1 设 $f(x)$ 是定义在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 内的 n 元函数, 若 f 在 Ω 内连续, 则称 f 是 Ω 上的 $C^{(0)}$ 类函数, 记为 $f \in C^{(0)}(\Omega)$, 或 $f \in C(\Omega)$; 若 f 在 Ω 内有连续的 m 阶偏导数, 则称 f 是 Ω 上的 $C^{(m)}$ 类函数, 记为 $f \in C^{(m)}(\Omega)$.

下面将一元函数的 Taylor 公式推广到多元函数. 为简便起见, 仅就常用的一阶形式加以论述.

定理 4.1 设 n 元函数 $f \in C^{(2)}(U(x_0))$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 则 $\exists \theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + R_1, \quad (4.1)$$

其中

$$R_1 = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta \Delta x)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j,$$

称为 Lagrange 余项.

证 考虑函数

$$\varphi(t) = f(x_0 + t \Delta x), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

则

$$\varphi(0) = f(x_0), \quad \varphi(1) = f(x_0 + \Delta x).$$

由于 $f \in C^{(2)}(U(x_0))$, 从而复合函数 $\varphi(t) = f(x_0 + t \Delta x)$ 在 $t = 0$ 的邻域内对 t 有连续的二阶导数. 由一元函数的 Taylor 公式可以得到

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2!} \varphi''(\theta t)t^2, \quad 0 < \theta < 1. \quad (4.2)$$

由于

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x)}{\partial x_i} \Delta x_i, \\ \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f(x_0 + t\Delta x)}{\partial x_i} \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0 + t\Delta x)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \Delta x_i, \\ \varphi''(0) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j,\end{aligned}$$

把 $\varphi(0), \varphi'(0), \varphi''(0)$ 代入(4.2)式后再令 $t=1$, 便得到 Taylor 公式(4.1). ■

容易看出, (4.1) 式右端第二项是 f 在 x_0 的梯度 $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right)^T$ 与 $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)^T$ 的点积, 又由 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ 可知余项 R_1 是关于 Δx 的 n 元二次型, 所以利用矩阵乘法记号, 公式(4.1)也可以写成

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), \Delta x \rangle + \frac{1}{2!} (\Delta x)^T H_f(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x,$$

其中, 实对称矩阵

$$H_f(x_0 + \theta \Delta x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{x=x_0 + \theta \Delta x},$$

称为 $f(x)$ 在点 $x_0 + \theta \Delta x$ 的 Hessian 矩阵.

可以证明(从略)在定理 4.1 的条件下, 余项

$$R_1 = \frac{1}{2!} (\Delta x)^T H_f(x_0) \Delta x + o(\|\Delta x\|^2).$$

由此, 就得到 $f(x)$ 在 x_0 处带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \Delta\mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2!} (\Delta\mathbf{x})^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \Delta\mathbf{x} + o(\|\Delta\mathbf{x}\|^2), \quad (4.3)$$

或

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle + \frac{1}{2!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &\quad + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2), \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}$$

为 f 在点 \mathbf{x}_0 处的 Hessian 矩阵, $o(\|\Delta\mathbf{x}\|^2)$ 当 $\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0$ 时是比 $\|\Delta\mathbf{x}\|^2$ 高阶的无穷小.

特别, 对于二元函数 $f(x, y)$, 公式(4.4)可写成

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (x - x_0, y - y_0) \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\rho^2), \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中 $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

例 4.1 设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 所确定的隐函数, 且 $z(1, 1) = 1$. 求 $z(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

解 由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 两端求一阶全微分, 得

$$3z^2 dz - 2(z dx + x dz) + dy = 0,$$

即

$$dz = \frac{2z}{3z^2 - 2x} dx - \frac{1}{3z^2 - 2x} dy,$$

从而

$$z_x = \frac{2z}{3z^2 - 2x}, z_y = \frac{-1}{3z^2 - 2x}. \quad (4.6)$$

注意到 $z(1, 1) = 1$, 于是

$$z_x|_{(1,1,1)} = 2, z_y|_{(1,1,1)} = -1. \quad (4.7)$$

由(4.6)式可得

$$z_{xx} = \frac{-2(3z^2 + 2x)z_x + 4z}{(3z^2 - 2x)^2}, z_{xy} = \frac{-2(3z^2 + 2x)z_y}{(3z^2 - 2x)^2},$$

$$z_{yy} = \frac{6zz_y}{(3z^2 - 2x)^2}.$$

注意到(4.7)式, 可得

$$z_{xx}|_{(1,1,1)} = -16, z_{xy}|_{(1,1,1)} = z_{yx}|_{(1,1,1)} = 10, z_{yy}|_{(1,1,1)} = -6. \quad (4.8)$$

把(4.8)式代入公式(4.5), 便得函数 $z(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} z(x, y) = & 1 + 2(x - 1) - (y - 1) + \\ & \frac{1}{2!}[-16(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 6(y - 1)^2] + o(\rho^2), \end{aligned}$$

其中 $\rho^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$.

4.2 无约束极值, 最大值与最小值

1. 无约束极值

在生产实践中, 我们总是希望用料最省、时间最短、效益最大、质量最好等等, 这类问题的数学模型往往就可归结为多元函数的极值问题. 为了讨论这类问题, 我们首先把一元函数极值的概念推广到多元函数中来, 并建立函数取得极值的条件.

定义 4.2 设 $f: U(x_0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $\forall x \in U(x_0)$, 恒成立不等式

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)),$$

则称 f 在点 x_0 取得无约束极大值(无约束极小值) $f(x_0)$, 简称为极大值(极小值) $f(x_0)$. 点 x_0 称为 f 的极大值点(极小值点), 极大值与极小值统称为极值, 极大值点与极小值点统称为极值点.

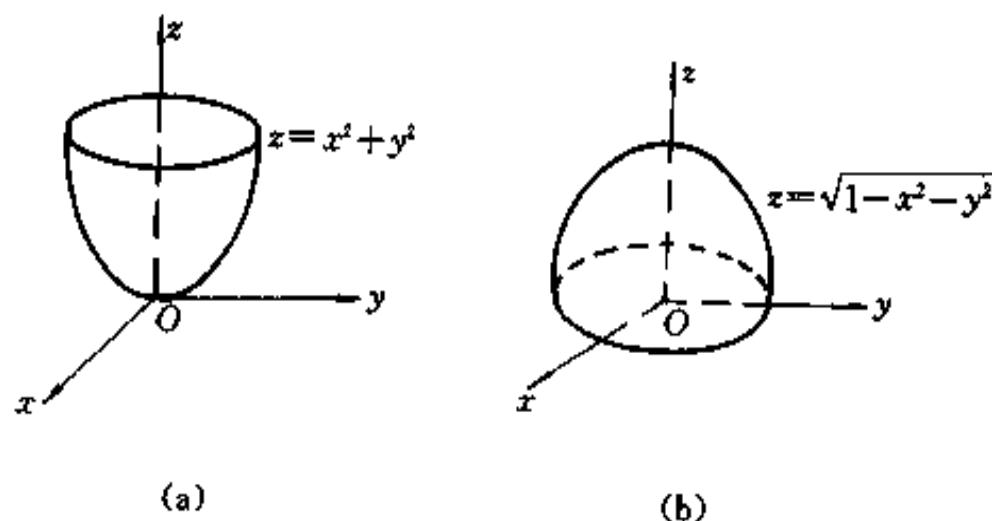


图 4.1

例如,二元函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(0,0)$ 取得极小值 0, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 在点 $(0,0)$ 取得极大值 1, 它们所对应的曲面在相应点分别呈现为“谷”和“峰”(图 4.1).

如果二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的偏导数存在, 且 (x_0, y_0) 为 f 的极值点, 则一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 必取得极值. 由一元函数极值的必要条件, 必有 $f_x(x_0, y_0) = 0$, 同理有 $f_y(x_0, y_0) = 0$. 这就是说, f 在 (x_0, y_0) 取得极值的必要条件是

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x, f_y)|_{(x_0, y_0)} = \mathbf{0}.$$

一般地有

定理 4.2(极值的必要条件) 设 n 元函数 f 在点 x_0 的偏导数存在, 且 x_0 为 f 的极值点, 则必有 $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$.

我们称满足 $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$ 的点 x_0 为 f 的驻点. 因此, 定理 4.2 也可以说成: 偏导数存在的函数 f 的极值点必是 f 的驻点. 但是, 同一元函数一样, 驻点未必都是极值点. 例如, 二元函数 $f(x, y) = x^2 - y^2$, 显然点 $(0,0)$ 是它的驻点, 但却不是它的极值点, 因为在点 $(0,0)$ 的任何去心邻域内, 总有点 $(x, 0)$ 使 $f(x, 0) = x^2 > 0 = f(0, 0)$, 也有点 $(0, y)$

使 $f(0, y) = -y^2 < 0 = f(0, 0)$. 从 f 的图象(图 4.2)来看, 双曲抛物面 $z = x^2 - y^2$ 在原点处呈现“鞍点”, 曲面在原点附近既有向上延伸的部分, 也有向下延伸的部分, 因而函数 f 在该点不能取到极值.

现在, 我们利用 Taylor 公式来建立多元函数极值的充分条件.

定理 4.3(极值的充分条件) 设 n 元函数 $f \in C^{(2)}(U(x_0))$, $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$, $H_f(x_0)$ 为 f 在点 x_0 的 Hessian 矩阵. 若 $H_f(x_0)$ 正定(负定), 则 $f(x_0)$ 为 f 的极小值(极大值).

证 因为 $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$, 由 Taylor 公式, 有

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{1}{2!}(\Delta x)^T H_f(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

由于 $f \in C^{(2)}(U(x_0))$, 所以

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta x)^T H_f(x) \Delta x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j$$

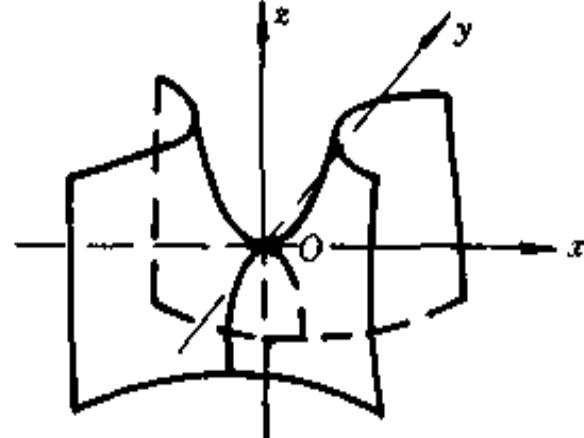


图 4.2

在 $U(x_0)$ 连续, 当 $H_f(x_0)$ 正定时, $\forall \Delta x \neq 0$, 恒有

$$F(x_0) = (\Delta x)^T H_f(x_0) \Delta x > 0,$$

由连续函数的性质, 存在 x_0 的某邻域 $U_1(x_0)$ ($U_1(x_0) \subseteq U(x_0)$), 使当 $x \in U_1(x_0)$ 且 $\Delta x \neq 0$ 时, 恒有 $F(x) > 0$. 所以当 $x_0 + \Delta x \in U_1(x_0)$ 时, 有

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{2!} (\Delta x)^T H_f(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x > 0,$$

或

$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0),$$

即 $f(x_0)$ 为 f 的极小值. ■

根据以上结论, 我们可以得出求 $C^{(2)}$ 类函数 f 的极值的步骤: 首先求出 f 的所有驻点, 然后求出 f 在各个驻点处的 Hessian 矩阵, 最后判定 Hessian 矩阵的类型, 确定出 f 的极值点. 设 x_0 是 f 的驻点, 则当 $H_f(x_0)$ 正定时, $f(x_0)$ 是 f 的极小值; 当 $H_f(x_0)$ 负定时, $f(x_0)$ 是 f 的极大值; 当 $H_f(x_0)$ 不定时, 因为二次型 $(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0)$ 不定, 因而在 x_0 的邻域内 $[f(x) - f(x_0)]$ 不定号, 所以 $f(x_0)$ 不是极值.

特别地, 对于二元函数 $z = f(x, y)$, 若点 P_0 为 f 的驻点, 记

$$f_{xx}(P_0) = A, \quad f_{xy}(P_0) = B, \quad f_{yy}(P_0) = C,$$

则 f 在点 P_0 的 Hessian 矩阵为

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

于是根据矩阵正定、负定和不定的判定方法, 有:

- (1) 若 $A > 0, AC - B^2 > 0$, 则 $H_f(P_0)$ 正定, 故 $f(P_0)$ 为极小值;
- (2) 若 $A < 0, AC - B^2 > 0$, 则 $H_f(P_0)$ 负定, 故 $f(P_0)$ 为极大值;
- (3) 若 $AC - B^2 < 0$, 则 $H_f(P_0)$ 不定, 故 $f(P_0)$ 不是极值.

当 $AC - B^2 = 0$ 时, 称为临界情况. 这时, 只根据二阶 Taylor 公式, 还不足以确定点 P_0 是不是 f 的极值点.

例 4.2 求二元函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ 的极值.

解 由

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y = 0, \\ f_y = 3y^2 + 3x = 0, \end{cases}$$

求出 f 的驻点有两个: $M_1(0,0)$, $M_2(-1,-1)$. 再求二阶偏导数, 得

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 3, \quad f_{yy} = 6y,$$

$$\mathbf{H}_f(M_1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_f(M_2) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

显然 $\mathbf{H}_f(M_1)$ 不定, $\mathbf{H}_f(M_2)$ 负定, 故 M_1 不是 f 的极值点, $f(M_2) = 1$ 是 f 的极大值. ■

例 4.3 求函数

$$f(x,y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$$

的极值点.

解 由

$$\begin{cases} f_x = 4x - 3y^2 = 0, \\ f_y = 2y(2y^2 - 3x) = 0, \end{cases}$$

可求出 f 有唯一的驻点 $(0,0)$. 由于

$$f_{xx}(0,0) = 4, \quad f_{xy}(0,0) = 0, \quad f_{yy}(0,0) = 0,$$

所以

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\mathbf{H}_f(0,0)$ 的行列式为零, 所以点 $(0,0)$ 到底是不是极值点需要进一步讨论. 事实上, 当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时, 从

$$f(x,y) - f(0,0) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4 = (2x - y^2)(x + y^2)$$

可以看出, 当 $x < 0$ 时, $f(x,y) > f(0,0)$; 当 $\frac{1}{2}y^2 < x < y^2$ 时, $f(x,y) < f(0,0)$, 因此 $(0,0)$ 不是 f 的极值点, 从而知 f 没有极值点. ■

应当指出, 在例 4.3 中, Hessian 矩阵 $\mathbf{H}_f(0,0)$ 半正定. 由此可见: 当函数在驻点处的 Hessian 矩阵半正定时, 该驻点未必是函数的极值点.

2. 最大值与最小值

设 $f(x)$ 在有界闭区域 Ω 上连续, 则 f 在 Ω 上必能取到最大值与最小值. 如果最大值(最小值)在 Ω 的内部取到, 则这个最大值(最小值)就是 f 的极值, 当 f 的偏导数均存在时, 它必在 Ω 内的某个驻点处取到. 因此, 同一元函数一样,

要求连续函数 f 在有界闭区域 Ω 上的最大值(最小值), 可以先求出 f 在 Ω 内部的一切驻点处的函数值、偏导数不存在点处的函数值及 f 在 Ω 的边界上的最大值(最小值), 这些数中最大(最小)的一个便是所求的最大(最小)值.

例 4.4 求 $f(x, y) = x^2 + 2x^2y + y^2$ 在圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大值与最小值.

解 由

$$\begin{cases} f_x = 2x(1+2y) = 0, \\ f_y = 2(x^2 + y) = 0, \end{cases}$$

可求出函数 f 在 D 内有三个驻点: $M_1(0, 0)$, $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$, $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$.

且有 $f(M_1) = 0$, $f(M_2) = f(M_3) = \frac{1}{4}$.

在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 函数 f 成为变量 y 的一元函数:

$$\bar{f} = 1 + 2(1 - y^2)y = 1 + 2y - 2y^3, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

由 $\frac{d\bar{f}}{dy} = 2 - 6y^2 = 0$ 得 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, 比较 $\bar{f}(-1) = \bar{f}(1) = 1$, $\bar{f}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}$,

$\bar{f}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{9}$ 可知, f 在 D 的边界上的最小值是 $1 - \frac{4\sqrt{3}}{9}$, 最大值是 $1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

把 f 在 D 内驻点处函数值与它在 D 的边界上的最大值、最小值进行比较, 即得

$$\min_{(x,y) \in D} f(x, y) = 0, \quad \max_{(x,y) \in D} f(x, y) = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}. \quad \blacksquare$$

例 4.5 证明: 在具有已知周长 $2p$ 的三角形中, 等边三角形的面积最大.

证 设三角形三边长分别为 x, y, z , 则由面积公式可得目标函数为

$$S^2 = p(p-x)(p-y)(p-z). \quad (4.9)$$

由所给条件可知

$$x + y + z = 2p, \text{ 即 } z = 2p - x - y.$$

代入(4.9)式可将目标函数化为

$$\begin{aligned} S^2 &= f(x, y) \\ &= p(p-x)(p-y)(x+y-p). \end{aligned}$$

于是问题就成为求目标函数 f 在区域(图 4.3)

$$D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < p, p < x + y < 2p\}$$

上的最大值. 由

$$\begin{cases} f_x = p(p-y)(2p-2x-y) = 0, \\ f_y = p(p-x)(2p-x-2y) = 0, \end{cases}$$

可求出 f 在 D 内的唯一驻点 $M\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$.

因为 f 在有界闭区域 \bar{D} 上连续, 故 f 在 \bar{D} 上有最大值. 显然 f 在 \bar{D} 的边界上的值恒为 0, 而 f 在 D 内部的值大于零, 故 f 在 \bar{D} 的最大值必在 D 的内部取到, 由于在 D 内 f 的偏导数存在, 且驻点唯一, 因而最大值必在驻点 M 处取到. $f(M)$ 为 f 在 \bar{D} 的最大值, 当然也是 f 在 D 的最大值, 即有

$$\max_{(x,y) \in D} f(x, y) = f\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right) = \frac{p^4}{27},$$

这时 $x = y = z = \frac{2p}{3}$, 即三角形为等边三角形. ■

最值问题的应用是十分广泛的. 下面, 我们再举两个在实际应用中颇为重要的例子.

3. 最小二乘法

最小二乘法是测量工作和科学实验中常用的一种数据处理方法. 例如, 根据观测或实验得到自变量 x 和因变量 y 之间的一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 要求寻找一个适当类型的函数 $y = f(x)$ (如线性函数 $y = ax + b$, 或二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 等), 使它在观测点 x_1, x_2, \dots, x_n 处所取的值 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ 与观测值 y_1, y_2, \dots, y_n 在某种尺度下最接近, 从而可用 $y = f(x)$ 作为变量 x 与 y 之间函数关系的近似表达式. 常用的一种尺度和处理方法是: 确定函数 $f(x)$ 中的参数 (如前述例子中的参数 a 和 b , 或 a, b 和 c), 使得在各点处偏差

$$r_i = f(x_i) - y_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

的平方和 $\sum_{i=1}^n r_i^2$ 达到最小. 这种根据偏差平方和为最小的条件来确定参数的方法就叫做最小二乘法. 因此, 这是一个(关于待定参数的)多元函数的最小值问题. 工程技术和科学实验中有许多利用最小二乘法建立的经验公式.

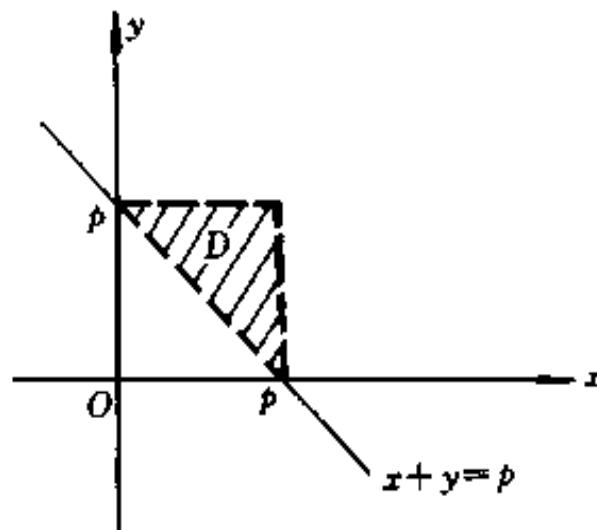


图 4.3

从几何意义上讲,上述问题等价于确定一平面曲线(类型先给定),使它和实验数据点“最接近”(并不要求曲线严格通过已知点).故又称为曲线拟合问题.

现在,我们利用最小二乘法来建立人口增长函数的经验公式.

例 4.6 表 4.1 中“统计数字”一栏是 1971 年到 1990 年各年我国总人口数的统计数据.试根据其中 1971 年到 1982 年的统计数据、利用最小二乘法建立我国人口增长的最佳拟合曲线,并预测 2000 年时我国总人口数.

表 4.1 我国总人口统计数字与预测数字对照表(单位:亿)

年 份	统 计 数 字	预 测 数 字
1971	8.522 9	8.627 42
1972	8.717 7	8.760 51
1973	8.921 1	8.895 66
1974	9.085 9	9.032 89
1975	9.242 0	9.172 23
1976	9.371 7	9.313 73
1977	9.497 4	9.457 41
1978	9.625 9	9.603 30
1979	9.754 2	9.751 45
1980	9.870 5	9.901 88
1981	10.007 2	10.054 63
1982	10.165 4	10.209 74
1983	10.300 8	10.367 24
1984	10.435 7	10.527 17
1985	10.585 1	10.689 57
1986	10.750 7	10.854 48
1987	10.930 0	11.021 92
1988	11.102 6	11.191 95
1989	11.270 4	11.364 61
1990	11.433 3	11.539 93
1991		11.717 95
1992		11.898 72
1993		12.082 27
1994		12.268 66
1995		12.457 92
1996		12.650 11
1997		12.845 25
1998		13.043 41
1999		13.244 63
2000		13.448 95

解 根据所给数据,建立人口数 N 与时间 t 之间函数关系的一个经验公式 $N = N(t)$,并使得曲线 $N = N(t)$ 和给定的 12 组数据(即 1971 年到 1982 年的人口统计数字)在最小二乘意义下尽可能好地拟合,这时曲线 $N = N(t)$ 就叫做最佳拟合曲线.首先确定用什么类型的函数对数据进行拟合.从人口增长的统计资料可知,在不太长的时期内,人口增长接近于指数函数(参见第三章关于生物种群繁殖的数学模型).因此,可采用指数函数 $N = e^{at+bt^2}$ 对数据进行拟合.要确定函数 $N = e^{at+bt^2}$,也就是要确定其中的参数 a 和 b .为便于计算,取对数得 $\ln N = a + bt$,按照最小二乘法,问题就归结为选择参数 a 和 b ,使得偏差平方和

$$Q(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{12} (a + bt_i - \ln N_i)^2 \quad (4.10)$$

为最小,其中 $t_i (i = 1, \dots, 12)$ 依次为 1971, \dots, 1982, N_i 为 t_i 年我国总人口的统计数字.因此,本问题的数学模型就是求二元函数 $Q(a, b)$ 的最小值.

利用极值的必要条件得

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{12} (a + bt_i - \ln N_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{12} (a + bt_i - \ln N_i) t_i = 0, \end{cases}$$

整理得到

$$\begin{cases} 12a + \left(\sum_{i=1}^{12} t_i \right)b = \sum_{i=1}^{12} \ln N_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{12} t_i \right)a + \left(\sum_{i=1}^{12} t_i^2 \right)b = \sum_{i=1}^{12} (\ln N_i) t_i, \end{cases}$$

解此方程组得函数 $Q(a, b)$ 有唯一驻点

$$\bar{a} = -28.01872, \quad \bar{b} = 0.01531,$$

可以证明 (\bar{a}, \bar{b}) 是 $Q(a, b)$ 的最小值点^①.因此,所求人口增长问题的最佳拟合曲线是

^① 显然 $\lim_{\substack{a \rightarrow \pm\infty \\ b \rightarrow \pm\infty}} Q(a, b) = +\infty$, 因此存在正常数 c , 使 $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 < c^2$, 且当 $a^2 + b^2 > c^2$ 时有 $Q(a, b) > Q(\bar{a}, \bar{b})$. 令 $D = \{(a, b) | a^2 + b^2 \leq c^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$, 则连续函数 $Q(a, b)$ 应在有界闭区域 D 上某点 (a_0, b_0) 处取到最小值. 而当 $(a, b) \notin D$ 时, $Q(a, b) > Q(\bar{a}, \bar{b}) \geq Q(a_0, b_0)$, 即知 $Q(a_0, b_0)$ 为 $Q(a, b)$ 在 \mathbb{R}^2 的最小值, 故 (a_0, b_0) 必是 $Q(a, b)$ 的驻点, 但函数 $Q(a, b)$ 只有唯一驻点 (\bar{a}, \bar{b}) , 因此 $(a_0, b_0) = (\bar{a}, \bar{b})$, 即 (\bar{a}, \bar{b}) 是函数 $Q(a, b)$ 的最小值点.

$$N(t) = e^{-28.01872 + 0.01531t}. \quad (4.11)$$

依此函数,2000 年时我国总人口数预测为

$$N(2000) = 13.44895(\text{亿}).$$

表 4.1 是我国总人口的统计数字与按公式(4.11)预测数字的对照表,从表中 1983 年到 1990 年的数据对照可以看出,我们所建立的指数增长模型(4.11)与实际数据吻合得较好. 图 4.4 是人口增长的最佳拟合曲线图,图中的曲线为曲线(4.11),图中的点为人口的统计数据点.

因为指数增长模型假设人口的增长率为正常数,当时间较长时是与实际情况不符合的,所以不能用指数增长模型作人口的长期预报. 关于如何改进人口增长的数学模型,可参考第三章的 Logistic 模型.

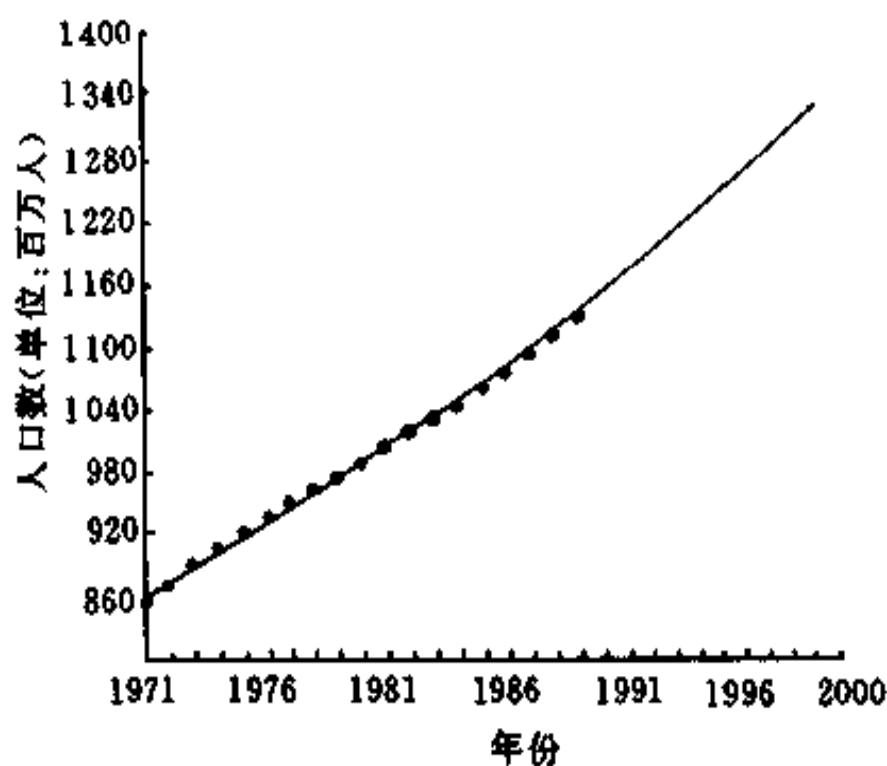


图 4.4

4. 最优化的产出水平

某工厂生产两种产品,它们的产量分别为 q_1 与 q_2 ,两者是不相关的. 但其成本与生产技术又是相关的. 假设两种产品的总成本 C 与其产量的函数关系为 $C = C(q_1, q_2)$; 总收益 $R = R(q_1, q_2)$. 问如何确定每种产品的产量以使厂商获得最大的利润?

厂商的利润函数显然为

$$L = R(q_1, q_2) - C(q_1, q_2).$$

因此,问题归结为求利润函数 L 的最大值. 由极值的必要条件可得

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial R}{\partial q_1} - \frac{\partial C}{\partial q_1} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial R}{\partial q_2} - \frac{\partial C}{\partial q_2} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

在经济学中把总成本对产量的偏导数: $\frac{\partial C}{\partial q_1}, \frac{\partial C}{\partial q_2}$ 称为边际成本; 把总收益对产量的偏导数: $\frac{\partial R}{\partial q_1}, \frac{\partial R}{\partial q_2}$ 称为边际收益. 它们分别反映了各种产品的产量变化时所引起总成本与总收益变化的快慢程度. (4.12)式表明, 厂商为了获取最大利润, 应该使每种产品达到这样的产出水平: 使其边际收益与边际成本相等, 即

$$\frac{\partial R}{\partial q_1} = \frac{\partial C}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_2} = \frac{\partial C}{\partial q_2}. \quad (4.13)$$

例 4.7 工厂生产两种产品, 其产量分别为 q_1 (件)和 q_2 (件), 总成本函数 C (单位: 元)是

$$C = q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2 + 5,$$

两种产品的需求函数分别是

$$q_1 = 2600 - p_1, \quad q_2 = 1000 - \frac{1}{4}p_2,$$

其中 p_1 和 p_2 分别是两种产品的单价(单位: 元/件). 为使工厂获得最大利润, 试确定两种产品的产出水平.

解 由于 $q_1 = 2600 - p_1, q_2 = 1000 - \frac{1}{4}p_2$, 从而两种产品的单价分别为

$$p_1 = 2600 - q_1, \quad p_2 = 4000 - 4q_2,$$

于是总收益函数为

$$\begin{aligned} R &= p_1q_1 + p_2q_2 = (2600 - q_1)q_1 + (4000 - 4q_2)q_2 \\ &= 2600q_1 + 4000q_2 - q_1^2 - 4q_2^2. \end{aligned}$$

根据(4.13)式, 有

$$\begin{cases} 2600 - 2q_1 = 2q_1 + 2q_2, \\ 4000 - 8q_2 = 2q_1 + 2q_2, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2q_1 + q_2 = 1300, \\ q_1 + 5q_2 = 2000. \end{cases}$$

解之, 得 $q_1 = 500, q_2 = 300$.

可以验证此组解满足极值存在的充分条件. 因此, 当两种产品的产量分别为 500(件)与 300(件)时, 工厂获利最大. 此时最大利润为

$$L = R - C = (2600q_1 + 4000q_2 - q_1^2 - 4q_2^2) - (q_1 + q_2)^2 - 5,$$

将 q_1 与 q_2 的值代入计算后得

$$L = 169995(\text{元}). \blacksquare$$

4.3 有约束极值, Lagrange 乘数法

无约束极值问题, 目标函数中各个自变量是独立变化的, 没有附加什么约束条件, 寻求函数极值点的范围是目标函数的定义域.

但是, 大量的极值问题, 对目标函数的自变量往往还附加有某些限制条件. 例如, 在例 4.5 中, 目标函数 $S^2 = p(p-x)(p-y)(p-z)$ 的自变量不仅要符合定义域($x > 0, y > 0, z > 0$)的要求, 还须满足条件 $x + y + z = 2p$. 这类附有约束条件的极值问题, 称为有约束极值(或条件极值)问题.

为了说明有约束极值与无约束极值的区别, 让我们再看一个具体的例子. 函数 $z = x^2 + y^2$ 的无约束极小值显然在点 $(0, 0)$ 取得, 且其值为零. 如果加上约束条件

$$x + y - 1 = 0,$$

那末有约束极小值就不可能在点 $(0, 0)$ 取得, 因为这一点的坐标不满足约束条件. 容易算出, 所求的有约束极小值等于 $\frac{1}{2}$, 且在点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 处取得(图 4.5). 在前一种情形, 我们所求的是曲面 $z = x^2 + y^2$ 上各点的 z 坐标中的极小值; 在后一种情形, 我们所求的是曲面与平面 $x + y - 1 = 0$ 的交线上各点的 z 坐标中的极小值.

有约束极值的一种常见形式是在条件组

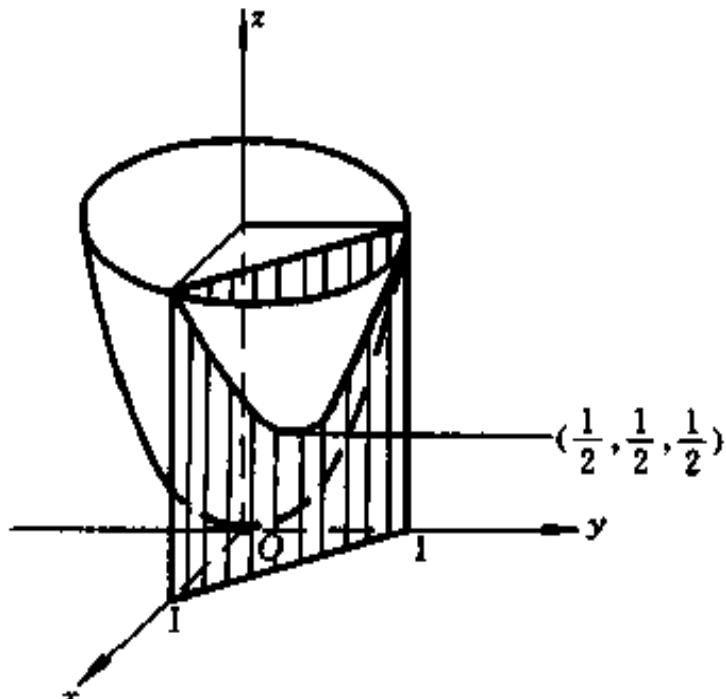


图 4.5

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (k = 1, \dots, m, m < n) \quad (4.14)$$

的限制下, 求目标函数

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.15)$$

的极值.

在某些情形下, 这种有约束极值问题可以化成无约束极值来求解. 例如在例

4.5 中, 我们从约束条件中解出 $z = 2p - x - y$, 代入目标函数后, 问题便化成求 $f(x, y) = p(p - x)(p - y)(x + y - p)$ 的无约束极值.

然而, 对于一般的有约束极值问题(4.14), (4.15), 要从隐函数方程组(4.14)中解出 m 个变量往往比较麻烦, 甚至解不出来, 因此需要寻求其它处理方法. 下面介绍的 Lagrange 乘数法就是一种不直接依赖消元而求解有约束极值的有效方法. 我们从一种简单情形来说明这种方法.

Lagrange 乘数法 设目标函数

$$z = f(x, y) \quad (4.16)$$

在约束条件

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (4.17)$$

下取得极值, 且 (x_0, y_0) 为其极值点; 并设 $f, \varphi \in C^{(1)}(U(x_0, y_0))$, 且 $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$. 于是有

$$\varphi(x_0, y_0) = 0, \quad (4.18)$$

且由隐函数存在定理(定理 3.4)可知, 方程(4.17)确定了一可导函数 $y = y(x)$, 它满足 $\varphi[x, y(x)] \equiv 0$ 且 $y_0 = y(x_0)$, 把它代入目标函数(4.16)得

$$z = f[x, y(x)]. \quad (4.19)$$

这样一来, 我们便把(4.16)在条件(4.17)下的有约束极值问题化成了一元函数(4.19)的无约束极值问题. 而且 $x = x_0$ 就是函数(4.19)的极值点. 由一元可导函数取得极值的必要条件可知

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (4.20)$$

对约束条件(4.17), 运用隐函数求导法则, 得

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)},$$

代入(4.20)式得

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} = 0. \quad (4.21)$$

于是, (4.18)与(4.21)两式就是所求有约束极值的必要条件. 从此两式中解出的 (x_0, y_0) 就可能是所求有约束极值的极值点.

为了使(4.21)式的形式更为对称, 我们利用行列式把它写成

$$\begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ \varphi_x(x_0, y_0) & \varphi_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0.$$

由行列式的性质知, 其两行的对应元素成比例, 令此比例系数为 $-\lambda_0$, 于是上述有约束极值的必要条件可写成

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

容易看出,(4.22)式就是三元函数

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \quad (4.23)$$

在 (x_0, y_0, λ_0) 取得无约束极值的必要条件. 所以要求目标函数(4.16)在约束条件(4.17)下的有约束极值点 (x_0, y_0) , 可以先构成函数(4.23), 然后令它的三个偏导数为零得

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0, \\ L_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0, \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

再从这三个方程中解出 x_0, y_0, λ_0 , 则其中 (x_0, y_0) 就可能是极值点. 函数(4.23)称为 Lagrange 函数, 数 λ 称为 Lagrange 乘数, 这种求有约束极值点的必要条件的方法称为 Lagrange 乘数法, (x_0, y_0, λ_0) 就是 Lagrange 函数 L 的驻点.

Lagrange 函数 L 的驻点 (x_0, y_0, λ_0) 中的 (x_0, y_0) 是否真是有约束极值点? 是极大值点还是极小值点? 严格说来, 需要另行判定. 但是对于具体的实际问题来说, 在求得 (x_0, y_0) 后, 一般可以由问题的实际意义来直接判断, 而且由必要条件所求得的 (x_0, y_0) 往往就是所求的条件极值点.

例 4.8 欲生产容积为常数 V 的无盖长方体盒子, 问如何设计, 可使盒子的表面积最小?

解 设盒子的长、宽、高分别为 x, y, z , 则问题就是求目标函数

$$f(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy$$

在约束条件

$$xyz - V = 0$$

下的最小值. 应用 Lagrange 乘数法, 令

$$L(x, y, z, \lambda) = 2xz + 2yz + xy + \lambda(xyz - V),$$

求 L 对各个变量的偏导数, 并令它们都等于 0, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} L_x = 2z + y + \lambda yz = 0, \\ L_y = 2z + x + \lambda xz = 0, \end{array} \right. \quad \text{①}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0, \\ L_\lambda = xyz - V = 0, \end{array} \right. \quad \text{②}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_x = 2z + y + \lambda yz = 0, \\ L_y = 2z + x + \lambda xz = 0, \end{array} \right. \quad \text{③}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0, \\ L_\lambda = xyz - V = 0, \end{array} \right. \quad \text{④}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{得} \quad (y - x)(1 + \lambda z) = 0, \quad \text{⑤}$$

$$2 \times \text{②} - \text{③} \text{得} \quad (2z - x)(2 + \lambda x) = 0, \quad \text{⑥}$$

$$\text{由⑤及⑥得} \quad x = y = 2z, \quad \text{⑦}$$

把⑦代入④得唯一解

$$z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}, \quad x = y = \sqrt[3]{2V}, \quad \lambda = -2\frac{1}{\sqrt[3]{2V}}. \quad (4.25)$$

于是 Lagrange 函数 L 有唯一驻点, 因此 $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V})$ 是使函数 f 可能取得条件极值的唯一一组解, 由于体积 V 是常数, 当盒子的一条边, 例如 z 很小时, 盒子很薄其表面积很大; 随着 z 的增大, 表面积将逐渐变小, 当 z 变得很大时, 盒子又变得很薄, 从而其表面积又变得很大. 由此容易看出盒子的最小表面积是存在的, 故当 $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ 时, 也即盒子的底面为正方形、而高等于底边长的一半时, 盒子的表面积最小. ■

习题 5.4

(A)

1. 写出 $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ 在点 $(1, -2)$ 的 Taylor 公式.

2. 求 $f(x, y) = \sin x \sin y$ 在点 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 的二阶 Taylor 公式.

3. 求 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(1, 4)$ 的二阶 Taylor 公式, 并用它近似计算 $(1.08)^{3.96}$ 的值.

4. 求下列函数的极值:

$$(1) z = x^2(y-1)^2; \quad (2) z = (x^2 + y^2 - 1)^2;$$

$$(3) z = xy(a-x-y); \quad (4) z = e^{2x}(x+2y+y^2);$$

$$(5) z = x^2 + xy + y^2 - 3ax - 3by.$$

5. 求下列函数在指定区域 D 上的最大值与最小值:

$$(1) z = x^2y(4-x-y), D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 4\};$$

$$(2) z = x^3 + y^3 - 3xy, D = \{(x, y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2\}.$$

6. 分解已知正数 a 为三个正的因子,使它们的倒数之和为最小.
7. 横断面为半圆形的正柱形无盖容器,其表面积等于 S ,当其尺寸如何时,此容器有最大的容积?
8. 在 xOy 平面上求一点,使它到三直线 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 的距离平方和为最小.
9. 在 xOy 平面上求一点,使它到平面上 n 个已知点

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

的距离的平方和为最小.

10. 求原点到曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 的最长和最短距离.

11. 有一下部为圆柱形、上部为圆锥形的帐篷,它的容积为常数 K . 今要使所用的布最少,试证帐篷尺寸间应有关系式为 $R = \sqrt{5}H, h = 2H$ (其中 R, H 分别为圆柱形的底半径及高, h 为圆锥形的高).

12. 修建一个容积为常量 V 的长方体地下仓库,已知仓顶和墙壁每单位面积造价分别是地面每单位面积造价的 3 倍和 2 倍. 问如何设计仓库的长、宽和高,可使它的造价最小.

13. 求椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$ 的内接等腰三角形,使其底边平行于椭圆的长轴,而且面积最大.

(B)

1. 证明: 对任意正数 a, b, c 有 $abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^5$.
2. 求 $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$ 在条件 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$ ($x_i > 0, i = 1, \dots, n, a > 0$) 之下的极值. 并证明: 当 $a_i > 0 (i = 1, \dots, n)$ 时, 成立

$$n \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)^{-1} \leq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

3. 设 D 是 \mathbb{R}^2 的有界闭区域, 函数 $u(x, y)$ 在 D 有定义, 在 D 的内部成立 $u_{xx} + u_{yy} + cu = 0$, 其中 $c < 0$ 为常数. 证明:

- (1) u 在 D 上的正最大值(负最小值)不能在 D 的内部取得;
- (2) 若 u 在 D 上连续, 且在 D 的边界上 $u = 0$, 则在 D 上 $u = 0$.

第五节 多元向量值函数的导数与微分

本节将数量值函数的导数与微分的概念以及它们的运算法则推广到向量值函数, 并讨论由方程组所确定的隐函数的微分法. 本节中的向量都写成列向量.

5.1 向量值函数的方向导数与偏导数

数量值函数的方向导数与偏导数的定义几乎可以逐字逐句移植到向量值函

数中来.

设 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个向量值函数, l 是 $U(x_0)$ 中的一个向量, e_l 是 l 的单位向量. 若极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_l) - f(x_0)}{t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (5.1)$$

存在, 则称它为 f 在点 x_0 处沿 l 方向的方向导数, 记作 $D_l f(x_0)$ 或 $\frac{\partial f(x_0)}{\partial l}$. f 在点 x_0 处沿 \mathbb{R}^n 中标准正交基

$$e_j = (0, \dots, 0, \underset{\text{第 } j \text{ 个分量}}{1}, 0, \dots, 0)^T, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

的方向导数称为 f 在点 x_0 处关于 x_j (x 的第 j 个分量) 的偏导数, 记作

$$D_j f(x_0) \text{ 或 } \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \text{ 或 } f_{x_j}(x_0).$$

设 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, 则 (5.1) 式中的极限存在等价于极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + te_l) - f_i(x_0)}{t} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

都存在. 根据定义 3.1, 它们就是数量值函数 f_i 在点 x_0 处沿 l 方向的方向导数

$$\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + te_l) - f_i(x_0)}{t} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

因此, 向量值函数 f 在点 x_0 处沿 l 方向的方向导数存在的充要条件为 f 的每个分量 f_i 在点 x_0 处沿 l 方向的方向导数存在, 并且此时有

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = \left(\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial l}, \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial l}, \dots, \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial l} \right)^T.$$

关于偏导数自然也有类似的结论, 这里不再赘述, 读者不妨将它补写出来. 作为特例, 设 f 是定义在 $U(x_0) \subseteq \mathbb{R}$ 上的一元向量值函数, 则

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \left(\frac{df_1(x_0)}{dx}, \frac{df_2(x_0)}{dx}, \dots, \frac{df_m(x_0)}{dx} \right)^T \quad (x \in U(x_0)).$$

这里, 由于向量值函数 f 及其各分量 f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 都是仅含一个自变量的函数, 因此偏导数就是一元函数的导数. 当 $m = 3$ 时, 一元向量值函数的导数有明显的物理意义. 事实上, 若用 $r(t)$ 表示质点在 t 时刻空间位置的向径, 质点在空间 \mathbb{R}^3 中运动的方程可以用向量值函数 $r = r(t)$ 来表示, 其中 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, 则质点的速度向量

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)^T.\end{aligned}$$

这就是说,一元向量值函数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 的导数 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 在物理中表示质点的速度向量 $\mathbf{v}(t)$. 在第六节中还将指出,这个一元向量值函数的导数在几何上表示空间曲线的切线向量.

5.2 向量值函数的导数与微分

在第二章中,曾定义一元函数 f 在点 x_0 处的导数为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

能否用与上式类似的极限来定义 n 元向量值函数 $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在点 $x_0 \in \Omega$ 处的导数呢? 回答是否定的. 因为此时 $\Delta x = x - x_0$ 是一个 n 维向量, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 是一个 m 维向量, 两个向量相除是没有意义的.

但是,在一元函数中可导与可微是两个等价的概念. 若存在一个线性映射 $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (即线性函数 $L(\Delta x) = a\Delta x$), 使

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L(\Delta x) + o(\Delta x),$$

其中 $o(\Delta x)$ 是关于 Δx 的高价无穷小, 则称 f 在 x_0 处可微, 称 $L(\Delta x) = a\Delta x$ 为 f 在 x_0 处的微分, 记作 $df(x_0)$, 并且 $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

在本章第三节中, 我们又用这种方式定义了 n 元数量值函数的可微性与全微分. 即若存在着线性映射 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (即线性函数 $L(\Delta x) = \langle a, \Delta x \rangle$) 使

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L(\Delta x) + o(\rho) \quad (\rho = \|\Delta x\|)$$

其中 $o(\rho)$ 是关于 ρ 的一个高阶无穷小, 则称数量值函数 f 在 x_0 处可微, 并称 $df(x_0) = L(\Delta x)$ 为 f 在 x_0 处的全微分, 且 $df(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \Delta x \rangle = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0) \Delta x_i$. 下面仿照这些定义给出向量值函数的可微性、微分与导数的定义.

定义 5.1 设 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 n 元向量值函数, $x_0, x_0 + \Delta x \in U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$. 若存在着线性映射 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 使

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = T(\Delta x) + o(\rho) \quad (\rho = \|\Delta x\|) \quad (5.2)$$

其中 $o(\rho)$ 是关于 ρ 的高阶无穷小 (m 维) 向量, 则称 f 在点 x_0 处可微 (或可

导),并称 $T(\Delta x)$ 为 f 在点 x_0 处的(全)微分,记作 $df(x_0) = T(\Delta x)$. 称线性映射 T 为 f 在点 x_0 处的导数,记作 $Df(x_0)$ 或 $f'(x_0)$.

若记 $dx = \Delta x$, 则向量值函数 f 在 x_0 处的微分可以表示为

$$df(x_0) = Df(x_0)dx.$$

这样,向量值函数的微分与一元函数的微分在形式上就统一起来了. 若 f 在区域 Ω 中的每一点都可微,则称 f 在 Ω 上可微(或可导). 此时, f 在 Ω 中的每点 x 处都有导数 $Df(x)$, 称 Df 为 f 的导函数, 它是一个线性映射(也叫做线性算子).

在线性代数中讲过, 线性映射可以用矩阵来表示. 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 为线性映射 T 的矩阵, 则(5.2)式又可写成

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\rho), \quad (5.3)$$

从而 f 在 x_0 处的导数

$$Df(x_0) = Df(x)|_{x=x_0} = A.$$

下面的定理说明, 判断向量值函数的可微性可以转化为判断它的各个分量(数量值函数)的可微性.

定理 5.1 向量值函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在点 $x_0 \in \Omega$ 处可微的充要条件为 f 的每个分量 $f_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 在 x_0 处可微. 此时, f 在 x_0 处的导数为

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

证 设向量值函数 f 在 x_0 处可微, 记高阶无穷小(m 维)向量 $o(\rho) = (o_1(\rho), \dots, o_m(\rho))^T$, 将(5.3)式写成分量的形式得

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + \Delta x) - f_i(x_0) \\ = a_{i1}\Delta x_1 + \cdots + a_{in}\Delta x_n + o_i(\rho), \quad (i = 1, 2, \dots, m; \rho = \|\Delta x\|). \end{aligned}$$

根据数量值函数可微的定义即知 f 的每个分量 $f_i (i = 1, \dots, m)$ 在 x_0 处可微; 反之, 若 f 的每个分量 $f_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 在 x_0 处可微, 易见, 上述推理过程反过来也成立, 故 f 在 x_0 处可微. 此时, 由数量值函数全微分的表达式得

$$(a_{i1}, \dots, a_{in}) = \left(\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_n} \right) = \nabla f_i(x_0)^T (i=1, \dots, m)$$

故

$$Df(x_0) = A = \left(\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} \right)_{m \times n}.$$

称(5.4)式右端的矩阵为 f 在 x_0 处的 Jacobi 矩阵. 因此, 向量值函数 f 在 x_0 处的导数就是它在该点的 Jacobi 矩阵. 当 $m=n$ 时, 该方阵的行列式称为 f 在 x_0 处的 Jacobi 行列式, 习惯上记成

$$J_f(x_0) = \left. \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right|_{x=x_0}.$$

下面考察向量值函数导数的几种特殊情况.

(1) $m=1$. 此时 f 为数量值函数, 由(5.4)式知其导数

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right),$$

它就是 f 在 x_0 处的梯度向量 $\nabla f(x_0)$. 定义

$$D^2 f(x_0) = D(Df(x))|_{x=x_0}$$

为数量值函数 f 在 x_0 处的二阶导数, 由(5.4)式得

$$D^2 f(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} = (\mathbf{H}_f(x_0))^T.$$

因此 f 在 x_0 处的二阶 Taylor 公式也可以写成

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (x - x_0)^T (D^2 f(x_0))^T (x - x_0) + o(\|x - x_0\|). \end{aligned}$$

(2) $n=1$. 此时 f 为一元向量值函数, $x \in \mathbb{R}$ 为实变量,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \quad Df(x_0) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ \vdots \\ f'_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

在这种情况下, 导函数 $Df(x)$ 也可用 $\frac{df(x)}{dx}$ 表示, 而 $Df(x_0)$ 则可表示为

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \text{ 定义}$$

$$\left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = D^2 f(x_0) = D(Df(x))|_{x=x_0} = (f''_1(x_0), \dots, f''_m(x_0))^T$$

为 f 在 x_0 处的二阶导数. 类似可定义 f 在 x_0 处的 n 阶导数为

$$D^n f(x_0) = D(D^{n-1} f(x))|_{x=x_0}.$$

设 $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ 表示质点在空间 \mathbf{R}^3 中的运动方程, 则它的二阶导数就是质点的加速度向量, 即

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2} \right)^T.$$

例 5.1 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 每个元素都是常数, $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbf{R}^n$), 试求 $Df(x)$.

解 由于

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A(x + \Delta x) - Ax = A\Delta x + \mathbf{0},$$

其中 $\mathbf{0}$ 为 \mathbf{R}^m 中的零向量, 根据微分的定义立即得知

$$Df(x) = A. \blacksquare$$

例 5.2 设有二元向量值函数

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix},$$

试求 f 在点 $(1, 1)^T$ 处的导数与微分.

解 设 $f_1(x, y) = x^2 - y^2$, $f_2(x, y) = 2xy$, 则

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

所以

$$Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A, \quad df(1, 1) = A \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \Delta x - \Delta y \\ \Delta x + \Delta y \end{pmatrix}. \blacksquare$$

5.3 微分运算法则

定理 5.2 设向量值函数 f 与 g 都在点 x 处可微, u 是在 x 处可微的数量值函数, 则有

(1) $f + g, \langle f, g \rangle$ 在 x 处可微, 并且

$$\begin{aligned} D(f+g)(x) &= Df(x) + Dg(x), \\ D\langle f, g \rangle(x) &= (f(x))^T Dg(x) + (g(x))^T Df(x); \end{aligned}$$

(2) uf 在 x 处可微, 并且

$$D(uf)(x) = u Df(x) + f(x) Du(x);$$

(3) 若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, 则向量积 $f \times g$ 在 x 处可微, 并且

$$D(f \times g)(x) = Df(x) \times g(x) + f(x) \times Dg(x).$$

证 我们仅证明(1)中关于内积 $\langle f, g \rangle$ 的结论, 其余的留给读者去证明.

设 $f = (f_1, \dots, f_m)^T, g = (g_1, \dots, g_m)^T$. 已知 f, g 在 x 处可微, 根据定理 5.1, 数量值函数 $f_i, g_i (i = 1, \dots, m)$ 在 x 处都可微. 由数量值函数可微的性质知, 数量值函数

$$F = \langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n f_i g_i$$

在 x 处可微, 并且

$$DF(x) = \sum_{i=1}^n D(f_i g_i)(x) = \sum_{i=1}^n \nabla (f_i g_i)(x).$$

根据梯度的运算性质得知

$$\begin{aligned} DF(x) &= \sum_{i=1}^n [f_i(x) \nabla g_i(x) + g_i(x) \nabla f_i(x)] \\ &= (f(x))^T Dg(x) + (g(x))^T Df(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

若 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, 则定理 5.2(1) 中的第二个等式变为

$$\frac{d}{dx} \langle f, g \rangle(x) = \langle f, g' \rangle(x) + \langle f', g \rangle(x).$$

由此, 读者不难证明: 设 $r = r(t)$ 表示空间 \mathbb{R}^3 中动点 $(x(t), y(t), z(t))^T$ 的向径, 则

$$\|r(t)\| = c (c \text{ 为常数}) \Leftrightarrow \langle r'(t), r(t) \rangle = 0$$

(习题 5.5(A) 第 4 题).

定理 5.3(向量值函数的链式法则) 设向量值函数 $g = (g_1, g_2, \dots, g_p)^T$ 在

点 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 处可微, 向量值函数 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ 在对应的点 $u_0 = g(x_0) \in \mathbf{R}^p$ 处可微, 则复合函数 $w = f \circ g$ 在点 x_0 处可微, 并且

$$Dw(x_0) = Df(u_0)|_{u_0=g(x_0)} Dg(x_0) = Df(g(x_0)) Dg(x_0). \quad (5.5)$$

证 已知向量值函数 f 与 g 分别在点 u_0 与 x_0 处可微, 由定理 5.1, 它们的各个分量(数量值函数)分别在 u_0 与 x_0 处必可微. 根据多元数量值函数复合函数的可微性定理及其链式法则, 复合向量值函数 $w = f \circ g$ 的各个分量在 x_0 处可微, 并且

$$\left. \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|_{x=x_0} = \sum_{k=1}^p \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right|_{u=u_0} \left. \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right|_{x=x_0}, \quad i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m. \quad (5.6)$$

因此, 由定理 5.1, 向量值函数 $w = f \circ g$ 在点 x_0 处可微, 并且(5.6)式可以写成矩阵形式:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{c} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \dots \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial w_2}{\partial x_n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial w_m}{\partial x_1} \frac{\partial w_m}{\partial x_2} \dots \frac{\partial w_m}{\partial x_n} \end{array} \right|_{x=x_0} \\ &= \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \dots \frac{\partial f_1}{\partial u_p} & \left. \begin{array}{c} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \dots \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} \frac{\partial g_p}{\partial x_2} \dots \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{array} \right|_{x=x_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \dots \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} \frac{\partial f_m}{\partial u_2} \dots \frac{\partial f_m}{\partial u_p} \end{array} \right)_{u=u_0}, \quad (5.7) \end{aligned}$$

从而得到公式(5.5). ■

公式(5.5)表明, 向量值函数的链式法则在形式上是与一元函数的链式法则是一样的. 下面给出它的两种特殊情形:

(1) $m=1$. 此时 f 是从 \mathbf{R}^p 到 \mathbf{R} 的数量值函数, 因此复合映射 $w = f \circ g$ 是从 \mathbf{R}^n 到 \mathbf{R} 的数量值函数, 故

$$Df(u_0) = \left(\frac{\partial f(u_0)}{\partial u_1}, \frac{\partial f(u_0)}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f(u_0)}{\partial u_p} \right),$$

利用公式(5.5)或(5.7)并按分量形式写出,即得

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f(u_0)}{\partial u_i} \frac{\partial g_i(x_0)}{\partial x_j} \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

它就是第三节中讲过的 n 元数量值复合函数的求导公式.

(2) $n = m = p$. 此时 $Dw(x_0)$, $Df(u_0)$ 与 $Dg(x_0)$ 都是 n 阶方阵, 对求导公式(5.5)两端取对应的 Jacobi 行列式即得(下面的等式中略去了 x_0 与 u_0):

$$\frac{\partial(w_1, w_2, \dots, w_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (5.8)$$

这个公式与一元复合函数的求导公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ 的形式类似, 便于记忆.

例 5.3 设有向量值函数:

$$w = f(u) = \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2 u_3 \\ u_1 u_3 - u_2^2 \end{pmatrix},$$

$$u = g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \cos x_2 \\ x_2 \sin x_1 \\ x_1^2 e^{x_2} \end{pmatrix},$$

其中 $x = (x_1, x_2)^T$, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, $w = (w_1, w_2)^T$, 试求

$$D(f \circ g)|_{(1,0)^T}, \frac{\partial w_1}{\partial x_1}|_{(1,0)^T} \text{ 及 } \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x_1, x_2)}|_{(1,0)^T}.$$

解 由公式(5.7)得

$$D(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} 2u_1 & -u_3 & -u_2 \\ u_3 & -2u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ x_2 \cos x_1 & \sin x_1 \\ 2x_1 e^{x_2} & x_1^2 e^{x_2} \end{pmatrix}.$$

因为当 $(x_1, x_2)^T = (1, 0)^T$ 时, $(u_1, u_2, u_3)^T = (1, 0, 1)^T$, 故

$$D(f \circ g)|_{(1,0)^T} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sin 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}|_{(1,0)^T} = 2, \quad \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x_1, x_2)}|_{(1,0)^T} = \begin{vmatrix} 2 & -\sin 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 \sin 1. \quad \blacksquare$$

5.4 由方程组所确定的隐函数的微分法

第三节中已经讨论了由一个方程所确定的隐函数(数量值函数)及其微分

法,本段将研究在许多问题中经常遇到的由方程组所确定的隐函数(向量值函数)及其微分法.

考虑由 m 个方程、 $m+n$ 个变量组成的方程组：

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

对于给定的 x_1, \dots, x_n , (5.9) 式就是包含 m 个方程、 m 个变量的方程组. 如果存在定义在点集 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的 m 个函数:

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.10)$$

将其代入方程组(5.9)后使它变成 m 个恒等式,那么就称这 m 个函数是它的解,或称为由该方程组所确定的隐函数.

记 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)^T$, $F = (F_1, \dots, F_m)^T$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, 则方程组(5.9)就可写成 $F(x, y) = 0$, (5.10)式可写成 $y = f(x)$. 由方程组(5.9)所确定的隐函数(5.10)就可以看成由向量方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的向量值函数

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 或 $y = f(x), x \in A$.

下面的定理给出了存在可微隐函数的充分条件。

定理 5.4(隐函数存在定理) 设 $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 是一个区域, $F: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续可微的向量值函数, $(x_0, y_0) \in G$, 并且满足下列条件:

- (1) $F(x_0, y_0) = 0$;
 (2) Jacobi 行列式

$$J_F(x_0, y_0) = \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0,$$

则存在一个包含 x_0 的区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 及唯一的连续可微的向量值函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，使 $y_0 = f(x_0)$, $F(x, f(x)) = 0$, $x \in \Omega$.

此定理的证明从略.下面只在定理条件成立的情况下,来推导隐函数的导数公式.将(5.10)式代入(5.9)式,得恒等式:

$$F_i(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

将上式两端对 x_i 求导, 根据链式法则, 我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} = 0. \end{cases}$$

这是一个关于 $\frac{\partial y_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_j}$ 的线性方程组, 由定理 5.4 的条件(2)知它的系数行列式在点 $(x_{0,1}, \dots, x_{0,n}, y_{0,1}, \dots, y_{0,m})^T$ 不等于 0. 利用 Cramer 法则可解得

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right|_{(x_0, y_0)} = - \frac{1}{J_F(x_0, y_0)} \left. \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_{i-1}, x_j, y_{i+1}, \dots, y_m)} \right|_{(x_0, y_0)}, \quad (i=1, \dots, m, j=1, \dots, n). \quad (5.11)$$

例 5.4 设二元函数 $u = u(x, y)$ 由方程组

$$\begin{cases} u = f(x, y, z, t), \\ g(y, z, t) = 0, \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\begin{cases} g(y, z, t) = 0, \\ h(z, t) = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} h(z, t) = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

所确定, 其中 f, g, h 都是 $C^{(1)}$ 类函数, 且 $J = \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \neq 0$, 求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解法一 函数 $u = u(x, y)$ 可看成按上述步骤得到的. 因 $\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \neq 0$, 故由隐函数存在定理, 方程 (5.13) 与 (5.14) 确定了 z, t 为 y 的函数 $z = z(y)$, $t = t(y)$, 将它们代入方程 (5.12), 得 $u = u(x, y)$.

对方程 (5.13) 与 (5.14) 关于 y 求导数, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{dt}{dy} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dt}{dy} = 0. \end{cases}$$

应用 Cramer 法则, 解这个关于未知量 $\frac{dz}{dy}, \frac{dt}{dy}$ 的线性方程组, 得

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{1}{J} \frac{\partial g \partial h}{\partial y \partial t}, \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{J} \frac{\partial g \partial h}{\partial y \partial z}.$$

再由方程 (5.12) 即得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2 + f_3 \frac{dz}{dy} + f_4 \frac{dt}{dy} = f_2 + \frac{1}{J} \frac{\partial g}{\partial y} \left(-f_3 \frac{\partial h}{\partial t} + f_4 \frac{\partial h}{\partial z} \right).$$

解法二 将方程组写成下面的形式:

$$\begin{cases} F(x, y, z, t, u) \equiv f(x, y, z, t) - u = 0, \\ g(y, z, t) = 0, \\ h(z, t) = 0. \end{cases}$$

由于 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(F, g, h)}{\partial(z, t, u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} & \frac{\partial h}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t} & -1 \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} = -J \neq 0,$$

根据隐函数存在定理及导数公式(5.11), 该方程组确定了 z, t, u 都是 x, y 的隐函数, 并且

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial(F, g, h)}{\partial(z, t, y)}}{\frac{\partial(F, g, h)}{\partial(z, t, u)}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} f_3 & f_4 & f_2 \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \left(-f_3 \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial t} + f_4 \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} + J f_2 \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 5.5 设函数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 在点 (u, v) 的某一邻域内有连续的偏导数, 且 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$.

(1) 证明: 方程组

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

在点 (x, y) 的某一邻域内唯一确定一组单值连续且有连续偏导数的反函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$;

(2) 求反函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 对 x, y 的偏导数;

(3) 证明 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$.

解 (1) 将方程组改写成下面的形式

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) \equiv x - x(u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) \equiv y - y(u, v) = 0. \end{cases}$$

按假设, $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 由隐函数存在定理, 即得所要证的结论.

(2) 将反函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 代入给定的方程组, 得恒等式:

$$\begin{cases} x = x[u(x, y), v(x, y)], \\ y = y[u(x, y), v(x, y)]. \end{cases}$$

将上述等式两端分别对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

由于 $J \neq 0$, 解此方程组便得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

同理可求得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

(3) 根据求导公式(5.7)后面所指出的第(2)种特殊情形, 当 $n=2$ 时有

$$\frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)},$$

其中 $u_i = g_i(x_1, x_2) (i=1, 2)$, 从而有

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1. \quad \blacksquare$$

例 5.5 中的结论(3)可以推广到一般情形. 若函数组

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

在点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的某邻域内有连续的偏导数, 并且

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0,$$

则在与点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 相对应的点 (y_1, y_2, \dots, y_n) 的某邻域内唯一地确定了

一组单值连续且有连续偏导数的反函数

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

并且

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}}. \quad (5.15)$$

这个结论在下一章的重积分换元法中要用到. 当 $n=1$ 时, 它就是一元函数的反

函数求导公式 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

习题 5.5

(A)

1. 用导数定义求下列向量值函数的导数:

- (1) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是常向量;
- (2) $f(x) = Ax + a$, 其中 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 为常矩阵, $a \in \mathbb{R}^n$ 为常向量.

2. 求下列向量值函数的 Jacobi 矩阵:

- (1) $f(x, y) = (x^2 + \sin y, 2xy)^T$;
- (2) $f(x, y) = (x^2, xy, y^2)^T$;
- (3) $f(x, y, z) = (x \cos y, ye^x, \sin(xz))^T$.

3. 求下列向量值函数在给定点的导数:

- (1) $f(x, y) = (x^2 - y^2, y \tan x)^T$, 在点 $(1, 0)^T$ 处;
- (2) $f(x, y) = (\arctan x, e^{xy})^T$, 在点 $(1, 0)^T$ 处;
- (3) $f(x, y, z) = \left(x^2y, \frac{1}{y^2 + z^2} \right)^T$, 在点 $(1, 1, 1)^T$ 处;
- (4) $f(x, y, z) = \left(\sin(x^2 - y^2), \ln(x^2 + z^2), \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right)^T$, 在点 $(1, 1, 1)^T$ 处.

4. 设 $r = r(t)$ 为空间 \mathbb{R}^3 中动点 $(x(t), y(t), z(t))^T$ 的向径, 证明: $\|r(t)\| = c$ (c 为常数) $\Leftrightarrow \langle r'(t), r(t) \rangle = 0$.

5. 求由下列方程组所确定的隐函数的导数:

$$(1) \begin{cases} xu + yv = 0, \\ yu + xv = 1, \end{cases} \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$(2) \begin{cases} u + v + w = x, \\ uv + vw + uw = y, \\ uvw = z, \end{cases} \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}.$$

6. 设 $f = (f_1, f_2)^T$, $f_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 2e^{y_1} + x_1 y_2 - 4x_2 + 3$, $f_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3$, $x_0 = (3, 2, 7)^T$, $y_0 = (0, 1)^T$. 求由向量方程 $f(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = g(x)$ 在 x_0 处的导数.

(B)

1. 设 f 是定义在区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的向量值函数, f 在 $x_0 \in \Omega$ 处可微, 证明: f 在 x_0 处沿任何方向 l 的方向导数存在, 并且

$$D_l f(x_0) = Df(x_0)(e_l) \quad (e_l \text{ 为向量 } l \text{ 的单位向量}).$$

2. 设 f 与 x_0 同上题. 若 $\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}$ ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) 在 x_0 的某邻域内存在, 且在 x_0 处连续, 证明 f 在 x_0 处可微.

3. 证明定理 5.2(3).

4. 设 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, S 是联结 x_0, y_0 的线段, Ω 是包含 S 的区域, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续, 在 S 上 (x_0, y_0 可以除外) 可微, 则存在 $\xi_1, \dots, \xi_n \in S$, 使

$$f(y_0) - f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i(\xi_i)}{\partial x_j} \right)_{m \times n} (y_0 - x_0),$$

(向量值函数的 Lagrange 公式).

第六节 多元函数微分学在几何上的简单应用

本节从空间曲线和曲面的参数方程出发, 利用多元函数微分学的知识, 以向量为工具, 来研究曲线的切线与法平面, 弧长, 以及曲面的切平面与法线.

6.1 空间曲线的切线与法平面

1. 曲线的参数方程

我们知道, 平面曲线可以用参数方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($a \leq t \leq b$) 来表示. 例如, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程是 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). 空间直线 L 的参数方程是

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

或

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

其中 $r = (x, y, z)$ 为 L 上点 $P(x, y, z)$ 的向径 \overrightarrow{OP} , $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 为 L 上的已知点 (x_0, y_0, z_0) 的向径, $a = (l, m, n)$ 为 L 的方向向量.

由直线 L 的参数方程可见, 对于任一实数 t , 按所给法则, 在空间确定了唯一的点 (x, y, z) . 因此, 直线 L 可以看作是从区间 $(-\infty, +\infty)$ 到 \mathbf{R}^3 的映射 $r(t) = r_0 + ta$ 的象.

对于一般的空间曲线 Γ , 也可看作是从区间 $[\alpha, \beta]$ 到 \mathbf{R}^3 的一个连续映射 r 的象 $\{r(t) | \alpha \leq t \leq \beta\}$, $r(t)$ 就是向径 \overrightarrow{OP} (图 6.1), 当 t 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上变化时, 向径 \overrightarrow{OP} 端点 P 的轨迹就是曲线 Γ , 它的方程可表示为

$$\begin{aligned} r = r(t) &= (x(t), y(t), z(t))^\top \\ &(\alpha \leq t \leq \beta), \end{aligned} \quad (6.1)$$

或

$$\begin{aligned} x = x(t), y = y(t), z = z(t) \\ (\alpha \leq t \leq \beta), \end{aligned} \quad (6.2)$$

称(6.1)或(6.2)式为空间曲线 Γ 的参数方程.

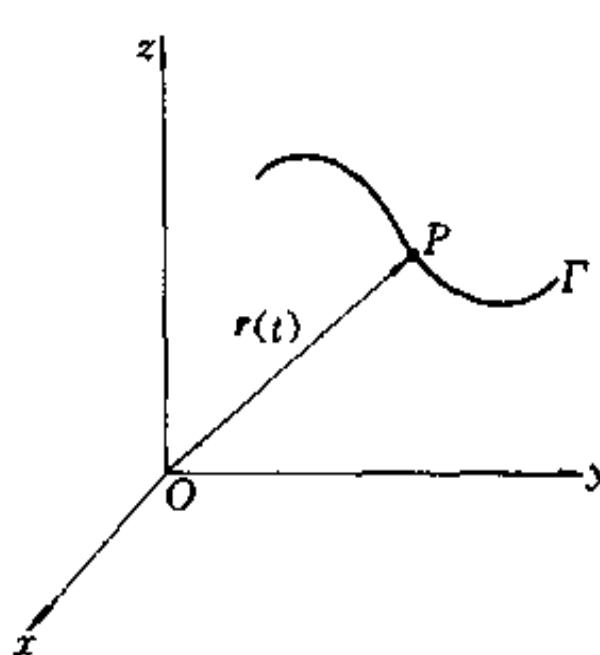


图 6.1

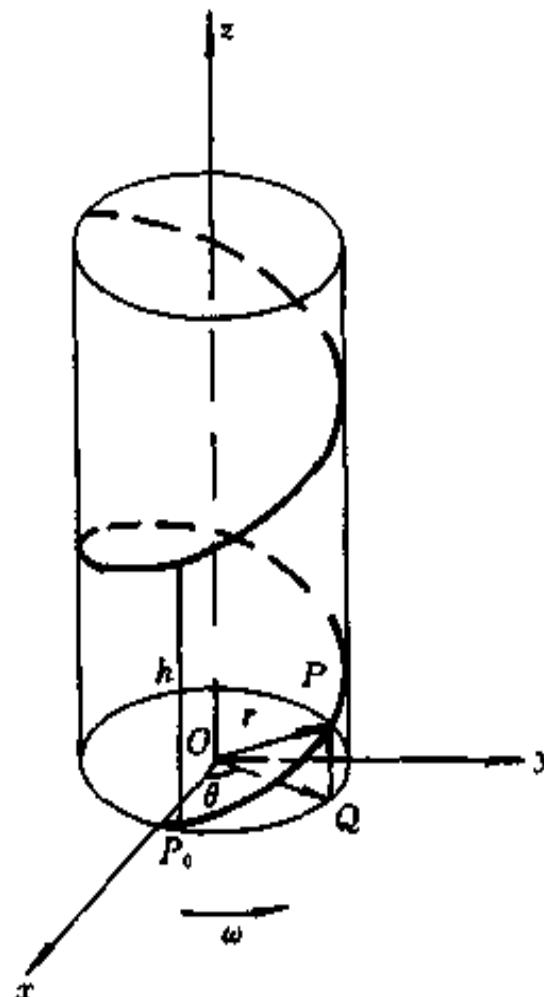


图 6.2

例 6.1 在机械工程中常常遇到一种空间曲线, 称为螺旋线, 其形成规律

① 为了书写方便, 本节的向量一般都写成行向量.

是:动点 P 沿半径为 a 的圆周作匀速转动,而这圆周所在的平面又在空间作等速直线移动,移动的方向与圆周所在平面垂直.试推导此动点轨迹的方程.

解 取运动开始时(设 $t=0$)圆周的中心为坐标原点 O ,圆周所在的平面为 xOy 坐标面, $\overrightarrow{OP_0}$ 的方向为 x 轴的正向,其中 P_0 为运动开始时动点的位置.圆周所在平面移动的方向为 z 轴的正向(图 6.2).

设点 P 转动的角速度为 ω ,圆周沿 z 轴方向移动的速度为 v ,点 P_0 的坐标为 $(a, 0, 0)$,于是经过时间 t 后,动点沿圆周转动了一个角度 ωt ,并在 z 轴方向上上升了一段距离 $\overline{QP} = vt$.所以在时刻 t ,动点的坐标是

$$x = a \cos \omega t, y = a \sin \omega t, z = vt, t \in [0, +\infty).$$

这就是螺旋线的参数方程,写成向量形式就是

$$\mathbf{r} = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, vt), t \in [0, +\infty).$$

如果取 $\theta (= \omega t)$ 作参变量,便有

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = k\theta, \quad \theta \in [0, +\infty),$$

其中 $k = \frac{v}{\omega}$.可见因参变量的不同选择,曲线可以有不同的参数方程. ■

显然,动点 P 始终在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上.如果让 θ 取负值,那末动点就沿着圆柱面转到 xOy 平面的下方去了.

因为当 θ 角转过 2π 后,动点 P 恰巧在圆柱面上由原来的位置升高了一段距离 $h = z(\theta + 2\pi) - z(\theta) = k(\theta + 2\pi) - k\theta = 2\pi k$ (称常数 $2\pi k$ 为螺距),所以曲线在圆柱面上始终以同样的间距上升(或下降),这就是螺丝钉上螺纹的曲线,因而叫作螺旋线.

2. 简单曲线与有向曲线

设空间曲线 Γ 的方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$).如果向量值函数 $\mathbf{r}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,则称 Γ 为连续曲线;如果 Γ 为连续曲线,且 $\forall t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$, $t_1 \neq t_2$,均有 $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$,即在 (α, β) 上 \mathbf{r} 为单射,则称 Γ 为简单曲线.容易看出,简单曲线就是自身不相交的连续曲线.如果 Γ 为简单曲线,且 $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$,则称 Γ 为简单闭曲线.对于选定了参数 t 的曲线 Γ ,我们规定 t 增大的方向为 Γ 的正向(自然地, t 减小的方向,称为 Γ 的负向).例如,螺旋线 $\mathbf{r} = (a \cos \theta, a \sin \theta, k\theta)$ ($k > 0$) 的正向为上升的方向.对于规定了正向的曲线,称其为有向曲线.以下讨论的曲线均指有向曲线.

3. 空间曲线的切线与法平面

设空间简单曲线 Γ 的方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

其中向量值函数 $\mathbf{r}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可导, 其导数记作 $\dot{\mathbf{r}}(t)$, 且有

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \neq \mathbf{0} \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

我们来讨论 Γ 在点 $P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 处的切线方程.

与平面曲线的切线一样, 空间曲线上点 P_0 处的切线也定义为曲线上过点 P_0 的割线 P_0P 当点 P 沿曲线趋向于点 P_0 时的极限位置 P_0T (图 6.3). 要求此切线的方程, 关键在于求出它的一个方向向量. 为此, 在 Γ 上点 P_0 的邻近取点 $P(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t))$, 点 P_0 与 P 所对应的向径分别为 $\mathbf{r}(t_0)$ 与 $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$. 从而向量

$$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \Delta \mathbf{r}$$

为割线 P_0P 的一个方向向量. 容易看出, 向量

$$\frac{\overrightarrow{P_0P}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (6.3)$$

也是割线 P_0P 的一个方向向量, 而且不论 Δt 是正的还是负的, $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 的方向始终与曲线 Γ 的参数 t 增大的方向(即 Γ 的正向)相一致. 令 $\Delta t \rightarrow 0$, 对(6.3)式两端取极限得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{P_0P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}(t_0).$$

由于 $\mathbf{r}(t)$ 的连续性, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\overrightarrow{P_0P} = \Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$, 点 P 沿曲线 Γ 趋向于点 P_0 , 从而割线 P_0P 变成了切线 P_0T , 而割线的方向向量变成了相应切线的方向向量 $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$. 由此可见: 向径 $\mathbf{r}(t)$ 的导数 $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ 在几何上就表示曲线 Γ 在相应点 P_0 处的切线 P_0T 的一个方向向量, 而且它的方向与 Γ 的正向相一致, 称它为 Γ 在点 P_0 处的切向量.

我们已知 $\mathbf{r}(t_0)$ 是曲线 Γ 上点 P_0 的向径, 而 $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ 是 Γ 在点 P_0 的切向量,

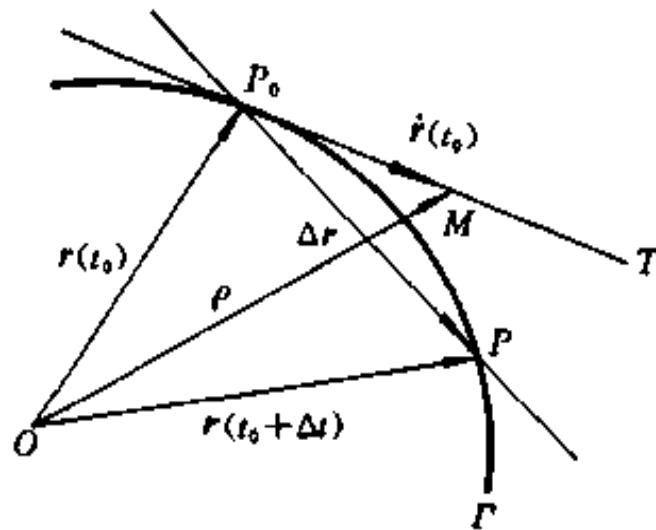


图 6.3

利用直线方程的向量形式,可将曲线 Γ 在 $P_0 = r(t_0)$ 处切线的向量方程写为

$$\rho = r(t_0) + t\dot{r}(t_0), \quad (6.4)$$

其中 $\rho = (x, y, z)$ 为切线上动点 $M(x, y, z)$ 的向径, $t \in \mathbb{R}$ 为参数. 消去参数 t , 即得该切线的对称式方程

$$\frac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}. \quad (6.5)$$

由以上可知,当 $r = r(t)$ 可导,且 $\dot{r}(t) \neq 0$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 时,曲线 Γ 上各点处都存在切线. 进一步,如果 $\dot{r}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,则切线方向连续变化. 一般地,称切线方向连续变化的曲线为光滑曲线. 因此,当函数 $r(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数、且 $\dot{r}(t) \neq 0$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 时,曲线 $r = r(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 为光滑曲线. 如果曲线 Γ 不是光滑曲线,但将 Γ 分成若干段后,每段都是光滑曲线,则称 Γ 为分段光滑曲线.

过曲线 Γ 上点 P_0 且与点 P_0 处的切线垂直的任一直线称为此曲线 Γ 在 P_0 处的法线,这些法线显然位于同一平面内,此平面称为 Γ 在点 P_0 的法平面. 显然 $\dot{r}(t_0)$ 是法平面的一个法线向量,于是法平面的方程是

$$\dot{r}(t_0) \cdot [\rho - r(t_0)] = 0, \quad (6.6)$$

$$\text{或 } \dot{x}(t_0)[x - x(t_0)] + \dot{y}(t_0)[y - y(t_0)] + \dot{z}(t_0)[z - z(t_0)] = 0, \quad (6.7)$$

其中 $\rho = (x, y, z)$ 是法平面上点 (x, y, z) 的向径.

如果曲线 Γ 是由两柱面的交线给出,设它的方程为

$$y = y(x), \quad z = z(x) \quad (\alpha \leq x \leq b),$$

把 x 看作是参数,上式也可写成参数方程形式:

$$x = x, \quad y = y(x), \quad z = z(x) \quad (\alpha \leq x \leq b),$$

那末 Γ 上与参数 $x = x_0$ 相对应的点处的切线方程是

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y(x_0)}{\dot{y}(x_0)} = \frac{z - z(x_0)}{\dot{z}(x_0)}, \quad (6.8)$$

法平面方程是

$$x - x_0 + \dot{y}(x_0)[y - y(x_0)] + \dot{z}(x_0)[z - z(x_0)] = 0. \quad (6.9)$$

如果曲线 Γ 的方程由一般式方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

给出,且在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域内方程组(6.10)满足隐函数存在定理的条件,不妨设

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} \neq 0,$$

那末在点 P_0 的某邻域内由(6.10)式确定了两个具有连续导数的一元隐函数 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$. 由隐函数求导法求出 $y'(x_0)$ 和 $z'(x_0)$ 之后,代入(6.8)和(6.9)式,即得曲线 Γ 在点 P_0 处的切线方程和法平面方程.

例 6.2 求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 47, \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ 在点 $P_0(-2, 1, 6)$ 处的切线与法平面方程.

解 改写曲线方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 47 = 0, \\ G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z = 0. \end{cases}$$

因为

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 4y & -1 \end{vmatrix} \Big|_{P_0} = -50 \neq 0,$$

且函数 F 与 G 具有一阶连续偏导数,由隐函数存在定理,曲线方程可由 $y = y(x), z = z(x)$ 表示,且有

$$y'(x_0) = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \Big|_{P_0} = \frac{1}{50} \begin{vmatrix} 4x & 2z \\ 2x & -1 \end{vmatrix} \Big|_{P_0} = \frac{28}{25},$$

$$z'(x_0) = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)} \Big|_{P_0} = \frac{1}{50} \begin{vmatrix} 2y & 4x \\ 4y & 2x \end{vmatrix} \Big|_{P_0} = \frac{12}{25},$$

故曲线在点 P_0 处的切线向量是 $(1, y'(x_0), z'(x_0)) = \left(1, \frac{28}{25}, \frac{12}{25}\right)$, 或 $(25, 28, 12)$. 从而得曲线在点 P_0 处的切线方程是

$$\frac{x+2}{25} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{12},$$

法平面方程是

$$25(x+2) + 28(y-1) + 12(z-6) = 0,$$

或

$$25x + 28y + 12z - 50 = 0. \blacksquare$$

6.2 弧长

1. 弧长的定义与计算

定义 6.1(弧长) 设简单曲线 Γ 的方程是

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) (\alpha \leq t \leq \beta).$$

Γ 的两个端点 A, B 分别对应于向径 $\mathbf{r}(\alpha), \mathbf{r}(\beta)$, 在 Γ 上介于 A 和 B 之间沿着参数 t 增大的方向依次取 $n-1$ 个分点 P_1, P_2, \dots, P_{n-1}

(图 6.4), 它们把 Γ 分成了 n 段. 用直线段把相邻分点联结起来, 即得一折线, 它的长度是

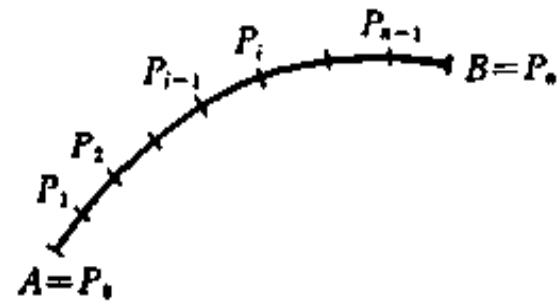


图 6.4

$$s_n = \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|,$$

其中记 $A = P_0, B = P_n$. 如果不论分点如何选取, 当 $d = \max_{1 \leq i \leq n} \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| \rightarrow 0$ 时, 折线的长度 s_n 有确定的极限 s , 则称 Γ 为可求长的曲线, 且称这个极限值 s 为 Γ 的长度, 或 Γ 的弧长, 即

$$s = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|.$$

定理 6.1(弧长的计算公式) 设在 $[\alpha, \beta]$ 上 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 连续且 $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$, 则曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ 是可求长的曲线, 且 Γ 的长度为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2} dt. \quad (6.11)$$

证 设分点 P_i 对应于参数 $t_i (i = 0, 1, \dots, n)$, 其中 $t_0 = \alpha, t_n = \beta$. 这样便有

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

首先来求 $\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|$ 的表达式. 由于

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| &= \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}, \end{aligned}$$

利用 Lagrange 微分中值公式得

$$\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| = \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\eta_i)]^2 + [\dot{z}(\zeta_i)]^2} \Delta t_i,$$

其中

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad \xi_i, \eta_i, \zeta_i \in (t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

变形得到

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| &= \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\xi_i)]^2 + [\dot{z}(\xi_i)]^2} \Delta t_i + R_i \Delta t_i \\ &= \|\dot{r}(\xi_i)\| \Delta t_i + R_i \Delta t_i, \end{aligned}$$

其中

$$R_i = \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\eta_i)]^2 + [\dot{z}(\zeta_i)]^2} - \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\xi_i)]^2 + [\dot{z}(\xi_i)]^2}. \quad (6.12)$$

于是

$$s_n = \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| = \sum_{i=1}^n \|\dot{r}(\xi_i)\| \Delta t_i + \sum_{i=1}^n R_i \Delta t_i. \quad (6.13)$$

令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i$, 由定积分的定义和存在定理, 易知

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\dot{r}(\xi_i)\| \Delta t_i = \int_a^\beta \|\dot{r}(t)\| dt. \quad (6.14)$$

这样, 由(6.13)及(6.14)便知, 要证明(6.11)成立, 只要证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R_i \Delta t_i = 0. \quad (6.15)$$

为此, 我们来估计 R_i . 利用不等式

$$|\sqrt{a^2 + b_1^2 + c_1^2} - \sqrt{a^2 + b_2^2 + c_2^2}| \leq |b_1 - b_2| + |c_1 - c_2|,$$

由(6.12)式便得

$$|R_i| \leq |\dot{y}(\eta_i) - \dot{y}(\xi_i)| + |\dot{z}(\zeta_i) - \dot{z}(\xi_i)|.$$

因为 $\dot{y}(t), \dot{z}(t)$ 在 $[a, \beta]$ 连续, 从而在 $[a, \beta]$ 一致连续, 所以 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, 只要 $t', t'' \in [a, \beta], |t' - t''| < \delta$, 就有

$$|\dot{y}(t') - \dot{y}(t'')| < \epsilon, \quad |\dot{z}(t') - \dot{z}(t'')| < \epsilon.$$

特别当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i < \delta$ 时, 有

$$|R_i| < 2\epsilon,$$

$$\left| \sum_{i=1}^n R_i \Delta t_i \right| < 2\epsilon(\beta - a),$$

从而(6.15)成立. ■

平面曲线是空间曲线的特例($z=0$),因此,对于平面曲线 $\Gamma: x=x(t), y=y(t)$ ($a \leq t \leq \beta$),其弧长为

$$s = \int_a^\beta \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt.$$

从而有:

(1) 若平面曲线 Γ 在直角坐标系下的方程是

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

则 Γ 有参数方程 $x=x, y=y(x)$ ($a \leq x \leq b$),因而 Γ 的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

(2) 若平面曲线 Γ 在极坐标下的方程是

$$\rho = \rho(\theta) \quad (a \leq \theta \leq \beta),$$

则 Γ 有参数方程 $x = \rho(\theta)\cos\theta, y = \rho(\theta)\sin\theta$ ($a \leq \theta \leq \beta$),于是 Γ 的弧长为

$$s = \int_a^\beta \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta = \int_a^\beta \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} d\theta.$$

例 6.3 计算(平面曲线)旋轮线一拱

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的弧长.

解 因为

$$\begin{aligned} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t} \\ &= a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|, \end{aligned}$$

所以

$$s = 2a \int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 8a. \quad ■$$

例 6.4 求平面曲线

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y \quad (1 \leq y \leq e)$$

的弧长.

解 当 $1 \leq y \leq e$ 时,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(y - \frac{1}{y}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y}\right),$$

故

$$s = \frac{1}{2} \int_1^e \left(y + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{4}(e^2 + 1). \blacksquare$$

例6.5 求螺旋线 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = k\theta$ 一个螺距之间的长度.

解 由于

$$\sqrt{x^2(\theta) + y^2(\theta) + z^2(\theta)} = \sqrt{a^2 + k^2},$$

所以所求弧长为

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \sqrt{a^2 + k^2} d\theta = 2\pi \sqrt{a^2 + k^2} \quad (\theta_0 \in \mathbb{R}). \blacksquare$$

2. 弧微分与自然参数

设曲线 Γ 的参数方程为 $r = r(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), $\dot{r}(t)$ 连续且 $\dot{r}(t) \neq 0$, t_0 为 $[\alpha, \beta]$ 上的固定参数值, $s(t)$ 为从 $r(t_0)$ 到 $r(t)$ 的弧长, 而且规定: 当 $t > t_0$ 时, $s(t) > 0$; 当 $t < t_0$ 时, $s(t) < 0$, 则有

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{r}(\tau)\| d\tau \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \quad (6.16)$$

显然, 由(6.16)式定义的函数 $s(t)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导且单调增的函数, t 增加的方向也是 $s(t)$ 增大的方向, 且有

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{r}(t)\| = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2},$$

我们称

$$ds = \|\dot{r}(t)\| dt = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2} dt \quad (6.17)$$

为弧长 $s(t)$ 的微分, 简称为弧微分.

由于 $\frac{ds}{dt} = \|\dot{r}(t)\| > 0$, 故 $s = s(t)$ 存在反函数 $t = t(s)$, 将它代入 Γ 的参数方程 $r = r(t)$, 便得到 Γ 的以弧长 s 为参数的方程

$$r = r(t(s)) \quad (a \leq s \leq b), \quad (6.18)$$

称 s 为曲线 Γ 的自然参数, 其中 $[a, b]$ 为函数 $s = s(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 的值域. 这样, 通过(6.18)式, 就建立了区间 $[a, b]$ 上 s 值与曲线 Γ 上点之间的一一对应关系.

采用自然参数, 对讨论曲线的许多问题会带来方便. 例如, 切线向量 $\frac{dr}{ds}$ 是单位向量. 事实上, 由(6.17)式有

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2,$$

故

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

这就说明

$$\frac{dr}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$$

是一个单位切向量.

今后, 我们用 $r'(s), r''(s)$ 等分别表示 $\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}$ 等.

6.3 曲面的切平面与法线

曲面的参数方程 正像曲线的参数方程有其优越性一样, 曲面的方程也可以表示成参数形式, 并且曲面的参数方程为研究曲面问题带来许多方便.

我们知道, 方程

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (6.19)$$

在 xOy 平面上表示中心在原点半径为 R 的圆. 若令

$$x = R \cos \theta,$$

则可将它表示成参数方程

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (6.20)$$

方程(6.19)在 $Oxyz$ 空间表示半径为 R 中心轴为 z 轴的圆柱面, 在变换(6.20)下, 此圆柱面的方程可以写成

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = z \quad ((\theta, z) \in D = [0, 2\pi] \times (-\infty, +\infty)), \quad (6.21)$$

或向量形式

$$r = r(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z) \quad ((\theta, z) \in D). \quad (6.22)$$

由方程(6.21)或(6.22)可见, 此圆柱面也可以看作是平面区域^① D 到 \mathbb{R}^3 的连续映射下的象.

一般地, 曲面 S 可以看作是由平面上某一区域 D 到空间 $Oxyz$ 的某一连续映射的象, 从而 S 的方程可用此映射表示为

^① 为叙述方便起见, 本书今后所指的区域也可以包含它的全部或部分边界.

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad ((u, v) \in D), \quad (6.23)$$

或写成向量形式为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D), \quad (6.24)$$

称为曲面的参数方程,其中函数 x, y, z 均在 D 中连续.可见,与曲线不同,曲面的参数方程是由两个独立参数构成的.例如,方程(6.21)或(6.22)就是以 θ, z 为参数的上述圆柱面的参数方程.

曲面上曲线的表示 对于曲面的参数方程(6.23)或(6.24),若在 D 中固定 $v = v_0$,让 u 变化,则此时在映射 \mathbf{r} 下象点的集合应是曲面 S 上的一条曲线,称为曲面 S 上的 u 曲线.它的方程应为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)) \quad (u \in I_1),$$

同理可得曲面 S 上的 v 曲线的方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)) \quad (v \in I_2),$$

其中 I_1 与 I_2 分别为 u 与 v 所允许的变化区间.

这样,过曲面 S 上的每一点 P ,就有一条 u 曲线和一条 v 曲线,它们的交点就是 P . u 曲线族和 v 曲线族构成曲面 S 上的参数曲线网.而曲面 S 可以看成是由它的 u 曲线族和 v 曲线族织成的.从直观上来看,曲面 S 可以看成是映射 \mathbf{r} 将平面 uv 上的区域 D 在 \mathbf{R}^3 中变形后得到的(图 6.5),而 D 内的坐标网相应地变成了曲面 S 的参数曲线网.

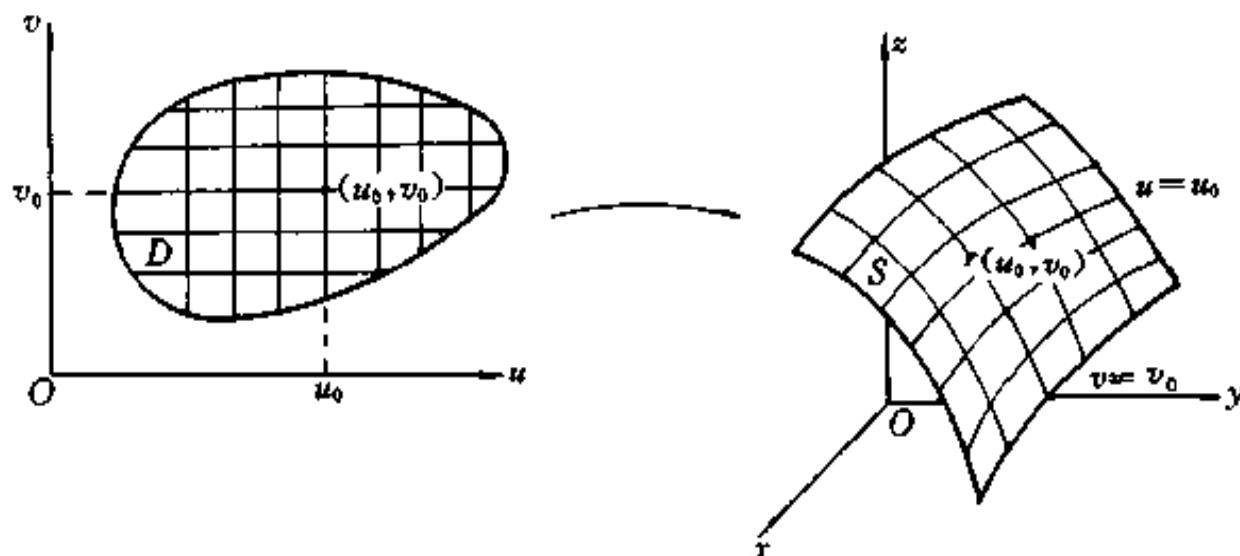


图 6.5

由于曲面 S 是平面区域 D 在连续映射 \mathbf{r} 下的象点集合,所以曲面 S 上任一曲线,必是区域 D 内某一平面曲线 $u = u(t), v = v(t)(t \in I)$ 在映射 \mathbf{r} 下的象点集合,因而它的方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}[u(t), v(t)] \\ &= (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \quad (t \in I). \end{aligned}$$

例6.6 建立半径为 R 的球面的参数方程并写出它的参数曲线网.

解 设 $P(x, y, z)$ 为此球面上任一点, 从 z 轴正向到向径 \overrightarrow{OP} 的转角为 θ , 从坐标平面 xOz 到由 z 轴和 \overrightarrow{OP} 所确定的平面 π 的转角为 φ . 取 θ 与 φ 为参数, 显然有

$$(\theta, \varphi) \in D = \{(\theta, \varphi) | 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

由图 6.6 易见,

$$x = \|\overrightarrow{OM}\| \cos \varphi, \quad y = \|\overrightarrow{OM}\| \sin \varphi,$$

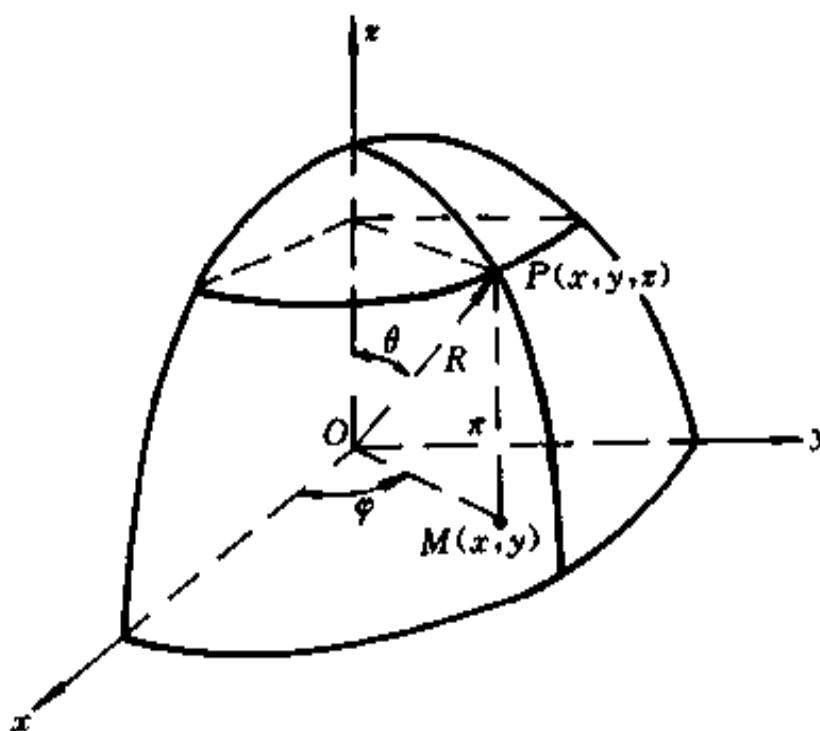


图 6.6

而

$$\|\overrightarrow{OM}\| = R \sin \theta,$$

从而

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta.$$

于是此球面的参数方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

令 $\varphi = \varphi_0$ 便得到此球面的 θ 曲线, 其方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \varphi_0) = (R \sin \theta \cos \varphi_0, R \sin \theta \sin \varphi_0, R \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

在图 6.6 中, θ 曲线就是过 z 轴的半平面 π 与球面的交线, 即球面的经线.

令 $\theta = \theta_0$ 便得到此球面的 φ 曲线, 其方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta_0, \varphi) = (R \sin \theta_0 \cos \varphi, R \sin \theta_0 \sin \varphi, R \cos \theta_0) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

在图 6.6 中, φ 曲线就是以 z 轴为对称轴、 O 为顶点的圆锥面与球面的交线, 即球面的纬线.

当 φ_0 与 θ_0 在相应区间变化时, 就得到 θ 曲线族和 φ 曲线族, 它们构成了球面的参数曲线网. 球面可以看成是由它们织成的. ■

例 6.7 机械工程中常见的一种曲面称为正螺面, 它是当长为 l 的一动直线条(或直线)在平面上匀速地绕与此平面垂直的轴旋转, 而此直线条(或直线)所在平面又匀速地沿此轴向上或向下运动时, 该直线条(或直线)的运动轨迹. 试建立它的方程.

解 建立坐标系使运动开始时直线条位于 xOy 平面的正 x 轴上, 且该直线条以原点为起点(图 6.7). 设 \overrightarrow{OM} 旋转的角速度为 $\omega > 0$, 平面垂直移动的速度为 $b > 0$, 正螺面上动点 $P(x, y, z)$ 与 z 轴的垂直距离为 u . 于是由图 6.7 易得

$$x = u \cos \omega t, y = u \sin \omega t, z = bt.$$

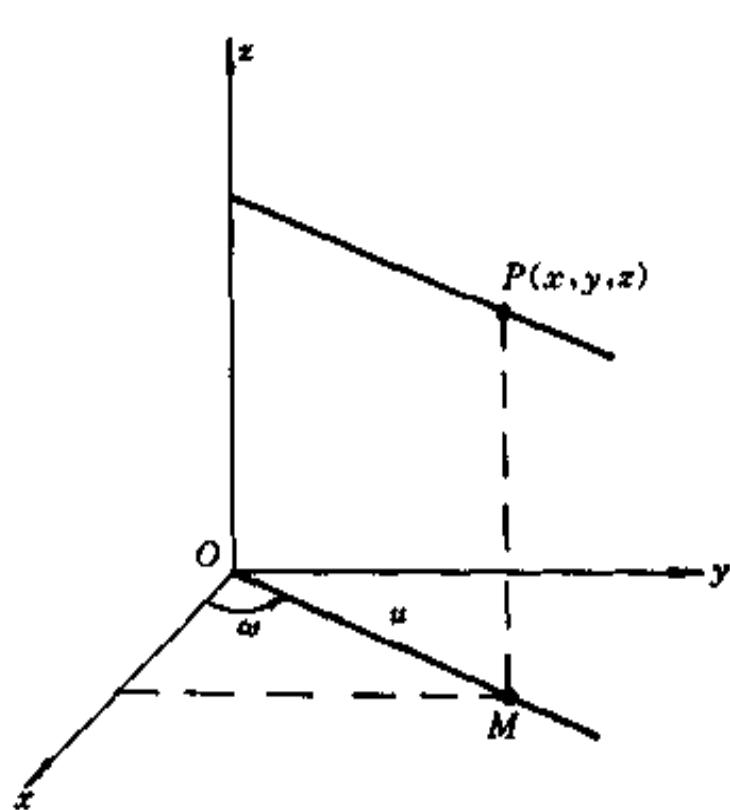


图 6.7

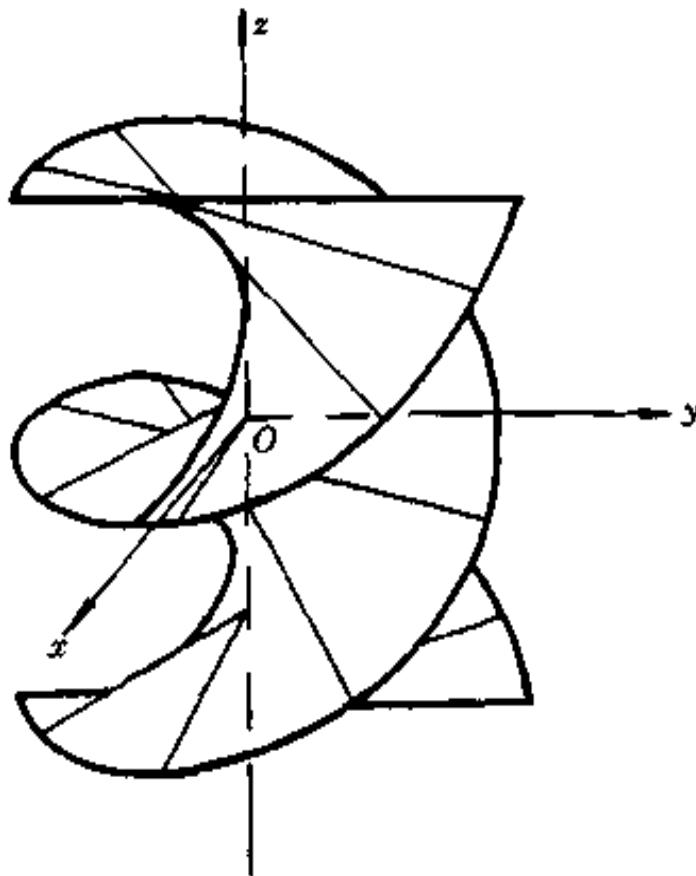


图 6.8

令 $\omega t = v$, $\frac{b}{\omega} = a$, 于是正螺面的参数方程为

$$\begin{aligned} r(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, av) \\ (0 \leq u \leq l, -\infty < v < +\infty), \end{aligned}$$

其中 $a > 0$ 为常数, u 与 v 为参数, 正螺面的图形如图 6.8 所示. 机械中的螺杆及某些建筑中的旋转楼梯都是正螺面. ■

曲面的切平面与法线 设曲面 S 的参数方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(u, v) \\ &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &\quad ((u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

其中 \mathbf{r} 在 D 内连续, 在点 $(u_0, v_0) \in D$ 存在偏导数

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \Big|_{(u_0, v_0)},$$

$$\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \Big|_{(u_0, v_0)},$$

且 $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq 0$ (此时点 (u_0, v_0) 称为曲面 S 的正则点).

曲面 S 上过点 $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ 的 u 曲线为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0),$$

它是以 u 为参数的空间曲线的参数方程. 由本章 6.1 段可知, u 曲线在点 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ 的切向量为 $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$; 同理可得 v 曲线在点 \mathbf{r}_0 的切向量为 $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$. 由于 (u_0, v_0) 是正则点, 所以上述 u 曲线与 v 曲线的切线确定了一张平面 π (图 6.9), 它是过点 \mathbf{r}_0 且以 $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ 为法线方向向量的平面.

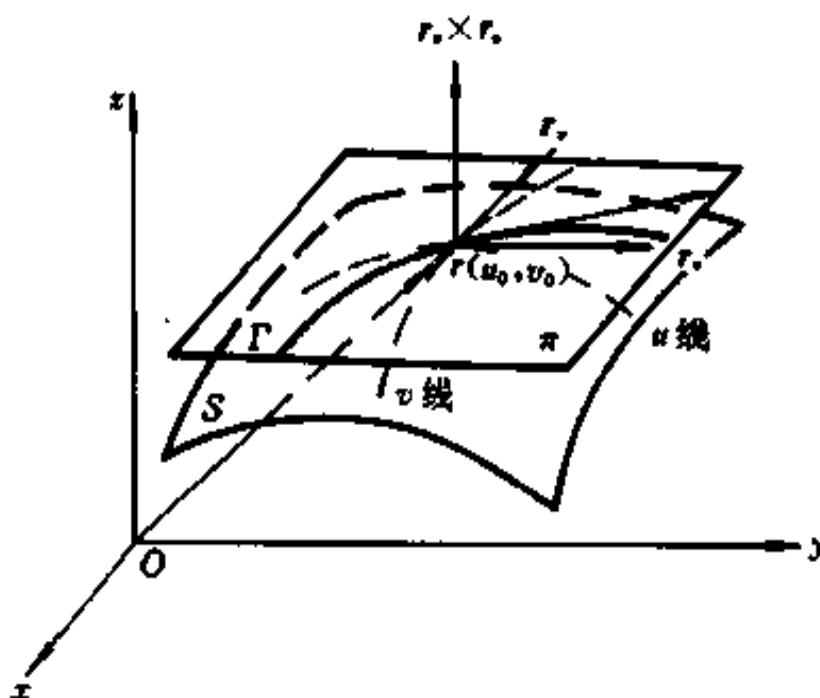


图 6.9

下面证明: 曲面 S 上过点 \mathbf{r}_0 的任一曲线在点 \mathbf{r}_0 的切线均位于平面 π 上. 事实上, 在 S 上过点 \mathbf{r}_0 任作一条光滑曲线 Γ , 它的方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[u(t), v(t)] \quad (t \in I),$$

$u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$. 两端在 t_0 处对 t 求导, 根据复合函数的链式法则有

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\dot{u}(t_0) + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\dot{v}(t_0). \quad (6.25)$$

(6.25)式表明,曲面 S 上过点 r_0 的任一曲线 Γ 在点 r_0 的切向量 $\dot{r}(t_0)$ 都可以用 $r_u(u_0, v_0)$, 与 $r_v(u_0, v_0)$ 线性表示, 故 Γ 在点 r_0 的切线必位于平面 π 上.

因此, 我们把由 u 曲线和 v 曲线的切向量 $r_u(u_0, v_0)$ 与 $r_v(u_0, v_0)$ 所确定的平面 π 称为曲面 S 在点 r_0 的切平面, 也称为 S 在点 r_0 的二维切空间, 它是一个线性空间. $r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)$ ($r_u \times r_v \neq 0$) 是此切空间的一组基. 过点 r_0 且垂直于切平面 π 的直线称为此曲面 S 在点 r_0 处的法线. 法线的方向向量称为法向量. 显然, 法向量可取为

$$(r_u \times r_v)_{(u_0, v_0)} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)_{(u_0, v_0)} \stackrel{\text{def}}{=} (A, B, C).$$

于是 S 在点 r_0 的切平面方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C},$$

其中 $x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0), z_0 = z(u_0, v_0)$.

若偏导数

$$r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

均在区域 D 内连续, 则称曲面 S 是一光滑曲面, 在几何上表示此曲面有连续转动的切平面.

若曲面 S 的方程为 $F(x, y, z) = 0$, 设 F 具有对各个变量的连续偏导数, 且 $(F_x, F_y, F_z) \neq 0$, 不妨设 $F_z \neq 0$, 则由隐函数存在定理, 方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定了一个单值连续且有连续偏导数的二元函数 $z = z(x, y)$. 把 x 与 y 看作是参数, 于是曲面 S 的参数方程为

$$r(x, y) = (x, y, z(x, y)).$$

由于

$$r_x = (1, 0, z_x) = (1, 0, -F_x/F_z),$$

$$r_y = (0, 1, z_y) = (0, 1, -F_y/F_z),$$

从而

$$r_x \times r_y = (F_x/F_z, F_y/F_z, 1),$$

故可取

$$n = (F_x, F_y, F_z)$$

作为法向量, 于是曲面在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0, \quad (6.26)$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(P_0)}. \quad (6.27)$$

若曲面方程为 $z = f(x, y)$ 或 $f(x, y) - z = 0$, 则由(6.26)及(6.27)两式可得曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面与法线方程分别为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (6.28)$$

及

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}, \quad (6.29)$$

其中 $z_0 = f(x_0, y_0)$.

值得指出的是, 方程(6.28)的右端恰好是函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的全微分, 而左端是切平面上点的竖坐标的改变量. 因此, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全微分在几何上表示曲面 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面上点的竖坐标的改变量 $\|\overrightarrow{PM}\|$ (图 6.10). 当 $|x - x_0|$ 与 $|y - y_0|$ 充分小时, 用全微分 dz 去近似代替函数的改变量 Δz , 也就是用

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

去近似代替 $f(x, y)$, 在几何上就是用曲面在点 P_0 的切平面去近似代替曲面.

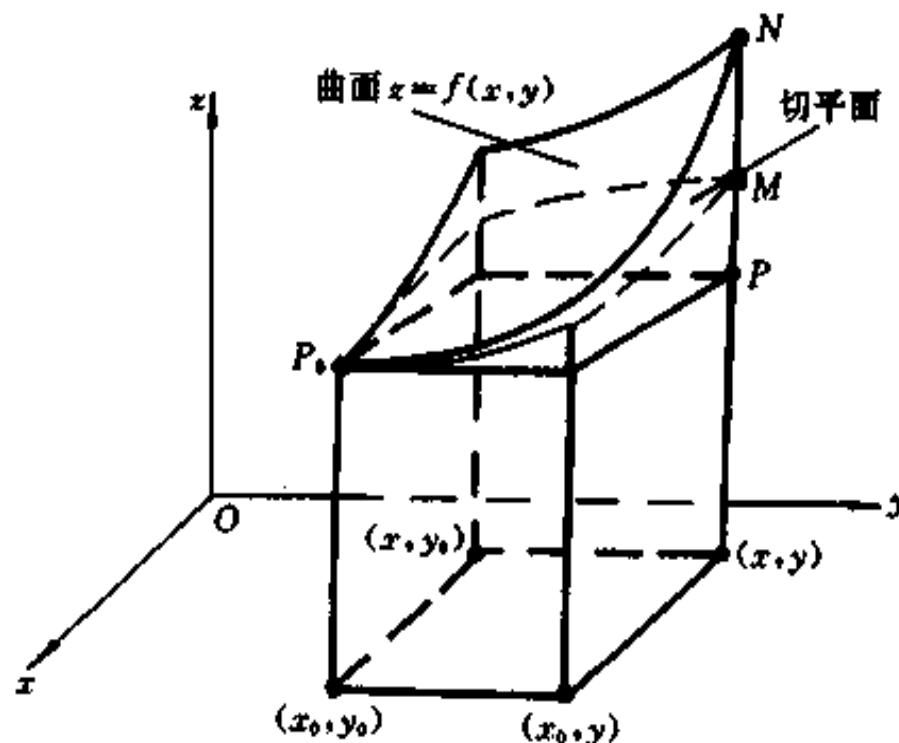


图 6.10

例 6.8 求正螺面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$ 在 $u = \sqrt{2}, v = \frac{\pi}{4}$ 处的切平面与法线方程, 其中常数 $a \neq 0$.

解 由于 $r = (u \cos v, u \sin v, av)$, 所以

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u &= (x_u, y_u, z_u) = (\cos v, \sin v, 0), \\ \mathbf{r}_v &= (x_v, y_v, z_v) = (-u \sin v, u \cos v, a),\end{aligned}$$

在 $u = \sqrt{2}, v = \frac{\pi}{4}$ 处, $\mathbf{r}_u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\mathbf{r}_v = (-1, 1, a)$,

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \sqrt{2}\right),$$

于是曲面上对应点 $(1, 1, \frac{\pi}{4}a)$ 处的法线向量可取为

$$\mathbf{n} = (a, -a, 2),$$

从而可得所求切平面方程是

$$ax - ay + 2z = \frac{\pi}{2}a,$$

法线方程是

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{-a} = \frac{z-\frac{\pi}{4}a}{2}. \quad \blacksquare$$

例 6.9 已知椭球面 $S: x^2 + 2y^2 + z^2 = \frac{5}{2}$ 和平面 $\pi: x - y + z + 4 = 0$,

(1) 求 S 的与平面 π 平行的切平面的方程;

(2) 求 S 上距离平面 π 最近和最远的点.

解 (1) 设 S 上点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面与平面 π 平行, 由于 S 上点 P_0 处法向量为

$$\mathbf{n}|_{P_0} = (x_0, 2y_0, z_0),$$

平面 π 的法向量为 $(1, -1, 1)$, 按照平面平行的条件, 应该有

$$\frac{x_0}{1} = \frac{2y_0}{-1} = \frac{z_0}{1},$$

从而得 $x_0 = z_0, y_0 = -\frac{1}{2}z_0$, 代入曲面 S 的方程得 $z_0 = \pm 1$, 因而得到满足要求的点 P_0 有两个: $P'_0\left(1, -\frac{1}{2}, 1\right)$ 和 $P''_0\left(-1, \frac{1}{2}, -1\right)$, P'_0 和 P''_0 处的切平面方程分别是:

$$(x-1) - \left(y + \frac{1}{2}\right) + (z-1) = 0 \text{ 和 } (x+1) - \left(y - \frac{1}{2}\right) + (z+1) = 0,$$

或

$$x - y + z - \frac{5}{2} = 0 \text{ 和 } x - y + z + \frac{5}{2} = 0.$$

它们都与平面 π 平行.

(2) 容易求出 P'_0 和 P''_0 到平面 π 的距离分别是 $\frac{13}{2\sqrt{3}}$ 和 $\frac{3}{2\sqrt{3}}$. 显然平面 π 与椭球面 S 不相交, 椭球面上每一点的切平面都使椭球面位于切平面的一侧, 由此可知 P''_0 和 P'_0 分别是 S 上距离平面 π 最近和最远的点. ■

习题 5.6

(A)

1. 求下列曲线在给定点的切线和法平面方程:

$$(1) \mathbf{r} = (t, 2t^2, t^2), \text{ 在 } t=1 \text{ 处};$$

$$(2) \mathbf{r} = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 4\theta), \text{ 在点 } \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \pi\right) \text{ 处};$$

$$(3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \text{ 在点 } (1, 0, 1) \text{ 处.}$$

2. 求曲线 $\mathbf{r} = (t, -t^2, t^3)$ 上的与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线方程.

3. 证明: 螺线 $\mathbf{r} = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$ 上任一点的切线与 Oz 轴交成定角.

4. 求下列平面曲线的弧长:

$$(1) y = \frac{1}{2p}x^2 \text{ 由顶点到点 } (\sqrt{2p}, p) \text{ 的一段弧};$$

$$(2) x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y \quad (1 \leqslant y \leqslant e);$$

$$(3) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0) \text{ 的全长};$$

$$(4) \mathbf{r} = (e^t \sin t, e^t \cos t) \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(5) \mathbf{r} = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)) \quad (a > 0, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi);$$

$$(6) \text{极坐标系中的曲线 } \rho = a(1 + \cos\theta) \text{ 的全长};$$

$$(7) \text{极坐标系中的曲线 } \rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3} \quad (a > 0) \text{ 的全长};$$

$$(8) \text{曲线 } y(x) = \int_{-\sqrt{3}}^x \sqrt{3-t^2} dt \text{ 的全长};$$

$$(9) y = \ln \cos x \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \alpha, \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

5. 求下列空间曲线的弧长:

$$(1) \mathbf{r} = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \text{ 介于点 } (1, 0, 1) \text{ 与点 } (0, e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}) \text{ 之间的弧段};$$

$$(2) \mathbf{r} = (2t, t^2 - 2, 1 - t^2) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2);$$

(3) $\begin{cases} x^2 = 3y, \\ 2xy = 9z \end{cases}$ 介于点(0,0,0)与点(3,3,2)之间的弧段.

6. 两条曲线的交角,是指它们在交点处的切线的交角. 证明: 曲线 $r = (ae^t \cos t, ae^t \sin t, ae^t)$ 与圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同.

7. 写出下列曲面的一种参数方程,其中 a, b, c 均为正常数:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; (2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$; (4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$.

8. 求 xOz 坐标面内的曲线 $\begin{cases} x = f(v), \\ z = g(v) \end{cases}$ ($a \leq v \leq b$) 绕 Oz 轴旋转一周所得旋转曲面的参数方程,其中 $f(v) > 0$.

9. 写出曲面 $r = r(u, v)$ 上点 $r(u_0, v_0)$ 处的切平面与法线的参数方程.

10. 求下列曲面在指定点处的切平面与法线的方程:

(1) $r = (a \cos \theta \cos \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, a \sin \theta)$, 在 (θ_0, φ_0) 处;

(2) $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, 在点(6, 12, 5)处;

(3) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, 在点(1, 2, -1)处;

(4) $e^x + e^y = 4$, 在点(ln2, ln2, 1)处.

11. 试求一平面,使它通过曲线 $\begin{cases} y^2 = x, \\ z = 3(y-1) \end{cases}$ 在 $y=1$ 处的切线,且与曲面 $x^2 + y^2 = 4z$ 相切.

12. 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = x$ 的切平面,使它垂直于平面 $x - y - \frac{1}{2}z = 2$ 和平面 $x - y - z = 2$.

13. 求曲面 $z = xy$ 的法线,使它与平面 $x + 3y + z + 9 = 0$ 垂直.

14. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 22$ 的法线,使它与直线 $\begin{cases} x + 3y + z = 3, \\ x + y = 0 \end{cases}$ 平行.

15. 求曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处由内部指向外部的单位法向量.

16. 设 n 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P_0(1, 1, 1)$ 处由内部指向外部的法向量,求函数 $u = \frac{1}{z} \sqrt{6x^2 + 8y^2}$ 在 P_0 处沿方向 n 的方向导数.

17. 求锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 在其上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程,并证明切平面通过锥面在 P_0 处的母线.

18. 证明: 曲面 $xyz = a^3$ ($a > 0$) 上任一点处的切平面和三个坐标面所围四面体的体积是一常数.

19. 设 a, b 和 c 为常数, 函数 $F(u, v)$ 有连续的一阶偏导数, 证明: 曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)$

$=0$ 上任意一点处的切平面均通过某定点.

20. 设 a 和 b 为常数, 证明: 曲面 $F(x - az, y - bz) = 0$ 上任意一点处的切平面均与某定直线平行, 其中 a, b 为常数.

21. 两个曲面在交线上某点的交角, 是指两曲面在该点的法线的交角. 证明: 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与锥面 $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ 正交(即交角为 $\frac{\pi}{2}$).

(B)

1. 试证: 旋转面 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 上任一点的法线与旋转轴相交, 其中 $f'(u)$ 连续且不等于零.

2. 设 $F(u, v)$ 是一个连续可微的非零向量值函数, $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. 证明: 函数 $F(u, v)$ 的长度是常数的充要条件为 $\frac{\partial F}{\partial u} \cdot F = 0$ 及 $\frac{\partial F}{\partial v} \cdot F = 0$.

3. 证明: 曲面 Σ 是一个球面的充要条件为 Σ 的所有法线通过一个定点.

4. 设函数 $u = F(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 和 $\psi(x, y, z) = 0$ 之下在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处取得极值 m . 证明: 曲面 $F(x, y, z) = m$, $\varphi(x, y, z) = 0$ 和 $\psi(x, y, z) = 0$ 在点 P_0 的法线共面, 其中函数 F, φ 及 ψ 均有连续的且不同时为零的一阶偏导数.

第七节 空间曲线的曲率与挠率

本节将利用多元函数微分学的知识和向量工具对空间曲线的性态作进一步的研究. 为此, 我们先介绍 Frenet 活动标架, 然后利用它来讨论曲线的曲率与挠率, 最后介绍曲线论的基本公式.

7.1 Frenet 标架

对曲线的研究中, 在曲线上建立活动的坐标系来取代原有固定的直角坐标系会带来许多方便. 例如, 船在大海中航行, 对于时刻 t 在海平面上或空中所发现的目标, 往往以此时刻船的位置为坐标原点所建立的某一坐标系来测量目标的位置. 当 t 变化时, 这一坐标系将作为一刚体随船的航线而变化.

回顾空间直角坐标系, 我们是用三个相互正交平面的交线来构造坐标架的. 要在曲线上建立活动的坐标架, 自然也希望寻找三个由曲线特征所确定的相互正交的平面, 用它们的交线来构造坐标架. 以下设曲线 Γ 的自然参数方程为 $r = r(s)$, $r(s)$ 二阶连续可微.

(1) 法平面与切线 设 $r'(s) \neq 0$. 在上一节中已经指出, $r'(s_0)$ 是 Γ 在点 $r(s_0)$ 处正向与 Γ 正向一致的单位切向量, 记作 $T(s_0)$, 即

$$T(s_0) = r'(s_0). \quad (7.1)$$

于是 Γ 在点 $r(s_0)$ 的法平面方程为

$$(\rho - r(s_0)) \cdot r'(s_0) = 0,$$

其中 ρ 是法平面上动点的向径, Γ 在点 $r(s_0)$ 的切线方程为

$$\rho = r(s_0) + \lambda r'(s_0),$$

其中 ρ 是切线上动点的向径, $\lambda \in \mathbb{R}$ 为参数.

(2) 密切平面与次法线 通过 Γ 在点 $r(s_0)$ 的切线的平面称为 Γ 在点 $r(s_0)$ 的切平面. 显然, 这种切平面有无穷多个, 其中哪一个与曲线 Γ 最贴近呢? 如果 Γ 是平面曲线, 那末显然 Γ 所在的平面就是与 Γ 最贴近的切平面. 当 Γ 是空间曲线时, 与它最贴近的切平面可以用如下的方法得到: 将 Γ 在点 $r(s_0)$ 的切线与 Γ 上 $r(s_0)$ 邻近的点 $r(s_0 + \Delta s)$ 所确定的平面记作 π' , 当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时点 $r(s_0 + \Delta s)$ 将沿 Γ 趋向于点 $r(s_0)$, 如果此时 π' 有极限位置 π , 那末就认为 π 是与曲线 Γ 最贴近的切平面, 称它为曲线 Γ 在点 $r(s_0)$ 处的密切平面; 而把密切平面在点 $r(s_0)$ 的法线, 称为曲线 Γ 在点 $r(s_0)$ 的次法线. 下面来求它们的方程.

由平面 π' 的构造可知, 向量 $r'(s_0)$ 与 $r(s_0 + \Delta s) - r(s_0)$ 均在 π' 上, 从而 π' 的法向量可取为

$$r'(s_0) \times (r(s_0 + \Delta s) - r(s_0)).$$

对向量 $r(s_0 + \Delta s) - r(s_0)$ 的各分量分别应用一元函数的 Taylor 公式, 可得

$$r(s_0 + \Delta s) - r(s_0) = r'(s_0)\Delta s + \frac{1}{2!}(r''(s_0) + \varepsilon)\Delta s^2,$$

其中 $\Delta s \rightarrow 0$ 时 $\varepsilon \rightarrow 0$. 注意到 $r'(s_0) \times r'(s_0) = 0$, 从而

$$r'(s_0) \times (r(s_0 + \Delta s) - r(s_0)) = \frac{\Delta s^2}{2} r'(s_0) \times (r''(s_0) + \varepsilon),$$

所以, $r'(s_0) \times (r''(s_0) + \varepsilon)$ 也是 π' 的法向量. 令 $\Delta s \rightarrow 0$, 可得 Γ 在点 $r(s_0)$ 次法线的方向向量(简称为次法向量)为

$$r'(s_0) \times r''(s_0).$$

由于 $\|r'(s)\| = 1$, 即向量 $r'(s)$ 的模不变, 由本章习题 5.5(A) 第 4 题可知

$$r'(s_0) \perp r''(s_0), \quad (7.2)$$

于是由向量积的定义可知, Γ 在点 $r(s_0)$ 处的单位次法向量(记为 $B(s_0)$)为

$$B(s_0) = \frac{r'(s_0) \times r''(s_0)}{\|r'(s_0) \times r''(s_0)\|} = \frac{r'(s_0) \times r''(s_0)}{\|r''(s_0)\|}. \quad (7.3)$$

所以, Γ 在点 $r(s_0)$ 的密切平面方程为

$$\mathbf{B}(s_0) \cdot (\rho - r(s_0)) = 0,$$

或

$$(r'(s_0) \times r''(s_0)) \cdot (\rho - r(s_0)) = 0.$$

Γ 在 $r(s_0)$ 处的次法线方程为

$$\rho = r(s_0) + \lambda \mathbf{B}(s_0),$$

或

$$\rho = r(s_0) + \lambda (r'(s_0) \times r''(s_0)).$$

(3) 从切平面与主法线 由 Γ 在点 $r(s_0)$ 即点 P 的切向量 $\mathbf{T}(s_0) = r'(s_0)$ 与次法向量 $\mathbf{B}(s_0)$ 所确定的平面, 称为曲线 Γ 在点 $r(s_0)$ 的从切平面(图 7.1), 它显然既垂直于法平面也垂直于密切平面. 从切平面在点 $r(s_0)$ 的法线称为曲线 Γ 在点 $r(s_0)$ 的主法线, 并取

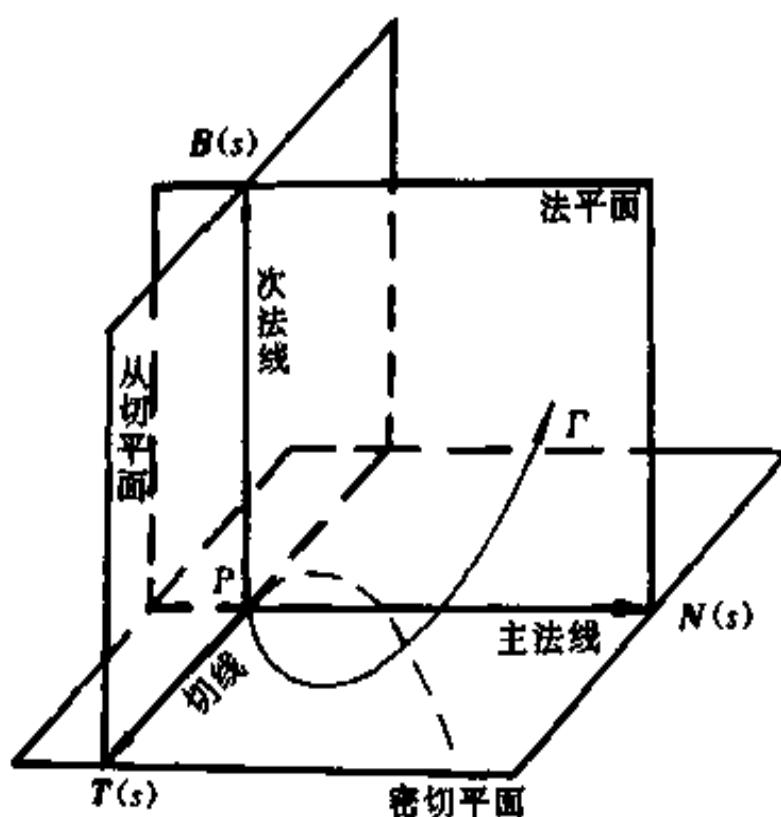


图 7.1

$$\mathbf{N}(s_0) = \mathbf{B}(s_0) \times \mathbf{T}(s_0) \quad (7.4)$$

作为 Γ 在点 $r(s_0)$ 的单位主法线的方向向量(简称为单位主法向量).

于是 Γ 过点 $r(s_0)$ 的从切平面与主法线的方程分别为

$$(\rho - r(s_0)) \cdot \mathbf{N}(s_0) = 0,$$

$$\rho = r(s_0) + \lambda \mathbf{N}(s_0).$$

主法向量的表达式(7.4)还可以简化. 把表达式(7.3)与(7.1)代入(7.4)得

$$\mathbf{N}(s_0) = \frac{1}{\|\mathbf{r}''(s_0)\|} (\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)) \times \mathbf{r}'(s_0),$$

再由(7.2)式可知, $\mathbf{N}(s_0)$ 与 $\mathbf{r}''(s_0)$ 平行且同向. 又由于 $\|\mathbf{N}(s_0)\| = 1$, 所以

$$\mathbf{N}(s_0) = \frac{\mathbf{r}''(s_0)}{\|\mathbf{r}''(s_0)\|}. \quad (7.5)$$

容易看出, 曲线 Γ 在点 $\mathbf{r}(s_0)$ 处的从切平面、密切平面和法平面相互正交, 它们的三条交线分别是 Γ 的切线、主法线和次法线(图 7.1). 而相互正交的三个单位向量 \mathbf{T}, \mathbf{N} 和 \mathbf{B} 构成以点 P 为原点的空间(右手)直角坐标系, 称为曲线 Γ 在点 $P = \mathbf{r}(s_0)$ 处的 Frenet 标架. 当点 P 沿曲线 Γ 移动时, 这个标架贴附在 Γ 上作为一个刚体随之而移动, 因此又称其为活动标架.

例 7.1 求螺旋线 $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, kt)$ 的 Frenet 标架、密切平面与从切平面的方程.

解 首先把螺旋线的方程用弧长 s 作为参数来表示. 设 $t=0$ 时 $s=0$, 由弧长公式(6.11)知

$$s(t) = \sqrt{a^2 + k^2}t, \quad \text{或} \quad t = \omega s, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}},$$

于是螺旋线的方程可改写成

$$\mathbf{r}(s) = (a \cos \omega s, a \sin \omega s, k \omega s).$$

求导得

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(s) &= (-a \omega \sin \omega s, a \omega \cos \omega s, k \omega), \\ \mathbf{r}''(s) &= (-a \omega^2 \cos \omega s, -a \omega^2 \sin \omega s, 0).\end{aligned}$$

于是由公式(7.1),(7.5)与(7.3)分别得

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \omega(-a \sin \omega s, a \cos \omega s, k) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}}(-a \sin t, a \cos t, k), \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{r}''(s)}{a \omega^2} = (-\cos \omega s, -\sin \omega s, 0) = (-\cos t, -\sin t, 0), \\ \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{a \omega^2} = \omega(k \sin \omega s, -k \cos \omega s, a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}}(k \sin t, -k \cos t, a).\end{aligned}$$

上述三向量 $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 所构成的坐标系即为所求 Frenet 标架.

密切平面方程为

$$\mathbf{B}(s) \cdot (\rho - \mathbf{r}(s)) = 0,$$

即 $k \sin t(x - a \cos t) - k \cos t(y - a \sin t) + a(z - kt) = 0.$

从切平面方程为

$$\mathbf{N}(s) \cdot (\rho - r(s)) = 0,$$

即 $-\cos t(x - a \cos t) - \sin t(y - a \sin t) = 0. \blacksquare$

7.2 曲率

在本段中, 曲线 Γ 的一般参数方程仍用 $r = r(t)$ 表示, 而 Γ 的自然参数方程则用 $r = r(s)$ 表示, 为了区分它们的导数, 仍然用 \dot{r}, \ddot{r}, \dots 分别表示 $\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \dots$; 而用 r', r'', \dots 分别表示 $\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}, \dots$. 并且假定函数 r 有连续的三阶导数, $r'' \neq 0$.

所谓曲率, 通俗地讲, 就是指曲线上各点的弯曲程度. 在工程技术、生产实践和自然科学中, 不少问题与曲线的弯曲程度有关. 例如, 在铁路转弯处, 铁道的外轨要比内轨高, 而且转弯愈急, 也即“弯曲”愈大处, 内、外轨的高度差也就愈大, 这是由于作转动的列车在“弯曲”较大处所受的向心力愈大的缘故. 再如, 车床的主轴由于自重总会产生弯曲变形, 如果弯曲过大, 就将影响车床的精度和正常运行. 为了从数量上刻画曲线的弯曲程度, 需要引入一个度量概念——曲率.

我们先来分析一下曲线的弯曲程度由哪些因素决定. 以平面曲线为例, 从图 7.2 可以看出, 对相同长度的曲线段 $\widehat{M_1 N_1}$ 和 $\widehat{M_2 N_2}$, 曲线段两端点处的切线向量的夹角 θ_1 和 θ_2 不同, 那末它们的弯曲程度也不同, 夹角较大的曲线段 $\widehat{M_1 N_1}$ 的弯曲程度较大, 这说明曲线段的弯曲程度可以看作与曲线段两端点处的切线向量的夹角 θ 成正比; 另一方面, 从图 7.3 可以看出, 虽然曲线段 $\widehat{M_1 N_1}$ 与 $\widehat{M_2 N_2}$

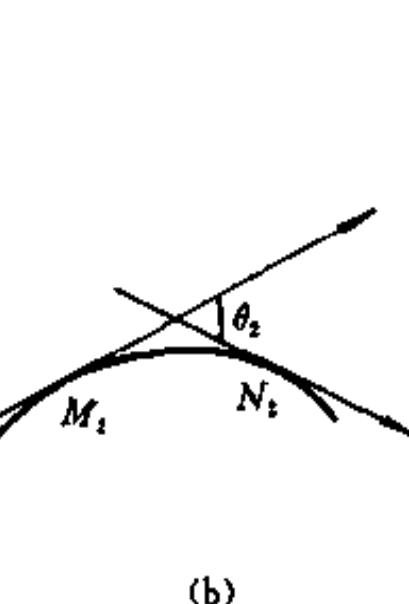
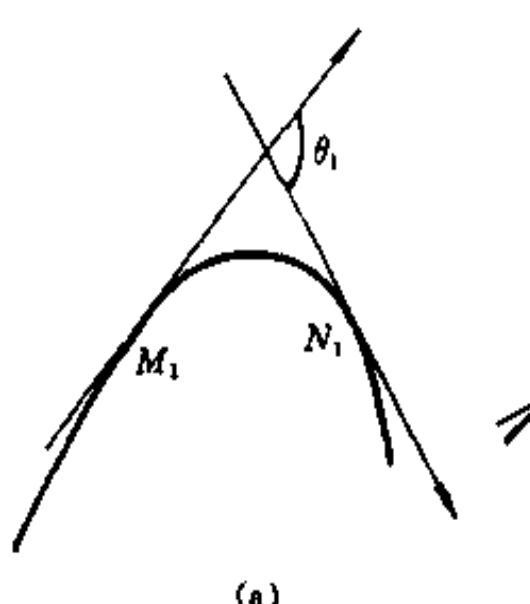


图 7.2

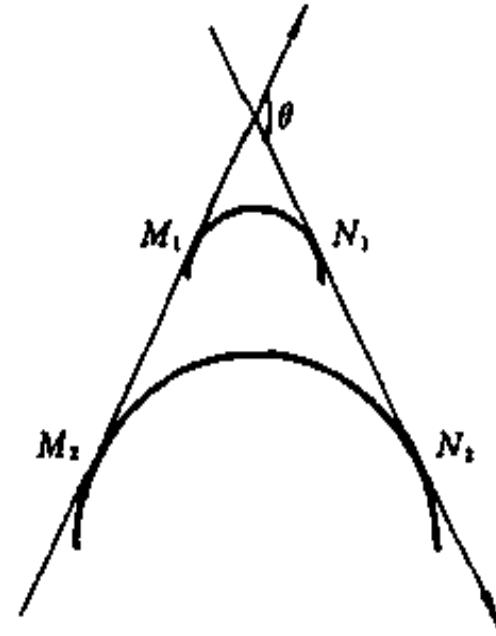


图 7.3

两端点处的切线向量有相同的夹角,但是它们的弯曲程度却不相同,较短的曲线段 $\widehat{M_1 N_1}$ 的弯曲程度较大,这说明曲线段的弯曲程度可以看作与曲线段的长度 s 成反比,所以通常用 $\frac{\theta}{s}$ 来表示曲线段 \widehat{MN} 的弯曲程度(其中 θ 是 \widehat{MN} 两端点处的切线向量的夹角, s 是 \widehat{MN} 的长度).一般说来,曲线段的弯曲程度不一定处处相同,因此 $\frac{\theta}{s}$ 只表示了曲线段的平均弯曲程度,叫做曲线段 \widehat{MN} 的平均曲率.要精确地反映曲线的弯曲程度,还必须考虑曲线在每一点的弯曲程度.为此,我们引入曲线在一点处的曲率概念.

定义 7.1(曲率) 设空间曲线 Γ 的方程为 $r = r(s)$ ($a \leq s \leq b$),其中 s 为自然参数, Γ 上点 M 对应的参数为 s , Γ 上点 M 附近点 N 对应的参数为 $s + \Delta s$, Γ 在点 M 处的切线向量 $r'(s)$ 与点 N 处的切线向量 $r'(s + \Delta s)$ 的夹角为 $\Delta\theta$,称极限值

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$$

为 Γ 在点 M 处的曲率,记为 κ (读作 kappa),即

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|. \quad (7.6)$$

根据定义,显然曲率 κ 与切线向量 $r'(s)$ 有关,那末它们的关系究竟如何?曲率又该如何计算?下面就来讨论这些问题.

首先,容易证明下述简单的命题:设 $e(t)$ 为定义在 $U(t_0) \subseteq \mathbb{R}$ 上的单位向量值函数, $\Delta e = e(t_0 + \Delta t) - e(t_0)$, $\Delta\theta$ 为 $e(t_0)$ 与 $e(t_0 + \Delta t)$ 的夹角,则

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta e}{\Delta\theta} \right\| = 1. \quad (7.7)$$

事实上,把向量 $e(t)$ 的起点固定在空间一点(例如坐标原点),则当 t 在 $U(t_0)$ 中变化时, $e(t)$ 的终点轨迹便是单位球面上的一段曲线.设 $e(t_0)$ 与 $e(t_0 + \Delta t)$ 的终点分别为

为 Q_0 与 Q ,则 $\Delta e = \overrightarrow{Q_0 Q}$ (图 7.4).于是,对于任意固定的 Q ,在三角形 OQ_0Q 内有

$$\begin{aligned} \|\Delta e\| &= \|\overrightarrow{Q_0 Q}\| \\ &= 2 \|e(t_0)\| \sin \frac{|\Delta\theta|}{2} \end{aligned}$$

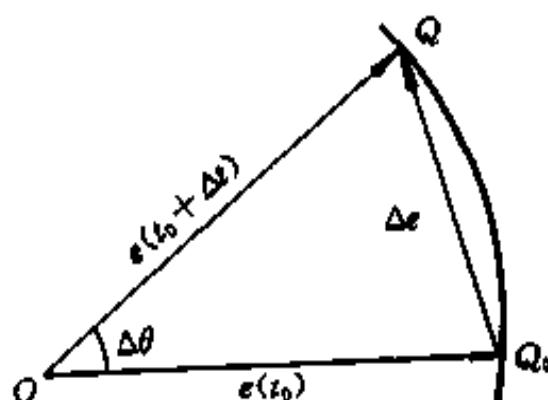


图 7.4

$$= 2 \sin \frac{|\Delta\theta|}{2},$$

从而

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta e}{\Delta\theta} \right\| = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{|\Delta\theta|}{2}}{|\Delta\theta|} = 1.$$

由极限式(7.7)立即可以导出曲率 κ 的计算公式.

定理 7.1 设空间曲线 Γ 的方程为 $r = r(s)$, s 为自然参数, 则 $r(s)$ 的曲率为

$$\boxed{\kappa(s) = \|r''(s)\|}. \quad (7.8)$$

证 记 $T(s) = r'(s)$, 则 $T(s)$ 是 Γ 在点 $r(s)$ 与 Γ 正向一致的单位切向量. 设 $T(s)$ 与 $T(s + \Delta s)$ 的夹角为 $\Delta\theta$, 则由曲率的定义及(7.7)式可得

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta T}{\Delta\theta} \right\| \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta T}{\Delta s} \right\| \\ &= \|T'(s)\| = \|r''(s)\|. \blacksquare \end{aligned}$$

(7.8)式表明, 曲率 κ 等于 $r(s)$ 的二阶导数的模, 或单位切向量 $T(s)$ 的导数的模. 由于 $T(s)$ 刻画切线的方向, 因而由 $\kappa = \|T'(s)\|$, 也可以把曲率看作是切线方向对弧长的转动率, 转动越“快”则曲率越大. 由于切向量 T 在密切平面上, 因此, 曲率 κ 实际上反映了曲线在密切平面上的弯曲程度.

推论 设空间曲线 Γ 由一般的参数方程 $r = r(t)$ 给定, $\dot{r}(t) \neq 0$, 则 Γ 在点 $r(t)$ 的曲率为

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)\|}{\|\dot{r}(t)\|^3}}. \quad (7.9)$$

证 由链式法则可知

$$r'(s) = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}, \quad r''(s) = \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}. \quad (7.10)$$

注意到 $\|r'(s)\| = 1$, 利用(7.2)式与向量积的定义由(7.8)式可得

$$\kappa(s) = \|r''(s)\| = \|r''(s) \times r'(s)\|.$$

将(7.10)式代入上式右端并注意到 $\dot{s}(t) = \|\dot{r}(t)\|$, 得

$$\kappa(t) = \left\| \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \ddot{r} \times \dot{r} + \frac{d^2t}{ds^2} \frac{d\dot{r}}{dt} \times \dot{r} \right\| = \frac{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}{\|\dot{r}\|^3}. \blacksquare$$

对于平面曲线 $r = (x(t), y(t), 0)$, 由(7.9)式易得

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}|}{[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{3/2}}, \quad (7.11)$$

对于平面曲线 $y = y(x)$, 即 $r = (x, y(x), 0)$, 由(7.11)式易得

$$\kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \quad (7.12)$$

例 7.2 证明: 曲线 L 为直线的充分必要条件是其曲率处处为零.

证 必要性 设 L 为直线, 取其长度 s 为参数, 得其方程为

$$r = r_0 + se_l (e_l \text{ 为直线 } L \text{ 的单位方向向量})$$

于是 $r' = e_l, \quad r'' = 0,$

故由(7.8)式知 $\kappa(s) \equiv 0$.

充分性 设 L 的曲率 $\kappa \equiv 0$, 即

$$\|r''(s)\| \equiv 0,$$

从而 $r''(s) = 0$.

令 $r(s) = (x(s), y(s), z(s))$,

便有 $x''(s) = 0, \quad y''(s) = 0, \quad z''(s) = 0$.

积分两次得

$$x(s) = c_1 s + \bar{c}_1, \quad y(s) = c_2 s + \bar{c}_2, \quad z(s) = c_3 s + \bar{c}_3$$

这就是以 s 为参数的空间直线的参数方程. ■

例 7.3 求半径为 R 的圆的曲率.

解法一 取圆心为坐标原点 O , 建立平面直角坐标系, 则圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R \sin t, \quad \ddot{x} = -R \cos t, \\ \dot{y} &= R \cos t, \quad \ddot{y} = -R \sin t. \end{aligned}$$

代入公式(7.11)中可算得

$$\kappa = \frac{1}{R}.$$

解法二 在圆周上任取两点 P_1, P_2 , 圆在 P_1 与 P_2 点切线的夹角 $\Delta\theta$ 等于 OP_1 与 OP_2 所夹的圆心角, 其中 O 为圆心. 于是弧长

$$\Delta s = \widehat{P_1 P_2} = R \Delta\theta.$$

由曲率定义直接可得

$$\kappa = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}. \quad \blacksquare$$

由此可见, 圆周上各点的弯曲程度相同, 且曲率等于半径的倒数. 半径愈小, 曲率愈大. 这是与实际情况相符合的.

例 7.4 求螺旋线 $r = (a \cos t, a \sin t, kt)$ 的曲率.

解 由于 $\dot{r}(t) = (-a \sin t, a \cos t, k)$,

$$\ddot{r}(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0),$$

从而

$$\dot{r} \times \ddot{r} = (ka \sin t, -ka \cos t, a^2),$$

$$\|\dot{r} \times \ddot{r}\| = a \sqrt{a^2 + k^2},$$

$$\|\dot{r}\| = \sqrt{a^2 + k^2}.$$

于是由公式(7.9)得

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + k^2}. \quad \blacksquare$$

1. 曲率半径与曲率圆

如上所述, 曲率是曲线在各点处弯曲程度的度量. 曲线在不同的点处其弯曲程度可能不同, 为了更形象地表示出

曲线在一点处的弯曲程度, 下面引入曲率圆的概念. 对于平面曲线 Γ , 过其中一点 P 在 Γ 所在平面上作此曲线的法线, 再在曲线凹向一侧的法线上

取点 Q 使 $\|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{1}{\kappa}$, 其中 κ 是 Γ 在点 P 的曲率. 以点 Q 为圆心、

$\|\overrightarrow{PQ}\|$ 为半径的圆称为平面曲线 Γ 在点 P 处的曲率圆, 它的弯曲程度形象地表示了 Γ 在点 P 处的弯曲程度.

如果 Γ 是一空间曲线, 那末在点 P 与 Γ 最贴近的切平面是点 P 处的密

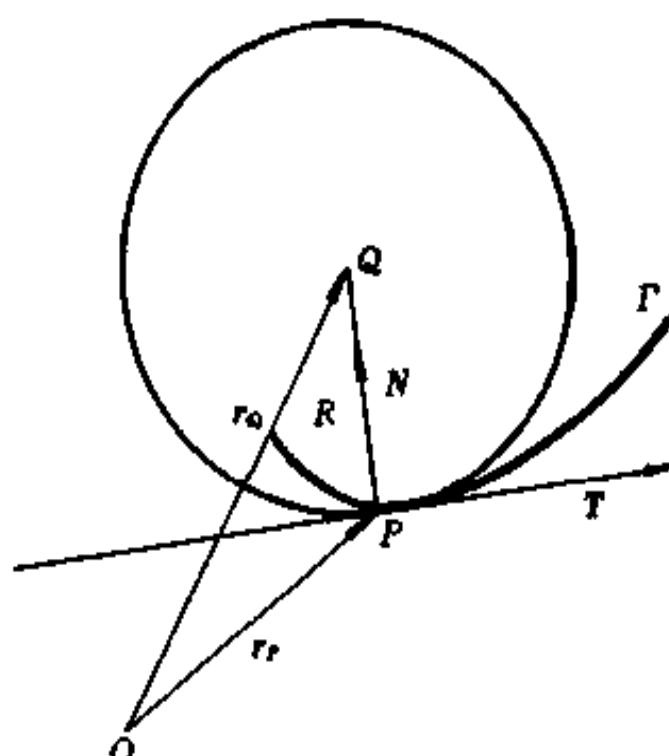


图 7.5

切平面 π . 在点 P 处曲线的主法线 $N(s)$ 上, 沿 $N(s)$ 的正向取点 Q , 使 $\|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{1}{\kappa}$. 以 Q 为圆心、 $\frac{1}{\kappa}$ 为半径在平面 π 上的圆称为 Γ 在点 P 处的曲率圆或密切圆(图 7.5). 此曲率圆的圆心 Q 与半径 R 分别称为曲线 Γ 在点 P 处的曲率中心与曲率半径. 于是若取弧长作参数, 则有

$$\boxed{\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_P(s) + R(s)\mathbf{N}(s)}, \quad (7.13)$$

$$\boxed{R = \frac{1}{\kappa}}. \quad (7.14)$$

其中 r_Q 与 r_P 分别为点 Q 与 P 的向径.

当 Γ 为平面曲线时, 密切平面就是 Γ 所在的平面, 而主法线就是 Γ 的法线. 这时(7.13)与(7.14)就分别是平面曲线 Γ 在点 P 的曲率中心和曲率半径.

2. 渐伸线与渐屈线

若一条曲线 C 上任一点的切线均为另一条曲线 Γ 相应点的法线, 则 C 称为 Γ 的渐屈线, Γ 称为 C 的渐伸线(图 7.6). 容易看出, 用一条柔软而无伸缩的线贴附在曲线 C 上, 固定点 A 如图 7.6 所示, 将线的另一端 B 沿 C 的切线方向拉紧, 逐渐展开, 则点 B 的轨迹就是 C 的渐伸线 Γ .

首先, 我们来求已知曲线 C 的渐伸线 Γ . 设 C 的方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 所求渐伸线的方程为 $\rho = \rho(s)$. 由渐伸线的定义可知

$$\rho(s) = \mathbf{r}(s) + \alpha(s)\mathbf{T}(s), \quad (7.15)$$

其中 $\mathbf{T}(s)$ 为曲线 C 的单位切向量, $\alpha(s)$ 为待定数量值函数. 为求 $\alpha(s)$, 将(7.15)式两端对 s 求导, 并注意到 $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$, 得

$$\rho'(s) = [1 + \alpha'(s)]\mathbf{r}'(s) + \alpha(s)\mathbf{r}''(s).$$

两端点乘 $\mathbf{r}'(s)$, 由于 $\mathbf{r}'(s) \perp \mathbf{r}''(s)$, 可得

$$\rho'(s) \cdot \mathbf{r}'(s) = 1 + \alpha'(s).$$

注意到 $\rho'(s)$ 是渐伸线 Γ 的切向量, 由渐伸线的定义知

$$\rho'(s) \cdot \mathbf{r}'(s) = 0,$$

从而

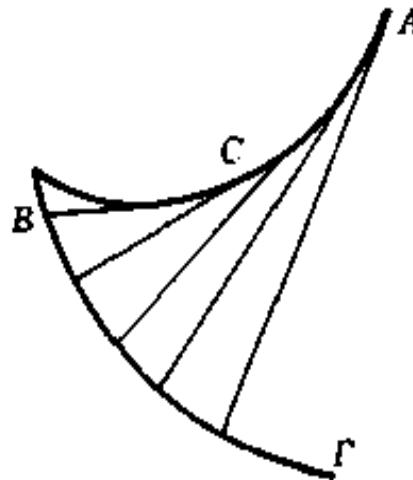


图 7.6

$$1 + \alpha'(s) = 0.$$

解得

$$\alpha(s) = a - s,$$

其中 a 为任意常数. 代入(7.15)便得渐伸线 Γ 的方程为

$$\rho(s) = r(s) + (a - s)\mathbf{T}(s).$$

对于渐屈线的方程本书不作一般讨论, 仅指出下述的简单情形: 平面曲线的曲率中心轨迹就是此曲线的渐屈线(证明从略). 因此, 平面曲线 $r = r(s)$ 的渐屈线方程就是(7.13)式.

例7.5 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐屈线方程.

解 若利用公式(7.13)需要引入弧长参数比较麻烦. 我们直接根据曲率中心的定义来求此渐屈线方程. 设椭圆上点的向径为 $r(t)$, 所求渐屈线上点的向径为 $\rho(t)$. 将所给椭圆看成一空间曲线, 化成参数方程为

$$r(t) = (a \cos t, b \sin t, 0), t \in [0, 2\pi],$$

其单位切向量为

$$e_r(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\|\dot{r}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (-b \sin t, a \cos t, 0).$$

从而椭圆上点 $r(t)$ (凹向一侧)的单位法向量为

$$e_n(t) = (0, 0, 1) \times e_r(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (-b \cos t, -a \sin t, 0).$$

于是由曲率中心的定义有

$$\rho(t) = r(t) + R(t)e_n(t). \quad (7.16)$$

由(7.14)式与(7.11)式可得

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

把 $r(t), R(t), e_n(t)$ 代入(7.16)式后化简即得所求渐屈线的方程为

$$\rho(t) = \left(\frac{1}{a} (a^2 - b^2) \cos^3 t, -\frac{1}{b} (a^2 - b^2) \sin^3 t, 0 \right), t \in [0, 2\pi],$$

或化成直角坐标方程为

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}. \blacksquare$$

渐伸线与渐屈线在机械原理中有着重要的应用.

例 7.6 列车在从直道进入弯道时,为什么常会产生摇晃震动? 怎样去减小这种摇晃?

解 列车在拐弯时将受到向心力的作用,如果向心力的变化不连续,则将产生摇晃.由力学知识可知,轨道上一点处

向心力的大小为 $\frac{mv^2}{R}$,其中 m 是物体的质量,

v 是运动的速度, R 是轨道在该点处的曲率半径.如果让列车由直道直接进入圆弧形轨道(图 7.7),尽管轨道是光滑连接的,但是由于直线的曲率半径为无穷大,因而在轨道的连接点 B 处,向心力的大小将发生跳跃.这就

会导致摇晃震动.

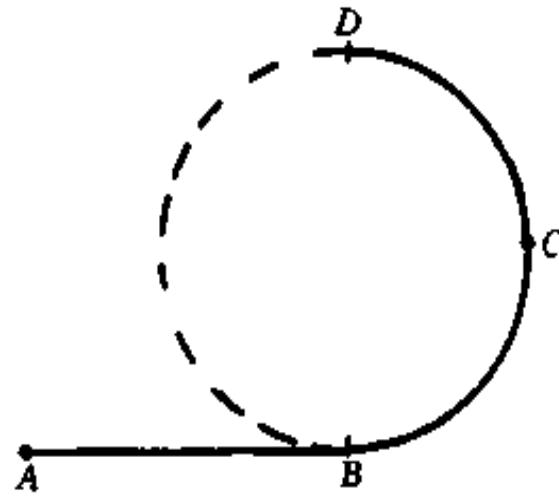


图 7.7

为了减小摇晃,必须让轨道的曲率半径 R 连续变化.容易求得立方抛物线 $y = ax^3$ ($a > 0$) 在任一点的曲率半径为

$$R = \frac{(1 + 9a^2x^4)^{\frac{3}{2}}}{6a|x|},$$

当 $x \neq 0$ 时, R 随 x 连续变化,且当 $x \rightarrow 0$ 时 R 趋向于无穷大.因此,如果我们在修筑铁路时,先在直道末端接上一段立方抛物线 BC (图 7.8),再在立方抛物线上选取适当的点 C 处与圆弧形轨道 CD 相接,使此立方抛物线在点 C 处的曲率半径近似于圆弧 CD 的半径.这样,在从直轨 AB 转入弯轨 BCD 时,曲率半径 R 将接近连续变化,从而减小列车的摇晃震动. ■

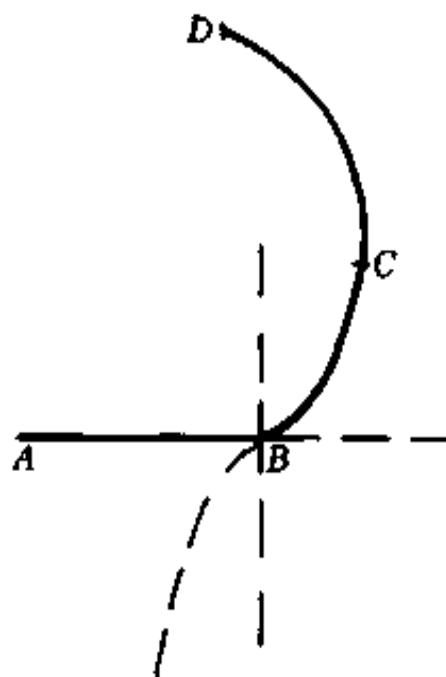


图 7.8

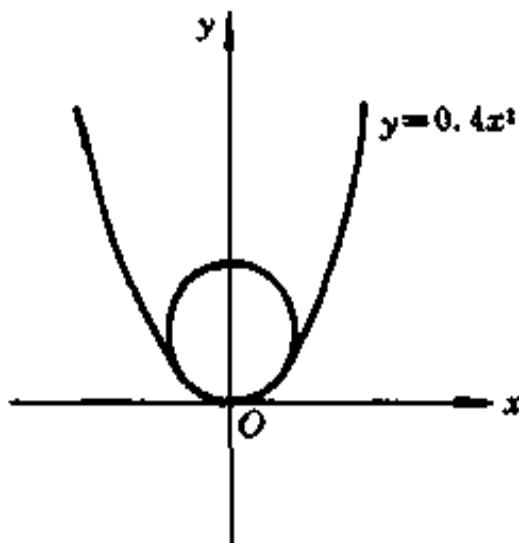


图 7.9

例 7.7 设工件内表面的截线为抛物线 $y = 0.4x^2$ (单位: cm) (图 7.9). 现在要用砂轮磨削其内表面, 问用直径多大的砂轮才比较合适?

解 为了在磨削时不使砂轮磨削到工件里面去, 即多磨掉不应磨去的部分, 砂轮的半径应小于工件截线上各点处曲率半径的最小值. 为此先求抛物线 $y = 0.4x^2$ 上任一点 (x, y) 处的曲率半径. 由于

$$y' = 0.8x, \quad y'' = 0.8,$$

所以曲率半径 R 为

$$R = \frac{1}{\kappa} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{(1+0.64x^2)^{\frac{3}{2}}}{0.8}.$$

容易求出在抛物线的顶点 $(0, 0)$ 处曲率半径 R 取到最小值

$$\min R(x) = \frac{1}{0.8} = 1.25,$$

所以选用砂轮的直径应略小于 1.25 cm. ■

7.3 挠率

如上所述, 曲率是从曲线 Γ 在点 P (即 $r(s)$) 处的密切平面上考察 Γ 的弯曲程度. 对空间曲线 Γ 来说, 它可能同时还向点 P 的密切平面之外弯曲, 我们把这种弯曲叫做扭曲. 现在, 我们来考察 Γ 在点 P 的扭曲情况, 换句话说, 研究 Γ 在点 P 处偏离密切平面的情况.

当曲线 Γ 扭曲时, 随着点在曲线 Γ 上移动, 相应的密切平面的位置将随着改变, 从而它的次法向量也将随之而转动. 因而我们将用曲线 Γ 在点 P 的单位次法向量 $B(s)$ 转角的变化率来刻画 Γ 在点 P 的扭曲程度. 在 Γ 上点 $P_1(s)$ 邻近任取一点 $P_2(s + \Delta s)$, Γ 在点 P_1, P_2 的单位次法向量分别为 $B(s)$ 与 $B(s + \Delta s)$, 它们的夹角记为 $\Delta\varphi$. 显然, 极限值(如果存在的话)

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$$

反映了曲线 Γ 在点 P 扭曲的程度. 正像曲率 $\kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$ 可用单位切向量的导数的模 $\|T'(s)\|$ 来表示一样, $\left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$ 可以表示为单位次法向量导数的模 $\|B'(s)\|$. 事实上, 由(7.7)式可知

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta B}{\Delta\varphi} \right\| = 1.$$

仿照曲率公式(7.8)导出的方法,我们有

$$\left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta s} \right\| \cdot \left| \frac{\Delta s}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta s} \right\| = \left\| \mathbf{B}'(s) \right\|.$$

下面来查看 $\mathbf{B}'(s)$ 是怎样的向量. 由 Frenet 标架可知

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N},$$

于是

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T}' \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \mathbf{N}', \quad (7.17)$$

注意到 $\mathbf{T}'(s) = \mathbf{r}''(s)$, 由(7.5)式可知

$$\mathbf{T}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0},$$

代入(7.17)式得

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T} \times \mathbf{N}',$$

从而 $\mathbf{B}' \perp \mathbf{T}$. 又因 $\|\mathbf{B}\| = 1$, 所以 $\mathbf{B}' \perp \mathbf{B}$, 所以有

$$\mathbf{B}' \parallel \mathbf{B} \times \mathbf{T},$$

即 \mathbf{B}' 与单位主法向量 $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ 平行. 于是由 $\|\mathbf{B}'(s)\| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$ 可得

$$\mathbf{B}'(s) = \pm \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| \mathbf{N}. \quad (7.18)$$

定义 7.2(挠率) 曲线 Γ 在点 P (即 $\mathbf{r}(s)$)的次法向量关于弧长的旋转率 $\left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$ 按以下规律冠以符号后称为 Γ 在点 P 的挠率, 记作 $\tau(s)$, 即

$$\tau(s) = \begin{cases} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|, & \text{当 } \mathbf{B}' \text{ 与 } \mathbf{N} \text{ 反向;} \\ - \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|, & \text{当 } \mathbf{B}' \text{ 与 } \mathbf{N} \text{ 同向.} \end{cases}$$

由此定义易见,(7.18)式可写成

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s), \quad (7.19)$$

两端同时用 $\mathbf{N}(s)$ 点乘, 注意到 $\|\mathbf{N}\| = 1$, 得

$$\tau(s) = -\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{N}(s). \quad (7.20)$$

由(7.20)式,可以导出挠率 $\tau(s)$ 的计算公式.

由于 $B \perp N$, 从而 $B \cdot N = 0$, 两端求导得

$$B' \cdot N + B \cdot N' = 0 \quad \text{或} \quad -B' \cdot N = B \cdot N',$$

于是由(7.20)式, 有

$$\tau(s) = -B' \cdot N = B \cdot N' = (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}'.$$

由(7.5)式知

$$N = \frac{1}{\kappa} r'' = \frac{1}{\kappa} \mathbf{T}',$$

从而

$$\begin{aligned} \tau(s) &= (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \cdot \left(\frac{1}{\kappa} \mathbf{T}'\right)' = (\mathbf{T} \times \frac{1}{\kappa} \mathbf{T}') \cdot \left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \mathbf{T}' + \frac{1}{\kappa} \mathbf{T}''\right] \\ &= \left(\mathbf{T} \times \frac{1}{\kappa} \mathbf{T}'\right) \cdot \frac{1}{\kappa} \mathbf{T}'' = \frac{1}{\kappa^2} [\mathbf{T} \ \mathbf{T}' \ \mathbf{T}''], \end{aligned}$$

故

$$\boxed{\tau(s) = \frac{[\mathbf{r}'(s) \ \mathbf{r}''(s) \ \mathbf{r}'''(s)]}{\|\mathbf{r}''(s)\|^2}} \quad (7.21)$$

如果曲线的方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

那末, 由变换 $s = s(t)$ 不难将曲线的挠率公式(7.21)转换为

$$\boxed{\tau(t) = \frac{[\dot{\mathbf{r}}(t) \ \ddot{\mathbf{r}}(t) \ \ddot{\mathbf{r}}(t)]}{\|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)\|^2}} \quad (7.22)$$

例 7.8 证明: 曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 是平面曲线的充要条件是其上任一点的挠率为零.

证 必要性 设 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 是平面曲线, 从而其任一点的密切平面都是同一平面, 即曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 所在的平面. 于是次法向量 $B(s)$ 是一常向量. 由(7.20)式知

$$\tau(s) = -B' \cdot N \equiv 0.$$

充分性 设 $\tau(s) \equiv 0$, 则由(7.19)式得 $B' \equiv 0$, 由其坐标式易知 B 为一常向量, 记为 B_0 . 由于 $\mathbf{T} \perp B$, 因而 $\mathbf{T} \cdot B_0 = 0$, 即 $\mathbf{r}'(s) \cdot B_0 = 0$, 从而

$$(\mathbf{r}(s) \cdot B_0)' = 0.$$

将上式两端积分得

$$\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{B}_0 = C(\text{常数}),$$

令 $s=0$, 得 $C=\mathbf{r}(0) \cdot \mathbf{B}_0$, 代入上式得

$$(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0)) \cdot \mathbf{B}_0 = 0,$$

故曲线上任一点 $\mathbf{r}(s)$ 均在过点 $\mathbf{r}(0)$ 且以 \mathbf{B}_0 为法向量的平面上, 故为平面曲线. ■

例 7.9 求螺旋线 $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, kt)$ 的挠率.

解 由于

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) &= (-a \sin t, a \cos t, k), \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= (-a \cos t, -a \sin t, 0), \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= (a \sin t, -a \cos t, 0).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}[\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}] &= \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & k \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = ka^2, \\ \|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2 &= a^2(a^2 + k^2),\end{aligned}$$

所以, 由公式(7.22)得

$$\tau(t) = \frac{ka^2}{a^2(a^2 + k^2)} = \frac{k}{a^2 + k^2}. \quad \blacksquare$$

7.4 Frenet 公式

在挠率的研究中, 读者已初步体会到切向量 \mathbf{T} 、主法向量 \mathbf{N} 与次法向量 \mathbf{B} 在研究曲线中的重要地位. 从这里也可帮助我们去理解为什么要用这三个相互正交的向量来构造曲线的活动标架. 正像向量值函数及其导数在 $Oxyz$ 直角坐标系下的分解对曲线的研究发挥了重要作用一样, 在曲线论的深入研究中, 向量值函数及其导数在 Frenet 标架下的分解将发挥更为重要的作用.

在 $Oxyz$ 直角坐标系中, 由于标架固定而不随参数移动, 因此, 当向量分解后, 其导数的分解十分容易, 例如,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(s) &= x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'(s) &= x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j} + z'(s)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

对于活动的 Frenet 标架, $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 将随参数 s 移动, 因而如果得知 $\mathbf{r}(s)$ 在

Frenet 标架下的分解式:

$$\mathbf{r}(s) = \alpha(s)\mathbf{T} + \beta(s)\mathbf{N} + \gamma(s)\mathbf{B},$$

那末

$$\mathbf{r}'(s) = \alpha'(s)\mathbf{T} + \beta'(s)\mathbf{N} + \gamma'(s)\mathbf{B} + \alpha(s)\mathbf{T}' + \beta(s)\mathbf{N}' + \gamma(s)\mathbf{B}'.$$

怎样把它写成 $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 的线性组合, 从而求得 $\mathbf{r}'(s)$ 在 Frenet 标架下的活动坐标呢? 容易看出, 关键在于把 \mathbf{T}', \mathbf{N}' 与 \mathbf{B}' 用 $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 线性表示. 由 $\mathbf{T}'(s) = \mathbf{r}''(s)$ 以及 (7.5) 与 (7.8) 两式可知

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s),$$

由 (7.19) 式知

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s),$$

再由 $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ 两边求导得

$$\begin{aligned}\mathbf{N}'(s) &= \mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}'(s) + \mathbf{B}'(s) \times \mathbf{T}(s) \\ &= \mathbf{B}(s) \times \kappa(s)\mathbf{N}(s) - \tau(s)\mathbf{N}(s) \times \mathbf{T}(s) \\ &= -\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s).\end{aligned}$$

这样, 我们便得到以下公式:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{N}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s). \end{cases}$$

这个公式称为 Frenet 公式, 也称为曲线论的基本公式, 它是微分几何中进一步研究曲线论的基础.

习题 5.7

(A)

1. 如果曲线的方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (t 为一般参数), 如何求曲线的 Frenet 标架? 试推导标架向量 $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 的计算公式.

2. 求下列曲线的 Frenet 标架:

(1) $\mathbf{r} = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$

(2) $\mathbf{r} = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3);$

(3) $\mathbf{r} = (a(1 - \sin t), a(1 - \cos t), bt) \quad (a > 0, b > 0).$

3. 求曲线 $\mathbf{r} = (a \cos t, b \sin t, e^t)$ 在 $t = 0$ 处的密切平面和从切平面的方程.

4. 求曲线 $r = (c\sin t, s\cos t, t)$ 在其上任意一点处的次法线和主法线的方程.
5. 证明: 螺旋线 $r = (a\cos t, a\sin t, bt)$ 上任意一点处的主法线都与 z 轴垂直相交.
6. 设曲线 Γ 的方程为 $r = r(t)$, 其中 $r \in C^{(2)}$, P_0 (即 $r(t_0)$) 及 P (即 $r(t_0 + \Delta t)$) 是 Γ 上两点, 且 $\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0) \neq 0$. 记 Γ 在 P 的切线为 l , 过 P_0 及 l 的平面为 π' . 证明: 当 P 沿 Γ 趋于 P_0 时, 平面 π' 的极限位置为 Γ 在 P_0 的密切平面.
7. 求第 2 题中各曲线的曲率.
8. 求下列平面曲线在指定点处的曲率:
- (1) $y = 4x - x^2$, 在其顶点处;
 - (2) $y = \sin x$, 在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处;
 - (3) $r = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, 在 $t = t_0$ 处;
 - (4) $r = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, 在 $t = t_0$ 处.
9. 曲线 $y = \ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.
10. 求曲线 $y = e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的曲率圆的方程.
11. 一飞机沿抛物线路径 $y = \frac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上, 单位: m) 作俯冲飞行, 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v = 200$ m/s, 飞行员体重 $G = 70$ kg. 求飞机俯冲至最低点(即原点 O) 处时座椅对飞行员的反作用力.
12. 证明: 螺旋线 $r = (a\cos t, a\sin t, bt)$ 的曲率中心轨迹仍然是螺旋线.
13. 证明挠率的计算公式(7.22).
14. 求第 2 题中各曲线的挠率.

(B)

1. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 的渐屈线方程.
2. 求螺旋线 $r = (a\cos t, a\sin t, bt)$ 的渐伸线方程, 并证明这些渐伸线都是平面曲线.
3. 设 $\bar{\Gamma}$ 为曲线 Γ 的曲率中心轨迹. 证明: 在对应点, 曲线 $\bar{\Gamma}$ 的切线与曲线 Γ 的切线垂直.
4. 求曲线 $\begin{cases} x + \sin x = y + \sin y, \\ z + e^z = x + 1 + \ln(x+1) \end{cases}$ 在点 $O(0, 0, 0)$ 处的曲率和 Frenet 标架.
5. 证明:
- (1) 若曲线在每一点处的切线都经过一个定点, 则该曲线必是一条直线;
 - (2) 若曲线在每一点处的密切平面都经过一个定点, 则该曲线必是一条平面曲线.

综合练习题

已知某工厂过去几年的产量与利润的数据如下:

产量 x /千件	40	47	55	70	90	100
利润 y /千元	32	34	43	54	72	85

通过把这些数据 (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, 6$) 所对应的点描在坐标纸上, 可以看出这些点的连线接近于一条直线, 因此可以认为利润 y 与产量 x 的函数关系是线性函数, 试利用最小二乘法求出这个线性函数, 并估计当产量达到 120 千件时该工厂的利润是多少?

第六章 多元函数积分学及其应用

我们在第三章中所讨论过的定积分,其被积函数是一元函数,积分范围是区间,因而它一般只能用来研究分布在某一区间上的量的求和问题,例如平面曲边梯形的面积,细棒的质量等.但是在科学技术中,往往还会碰到许多非均匀分布在平面或空间的某种几何形体上的量的求和问题,例如,平面区域的面积、空间区域的体积、平面薄板、空间物体或物质曲线和曲面的质量等.这时就需要把定积分的概念加以推广,来讨论被积函数是多元函数而积分范围是平面或空间中某一几何形体的积分,即多元函数的积分.

多元函数积分的种类较多,但可从是否考虑方向性,把它们划分为两大类型.本章先介绍第一大类型的多元函数积分(或称多元数量值函数的积分),讲解其概念、性质、计算和应用,包括含参变量的积分;然后结合场论介绍第二大类型积分.

第一节 多元数量值函数积分的概念与性质

1.1 物体质量的计算

设有一质量非均匀分布的物体,其密度是点 M 的函数 $\mu = f(M)$.如果函数 f 已知,怎样来求物体的质量呢?

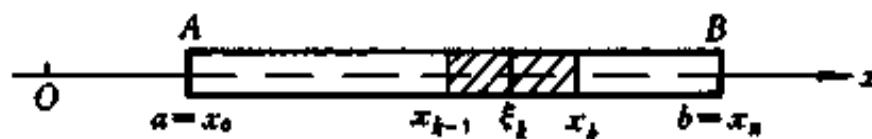


图 1.1

在定积分中,我们已经知道,一根线密度为 $\mu = f(M) = f(x)$ 的细棒 AB (图 1.1),它的质量 m 可通过“分、匀、合、精”四个步骤化为下述定积分

$$m = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.1)$$

对于平面或空间内的物体,当其密度函数 $\mu = f(M)$ 已知时,其质量的计算

也可通过“分、匀、合、精”的步骤来解决。例如，对平面薄板来说，假设它所占的平面区域为 (σ) （图 1.2），其面密度 $\mu = f(M)$ 在 (σ) 上连续，我们可按下列步骤来计算它的质量。

分 把薄板所在的区域 (σ) 任意地划分为 n 个子域 $(\Delta\sigma_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)，它们的面积记作 $\Delta\sigma_k$ （图 1.2）。

匀 当子域 $(\Delta\sigma_k)$ 很小时，其上的物质可以近似地看成是均匀分布的，也就是说，密度函数 $f(M)$ 在 $(\Delta\sigma_k)$ 上可以近似地看作是常数，即等于 $(\Delta\sigma_k)$ 内的任一点 M_k 的值 $f(M_k)$ ，从而 $(\Delta\sigma_k)$ 上质量 Δm_k 的近似值为

$$\Delta m_k \approx f(M_k) \Delta\sigma_k.$$

合 把所有 Δm_k 的近似值加起来，就得到薄板质量 m 的近似值为

$$m = \sum_{k=1}^n \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\sigma_k.$$

精 (σ) 的所有子域 $(\Delta\sigma_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 被划分得越小，上述近似值的近似程度就越高。设 d 为这 n 个子域 $(\Delta\sigma_k)$ 的直径^①中的最大者，当子域的数目 n 无限增大，而且 d 趋向零时，每一子域都无限缩小，我们把上述近似值的极限规定为此薄板的质量 m ，即

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\sigma_k. \quad (1.2)$$

可见，薄板的质量也可由一个和式的极限来确定。和式极限(1.2)与(1.1)式中的和式极限形式上完全一样，唯一的差别是(1.1)式中的每一项是函数在子区间上任一点 M_k 的函数值乘以该子区间的长度，而(1.2)式中的每一项是函数在平面子域上任一点 M_k 的函数值乘以该子域的面积。这种差别是由于质量分布的范围不同所引起的。

一般说来，设有一质量非均匀分布在某一几何形体 (Ω) 上的物体（这里的几何形体 (Ω) 可以是直线段，平面或空间区域，一片曲面或一段曲线），其密度函数 $\mu = f(M)$ 在 (Ω) 上连续，可以完全依照上面的四个步骤来计算其质量。

分 把 (Ω) 任意地划分为 n 个部分，记作 $(\Delta\Omega_k)$ ， $k = 1, 2, \dots, n$ 。并把

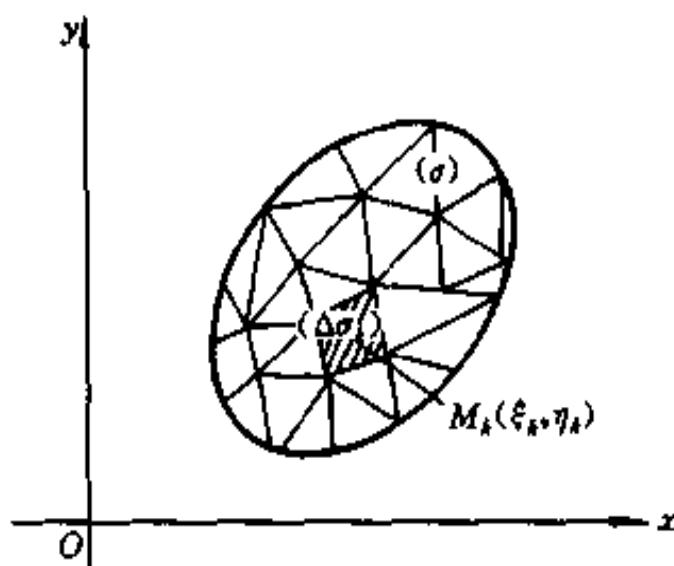


图 1.2

^① 闭区域的直径是指此闭区域中任意两点间的最大距离。

$(\Delta\Omega_k)$ 的度量(例如面积、体积、曲面面积、曲线的弧长等)记为 $\Delta\Omega_k$.

匀 把 $(\Delta\Omega_k)$ 上质量的分布近似看成是均匀的, 即在 $(\Delta\Omega_k)$ 上把密度函数 $\mu = f(M)$ 近似看作是等于其中任一点 M_k 处的函数值 $f(M_k)$. 从而 $(\Delta\Omega_k)$ 上质量 Δm_k 的近似值为

$$\Delta m_k \approx f(M_k) \Delta\Omega_k.$$

合 把所有上述近似值加起来得此物体质量的近似值为

$$m = \sum_{k=1}^n \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k.$$

精 设 d 为 n 个 $(\Delta\Omega_k)$ 直径中的最大者, 则当 $d \rightarrow 0$ 时将上述近似值的极限规定为此物体的质量 m , 即

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k. \quad (1.3)$$

1.2 多元数量值函数积分的概念

从上面求质量的问题中我们看到, 尽管质量分布的几何形体可以不同, 甚至涉及不同维数的空间, 但是通过点函数从数量关系来看, 求质量的问题都归结为同一形式和式的极限(1.3). 在科学技术中还有大量类似的问题, 例如各种物体的重心和转动惯量, 平面或空间几何形体的面积或体积等, 都可以看成是分布在某一几何形体上的可加量的求和问题, 从而最终都可归结为形如(1.3)的和式极限问题而得到解决. 为了从数量关系上给出解决这类问题的一般方法, 我们抛开它们的具体意义, 仅保留其数学结构的特征, 给出以下多元函数积分的概念.

定义 1.1(多元数量值函数积分) 设 (Ω) 表示一个有界的几何形体, 它是可度量的(即可求长或可求面积或可求体积), 函数 f 是定义在 (Ω) 上的数量值函数.

将 (Ω) 任意地划分为 n 个小部分 $(\Delta\Omega_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. 用 $\Delta\Omega_k$ 表示 $(\Delta\Omega_k)$ 的度量.

任取点 $M_k \in (\Delta\Omega_k)$, 作乘积

$$f(M_k) \Delta\Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

作和式

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k.$$

如果不论 (Ω) 怎样划分, 点 M_k 在 $(\Delta\Omega_k)$ 中怎样选取, 当所有 $(\Delta\Omega_k)$ 的直径

的最大值 $d \rightarrow 0$ 时上述和式都趋于同一常数, 那末, 称函数 f 在 (Ω) 上可积, 且称此常数为多元数量值函数 f 在 (Ω) 上的积分, 在不致混淆的情况下, 也简称为函数 f 在 (Ω) 上的积分, 记作

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k, \quad (1.4)$$

其中 (Ω) 称为积分域^①, f 称为被积函数, $f(M) d\Omega$ 称为被积式或积分微元.

下面, 我们根据积分域 (Ω) 的不同类型, 分别给出积分 (1.4) 的具体表达式和名称.

(1) 如果 (Ω) 是 x 轴上的闭区间 $[a, b]$, 那么 f 就是定义在区间 $[a, b]$ 上的一元函数, $\Delta\Omega_k$ 就是子区间的长度 Δx_k , 从而 (1.4) 式可以具体地写成

$$\int_{(a)} f(M) d\Omega = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k,$$

而积分 $\int_{(a)} f(M) d\Omega$ 就是定积分 $\int_a^b f(x) dx$.

(2) 如果 (Ω) 是 xOy 平面上的区域 (σ) ^②, 那么 f 就是定义在 (σ) 上的二元函数, $\Delta\Omega_k$ 就是子区域的面积 $\Delta\sigma_k$, 从而 (1.4) 式也可更具体地写成:

$$\int_{(\sigma)} f(M) d\Omega = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

称为 f 在区域 (σ) 上的二重积分, 其中 (ξ_k, η_k) 就是点 M_k 的直角坐标. 为了明确显示二重积分的积分域是平面区域 (σ) , 我们常用两个积分符号把二重积分表示为

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

其中 (σ) 就是二重积分的积分域, $d\sigma$ 称为面积微元.

(3) 如果 (Ω) 为三维空间的闭区域 (V) , 那么 f 就是定义在 (V) 上的三元函数, $\Delta\Omega_k$ 就是子区域的体积 ΔV_k . 为了明确显示这时的积分域是空间区域 (V) , 我们常采用三个积分符号, 而把 (1.4) 式具体写成

① 为方便起见, 今后对积分域, 我们均用带有圆括号的字母表示, 而用不带括号的相同字母表示此形体的度量. 例如 Ω 是积分形体 (Ω) 的度量.

② 本书中的区域可以包含它的部分或全部边界. 作为积分域的区域都是指闭区域.

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k,$$

称为 f 在区域 (V) 上的三重积分, 其中 (ξ_k, η_k, ζ_k) 为点 M_k 的直角坐标, (V) 是三重积分的积分域, dV 称为体积微元.

(4) 如果 (Ω) 为一条平面(或空间)的曲线弧段 (C) , 那么 f 就是定义在弧段 (C) 上的二元(或三元)函数, $\Delta \Omega_k$ 就是子弧段的弧长 Δs_k , 于是(6.4)式可以具体写成

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$

$$\left(\text{或} \int_C f(x, y, z) ds = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k \right),$$

称为 f 在曲线段 (C) 上对弧长的曲线积分, 也称为第一型线积分, 其中 (C) 称为积分路径. 被积函数形式上是二元(或三元)函数, 但是由于点 M 是在曲线 (C) 上变动, 它的坐标将受到 (C) 的方程的约束, 所以实质上独立的变量只有一个. 这也是我们为什么只用一个积分符号去表示曲线积分的原因.

(5) 如果 (Ω) 为一片曲面 (S) , 那么 f 就是定义在 (S) 上的三元函数, $\Delta \Omega_k$ 就是子曲面的面积 ΔS_k . 由于点 M 在曲面 (S) 上变化, 它的坐标 x, y, z 中只有两个是独立的, 因此我们用两个积分符号来表示这类积分, 而将(1.4)式具体写为

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k,$$

称为 f 在曲面 (S) 上对面积的曲面积分, 也称为第一型面积分.

我们看到, 多元函数的积分虽然类型多样, 但都是形同(1.4)式的和式极限, 只不过被积函数的定义域是不同的几何形体罢了. 这反映了在不同几何形体 (Ω) 上对非均匀分布可加量求和问题的需要. 例如, 如果质量是连续分布在空间区域 (V) 上, 那么在密度函数 $\mu(x, y, z)$ 已知的情况下, (V) 的质量就是 μ 在 (V) 上的三重积分 $\iiint_V \mu(x, y, z) dV$; 如果质量连续分布在一片曲面 (S) 上,

那么在密度函数 $\mu(x, y, z)$ 已知的情况下, (S) 的质量就是 μ 在 (S) 上对面积的曲面积分 $\iint_S \mu(x, y, z) dS$.

1.3 积分存在的条件和性质

在多元数量值函数积分的定义中,要求不论 (Ω) 怎样划分,不论点 M_k 在 $(\Delta\Omega_k)$ 中怎样选取,当所有 $(\Delta\Omega_k)$ 的直径的最大值 $d \rightarrow 0$ 时和式均趋向于同一个数.这时,我们才说积分存在,或 f 在 (Ω) 上可积.

类似于定积分,容易看出,函数 f 在 (Ω) 上可积的必要条件是 f 在 (Ω) 上有界;而且可以证明(从略),若 (Ω) 是紧的且可度量, $f \in C((\Omega))$,则 f 在 (Ω) 上一定可积.

下面我们在被积函数可积且 (Ω) 是紧的且可度量的前提下讨论积分的主要性质,它们的证明与定积分中相应性质类似.

1. 线性性质

$$(1) \int_{(\Omega)} kf(M)d\Omega = k \int_{(\Omega)} f(M)d\Omega, k \text{ 为一常数};$$

$$(2) \int_{(\Omega)} [f(M) \pm g(M)]d\Omega = \int_{(\Omega)} f(M)d\Omega \pm \int_{(\Omega)} g(M)d\Omega.$$

2. 对积分域的可加性 设 $(\Omega) = (\Omega_1) \cup (\Omega_2)$,且 (Ω_1) 与 (Ω_2) 除边界点外无公共部分,则

$$\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega = \int_{(\Omega_1)} f(M)d\Omega + \int_{(\Omega_2)} f(M)d\Omega.$$

3. 积分不等式

(1) 若 $f(M) \leq g(M), \forall M \in (\Omega)$, 则

$$\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega \leq \int_{(\Omega)} g(M)d\Omega;$$

$$(2) \left| \int_{(\Omega)} f(M)d\Omega \right| \leq \int_{(\Omega)} |f(M)|d\Omega;$$

(3) 若 $l \leq f(M) \leq L, \forall M \in (\Omega)$, 则

$$l\Omega \leq \int_{(\Omega)} f(M)d\Omega \leq L\Omega.$$

4. 中值定理 设 $f \in C((\Omega))$, 则在 (Ω) 上至少存在一点 P ,使

$$\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega = f(P)\Omega.$$

习题 6.1

(A)

1. 当 $f(M)=1$ 时, 积分 $\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega$ 等于什么?
2. 积分 $\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega$ 定义中的所有 $(\Delta\Omega_k)$ 的直径的最大值 $d \rightarrow 0$ 能否用所有 $(\Delta\Omega_k)$ 的度量的最大值趋于零代替, 为什么?
3. 试说明二重积分、三重积分与定积分的共同点和不同点.
4. 就二重积分证明积分对积分域的可加性.

(B)

1. 证明积分中值定理: 若 (Ω) 是紧的且可度量, $f(M), g(M)$ 在 (Ω) 上连续, $g(M)$ 在 (Ω) 上不变号, 则

$$\int_{(\Omega)} f(M)g(M)d\Omega = f(P) \int_{(\Omega)} g(M)d\Omega, \text{ 其中 } P \in (\Omega).$$

2. 证明: 若 $f(M)$ 在 (Ω) 上连续, (Ω) 是紧的且可度量, $f(M) \geq 0$, 但 $f(M) \not\equiv 0$, 则

$$\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega > 0.$$

第二节 二重积分的计算

从这一节开始, 我们分别讲解各类积分的计算法. 为了得出二重积分的计算公式, 先介绍二重积分的几何意义.

2.1 二重积分的几何意义

设 $(\sigma) \subseteq \mathbf{R}^2$ 是有界闭区域, $f \in C((\sigma))$. 由定义, f 在 (σ) 上的二重积分就是下列和式的极限:

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y)d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k.$$

下面, 我们根据这个和式的结构来说明二重积分的几何意义. 为方便起见, 设 $f(x, y) \geq 0$. 于是二元函数 $z = f(x, y)$ 在几

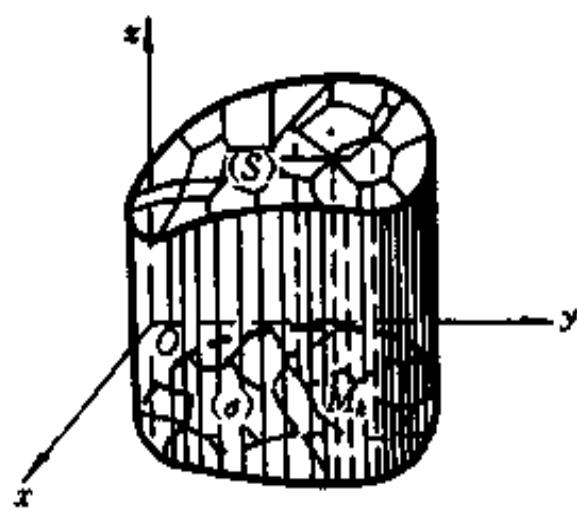


图 2.1

何上就表示位于域 (σ) 上方的曲面 (S) (图 2.1), 它在 xOy 坐标平面上的投影就是闭域 (σ) . 以 (σ) 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面, 便得一以 (σ) 为底、曲面 (S) 为顶的曲顶柱体. 现在我们来说明: 若 f 在 (σ) 上非负, 则二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 的几何意义就是以 (σ) 为底, (S) 为顶的曲顶柱体的体积.

把区域 (σ) 任意划分成 n 个子域 $(\Delta\sigma_k)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, $(\Delta\sigma_k)$ 的面积记为 $\Delta\sigma_k$. 以每一子域 $(\Delta\sigma_k)$ 的边界为准线, 作母线平行于 z 轴的柱面, 这样, 就把整个曲顶柱体划分成 n 个小曲顶柱体.

由于子域 $(\Delta\sigma_k)$ 很小, 以它为底的小曲顶柱体的高变化不大, 可以近似地看作不变, 即看作是 $(\Delta\sigma_k)$ 内任一点 $M_k(\xi_k, \eta_k)$ 处的函数值 $f(\xi_k, \eta_k)$. 从而这一小曲顶柱体的体积 ΔV_k 可以近似地表示为:

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

把各小曲顶柱体体积的近似值加起来, 就得到整个曲顶柱体体积 V 的近似值:

$$V \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

令各子域 $(\Delta\sigma_k)$ 直径的最大值 $d \rightarrow 0$, 取极限便得到体积 V 的精确值:

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma.$$

这就说明了二重积分的几何意义.

2.2 直角坐标系下二重积分的计算法

下面, 我们利用二重积分的几何意义来讨论它的计算法. 为方便起见, 我们仍设 $f \in C((\sigma))$, 在 (σ) 上 $f \geq 0$. 先考虑 (σ) 可用不等式

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b \quad (2.1)$$

来表示的情形, 其中 $y_1(x), y_2(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续(图 2.2). 由几何意义可知, 二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 表示以 (σ) 为底、 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积 V (图 2.3). 在定积分应用中, 我们知道这个体积 V 也可用已知平行截面面积求体积的方法(第三章习题 3.4(A)第 12 题)来计算. 为此, 在 $[a, b]$ 上任意固定一点 x_1 , 考察曲顶柱体与平面 $x = x_1$ 的截面面积 $S(x_1)$. 由图 2.3 易见, 这一截面是由曲线

$\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_1 \end{cases}$ 在区间 $[y_1(x_1), y_2(x_1)]$ 上所形成的曲边梯形, 它的

面积可用定积分表示为

$$S(x_1) = \int_{y_1(x_1)}^{y_2(x_1)} f(x_1, y) dy.$$

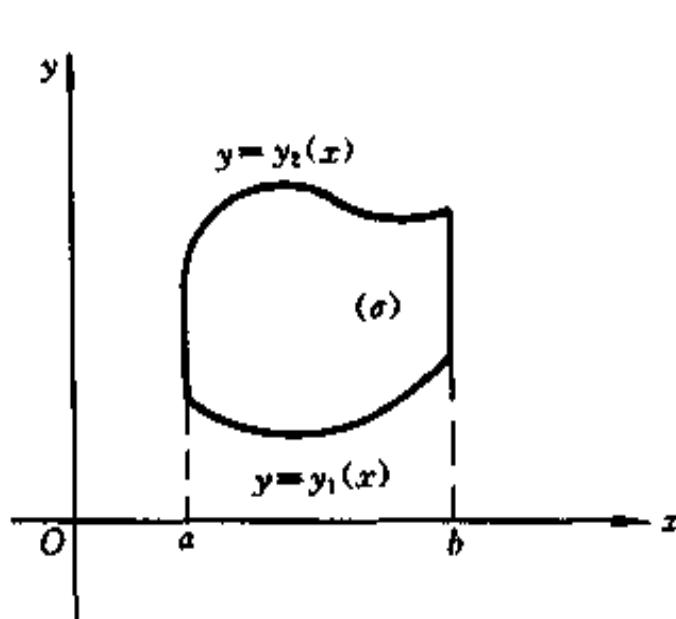


图 2.2

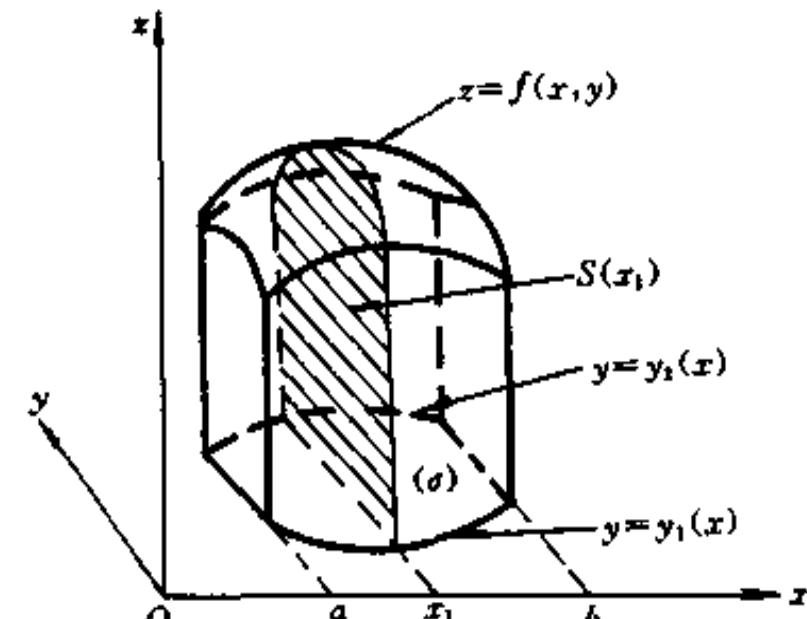


图 2.3

改记 x_1 为 x , 并让它在 a 与 b 之间变动, 这时截面积 $S(x)$ 也将随之而变动, 即

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

值得注意的是, 在求上述积分时, x 应看作是常量, 积分变量是 y . 求得了 $S(x)$ 之后, 再利用定积分的微元法, 便可得所求曲顶柱体的体积

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

另一方面, 根据二重积分的几何意义, 又有

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma,$$

所以

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (2.2)$$

这样一来, 二重积分的计算, 化成了接连两次计算一元函数的定积分: 先固定 x , 把函数 $f(x, y)$ 看作是关于 y 的一元函数, 对 y 从区域 (σ) 的边界 $y_1(x)$ 至 $y_2(x)$ 作定积分; 再将积分后所得的一元函数 $S(x)$, 在区间 $[a, b]$ 上关于 x 作定积分. 这样, 就把二重积分化成了由接连两次定积分所构成的累次积分, 或

称为二次积分,也可把其中的方括号去掉写成

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx \text{ 或 } \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

应当指出,在推导公式(2.2)时,我们假定了在 (σ) 上 $f \geq 0$. 实际上,公式(2.2)的成立并不受这一条件的限制.

类似地,如果积分域 (σ) 可以用不等式

$$x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \quad c \leq y \leq d \quad (2.3)$$

来表示(图 2.4),其中函数 $x_1(y), x_2(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上连续,那末就有

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma &= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy \\ &= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

在这里的累次积分是先固定 y 对 x 计算由 $x_1(y)$ 到 $x_2(y)$ 的定积分,其中 $x_1(y)$ 与 $x_2(y)$ 分别表示 (σ) 的左段边界与右段边界上的点对应于 y 的横坐标,然后再将积分后所得的函数对 y 在区间 $[c, d]$ 上求定积分.

如果积分域 (σ) 既可用不等式(2.1)又可用不等式(2.3)表示,那么,由等式(2.2)与(2.4)可知

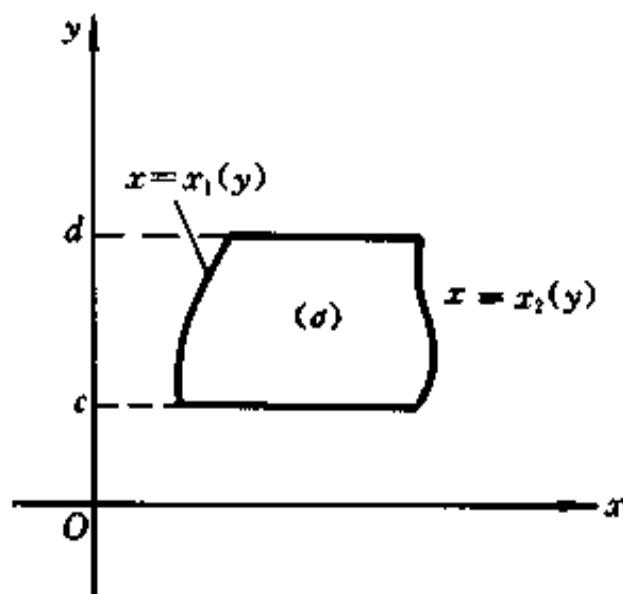


图 2.4

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

这就是说,当 $f(x, y)$ 在积分域 (σ) 上连续时,累次积分可以交换积分顺序. 应当指出,一般说来,在交换累次积分的积分顺序时,上下限都将随之改变.

当积分域 (σ) (如图 2.5)不能直接用不等式(2.1)或(2.3)表示时,我们可以把 (σ) 分成几个子域,使每一子域可用不等式(2.1)或(2.3)表示,从而每一子域上的二重积分均可通过累次积分算出. 于是根据本章第一节 1.3 段中的性质 2,在域 (σ) 上的二重积分就等于这些子域上的二重积分之和.

例 2.1 求二重积分

$$I = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma,$$

其中 $f(x, y) = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}$, $(\sigma) = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ 是一矩形域 (图 2.6).

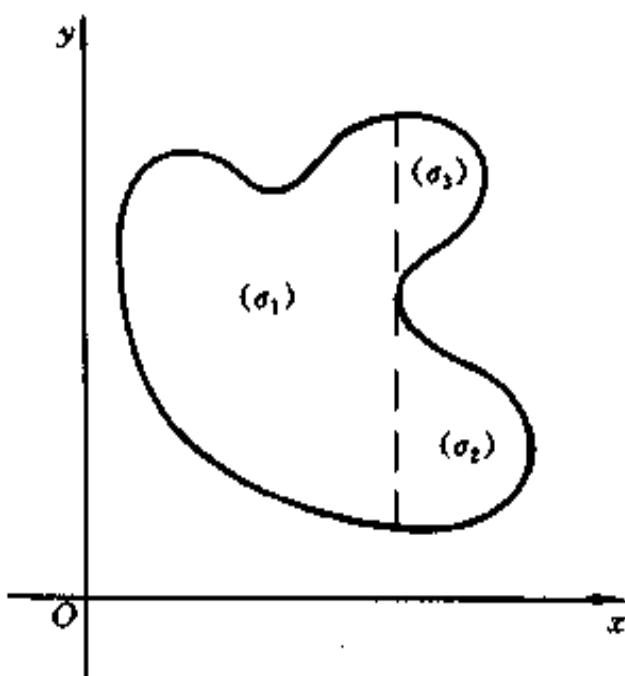


图 2.5

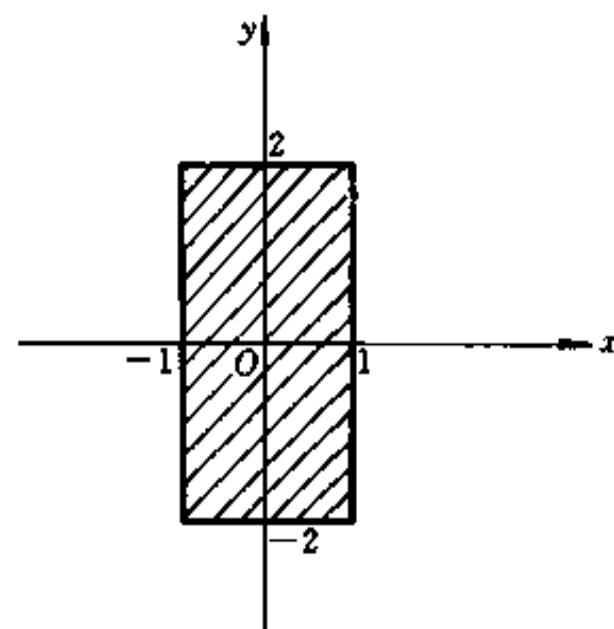


图 2.6

解法一 先对 y 后对 x 积分, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(y - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{8}\right) \Big|_{-2}^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(4 - \frac{4}{3}x\right) dx = 8. \end{aligned}$$

解法二 先对 x 后对 y 积分, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \left(x - \frac{x^2}{6} - \frac{xy}{4}\right) \Big|_{-1}^1 dy \\ &= \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy = 8. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 2.2 计算 $\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma$, 其

中 (σ) 为直线 $x = 1$, $y = 0$ 及抛物线 $y = x^2$ 所围成的区域.

解法一 画出积分域 (σ) 如图 2.7 所示. 先对 y 后对 x 积分, 得

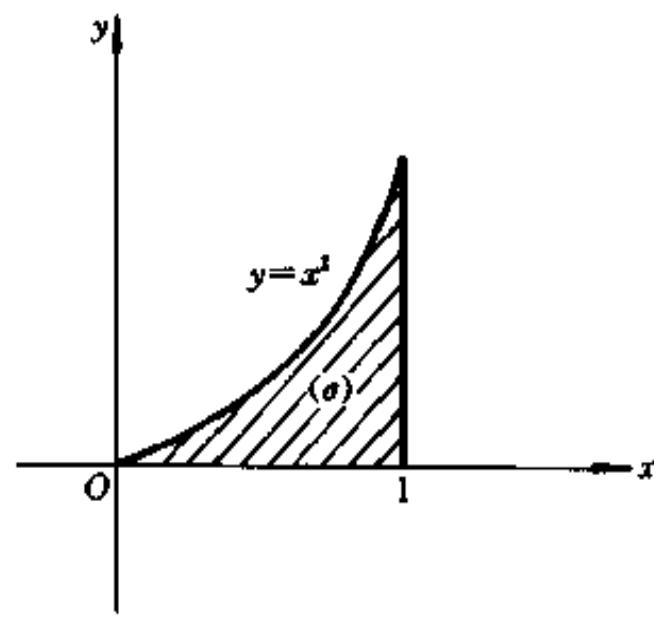


图 2.7

$$\begin{aligned}\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{26}{105}.\end{aligned}$$

解法二 先对 x 后对 y 积分, 得

$$\begin{aligned}\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{5}{2}} \right) dy \\ &= \frac{26}{105}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

例 2.3 计算 $\iint_{(\sigma)} xy d\sigma$, 其中 (σ) 为抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $y = x - 2$ 所围成的区域.

解 画出积分域 (σ) 如图 2.8 所示, 容易求出直线与抛物线的交点为 $A(4, 2)$ 与 $B(1, -1)$. 先对 x 后对 y 积分, 得

$$\begin{aligned}\iint_{(\sigma)} xy d\sigma &= \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 y[(y+2)^2 - y^4] dy \\ &= 5 \frac{5}{8}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

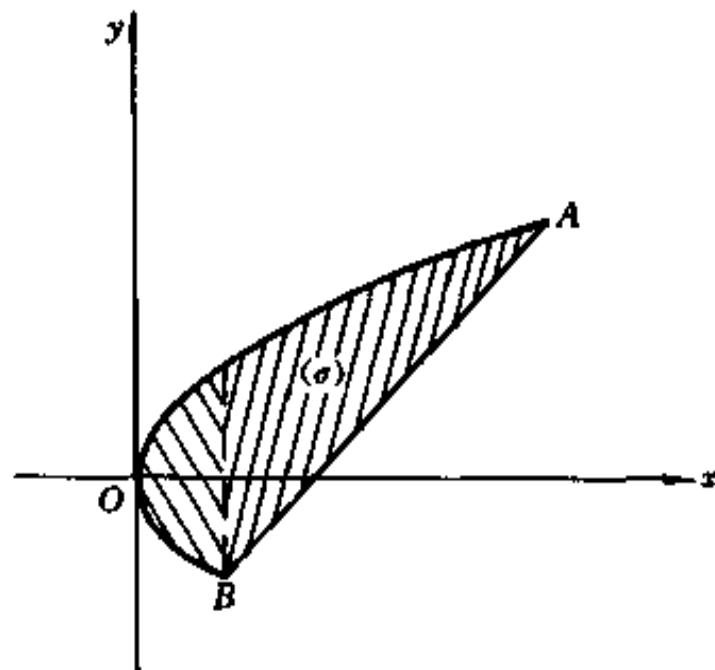


图 2.8

如果先对 y 后对 x 积分, 则要用直线 $x=1$ 把区域 (σ) 分成两部分, 于是

$$\iint_{(\sigma)} xy \, d\sigma = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy \, dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy \, dy.$$

由上式可以算出同样结果, 但这种方法显然要麻烦一些.

例 2.4 计算 $\iint_{(\sigma)} \frac{\sin x}{x} \, d\sigma$, 其中

(σ) 为直线 $y=x$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域.

解 画出积分域 (σ) 如图 2.9 所示. 先对 y 后对 x 积分, 得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} \frac{\sin x}{x} \, d\sigma &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{\sin x}{x} \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x - x^2) \, dx = 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

如果先对 x 后对 y 积分, 则有

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\sin x}{x} \, d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

由于 $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数不能用初等函数表示, 因而无法继续进行计算.

由例 2.3 和例 2.4 可以看到, 计算二重积分时, 选取适当的积分顺序是一个值得注意的问题. 如果积分顺序选取不当, 不仅可能引起计算上的麻烦, 而且可能导致积分无法算出.

例 2.5 交换累次积分

$$I = \int_{-2}^0 dx \int_0^{\frac{2+x}{2}} f(x, y) \, dy + \int_0^2 dx \int_0^{\frac{2-x}{2}} f(x, y) \, dy$$

的积分顺序.

解 首先由此累次积分来确定(相应二重积分的)积分域 (σ) . 由所给的上、下限可知, x, y 的变化范围是:

$$0 \leq y \leq \frac{2+x}{2}, \quad -2 \leq x \leq 0;$$

$$0 \leq y \leq \frac{2-x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

由这些不等式可画出积分域 (σ) 如图 2.10 所示. 然后将原积分化为先对 x 后对 y 的累次积分, 得

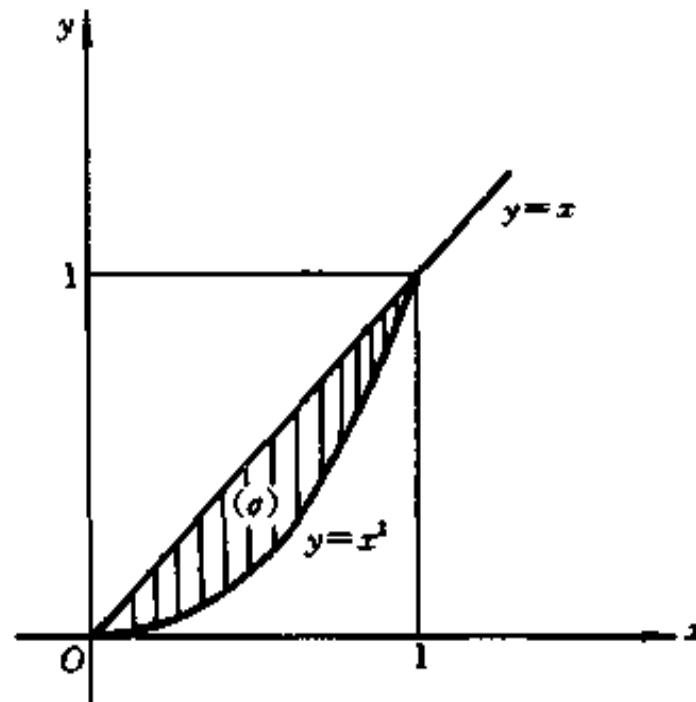


图 2.9

$$I = \int_0^1 dy \int_{2y-2}^{2-2y} f(x, y) dx. \blacksquare$$

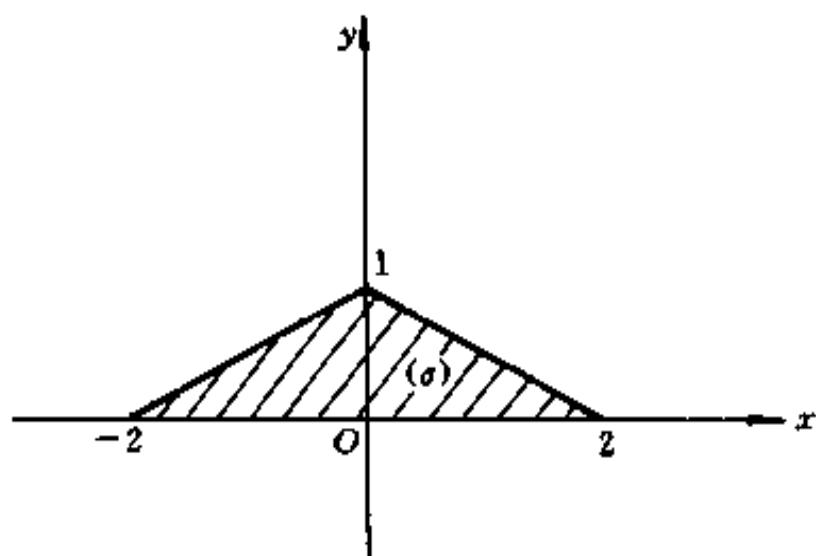


图 2.10

下面, 我们对二重积分化为累次积分的公式(2.2)给出一种粗略的但却更为形象的解释. 在被积函数 $f \in C((\sigma))$ 的条件下, 我们用平行于 x 轴和 y 轴的直线, 分别对积分域 (σ) 进行等距离分割(图 2.11), 所得的子域中除了边缘上一些不规则的以外, 均为矩形, 其面积为 $\Delta\sigma = \Delta x \Delta y$. 在每一小矩形中均取其左下角点 (x, y) 为积分和式中的点. 可以证明(从略), 当 $d \rightarrow 0$ 时, 全部子域上的和式 $\sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta\sigma$ 与仅计算矩形子域上的和式 $\sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta x \Delta y$ 的极限值是相等的, 即

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta\sigma \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

我们把最后的和式极限记作 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy$, 其中 $dx dy$ 称为直角坐标的面积微元.

在上述求和式极限的过程中, 随着 $d \rightarrow 0$, 和式的项数将无限地增加. 为形象化起见, 我们把求和式极限的过程通俗地称为“无限累加”. 设想 $f(x, y)$ 是分布在区域 (σ) 上物质的面密度, 在把每一个子域上的乘积 $f(x, y) \Delta y \Delta x$ 累加时, 先关于 y “无限累加”就相当于先把分布在这些小矩形上的质量分别累加成一些平行于 y 轴的竖长条的质量; 再关于 x “无限累加”相当于把这些竖长条的质量再累加成 (σ) 上的质量. 把 $f(x, y) \Delta y \Delta x$ 关于 y “无限累加”得 $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \Delta x$,

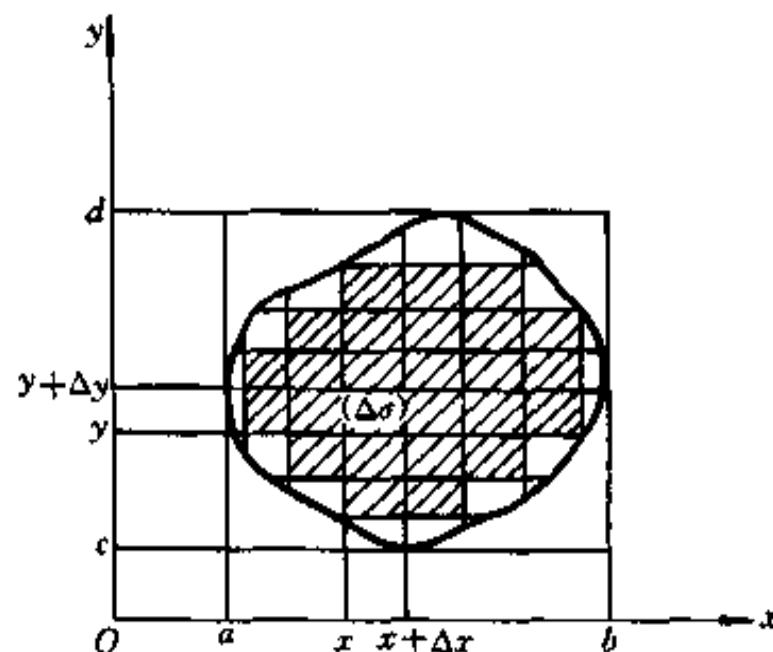


图 2.11

关于 x 再“无限累加”即得

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

类似地,如果先关于 x “无限累加”,再关于 y “无限累加”,便得

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

2.3 极坐标系下二重积分的计算法

在定积分的计算中,常可通过变量变换把一个难算的定积分化为容易计算的。二重积分的计算中也有类似的情形,不过二重积分计算中的困难不仅出现在被积函数上,更多地表现在积分域的形状上。

对于二重积分

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta\sigma,$$

设被积函数在积分域上连续。若积分域 (σ) 与被积函数 $f(x, y)$ 用极坐标表示更为简便,则应考虑将其化为极坐标的二重积分来计算。建立极坐标系让极点与 xOy 直角坐标系的原点重合, x 轴取为极轴。利用直角坐标与极坐标的转换公式

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (2.5)$$

^① 严格说来,只能在区域 $\{(\rho, \varphi) | 0 < \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ 内讨论,但是正如改变被积函数在个别点的值不会影响其可积性也不会改变定积分的值那样,增添或改变被积函数 $u = f(\rho, \varphi)$ 在一点 $\rho = 0$ 和射线 $\varphi = 2\pi$ 上的值对 f 的二重积分也不会发生影响。因此,为方便起见,通常就直接在区域 $\{(\rho, \varphi) | 0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ 上讨论。今后遇到类似情况可同样处理。

把 (σ) 的边界曲线化成极坐标，并将被积函数变换为

$$f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

为了把面积微元 $d\sigma$ 用极坐标表出，我们用极坐标曲线网

$$\rho = \text{常数}, \varphi = \text{常数}$$

来划分积分域 (σ) （图 2.12）。容易看出，规则子域 $(\Delta\sigma)$ 的面积为

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \frac{1}{2}[(\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\varphi - \rho^2 \Delta\varphi] \\ &= \rho \Delta\rho \Delta\varphi + \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \Delta\varphi.\end{aligned}$$

当 $\Delta\rho$ 与 $\Delta\varphi$ 均充分小时，略去高阶项 $\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \Delta\varphi$ ，得

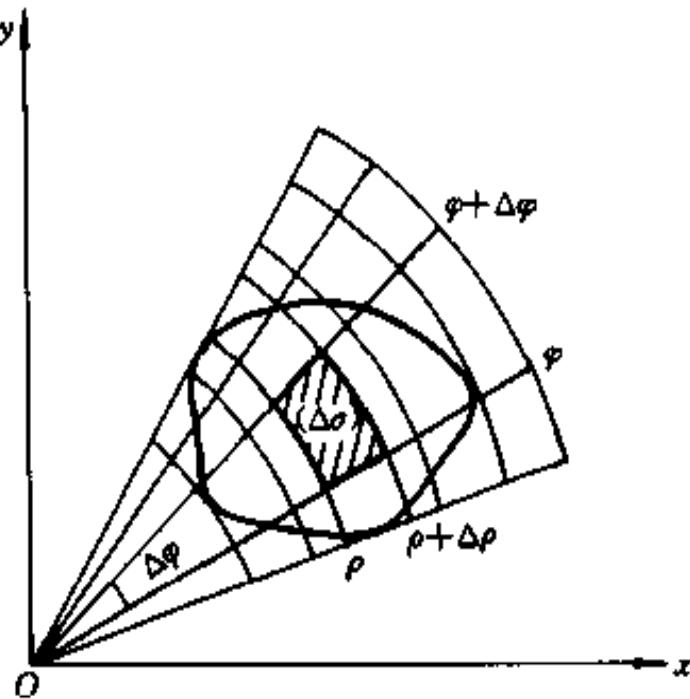


图 2.12

$$\Delta\sigma \approx \rho \Delta\rho \Delta\varphi.$$

从而

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \Delta\rho \Delta\varphi,$$

即

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(\sigma)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (2.6)$$

可见在极坐标系下的面积微元为

$$d\sigma = \rho d\rho d\varphi,$$

而(2.6)式右端的积分就是极坐标系下的二重积分，其中 (σ) 的边界曲线由极坐标方程给出。

为了把极坐标系下的二重积分化成累次积分，我们从映射的观点来理解上述坐标变换。变换(2.5)的逆变换

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (x^2 + y^2 \neq 0) \quad (2.7)$$

把 xOy 直角坐标平面上的积分域 (σ) 映射成 $\varphi O\rho$ 直角坐标平面上的区域 (σ') （图 2.13），而 $\varphi O\rho$ 平面上 $(\Delta\sigma')$ 的原象就是 xOy 平面上的 $(\Delta\sigma)$ ，从而 $(\Delta\sigma')$ 的面积 $\Delta\sigma'$ 近似为

$$\Delta\sigma' \approx \rho d\rho d\varphi.$$

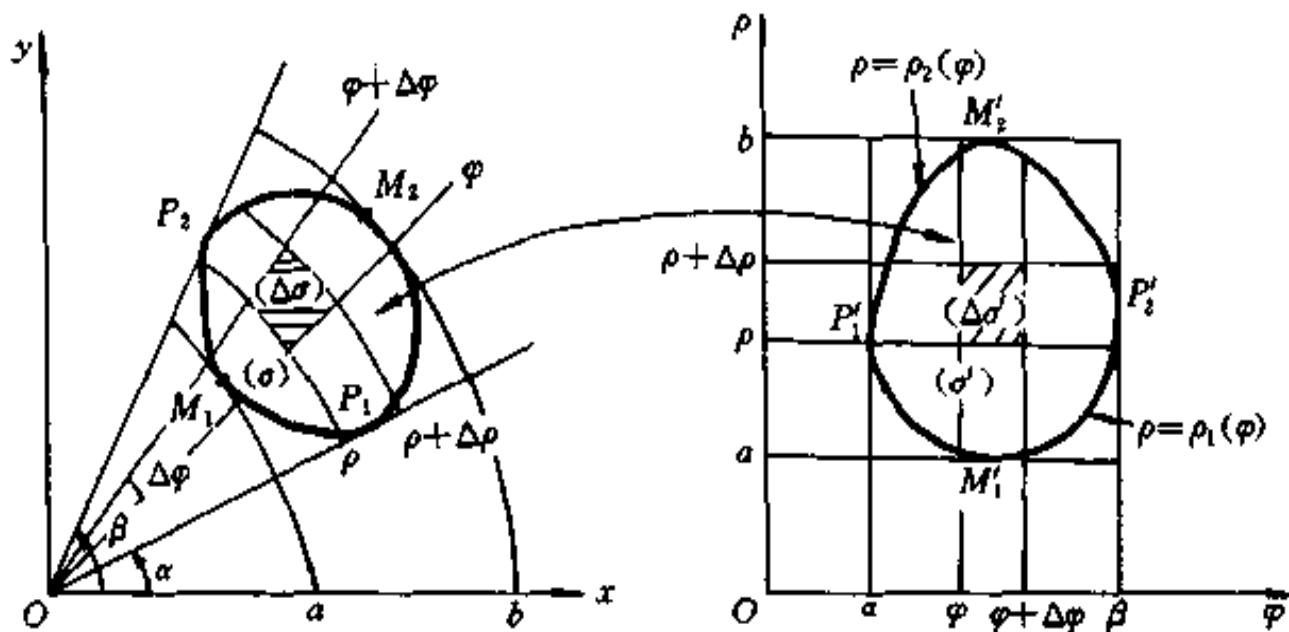


图 2.13

因此,对于(2.6)式右端的二重积分,在 $\varphi O \rho$ 直角坐标平面上来看,就是被积函数 $f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho = F(\rho, \varphi)$ 在积分域 (σ') 上的二重积分. 利用公式(2.2)或(2.4),只需将公式中 x 与 y 分别看成是 φ 与 ρ ,便可将其化成累次积分,即

$$\iint_{(\sigma)} F(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \int_a^b d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) d\rho, \quad (2.8)$$

或

$$\iint_{(\sigma)} F(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \int_a^b d\rho \int_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} F(\rho, \varphi) d\varphi. \quad (2.9)$$

在具体计算时,注意到 $\varphi O \rho$ 平面上的曲线段 $\overrightarrow{P_1 M_1 P_2}$ 与 $\overrightarrow{P_2 M_2 P_1}$ 分别是 xOy 平面上曲线段 $P_1 M_1 P_2$ 与 $P_2 M_2 P_1$ 的象,从而(2.8)式中累次积分的定限也可直接从 xOy 平面上的图形中来确定:用直线 $\varphi = c$ 切割积分域 (σ) ,由 $\varphi = \alpha$ 到 $\varphi = \beta$ 切割完毕. 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上将边界曲线分成了关于 ρ 的两个单值枝 $\rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi)$. 对于任一 $\varphi \in [\alpha, \beta]$, ρ 的变化范围是由 $\rho_1(\varphi)$ 到 $\rho_2(\varphi)$,这就是对 ρ 积分的下限和上限,而 α 与 β 就是对 φ 积分的下限和上限.

将二重积分化成累次积分的公式(2.8)也可在 xOy 平面上作如下理解:求得位于每一 $(\Delta\sigma)$ 上的乘积 $F(\rho, \varphi) d\rho d\varphi$ 后,先沿 ρ 方向“无限累加”,得 $\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) d\rho \Delta\varphi$;再关于 φ “无限累加”,便得 $\int_a^b d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) d\rho$.

公式(2.9)也可类似地处理.

例 2.6 计算 $I = \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 (σ) 为不等式 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ 所确定的区域(图 2.14).

解 把 (σ) 用极坐标表示为 $a \leq \rho \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, 将被积式化为极坐标形

式,根据上述定限方法容易得到

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\sigma)} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \rho^3 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} (b^4 - a^4). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

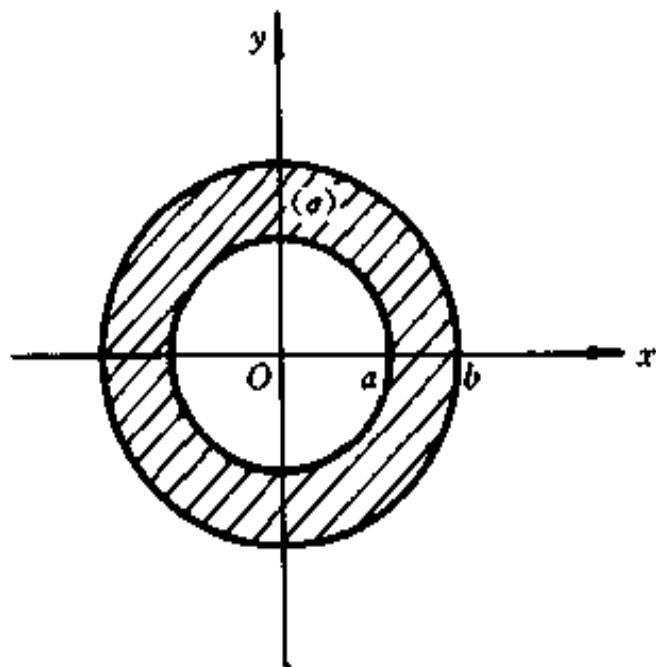


图 2.14

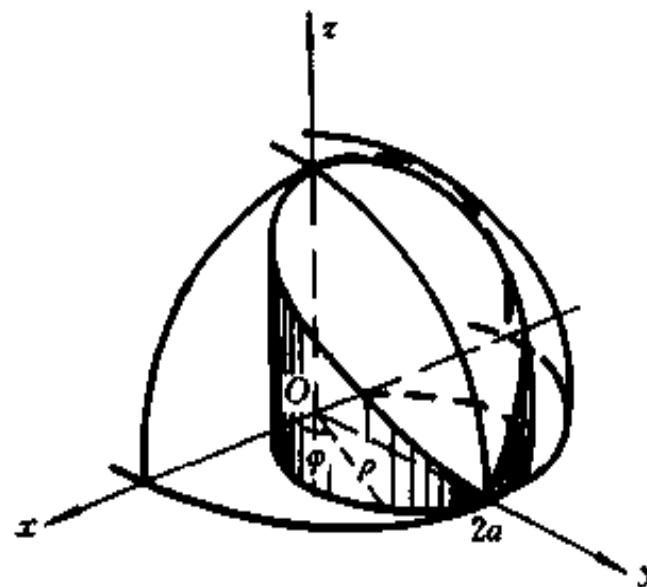


图 2.15

读者不难看出,如果用直角坐标来计算上例中的积分, I 将要麻烦得多.

例 2.7 计算由不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \text{ 与 } x^2 + y^2 \leq 2ay$$

所确定的立体的体积.

解 这两个不等式表示位于球面及柱面内公共部分的立体,其图形在 xOy 平面上方的部分如图 2.15 所示.由对称性可知,所求立体的体积是它在第一卦限中那部分体积的四倍.第一卦限内的这个立体是以球面 $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ 为顶,以 xOy 平面上的半圆域 $(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2ay, x \geq 0\}$ 为底的曲顶柱体,把域 (σ) 用极坐标表示为

$$\left\{ (\rho, \varphi) | 0 \leq \rho \leq 2a \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

(图 2.16).应用公式(2.6)得所求立体的体积为

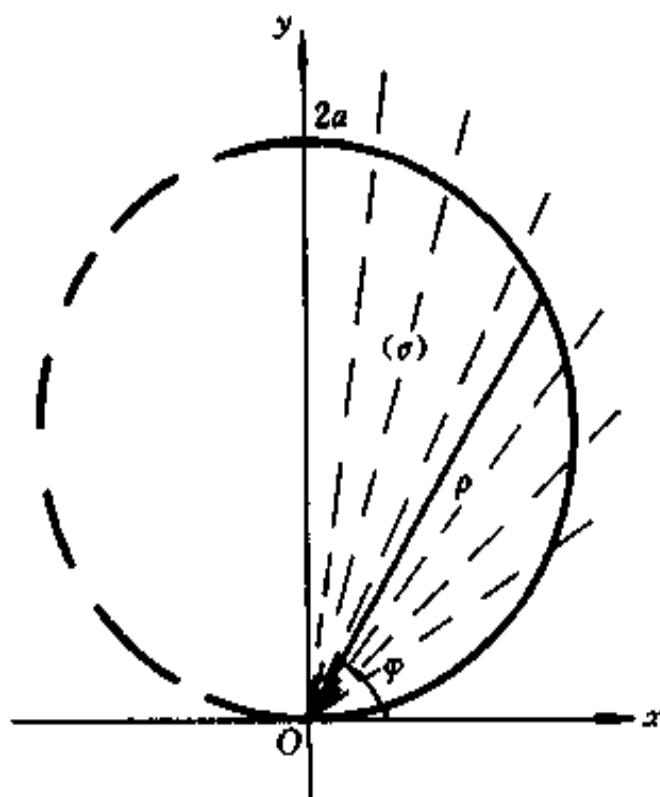


图 2.16

$$V = 4 \iint_{(\sigma)} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} d\sigma = 4 \iint_{(\sigma)} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho d\varphi.$$

为将它化为先对 ρ 后对 φ 积分的累次积分, 用射线 $\varphi = c$ (常数) 切割域 (σ) (图 2.16), 由 $\varphi = 0$ 到 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 切割完毕. 对 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的每一确定的 φ 值, ρ 的变化由 $\rho = 0$ 到 $\rho = 2a \sin \varphi$, 所以有

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \sin \varphi} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3} (4a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2a \sin \varphi} d\varphi \\ &= \frac{32a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 \varphi) d\varphi = \frac{16}{9} a^3 (3\pi - 4). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 2.8 将累次积分

$$I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$$

化成极坐标系中的累次积分.

解 在直角坐标系中 I 的积分域为

$$(\sigma) = \{(x, y) \mid 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 1\},$$

它是由圆弧 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 与直线 $y = 1 - x$ 所围成, 如图 2.17 所示. 它们的极坐标方程分别为

$$\rho = 1 \text{ 与 } \rho = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi},$$

应用与例 2.7 类似的方法可得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\sigma)} f(x^2 + y^2) dy dx \\ &= \iint_{(\sigma)} f(\rho^2) \rho d\rho d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^1 f(\rho^2) \rho d\rho. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

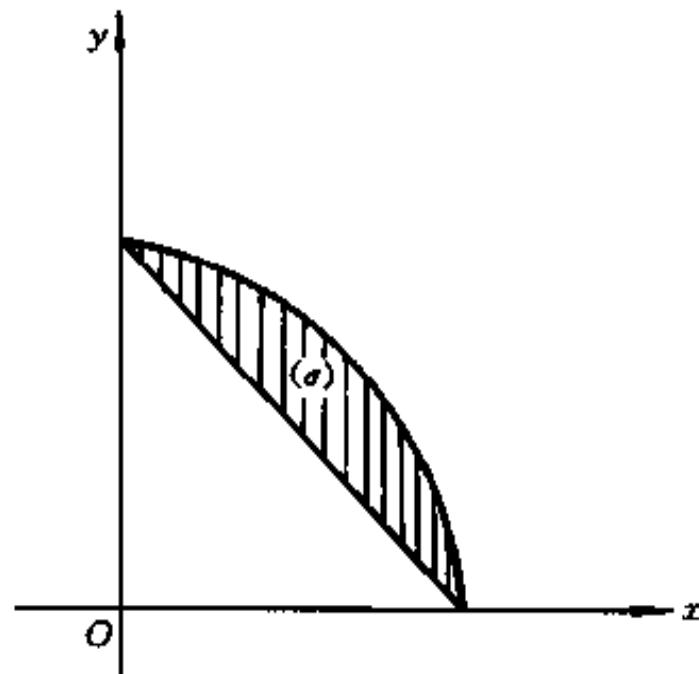


图 2.17

2.4 曲线坐标下二重积分的计算法

在 2.3 段中我们看到, 运用极坐标变换有时可使二重积分的计算简化. 但是, 极坐标变换只是一种特殊的坐标变换. 下面我们介绍在一般的坐标变换下计算二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 的方法.

作变换

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in (\sigma') \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (2.10)$$

其中 $\varphi \in C^{(1)}((\sigma')), \psi \in C^{(1)}((\sigma'))$, 且

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.11)$$

则由隐函数存在定理可知, (2.10) 式在 (x, y) 变化的相应区域 $(\sigma) \subseteq \mathbb{R}^2$ 中唯一地确定了两个连续可微函数

$$u = g(x, y), \quad v = h(x, y), \quad (x, y) \in (\sigma) \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (2.12)$$

从而变换(2.10)与(2.12)在区域 (σ) 与 (σ') 之间建立了一一对应. 在上述变换下, xOy 平面上的点 $M_0(x_0, y_0)$ 既可以用两坐标线 $x = x_0, y = y_0$ 的交点来确定, 也可以用两曲线

$$g(x, y) = u_0, \quad h(x, y) = v_0$$

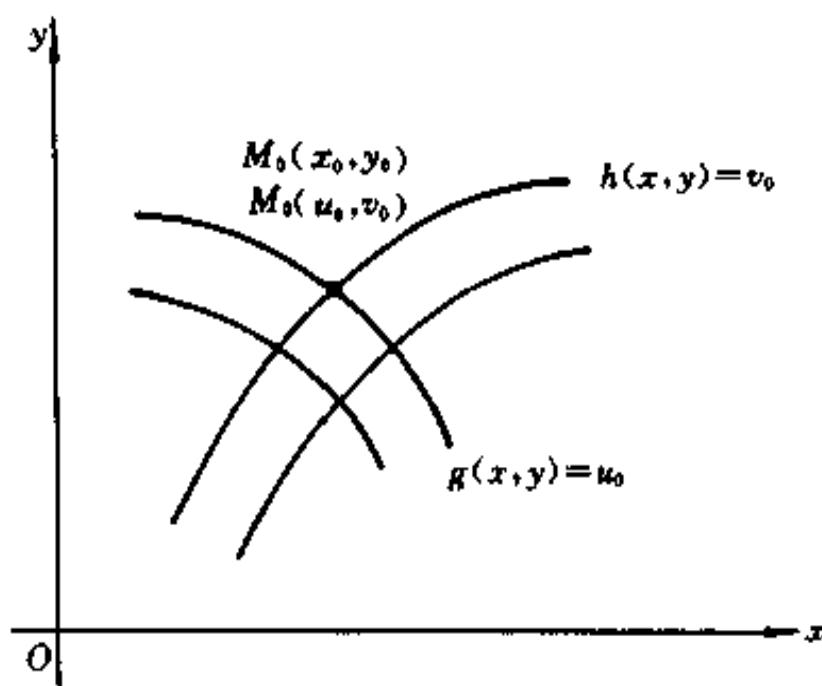


图 2.18

的交点来确定(图 2.18), 其中 $u_0 = g(x_0, y_0), v_0 = h(x_0, y_0), (u_0, v_0)$ 称为点 M_0 的曲线坐标, 曲线族

$$u = g(x, y) = c, \quad v = h(x, y) = c \quad (2.13)$$

称为此曲线坐标的坐标线. 变换(2.10)与(2.12)称为曲线坐标变换.

现在, 我们利用曲线坐标来计算二重积分. 首先利用曲线坐标变换把积分域(σ)的边界曲线方程用曲线坐标表示, 并把被积函数化成曲线坐标形式:

$$f(x, y) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

为了把面积微元 $d\sigma$ 用曲线坐标表示, 类似于极坐标中所用的思想, 用曲线坐标的坐标线来划分 xOy 平面上的积分域(σ)(图 2.19). 设($\Delta\sigma$)的四个顶点的曲线坐标分别为

$$M_1(u, v), \quad M_2(u + \Delta u, v), \quad M_3(u + \Delta u, v + \Delta v), \quad M_4(u, v + \Delta v),$$

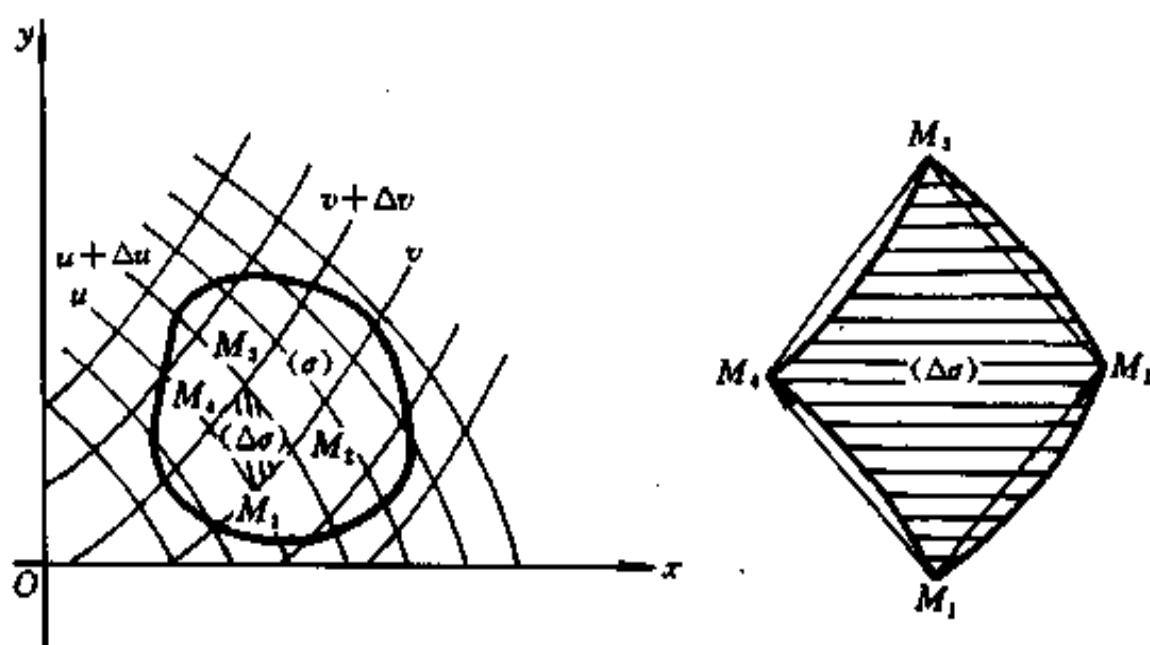


图 2.19

它们所对应的直角坐标分别为

$$M_1(x_1, y_1), \quad M_2(x_2, y_2), \quad M_3(x_3, y_3), \quad M_4(x_4, y_4).$$

在划分很细时, 规则的($\Delta\sigma$)可以近似地看作是以 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_4}$ 为边所构成的平行四边形. 由变换(2.10)可知,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} \\ &= [\varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v)]\mathbf{i} + [\psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v)]\mathbf{j}. \end{aligned}$$

对上式右端向量的两个坐标分别用一元函数的微分去近似替代, 得

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \varphi_u \Delta u \mathbf{i} + \varphi_v \Delta v \mathbf{j}.$$

同理可得

$$\overrightarrow{M_1M_4} = \psi_u \Delta u \mathbf{i} + \psi_v \Delta v \mathbf{j}.$$

于是子域($\Delta\sigma$)的面积 $\Delta\sigma$ 可近似地用 $\|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}\|$ 代替, 即

$$\Delta\sigma = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ \varphi_u \Delta u & \psi_u \Delta u & 0 \\ \varphi_v \Delta v & \psi_v \Delta v & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v,$$

从而

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v,$$

即

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(u,v)} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \quad (2.14)$$

其中

$$d\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

就是曲线坐标下的面积微元, 而 $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ 就是第五章 5.2 段所述的 Jacobi 行列式.

应用把极坐标系下的二重积分化为累次积分的思想, 可以同样地把(2.14)式右端的曲线坐标下的二重积分化为二次积分.

例 2.9 求 $I = \iint_{(\sigma)} (y - x) d\sigma$, 其

中 (σ) 是由直线 $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -\frac{x}{3} + \frac{7}{9}$ 及 $y = -\frac{x}{3} + 5$ 所围成的区域(图 2.20).

解 由于这四条直线交点的坐标分别为

$$A\left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), \quad B\left(\frac{17}{6}, -\frac{1}{6}\right),$$

$$C(6, 3), \quad D(3, 4).$$

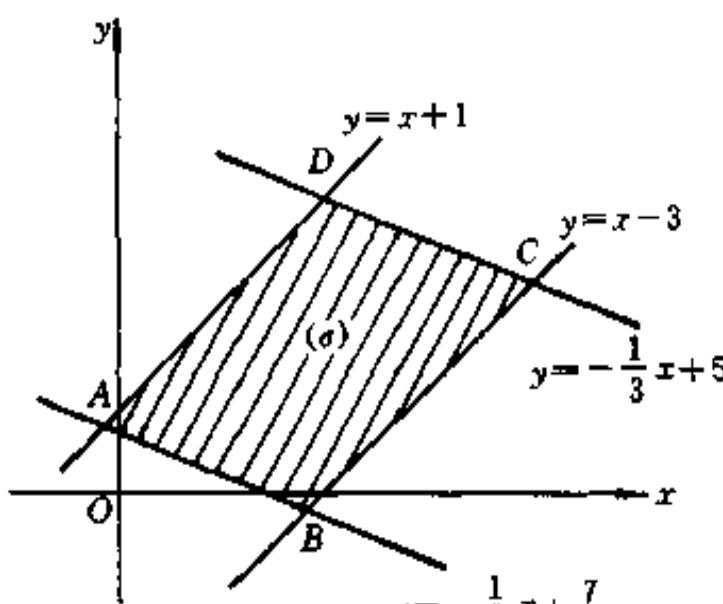


图 2.20

因此, 从图 2.20 中容易看出, 不论先对 y 积分还是先对 x 积分, 都必须把积分域(σ)分成三个子域, 这显然比较麻烦, 现在我们使用曲线坐标.

由于积分域(σ)的边界是由直线族 $y - x = c_1$ 中的两条直线(对应于 $c_1 = 1$

与 $c_1 = -3$ 以及直线族 $y + \frac{1}{3}x = c_2$ 中的两条直线(对应于 $c_2 = \frac{7}{9}$ 与 $c_2 = 5$)所围成, 启发我们去作变换

$$u = y - x, \quad v = y + \frac{1}{3}x, \quad (2.15)$$

或

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v, \quad y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v.$$

这时

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4}.$$

于是, 由公式(2.14)可得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\sigma)} (y - x) d\sigma = \iint_{(\sigma)} \left[\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \right) \right] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \frac{3}{4} \iint_{(\sigma)} u du dv. \end{aligned}$$

在 xOy 平面上, 先沿 $u = y - x = c$ 积分, 再沿 $v = y + \frac{1}{3}x = c$ 积分, 得

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{4} \iint_{(\sigma)} u du dv = \frac{3}{4} \int_{\frac{7}{9}}^5 dv \int_{-3}^1 u du \\ &= -\frac{38}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

从映射的观点来看, 映射(2.15)把 xOy 直角坐标平面上的积分域 (σ) (图 2.20)映射到 uOv 直角坐标平面上的区域 (σ') (图 2.21):

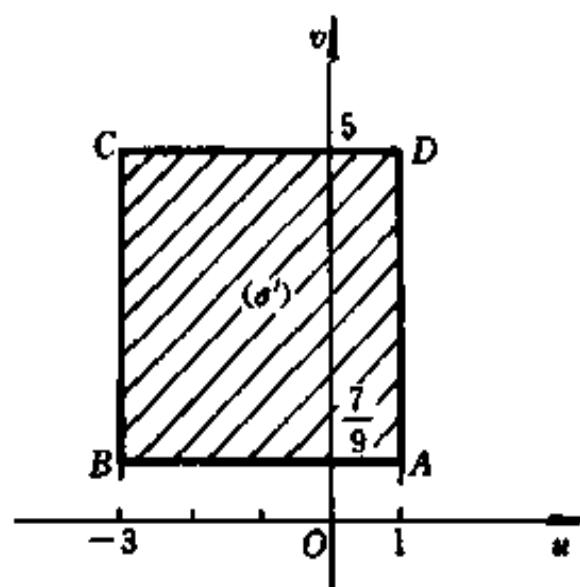


图 2.21

于是, 把 x 与 y 分别换成 u 与 v , 在 uOv 直角坐标平面上应用公式(2.2)得

$$I = \iint_{(\sigma')} \frac{3}{4} u du dv = \frac{3}{4} \int_{\frac{7}{9}}^5 dv \int_{-3}^1 u du = -\frac{38}{3}.$$

例 2.10 计算 $\iint_{(\sigma)} \sqrt{xy} d\sigma$, 其中 (σ) 为由曲线 $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ ($x > 0, y > 0$) 所围成的区域.

解 由图 2.22 可见,如果我们用直角坐标直接计算此积分,必须将积分域 (σ) 分成三个子域来进行,比较麻烦. 为了使所给积分容易计算,我们采用曲线坐标变换:

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}, \quad (2.16)$$

在此变换下 (σ) 的边界曲线变成了

$$u = 1, \quad u = 2, \quad v = 1, \quad v = 4.$$

为了求得积分微元的变换式,我们不必去求(2.16)式的逆变换,而先求出

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 \frac{y}{x},$$

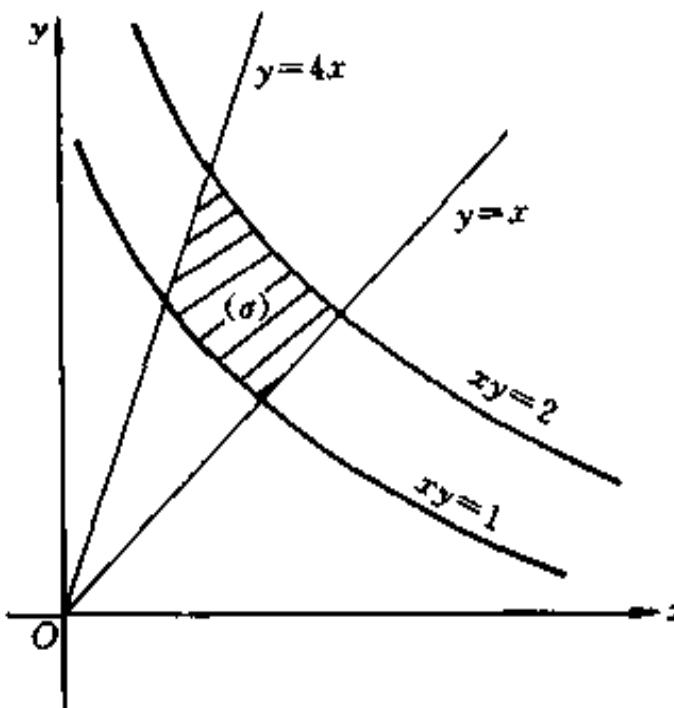


图 2.22

再由第五章公式(5.15)可得

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{2v},$$

从而由(2.14)式得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} \sqrt{xy} d\sigma &= \iint_{(\sigma)} \sqrt{u} \frac{1}{2v} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{v} dv \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \ln 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 2.11 计算 $I = \iint_{(\sigma)} x^2 d\sigma$, 其中 (σ) 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的内部.

解 由于积分域是椭圆,如果采用极坐标变换,积分域的边界曲线方程变得比较复杂,使积分难以计算. 为简化积分域的边界曲线方程,我们运用曲线坐标变换

$$\frac{x^2}{4} = \rho^2 \cos^2 \varphi, \quad \frac{y^2}{9} = \rho^2 \sin^2 \varphi,$$

即 $x = 2\rho \cos \varphi, \quad y = 3\rho \sin \varphi, \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$

所给椭圆方程变为 $\rho = 1$, 面积微元 $d\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| d\rho d\varphi = 6\rho d\rho d\varphi$, 从而

$$I = \iint_{(\sigma)} 4\rho^2 \cos^2 \varphi \cdot 6\rho d\rho d\varphi = 24 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \varphi d\rho d\varphi = 6 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = 6\pi. \quad \blacksquare$$

形如例 2.11 中所用的变换

$$x = a\rho\cos\varphi, \quad y = b\rho\sin\varphi \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

称为广义极坐标变换. 容易看出, 在此变换下, 面积微元 $d\sigma = ab\rho d\rho d\varphi$.

当 $a = b = 1$ 时, 广义极坐标变换就是极坐标变换. 这时通过 Jacobi 行列式算得的面积微元就是 $d\sigma = \rho d\rho d\varphi$, 与 2.3 段中所得一致.

习题 6.2

(A)

1. 设有一母线平行于 z 轴的柱体, 它与 xOy 平面的交线为一闭曲线, 此闭曲线所围区域为 (σ) , 柱体的顶部和底部分别由曲面 $z = f_2(x, y)$ 与 $z = f_1(x, y)$ 构成. 试用二重积分表示此柱体的体积.

2. 试用二重积分的几何意义说明:

(1) $\iint_{(\sigma)} k d\sigma = k\sigma$, $k \in \mathbb{R}$ 为常数, σ 表示区域 (σ) 的面积;

(2) $\iint_{(\sigma)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \frac{2}{3}\pi R^3$, (σ) 是以原点为中心, 半径为 R 的圆;

(3) 若积分域关于 y 轴对称, 则:

i) 当 $f(x, y)$ 是 x 的奇函数时, 二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 0$;

ii) 当 $f(x, y)$ 是 x 的偶函数时, 有

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) d\sigma,$$

其中 (σ_1) 为 (σ) 在右半平面 $x \geq 0$ 中的部分区域;

(4) 若积分域关于 x 轴对称, 被积函数 $f(x, y)$ 分别满足什么条件时有

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 0, \quad \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) d\sigma,$$

其中 (σ_1) 为 (σ) 在上半平面 $y \geq 0$ 中的部分区域.

3. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_{(\sigma)} x^2 y d\sigma$, (σ) 是由 $x = 0, y = 1$ 与 $x = \sqrt{y}$ 所围成的区域;

(2) $\iint_{(\sigma)} \frac{x^2}{y} d\sigma$, (σ) 是由 $xy = 1, y = x$ 与 $x = 2$ 所围成的区域;

(3) $\iint_{(\sigma)} xy d\sigma$, $(\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x \leq 1\}$;

(4) $\iint_{(\sigma)} (x + y)^2 d\sigma$, (σ) 是由 $|x| + |y| = 1$ 所围成的区域;

$$(5) \iint_{(\sigma)} \frac{x}{y} \sqrt{1 - \sin^2 y} d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) | -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{3y}, \frac{\pi}{2} \leq y \leq 2\pi\};$$

$$(6) \iint_{(\sigma)} e^{-y^2} d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

4. 把二重积分 $I = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 在直角坐标系中分别以两种不同的次序化为累次积分, 其中 (σ) 为:

$$(1) \{(x, y) | y^2 \leq x, x + y \leq 2\};$$

(2) $x = \sqrt{y}$, $y = x - 1$, $y = 0$ 与 $y = 1$ 所围成的区域.

5. 交换下列累次积分的顺序:

$$(1) \int_{-1}^1 dx \int_{x^2+x}^{x+1} f(x, y) dy;$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^2 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_2^{\sqrt{8}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{2y^2} f(x, y) dx.$$

6. 利用极坐标计算下列二重积分:

$$(1) \iint_{(\sigma)} e^{x^2+y^2} d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}, \text{其中 } a > 0, b > 0;$$

$$(2) \iint_{(\sigma)} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) | 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(3) \iint_{(\sigma)} (x + y)^2 d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) | (x^2 + y^2)^2 \leq 2a(x^2 - y^2), (a > 0)\}.$$

7. 利用适当的变量代换计算下列二重积分:

$$(1) \iint_{(\sigma)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} d\sigma, (\sigma) = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \text{其中 } a > 0, b > 0;$$

$$(2) \iint_{(\sigma)} e^{x+y} d\sigma, (\sigma) \text{是以}(0,0),(1,0)\text{和}(0,1)\text{为顶点的三角形内部.}$$

8. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_{(\sigma)} \sqrt{|y - x^2|} d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) | |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\};$$

$$(2) \iint_{(\sigma)} (x + y) d\sigma, (\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x + y\};$$

$$(3) \iint_{(\sigma)} y^2 d\sigma, (\sigma) \text{是 } x \text{ 轴与摆线的一拱 } \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0) \text{ 所围成的区域.}$$

9. 计算累次积分:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^x dx.$$

10. 求下列各组曲线所围成图形的面积:

$$(1) xy = a^2, x + y = \frac{5}{2}a (a > 0);$$

$$(2) (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 = a^2, (x^2 + y^2 \geq a^2, a > 0);$$

$$(3) \rho = a(1 + \sin\varphi) \quad (a \geq 0).$$

11. 求下列各组曲面所围成立体的体积:

$$(1) z = x^2 + y^2, x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0;$$

$$(2) z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 2ax (a > 0), z = 0;$$

$$(3) x^2 + y^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 \quad (a > 0);$$

$$(4) z = xy, z = 0, x + y = 1.$$

12. 一金属叶片,形如心脏线 $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. 如果它在任一点的密度与原点到该点的距离成正比,求它的全部质量.

13. 穿过半径为 4 cm 的铜球的中心,钻一个半径为 1 cm 的圆孔,问损失掉的铜的体积是多少?

(B)

1. 设 $f(x, y) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, $F(t) = \iint_{x+y \leq t} f(x, y) d\sigma$, 求 $F(t)$.

2. 计算 $\iint_{(\sigma)} x[1 + yf(x^2 + y^2)] d\sigma$, 其中 (σ) 是由 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 所围成的区域, $f(x^2 + y^2)$ 是 (σ) 上的连续函数.

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(y) dy$.

4. 证明 Dirichlet 公式 $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx (a > 0)$, 并由此证明 $\int_0^a dy \int_0^y f(x) dx = \int_0^a (a - x) f(x) dx$, 其中 f 连续.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 试利用二重积分证明:

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b - a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

6. 试求曲线 $(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1 (a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0)$ 所围图形的面积.

7. 求抛物面 $z = 1 + x^2 + y^2$ 的一个切平面, 使得它与该抛物面及圆柱面 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 围成的体积最小. 试写出切平面方程并求出最小的体积.

8. 设 $f(t)$ 是连续的奇函数, 试利用适当的正交变换证明 $\iint_{(\sigma)} f(ax + by + c) d\sigma = 0$, 其中 (σ) 关于直线 $ax + by + c = 0$ 对称, 且 $a^2 + b^2 \neq 0$.

9. 设有一半径为 R , 高为 H 的圆柱形容器, 盛有 $\frac{2}{3}H$ 高的水, 放在离心机上高速旋转. 因受离心力的作用, 水面呈抛物面形状, 问当水刚要溢出容器时, 水面的最低点在何处?

第三节 三重积分的计算

3.1 化三重积分为单积分与二重积分的累次积分

在第一节中我们已知道,三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在空间区域(V)上的三重积分就是下列和式极限:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k.$$

而且当 $f \in C((V))$ 时,其三重积分一定存在,今后我们总假定被积函数 $f \in C((V))$.

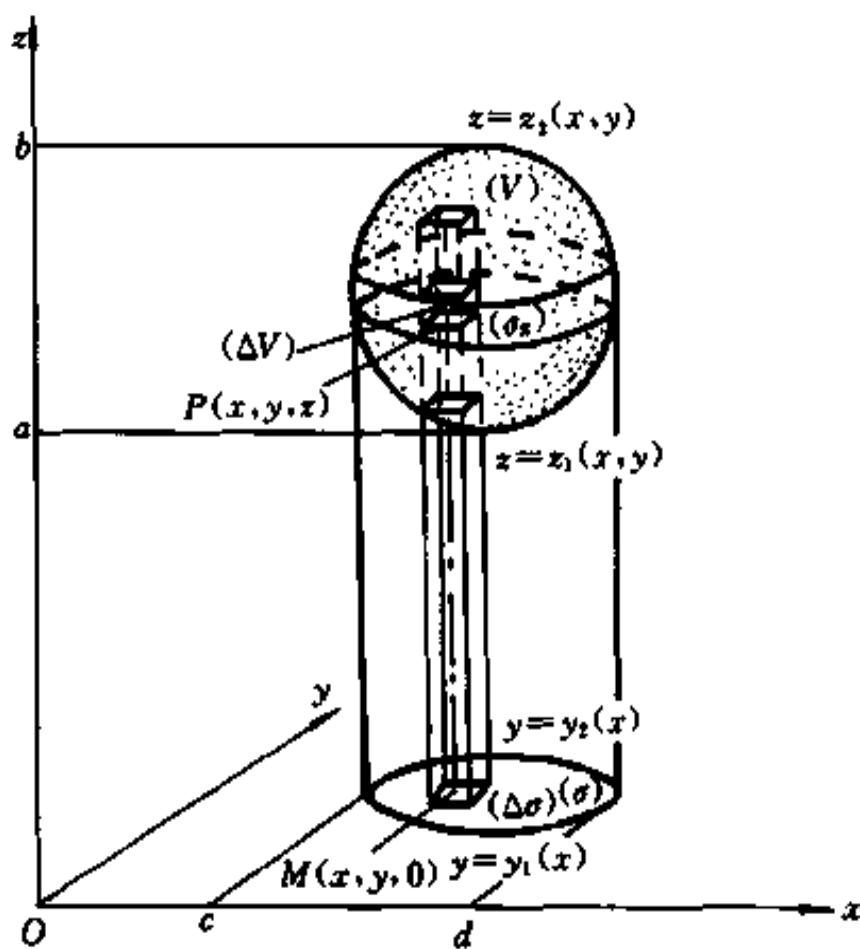


图 3.1

设积分域 $(V) = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in (\sigma) \subseteq \mathbb{R}^2\}$, 其中 $z_1 \in C((\sigma))$, $z_2 \in C((\sigma))$, (σ) 是 (V) 在 xOy 平面上的投影区域(图 3.1).

我们已经知道单(定)积分和二重积分的计算法,因此,如果能把三重积分化成单积分和二重积分的累次积分,它的计算问题也就得到了解决.为此,先把 (V) 在 xOy 平面上的投影区域 (σ) 分成若干子域 $(\Delta\sigma)$,以每一子域 $(\Delta\sigma)$ 的边界曲线为准线,作母线平行于 z 轴的柱面把域 (V) 分割成了若干竖长条,再用平行于 xOy 平面的平面把这些竖长条切割成若干小柱台(图 3.1),于是这些小柱

台(ΔV)的体积为

$$\Delta V = \Delta z \Delta \sigma.$$

在(ΔV)内任取一点 $P(x, y, z)$, 它在 xOy 平面的投影点 $M(x, y)$ 必在($\Delta\sigma$)内, 于是由三重积分定义可知,

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(V)} f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma.$$

如果我们在把乘积项 $f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma$ “无限累加”时, 先固定(x, y)和 $\Delta \sigma$, 沿竖长条(即 z 轴方向)进行, 并把相同的公因式 $\Delta \sigma$ 提出, 然后再把(σ)上各竖长条中求得的和“无限累加”, 那末便有

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(V)} f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma = \lim_{d' \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} \left(\lim_{\max \Delta z \rightarrow 0} \sum_z f(x, y, z) \Delta z \right) \Delta \sigma,$$

其中 d' 是各($\Delta\sigma$)的直径中最大者, 由定积分与二重积分的概念知

$$\lim_{\max \Delta z \rightarrow 0} \sum_z f(x, y, z) \Delta z = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x, y),$$

$$\lim_{d' \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} \Phi(x, y) \Delta \sigma = \iint_{(\sigma)} \Phi(x, y) d\sigma,$$

于是得

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{(\sigma)} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma. \quad (3.1)$$

这样, 就把三重积分化成了单积分与二重积分的累次积分, 这种积分顺序简称为“先单后重”.

在计算(3.1)式中内层的定积分时, x 与 y 视为常数, 积分变量是 z . 求出原函数后根据 Newton-Leibniz 公式, 把 z 用上下限代入, 从而得到一个二元函数 $\Phi(x, y)$, 然后再按第二节中所讲的方法

计算二重积分 $\iint_{(\sigma)} \Phi(x, y) d\sigma$.

例 3.1 计算 $I = \iiint_V xyz dV$, 其中(V)由坐标面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 和平面 $x + y + z = 1$ 所围成.

解 首先画出积分域(V)的草图如图 3.2 所示. 容易看出(V)在 xOy 平面

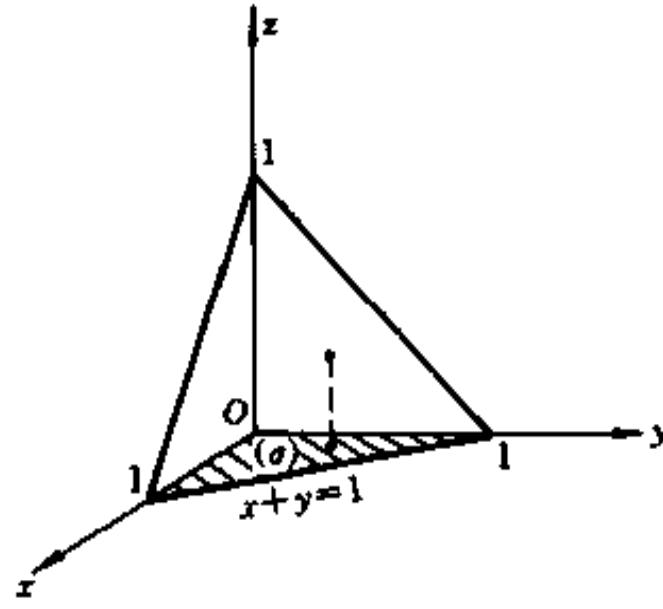


图 3.2

上的投影区域(σ)为三角形区域:

$$(\sigma) = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

于是由(3.1)式得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\sigma)} \left[\int_0^{1-x-y} xyz dz \right] d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} xyz^2 \Big|_0^{1-x-y} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} xy(1-x-y)^2 d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dy \\ &= \frac{1}{720}. \end{aligned}$$

这个三重积分也可以先化成三个单积分的累次积分后再逐步计算:

$$I = \iint_{(\sigma)} \left[\int_0^{1-x-y} xyz dz \right] d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz. \blacksquare$$

例 3.2 计算 $I = \iiint_V z dV$, 其中(V)是以原点为中心, R 为半径的上半球体.

解 因为 $(V) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$, 它在 xOy 平面上的投影区域(σ) $= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. 于是

$$I = \iint_{(\sigma)} \left[\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} z dz \right] d\sigma = \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} (R^2 - x^2 - y^2) d\sigma.$$

对这个二重积分, 显然用极坐标计算比较方便, 从而

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} (R^2 - \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - \rho^2) \rho d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) d\varphi = \frac{\pi R^4}{4}. \blacksquare \end{aligned}$$

如果我们把积分域(V)被平行于 xOy 平面所截出的平面区域记作(σ_z), 并将 z 的变化范围设为 $[a, b]$. 由三重积分定义, 在“无限累加”乘积项 $f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma$ 时, 先固定 z 和 Δz , 在以(σ_z)为底、厚度为 Δz 的薄层上“无限累加”, 把公因式 Δz 提出; 然后再在区间 $[a, b]$ 上把各薄层所求得的和“无限累加”, 那末便有

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{(V)} f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma = \lim_{\max \Delta z \rightarrow 0} \sum_{\tau} \left(\lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \sum_{(\sigma_z)} f(x, y, z) \Delta \sigma \right) \Delta z.$$

于是得

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \left[\iint_{(\sigma_z)} f(x, y, z) d\sigma \right] dz, \quad (3.2)$$

这种积分顺序简称为“先重后单”.

例 3.3 计算

$$I = \iiint_V z^2 dV, (V) = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

解 为计算方便, 我们采用先重后单的积分顺序, 利用(3.2)式得

$$I = \int_{-c}^c \left[\iint_{(\sigma_z)} z^2 d\sigma \right] dz = \int_{-c}^c \left(z^2 \iint_{(\sigma_z)} d\sigma \right) dz,$$

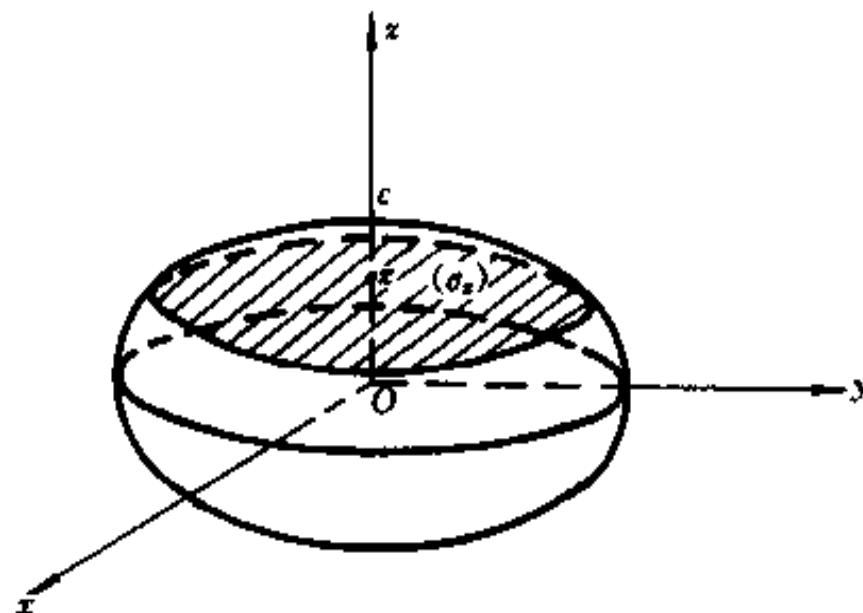


图 3.3

其中 (σ_z) 为椭球被平行于 xOy 平面的平面所截出的截面(图 3.3), 它就是平面 $z = z$ 上的椭圆域

$$(\sigma_z) = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} \leq 1, |z| \leq c \right\}.$$

由于椭圆域 (σ_z) 的面积为

$$\iint_{(\sigma_z)} d\sigma = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

所以

$$I = \int_{-c}^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z^2 dz = \frac{4}{15} \pi abc^3. \blacksquare$$

3.2 柱面与球面坐标下三重积分的计算法

曲线坐标下的三重积分 与二重积分一样,三重积分也有换元法.对于在 $Oxyz$ 直角坐标系下给出的三重积分 $\iiint_V f(x, y, z) dV$, 作变换

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w), \\ (u, v, w) &\in (V') \subseteq \mathbf{R}^3, \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 φ, ψ, χ 均是 $C^{(1)}((V'))$ 类函数.若 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.4)$$

则由隐函数存在定理,(3.3)式在 (x, y, z) 变化的相应区域 $(V) \subseteq \mathbf{R}^3$ 中唯一确定了一组连续可微的单值函数

$$u = l(x, y, z), v = m(x, y, z), w = n(x, y, z), (x, y, z) \in (V). \quad (3.5)$$

这样一来,在 $Oxyz$ 直角坐标空间中,点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 也可以用三片曲面

$$\begin{aligned} l(x, y, z) &= l(x_0, y_0, z_0) = u_0, \quad m(x, y, z) = m(x_0, y_0, z_0) = v_0, \\ n(x, y, z) &= n(x_0, y_0, z_0) = w_0 \end{aligned}$$

的交点来确定, (u_0, v_0, w_0) 称为空间点 P_0 的曲线坐标.

用曲面族

$$u = l(x, y, z) = c, v = m(x, y, z) = c, w = n(x, y, z) = c$$

来划分积分域 (V) , 像二重积分一样, 可以证明(从略), 当条件(3.4)成立时, 在变换(3.3)下, 体积微元 dV 变为

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \quad (3.6)$$

从而

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dV &= \\ \iiint_V f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中积分域 (V) 的边界曲面由曲线坐标表示.(3.7)式右端的积分称为曲线坐标

下的三重积分，可以仿照二重积分化为累次积分的思想，把它化成累次（三次）积分。

正像极坐标是常见而且重要的一种平面曲线坐标那样，空间曲线坐标，也有两种常见的重要类型，我们分述如下。

柱面坐标下三重积分的计算法 作变换

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z \quad (\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty), \text{①} \quad (3.8)$$

由于

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho, \quad (3.9)$$

从而当 $\rho \neq 0$ 时有逆变换

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad y = z.$$

于是空间中点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 也可用坐标 (ρ_0, φ_0, z_0) 表示，其中 $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\varphi_0 = \arctan \frac{y_0}{x_0}$. 它是圆柱面 $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ (即 $\rho = \rho_0$)，过 z 轴且对 xOz 平面的转角为 $\varphi = \varphi_0$ 的半平面 $\frac{y}{x} = \tan \varphi_0$ (即 $\varphi = \varphi_0$)，以及平面 $z = z_0$ 的交点，称为点 P_0 的柱面坐标(图 3.4).

用曲面族

$$\rho = c, \quad \varphi = c, \quad z = c$$

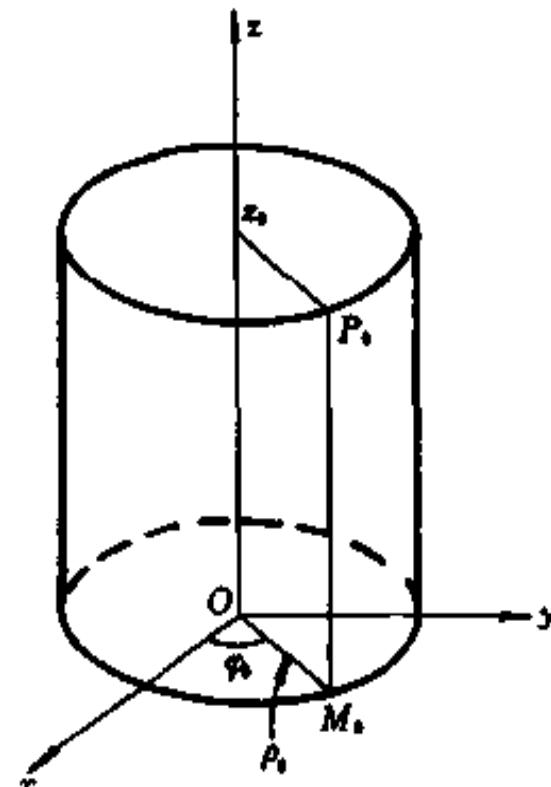


图 3.4

划分积分域(V)，由(3.6)与(3.9)式可知，柱面坐标下的体积微元为

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz,$$

从而

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz, \quad (3.10)$$

① 参见公式(2.5)的脚注。

其中(V)的边界曲面由柱面坐标表示.

如果积分域(V)在 xOy 平面上的投影区域为(σ),且(V)的边界曲面可关于 z 被分成两个单值曲面 $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, $(x, y) \in (\sigma)$,如图3.1所示,那末把(3.10)式右端的三重积分化成对 z 的定积分与关于(σ)的二重积分的累次积分得

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz \\ &= \iint_{(\sigma)} \rho d\rho d\varphi \int_{z_1(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}^{z_2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz. \end{aligned}$$

可见,在柱面坐标下计算三重积分,实际上就是先对 z 求定积分后再在(σ)上用极坐标计算二重积分.

例3.4 把三重积分 $I = \iiint_V f(x, y, z) dV$ 化为柱面坐标下的累次积分,

其中(V)由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 及平面 $z = 0$ 所围成.

解 容易看出,围成(V)的侧面为柱面 $x^2 + y^2 = 2x$,区域(V)在 xOy 平面上的投影区域为(σ)= $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$ (图3.5).利用直角坐标和柱面坐标的关系式(3.8)把域(V)的边界曲面方程化成柱面坐标得

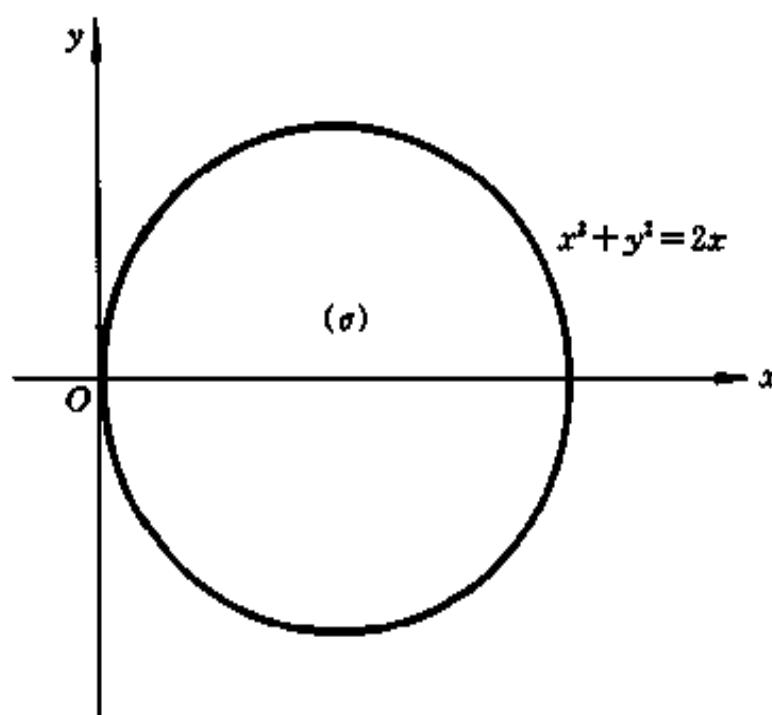


图 3.5

$$z = \rho, \quad \rho = 2 \cos \varphi, \quad z = 0,$$

因而

$$I = \iint_{(\sigma)} \rho d\rho d\varphi \int_0^\rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz.$$

再把域(σ)用极坐标表示为

$$\rho \leqslant 2\cos\varphi, -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

于是

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho \int_0^\rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) dz.$$

例 3.5 计算 $I = \iiint_V z dV$, 其中(V)由曲面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 与 $x^2 + y^2 = 3z$ 所围成.

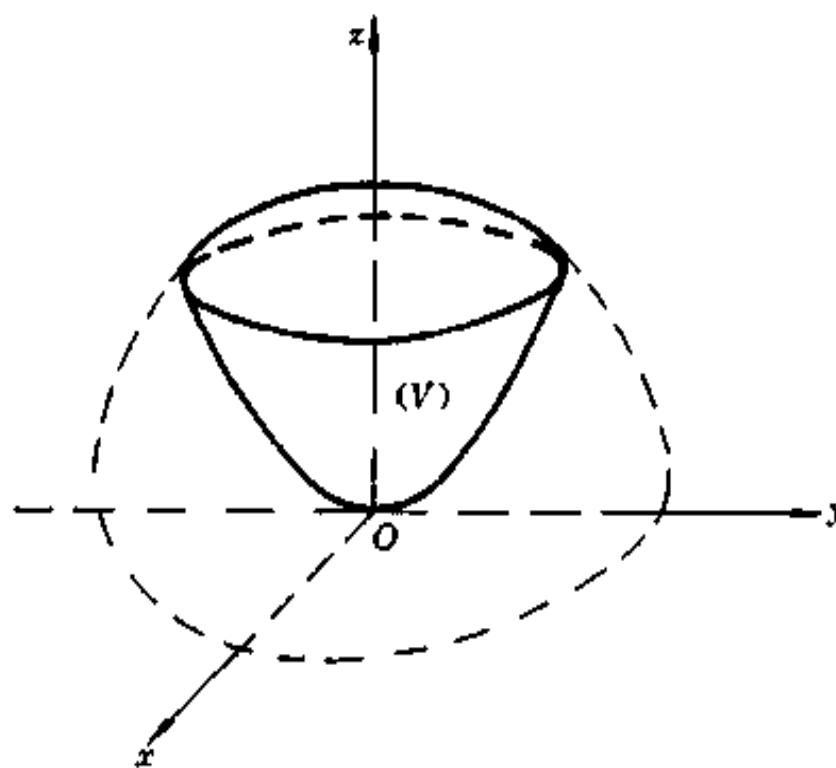


图 3.6

解 积分域(V)如图 3.6 所示. 为求两曲面的交线, 解方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = 3z, \end{cases}$$

得 $z = 1$, 从而交线方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ z = 1. \end{cases}$ 域(V)在 xOy 平面上的投影区域为圆域 $(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 3\}$, 因此用柱面坐标计算比较方便. 将(V)的边界曲面方程化为柱面坐标得

$$z = \sqrt{4 - \rho^2}, \rho^2 = 3z,$$

于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V z\rho dz d\rho d\varphi = \iint_{(s)} \rho d\rho d\varphi \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(\frac{4-\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{18} \right) d\rho \\
 &= \frac{13\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

球面坐标下三重积分的计算法

空间中的点 $P(x, y, z)$ 还可以用以下三个曲面的交点来表示: 半径为 r 的球面, 顶点在原点 O 、对称轴为 z 轴且半顶角为 θ 的圆锥面, 通过 z 轴且对 xOz 坐标平面的转角为 φ 的半平面(图 3.7). 数组 (r, θ, φ) 称为点 P 的球面坐标. 由图 3.7 易见, 直角坐标到球面坐标的变换公式为

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\
 y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\
 z &= r \cos \theta
 \end{aligned}$$

$(r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. ^①

(3.11)

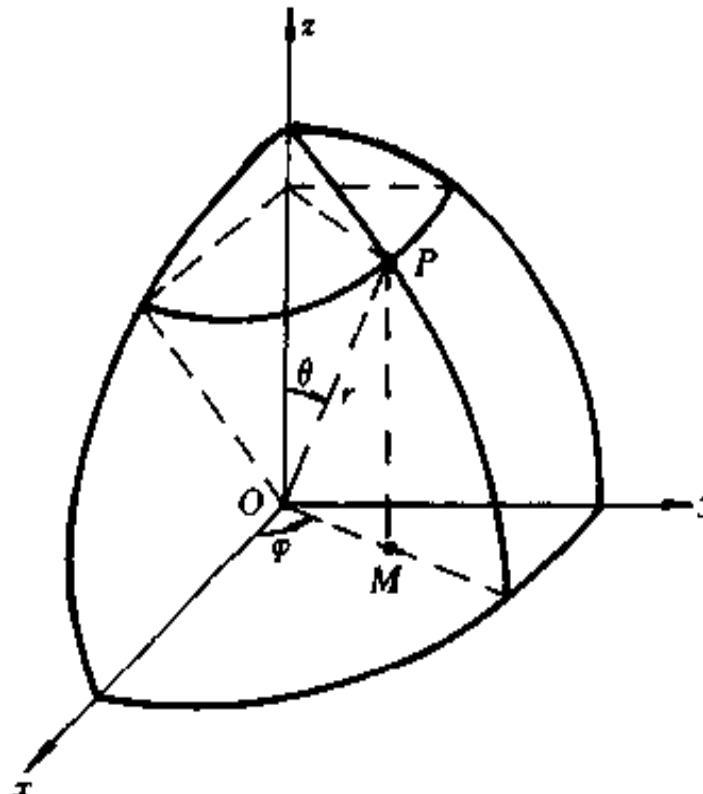


图 3.7

容易看出, 如果把 r 固定, 那末(3.11)式就是第五章例 6.6 所建立的半径为 r 的球面的参数方程.

用曲面族

$$r = c, \theta = c, \varphi = c$$

划分积分域(V), 由于

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta,$$

由(3.6)与(3.7)式可知, 在球面坐标下的体积微元为

^① 参看公式(2.5)的脚注

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi, \quad (3.12)$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV =$$

$$\iiint_V f(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi, \quad (3.13)$$

其中 (V) 的边界曲面由球面坐标表示.

实际上, 球面坐标下的体积微元(3.12)也可以利用图 3.8, 从几何上直接得到.

为了把(3.13)右端的三重积分化成累次积分, 我们在把诸子域上的乘积项 $f(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) r^2 \sin\theta$ “无限累加”时, 先固定 $\theta, \varphi, \Delta\theta, \Delta\varphi$, 沿 r 方向“无限累加”, 把公因式 $\Delta\theta\Delta\varphi$ 提出; 然后固定 φ 与 $\Delta\varphi$, 把各锥形条上“无限累加”所得的结果沿 θ 方向“无限累加”, 把公因式 $\Delta\varphi$ 提出, 这样就在各“橘瓣”形上得到结果; 最后再把这些结果沿 φ 方向“无限累加”. 这样, 就把(3.13)式右端的三重积分化成了先对 r 、后对 θ 再对 φ 的累次(三次)积分.

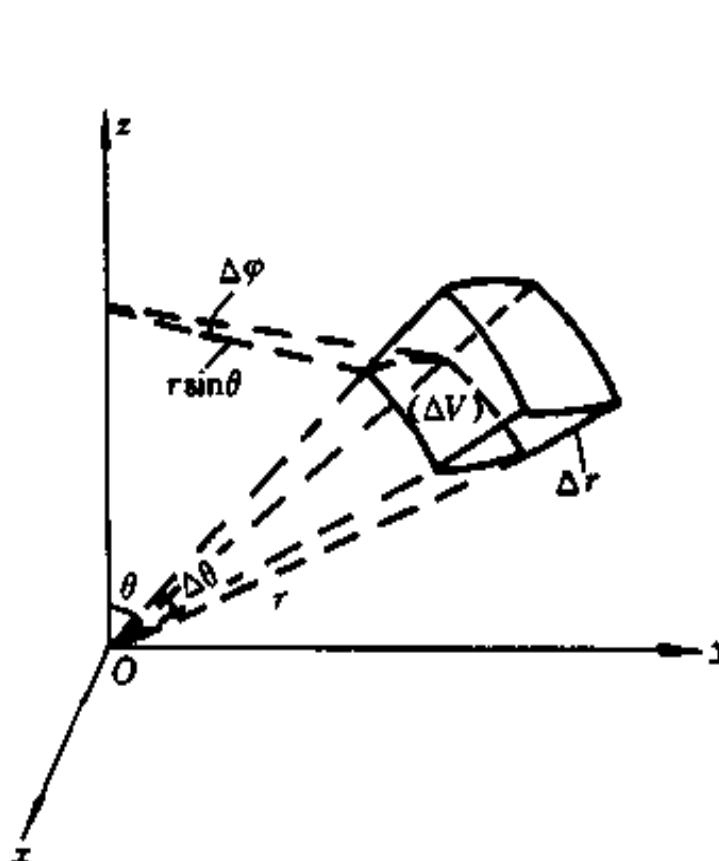


图 3.8

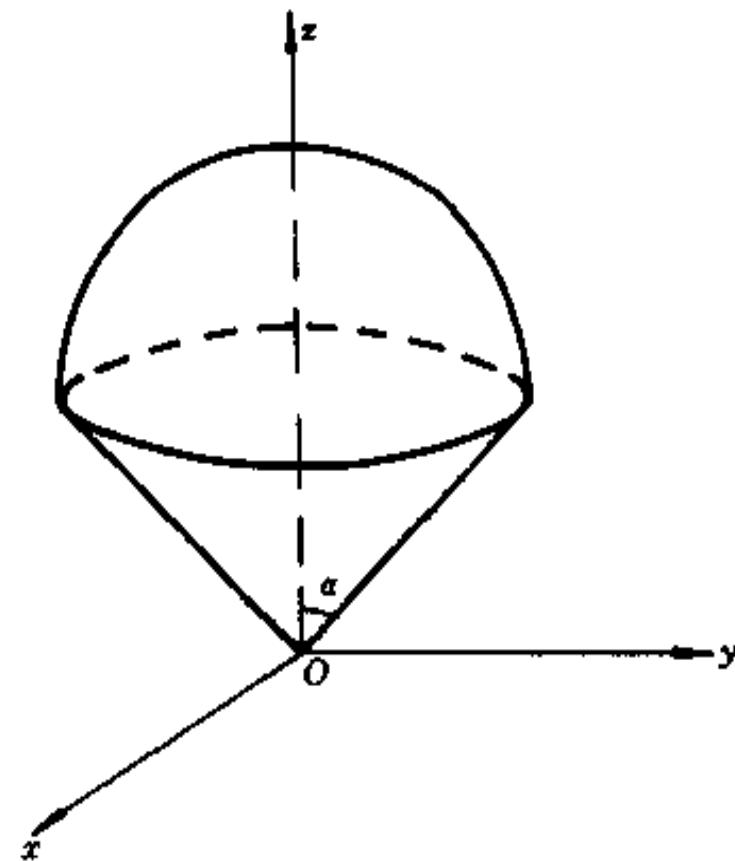


图 3.9

例 3.6 设 (V) 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 和锥面(以 z 轴为对称轴, 顶角为 2α) 所围的空间区域, 求 (V) 的体积.

解 由于区域 (V) 由球面和锥面围成(图 3.9), 因此, 使用球面坐标比较方便. 在球面坐标下, 所给球面的方程为

$$r = 2a \cos \theta,$$

所给圆锥面的方程为

$$\theta = \alpha,$$

容易看出, 对所给区域(V)来说, r, θ, φ 的变化范围为:

$$0 \leq r \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{(V)} dV = \iiint_{(V)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin \theta d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^2 dr \\ &= \frac{16}{3} \pi a^3 \int_0^\alpha \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi a^3}{3} (1 - \cos^4 \alpha). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 3.7 计算 $I = \iiint_{(V)} z^2 dV$, 其中

$$(V) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2\}.$$

解法一 利用柱面坐标. 把(V)的边界曲面方程化成柱面坐标(图 3.10), 得

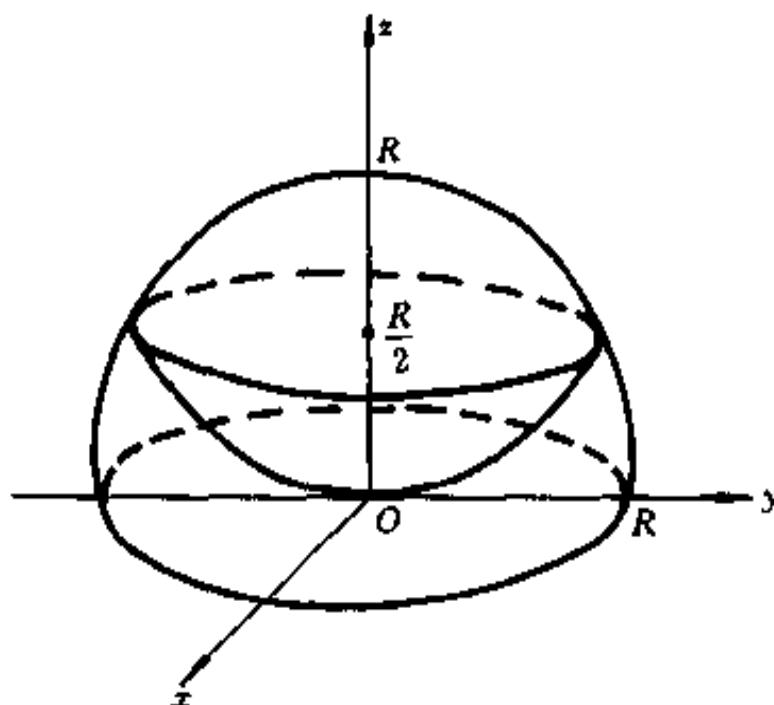


图 3.10

$$z = \sqrt{R^2 - \rho^2}, \quad z = R - \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

它们的交线在 xOy 平面上的投影方程为

$$\begin{cases} \rho = \frac{\sqrt{3}}{2}R, \\ z = 0. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V z^2 \rho dz d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \rho d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z^2 dz \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \rho [(R^2 - \rho^2)^{3/2} - (R - \sqrt{R^2 - \rho^2})^3] d\rho \\ &= -\frac{2\pi}{3} \left[\frac{2}{5}(R^2 - \rho^2)^{5/2} + 2R^3\rho^2 - \frac{3}{4}R\rho^4 + R^2(R^2 - \rho^2)^{3/2} \right] \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \\ &= \frac{59}{480}\pi R^5. \end{aligned}$$

解法二 利用球面坐标. 把(V)的边界曲面方程化成球面坐标, 得

$$r = R, \quad r = 2R \cos\theta,$$

它们的交线为圆

$$\begin{cases} r = R, \\ \theta = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

因此, (V)的边界曲面由

$$r = 2R \cos\theta \left(\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{与} \quad r = R \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

组成(图 3.10). 于是

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V r^2 \cos^2\theta r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^R r^4 dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2R \cos\theta} r^4 dr \\ &= \frac{2\pi}{5} R^5 \left(-\frac{1}{3} \cos^3\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{2\pi}{5} (2R)^5 \left(-\frac{1}{8} \cos^8\theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{59}{480}\pi R^5. \end{aligned}$$

解法三 利用“先重后单”的方法. 用平行于 xOy 的平面去横截区域(V), 所得的圆域记为(σ_z), 于是有

$$(\sigma_z) = \begin{cases} \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 - (z - R)^2\}, & 0 \leq z \leq \frac{R}{2}, \\ \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}, & \frac{R}{2} \leq z \leq R. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 dz \iint_{(\sigma_z)} d\sigma + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 dz \iint_{(\sigma_z)} d\sigma \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \pi [R^2 - (z - R)^2] dz + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 \pi (R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left[\left(\frac{2R}{4} z^4 - \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_0^{\frac{R}{2}} + \left(\frac{R^2}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R \right] \\ &= \frac{59}{480} \pi R^5. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 3.8 计算 $I = \iiint_V (x + y + z) \cos(x + y + z)^2 dV$, 其中
 $(V) = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x - y \leq 1, 0 \leq x - z \leq 1, 0 \leq x + y + z \leq 1\}$.

解 为了使积分域 (V) 变得简单, 我们利用坐标变换:

$$x - y = u, \quad x - z = v, \quad x + y + z = w,$$

由于

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

所以

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{3}.$$

于是由(3.7)式得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V w \cos(w^2) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \\ &= \frac{1}{3} \iiint_V w \cos(w^2) du dv dw. \end{aligned}$$

再用 u, v, w 表示 (V) , 得

$$(V) = \{(u, v, w) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\},$$

因此

$$I = \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 \frac{1}{3} w \cos(w^2) dw = \frac{1}{6} \sin 1. \quad \blacksquare$$

习题 6.3

(A)

1. 设积分域(V):(1)关于 xOy 平面对称;(2)关于 yOz 平面对称;(3)关于 zOx 平面对称. 试分别说明被积函数具有什么特性时,三重积分

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = 0, \quad \iiint_V f(x, y, z) dV = 2 \iiint_{V'} f(x, y, z) dV,$$

其中(V')为(V)在对称面一侧的子区域.

2. 仅从积分域考虑,选用你认为最方便的坐标系将三重积分 $I = \iiint_V f(x, y, z) dV$ 化成由三个单积分构成的累次积分,其中积分域为:

- (1) 由平面 $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ 与各坐标面围成的区域;
- (2) 由 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的区域;
- (3) $(V) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\};$
- (4) $(V) = \{(x, y, z) | a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\} (a > 0).$

3. 计算下列三重积分:

- (1) $\iiint_V x^3 y^2 dV, (V)$ 由 $z = 0, z = xy, y = x, x = a (a > 0)$ 所围成;
- (2) $\iiint_V y \cos(x+z) dV, (V)$ 为由抛物柱面 $y = \sqrt{x}$, 平面 $y = 0, z = 0$ 及 $x + z = \frac{\pi}{2}$ 所围成的域;

- (3) $\iiint_V \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV, (V)$ 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1, z = 2$ 所围成;
- (4) $\iiint_V (x^2 + y^2) dV, (V)$ 由 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = 0$ 所围成, 其中 $A > a > 0$;

- (5) $\iiint_V z dV, (V)$ 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与 $z = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ 所围成;

- (6) $\iiint_V \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dV, (V)$ 由 $x^2 + y^2 = z^2$ 与 $z = 1$ 所围成;

- (7) $\iiint_V z(x^2 + y^2) dV, (V) = \{(x, y, z) | z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\};$

4. 求下列立体的体积:

- (1) 由 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体 ($b > a > 0$);
- (2) 由 $z = xy, x + y + z = 1$ 与 $z = 0$ 所围成的立体;
- (3) 由 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z (a > 0)$ 所围成的立体;
- (4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 所确定的立体 ($a > 0, b > 0, c > 0$);

(5) 由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 与 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的立体 ($a > 0, b > 0, c > 0$).

(B)

1. 计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV, (V) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1, z \geq 1, y \geq 0\};$$

$$(2) \iiint_V |\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1| dV, (V) \text{ 由 } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 与 } z = 1 \text{ 所围成};$$

$$(3) \iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dV, (V) = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

($a > 0, b > 0, c > 0$).

2. 将累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$ 分别化为先对 x 和先对 y 的累次积分.

3. 设

$$F(t) = \iiint_V x \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) dV,$$

(V) 由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$ 与 $\sqrt{y^2 + z^2} \leq x$ 确定, 求 $\frac{dF(t)}{dt}$.

4. 设 $f(x)$ 连续, $(V) = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq t^2\}$,

$$F(t) = \iiint_V [z^2 + f(x^2 + y^2)] dV,$$

求 $\frac{dF}{dt}$ 和 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$.

5. 计算三重积分 $\iiint_V (x + y + z)^2 dV$, 其中 (V) 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

第四节 重积分的应用

在第三章定积分应用一节中已经看到, 求一个非均匀连续分布在区间 $[a, b]$ 上的量 Q , 可以通过“分、匀、合、精”四步来建立积分式得到, 这四步中的关键是建立积分微元. 而且我们还看到, 如果把分布在子区间 $[a, x]$ ($x \in [a, b]$) 上的量记作 $Q(x)$, 那末这个积分微元就是 $Q(x)$ 的微分, 它通常可以在微小子区间 $[x, x + dx]$ 上, 通过处理均匀量的乘法公式得到.

如果所求量 Q 是非均匀地连续分布在平面或空间的某一区域 (Ω) 上, 那末要计算它就要用二重或三重积分, 和定积分情形一样, 建立积分式的关健在于求得积分微元, 下面我们就来阐述这一问题.

4.1 重积分的微元法

1. 区域函数及其对域的导数

让我们以求连续分布在平面区域(σ)上的质量 m 这一问题来说明有关概念. 把由区域(σ)的所有子区域所构成的集合记作 Ω_σ , Ω_σ 中的任一元素($\Delta\sigma$)对应着确定的质量, 因而质量 m 可以看作是定义在 Ω_σ 上的一个函数, 记作

$$m = F((\Delta\sigma)), (\Delta\sigma) \in \Omega_\sigma.$$

为了研究物质在(σ)上分布的疏密情况, 人们引入了面密度的概念. 当质量均匀分布时,

$$\text{面密度 } \mu = \frac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}, (\Delta\sigma \text{ 是域 } (\Delta\sigma) \text{ 的面积});$$

当质量 m 非均匀分布时, 若($\Delta\sigma$)收缩为其中一点(x, y)时上述比值的极限存在, 则将此极限值规定为此平面物体在点(x, y)处的面密度, 即

$$\mu = \lim_{(\Delta\sigma) \rightarrow (x, y)} \frac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma} = f(x, y), (x, y) \in (\Delta\sigma).$$

显然面密度 μ 是点(x, y)的函数.

容易看出, 在点 M 处的面密度实际上就是质量函数 F 在点 M 处对区域面积的变化率.

一般地, 把由区域(σ)中一切子区域构成的集合记作 Ω_σ , 则映射 $F: \Omega_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 称为区域函数, 记作

$$F = F((\Delta\sigma)), (\Delta\sigma) \in \Omega_\sigma,$$

其中 Ω_σ 称为其定义域.

为了研究区域函数 F 对区域面积的变化率, 相应于面密度, 我们引入如下定义:

定义 4.1 设 F 是定义于 Ω_σ 上的区域函数, $M(x, y)$ 是(σ)中的一点. 在(σ)内任作一包含点 M 的子域($\Delta\sigma$), $(\Delta\sigma) \in \Omega_\sigma$, 其面积记为 $\Delta\sigma$. 若当($\Delta\sigma$)的直径 $d \rightarrow 0$ (即 $(\Delta\sigma) \rightarrow M$)时比式 $\frac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}$ 的极限存在且为 $f(M)$, 则称此极限值 $f(M)$ 为区域函数 F 在点 M 处的导数. 记作

$$\frac{dF}{d\sigma} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma} = f(M),$$

或

$$\frac{dF}{d\sigma} = f(x, y).$$

并称 $f(x, y)d\sigma$ 为区域函数 F 在点 $M(x, y)$ 处的微分, 记作

$$dF = f(x, y)d\sigma.$$

区域函数及其导数概念不难推广到空间区域.

应当指出, 这种导数与第五章中所讲的偏导数、全导数是不同的概念, 它在物理、力学及其它科学中同样有其重要的地位. 例如:

由定义可知, 面密度 μ 是质量函数 $m = F((\Delta\sigma))$ 的导数:

$$\frac{dm}{d\sigma} = \mu(x, y),$$

体密度 μ 是质量函数 $m = F((\Delta V))$ 的导数:

$$\frac{dm}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow (x, y, z)} \frac{F((\Delta V))}{\Delta V} = \mu(x, y, z),$$

其中 ΔV 是域 (ΔV) 的体积.

平面的压强 p 是力函数 $P((\Delta\sigma))$ 的导数:

$$p(x, y) = \frac{dP}{d\sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{P((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}.$$

2. 变域上的重积分对域的导数

在定积分中我们知道, 变上限积分 $\int_a^x f(t)dt$ 是上限 x 的函数. 而且由微积分学第一基本定理可知, 当 $f(x)$ 连续时, 有

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

在重积分中也有类似的结论, 下面以二重积分为例来加以说明, 三重积分完全类似.

设被积函数 $f \in C((\sigma))$, $M(x, y)$ 为域 (σ) 内任一点, 任作一包含点 M 的子域 $(\Delta\sigma) \subseteq (\sigma)$, 那末二重积分 $\iint_{(\Delta\sigma)} f(M)d\sigma$ 的值将随 $(\Delta\sigma)$ 而变, 是区域 $(\Delta\sigma)$ 的函数, 记作

$$\Phi((\Delta\sigma)) = \iint_{(\Delta\sigma)} f(M)d\sigma, M \in (\Delta\sigma) \subseteq (\sigma).$$

由积分中值定理可知

$$\Phi((\Delta\sigma)) = \iint_{(\Delta\sigma)} f(M) d\sigma = f(\bar{x}, \bar{y}) \Delta\sigma,$$

其中点 $(\bar{x}, \bar{y}) \in (\Delta\sigma)$, $\Delta\sigma$ 是 $(\Delta\sigma)$ 的面积, 于是

$$\frac{\Phi((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

令子域 $(\Delta\sigma)$ 的直径 $d \rightarrow 0$, 即令 $(\Delta\sigma)$ 收缩到点 $M(x, y)$, 从而 $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x, y)$, 由 $f(x, y)$ 的连续性和区域函数导数的定义可得

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Phi((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma} = f(x, y), \quad (4.1)$$

或

$$d\Phi = f(x, y) d\sigma. \quad (4.2)$$

(4.1) 式表明: 连续函数在变域上的二重积分作为区域函数在点 (x, y) 处的导数等于被积函数在该点的值.

3. 微元法

由(4.2)式可知, 如果把一个连续分布在域 (σ) 上关于区域具有可加性的量 Φ 视为一定义在 Ω_σ 上对区域具有可加性的区域函数, 并且能把它用二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 来表示, 那末积分微元 $f(x, y) d\sigma$ 就是这一区域函数 Φ 的微分. 因此, 在建立 Φ 的积分表达式时, 寻找积分微元就是寻找区域函数 Φ 的微分 $d\Phi$.

在处理实际问题中, 与定积分类似, 通常在微小区域 $(d\sigma)$ 中把非均匀分布的量 Φ 视为均匀分布, 或者将微小区域 $(d\sigma)$ 看作一点, 然后利用已知的几何或物理公式, 通过乘法所得到的近似值往往就是所求的微分 $d\Phi$, 也就是我们要寻求的积分微元. 求得了积分微元 $d\Phi$ 后, 立即可写出计算 Φ 的二重积分表达式. 这种方法称为重积分的微元法. 下面我们以液体的静压力为例来具体说明.

例 4.1 设有一半径为 R 的圆管道(图 4.1), 内部充满液体, 已知液体在管道的横截面上的压强 $p = f(x, y)$ 为一连续函数, 求液体对管道闸门(垂直于管道的轴)的静压力 P .

解 在管道闸门上建立平面直角坐标系, 取圆心为坐标原点. 由于压强随点而变, 所以闸门上静压力的分布是非均匀的, 并且关于区域具有可加性, 因此, 这显然是在圆域 $(\sigma): x^2 + y^2 \leq R^2$ 上的二重积分问题.

为寻找压力微元, 我们在微小区域 $(d\sigma)$ 上, 把非均匀分布的压力看作是均匀的, 即把变动的压强 p 看作是不变的, 等于 $(d\sigma)$ 上一点 (x, y) 处压强的值 $f(x, y)$. 记 $(d\sigma)$ 的面积为 $d\sigma$, 于是有

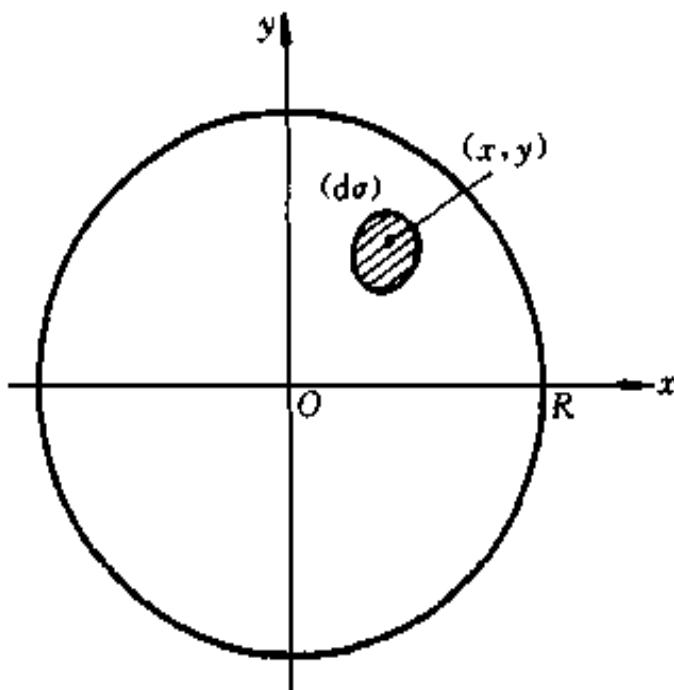


图 4.1

$$dP = f(x, y)d\sigma, \quad (4.3)$$

从而

$$P = \iint_{(s)} f(x, y)d\sigma.$$

比如, 设管道中充满水(水的密度为 μ), 则

$$p = \rho g(R - y), \text{ 即 } f(x, y) = (R - y)\mu g,$$

其中 g 为重力加速度. 从而水对闸门的静压力为

$$P = \iint_{(s)} \mu g(R - y)d\sigma = \mu g \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R - \rho \sin \varphi) \rho d\rho = \mu g \pi R^3. \blacksquare$$

若把压力 P 视为区域函数, 则

$$\frac{dP}{d\sigma} = p = f(x, y),$$

因而(4.3)式中的 $f(x, y)d\sigma$ 就是这个区域函数 P 的微分.

4.2 应用举例

例 4.2 求质量均匀分布, 半径为 a 的半球体的质心.

解 我们先回顾一下质点系质心的计算. 设空间内有 n 个质点 P_1, P_2, \dots, P_n , P_i 的质量为 m_i ; 坐标为 (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) 的质点 P_i 对 xOy 坐标平面的静矩为 $m_i z_i$. 由于质点系对各坐标平面的静矩具有可加性, 因而上述质点系对 xOy, yOz, zOx 坐标平面的静矩分别为

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad M_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad M_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i y_i.$$

由物理学知道,如果把质点系的质量集中在这样一点 P ,使得集中的质量在点 P 对各坐标平面的静矩分别等于质点系对同一坐标平面的静矩,那末点 P 就称为该质点系的质心.于是可求得质心 $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

现在来计算上述半球体的质心.建立坐标系如图 4.2 所示,由对称性可知质心应在 z 轴上,从而

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0.$$

为求 \bar{z} ,我们首先需要求此半球体对 xOy 平面的静矩.由于半球体上各点到 xOy 平面的距离不尽相同,因而上半球体对 xOy 平面的静矩是一个非均匀分布的可加量.容易看出,这是一个三重积分问题.将半球体所在的区域(V)划分成若干子域,把微小子域(dV)近似地看作是一个质点(x, y, z),(dV)中的质量都集中于此点,(dV)的体积记作 dV .这样一来,就把半球体离散化而看作是一个质点系.容易看出,(dV)上的质量对 xOy 平面的静矩近似地等于

$$dM_{xy} = Kz dV,$$

它就是此半球体对 xOy 平面的静矩微元,其中常数 K 是半球体的体密度.从而

$$M_{xy} = \iiint_V Kz dV,$$

其中(V)为 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.利用柱面坐标可求得

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} Kz dz = \frac{K\pi}{4} a^4.$$

又容易求得半球体的质量为

$$m = \iiint_V K dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} K dz = \frac{2K\pi}{3} a^3,$$

于是 $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{3}{8} a$,故所求质心为 $P(0, 0, \frac{3}{8} a)$. ■

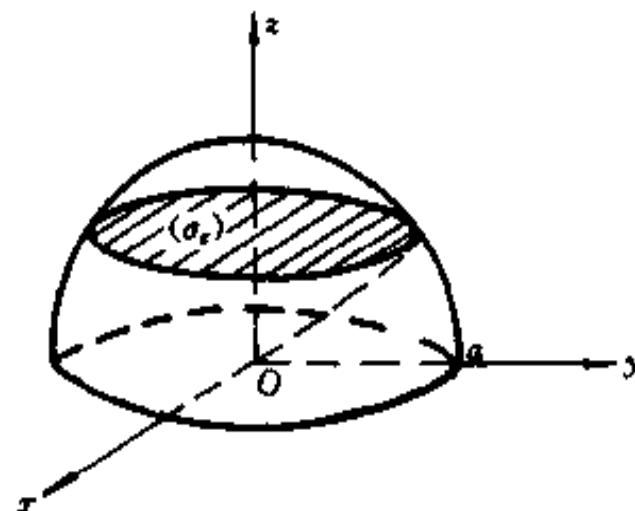


图 4.2

应当指出,如果我们把此半球体用垂直于 z 轴的平面切成薄片,那末在 z 轴上截距为 z 到 $z + dz$ 的薄片体积为 $\pi(a^2 - z^2)dz$.注意到其上各点的竖坐标可近似地看成是不变的,均等于 z ,于是可立即得到此半球体对 xOy 平面的静矩微元

$$dM_{xy} = z \cdot K\pi(a^2 - z^2)dz,$$

从而

$$M_{xy} = \int_0^a K\pi z(a^2 - z^2)dz = \frac{K\pi}{4}a^4.$$

读者不难看出,这种作法其实就相当于在柱面坐标下,对三重积分利用“先重后单”的思想化成累次积分来计算的方法.

例 4.3 求半径为 R 、质量均匀分布的圆盘对于其中心轴的转动惯量 I_0 和对其直径的转动惯量 I_D .

解 先回顾一下转动惯量的概念.设有一质量为 m 的质点,它到一已知轴 L 的垂直距离为 r ,绕轴 L 旋转的角度速度为 ω .由于质点转动时的切线速度为 $v = r\omega$,因而它的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2. \quad (4.4)$$

如果此质点平动,则动能为

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (4.5)$$

其中质量 m 为平动惯性大小的度量.将(4.4)式与(4.5)式比较可见, mr^2 相当于平动时的质量 m ,它是质点转动时惯性大小的度量,称为质点对轴 L 的转动惯量.由力学可知,质点系对同一轴的转动惯量也具有可加性,即质点系对轴 L 的转动惯量等于各质点对 L 转动惯量之和.

现在回到我们的问题.设圆盘的面密度为常数 μ ,取圆盘的中心为坐标原点, z 轴为中心轴,则圆盘上各点到 z 轴的距离 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,它随点的位置而异,圆盘对其中心轴的转动惯量是非均匀分布的,并且具有可加性,因此需要用二重积分来计算.设圆盘所在区域为 (σ) ,把 (σ) 任意划分成若干小区域,首先求点 (x, y) 处的质量微元 $dm = \mu d\sigma$ 对中心轴的转动惯量,即得转动惯量微元

$$dI_0 = r^2 dm = \mu(x^2 + y^2) d\sigma,$$

从而

$$I_0 = \iint_{(\sigma)} \mu(x^2 + y^2) d\sigma = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi \mu R^4}{2}.$$

因为圆盘的质量 $m = \mu \pi R^2$, 故 I_0 也可写作

$$I_0 = \frac{mR^2}{2}.$$

由对称性可知

$$I_D = I_x = I_y,$$

由上面计算可知,

$$I_0 = I_x + I_y,$$

故

$$I_D = \frac{1}{2} I_0 = \frac{mR^2}{4}. \blacksquare$$

例 4.4 设有一圆板, 半径为 R , 密度为一常数 μ , 在板的中心垂线上有一质量为 1 的质点 P' , 求板对该质点的引力.

解 设质点 P' 与圆心的距离为 h , 取坐标系如图 4.3 所示. 由 Newton 万有引力定律可知, 若有质量分别为 m 与 m' 的质点 P 与 P' , 则 P 对 P' 的引力为

$$\mathbf{F} = K \frac{mm'}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

其中 r 为 P 与 P' 两点间的距离, \mathbf{e}_r 为由 P' 指向 P 的单位向量. 现在, 点 P' 到圆板内各点的距离不尽相同, 方向也随圆板内点的不同而改变. 因此, 我们需要将圆板划分成小块, 运用积分的思想来求其引力. 将圆板所占区域 (σ) 任意划分, 把微元 $(\Delta\sigma)$ 看作一质点 P , 它对质点 P' 的引力即引力微元可应用 Newton 引力公式得到:

$$d\mathbf{F} = K \frac{\theta_r}{r^2} \mu d\sigma = K \frac{r}{r^3} \mu d\sigma.$$

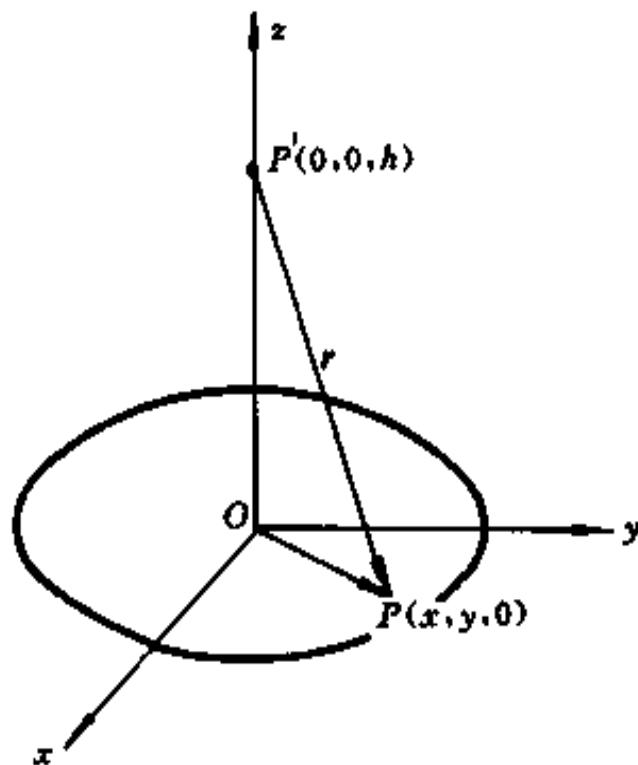


图 4.3

由于 $d\mathbf{F}$ 为一向量, 要把它在 (σ) 内积累, 只能对其分量分别进行. 由图 4.3 可见

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{P'P} = (x, y, -h),$$

从而

$$d\mathbf{F} = \left(\frac{K\mu x}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} d\sigma, \frac{K\mu y}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} d\sigma, \frac{-K\mu h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} d\sigma \right).$$

因此, 要求引力, 一般说来需要计算三个二重积分. 然而, 对于我们现在的问题, 由对称性易见, 引力 \mathbf{F} 在 x 轴和 y 轴上的分量 F_x 与 F_y 必因相互抵消而为零, 即 $F_x = F_y = 0$, 于是只需计算 F_z . 采用极坐标得

$$\begin{aligned} F_z &= \iint_{(\sigma)} \frac{-K\mu h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{-K\mu h}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho \\ &= -2\pi\mu h K \int_0^R \frac{\rho}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho = -2\pi\mu K \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right), \end{aligned}$$

所以引力为

$$\mathbf{F} = -2\pi\mu K \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right) \mathbf{k}. \quad \blacksquare$$

习题 6.4

(A)

1. 求由下列曲线所围成的均匀薄板的质心坐标:

- (1) $ay = x^2, x + y = 2a (a > 0)$;
- (2) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$ 与 x 轴;
- (3) $\rho = a(1 + \cos \varphi) (a > 0)$.

2. 求边界为下列曲面的均匀物体的质心:

- (1) $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, z = 0 (a > 0, b > 0, c > 0)$;
- (2) $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 2az (a > 0)$;
- (3) $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0 (a > 0)$.

3. 设一薄板由 $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$ 所围成, 其面密度 $\mu(x, y) = xy$, 求薄板对两个坐标轴的转动惯量 I_x 和 I_y .

4. 求均匀物体: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \geq z^2$ 对 z 轴的转动惯量.
5. 求底半径为 R , 高为 H 的均匀正圆柱体对于底的直径的转动惯量.
6. 求高为 H , 半顶角为 α , 体密度为 μ 的均匀圆锥体对位于其顶点的一单位质量质点的

引力.

7. 如果一个底半径为 R , 高为 H 的正圆柱体上的任一点的密度在数量上等于自圆柱体的底面圆中心到该点距离的平方, 试求该圆柱体的质量.

8. 一个火山的形状可以用曲面 $z = h e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4h}}$ ($z > 0$) 来表示. 在一次爆发之后, 有体积为 V 的熔岩粘附在山上, 使它具有和原来一样的形状. 求火山高度 h 变化的百分比.

(B)

1. 在某一生产过程中, 要在半圆形的直边上添上一个边与直径等长的矩形, 使整个平面图形的质心落在圆心上, 试求矩形的另一边长.

2. 一个均匀圆柱体, 全部质量为 M , 占有的区域是 $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$, 求它对位于点 $(0, 0, b)$ 、质量为 M' 的一个质点的引力, 其中 $b > h$.

3. 设物体对轴 L 的转动惯量为 I_L , 对通过质心 C 平行于 L 的轴 L_C 的转动惯量为 I_C , L_C 与 L 的距离为 a , 试证: $I_L = I_C + ma^2$, 其中 m 为物体的质量. 这一公式称为平行轴定理.

4. 利用平行轴定理求半径为 R 的球体对于任一条切线 T 的转动惯量 I_T .

第五节 含参变量的积分与反常重积分

在许多问题中所遇到的积分, 其被积函数除依赖于积分变量外还可能依赖于另外的变量. 例如, 在变力沿直线作功的问题中, 如果此变力 f 不仅与位移 x 有关, 还与时间 t 有关, 即 $f = f(x, t)$, 那末此变力将物体由 $x = a$ 移至 $x = b$ 所作的功应为 $W(t) = \int_a^b f(x, t) dx$. 这种积分称为含参变量积分. 其实, 我们已经不止一次地遇到过这种积分. 例如将二重积分化成累次积分时所遇到的积分 $\int_c^d f(x, y) dy$, 第三章第六节中所介绍的 Γ 函数, 都是含参变量积分. 本节将不通过计算其值而直接讨论含参变量积分的某些重要性质. 此外, 为满足科学技术的需要, 还要将重积分的概念加以拓广, 介绍反常重积分的概念、性质与计算.

5.1 含参变量的积分

在本段中我们总记 $D = [a, b] \times [c, d]$. 如果 $f \in C(D)$, 那末对任一固定的 $y \in [c, d]$, 积分

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (5.1)$$

存在, 且将随 y 的改变而变化, 我们称积分(5.1)为含参变量 y 的积分, 它是自变量 y 的函数. 同样, 对任一 $x \in [a, b]$, 积分

$$G(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

称为含参变量 x 的积分, 它是自变量 x 的函数.

下面我们以含参变量积分(5.1)为例来讨论其有关性质.

定理 5.1(连续性) 若 $f \in C(D)$, 则

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

在区间 $[c, d]$ 上连续.

证 任取 $y \in [c, d]$, 令 $y + \Delta y \in [c, d]$. 由于 $f \in C(D)$, 且 D 是有界闭域, 故 f 必在 D 上一致连续, 从而对 $\forall \epsilon > 0$, 存在仅与 ϵ 有关的 $\delta(\epsilon) > 0$, 使得 $\forall (x, y) \in D$, 当 $\Delta x = 0$, $|\Delta y| < \delta$ 时有

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

于是

$$|F(y + \Delta y) - F(y)| \leq \int_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b - a} dx = \epsilon,$$

因此 $F(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续. ─

由此定理可见,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = F(y_0),$$

即

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx &= \int_a^b f(x, y_0) dx \\ &= \int_a^b [\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)] dx. \end{aligned}$$

也就是说, 当 $f \in C(D)$ 时, 求极限与求积分可以交换顺序.

定理 5.2(可导性) 若 $f \in C(D)$, $f_y \in C(D)$, 则

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

在 $[c, d]$ 上有连续的导数, 且求导与积分可交换顺序, 即

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

证 任取 $y \in [c, d]$, 令 $y + \Delta y \in [c, d]$, 于是

$$\Delta F = F(y + \Delta y) - F(y) = \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx.$$

由微分中值定理知

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y + \theta \Delta y) \Delta y, \quad 0 < \theta < 1,$$

代入上式并除以 Δy 得

$$\frac{\Delta F}{\Delta y} = \int_a^b f_y(x, y + \theta \Delta y) dx. \quad (5.2)$$

由于 $f_y(x, y)$ 在闭域 D 上连续, 根据定理 5.1 可知

$$F'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta y} = \int_a^b \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f_y(x, y + \theta \Delta y) dx = \int_a^b f_y(x, y) dx$$

并且 $F'(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续. ■

例 5.1 求含参变量积分 $\int_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx$ ($y \neq 0$) 对参数 y 的导数.

解 当 $y \neq 0$ 时, 由定理 5.2 得

$$\frac{d}{dy} \int_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y} \right) dx = - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1 + y^2}. \quad ■$$

定理 5.3(积分顺序交换性) 若 $f \in C(D)$, 则

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \text{ 在 } [c, d] \text{ 上可积},$$

$$G(x) = \int_c^d f(x, y) dy \text{ 在 } [a, b] \text{ 上可积},$$

且

$$\boxed{\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.}$$

从二重积分的几何意义来看, 等式的成立是显然的. 下面我们再给以分析证明.

证 由定理 5.1, $F(y) \in C([c, d])$, $G(x) \in C([a, b])$, 因此它们在相应的区间上都是可积的. 设 $t \in [c, d]$, 令

$$I(t) = \int_c^t dy \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b dx \int_c^t f(x, y) dy, \quad (5.3)$$

对变量 t 求导, 对其中第一个积分直接利用微积分学第一基本定理; 对于第二个积分, 先利用定理 5.2, 再利用微积分学第一基本定理, 得

$$I'(t) = \int_a^b f(x, t) dx - \int_a^b f(x, t) dx \equiv 0,$$

于是在 $[c, d]$ 上有 $I(t) \equiv k$ (k 为常数).

由(5.3)式可知 $I(c) = 0$, 从而 $k = 0$. 再令 $t = d$ 代入(5.3)式得 $I(d) \equiv 0$, 即结论成立. ■

定理 5.3 告诉我们, 当 $f \in C(D)$ 时, 对含参变量积分求积分可以在积分号内进行, 或者说积分可以交换顺序.

例 5.2 计算积分 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ ($a, b > 0$).

解 这个积分难以直接计算, 需要利用定理 5.3 来求. 由于

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy,$$

由定理 5.3 可知

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{1+y} dy = \ln \frac{1+b}{1+a}. \quad ■ \end{aligned}$$

在把二重积分化为累次积分时, 我们更常碰到的含参变量积分, 其上、下限也是参变量的函数. 下面就来讨论这种含参变量积分的求导法.

定理 5.4 若 $f(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 均在 D 上连续, $x_1(y)$ 与 $x_2(y)$ 的值域均为 $[a, b]$ 且它们都在 $[c, d]$ 上可导, 则

$$F(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (5.4)$$

在 $[c, d]$ 上可导, 且有

$$F'(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f_y(x, y) dx + f[x_2(y), y] x_2'(y) - f[x_1(y), y] x_1'(y).$$

证 将由(5.4)所确定的函数看作是由

$$G(y, x_2, x_1) \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx \text{ 与 } x_1 = x_1(y), x_2 = x_2(y)$$

所构成的复合函数:

$$F(y) = G[y, x_2(y), x_1(y)],$$

由多元复合函数的链式法则、定理 5.2 及变上限积分的求导公式可知, $F(y)$ 在 $[c, d]$ 上可导, 而且

$$\begin{aligned} F'(y) &= G_y + G_{x_2} \frac{dx_2}{dy} + G_{x_1} \frac{dx_1}{dy} \\ &= \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f_y(x, y) dx + f[x_2(y), y] x'_2(y) - f[x_1(y), y] x'_1(y). \blacksquare \end{aligned}$$

例 5.3 求 $F(y) = \int_y^{y^2} \frac{\sin(xy)}{x} dx$ 的导数.

解 由定理 5.4 得

$$F'(y) = \int_y^{y^2} \cos(xy) dx + 2y \frac{\sin y^3}{y^2} - \frac{\sin y^2}{y} = \frac{3\sin y^3 - 2\sin y^2}{y}. \blacksquare$$

5.2 含参变量的反常积分

在许多实际问题中, 还会遇到含参变量的反常积分. 在一元函数的积分中, 反常积分有两种: 无穷积分和无界函数积分. 含参变量的反常积分也有相应的两种, 我们仅就无穷积分进行讨论, 所有概念和结论可类似地推广到无界函数积分.

设 $f \in C(D)$, $D = [a, +\infty) \times [c, d]$. 如果 $\forall y \in [c, d]$, 极限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x, y) dx$$

存在, 那末就称含参变量 y 的无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 上收敛, 它的值给出了一个定义在 $[c, d]$ 上的函数

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x, y) dx.$$

相应地可定义

$$F(y) = \int_{-\infty}^b f(x, y) dx \text{ 及 } F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

正像一致收敛在函数项级数理论中所起的重要作用那样, 一致收敛在含参变量反常积分中也将扮演重要角色.

定义 5.1 设 $f \in C(D)$, $D = [a, +\infty) \times [c, d]$, 并且 $\forall y \in [c, d]$,

$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 收敛. 若 $\forall \epsilon > 0$, 存在仅与 ϵ 有关的 $N > 0$, 使当 $A > N$ 时, $\forall y \in [c, d]$ 均有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \epsilon,$$

则称 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛.

与函数项级数一样, 我们有应用方便的下列比较判别法.

定理 5.5(比较判别法) 设 $f \in C(D)$, $D = [a, +\infty) \times [c, d]$, 且

$$|f(x, y)| \leq g(x),$$

若 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛.

证 由于积分

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx = \int_a^A g(x) dx + \int_A^{+\infty} g(x) dx$$

收敛, 因而 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) > 0$, 使当 $A > N$ 时

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx < \epsilon.$$

于是对 $\forall y \in [c, d]$ 有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \int_A^{+\infty} |f(x, y)| dx \leq \int_A^{+\infty} g(x) dx < \epsilon,$$

所以 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 上关于 y 一致收敛. ■

例 5.4 证明: 当 $a > 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y}{(x+1)^a} dx$ 在 $[0, d]$ 上关于 y 一致收敛.

证 当 $0 \leq y \leq d$ 时, 有

$$\left| \frac{y}{(x+1)^a} \right| \leq \frac{d}{(x+1)^a},$$

而积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{(x+1)^a} dx = d \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^a}$$

当 $a > 1$ 时收敛, 据比较判别法知原积分当 $a > 1$ 时在 $[0, d]$ 上关于 y 一致收敛. ■

在一致收敛的条件下,含参变量的无穷积分也同样具有连续性、求导与求积分可交换顺序以及求积分可交换顺序等性质,现叙述如下.

定理 5.6 若 $f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$, 且

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则

(1) $F(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续;

$$(2) \quad \boxed{\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy.}$$

定理 5.7 若 f 与 f_y 均在 $[a, +\infty) \times [c, d]$ 上连续, 且

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在 $[c, d]$ 上收敛, $\int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则 $F(y)$ 在 $[c, d]$ 上有连续的导数, 且求导与求积分可交换顺序, 即

$$\boxed{\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx.}$$

例 5.5 计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} dx$ ($k > 0$).

解 这个积分难以直接积出, 我们将它看作是含参变量 a 的反常积分, 利用定理 5.7, 先求出它对参数 a 的导数, 然后再通过积分去求原积分的值. 为此, 先检验定理 5.7 的条件是否满足.

易见, 被积函数在 $x=0$ 无定义, 但由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} = a,$$

故补充定义被积函数

$$f(x, a) = e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}$$

在 $x=0$ 的值后可使 f 在 $D = [0, +\infty) \times [0, A]$ 连续, 而

$$f_a(x, a) = e^{-kx} \cos ax$$

也在 D 上连续;

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} dx$$

显然在 $[0, A]$ 上收敛, 由于

$$|e^{-kx} \cos ax| \leq e^{-kx},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$ 收敛, 故 $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos ax dx$ 在 $[0, A]$ 上一致收敛, 从而定理 5.7 的条件均满足. 据定理 5.7 可得

$$F'(a) = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos ax dx = \frac{k}{a^2 + k^2},$$

上式中第二个等式可由分部积分法得到. 再对 a 积分得

$$F(a) - F(0) = \int_0^a \frac{k}{u^2 + k^2} du = \arctan \frac{a}{k},$$

注意到 $F(0) = 0$, 因此

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} dx = \arctan \frac{a}{k}. \quad \blacksquare$$

5.3 反常重积分

与一元函数的反常积分一样, 重积分也可以推广为无穷区域与无界函数两类反常重积分. 下面以二重积分为例, 对这两类反常重积分的概念和收敛的判别法则作一简单介绍(证明略去).

1. 无界区域的二重积分

定义 5.2 设 (σ) 是一无界区域, $f \in C((\sigma))$, 任作一有界闭区域序列 $(\sigma_1), (\sigma_2), \dots, (\sigma_n), \dots$, 使 $(\sigma_n) \subseteq (\sigma)$ ($n = 1, 2, \dots$), 且当 $n \rightarrow +\infty$ 时 (σ_n) 扩张成为 (σ) . 如果不论 (σ_n) 如何作法, 极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{(\sigma_n)} f(x, y) d\sigma$$

存在, 那末称 $f(x, y)$ 在无界区域 (σ) 上的二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 收敛, 并称此极限值为该反常二重积分的值, 即 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{(\sigma_n)} f(x, y) d\sigma$; 否则称此反常二重积分发散.

定理 5.8(收敛判别法) 设 $f(x, y)$ 在无界区域 (σ) 上连续, 若存在 $\rho_0 > 0$, 使当 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \rho_0$ 且 $(x, y) \in (\sigma)$ 时, 有

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{\rho^\alpha},$$

其中 M 与 α 均为常数, 则当 $\alpha > 2$ 时反常二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 收敛.

例 5.6 证明无界区域上的二重积分

$$I = \iint_{(\mathbb{R}^2)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

收敛, 并求其值, 其中 \mathbb{R}^2 是全平面.

证 由于对任一常数 $\alpha > 2$ 均有

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho^\alpha e^{-\rho^2} = 0 < 1,$$

从而 $\exists \rho_0 > 0$, 使当 $\rho > \rho_0$ 时有

$$e^{-\rho^2} < \frac{1}{\rho^\alpha},$$

由定理 5.8 可知反常二重积分 I 收敛.

因此, 要求 I 的值只需要选取一组可以扩充到全平面的特殊区域序列去计算就行了.

现取 $\sigma_n = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a_n^2\}$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $a_n \rightarrow +\infty$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\mathbb{R}^2)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{(\sigma_n)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a_n} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(1 - e^{-a_n^2}) = \pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

如果我们把扩充至全平面的区域序列选作正方形序列

$$D_n = \{(x, y) | -n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n\},$$

那末有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\mathbb{R}^2)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{(D_n)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_{-n}^n e^{-y^2} dy \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

由于反常二重积分 I 存在, 其值为 π , 从而

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi,$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1. \quad (5.5)$$

(5.5)式中的反常积分称为概率积分,它在概率统计中占有重要的地位.

2. 无界函数的二重积分

定义 5.3 设 $f(x, y)$ 在有界闭域 (σ) 上除一点 $P_0(x_0, y_0)$ 外处处连续, 且当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时, $f(x, y) \rightarrow \infty$. 作点 P_0 的任一 d 邻域 $U(P_0, d)$, 记 $N_d = U(P_0, d) \cap (\sigma)$. 如果不论 $U(P_0, d)$ 如何选取, 当 $d \rightarrow 0$, 即 N_d 缩为点 P_0 时, 极限

$$\lim_{d \rightarrow 0} \iint_{(\sigma) \setminus (N_d)} f(x, y) d\sigma$$

存在, 那末称 $f(x, y)$ 在无界区域 (σ) 上的二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 收敛, 并称该极限值为此反常二重积分的值, 即 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \iint_{(\sigma) \setminus (N_d)} f(x, y) d\sigma$; 否则称其发散.

定理 5.9(收敛判别法) 设 $f(x, y)$ 在有界闭域 (σ) 上除 $P_0(x_0, y_0)$ 外处处连续, 且当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y) \rightarrow \infty$. 若不等式

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{\rho^\alpha}$$

在 (σ) 上除点 (x_0, y_0) 外处处成立, 其中 M 与 α 均为常数,

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

则当 $\alpha < 2$ 时反常二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 收敛.

例 5.7 证明反常二重积分

$$I = \iint_{(\sigma)} \frac{1}{|x| + |y|} d\sigma$$

收敛, 其中 $(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

证 由于

$$(|x| + |y|)^2 \geq x^2 + y^2,$$

从而在 (σ) 内除点 $(0, 0)$ 外有

$$\frac{1}{|x| + |y|} < \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\rho},$$

由定理 5.9 可知反常重积分 I 收敛。■

习题 6.5

(A)

1. 求下列极限：

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2};$$

$$(2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos ax dx;$$

$$(3) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt{1+\alpha^2-x^2} dx.$$

2. 求下列函数的导数：

$$(1) F(x) = \int_x^2 e^{-xy^2} dy; \quad (2) F(y) = \int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x} dx;$$

$$(3) F(\alpha) = \int_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha) dx, \text{ 其中 } f \text{ 有连续一阶偏导数};$$

$$(4) F(x) = \int_0^x (x+y) f(y) dy, \text{ 其中 } f \text{ 为可微函数, 求 } F'(x).$$

3. 计算下列积分：

$$(1) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx \quad (a > 0, b > 0).$$

4. 讨论下列含参变量反常积分在指定区间内的一致收敛性：

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx \quad (0 < a_0 \leq a < +\infty);$$

$$(2) \int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx \quad (a \leq b \leq c);$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx \quad (-\infty < a < +\infty);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos x dx \quad (0 \leq a < +\infty).$$

5. 计算下列积分：

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx \quad (a > 0, b > 0);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

6. 计算下列反常重积分：

$$(1) \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad (D) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$(2) \iint_D \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \quad (D) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$(3) \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (D) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\};$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy.$$

(B)

1. 设 $F(x) = \int_a^b f(y) |x-y| dy$, 其中 $a < b$, 且 $f(y)$ 为可微函数, 求 $F'(x)$.

2. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 对任何的 $A > 0$ 都收敛, 求证

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0).$$

3. 利用第 2 题的结论, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

第六节 第一型线积分与面积分

6.1 第一型线积分

在本章第一节中我们已通过和式的极限式(1.4)给出了点函数 $f(M)$ 在形体(Ω)上积分的定义. 当(Ω)是平面或空间的可求长曲线段(C)时, 相应的积分就分别是平面或空间曲线积分, 即

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k,$$

或

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k. \quad (6.1)$$

这里弧段长 Δs_k 始终是正的, 换句话说, 曲线积分的值与积分路径(C)的方向无关, 我们把这种曲线积分称为对弧长的线积分, 也称为第一型线积分.

第一型线积分的计算公式 设有一简单的光滑空间曲线(C), 其参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

若函数 $f(x, y, z)$ 在(C)上连续, 则线积分 $\int_C f(x, y, z) ds$ 存在, 且

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} dt. \quad (6.2)$$

证 把区间 $[\alpha, \beta]$ 任意划分:

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta,$$

曲线(C)相应地被分割成 n 个弧段, 设 $[t_{k-1}, t_k]$ 对应的弧段为 (Δs_k) , 在 (Δs_k) 上任取一点 $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, 设其对应的参数为 τ_k ($k = 1, 2, \dots, n$), 即 $\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k), \zeta_k = z(\tau_k)$. 由弧长公式可知

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

应用积分中值定理, 得

$$\Delta s_k = \sqrt{\dot{x}^2(\tau'_k) + \dot{y}^2(\tau'_k) + \dot{z}^2(\tau'_k)} \Delta t_k, \quad t_{k-1} \leq \tau'_k \leq t_k.$$

将上式代入(6.1)式的右端, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k \\ &= \sum_{k=1}^n f[x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)] \sqrt{\dot{x}^2(\tau'_k) + \dot{y}^2(\tau'_k) + \dot{z}^2(\tau'_k)} \Delta t_k. \end{aligned}$$

通过插项将上式右端变成 S_1 与 S_2 两项之和, 其中

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^n f[x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)] \cdot \\ &\quad \left(\sqrt{\dot{x}^2(\tau'_k) + \dot{y}^2(\tau'_k) + \dot{z}^2(\tau'_k)} - \sqrt{\dot{x}^2(\tau_k) + \dot{y}^2(\tau_k) + \dot{z}^2(\tau_k)} \right) \Delta t_k, \\ S_2 &= \sum_{k=1}^n f[x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)] \sqrt{\dot{x}^2(\tau_k) + \dot{y}^2(\tau_k) + \dot{z}^2(\tau_k)} \Delta t_k. \end{aligned}$$

由假定可知, 复合函数 $f[x(t), y(t), z(t)]$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 故有界, 设

$$|f[x(t), y(t), z(t)]| \leq m.$$

又由于在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上函数 $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$ 连续, 故一致连续, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $d = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k < \delta$ 时有

$$\left| \sqrt{\dot{x}^2(\tau'_k) + \dot{y}^2(\tau'_k) + \dot{z}^2(\tau'_k)} - \sqrt{\dot{x}^2(\tau_k) + \dot{y}^2(\tau_k) + \dot{z}^2(\tau_k)} \right| < \frac{\varepsilon}{m(\beta - \alpha)}.$$

从而当 $d < \delta$ 时, 和式

$$|S_1| < m \frac{\varepsilon}{m(\beta - \alpha)} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \varepsilon,$$

故

$$\lim_{d \rightarrow 0} S_1 = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{(C)} f(x, y, z) ds &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k = \lim_{d \rightarrow 0} S_2 \\ &= \int_a^\beta f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

若(C)为一简单的平面光滑曲线

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq \beta,$$

$f(x, y)$ 在(C)上连续,则第一型线积分的计算公式为

$$\int_{(C)} f(x, y) ds = \int_a^\beta f[x(t), y(t)] \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

公式(6.2)表明,在计算第一型线积分 $\int_{(C)} f(x, y, z) ds$ 时,可以把弧长微元 ds 看作是弧微分,把弧微分公式与积分路径(C)的参数方程代入被积表达式,然后去计算所得的定积分即可.由于弧长 Δs_k 总是正的,所以定积分的上限必须大于下限.

例 6.1 计算线积分 $I = \int_{(C)} (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中(C)为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = kt$ 上相应于 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的一段弧.

解 由公式(6.2)得

$$I = \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt = \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2). \quad \blacksquare$$

例 6.2 求 $I = \int_{(C)} y ds$, 其中(C)为抛物线 $y^2 = 2x$ 上介于 $(2, -2)$ 与 $(2, 2)$ 两点间的线段.

解 I 是平面上的第一型线积分,选择 y 为积分变量,把积分路径的方程 $y^2 = 2x$ 看作是以 y 为参数的参数方程: $x = \frac{1}{2} y^2, y = y$. 由公式(6.2)得

$$I = \int_{-2}^2 y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_{-2}^2 y \sqrt{1 + y^2} dy = 0. \quad \blacksquare$$

实际上,注意到积分路径(C)是关于 x 轴对称的,而被积函数又是 y 的奇函数,立即可知题中线积分之值为零.

例 6.3(柱面的侧面积) 设椭圆柱面 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ 被平面 $z = y$ 与 $z = 0$ 所

截,求位于第一、二卦限内所截下部分的侧面积 A (图 6.1).

解 此椭圆柱面的准线是 xOy 平面上的半个椭圆(C):

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (y \geq 0).$$

对(C)进行划分,运用积分的微元法,在弧微元 ds 上的一小片柱面面积可近似地看作是以 ds 为底,以截线 L 上点 M 的竖坐标 $z = y$ 为高的长方形面积,从而得侧面积微元

$$dA = yds,$$

于是所求侧面积为

$$A = \int_{(C)} yds.$$

把(C)的方程化成参数方程:

$$x = \sqrt{5} \cos t, y = 3 \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi),$$

所以

$$\begin{aligned} A &= \int_{(C)} yds = \int_0^\pi 3 \sin t \sqrt{5 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt \\ &= -3 \int_0^\pi \sqrt{5 + 4 \cos^2 t} d\cos t = 9 + \frac{15}{4} \ln 5. \end{aligned}$$

例 6.4 设有一半圆形的金属丝,质量均匀分布,求它的质心和对直径的转动惯量.

解 选取坐标系如图 6.2 所示.设圆半径为 R ,金属丝线密度为 μ ,由对称性可知质心的横坐标 $\bar{x} = 0$.任意划分半圆弧(C),易见,弧微元 ds 所对应的对 x 轴的静矩微元为

$$dM_x = ydm = \mu yds,$$

从而

$$M_x = \int_{(C)} \mu yds.$$

(C)以极角 φ 为参数的参数方程为

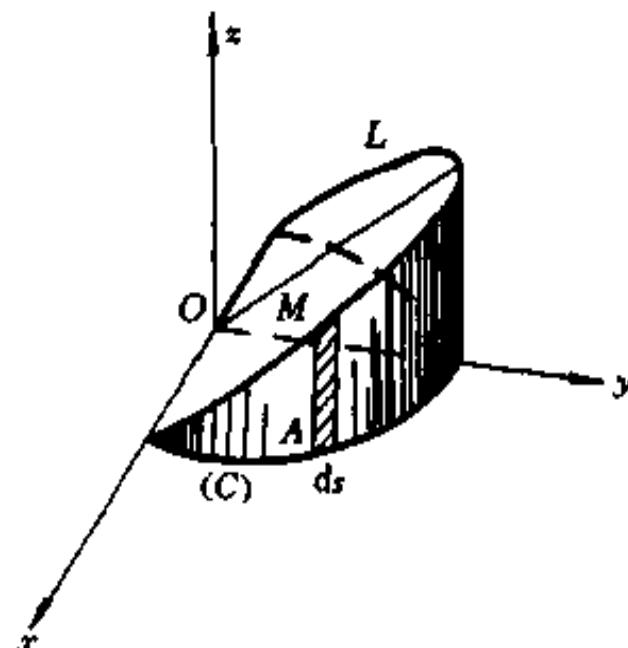


图 6.1

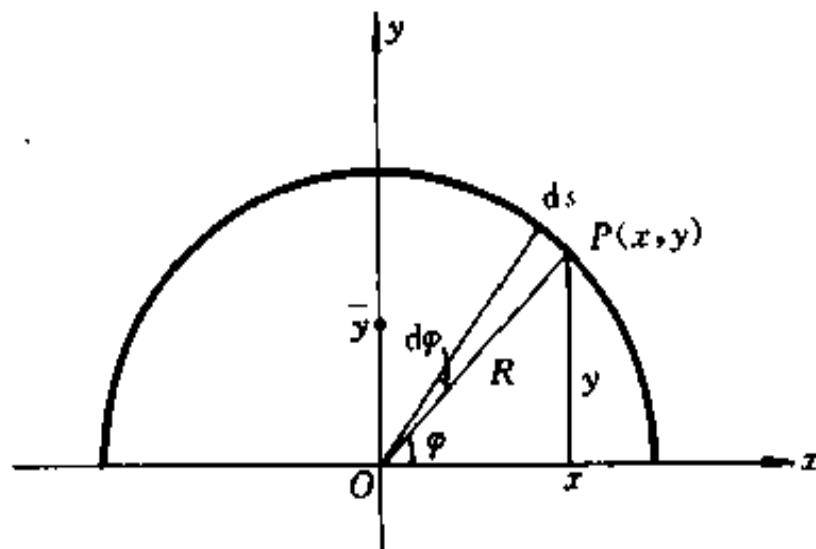


图 6.2

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi),$$

于是

$$M_x = \mu \int_0^\pi R^2 \sin \varphi d\varphi = 2\mu R^2.$$

半圆的质量显然为 $m = \pi R \mu$, 所以质心的纵坐标为

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{2\mu R^2}{\pi R \mu} = \frac{2R}{\pi}.$$

ds 对直径(即 x 轴)的转动惯量, 即转动惯量微元为

$$dI_x = y^2 dm = \mu y^2 ds,$$

从而金属丝对其直径的转动惯量为

$$I_x = \mu \int_{(C)} y^2 ds = \mu \int_0^\pi R^3 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\mu \pi R^3}{2} = \frac{m}{2} R^2,$$

其中 $m = \mu \pi R$ 是金属丝的质量. ■

6.2 第一型面积分

正像线积分要以弧长为基础一样, 面积分需要以曲面面积为基础.

曲面面积的定义 设在 \mathbf{R}^3 空间有一曲面(S), 其参数方程为

$$r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in (\sigma) \subseteq \mathbf{R}^2. \quad (6.3)$$

我们用微元法来讨论曲面的面积. 设向量值函数 $r(u, v)$ 在 (σ) 上连续可微, 且

$$r_u \times r_v \neq 0.$$

在参数 (u, v) 平面上, 用坐标线 $u = c_1$ 和 $v = c_2$ 把域 (σ) 划分成若干小矩形, 考察其中一个以点 $M(u, v)$, $M_1(u + \Delta u, v)$, $M_2(u + \Delta u, v + \Delta v)$,

$M_3(u, v + \Delta v)$ 为顶点的小矩形 $(\Delta\sigma)$ ($\Delta u > 0, \Delta v > 0$) (图 6.3). 设在映射 r 下, M, M_1, M_2, M_3 的象点分别为 P, P_1, P_2, P_3 , 于是映射 r 把 $(\Delta\sigma)$ 映射成曲面上的曲边四边形 $PP_1P_2P_3$ 所围成的 (ΔS) (图 6.3). 在 (ΔS) 上选取左下角点 P , 过点 P 作曲面 (S) 的切平面 τ . 容易看出, 相应于区间 $[u, u + \Delta u]$, $r_u \Delta u$ 是曲面 (S) 上过 P 点的 u 曲线在点 P 的切向量; 相应于区间 $[v, v + \Delta v]$, $r_v \Delta v$ 是 (S) 上过 P 点的 v 曲线在点 P 的切向量. 它们都位于切平面 τ 上. 当 Δu 与 Δv 很小时, 以此两切向量为边所构成的平行四边形面积可作为 (ΔS) 面积 ΔS 的近似值, 即

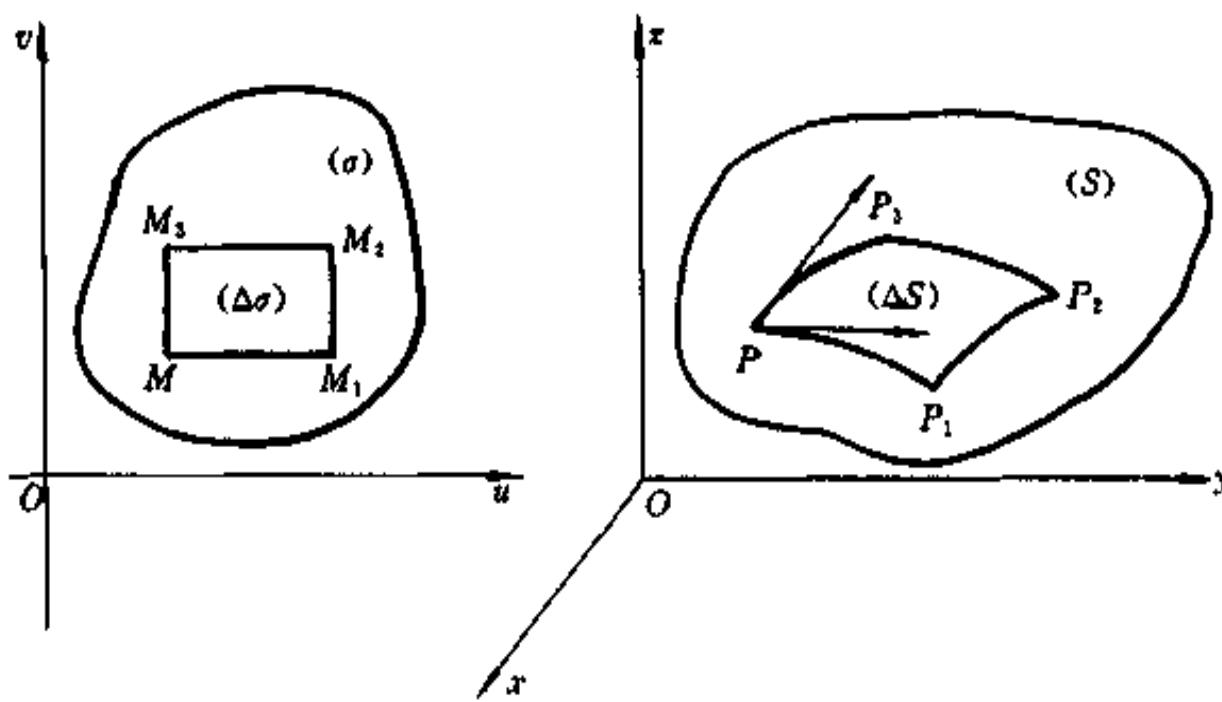


图 6.3

$$\Delta S \approx \|r_u \Delta u \times r_v \Delta v\| = \|r_u \times r_v\| \Delta u \Delta v.$$

令 $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0$, 取极限便得到曲面面积微元

$$dS = \|r_u \times r_v\| du dv, \quad (6.4)$$

从而曲面 (S) 的面积 S 就规定为

$$S = \iint_{(\sigma)} \|r_u \times r_v\| du dv. \quad (6.5)$$

为了使由(6.5)式给出的曲面面积更便于计算, 利用 Lagrange 恒等式(证明略)

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c),$$

可得

$$\begin{aligned} \|r_u \times r_v\|^2 &= (r_u \times r_v) \cdot (r_u \times r_v) = (r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)^2 \\ &\stackrel{\text{def}}{=} EG - F^2, \end{aligned}$$

其中

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad (6.6)$$

于是(6.5)式可写成

$$S = \iint_{(\sigma)} \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (6.7)$$

当曲面(S)的方程由 $z = f(x, y)$ ($(x, y) \in (\sigma)$) 给出时, 把 (x, y) 看作参数, (S) 的参数方程可写成

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in (\sigma)$$

于是

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y),$$

从而

$$EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - (f_x f_y)^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2.$$

所以由公式(6.7), 得

$$S = \iint_{(\sigma)} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \quad (6.8)$$

例 6.5 求半径为 a 的球面面积.

解 由第五章例 6.7 可知, 此球面的参数方程为

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (a \sin \theta \cos \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta), \quad (\theta, \varphi) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi].$$

由于

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta &= (a \cos \theta \cos \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, -a \sin \theta), \\ \mathbf{r}_\varphi &= (-a \sin \theta \sin \varphi, a \sin \theta \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

经计算可知

$$EG - F^2 = a^4 \sin^2 \theta,$$

于是

$$S = \iint_{(\sigma)} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi a^2 \sin \theta d\theta = 4\pi a^2. \quad \blacksquare$$

例 6.6 求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 在第一卦限中被平面 $z = 0, z = mx$

($m > 0$), $x = b$ ($b < a$) 所截下部分的面积(图 6.4).

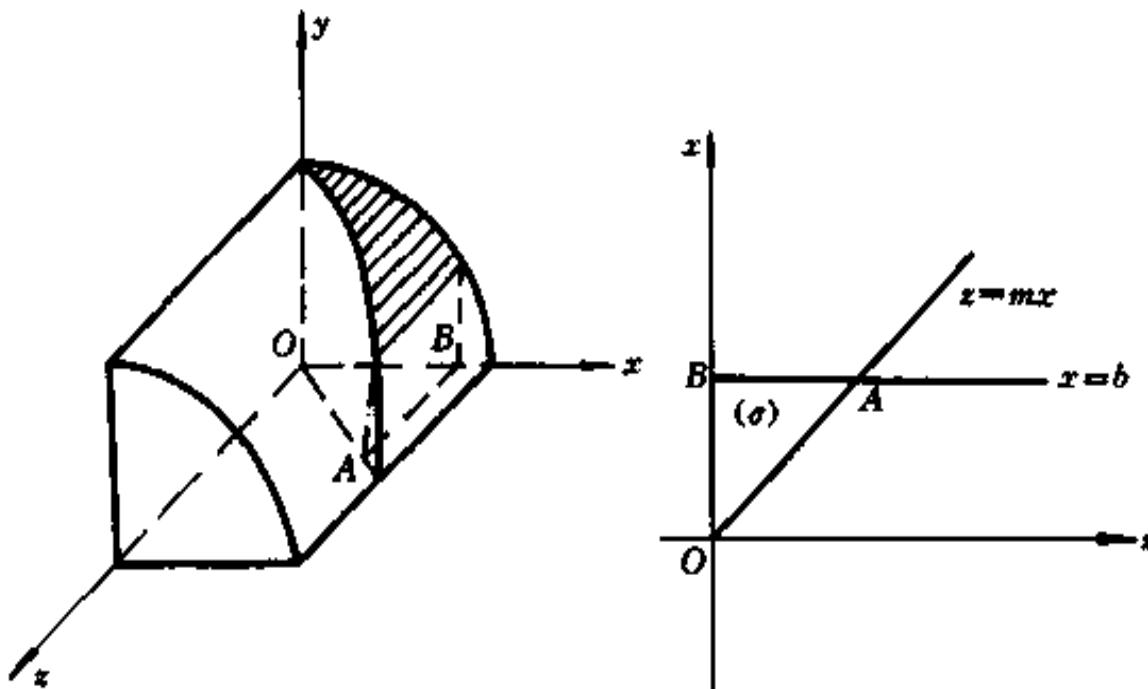


图 6.4

解 将所求部分曲面向 xOz 平面投影, 曲面的方程可写成

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (x, z) \in (\sigma),$$

其中 $(\sigma) = \{(x, z) | 0 \leq x \leq b, 0 \leq z \leq mx\}$. 于是

$$\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{y}\right)^2} = a(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

从而由公式(6.8), 得

$$\begin{aligned} S &= \iint_{(\sigma)} a(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dz dx = \int_0^b dx \int_0^{mx} a(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \int_0^b amx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = a^2 m - am \sqrt{a^2 - b^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

第一型面积分的计算 现在, 在曲面面积的基础上来解决第一型面积分的计算问题. 在本章第一节中我们已经知道, 当几何形体(Ω)为一曲面(S)时, 相应的积分就是第一型面积分, 即

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k.$$

用类似于第一型线积分计算公式的证明方法, 可以证明: 如果 $f(x, y, z)$ 在光滑曲面(S)上连续, (S)的方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in (\sigma),$$

那末 f 在(S)上的第一型面积分必存在且有

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (6.9)$$

其中 E, G, F 如(6.6)式所示.

公式(6.9)可以这样来理解:由于被积函数 f 沿曲面(S)变化,因而积分变量 x, y, z 应受曲面(S)方程的约束.把 dS 视为曲面面积微元,将曲面参数方程与微元表达式(6.4)代入(6.9)式的左端,注意到当点 (x, y, z) 在(S)上变化时,参数 (u, v) 相应的变化区域为(σ),便可得到公式(6.9)的右端.

若(S)的方程为 $z = z(x, y), (x, y) \in (\sigma)$, 则(6.9)式可写成

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (6.10)$$

例 6.7 计算 $\iint_S zdS$, 其中曲面(S)是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上介于平面 $z = 1$ 与 $z = 2$ 间的部分.

解 曲面(S)在 xOy 平面上的投影区域为

$$(\sigma) = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

于是由公式(6.10)可知

$$\begin{aligned} \iint_S zdS &= \iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \sqrt{2} \iint_{\sigma} \rho \cdot \rho d\rho d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{14}{3}\sqrt{2}\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 6.8 质量均匀分布半径为 R 的球缺面如图 6.5 所示,求其质心坐标.

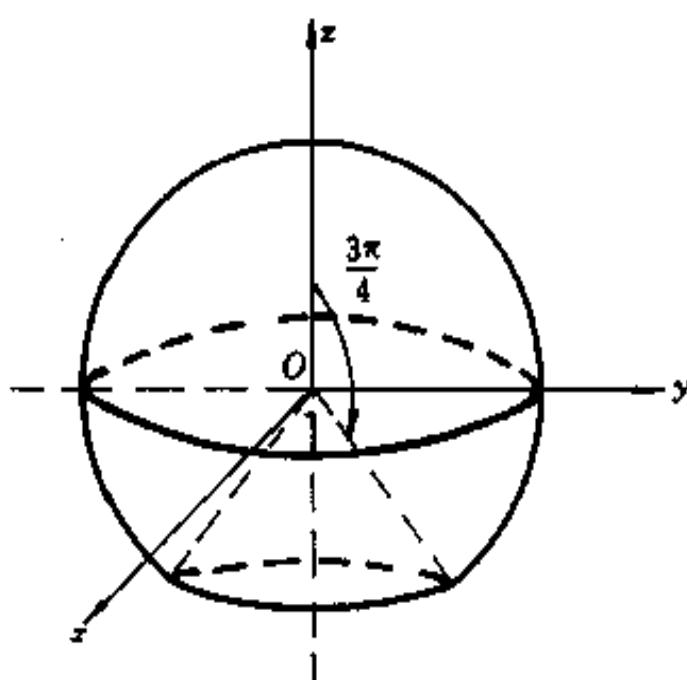


图 6.5

解 选取 θ 与 φ 为参数, 则所给球缺面的参数方程

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

由对称性可知, 质心应位于 z 轴上. 在所给球缺面上任取一点 $P(x, y, z)$, 含点 P 的曲面面积微元 dS 上的质量关于 xOy 平面的静矩微分

$$dM_{xy} = z \mu dS,$$

其中常数 μ 是面密度. 于是所给物质球缺面对 xOy 平面的静矩为

$$M_{xy} = \mu \iint_{(S)} z dS = \mu \iint_{(\sigma)} R \cos \theta \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi,$$

其中

$$(\sigma) = \left\{ (\theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

容易算得

$$EG - F^2 = R^4 \sin^2 \theta,$$

于是

$$M_{xy} = \mu \iint_{(\sigma)} R^3 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = \mu R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \mu R^3.$$

由公式(6.7)可得此物质球缺面的质量为

$$M = \mu \iint_{(\sigma)} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \mu R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta = (2 + \sqrt{2}) \pi \mu R^2.$$

所以球缺面质心的 z 坐标为

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{R}{2(2 + \sqrt{2})},$$

从而得知质心的坐标为 $\left(0, 0, \frac{R}{2(2 + \sqrt{2})}\right)$. ■

习题 6.6

(A)

1. 计算下列第一型线积分:

$$(1) \int_C y ds, (C) 为抛物线 $y^2 = 2x$ 上由点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 2)$ 的弧段;$$

(2) $\int_{(C)} (x^2 + y^2)^n ds$, (C) 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$);

(3) $\int_{(C)} z ds$, (C) 为圆锥螺线 $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ ($0 \leq t \leq t_0$);

(4) $\int_{(C)} (x + y) ds$, (C) 为以 $(0,0)$, $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 为顶点的三角形的周界;

(5) $\int_{(C)} x^2 ds$, (C) 为圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = \sqrt{3}. \end{cases}$

2. 试导出沿用极坐标方程 $\rho = \rho(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$) 表示的曲线(C)的线积分计算公式:

$$\int_{(C)} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

3. 计算下列线积分:

(1) $\int_{(C)} \sqrt{x^2 + y^2} ds$, (C) 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$;

(2) $\int_{(C)} |y| ds$, (C) 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

(3) $\int_{(C)} x ds$, (C) 为对数螺线 $\rho = a e^{k\theta}$ ($k > 0$) 在圆 $\rho = a$ 内的部分.

4. 有一铁丝成半圆形 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$), 其上每一点的密度等于该点的纵坐标, 求铁丝的质量.

5. 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 界于 xOy 平面及柱面 $z = R + \frac{x^2}{R}$ 之间的一块面积, 其中 $R > 0$.

6. 设螺旋线 $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = k\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 上物质的线密度为 $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 求:

(1) 它关于 z 轴的转动惯量;

(2) 它的重心.

7. 求曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 包含在圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 内那一部分的面积.

8. 求地球上由子午线 $\varphi = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ 和纬线 $\theta = 45^\circ$, $\theta = 60^\circ$ 所围那部分的面积(把地球近似看成是半径 $R = 6.4 \times 10^6$ m 的球).

9. 求下列平面曲线所构成的旋转面的面积:

(1) 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 绕 y 轴;

(2) 圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 被直线 $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 截下的劣弧绕 $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

10. 计算下列第一型面积分:

(1) $\iint_{(S)} \left(2x + \frac{4}{3}y + z\right) dS$, (S) 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

(2) $\iint_{(S)} (x^2 + y^2) dS$, (S) 为区域(G) = $\{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ 的边界曲面;

(3) $\iint_{(S)} \frac{dS}{r^2}$, (S) 为圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 界于平面 $z = 0$ 及 $z = H$ 之间的部分, r 为(S)上

的点到原点的距离；

$$(4) \iint_S z dS, (S) \text{ 为螺旋面的一部分: } x = \mu \cos \theta, y = \mu \sin \theta, z = \theta (0 \leq \mu \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi);$$

$$(5) \iint_S z^2 dS, (S) \text{ 为圆锥面的一部分: } x = r \cos \varphi \sin \alpha, y = r \sin \varphi \sin \alpha, z = r \cos \alpha$$

$(0 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, α 为常数 $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

11. 设形如悬链线 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ 的物质曲线上每一点的密度与该点的纵坐标成正比, 且在点 $(0, a)$ 的密度等于 μ , 试求该物质曲线在横坐标 $x_1 = 0$ 及 $x_2 = a$ 间一段的质量 m .

12. 设球面三角形为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$,

(1) 求其周界的形心坐标(即密度为 1 的质心坐标);

(2) 求此球面三角形的形心坐标.

13. 求密度为常数 μ 的均匀锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 (0 \leq z \leq b)$ 对 z 轴的转动惯量.

14. 求高为 $2h$, 半径为 R , 质量均匀分布的正圆柱面对(1)中心轴线,(2)中央横截面的一条直径,(3)底面的一条直径的转动惯量.

(B)

1. 求平面 $x + y = 1$ 上被坐标面与曲面 $z = xy$ 截下的在第一卦限部分的面积.

2. 求平面光滑曲线 $y = f(x) (a \leq x \leq b, f(x) > 0)$ 绕 x 旋转所得旋转曲面的面积.

3. 求曲线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ (1) 绕 x 轴,(2) 绕 y 轴,(3) 绕直线 $y = 2a$ 旋转所成旋转曲面的面积.

4. 求平面曲线 $x^2 + (y - b)^2 = a^2 (b \geq a)$ 绕 x 轴所构成的环(轮胎)面的面积.

5. 证明: 由平面上一已知弧段, 绕这平面上一条不穿过这弧段的直线旋转而成的旋转曲面的面积, 等于这弧段的长度与这弧段的形心旋转一周时所经路程的长度的乘积.

6. 求质量均匀分布, 半径为 R 的球面对距球心为 $a (a > R)$ 处的单位质量的质点 A 的引力.

7. 一个体积为 V , 外表面积为 S 的雪堆, 溶化的速度是 $\frac{dV}{dt} = -\alpha S$, 其中 α 是一个常数.

假设在溶化期间雪堆的形状保持为 $z = h - \frac{x^2 + y^2}{h}, z > 0$, 其中 $h = h(t)$. 同一个高度为 h_0 的雪堆全部溶化需要多长时间?

第七节 第二型线积分与面积分

从这一节开始, 我们将介绍多元函数积分中的第二大类型, 它包括第二型的线积分与面积分. 在第一型线积分与面积分中, 积分曲线(C)与积分曲面(S)是不考虑方向的, 从而相应的弧长微元 ds 与曲面面积微元 dS 都总是取正值; 对于第二型线积分与面积分, 积分曲线与积分曲面将必须考虑方向, 而且被积表达

式将由两向量的点积构成.这是两大类型线积分与面积分的本质差异.

第二型线、面积分概念的引入也是实际问题的需要,特别是研究各种物理场的需要.因此,本节先介绍场的概念,然后从实例出发分别介绍这两种第二型积分的概念、性质、计算方法以及与第一型积分的关系,它们在场论中的应用将放在第八节中专门介绍.

7.1 场的概念

在物理中我们知道存在着各种各样的场,如温度场、高度场、电位场、力场、电场强度场、磁场、流速场等等.一般地,我们把分布着某种物理量的平面或空间区域称为场,在数学上表现为定义在某一区域上的数量值函数或向量值函数.当这个函数为数量值函数时,称为数量场;当这个函数为向量值函数时,就称为向量场.例如上述几种场中,温度场、高度场、电位场是数量场,其余的是向量场.

从数学的观点来看,给定了一个函数,就相当于给定了一个场.若此函数是一数量值函数 $u(M)(M \in (G) \subseteq \mathbb{R}^3)$, 则为数量场;若是一向量值函数 $A(M)(M \in (G) \subseteq \mathbb{R}^3)$, 则为向量场.此函数也称为场函数, (G) 称为场域.

如果场中的物理量仅与点 M 的位置有关,不随时间变化,那末这种场称为定常场或稳定场,视场是数量场或向量场分别记作 $u(M)$ 或 $A(M)$;若场不仅与点 M 的位置有关,而且也与时间 t 有关,则称其为非定常场或时变场,分别记作 $u(M, t)$ 或 $A(M, t)$.本节中我们仅讨论定常场.

无论是数量场还是向量场,我们都需要从宏观和微观两个方面去研究它们,既要掌握场中物理量的总体分布情况,也要揭示物理量在场中各点的变化规律.

场的几何描述 场的几何描述可以帮助我们直观地了解场中物理量的总体分布情况.为此,对于数量场,我们考察它的等值面(线);对于向量场,我们考察它的向量线.

对于一个空间数量场 $u = u(M) = u(x, y, z), (x, y, z) \in (G) \subseteq \mathbb{R}^3$, 我们把使 $u(x, y, z)$ 取相同值 C 的点构成的曲面 $u(x, y, z) = C$ 称为该数量场的等值面.同样,对平面数量场 $u = u(x, y), (x, y) \in (D) \subseteq \mathbb{R}^2$, 称曲线 $u(x, y) = C$ 为此数量场的等值线.等值面(线)可以从宏观上反映该物理量在场内的分布情况.

例 7.1 高度场的等高线.

图 7.1 是一地形图,图中曲线是该地区高度场 $h = h(x, y)((x, y) \in (D))$ 的等高线 $h(x, y) = C_i(i = 1, 2, 3)$, $C_1 < C_2 < C_3$. 这些等值线清晰地反映出场中地势高低的分布情况.不难看出,该地区 (D) 内东西两边各有一个小山包,西边的山较高,东边的较低,西边的山包上靠东侧比较陡,靠西侧比较平缓.

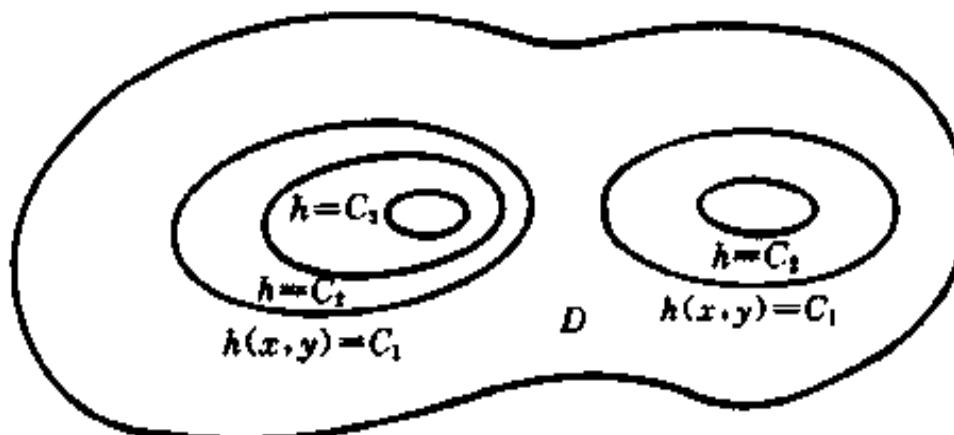


图 7.1

例 7.2 电位场的等值面.

设有一带电量为 q 的点电荷, 则在空间形成一个电位场. 若建立坐标系, 并将此点电荷所在位置取作坐标原点, 则电位

$$u = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (r \neq 0),$$

其中 ϵ 为介电系数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

该电位场的等值面 $u = C$ 即为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \left(R = \frac{q}{4\pi\epsilon C} \right),$$

它是一族以坐标原点为球心的球面. 由此可见, 在每一球面上电位均相同, 而且半径 R 越大的球面上电位的值 C 越小.

对于数量场 $u(x, y, z)$ ($(x, y, z) \in (G)$), 容易看出, 场 (G) 内任一点 (x_0, y_0, z_0) 必位于等值面 $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$ 上; 又由于 u 为单值函数, 因而任意两个不同等值面不会相交.

等值面是宏观了解数量场分布的一种方法, 对数量场微观的研究主要是研究函数 $u = u(M)$ 在各点沿各个方向变化的快慢程度, 以及沿什么方向变化最大等, 这就是第五章第三节中所讨论过的方向导数和梯度.

对于一个空间的向量场 $A = A(M) = A(x, y, z)$, $(x, y, z) \in (G) \subseteq \mathbb{R}^3$, 域 (G) 内任一点都确定着一个向量, 我们把 (G) 内这样的曲线称为向量线, 它上面每一点处切向量的方向, 正好与场在此点所确定向量的方向吻合(图 7.2). 例如, 若图 7.2 中的向量场是一段河流中的流速场, 则向量线就是这段河流

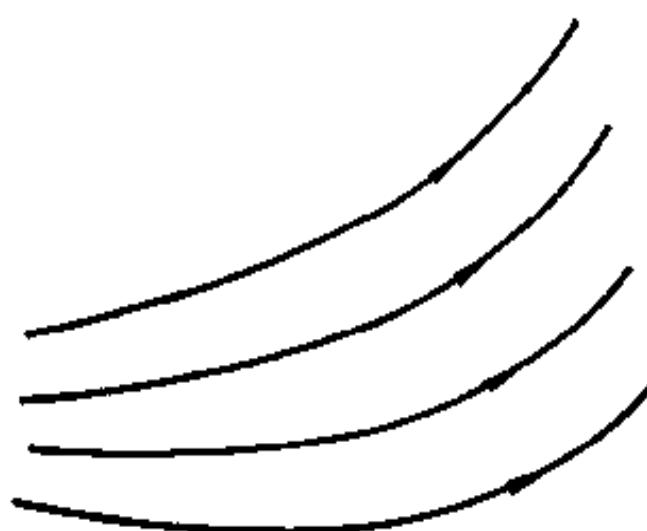


图 7.2

中水的流线,显然,它反映了此向量场中方向的总体分布.

对于向量场 $A(M)$,无论宏观和微观的研究都还有一些重要的问题需要讨论.例如,对于河流中的流速场,如果河床不断地有水渗入或渗出,那末我们一方面需要从总体上了解单位时间内通过某一截面水流量的多少;另一方面也需要从微观上考察河床每一点渗水的强度.又如,在具有旋涡的流速场中,我们既要研究沿某一闭合曲线的环流量,也要研究场中各点旋转趋势的大小.为了对向量场进行这些比较深入的研究,需要首先介绍第二型线积分和面积分.

7.2 第二型线积分

1. 第二型线积分的概念

首先我们看下面一个具体问题.

力场作功问题 质点在引力场中运动,电荷在电场中运动,场力均会对其作功.如果质点沿直线运动,那末功可以用定积分求得.现在讨论质点沿曲线运动的情形.

设力场对场中一点 M 处的质点的作用力为 $F(M)$, $F(M)$ 连续.当质点从点 A 沿曲线(C)移动到点 B 时,力场 F 所作的功,仍然可以用积分中“分、匀、合、精”的思想和步骤来解决.

分 从点 A 到点 B 依次插入 $n-1$ 个分点 M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , 把曲线段 \overrightarrow{AB} 分成 n 个小弧段, 并把点 A 与 B 分别记作 M_0 与 M_n (图 7.3).

匀 由于各小段有向弧 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ 很短, 可以近似地看作是弦向量 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$, 而且 $F(M)$ 在其上变化也不大, 可以近似地看作是 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ 上任一点 P_k 处的力 $F(P_k)$, 于是当质点从点 M_{k-1} 沿 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ 移动到点 M_k 时, 力场 F 所作的功

$$\Delta W_k \approx F(P_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k},$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

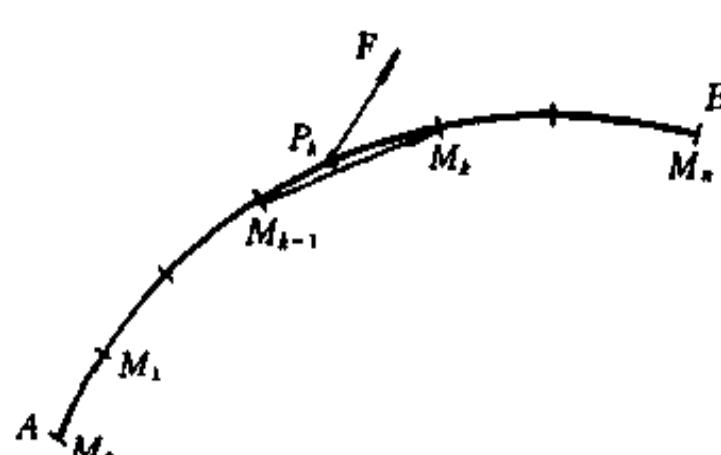


图 7.3

合 把沿各有向小弧段上所作的功相加,便得到所求功的近似值:

$$W = \sum_{k=1}^n \Delta W_k \approx \sum_{k=1}^n F(P_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k}.$$

精 当各小段弧长的最大值 $d \rightarrow 0$ 时,便得到所求功的精确值:

$$W = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \overrightarrow{F(P_k)} \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k}.$$

将上述和式极限抽象化就得到第二型线积分的定义.

定义 7.1(第二型线积分) 设(C)是向量场 $\mathbf{A}(M)$ 所在区域中的一条以 A 为起点、 B 为终点,且可求长的有向曲线.

在(C)上自起点 A (记作 M_0)到终点 B (记作 M_n)依次任意插入 $n-1$ 个分点 M_1, M_2, \dots, M_{n-1} ,把(C)分成 n 个有向小弧段.

在每一有向小弧段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ 上任取一点 P_k ,作点积

$$\overrightarrow{A(P_k)} \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

将各小弧段所对应的点积相加得和式

$$\sum_{k=1}^n \overrightarrow{A(P_k)} \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k}.$$

如果无论(C)被怎样划分,点 P_k 在 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ 上被怎样选取,只要所有小弧段的最大长度 $d \rightarrow 0$ 时上述和式都趋于同一常数,则称此极限值为向量值函数(或向量场) $\mathbf{A}(M)$ 沿有向曲线(C)的第二型曲线积分,简称为第二型线积分,记作

$$\int_{(C)} \overrightarrow{\mathbf{A}(M)} \cdot d\overrightarrow{s} = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \overrightarrow{A(P_k)} \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k}.$$

当需要注明曲线(C)的起点 A 与终点 B 时,将 $\int_{(C)} \cdot$ 记为 $\int_{(AB)} \cdot$

这个定义是第二型线积分的向量形式.在直角坐标系下,也可以把它表示为坐标形式.

设(C)为空间曲线,在直角坐标系下,

$$\mathbf{A}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

再把各小段的弦向量 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ 写成分量形式:

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = (\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k),$$

其中 $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ 分别为 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ 在 x, y, z 三个坐标轴上的投影.将点 P_k 的坐标记为 (ξ_k, η_k, ζ_k) ,于是定义中的和式极限可写成

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta z_k],$$

这个极限相应地记作

$$\int_{(C)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz, \quad (7.1)$$

就是第二型线积分的坐标形式.因此,第二型线积分也称为对坐标的线积分.

由第二型线积分的定义可知,力场 \mathbf{F} 将质点由点 A 沿曲线 (C) 移至点 B 时所作的功为

$$W = \int_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{(C)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

其中 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$.

应当注意,(7.1)式中的积分实际上是三个积分的组合,它们也可以单独出现,例如

$$\int_{(C)} P(x, y, z) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k.$$

这时,被积式可以理解为 $P dx = (P, 0, 0) \cdot (dx, dy, dz)$.

应当指出,第二型与第一型线积分的主要差别在于:第一型线积分中,积分微元 $f(M) ds$ 是两数量的乘积,积分路径没有方向性, ds 是弧微分,它始终为正;第二型线积分中,积分微元 $\mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s}$ 是两向量的点积,积分路径 (C) 具有方向性,沿 $\overbrace{(AB)}$ 积分与沿 $\overbrace{(BA)}$ 积分,由于其中分点的顺序相反,向量 $\overrightarrow{M_{k-1} M_k}$ 反向,从而积分的值反号.

2. 第二型线积分的性质

性质 1 如果把积分路径 (C) 的方向反过来(记作 $(-C)$),那末积分的值将改变符号,即

$$\int_{(C)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{(-C)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s}.$$

性质 2 设 A, B, P 为曲线 (C) 上任意三点,则

$$\underbrace{\int}_{(AB)} = \underbrace{\int}_{(AP)} + \underbrace{\int}_{(PB)}.$$

性质 3 如果由闭合曲线 (C) 所围成的平面区域被划分为两个无公共内点的区域 (σ_1) 和 (σ_2) ,它们的边界分别记作 (C_1) 和 (C_2) (图 7.4),那末沿闭合曲线 (C) 的第二型线积分 $\oint_{(C)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 等于按同一方向闭合曲线 (C_1) 和 (C_2) 的第二型线积分之和,即

$$\oint_{(C)} P dx + Q dy = \oint_{(C_1)} P dx + Q dy + \oint_{(C_2)} P dx + Q dy,$$

其中曲线 (C) , (C_1) , (C_2) 或者都取正向,或者都取负向^①.

事实上,若三个积分路径都取正向如图 7.4 所示,则由性质 1 与 2 可得

$$\begin{aligned} \oint_{(+C_1)} + \oint_{(+C_2)} &= \overbrace{\int_{(ADBA)}} + \overbrace{\int_{(ABEA)}} = \overbrace{\int_{(ADB)}} + \overbrace{\int_{(BA)}} + \overbrace{\int_{(AB)}} + \overbrace{\int_{(BEA)}} \\ &= \overbrace{\int_{(ADB)}} + \overbrace{\int_{(BEA)}} = \oint_{(+C)}. \end{aligned}$$

将上式两端同乘以 -1 ,并利用性质 1 就有

$$\oint_{(-C_1)} + \oint_{(-C_2)} = \oint_{(-C)}.$$

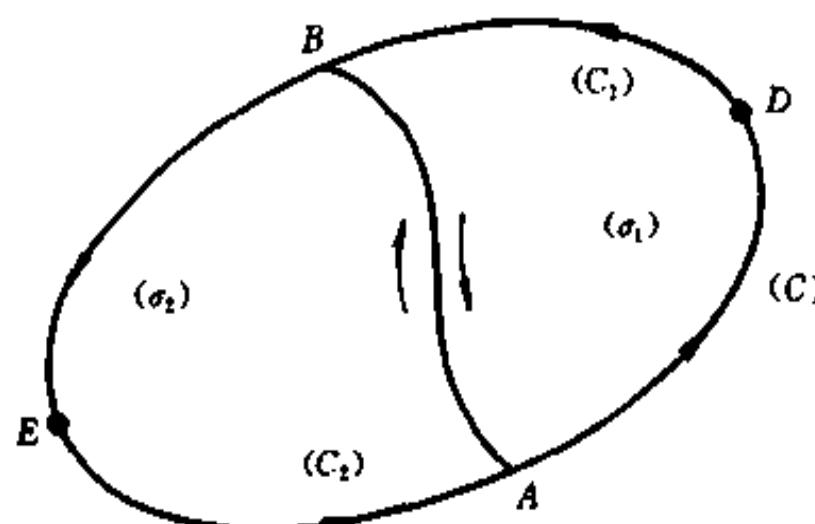


图 7.4

3. 第二型线积分的计算

设光滑有向曲线 (C) 的参数方程是

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

$t = \alpha$ 对应于 (C) 的起点 A , $t = \beta$ 对应于 (C) 的终点 B . 又设向量值函数

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

在曲线 (C) 上连续,则通过和式极限,用与推导第一型线积分计算公式类似的方法,可以证明第二型线积分 $\int_{(C)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s}$ 必存在,且有

$$\begin{aligned} \int_{(C)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s} &= \int_{(C)} (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \int_{(C)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz, \end{aligned}$$

^① 闭合曲线 (C) 的正向如下确定: 沿闭曲线 (C) 行走使 (C) 所围的区域始终位于人的左侧,反之为负向.

其中

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{(C)} P(x, y, z) dx &= \int_a^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)] \dot{x}(t) dt, \\ \int_{(C)} Q(x, y, z) dy &= \int_a^{\beta} Q[x(t), y(t), z(t)] \dot{y}(t) dt, \\ \int_{(C)} R(x, y, z) dz &= \int_a^{\beta} R[x(t), y(t), z(t)] \dot{z}(t) dt. \end{aligned}} \quad (7.2)$$

由此可见,计算第二型线积分 $\int_{(C)} A(M) \cdot ds$,只要将积分路径(C)的参数式代入 $A(M) \cdot ds$ 中,然后计算(7.2)式右端三个定积分之和就行了.

例 7.3 计算 $I = \int_{(C)} yz dx - xz dy + 2z^2 dz$, 其中(C)是螺旋线 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$ 上对应于从 $t = 0$ 到 $t = \pi$ 的有向弧.

解 由计算公式(7.2)可知,

$$I = \int_0^\pi (-a^2 k t \sin^2 t - a^2 k t \cos^2 t + 2k^3 t^2) dt = k\pi^2 \left(\frac{2}{3} k^2 \pi - a^2 \right). \blacksquare$$

例 7.4 计算 $I = \int_{(C)} 6x^2 y dx + 10xy^2 dy$, 其中(C)是曲线 $y = x^3$ 从点 $(2, 8)$ 至 $(1, 1)$ 的一段.

解 把曲线(C)的方程写成以 x 为参数的参数方程: $x = x$, $y = x^3$, 注意到积分路径的方向, 得

$$I = \int_2^1 (6x^2 x^3 + 10x(x^3)^2 \cdot 3x^2) dx = 3132. \blacksquare$$

例 7.5 计算

$$I = \int_{(C)} 2yx^3 dy + 3x^2 y^2 dx,$$

其中起点和终点分别为 $O(0, 0)$ 和 $B(1, 1)$ 的积分路径(C)为:

- (1) 抛物线 $y = x^2$;
- (2) 直线段 $y = x$;
- (3) 依次联结 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ 的有向折线如图 7.5 所示.

解 (1) 把 x 看作参变量, 则有

$$I = \int_0^1 (4x^6 + 3x^6) dx = 1;$$

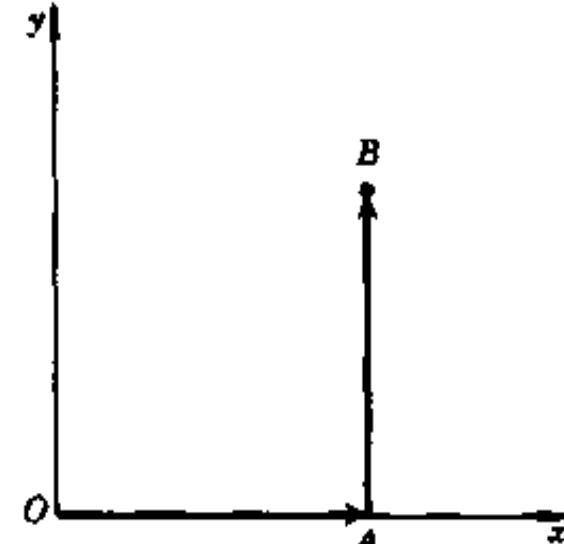


图 7.5

(2) 以 x 为参变量, 得

$$I = \int_0^1 (2x^4 + 3x^4) dx = 1;$$

$$(3) I = \int_{(C)} = \int_{\overrightarrow{(OA)}} + \int_{\overrightarrow{(AB)}},$$

在 \overrightarrow{OA} 上以 x 为参变量, 其方程为 $y=0$; 在 \overrightarrow{AB} 上以 y 为参变量, 其方程为 $x=1$, 从而

$$I = \int_0^1 3x^2 \cdot 0 dx + \int_0^1 2y dy = 1. \blacksquare$$

例 7.5 的结果显示, 对于某些第二型线积分, 其积分值仅取决于起点和终点, 而与积分路径无关, 这是一个重要而有趣的性质. 怎样的第二型线积分具有这一重要性质呢? 我们将在 8.2 节中进行讨论.

例 7.6 质量为 m 的质点, 从空间一点 A 沿某光滑曲线(C)移动到另一点 B , 求重力所作的功 W .

解 建立空间直角坐标系, 取铅直向上的方向为 z 轴(图 7.6), 则质点在任一点 M 处所受的重力为 $\mathbf{F}(M) = (0, 0, -mg)$.

设点 A 与 B 的坐标分别为 (x_0, y_0, z_0) 与 (x, y, z) , 从而

$$W = \int_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -mg \int_{(C)} dz = -mg \int_{z_0}^{z_1} dz = mg(z_0 - z_1). \blacksquare$$

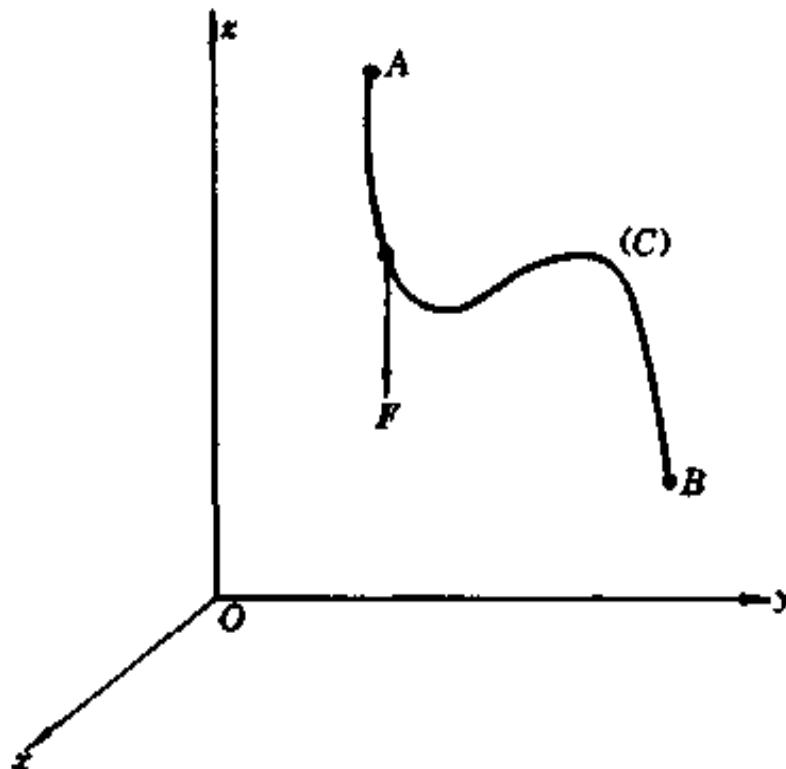


图 7.6

4. 两类线积分的联系

由公式(7.2)可知, 第二型线积分中的微元向量 $d\mathbf{s} = (dx, dy, dz)$ 就是有向积分路径(C)在点 M 的切向量, 且

$$\|\mathbf{ds}\| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \mathrm{ds}.$$

如果我们用 e_t 表示与有向路径(C)的正向一致的单位切向量,那么 ds 可用弧微分 ds 和 e_t 的乘积表示,即

$$\mathrm{ds} = e_t \mathrm{ds},$$

于是

$$\int_{(C)} \mathbf{A}(M) \cdot \mathrm{ds} = \int_{(C)} \mathbf{A}(M) \cdot e_t \mathrm{ds}. \quad (7.3)$$

(7.3)式表达了两类线积分的联系,它的右端是数量值函数 $\mathbf{A}(M) \cdot e_t$ 的第一型线积分.

现在把(7.3)式用坐标表示.设有向曲线(C)在点 M 处切向量的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$,并设

$$\mathbf{A}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

则(7.3)式的坐标表达式为

$$\int_{(C)} P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y + R \mathrm{d}z = \int_{(C)} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) \mathrm{ds}. \quad (7.4)$$

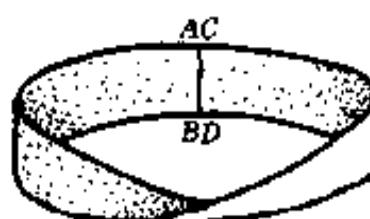
应当指出,在(7.4)式中,方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 都是 x, y, z 的函数,一般情况下,它们的形式比较复杂,所以除了一些特殊情况外,第二型线积分不必化为第一型线积分去计算.

7.3 第二型面积分

1. 第二型面积分的概念

与第二型线积分一样,为了研究第二型面积分,首先要给曲面确定方向.通常遇到的曲面都有两侧之分.如果是闭合曲面,有内侧与外侧之分;如果不闭合,有上侧与下侧、左侧与右侧、前侧与后侧之分.这种曲面称为双侧曲面^①.它的特征是:规定此曲面在一点 P 处法向量的指向之后,当点在曲面上连续移动而不越过其边界再回到原来位置时,法向量的指向不变.本书只限于讨论这种双侧曲面.对于双侧曲面,它法向量的两个指向可以根据需要任意确定,我们把确定了法向量指向的曲面称为有向曲面,而且用法向量的指向来确定曲面的方向,或者说确定曲面的一侧.例如,有上、下侧之分的曲面(S),上侧是指其法向量朝上的

^① 也存在单侧曲面.例如,将一长方形纸条 $ABCD$ 先扭转一次,再把两对边 AB 与 CD 粘合起来,这样构成的曲面称为 Möbius 带(如右图).如果用颜色来涂这张曲面,可以不越过曲面的边缘而涂遍这条纸带,因而它不能分开两侧,此曲面就是一张单侧曲面.



一侧;对于闭合曲面,外侧是指其法向量朝外的一侧,反之亦然.

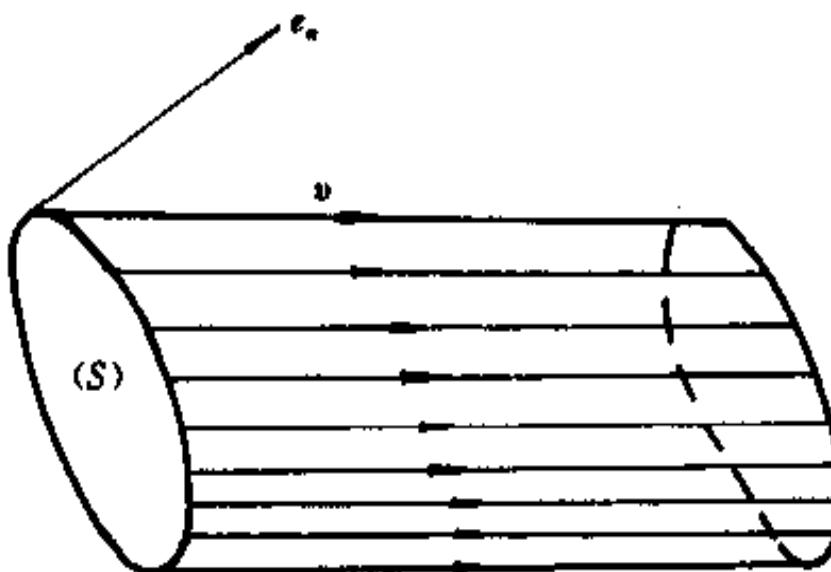


图 7.7

流量问题 设有不可压缩的流体^①在一空间流速场 $v(M)$ ($M \in G \subseteq \mathbb{R}^3$) 中流动, (S) 为 (G) 中一有向曲面, 求流体流向曲面 (S) 指定一侧的流量(即单位时间内通过曲面 (S) 的流体质量).

设 e_n 为曲面 (S) 指向给定侧的单位法向量. 如果流速场中各点的流速 $v(M)$ 均相同, 即 v 是一常向量, (S) 是一平面, 如图 7.7 所示, 设流体密度 $\mu = 1$, 那末通过 (S) 的流量 Q 等于图中斜柱体的体积, 即

$$Q = v \cdot e_n S,$$

其中 S 为平面 (S) 的面积.

如果流速场不是常向量场, 而 (S) 是一片有向曲面, 那末要计算流向曲面一侧的流量就需要运用积分的方法.

分 把曲面 (S) 任意分成 n 个子片 (ΔS_k) , $k = 1, 2, \dots, n$. 用 ΔS_k 表示 (ΔS_k) 的面积.

匀 在各小片曲面 (ΔS_k) 上, 任取一点 M_k , 把 (ΔS_k) 上各点的流速视为常向量 $v(M_k)$, 且把 (ΔS_k) 视为一平面, 于是通过 (ΔS_k) 流向 v 所指向一侧的流量 ΔQ_k 近似于以 (ΔS_k) 为底以 $v(M_k)$ 为斜高的小柱体体积(图 7.8)即

$$\Delta Q_k \approx v(M_k) \cdot e_n \Delta S_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

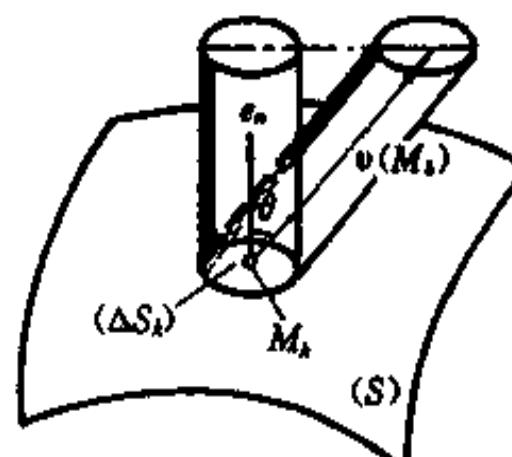


图 7.8

① 即流体的密度是不变的.

合 将流过各小片曲面流量的近似值相加, 得所求流量 Q 的近似值:

$$Q = \sum_{k=1}^n \Delta Q_k \approx \sum_{k=1}^n \mathbf{v}(M_k) \cdot \mathbf{e}_n \Delta S_k.$$

精 当所有小曲面直径的最大值 $d \rightarrow 0$ 时, 上述和式的极限就规定为所求流量的精确值

$$Q = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathbf{v}(M_k) \cdot \mathbf{e}_n \Delta S_k.$$

把上述和式的极限加以抽象, 便得到第二型面积分的下述定义:

定义 7.2(第二型面积分) 设在向量场 $\mathbf{A}(M)$ 的场域中有一可求面积的有向曲面(S), 指定它的一侧.

把曲面(S)任意划分成 n 小片: $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \dots, (\Delta S_n)$.

任取一点 $M_k \in (\Delta S_k)$, 作点积

$$\mathbf{A}(M_k) \cdot \mathbf{e}_n(M_k) \Delta S_k, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

其中 $\mathbf{e}_n(M_k)$ 是曲面在点 M_k 处指向给定侧的单位法向量, ΔS_k 表示 (ΔS_k) 的面积.

作和式

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{A}(M_k) \cdot \mathbf{e}_n(M_k) \Delta S_k.$$

如果不论曲面(S)怎样划分, 点 M_k 在 (ΔS_k) 上怎样选取, 当各小曲面 (ΔS_k) 直径的最大值 $d \rightarrow 0$ 时上述和式都趋于同一常数, 则称此极限值为向量场 $\mathbf{A}(M)$ 沿有向曲面(S)的第二型曲面积分, 简称为第二型面积分, 记作

$$\iint_S \mathbf{A}(M) \cdot \mathbf{e}_n dS = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathbf{A}(M_k) \cdot \mathbf{e}_n(M_k) \Delta S_k.$$

如果定义曲面面积微元向量 dS 为

$$dS = \mathbf{e}_n dS,$$

那末第二型面积分还可写成

$$\iint_S \mathbf{A}(M) \cdot dS = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathbf{A}(M_k) \cdot \mathbf{e}_n(M_k) \Delta S_k,$$

这是第二型面积分的向量形式. 在直角坐标系下, 也可以把此定义用坐标形式给出. 设

$$\mathbf{A}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

$$\mathbf{e}_n(M) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), M_k = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k),$$

则有

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathbf{A}(M_k) \cdot \mathbf{e}_n(M_k) \Delta S_k \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k \cos \alpha_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k \cos \beta_k \\ &\quad + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k \cos \gamma_k] \\ &= \iint_S P(x, y, z) \cos \alpha dS + Q(x, y, z) \cos \beta dS + R(x, y, z) \cos \gamma dS, \end{aligned} \quad (7.5)$$

其中 $dS = \|d\mathbf{S}\|$, $\cos \alpha dS$, $\cos \beta dS$, $\cos \gamma dS$ 分别是曲面面积微元向量 $d\mathbf{S}$ 在 yOz , zOx , xOy 坐标平面上的投影, 把它们分别记成 $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$, 即

$$d\mathbf{S} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy),$$

或

$$dS \cos \alpha = dy \wedge dz, \quad dS \cos \beta = dz \wedge dx, \quad dS \cos \gamma = dx \wedge dy.$$

于是(7.5)式可写成

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx \\ &\quad + R(x, y, z) dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (7.6)$$

上式右端就是第二型面积分的坐标形式, 因此第二型面积分也称为对坐标的面积分.(7.6)式是三个积分的组合, 它们也可以单独出现.

应当指出, 第二型面积分与第一型面积分的主要区别在于第一型面积分的积分微元 $f(M)dS$ 是两个数量的乘积, 积分曲面没有方向性, dS 在各坐标面上的投影 $d\sigma \geq 0$; 而第二型面积分的积分微元 $\mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S}$ 是两个向量的点积, 曲面有两侧之分, 在坐标表达式(7.6)中, $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ 是向量 $d\mathbf{S}$ 在相应坐标平面上的投影, 其正负取决于法向量 n 的方向. 例如, 当 (S) 在点 M 的法向量 n 与 z 轴正向交角为锐角时, $dx \wedge dy = d\sigma_{xy}$ 为正, 为钝角时 $dx \wedge dy = -d\sigma_{xy}$ 为负, 为直角时为零, 其中 $d\sigma_{xy}$ 是 (dS) 在 xOy 坐标平面上投影区域的面积, 在不致混淆时也简记为 $d\sigma$.

由上述定义可知, 流体通过曲面 (S) 流向 \mathbf{e}_n 所指向一侧的总流量 Q 为流速场 $v(M)$ 在 (S) 上的第二型面积分

$$Q = \iint_{(S)} v(M) \cdot dS.$$

此外,电位移向量 D 分布的电场与磁感应强度 B 分布的磁场,对有向曲面 (S) 的电通量和磁通量都可分别用第二型面积分表示为:

$$\Phi_D = \iint_{(S)} D \cdot dS,$$

$$\Phi_B = \iint_{(S)} B \cdot dS.$$

一般地,把向量场 A 在有向曲面 (S) 上的第二型面积分 $\Phi = \iint_{(S)} A \cdot dS$ 称为场 A 对 (S) 的通量.

2. 两种面积分的联系

由(7.5)式可见,

$$\iint_{(S)} A(M) \cdot dS = \iint_{(S)} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS.$$

上式表明了第二型面积分与第一型面积分的联系,因为上式右端就是被积函数

$$A(M) \cdot e_n = P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma$$

在 (S) 上的第一型面积分.

3. 第二型面积分的性质

与第二型线积分类似,第二型面积分有以下性质:

性质 1 若改变积分曲面的侧,则积分的值反号,即

$$\iint_{(+S)} A \cdot dS = - \iint_{(-S)} A \cdot dS.$$

性质 2 若把曲面 (S) 分成 (S_1) 与 (S_2) 两块, $(S) = (S_1) \cup (S_2)$, 则

$$\iint_{(S)} A \cdot dS = \iint_{(S_1)} A \cdot dS + \iint_{(S_2)} A \cdot dS,$$

其中等式两端的积分曲面同侧.

性质 3 若有向闭曲面 (S) 所围空间区域 (V) 被另一位于 (V) 内部的曲面分成了两个区域 (V_1) 、 (V_2) , 其边界曲面分别记作 (S_1) 、 (S_2) , 则

$$\oint_{(S)} A \cdot dS = \oint_{(S_1)} A \cdot dS + \oint_{(S_2)} A \cdot dS,$$

其中等式两端曲面或者均取外侧,或者均取内侧.

以上性质的证明思想与线积分类似,由读者自己完成.

4. 第二型面积分的计算

为简单起见, 我们仅讨论积分曲面可用显式方程 $z = z(x, y)$ (或 $x = x(y, z), y = y(z, x)$) 表出的情形.

设有向曲面 (S) 的方程为 $z = z(x, y)$, (S) 在 xOy 坐标平面上的投影区域为 σ_{xy} . 于是由(7.5)式与(7.6)式可知

$$\iint_{(S)} R(x, y, z) dx \wedge dy = \iint_{(S)} R(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

注意到 $\cos \gamma dS = \pm d\sigma_{xy}$, 把上式右端的第一型面积分化成二重积分得

$$\iint_{(S)} R(x, y, z) \cos \gamma dS = \pm \iint_{(\sigma_{xy})} R[x, y, z(x, y)] d\sigma_{xy}.$$

用直角坐标网来划分积分域 (σ_{xy}) , 有

$$d\sigma_{xy} = dx dy,$$

于是得

$$\boxed{\iint_{(S)} R(x, y, z) dx \wedge dy = \pm \iint_{(\sigma_{xy})} R[x, y, z(x, y)] dx dy.} \quad (7.7)$$

(7.7)式右端为函数 $R[x, y, z(x, y)]$ 在平面区域 (σ_{xy}) 上的二重积分, 当沿曲面的上侧(即 n 与 z 轴正向夹角为锐角)积分时, (7.7)式右端积分前的符号取正号; 沿下侧积分时取负号.

同理, 当 (S) 的方程可用 $x = x(y, z)$ 或 $y = y(z, x)$ 表出时, 分别有

$$\boxed{\iint_{(S)} P(x, y, z) dy \wedge dz = \pm \iint_{(\sigma_{yz})} P[x(y, z), y, z] dy dz,} \quad (7.8)$$

$$\boxed{\iint_{(S)} Q(x, y, z) dz \wedge dx = \pm \iint_{(\sigma_{zx})} Q[x, y(z, x), z] dz dx,} \quad (7.9)$$

其中 (σ_{yz}) 与 (σ_{zx}) 分别为 (S) 在 yOz 与 zOx 平面上的投影区域. 当沿曲面 (S) 的前侧(即 n 与 x 轴正向夹角为锐角)积分时, (7.8)式右端的符号取“+”; 沿后侧时, 取“-”. 当沿 (S) 的右侧(即 n 与 y 轴正向夹角为锐角)积分时, (7.9)式右端的符号取“+”; 沿左侧时, 取“-”.

对于闭合的或不能直接用显式表出的有向曲面 (S) , 应先将它关于某一坐标分片表示成显式, 然后运用以上公式化为相应的二重积分来计算.

例 7.7 计算面积分 $I = \iint_{(S)} z dx \wedge dy$, 其中 (S) 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 在第一卦限的部分与各坐标面所围成立体表面的外侧.

解 把(S)分成四部分:球面部分记作(S_1); xOy 平面、 yOz 平面以及 zOx 平面上三个四分之一的圆域,分别记作(S_2)、(S_3)和(S_4),其法向量均指向所围立体的外侧(图 7.9).

曲面(S_1)的方程为

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

它在 xOy 平面上的投影区域为(σ_{xy})= $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$,注意到此时法向量指向上方,它与 z 轴正向的夹角为锐角,应用公式(7.7)得

$$\begin{aligned} \iint_{(S_1)} z dx \wedge dy &= \iint_{(\sigma_{xy})} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{6}\pi R^3. \end{aligned}$$

(S_2)的方程为 $z=0$,其投影区域仍为(σ_{xy}),这时,由题意法向量指向下方,于是

$$\iint_{(S_2)} z dx \wedge dy = - \iint_{(\sigma_{xy})} 0 dx dy = 0.$$

由于(S_3)与(S_4)的法向量 n 均与 z 轴垂直,故它们在 xOy 平面上的投影均为零,即 $dx dy = 0$,从而沿这两片曲面上的面积分均为零,因此

$$I = \frac{1}{6}\pi R^3. \quad \blacksquare$$

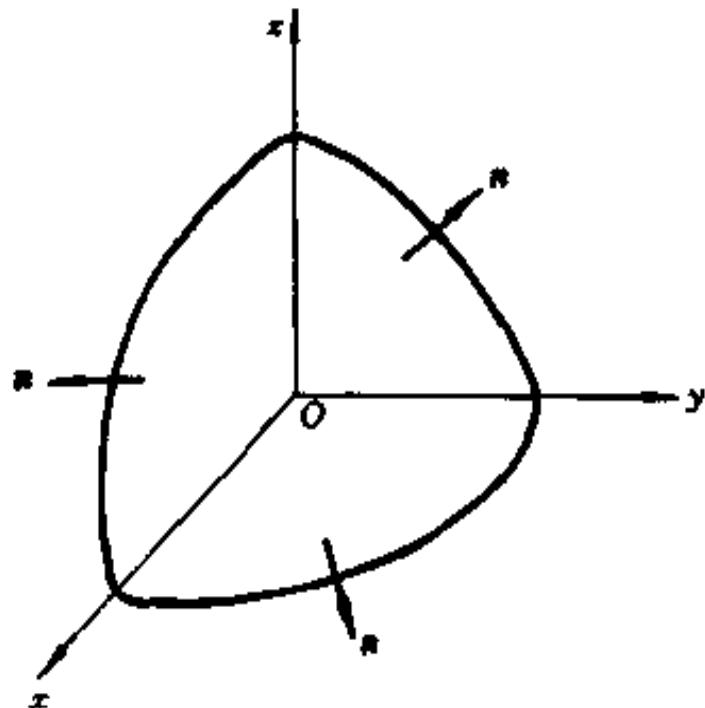


图 7.9

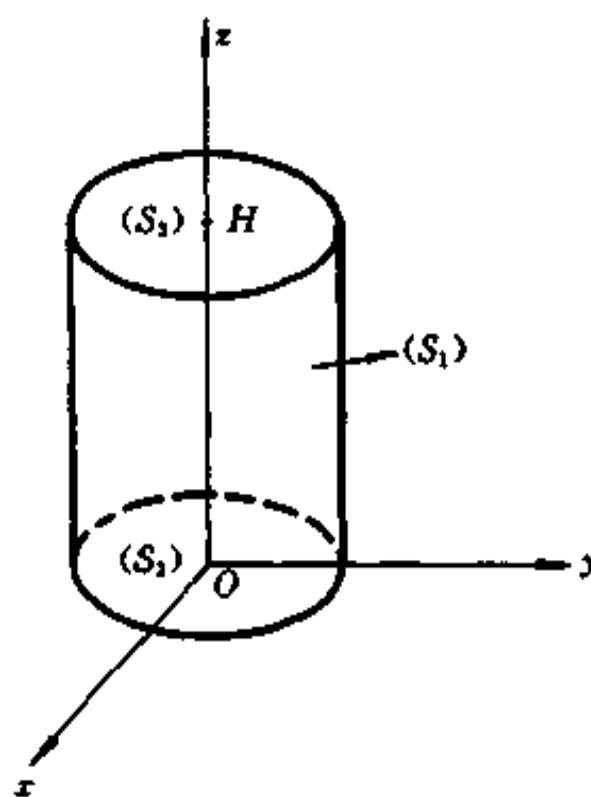


图 7.10

例 7.8 计算 $I = \iint_{(S)} (x^2 + y^2) dy \wedge dz + z dx \wedge dy$, 其中 (S) 为柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与 $z = 0, z = H (H > 0)$ 所围柱体表面的外侧.

解 把 (S) 分成三部分: 柱面部分 (S_1) , 下底面 (S_2) , 上底面 (S_3) (图 7.10).

先计算积分 $\iint_{(S)} (x^2 + y^2) dy \wedge dz$, 这里微元 $dy \wedge dz$ 表示要求 (S) 向 yOz 平面投影, 故需把柱面 (S_1) 分成前后两片分别记作 (S_{11}) 和 (S_{12}) , 它们的方程分别为

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}, \quad x = -\sqrt{R^2 - y^2}, \quad |y| \leq R,$$

这两片柱面在 yOz 平面的投影区域为

$$(\sigma_{yz}) = \{(y, z) \mid |y| \leq R, 0 \leq z \leq H\}.$$

据题意可知 (S_{11}) 与 (S_{12}) 的法向量和 x 轴正向的夹角分别为锐角与钝角, 再注意到 (S_2) 与 (S_3) 的法向量均垂直于 y 轴, 可得

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} (x^2 + y^2) dy \wedge dz \\ &= \iint_{(S_{11})} (x^2 + y^2) dy \wedge dz + \iint_{(S_{12})} (x^2 + y^2) dy \wedge dz + \iint_{(S_2)} (x^2 + y^2) dy \wedge dz \\ &+ \iint_{(S_3)} (x^2 + y^2) dy \wedge dz \\ &= \iint_{(\sigma_{yz})} [(R^2 - y^2) + y^2] dy dz - \iint_{(\sigma_{yz})} [(R^2 - y^2) + y^2] dy dz = 0, \end{aligned}$$

再计算第二个积分 $\iint_{(S)} z dx \wedge dy$.

由于柱面 (S_1) 在 xOy 平面上的投影为零, (S_2) 与 (S_3) 在 xOy 平面上的投影区域均为 $(\sigma_{xy}) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 注意到法向量的指向, 可得

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} z dx \wedge dy = \iint_{(S_2)} z dx \wedge dy + \iint_{(S_3)} z dx \wedge dy \\ &= - \iint_{(\sigma_{xy})} 0 dx dy + \iint_{(\sigma_{xy})} H dx dy = \pi R^2 H, \end{aligned}$$

因此

$$I = \pi R^2 H. \blacksquare$$

例 7.9 计算向量 $r = r(x, y, z)$ 对有向曲面 (S) 的通量, 其中

- (1) (S) 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧；
 (2) (S) 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$ 所围成锥体表面的外侧.

解 我们直接利用向量的运算来计算. 由通量定义可知

$$\Phi = \iint_{(S)} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{(S)} \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n dS,$$

(1) 当(S)为球面时, 由于 \mathbf{r} 与 \mathbf{e}_n 平行同向, 故

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n = |\mathbf{r}| = 1,$$

从而

$$\Phi = \iint_{(S)} dS = 4\pi.$$

(2) 把锥体表面分成锥面部分(S_1)和底平面部分(S_2) (图 7.11). 在锥面(S_1)上, 由于 $\mathbf{r} \perp \mathbf{e}_n$, 从而 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n = 0$, 故

$$\iint_{(S_1)} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{(S_1)} \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n dS = 0.$$

在底平面(S_2)上, 由于

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n = (x, y, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1,$$

从而

$$\iint_{(S_2)} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{(S_2)} dS = \pi,$$

所以

$$\Phi = \iint_{(S)} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \pi. \blacksquare$$

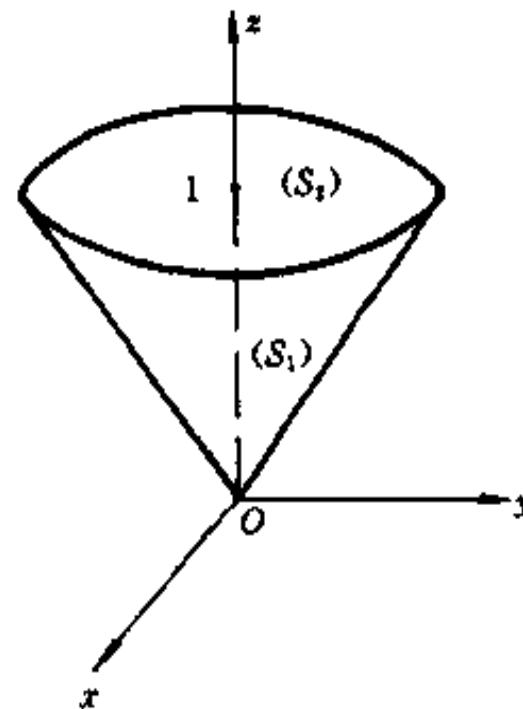


图 7.11

习题 6.7

(A)

1. 确定下列数量场的等值面：

- (1) $u = \frac{1}{Ax + By + Cz + D}$ (A, B, C, D 为常数); (2) $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
 (3) $u = \frac{k}{r^2}$ (k 为常数, r 为点 (x, y, z) 到点 (a, b, c) 的距离);

(4) $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$ 经过点 $M(1, 1, 2)$ 的等值面.

2. 计算下列线积分:

(1) $\int_{(C)} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, (C) 为抛物线 $y = x^2$ 上对应于 x 由 -1 增加到 1 的那一段;

(2) $\int_{(C)} xydx + (y - x)dy$, 其中 (C) 分别为

(I) 直线 $y = x$, (II) 抛物线 $y^2 = x$, (III) 立方抛物线 $y = x^3$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的那一段;

(3) $\oint_{(C)} ydx - xdy$, (C) 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的正向;

(4) $\int_{(C)} xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, (C) 为由点 $(1, 1, 1)$ 到点 $(1, 3, 4)$ 的直线段;

(5) $\int_{(C)} (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, (C) 为弧段 $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$) 依 t 增加方向.

3. 计算 $\int_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, 其中 $\mathbf{F} = -yi + xj$.

(1) (C) 为从 $A(R, 0)$ 到 $B(-R, 0)$ 的半径为 R 的上半圆;

(2) (C) 为由 $A(R, 0)$ 到 $B(-R, 0)$ 的直线段.

4. 设有平面力场 $\mathbf{F} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$, (C) 为圆周 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), 设一质点沿 (C) 逆时针方向运动一周, 求力场所作的功, 其中 $a > 0$.

5. 设在椭圆 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ 上, 每一点 M 都有作用力 \mathbf{F} , 其大小等于从 M 到椭圆中心的距离, 而方向指向椭圆中心. 今有一质量为 m 的质点 P 在椭圆上沿正向移动, 求:

(1) P 点历经第一象限中的椭圆弧段时, \mathbf{F} 所作的功;

(2) P 点走遍全椭圆时, \mathbf{F} 所作的功.

6. 将下列各曲面 (S) 上的第二型面积分化为累次积分:

(1) $\iint_{(S)} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \wedge dy$, (S) 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 1$ 与 $z = 2$ 所截出的部分的外侧;

(2) $\iint_{(S)} (x + y + z)dx \wedge dy + (y - z)dy \wedge dz$, (S) 为三坐标面及平面 $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ 所围成正方体的边界外侧.

7. 试证明第二型线积分的性质 2.

8. 计算下列线积分:

(1) $\oint_{(C)} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, (C) 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 在第一卦限部分的边界曲线, 方向与球面在第一卦限的外法线方向构成右手系;

$$(2) \int_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \mathbf{F} = (3x^2 - 3yz + 2xz)i + (3y^2 - 3xz + z^2)j + (3z^2 - 3xy + x^2 + 2yz)k,$$

(C) 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

9. 设 $\mathbf{F} = |y, -x, z^2|$, (S) 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上满足 $0 \leq x \leq 1$ 且 $0 \leq y \leq 1$ 部分的下侧, 求 $\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

10. 计算下列面积分:

$$(1) \iint_{(S)} (x+1)^2 dx \wedge dy, (S) \text{ 为半球面 } x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0) \text{ 的上侧};$$

$$(2) \iint_{(S)} xydy \wedge dz + yzdz \wedge dx + zx dx \wedge dy, (S) \text{ 为由平面 } x=0, y=0, z=0,$$

$x+y+z=1$ 所围成的四面体表面的外侧.

11. 求向量场 $r = \{x, y, z\}$ 穿过下列曲面的通量:

(1) 圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2 (0 \leq z \leq h)$ 的侧表面;

(2) 上述圆柱的全表面.

$$12. \text{ 计算 } \iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \text{ 其中 } \mathbf{F} = xi + yj + zk, (S) \text{ 是球面 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ 的外侧}.$$

(B)

1. 计算线积分 $\oint_{(C)} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, (C) 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与柱面 $x^2 + y^2 = Rx (z \geq 0, R > 0)$ 的交线, 其方向是面对着正 x 轴看去是反时针的.

2. 计算下列面积分:

$$(1) \iint_{(S)} \frac{xdy \wedge dz + z^2 dx \wedge dy}{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ 其中 } (S) \text{ 是由曲面 } x^2 + y^2 = R^2 \text{ 及平面 } z = R, z = -R$$

$(R > 0)$ 所围成立体表面外侧;

$$(2) \iint_{(S)} zdx \wedge dy, (S) \text{ 为椭球面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 的外侧}.$$

3. 利用线积分的定义证明第二型线积分的计算公式

$$\int_{(C)} P(x, y, z) dx = \int_a^\beta P[x(t), y(t), z(t)] \dot{x}(t) dt,$$

其中(C)的方程为 $r = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq \beta$.

4. 试证明第二型面积分的性质 3.

5. 证明下列线积分的估计式:

$$\left| \int_{(C)} X dx + Y dy \right| \leq LM,$$

其中 L 为积分路径(C)的弧长, M 为函数 $\sqrt{X^2 + Y^2}$ 在(C)上的最大值.

$$6. \text{ 计算 } \iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \text{ 其中 } \mathbf{F} = \frac{xi + yj + zk}{x^2 + y^2 + z^2}, (S) \text{ 是上半球面 } z = R^2 - x^2 - y^2 \text{ 的下侧}.$$

第八节 各种积分的联系及其在场论中的应用

在多元函数积分中,我们已经学过二重积分、三重积分、两种线积分和两种面积分.本节,我们首先要建立这些积分之间的联系,并利用这些积分及其联系对场作进一步的研究.

8.1 Green 公式

Green 公式反映了第二型平面线积分与二重积分的联系.

在讲解这个定理之前,需要对平面区域作些进一步的说明.若区域(D)内任意一条简单闭曲线的内部全部属于(D),或者说(D)内任一闭曲线均可在(D)内连续变形缩小成(D)内的一点,则称(D)是一单连通域;否则称为复连通域.例如,图 8.1 中所示的两个区域(D)都是复连通域.显然,凸区域是单连通域.

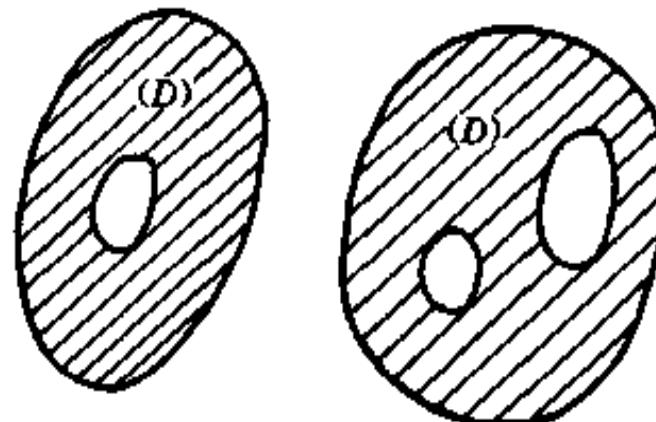


图 8.1

定理 8.1 设平面有界闭域(σ)由分段光滑的简单曲线所围成, (σ)的边界曲线记为(C), 函数 $P, Q \in C^{(1)}((\sigma))$. 则下述的 Green 公式成立

$$\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{(+C)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (8.1)$$

其中($+C$)表示(C)为正向.

证 首先,设积分域(σ)可以表示为

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

其中曲线 $y = y_i(x)$ ($i = 1, 2$)如图 8.2 所示.于是由二重积分的计算法得

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx.$$

另一方面,由第二型线积分的计算法得

$$\begin{aligned} \oint_{(+C)} P(x, y) dx &= \int_{(AB)} P dx + \int_{(BC)} P dx + \int_{(CA)} P dx \\ &= \int_a^b P[x, y_1(x)] dx + \int_b^a P[x, y_2(x)] dx + 0 \end{aligned}$$

$$= - \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx,$$

所以

$$-\iint_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \oint_{(+C)} P(x, y) dx.$$

同理,若 (σ) 又可表示为

$$x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \quad (c \leq y \leq d),$$

则可证得

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \oint_{(+C)} Q dy.$$

于是,Green 公式(8.1)成立.

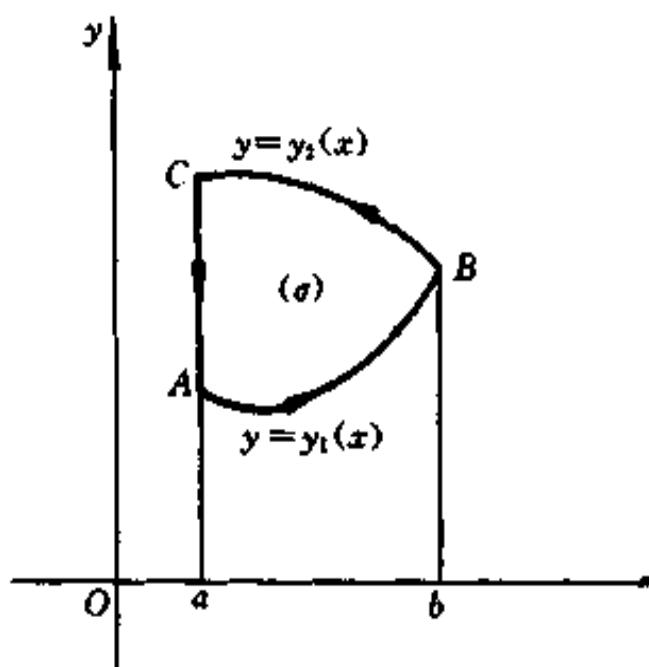


图 8.2

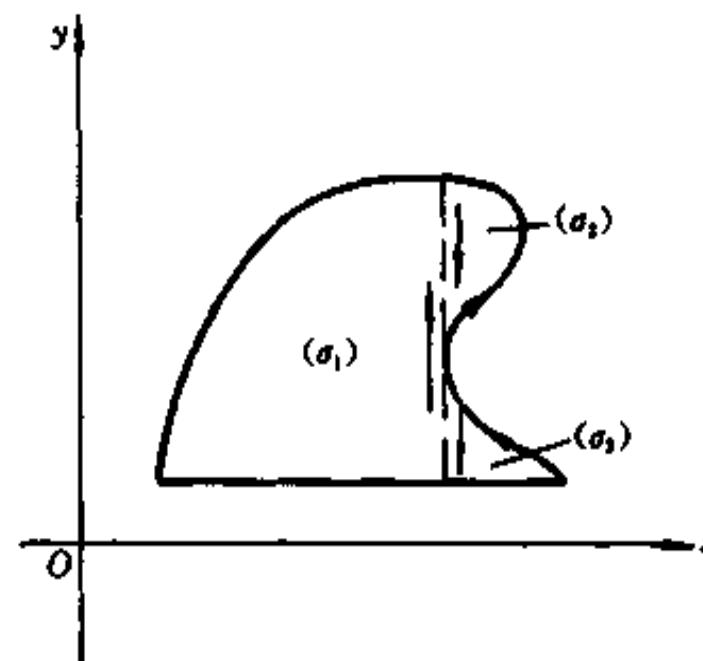


图 8.3

其次,当 (σ) 为不能用上述不等式表示的单连域时,我们可以把它分割成若干个上述类型的区域.如图 8.3 中的区域 (σ) 可分成三个上述类型的子域 (σ_1) , (σ_2) 和 (σ_3) ,在每个子域上 Green 公式均成立,即

$$\iint_{(\sigma_i)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{(+C_i)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad i = 1, 2, 3,$$

其中 $(+C_i)$ 是子域 (σ_i) 的正向边界曲线.从而

$$\sum_{i=1}^3 \iint_{(\sigma_i)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \sum_{i=1}^3 \oint_{(+C_i)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

注意到右端线积分相加时,相邻两子域的公共边界上的线积分要在相反方向各取一次,从而对应的积分值相互抵消,因此,Green 公式(8.1)仍然成立. ■

Green 公式还可以推广到 (σ) 是复连通域的情形. 此时我们可以用切割的方法把 (σ) 化成单连通域. 例如, 在图 8.4(a) 中, 域 (σ) 的正向边界曲线 $(+ C)$ 由正向的闭曲线 $(+ C_1)$ 与负向的闭曲线 $(- C_2)$ 所组成, 即 $(+ C) = (+ C_1) \cup (- C_2)$. 任作割线 \overline{AB} , 将被割开后的域 (σ) 的边界看作是由 (\bar{C}) 围成, 即

$$(\bar{C}) = (C_1) \cup (\overline{AB}) \cup (C_2) \cup (\overline{BA}).$$

(\bar{C}) 的正向如图 8.4(a) 所示. 这样一来, (σ) 就可以看作是一单连通域. 应用公式(8.1)得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma &= \oint_{(+C)} P dx + Q dy = \int_{(+C_1)} + \int_{(\overline{AB})} + \int_{(\overline{BA})} + \int_{(-C_2)} \\ &= \int_{(+C_1)} + \int_{(-C_2)} = \oint_{(+C)}, \end{aligned}$$

因此 Green 公式对复连通域 (σ) 仍然成立. 对于具有多个“洞”的复连通域(图 8.4(b))可以类似地处理.

Green 公式建立了平面区域 (σ) 上的二重积分与沿 (σ) 的边界曲线 (C) 的第二型线积分之间的联系, 它显示: 函数 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 在域 (σ) 上的二重积分可分别由它的“原函数” P 和 Q 在 (σ) 的边界 (C) 上的值确定. 在这个意义下, Green 公式可以看作是定积分的 Newton - Leibniz 公式在二重积分中的体现. Green 公式不仅有重要的理论意义, 而且也可用于线积分的计算.

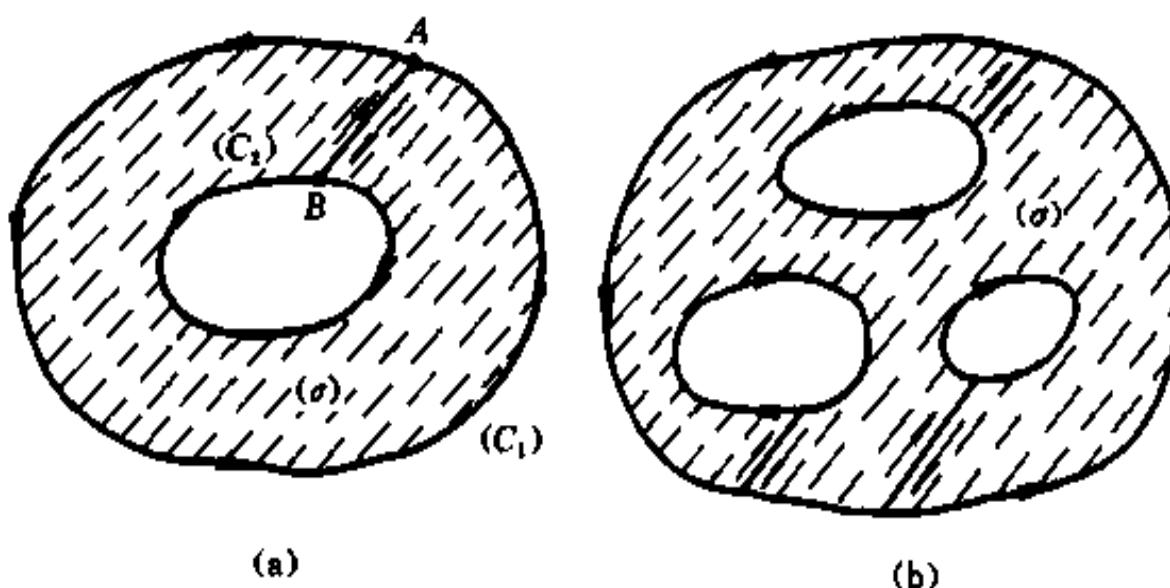


图 8.4

例 8.1 计算 $\int_C xy^2 dy - yx^2 dx$, 其中

- (1) (C) 为圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 的正向;
- (2) (C) 为上半圆周 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, 方向从 $A(R, 0)$ 到 $B(-R, 0)$.

解 (1) 对所给线积分, 我们当然可以通过圆周的参数方程化成定积分来计算, 这里应用 Green 公式更为方便.

$$\oint_{(C)} xy^2 dy - yx^2 dx = \iint_{(\sigma)} (y^2 + x^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

(2) (C) 不是闭曲线, 不能直接利用 Green 公式, 我们先补上有向直线段 \overrightarrow{BA} 使其封闭(图 8.5), 从而有

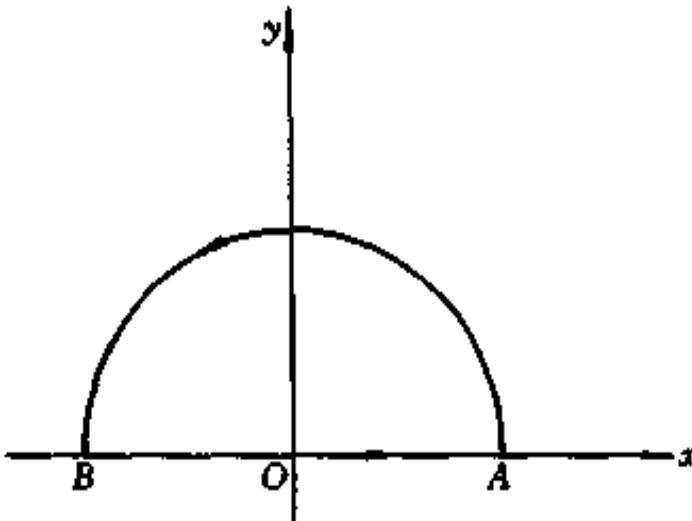


图 8.5

$$\int_{(C)} xy^2 dy - yx^2 dx = \oint_{(C \cup \overrightarrow{BA})} [xy^2 dy - yx^2 dx] - \int_{(\overrightarrow{BA})} [xy^2 dy - yx^2 dx].$$

应用 Green 公式得

$$\oint_{(C \cup \overrightarrow{BA})} xy^2 dy - yx^2 dx = \iint_{(\sigma)} (y^2 + x^2) d\sigma = \frac{\pi R^4}{4},$$

而

$$\int_{(\overrightarrow{BA})} xy^2 dy - yx^2 dx = \int_{-R}^R 0 dx = 0,$$

所以

$$\int_{(C)} xy^2 dy - yx^2 dx = \frac{\pi R^4}{4}. \quad \blacksquare$$

例 8.2 证明: 由一条分段光滑的简单闭曲线(C)所围成平面区域(σ)的面积为

$$A = \frac{1}{2} \oint_{(+C)} x dy - y dx.$$

证 由 Green 公式知

$$\frac{1}{2} \oint_{(+C)} x dy - y dx = \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} [1 - (-1)] d\sigma = \iint_{(\sigma)} d\sigma = A. \blacksquare$$

例 8.3 设 (C) 为不通过原点的任一分段光滑的正向简单闭曲线, 计算积分

$$I = \oint_{(C)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

解 记 $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

由假设, (C) 不通过原点, 因此原点可能在 (C) 内也可能在 (C) 外, 现分别加以讨论.

(1) 设 (C) 的内部不包含原点 $O(0, 0)$. 这时由于 P, Q 及其偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 均在 (C) 所围区域 (σ) 内连续, 应用 Green 公式, 因 $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, 从而有

$$I = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0.$$

(2) 若 (C) 的内部包含原点 $O(0, 0)$. 这时由于 P, Q 均在点 O 无定义, 故不能直接利用 Green 公式. 现取 $\epsilon > 0$ 足够小, 作以 O 为中心、半径为 ϵ 的圆周 (C_ϵ) , 使 (C_ϵ) 全部位于 (C) 的内部(图 8.6). 于是 P, Q 及 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 均在由 $(+C)$ 与 $(-C_\epsilon)$ 所围成的复连通域 (σ) 上连续, 应用 Green 公式得

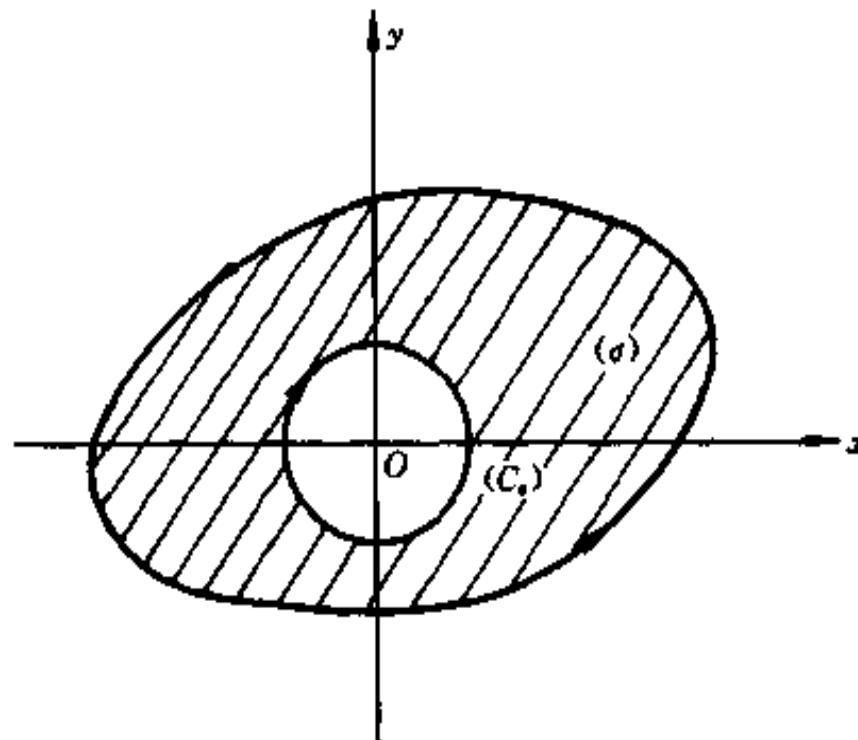


图 8.6

$$\int_{(+C)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + \int_{(-C_\epsilon)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0,$$

即

$$\int_{(+C)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_{(+C_\epsilon)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

这样我们就把沿任一简单闭曲线(C)的线积分化成了沿圆周(C_ϵ)的线积分. 现在用第二型线积分的计算法来求上式右端的积分. 因为($+C_\epsilon$)的参数方程为

$$x = \epsilon \cos t, y = \epsilon \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

于是

$$\int_{(+C_\epsilon)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)}{\epsilon^2} dt = 2\pi,$$

故 $I = 2\pi$. ■

8.2 平面线积分与路径无关的条件

一般来讲, 沿路径(C)从点 A 到点 B 的线积分

$$\int_C \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s} = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

的值应与向量场 $\mathbf{A}(M)$ 的分布、起点 A 和终点 B 的位置以及积分路径(C)三者有关. 然而在本章例 7.5 中, 我们已经看到, 有的第二型线积分, 其值与积分路径无关, 这种情况在物理学中也经常碰到. 例如, 如果 $\mathbf{F}(M)$ 表示重力场, 当质点从点 A 移到点 B 时, 重力场所作的功 $W = \int_C \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{s}$ 只取决于力场 \mathbf{F} 以及

起点和终点, 而与积分路径无关(例 7.6). 一般地, 当线积分 $\int_C \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s}$ 的值与积分路径无关时, 称场 $\mathbf{A}(M)$ 为一保守场. 所以重力场是一保守场. 这时, 可以略去积分路径(C)不写而把线积分用起点 A 和终点 B 表示为 $\int_{(A)}^{(B)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s}$.

由保守场的定义可见, 判断一个场是否保守场, 从数学上看, 就是判断此场的第二型线积分是否与路径无关. 下面我们先论述这一命题的几个等价命题, 然后讨论命题成立的条件.

定理 8.2 设区域(σ) $\subseteq \mathbb{R}^2$, $P, Q \in C((\sigma))$, 则下列三个命题等价:

1° 沿(σ)内任一分段光滑的简单闭曲线(C), 线积分

$$\oint_C P dx + Q dy = 0;$$

2° 线积分

$$\int_{(A)}^{(B)} P dx + Q dy$$

的值在 (σ) 内与积分路径无关；

3° 被积表达式

$$P dx + Q dy$$

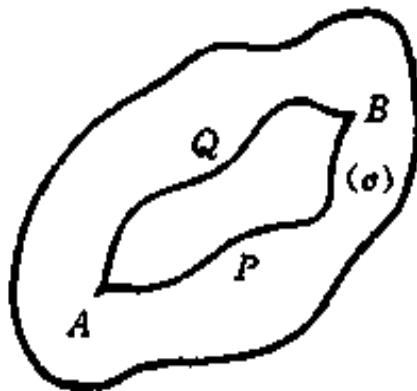
在 (σ) 内是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分，即

$$du = P dx + Q dy.$$

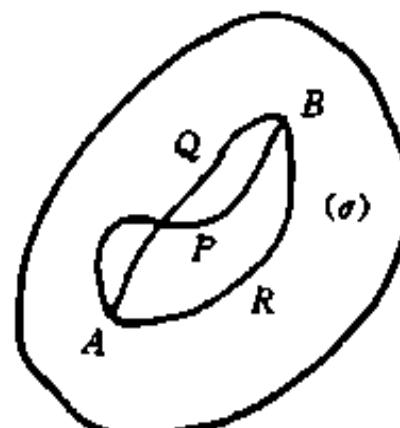
证 我们按 $1^{\circ} \Rightarrow 2^{\circ} \Rightarrow 3^{\circ} \Rightarrow 1^{\circ}$ 的顺序，用循环推证法来证明。首先来证 $1^{\circ} \Rightarrow 2^{\circ}$ 。

设 1° 成立， A, B 为 (σ) 中的任意两点，以 A 为起点 B 为终点，任意联结位于 (σ) 内的两条曲线 $\overline{(APB)}$ 与 $\overline{(AQB)}$ （图 8.7(a)）。如果此两曲线除 A, B 两点外不相交，那末，由于

$$\underbrace{\int_{(APB)} P dx + Q dy}_{+} \underbrace{\int_{(BQA)} P dx + Q dy}_{=} \underbrace{\oint_{(APBQA)} P dx + Q dy}_{=} 0,$$



(a)



(b)

图 8.7

所以

$$\underbrace{\int_{(APB)} P dx + Q dy}_{=} - \underbrace{\int_{(BQA)} P dx + Q dy}_{=} \underbrace{\int_{(AQB)} P dx + Q dy}_{=}$$

如果 $\overline{(APB)}$ 与 $\overline{(AQB)}$ 还有其它交点（图 8.7(b)），那末，在 (σ) 内从 A 到 B 再作一条曲线 $\overline{(ARB)}$ ，使它与 $\overline{(APB)}$, $\overline{(AQB)}$ 均不再相交，从而

$$\underbrace{\int_{(APB)} P dx + Q dy}_{=} \underbrace{\int_{(ARB)} P dx + Q dy}_{=} \underbrace{\int_{(AQB)} P dx + Q dy}_{=}$$

因此,命题 2° 成立.

其次证明 $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$.

设 2° 成立,在 (σ) 内任取一定点
 $A(x_0, y_0)$ 为起点,一动点 $B(x, y)$ 为终点,

作变上限积分 $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$ (图

8.8).由于线积分的值与积分路径无关,它的值将随上限 (x, y) 的确定而唯一确定,因而是上限 (x, y) 的一个二元函数,记作 $u(x, y)$,即

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy.$$

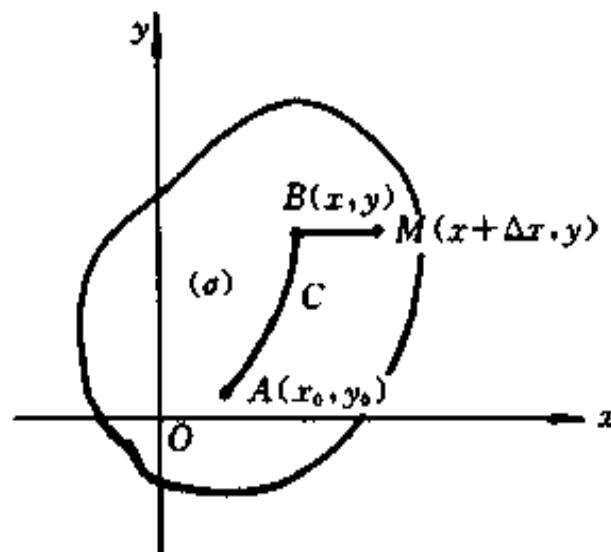


图 8.8

下面证明,这个函数的全微分就正好是被积表达式,即

$$du = P dx + Q dy.$$

为此,只需证明

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

由偏导数定义

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x},$$

而

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P dx + Q dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy,$$

由于线积分与路径无关,故上式右端的第一个积分等于由点 A 沿曲线 (C) 到点 B 的积分与由点 B 沿水平直线到点 M 的积分之和,即

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P dx + Q dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx + Q dy,$$

从而

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx + Q dy.$$

上式右端线积分的积分路径为直线段 \overline{BM} ,把这个线积分化成定积分并应用积分中值定理,得

$$\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P dx + Q dy = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y) dx = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x, 0 \leq \theta \leq 1.$$

于是,由 P 的连续性得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y).$$

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

由于 $P, Q \in C((\sigma))$, 即 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in C((\sigma))$, 所以 $u(x, y)$ 在 (σ) 内可微, 且

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P dx + Q dy.$$

最后证明: $3' \Rightarrow 1'$. 设 $3'$ 成立, 即在 (σ) 内存在可微函数 $u(x, y)$, 使

$$du = P dx + Q dy,$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q,$$

设 (C) 为 (σ) 内任意一条分段光滑的简单闭曲线, 其方程为 $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($a \leq t \leq \beta$), 且 $x(a) = x(\beta)$, $y(a) = y(\beta)$. 由线积分的计算法可知

$$\begin{aligned} \oint_C P dx + Q dy &= \int_a^\beta [P[x(t), y(t)] \dot{x}(t) + Q[x(t), y(t)] \dot{y}(t)] dt \\ &= \int_a^\beta \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right] dt = \int_a^\beta \left(\frac{du}{dt}[x(t), y(t)] \right) dt \\ &= u[x(t), y(t)] \Big|_a^\beta = 0, \end{aligned}$$

即命题 $1'$ 成立. ■

定理 8.2 的三个命题都具有重要的物理意义. 如果把向量场 $(P(x, y), Q(x, y))$ 看作是一平面流速场 $v(x, y)$, 即 $v = Pi + Qj$, 于是

$$\oint_C P dx + Q dy = \oint_C v(M) \cdot ds = \oint_C v(M) \cdot e_t ds.$$

由于 $v(M) \cdot e_t$ 表示流速场在曲线 (C) 的切线方向的分速度, 因而积分

$\oint_C v(M) \cdot e_t ds$ 表示在单位时间内, 场 v 沿闭曲线 C 流动流体的数量, 力学上称其为沿 C 的环流量. 它给出了流速场 v 绕曲线 (C) 旋转趋势大小的度量. 一般地, 对于向量场 $A(M) = Pi + Qj$, 我们称沿闭曲线 (C) 的第二型线积分

$$\oint_{(C)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{(C)} \mathbf{A}(M) \cdot e_r ds$$

为向量场 \mathbf{A} 沿闭曲线 (C) 的环量. 命题 1° 中, 沿 (σ) 内任一分段光滑的简单闭曲线 (C) , 线积分均为零, 这表明了向量场 $\mathbf{A}(M)$ 在 (σ) 内围绕任一点均无旋转趋势, 我们称其为无旋场. 因此, 命题 1° 表明 \mathbf{A} 是无旋场.

由保守场的定义可知, 命题 2° 表明向量场 $\mathbf{A}(M)$ 是一保守场.

下面我们来阐述命题 3° 的物理意义. 在第五章第三节中, 我们知道, 给定一个可微的数量场 $u(x, y)((x, y) \in (\sigma))$, 在 (σ) 内每一点就唯一确定了一个梯度 $\nabla u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j, (x, y) \in (\sigma)$. 它是确定在 (σ) 内的一个向量场, 称为梯度场. 现在, 我们考虑它的反问题: 给定一个连续的向量场 $\mathbf{A}(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j, (x, y) \in (\sigma)$, 是否能存在一个数量场 $u(x, y)$, 使 $\nabla u(x, y) = \mathbf{A}(x, y)((x, y) \in (\sigma))$ 呢? 换句话说, 在 (σ) 内是否存在函数 $u(x, y)$, 使

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \text{ 或 } du = P dx + Q dy.$$

可见, 这一反问题实际上就是要问, 对于给定的连续向量场 $\mathbf{A}(M) = (P, Q)$, $M \in (\sigma)$, 表达式 $P dx + Q dy$ 是否是 (σ) 内某个二元函数 u 的全微分? 如果这样的 $u(x, y)$ 存在, 则称 u 是向量场 $\mathbf{A}(M)$ 的势函数或位函数, 而称向量场 $\mathbf{A}(M)$ 是一有势场. 因此, 命题 3° 表明向量场 $\mathbf{A}(M)$ 是一有势场.

定理 8.2 的结论表明: 对于一个连续的向量场 $\mathbf{A}(M) = (P, Q), M \in (\sigma)$, $\mathbf{A}(M)$ 是无旋场、保守场和有势场三者是相互等价的.

现在, 我们来进一步研究在什么条件下定理 8.2 中的三个命题成立.

定理 8.3 设 (σ) 为一平面单连域, $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \in C((\sigma))$, 则定理 8.2 中三个命题成立的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in (\sigma). \quad (8.2)$$

证 由于上述三个命题的等价性, 只须证明条件 (8.2) 是命题 1° 成立的充要条件即可.

充分性 设条件 (8.2) 成立, 在 (σ) 内任作一分段光滑的简单闭曲线 (C) , 由于 (σ) 是单连域, 所以 (C) 的内部 (σ_1) 必全部包含在 (σ) 内, 从而有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in (\sigma_1).$$

由 Green 公式得

$$\oint_{(+C)} P dx + Q dy = \iint_{(\sigma_1)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0,$$

即命题 1° 成立.

必要性 设沿 (σ) 内任一闭曲线 (C) 有 $\oint_{(C)} P dx + Q dy = 0$. 如果条件 (8.2) 不成立, 即至少存在一点 $M_0(x_0, y_0) \in (\sigma)$, 使

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_{M_0} \neq 0,$$

不妨设其大于零. 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ 连续, 故存在点 M_0 的一个 δ 邻域 $U(M_0, \delta)$, 使

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geq q > 0, (x, y) \in U(M_0, \delta).$$

于是沿 $U(M_0, \delta)$ 的边界曲线 (C_δ) 有

$$\oint_{(C_\delta)} P dx + Q dy = \iint_{U(M_0, \delta)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma \geq q \Sigma > 0,$$

其中 Σ 为 $U(M_0, \delta)$ 的面积, 这与假设矛盾. ■

这样一来, 对于向量场 $A = (P, Q)$, 如果 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续且 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, 那末 A 一定是一个有势场. 怎样求得它的势函数呢? 下面就来讨论这个问题.

势函数的求法 给定向量场 $A(M) = (P, Q), M \in (\sigma)$, 设 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \in C((\sigma))$, 且 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$. 求 A 的势函数. 从数学上看就是求一个二元函数 u , 使

$$du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

这种问题也称为是全微分求积问题, 所求得的势函数 $u(x, y)$ 也称为是全微分 $P dx + Q dy$ 的一个原函数.

显然, 如果 $u(x, y)$ 是 $P dx + Q dy$ 的一个原函数, 那末 $u(x, y) + C$ (C 为常数) 也是其原函数, 而且同一元函数一样, 容易说明(留作习题), 任意两个原函数仅相差一个常数.

下面通过例题说明求势函数的方法.

例 8.4 验证向量场 $A = (3x^2 - 6xy, 3y^2 - 3x^2)$ 是有势场并求其势函数.

解 由于 $\frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 3x^2) = -6x, \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 6xy) = -6x$, 所以 A 为有势场.

下面求它的势函数 $u(x, y)$.

解法一(用线积分求) 由定理 8.2 的证明可知

$$\Phi = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2 - 6xy) dx + (3y^2 - 3x^2) dy$$

是一势函数, 且积分与路径无关. 取路径为: 先沿 x 轴从 $O(0,0)$ 到 $M_0(x, 0)$, 再

沿纵直线从 M_0 到 $M(x, y)$ (图 8.9). 于是由第二型线积分的计算法得

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (3x^2 - 6xy)dx + (3y^2 - 3x^2)dy \\ &\quad + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (3x^2 - 6xy)dx + (3y^2 - 3x^2)dy \\ &= \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (3y^2 - 3x^2)dy \\ &= x^3 + y^3 - 3x^2 y.\end{aligned}$$

所以势函数(即原函数)的一般形式为

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 y + C,$$

其中 C 为任意常数.

解法二(用偏积分^①求) 要求势函数 $u(x, y)$, 使 $\nabla u = (3x^2 - 6xy, 3y^2 - 3x^2)$.

由于 $\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\}$, 故只需求 u , 使

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy, \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2. \quad (8.4)$$

(8.3)式两端对 x 积分, 把 y 视为常数, 得

$$u = x^3 - 3x^2 y + \varphi(y), \quad (8.5)$$

由于 y 是被看作常数积分的, 故积分常数 φ 中可能含有 y . 再将(8.5)式两端对 y 求导并与(8.4)式比较得

$$-3x^2 + \varphi'(y) = 3y^2 - 3x^2,$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi'(y) &= 3y^2, \\ \varphi(y) &= y^3 + C.\end{aligned}$$

代入(8.5)式得

$$u = x^3 - 3x^2 y + y^3 + C. \quad \blacksquare$$

例 8.5 计算线积分 $\int_C \cos(x + y^2)dx + \left[2y \cos(x + y^2) - \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} \right] dy$, 其

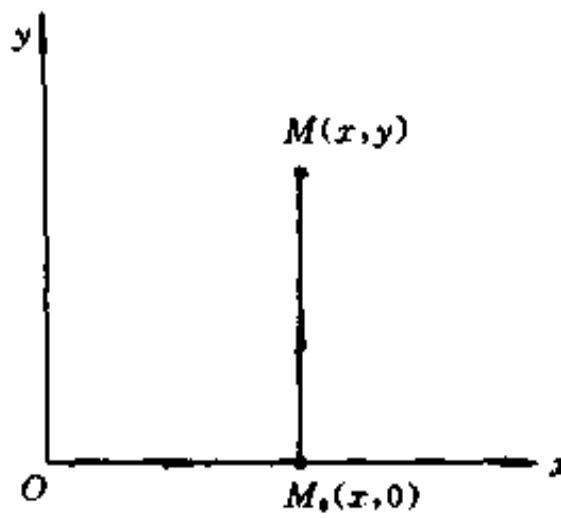


图 8.9

① 我们将把 y 视为常数对 x 的积分 $\int f(x, y)dx$ 称为对 x 的偏积分.

中(C)为摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 上由 $O(0,0)$ 点到 $A(2\pi a, 0)$ 点的有向弧段.

解 此题若利用第二型线积分的计算法直接化为定积分去计算是相当麻烦的,但由于

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin(x + y^2) \cdot 2y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以,此线积分与路径无关. 我们取有向直线段(\overrightarrow{OA})去代替(C),从而得

$$\begin{aligned} \int_C &= \int_{(\overrightarrow{OA})} \cos(x + y^2) dx + \left[2y \cos(x + y^2) - \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} \right] dy \\ &= \int_0^{2\pi a} \cos x dx = \sin 2\pi a. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

应当指出,由于定理 8.2 中命题 2° 与 3° 的等价性,我们也可以利用原函数来计算与积分路径无关的线积分. 事实上,如果线积分

$$I = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy$$

与路径无关,那末 $P dx + Q dy$ 必为某一函数的全微分,设其原函数为 $F(x, y)$,由于

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$

也是被积表达式的一个原函数,所以

$$\Phi(x, y) = F(x, y) + C.$$

但 $\Phi(x_0, y_0) = 0$, 故

$$C = -F(x_0, y_0).$$

于是

$$\Phi(x, y) = F(x, y) - F(x_0, y_0),$$

因此

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0) = F(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)}, \quad (8.6)$$

公式(8.6)相当于定积分中的 Newton-Leibniz 公式.

例 8.6 计算 $\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

解 容易看出

$$\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = d\sqrt{x^2 + y^2},$$

所以当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 被积表达式是一全微分, 它的一个原函数为 $\sqrt{x^2 + y^2}$, 从而在不包含原点的任一平面区域内, 所给积分与路径无关, 且由公式(8.6)可知

$$\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{(1,0)}^{(0,1)} = 0. \quad \blacksquare$$

8.3 Stokes 公式与旋度

1. Stokes 公式

Green 公式给出了平面上沿闭曲线 (C) 的第二型线积分与 (C) 所围平面区域上二重积分之间的关系. 现在把它推广到空间, 考察沿空间闭曲线 (C) 的第二型线积分与 (C) 上所张曲面的面积分之间的关系.

定理 8.4 设区域 $(G) \subseteq \mathbb{R}^3$, $P, Q, R \in C^{(1)}((G))$, (C) 为 (G) 内一条分段光滑的有向简单闭曲线, (S) 是以 (C) 为边界且完全位于 (G) 内的任一分片光滑的有向曲面, (C) 的方向与 (S) 的法向量符合右手螺旋法则, 则

$$\begin{aligned} & \oint_{(C)} P dx + Q dy + R dz \\ &= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned} \tag{8.7}$$

公式(8.7)称为 Stokes 公式.

设 $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, 根据 nabla 算子 ∇ 的定义(第五章第三节), Stokes 公式可写成向量形式:

$$\oint_{(C)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(S)} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{(S)} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_n dS. \tag{8.8}$$

如果 \mathbf{A} 为一平面向量场 (P, Q) , (C) 为一平面闭曲线, (C) 所围区域为 (σ) , 这时, Stokes 公式(8.7)就蜕化为 Green 公式, 可见, Stokes 公式是 Green 公式的推广.

证 首先, 我们来证明:

$$\oint_{(C)} P dx = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy. \tag{8.9}$$

先设曲面(S)与垂直于 xOy 平面的直线至多交于一点,曲面(S)的法向量与相应曲线(C)的正向如图8.10所示.此时,(S)的方程可以写成 $z = f(x, y)$,其边界记为(C),(C)在 xOy 平面上的投影曲线记为(Γ).设(Γ)的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

从而(C)的参数方程应是

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = f[x(t), y(t)] \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

设 t 增大的方向对应于(C)的正向,故(8.9)式

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \oint_{(C)} P(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), f[x(t), y(t)]] \dot{x}(t) dt \\ &= \oint_{(\Gamma)} P[x, y, f(x, y)] dx. \end{aligned}$$

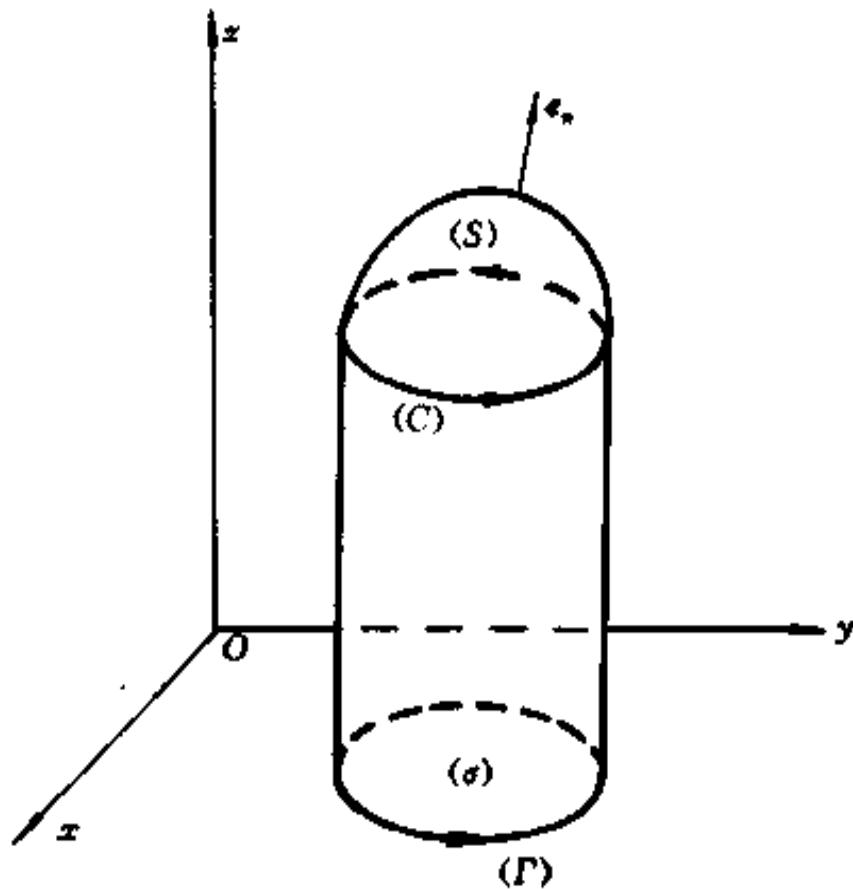


图 8.10

对上式右端先应用 Green 公式,再利用复合函数求导法则,得

$$\begin{aligned} \oint_{(\Gamma)} P[x, y, f(x, y)] dx - 0 dy &= - \iint_{(\sigma)} \frac{\partial}{\partial y} P[x, y, f(x, y)] d\sigma \\ &= - \iint_{(\sigma)} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right] d\sigma. \end{aligned}$$

因此

$$\oint_{(C)} P(x, y, z) dx = - \iint_{(S)} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right] d\sigma.$$

另一方面,由 $f(x, y) - z = 0$ 可知,曲面 (S) 的法向量可取为

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right),$$

由于单位法向量 $e_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 于是

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\cos\beta} = \frac{-1}{\cos\gamma},$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

注意到 e_n 指向上方,于是(8.9)式的右端

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy &= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma \right) dS \\ &= - \iint_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) \cos\gamma dS \\ &= - \iint_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

因此(8.9)式成立.

当曲面 (S) 与垂直于 xOy 平面的直线的交点多于一个时,可通过分割的方法,把 (S) 分成几部分,使每一部分均与垂直于 xOy 平面的直线至多交于一点,然后分片讨论,再利用第二型线积分的性质,同样可证(8.9)式成立.

同理可证

$$\oint_{(C)} Q(x, y, z) dy = \iint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz, \quad (8.10)$$

$$\oint_{(C)} R(x, y, z) dz = \iint_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx, \quad (8.11)$$

将(8.9),(8.10),(8.11)三式两端分别相加即得 Stokes 公式(8.7). ■

2. 环量与环量密度

类似于平面向量场 A 沿平面闭曲线 (C) 的环量,空间向量场 A 沿空间闭曲线 (C) 的线积分

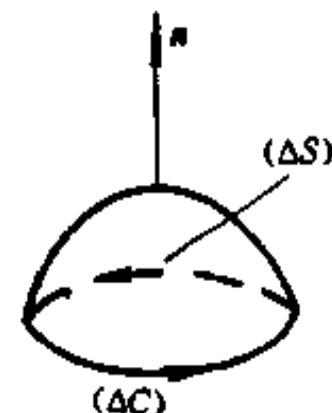
$$\oint_{(C)} A(x, y, z) \cdot ds = \oint_{(C)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

称为 $A(x, y, z)$ 沿闭曲线 (C) 的环量,它同样表示了 A 绕 (C) 旋转趋势的大小.

环量是对向量场旋转趋势整体的描述. 然而在向量场 $A(M)(M \in (G))$ 中, 不同点处 A 的旋转趋势一般说来是不相同的, 因而尚需对旋转趋势作局部的考察. 例如在一流速场中, 在旋涡附近的质点旋转趋势较大, 而远离旋涡中心的质点, 其旋转趋势就较小. 不仅如此, 即使在同一点, 由于旋转轴的方向不同也会影响其旋转趋势的大小. 设想将一微小叶轮放在旋涡附近, 当叶轮的中心轴垂直于水面时, 转动较快, 倾斜放置时, 旋转势力将减弱. 这一事实表明: 当我们讨论向量场在一点处的旋转趋势大小时, 必须同时讨论沿什么方向作旋转, 或者说讨论其旋转轴的方向.

现在我们来考察向量场 $A(M)$ 在点 M 处绕方向 n 的旋转趋势. 为此, 以 n 为法向量, 过点 M 任作一微小曲面 (ΔS) , 它的边界曲线记为 (ΔC) . 并选取 (ΔC) 的正向使与 n 符合右手螺旋法则(图 8.11). 当 (ΔS) 很小时, A 沿 (ΔC) 的环量 $\Delta \Gamma$ 与小曲面 (ΔS) 的面积 ΔS 之比

$$\frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \frac{1}{\Delta S} \oint_{(\Delta C)} A \cdot ds$$



近似地反映出 A 在点 M 附近绕方向 n 的旋转趋势大小.

图 8.11

让小曲面 (ΔS) 在保持 n 为其法向量的前提下任意缩向点

M , 若上述比值的极限存在, 则称此极限为 A 在 M 点沿 n 方向的环量密度, 记作 $\frac{d\Gamma}{dS}$, 即

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \lim_{(\Delta S) \rightarrow M} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \lim_{(\Delta S) \rightarrow M} \frac{1}{\Delta S} \oint_{(\Delta C)} A \cdot ds.$$

可见, 环量密度也是一种变化率.

3. 旋度的定义及其计算公式

我们看到向量场 $A(M)$ 在点 M 沿不同的方向 n 可能有不同的环量密度, 这一情形与方向导数颇为类似.

在第五章 3.3 段中, 我们引入了与方向导数密切相关的梯度这一向量, 而且看到, 梯度的方向是使方向导数最大的方向, 它的模是方向导数的最大值. 有了梯度后, 要求任一方向的方向导数, 只需求梯度在此方向的投影即可. 现在我们完全类似地讨论环量密度, 给出以下旋度定义.

定义 8.1(旋度) 若在场 $A(M)$ 中一点 M 处存在这样一个向量, 其方向为使 A 在点 M 环量密度最大的方向, 其模等于环量密度的最大值, 则称此向量为场 $A(M)$ 在点 M 的旋度, 记作 $\text{rot } A$.

计算公式 我们先推导环量密度的计算公式. 建立直角坐标系, 设 $A =$

$(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 为区域 $(G) \subseteq \mathbf{R}^3$ 上的 $C^{(1)}$ 类函数,

$$\mathbf{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

由 Stokes 公式的向量形式(8.8)可知

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \lim_{(\Delta S) \rightarrow M} \frac{1}{\Delta S} \oint_{(\Delta C)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{(\Delta S) \rightarrow M} \frac{1}{\Delta S} \iint_{(\Delta S)} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_n dS.$$

利用积分中值定理可知

$$\iint_{(\Delta S)} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_n dS = [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_n]_{\bar{M}} \Delta S, \bar{M} \in (\Delta S).$$

由于 $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_n$ 在 M 点连续, 从而

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \lim_{(\Delta S) \rightarrow M} [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_n]_{\bar{M}} = [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_n]_M, \quad (8.12)$$

或

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma, \quad (8.13)$$

公式(8.13)就是环量密度的计算公式.

由(8.12)式可见

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \| \nabla \times \mathbf{A} \| \| \mathbf{e}_n \| \cos\varphi,$$

其中 φ 为向量 $\nabla \times \mathbf{A}$ 与 \mathbf{e}_n 的夹角, 因而当 $\varphi = 0$, 即取 \mathbf{e}_n 与向量 $\nabla \times \mathbf{A}$ 同向时, 环量密度 $\frac{d\Gamma}{dS}$ 最大, 其值为 $\| \nabla \times \mathbf{A} \|$. 由旋度的定义可知, 向量 $\nabla \times \mathbf{A}$ 正是场 \mathbf{A} 在点 M 的旋度, 即

$$\text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A},$$

或

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{A} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k. \end{aligned} \quad (8.14)$$

(8.14)式就是旋度的坐标计算公式.

利用旋度, (8.12)式可改写为

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \text{rot}\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n = \| \text{rot}\mathbf{A} \| \cos(\text{rot}\mathbf{A}, \mathbf{e}_n).$$

因此,有了旋度后,要求向量场 A 沿方向 e_n 的环量密度,只要求旋度 $\text{rot}A$ 在 e_n 方向的投影即可.

应当指出,若 $A = (P, Q, R) \in C^{(1)}((G))$, 则 (G) 内任一点均有一旋度与其对应,从而旋度 $\text{rot}A$ 也在 (G) 内构成一向量场,称为旋度场.

利用旋度还可将 Stokes 公式写成下列形式

$$\oint_{(C)} A \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(S)} \text{rot}A \cdot d\mathbf{S}.$$

在各种不同的物理场中,旋度有着不同的物理意义.例如,对于流速场 v , 旋度指出了使流体在点 M 处环量密度(旋转趋势)最大的方向,其模就是最大的环量密度,反映了最大的旋转趋势;在磁场强度 H 构成的磁场中,环量密度 $\frac{d\Gamma}{dS}$ 表示在点 M 处沿所取方向 e_n 的电流密度,而旋度 $\text{rot}H$ 称为电流密度向量,它指出了该点处电流密度最大的方向,它的模就是最大的电流密度值.

例 8.7 一刚体绕过原点 O 的轴 l 转动(图 8.12),其角速度 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 为常向量,则刚体中各点处都有线速度 $v(M)$,构成一线速度场,求此线速度场 $v(M)$ 的旋度.

解 设点 M 的向径为

$$\mathbf{r} = (x, y, z),$$

则由运动学知,点 M 的线速度场为

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 z, \omega_1 y - \omega_2 x).$$

从而

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\omega.$$

可见,在刚体旋转的线速度场中,任一点 M 处的旋度,除去一个常数因子外,恰好就是刚体旋转的角速度.

4. 旋度的运算法则

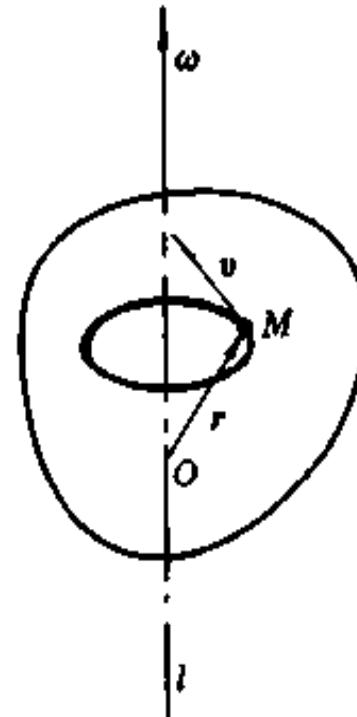


图 8.12

利用旋度的计算公式(8.14)容易验证下列运算法则:

- (1) $\text{rot}(CA) = C\text{rot}A$ 或 $\nabla \times (CA) = C\nabla \times A$, 其中 C 为常数;
- (2) $\text{rot}(A \pm B) = \text{rot}A \pm \text{rot}B$ 或 $\nabla \times (A \pm B) = \nabla \times A \pm \nabla \times B$;
- (3) $\text{rot}(uA) = u\text{rot}A + \text{grad}u \times A$ 或 $\nabla \times (uA) = u(\nabla \times A) + (\nabla u) \times A$,

其中 u 为一数量值函数.

例 8.8 在点电荷 q 所产生的静电场中, 求电场强度 E 的旋度.

解 由电学知

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon r^3}, \quad \|r\| = r \neq 0,$$

其中 r 为向径. 根据旋度的运算法则(1)与(3), 有

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= \nabla \times \left(\frac{qr}{4\pi\epsilon r^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \nabla \times \left(\frac{1}{r^3} r \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} \nabla \times r + \nabla \cdot \frac{1}{r^3} \times r \right).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\nabla \times r &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \frac{1}{r^3} &= -\frac{3}{r^5} r,\end{aligned}$$

从而

$$\nabla \cdot \frac{1}{r^3} \times r = 0,$$

所以

$$\nabla \times E = \mathbf{0}.$$

8.4 Gauss 公式与散度

1. Gauss 公式

Gauss 公式给出了空间区域(V)上的三重积分与(V)的边界曲面(S)上的第二型面积分之间的关系, 由下述定理给出.

定理 8.5 设空间有界闭区域(V)由分片光滑的闭曲面(S)所围成, $\mathbf{A}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \in C^{(1)}((V))$, 则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy, \quad (8.15)$$

其中(S)的法向量朝外.

证 我们只证明

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_S R dx \wedge dy, \quad (8.16)$$

其它两项的证明类似.

首先设积分域(V)可表示为

$$z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in (\sigma_{xy}), \quad (8.17)$$

把(V)的边界曲面(S)分成三部分:

(S_1)、(S_2)与(S_3),如图 8.13 所示.

将(8.16)式左端的三重积分化为累次积分并计算得:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV &= \iint_{(\sigma_{xy})} d\sigma \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_{(\sigma_{xy})} \{R[x, y, z_2(x, y)] - \\ &\quad R[x, y, z_1(x, y)]\} d\sigma. \end{aligned}$$

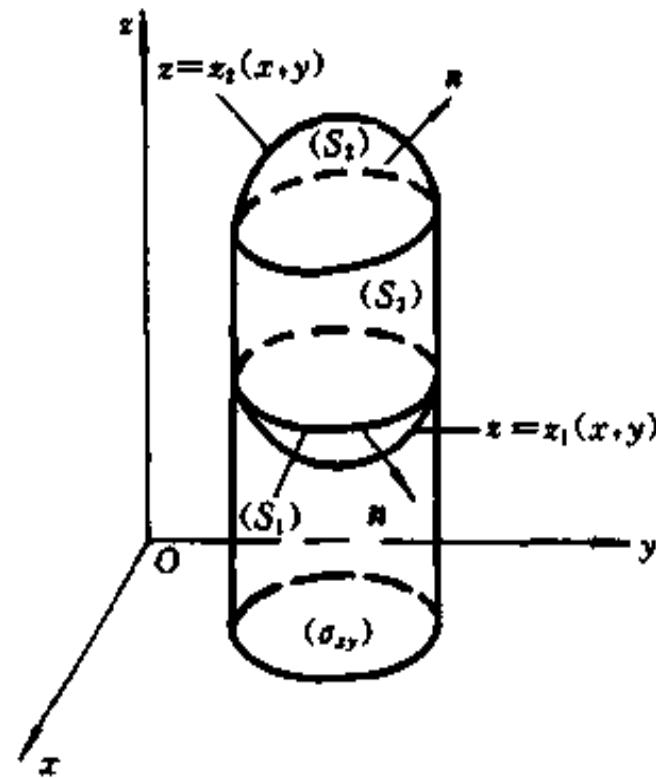


图 8.13

将(8.16)式右端的面积分化为二重积分得:

$$\begin{aligned} \iint_S R dx \wedge dy &= \iint_{(S_2 \text{ 上})} R dx \wedge dy + \iint_{(S_3 \text{ 外})} R dx \wedge dy + \iint_{(S_1 \text{ 下})} R dx \wedge dy \\ &= \iint_{(\sigma_{xy})} R[x, y, z_2(x, y)] d\sigma + 0 + \iint_{(\sigma_{xy})} -R[x, y, z_1(x, y)] d\sigma \\ &= \iint_{(\sigma_{xy})} \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\} d\sigma. \end{aligned}$$

于是公式(8.16)对形如图 8.13 的区域(V)成立.

对于其它形状的区域,可以利用曲面将其分割成若干子域的并,使每一子域

均可用形如(8.17)式的不等式表示,类似于 Stokes 公式的处理,同样可证(8.16)式成立. ■

利用 nabla 算子,Gauss 公式(8.15)可以写成以下向量形式:

$$\iiint_V \nabla \cdot A \, dV = \iint_{\partial V} A \cdot dS. \quad (8.18)$$

例 8.9 计算面积分

$$I = \iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + (z^3 + x^2 + y^2) dx \wedge dy,$$

其中(1) (S) 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧;

(2) (S) 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

解 (1) 设 (S) 所围区域为 (V) ,由 Gauss 公式得:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R r^4 \sin\theta \, dr = \frac{12}{5}\pi R^5. \end{aligned}$$

(2) 曲面 (S) 不封闭,为了利用 Gauss 公式,我们先补上 xOy 平面上的圆面 (S_1) : $x^2 + y^2 = R^2$,使其法线方向朝下,这样对于由上半球面 (S) 与圆面 (S_1) 所围成的区域 (V_1) 来说,其边界曲面的法线方向朝外,于是应用 Gauss 公式得:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(S_1)} + \iint_{(S_1 \text{ 下})} - \iint_{(S_1 \text{ 上})} = \iint_{(S \cup S_1 \text{ 外})} + \iint_{(S_1 \text{ 上})} \\ &= \iiint_{(V_1)} 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dV + \iint_{(S_1)} (x^2 + y^2) \, d\sigma = \frac{6}{5}\pi R^5 + \frac{\pi R^4}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. 通量与通量密度

在本章第七节中,我们知道, $A(M)$ 对曲面 (S) 的第二型面积分 $\iint_{(S)} A \cdot dS$ 的物理意义是向量场 $A(M)$ 对曲面 (S) 的通量. 设想 $v(M)$ ($M \in (G) \subseteq \mathbf{R}^3$) 表示一不可压缩的定常流速场, (S) 为 (G) 内一闭合曲面, 法向量指向外侧, 则

$$Q = \iint_{(S)} v \cdot dS$$

表示流入闭曲面 (S) 的流量与流出 (S) 的流量的代数和. 如果 $Q > 0$, 则表示流入的少而流出的多. 这时, 在 (S) 所包围的区域 (V) 内必有产生流体的“源”; 如果 $Q < 0$, 则流入的多而流出的少, 这时 (V) 内必有吸收流体的“洞”, 我们把

“洞”看作是负源，因而当 $\iint_{(S)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$ 时， (S) 所围区域 (V) 内必有源存在。

在不同的物理场中，源有着不同的物理意义。例如，对于电场，正源表示存在正电荷，它发出电力线；负源表示存在负电荷，它吸收电力线。又如，对于磁场，正源与负源分别表示磁的正极与负极。因此，一般地研究向量场的源有着重要的实际意义。

对于一个向量场，我们不仅需要研究源的存在性，还应该掌握源的强度。如果在 (S) 所围区域 (V) 内仅有向量场 $\mathbf{A}(M)$ 的一个源，那末我们可以利用通量

$$\Phi = \iint_{(S)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S}$$

的正负及其大小来判定 (S) 所围区域 (V) 内源的正负及其强弱。如果向量场 $\mathbf{A}(M)$ 的源连续分布，那末通量 Φ 仅能表征区域 (V) 内源的总体效应。为了更精确地掌握场中各点处源的正负及其强弱，就必须像环量密度那样来研究各点处的通量密度。设点 $M \in (V)$ ，在 M 的邻域内作一内部含有点 M 的闭曲面 $(\Delta S) \subseteq (V)$ ， (ΔS) 所围区域记为 (ΔV) ，于是

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \iint_{(\Delta S)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S}$$

是 (ΔV) 上的平均通量密度，它近似地反映了点 M 处源的强度，而

$$\lim_{(\Delta V) \rightarrow M} \frac{1}{\Delta V} \iint_{(\Delta S)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S}$$

就精确地反映了 \mathbf{A} 在点 M 处源的强度，称为向量场 \mathbf{A} 在点 M 处的通量密度，也称为 \mathbf{A} 在点 M 的散度。

3. 散度的定义及其计算

定义 8.2(散度) 设有连续向量场 $\mathbf{A}(M)$ ($M \in (V) \subseteq \mathbb{R}^3$)，在 (V) 内点 M 的邻域任作一包含点 M 而法向量朝外的闭曲面 $(\Delta S) \subseteq (V)$ ， (ΔS) 所围区域为 (ΔV) ，其体积为 ΔV 。如果让 (ΔS) 所围区域 (ΔV) 以任意方式缩小为点 M 时，比式

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \iint_{(\Delta S)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S}$$

的极限存在，则此极限值称为场 $\mathbf{A}(M)$ 在点 M 的散度，记作

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{(\Delta S)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S}. \quad (8.19)$$

由定义可见，散度就是通量密度，也就是在点 M 处通量对体积的变化率。

应当注意，与梯度和旋度不同，向量场的散度是一个数量。对于给定的连续

向量场 $\mathbf{A}(M)$, 场域中任一点 M 都对应着一个散度 $\operatorname{div}\mathbf{A}(M)$, 因而散度形成了一个数量场, 称为散度场. 它揭示了场 \mathbf{A} 内各点源的分布与强弱, 当某一点 M 处的散度为正时, 向量场 \mathbf{A} 在此点有正源; 为负时, 有负源; 为零时, 此点处无源, 散度的绝对值给出了源强度的大小.

计算公式 建立直角坐标系, 设

$$\mathbf{A}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

其中 P, Q, R 为 $C^{(1)}$ 类函数. 由 Gauss 公式(8.18), 可将(8.19)式中的面积分化为三重积分, 再应用积分中值定理得:

$$\iint_{(\Delta S)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{(\Delta V)} \nabla \cdot \mathbf{A} dV = (\nabla \cdot \mathbf{A})|_{M'} \Delta V,$$

其中 $M' \in (\Delta V)$. 于是

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{A}(M) &= \lim_{\Delta V \rightarrow M} \frac{1}{\Delta V} \iint_{(\Delta S)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow M} (\nabla \cdot \mathbf{A})|_{M'} = \nabla \cdot \mathbf{A}(M), \end{aligned}$$

即

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.} \quad (8.20)$$

可见 Gauss 公式(8.18)左端的被积函数就是 \mathbf{A} 的散度.

利用散度可将 Gauss 公式写成下列形式

$$\boxed{\iiint_{(V)} \operatorname{div}\mathbf{A} dV = \iint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.}$$

例 8.10 求由向径 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 所构成向量场的散度.

解 由散度的计算公式(8.20)得

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \quad \blacksquare$$

4. 散度的运算法则和公式

利用公式(8.20), 容易证明下列散度的运算法则:

1° $\operatorname{div}(C\mathbf{A}) = C\operatorname{div}\mathbf{A}$ 或 $\nabla \cdot (C\mathbf{A}) = C\nabla \cdot \mathbf{A}$, 其中 C 为常数;

2° $\operatorname{div}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \operatorname{div}\mathbf{A} \pm \operatorname{div}\mathbf{B}$ 或 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \pm \nabla \cdot \mathbf{B}$;

3° $\operatorname{div}(u\mathbf{A}) = u\operatorname{div}\mathbf{A} + \operatorname{grad}u \cdot \mathbf{A}$ 或 $\nabla \cdot (u\mathbf{A}) = u\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla u \cdot \mathbf{A}$.

此外, 在场的讨论中还常用到以下公式, 我们把它们列举出来以备读者查用 (设所涉及高阶偏导数均连续).

4° $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$ 或

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B});$$

5° $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0$ 或 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$;

6° $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \mathbf{0}$ 或 $\nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}$;

7° $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$ 或 $\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u = \Delta u$,

其中 $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ 称为 Laplace 算子, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 称为 Laplace 式;

8° $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ 或 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$,

其中 $\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R)$, $\mathbf{A} = (P, Q, R)$.

我们来证明 8°, 其余的证明留给读者.

由于 $\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix},$$

从而 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ 的第一个分量为

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta P. \end{aligned}$$

同理可得:

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_y = \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta Q,$$

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_z = \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta R.$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta P, \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta Q, \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta R, \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{A}), \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \mathbf{A}), \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \right) - (\Delta P, \Delta Q, \Delta R) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

例 8.11 在电量为 q 的点电荷所产生的电场中,(1)求电位移向量场 \mathbf{D} 穿过以 M_0 为中心、 R 为半径的球面(S)的电通量 Φ_e ; (2)求 \mathbf{D} 的散度.

解 由电学知道电位移向量

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, r \neq 0,$$

其中 r 是 M_0 到任一点 M 的距离, \mathbf{e}_r 是从 M_0 指向 M 点的单位向量.

(1) 由于 \mathbf{e}_r 与球面(S)的法向量方向相同, 所以

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{q}{4\pi R^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_n dS \\ &= \frac{q}{4\pi R^2} \iint_S dS = q.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{ 由于 } \nabla \cdot \mathbf{D} &= \nabla \cdot \left(\frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r \right) = \frac{q}{4\pi} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \nabla \frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} \right),\end{aligned}$$

由例 8.10 知, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$, 而

$$\nabla \frac{1}{r^3} = -3 \frac{1}{r^4} \nabla r = -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5},$$

所以

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) = 0. \quad \blacksquare$$

由上例可见,除点电荷 q 所在的点 M_0 ($r = 0$)外,在场中处处 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. 由此,再利用 Gauss 公式可知:

\mathbf{D} 穿过任何不包含点 M_0 在内的闭曲面的电通量均为零; \mathbf{D} 穿过任何包含点 M_0 的闭曲面的电通量都等于 q .

根据面积分的性质及电场的迭加原理, 电通量是可以迭加的, 如果电位移场 \mathbf{D} 是由几个分布在不同点上的点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 产生的, 那末 \mathbf{D} 穿过包围这几个点电荷在内的任一闭合曲面(S)的电通量 Φ_e 应等于各个点电荷 q_i 所产生的电位移场 \mathbf{D}_i 穿过该闭合曲面的电通量 Φ_i 的代数和, 即

$$\Phi_e = \oint_{(S)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{(S)} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i \cdot d\mathbf{S} \right) = \sum_{i=1}^n \oint_{(S)} \mathbf{D}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n q_i. \quad (8.21)$$

上式说明, \mathbf{D} 穿过任一闭合曲面 (S) 的电通量, 等于 (S) 内部各点电荷的代数和, 这就是电学中的 **Gauss 定理**.

如果电场中的电荷是连续分布的, 设其电荷密度为 $\rho(x, y, z)$, 从而体积微元的电荷应为 $\rho(x, y, z)dV$, 所以 (S) 内部的全部电荷为

$$Q = \iiint_V \rho(x, y, z)dV,$$

其中 (V) 是 (S) 所围的空间区域. 因此, (8.21) 式相应地变为

$$\Phi_e = \oint_{(S)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV = Q.$$

而由 Gauss 公式可知

$$\Phi_e = \oint_{(S)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV,$$

可见

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho.$$

这就是说, 在静电场中, 电位移向量 \mathbf{D} 的散度等于电荷体密度.

8.5 几种重要的特殊向量场

首先, 我们需要对空间不同的单连域加以区分.

定义 8.3 如果对于空间区域 (G) 内的任何简单的闭曲线 (C) , 都可以作出一张以 (C) 为边界而完全属于 (G) 的曲面, 那末域 (G) 称为一维单连域; 如果对于 (G) 内任何不自身相交的闭曲面 (S) , 它所包围的区域全部属于 (G) 中, 那末域 (G) 称为二维单连域.

由定义可见, 两个同心球面所围成的区域是一个一维单连域, 但却不是二维单连域; 一个球域挖去一条直径后便不是一维单连域, 但它却是一个二维单连域; 环面(即轮胎面)是一个二维单连域, 但却不是一维单连域.

1. 无旋场

在 8.2 中讨论平面向量场 $\mathbf{A}(M)$ 时, 我们已经知道, 如果沿场内任一简单的闭曲线 (C) 的环量

$$\oint_{(C)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

那末 $\mathbf{A}(M)$ 是一无旋场, 与此同时, 我们还讨论了保守场和有势场, 对于空间向

量场而言,情况是类似的,只不过现在我们有了旋度的概念,无旋场可以定义得更为简捷.

定义 8.4 设有向量场 $\mathbf{A}(M) \in C((G))$, $(G) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(1) 若线积分 $\int_{(A)}^{(B)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{s}$ 的值在 (G) 内与路径无关, 则称 \mathbf{A} 为保守场,

其中 A, B 为 (G) 内任意两点;

(2) 若在 (G) 内恒有 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, 则称 \mathbf{A} 为无旋场;

(3) 若存在定义在 (G) 上的函数 u , 使

$$\mathbf{A} = \nabla u,$$

则称 \mathbf{A} 为有势场, 并称 u 为 \mathbf{A} 的势函数或位函数.

当 $(G) \subseteq \mathbb{R}^3$ 是一维单连域而 $\mathbf{A} \in C^{(1)}((G))$ 时, 容易从 Stokes 公式看出,

这里无旋场的定义与沿 (G) 内任何闭曲线 (C) 的环量 $\oint_{(C)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$ 的定义是等价的(留作习题), 类似于定理 8.2、定理 8.3 的证明, 可以得到:

定理 8.6 设 (G) 是一维单连域, $\mathbf{A} = (P, Q, R) \in C^{(1)}((G))$, 则下列四个命题等价:

1° \mathbf{A} 是一无旋场, 即在 (G) 内恒有

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

2° 沿 (G) 内任一简单的闭曲线 (C) 均有环量

$$\oint_{(C)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{(C)} P dx + Q dy + R dz = 0;$$

3° \mathbf{A} 是一保守场, 即在 (G) 内线积分 $\int_{(A)}^{(B)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ 与路径无关;

4° \mathbf{A} 是一有势场, 即在 (G) 内 $P dx + Q dy + R dz$ 为某一函数的全微分.

例 8.13 验证 $\mathbf{A} = (x^2 - y^2, y^2 - 2xy, z^2 + 2)$ 为有势场, 并求其势函数.

解 由于

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & y^2 - 2xy & z^2 + 2 \end{vmatrix} = (0, 0, 0),$$

所以, \mathbf{A} 为有势场.

与平面线积分类似, 对于空间有势场, 我们可以选择一简单的路径通过计算空间线积分去求其势函数, 也可利用偏积分法去求势函数(即原函数). 前一方法

留给读者,这里我们仅介绍偏积分法.

对方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - y^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - 2xy, \end{array} \right. \quad (8.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - y^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - 2xy, \end{array} \right. \quad (8.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - y^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - 2xy, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = z^2 + 2 \end{array} \right. \quad (8.24)$$

作偏积分,由(8.22)式两端对 x 积分,注意到积分常数中可能含有 y 和 z ,得

$$u = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + \varphi(y, z).$$

对 y 求偏导数并与(8.23)式比较得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2xy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = y^2 - 2xy,$$

从而

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y^2,$$

再对 y 作偏积分,得

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{3}y^3 + \psi(z),$$

再对 z 求偏导数并与(8.24)比较得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \psi'(z) = z^2 + 2.$$

故

$$\psi(z) = \frac{1}{3}z^3 + 2z + C,$$

因此

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 + 2z + C \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xy^2 + 2z + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

对于空间线积分,也有类似于 Newton-Leibniz 公式的公式:

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_1, y_1, z_1)} P dx + Q dy + R dz = u(x, y, z) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_1, y_1, z_1)}.$$

2. 无源场

定义 8.5 若在向量场 \mathbf{A} 的场域中处处有

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

则称 \mathbf{A} 为无源场.

定义 8.6 通过场域某一块曲面 (S) 的所有向量线构成的一个管状区域称为向量管(图 8.14).

定理 8.7 设 $(G) \subseteq \mathbb{R}^3$ 是二维单连域, $\mathbf{A} \in C^{(1)}((G))$, 则下列三个命题是等价的:

1° \mathbf{A} 是无源场, 即在 (G) 内恒有 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$;

2° \mathbf{A} 沿 (G) 内任一不自相交闭曲面 (S) 的通量为零, 即 $\oint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$;

3° 在 (G) 内存在一向量函数

$\mathbf{B}(M)$, 使 $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B}$, 即 \mathbf{A} 是某向量场 \mathbf{B} 的旋度场, 其中 \mathbf{B} 称为 \mathbf{A} 的一个向量势.

证 首先证明 1°与 2°等价.

设 1°成立, 在 (G) 内任作一不自身相交的闭曲面 (S) . 由于 (G) 是二维单连域, 所以 (S) 所包围的区域 $(G') \subseteq (G)$, 从而由 Gauss 定理得

$$\oint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{(G')} \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0.$$

设 2°成立, 用反证法. 假定存在一点 $M_0 \in (G)$, 使 $\nabla \cdot \mathbf{A}(M_0) \neq 0$, 不妨设 $\nabla \cdot \mathbf{A}(M_0) > 0$. 由于 $\nabla \cdot \mathbf{A}(M)$ 连续, 所以存在 M_0 的一邻域使在其中 $\nabla \cdot \mathbf{A} \geq q > 0$. 在此邻域内任作一包含点 M_0 在其内部的闭曲面 (S) , 其所围区域记为 (G') , 运用 Gauss 公式得

$$\oint_{(+S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{(G')} \nabla \cdot \mathbf{A} dV \geq q \iiint_{(G')} dV > 0,$$

与 2°矛盾, 所以 $\nabla \cdot \mathbf{A}(M) = 0, \forall M \in G$.

其次, 证明 1°与 3°等价.

设 1°成立, 要证明存在向量场 \mathbf{B} 使 $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{A}$. 令

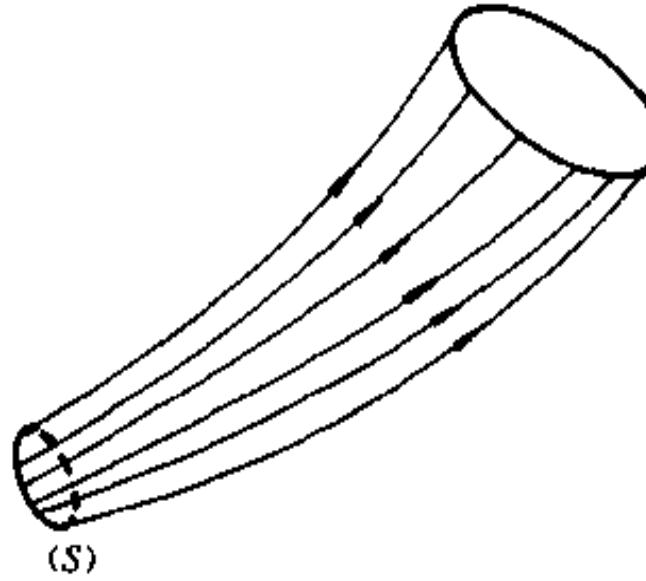


图 8.14

$$\mathbf{B} = (X, Y, Z), \mathbf{A} = (P, Q, R),$$

即要从方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = P(x, y, z), \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = Q(x, y, z), \end{array} \right. \quad (8.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = Q(x, y, z), \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = R(x, y, z) \end{array} \right. \quad (8.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = R(x, y, z) \end{array} \right. \quad (8.27)$$

中求解 (X, Y, Z) , 这是一偏微分方程组, 求解它的一般方法超出了本书的范围. 但是, 容易验证:

$$\begin{aligned} X &= \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz - \int_{y_0}^y R(x, y, z_0) dy, \quad Y = - \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz, \\ Z &= C \quad (C \text{ 为常数}) \end{aligned}$$

满足上述偏微分方程组. 事实上对于方程(8.25)与(8.26)可将上式代入直接验证; 对于(8.27)式应用积分号下求导公式得

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = - \int_{z_0}^z \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dz - \int_{z_0}^z \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} dz + R(x, y, z_0).$$

由 1° 知

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

代入上式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= - \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} \right) dz + R(x, y, z_0) \\ &= \int_{z_0}^z \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz + R(x, y, z_0) = R(x, y, z). \end{aligned}$$

设 3° 成立, 即存在 \mathbf{B} , 使 $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B}$. 由散度的运算公式 5° 知

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0.$$

由于 1° 与 2° 等价, 又 1° 与 3° 等价, 所以 1°、2°、3° 等价. ■

定理 8.8 在二维单连域 (G) 内, 无源场 $\mathbf{A}(M)$ 穿过 (G) 内任一向量管的所有断面的通量均相等.

注意到向量管的定义可知管壁的法向量均与 \mathbf{A} 垂直, 读者可容易地给出此定理的证明.

3. 调和场

定义 8.7 既无源又无旋的向量场 A 称为调和场, 即在场域内恒有

$$\nabla \cdot A = 0, \nabla \times A = 0.$$

由于调和场 $A(M)$ 是无旋场, 所以也是有势场, 即存在势函数 $u(M), M \in (G)$, 使

$$A = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

又由于 A 是无源场, 所以有

$$\nabla \cdot A = \nabla \cdot (\nabla u) = 0,$$

即

$$\Delta u = 0, \text{ 或 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

上式是一个二阶偏微分方程, 称为 Laplace 方程. 因此, 调和场的势函数必定满足 Laplace 方程.

例如, 在第五章第三节中我们已经知道, 点电荷 q 所产生静电场的电场强度

$$E = -\nabla u,$$

其中 $u = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$ ($r \neq 0$) 是电场的电位, 从而

$$\nabla \times E = -\nabla \times (\nabla u) = 0, \quad \nabla \cdot E = -\nabla \cdot (\nabla u) = 0 \quad (r \neq 0).$$

即当 $r \neq 0$ 时, E 是无旋场也是无源场, 所以是调和场. u 是 E 的势函数, 所以 u 必满足 Laplace 方程 $\Delta u = 0$.

又如, 若 $A(M)$ 是一无旋场, 因而是有势场, $A(M) = \nabla u$, 设 A 有连续分布的源, 且源的强度为 $\rho(M)$, 即

$$\rho = \nabla \cdot A = \nabla \cdot (\nabla u).$$

所以, 其势函数 u 满足方程

$$\Delta u = \rho,$$

这个方程称为 Poisson 方程. 例如, 当静电场中有连续分布的电荷, 其电荷密度为 ρ 时, 其电位 u 就满足 Poisson 方程:

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\epsilon},$$

其中 ϵ 为介电系数.

习题 6.8

(A)

1. 利用 Green 公式计算下列曲线积分:

$$(1) \oint_{(C)} (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy, \quad (C) \text{为圆周 } x^2 + y^2 = R^2;$$

$$(2) \oint_{(C)} (x+y)dx - (x-y)dy, \quad (C) \text{为椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$(3) \oint_{(C)} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy, (C): \text{顶点为 } A(1,1), B(3,2), C(2,5) \text{ 的三角形边}$$

界;

$$(4) \int_{(C)} e^x [\cos y dx + (y - \sin y) dy] \quad (C) \text{为曲线 } y = \sin x \text{ 从 } (0,0) \text{ 到 } (\pi,0) \text{ 的一段.}$$

2. 利用线积分计算星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 所围成图形的面积.3. 证明: 若 (C) 为平面上分段光滑的简单闭曲线, ℓ 为任意方向, 则

$$\oint_{(C)} \cos(\ell, n) ds = 0,$$

式中 n 为 (C) 的法向量, 方向朝外.4. 求线积分 $\oint_{(C)} [x \cos(x, n) + y \sin(x, n)] ds$ 的值, 其中 (x, n) 为简单闭曲线 (C) 的向外法线与 x 轴正向的夹角.

5. 验证下列各式为全微分, 并求它们的原函数:

$$(1) (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy;$$

$$(2) (2x \cos y - y^2 \sin x)dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)dy.$$

6. 计算下列线积分:

$$(1) \int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx - dy);$$

$$(2) \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ 沿不通过原点的路径;}$$

$$(3) \int_{(0,0)}^{(1,1)} \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{(1+x^2)} dy.$$

7. 验证下列场为有势场, 并求其势函数:

$$(1) \mathbf{A} = (2x \cos y - y^2 \sin x) \mathbf{i} + (2y \cos x - x^2 \sin y) \mathbf{j};$$

$$(2) \mathbf{A} = e^x [e^y(x - y + 2) + y] \mathbf{i} + e^x [e^y(x - y) + 1] \mathbf{j}.$$

8. 应用 Stokes 公式计算线积分 $\oint_{(C)} ydx + zdy + xdz$, (C) 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, 其方向与平面 $x + y + z = 0$ 的法向量 $\{1, 1, 1\}$ 符合右手螺旋法则.9. 应用 Stokes 公式计算线积分 $\oint_{(C)} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$, (C) 是从

($a, 0, 0$)经($0, a, 0$)和($0, 0, a$)回到($a, 0, 0$)的三角形.

10. 求向量场 $A = (-y, x, c)$ (c 为常数)沿下列曲线正方向的环量:

$$(1) \text{圆周: } x^2 + y^2 = r^2, z = 0;$$

$$(2) \text{圆周: } (x - 2)^2 + y^2 = R^2, z = 0.$$

11. 求向量场 $A = xyz(i + j + k)$ 在点 $M(1, 3, 2)$ 处的旋度以及在这点沿方向 $n = i + 2j + 2k$ 的环量面密度.

12. 求下列场的旋度:

$$(1) A = x^2i + y^2j + z^2k; \quad (2) A = yzi + zxj + xyk.$$

13. 已知 $A = 3yi + 2z^2j + xyzk, B = x^2i - 4k$, 求 $\text{rot}(A \times B)$.

14. 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分:

$$(1) \iint_S (x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy), (S) \text{ 为立方体 } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$$

的外表面;

$$(2) \iint_S (x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy), (S) \text{ 为球面 } x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ 的外侧};$$

$$(3) \iint_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) dS, (S) \text{ 为锥体 } x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq h \text{ 的表面}, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \text{ 为此曲面外法线方向余弦};$$

$$(4) \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + (x + y + z + 1) dx \wedge dy, (S) \text{ 为半椭球面 } z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ 的上侧};$$

$$(5) \iint_S 4xz dy \wedge dz - 2yz dz \wedge dx + (1 - z^2) dx \wedge dy, \text{ 其中 } (S) \text{ 是 } yOz \text{ 平面上的曲线 } z = e^y (0 \leq y \leq a) \text{ 绕 } z \text{ 轴旋转成的曲面的下侧}.$$

15. 设 (S) 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, 其法向量 n 与 Oz 轴的夹角为锐角, 求向量场 $r = xi + yj + zk$ 向 n 所指的一侧穿过 (S) 的通量.

16. 求 $\text{div } A$ 在给定点的值:

$$(1) A = x^3i + y^3j + z^3k \text{ 在 } M(1, 0, -1) \text{ 处};$$

$$(2) A = 4xi - 2xyj + z^2k \text{ 在 } M(1, 1, 3) \text{ 处};$$

$$(3) A = xyzi \text{ 在 } M(1, 3, 2) \text{ 处, 其中 } r = xi + yj + zk.$$

17. 证明下列场为有势场, 并求其势函数:

$$(1) A = (y \cos xy)i + (x \cos xy)j + \sin z k;$$

$$(2) A = (2x \cos y - y^2 \sin x)i + (2y \cos x - x^2 \sin y)j + zk.$$

18. 求下列全微分的原函数:

$$(1) du = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz;$$

$$(2) du = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy.$$

19. 试证 $Pdx + Qdy$ 在区域 (σ) 上的任意两个原函数仅差一个常数.

20. 设 (G) 是一维单连通域, $A(P, Q, R) \in C^{(1)}((G))$, 试证明在 (G) 内恒有 $\nabla \times A = 0$

等价于 $\oint_{(C)} A \cdot dS = 0$, 其中 (C) 为 (G) 中任一分段光滑闭曲线.

21. 设 B 是无源场 A 的向量势, C 是 A 的任一向量势, 证明 $C = B + \operatorname{grad} u$, 其中 u 为任一数量场.

22. 证明: 场 $A = -2yi - 2xj$ 为平面调和场, 并求其势函数.

(B)

1. 把 Green 公式写成以下两种形式:

$$\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{(+C)} X dy - Y dx,$$

$$\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{(+C)} [X \cos(x, n) + Y \sin(x, n)] ds, \text{ 其中 } (x, n) \text{ 为正 } x \text{ 轴到 } (C) \text{ 的外法线向量 } n \text{ 的转角.}$$

2. 设 $u(x, y), v(x, y)$ 是具有二阶连续偏导数的函数, 并设 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 证明:

$$(1) \iint_{(\sigma)} \Delta u d\sigma = \oint_{(C)} \frac{\partial u}{\partial n} ds;$$

$$(2) \iint_{(\sigma)} (u \Delta v - v \Delta u) d\sigma = - \oint_{(C)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds,$$

其中 (σ) 为闭曲线 (C) 所围的平面域, $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ 分别表示 u 和 v 沿 (C) 的外法线方向的导数.

3. 计算 $\int_{(L)} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$. 其中 (L) 是由点 $A(-1, 0)$ 经点 $B(1, 0)$ 到点 $C(-1, 2)$ 的路径,

\overbrace{AB} 为下半圆周, BC 段是直线.

4. 计算 $\iint_{(S)} x^3 dy \wedge dz + \left[\frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3 \right] dz \wedge dx + \left[\frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3 \right] dx \wedge dy$, 其中 $f(u)$ 具有连续的导数, (S) 为锥面 $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 与两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所围立体的表面外侧.

5. 计算 $\int_{(L)} (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, 其中 (L) 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$

与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线, 从 Oz 轴正方向看进去为逆时针 ($z \geq 0$).

6. 设函数 $F = f\left(xy, \frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} F)$.

7. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 当 $f(r)$ 等于什么时, $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = 0$?

8. 对任何按块光滑的封闭曲面 (Σ) 与分量有连续的一阶偏导数的向量场 F , 证明

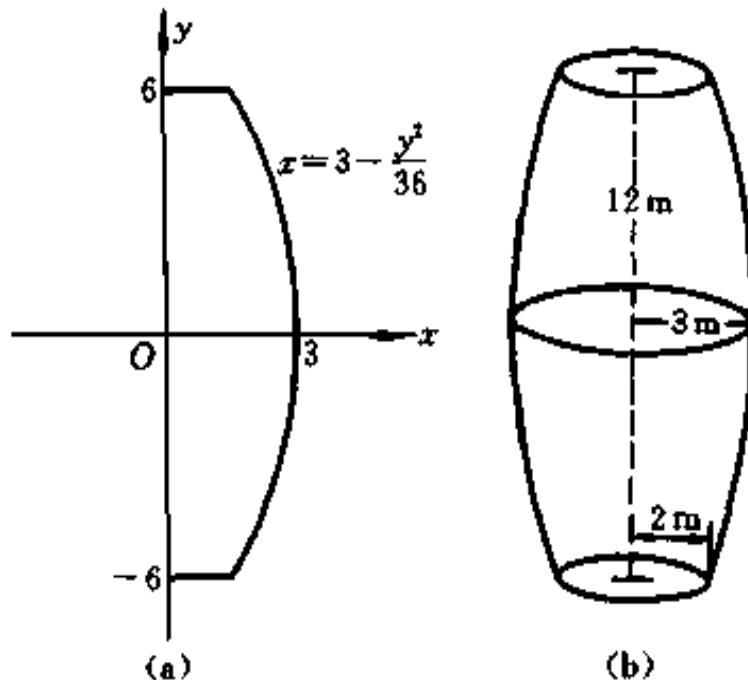
$$\iint_{(\Sigma)} \operatorname{rot} F \cdot n dS = 0.$$

综合练习题

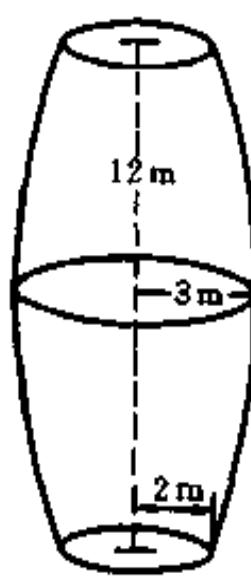
1. 一个对称的地下油库, 它的内部设计是: 横截面为圆, 在中心位置上的半径是 3 m, 到

底部和顶部的半径减小到 2 m; 底部和顶部相隔 12 m(第 1 题图(b)); 纵截面的两侧是抛物线 $x = 3 - \frac{y^2}{36}$ ($-6 \leq y \leq 6$)(第 1 题图(a)).

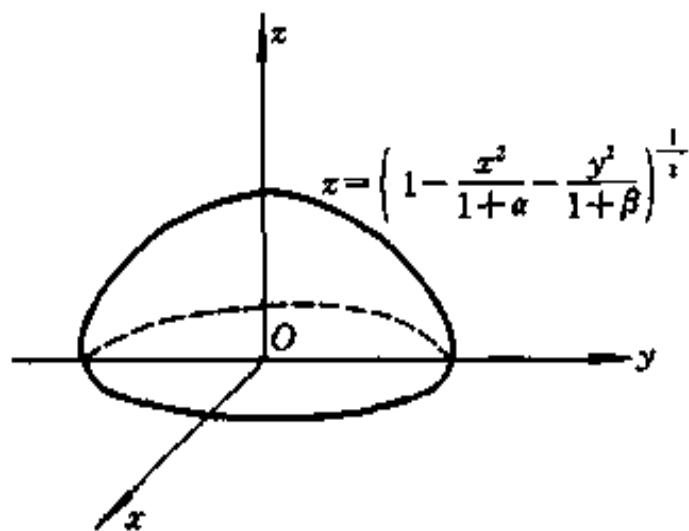
- (1) 求油库的容积;
- (2) 为了设计油库的油量标尺, 试求出油库中油量分别为 $10 \text{ m}^3, 20 \text{ m}^3, 30 \text{ m}^3, \dots$ 时油的深度.



第 1 题图



(b)



第 2 题图

2. 某工厂按原设计要对一半球体的工件的半球面部分镀上一层稀有金属, 其半球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)$, 该厂按原设计的半球面面积 2π 备好电镀材料. 当工件加工好后, 对工件进行了测量, 发现半球面方程为

$$\frac{x^2}{1+\alpha} + \frac{y^2}{1+\beta} + z^2 = 1 (z \geq 0),$$

其中 $|\alpha|, |\beta|$ 是很小正数, 在测量了 α 和 β 后, 工人师傅希望知道, 按原准备好的材料电镀后, 镀层厚度在什么情况下比原设计的薄? 在什么情况下比原设计的厚?

第七章 常微分方程

在第三章第五节,已经讨论过一些简单的一阶微分方程.我们看到,微分方程是运用数学理论,特别是微积分学去解决实际问题的一个重要渠道.人们在探索事物运动变化规律时,首先需要建立数学模型,有关连续量变化规律的数学模型往往是含有函数导数的微分方程,而所研究的变化规律,就是微分方程满足一定条件的解.但是,众多学科和生产实际中的问题,往往并非用一阶微分方程所能描述.所建立的数学模型,或者是含有高阶导数的高阶微分方程;或者是由多个函数及其导数所构成的微分方程组,这就是本章所要研究的内容.在本章中,我们先把高阶微分方程与微分方程组统一起来,研究微分方程组的向量形式.在讲述有关基本知识的基础上,着重研究线性微分方程组的理论和解法.由于能用初等积分法求解的微分方程只是极少数,为开拓读者思路,本章最后还简单介绍微分方程的幂级数解法以及定性分析方法.

第一节 常微分方程的基本知识

1.1 微分方程与微分方程组

首先我们来看两个有关的实例.

例 1.1 设有一由电容 C 、电感 L 、电阻 R 和直流电源组成的串联电路(图 1.1),其中 R, L, C 与电源电动势 E 均为常数,在开关 K 闭合前电容器未充电,求开关闭合后,电容器两端电压 u_C 所满足的方程.

解 设电容器极板上的电量为 $q(t)$,则由电学知识可知 $q = Cu_C$,
 $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$, $u_L = L \frac{di}{dt}$, $u_R = Ri$,根据 Kirchhoff 第二定律

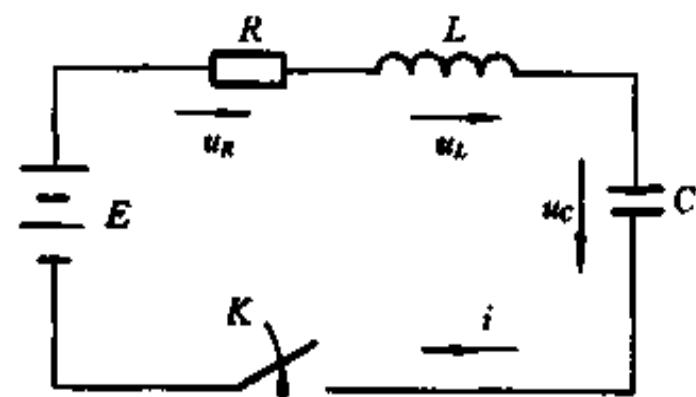


图 1.1

$$u_C + u_R + u_L = E,$$

从而

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = E,$$

或

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{E}{LC}. \quad (1.1)$$

这是一个二阶微分方程. 设开关闭合时刻 $t=0$, 显然有

$$u_C \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{C} i \Big|_{t=0} = 0. \quad (1.2)$$

于是, 要得到电容器充电时电压 u_C 的变化规律, 只需在条件(1.2)下去求解微分方程(1.1). ■

例 1.2 种群相互作用的数学模型.

设在某一封闭的环境中, 存在两个种群. 其中 t 时刻种群 x 的个体数量为 $x(t)$, 种群 y 的个体数量为 $y(t)$, 并设不存在种群 y 时, 种群 x 个体数量的变化满足 Logistic 方程(参见第三章例 5.15)

$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 - b_1 x),$$

即种群 x 的相对增长率

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a_1 - b_1 x,$$

其中 a_1, b_1 均为正常数, a_1 是其出生率与死亡率之差, $-b_1 x$ 反映了由于 x 个体数量增加对其相对增长率的抑制. 现在, 由于种群 y 的存在, y 将与 x 竞争同一资源, 于是 y 的个体数量也将抑制 x 的相对增长率, 从而有

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a_1 - b_1 x - c_1 y, \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dt} = x(a_1 - b_1 x - c_1 y),$$

其中 c_1 也为正常数. 同样地考虑种群 y 的相对增长率, 类似地有

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = a_2 - b_2 x - c_2 y, \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dt} = y(a_2 - b_2 x - c_2 y),$$

其中 a_2, b_2, c_2 均为正常数. 于是得到两种群竞争的数学模型为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_1 - b_1 x - c_1 y), \\ \frac{dy}{dt} = y(a_2 - b_2 x - c_2 y). \end{cases} \quad (1.3)$$

这是由两个微分方程所组成的微分方程组,称为 Volterra 模型^①. 若设开始时刻 $t = t_0$ 时,两种群个体的数量分别为 x_0 与 y_0 ,于是要了解此两种群个体数量随时间的变化规律,就需要在条件 $x|_{t=t_0} = x_0, y|_{t=t_0} = y_0$ 下去求解微分方程组(1.3). ■

通常,一个高阶微分方程可以化成微分方程组. 例如,在例 1.1 中,令

$$\frac{du_C}{dt} = v, \text{ 从而 } \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 u_C}{dt^2},$$

则方程(1.1)可化为

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{E}{LC} - \frac{R}{L}v - \frac{1}{LC}u_C. \end{cases}$$

最高阶导数已经解出的 n 阶微分方程的一般形式为

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right). \quad (1.4)$$

对这种形式的微分方程,总可以引进 $n-1$ 个新的未知函数,把它化成由 n 个一阶微分方程所组成的微分方程组. 事实上,令

$$x_1 = x, x_2 = \frac{dx}{dt}, x_3 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, x_n = \frac{dx_{n-1}}{dt} = \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}},$$

于是方程(1.4)就化为下面的一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.5)$$

容易看出,若 $x = \varphi(t)$ 是方程(1.4)的解,则函数组

^① (1.3)实际上只是 Volterra 模型的一种特殊类型.

$$x_1 = \varphi(t), x_2 = \varphi'(t), \dots, x_n = \varphi^{(n-1)}(t)$$

必为方程组(1.5)的解;反之,若

$$x_1 = \psi_1(t), x_2 = \psi_2(t), \dots, x_n = \psi_n(t)$$

是方程组(1.5)的解,则函数 $x = \psi_1(t)$ 必为方程(1.4)的解.在这个意义下,我们说方程组(1.5)与方程(1.4)是等价的.因此,今后以讨论一阶微分方程组为主.

由 n 个未知函数构成的一阶微分方程组的一般形式为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1.6)$$

其中, $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是定义在 G 上的函数, $G = (a, b) \times D$, D 为 \mathbf{R}^n 中的一个区域.

如果引入向量

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix},$$

那末方程组(1.6)可以简洁地记成下面的向量形式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f: (a, b) \times D \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n. \quad (1.7)$$

与一阶微分方程类似,若存在区间 $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ 上的连续可微向量值函数 $x = x(t)$, 使

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad \alpha < t < \beta,$$

则称向量值函数 $x = x(t)$ 为方程组(1.7)在 (α, β) 上的解.由于方程组(1.7)的左端由 x 的 n 个分量的导数组成,故它的解中一般含有 n 个独立的任意常数.称含有 n 个独立常数的解为方程组(1.7)的通解;不含任意常数的解为特解.要

确定通解中的 n 个任意常数, 需要 n 个独立的附加条件, 这种条件称为定解条件. 若定解条件是由函数 $x(t)$ 在一点 $t = t_0$ 的值给出: $x(t_0) = x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})^T$, 则此条件称为初值条件. 在给定的初值条件下求解方程组(1.7)的问题, 即求解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

的问题, 称为初值问题, 或 Cauchy 问题.

求解微分方程, 一般说来并非易事, 而且正如本章一开始所指出的, 能用初等积分法求解的微分方程是极少数. 例如, 形式上非常简单的一阶微分方程^①

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

就不能通过初等积分法求解. 也就是说, 它的解无法用初等函数来表示. 正是由于求解的困难, 使初值问题解的存在问题显得更为重要. 给定了一个初值问题(1.8), 在寻求它的解之前, 应该先知道在什么条件下它的解一定存在? 若存在, 有几个? 这就是解的存在唯一性定理所要解决的问题. 从历史上看, Cauchy 于 19 世纪 20 年代第一个建立了解的存在唯一性定理. 正因为如此, 人们把初值问题也叫做 Cauchy 问题. 1876 年, Lipschitz 减弱了 Cauchy 的条件, 此后 Picard, Peano 等不少数学家相继对此问题进行过研究. 下面我们先给出解的存在唯一性定理, 它的证明放在第八章中讲述.

定理 1.1 (解的存在唯一性定理) 考虑初值问题(1.8). 若向量值函数 $f(t, x)$ 在闭区域

$$G = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (1.9)$$

上连续, 且对 x 适合 Lipschitz 条件:

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad (t, x_i) \in G, i = 1, 2,$$

其中 Lipschitz 常数 $L > 0$, 令

$$M = \max_G \|f(t, x)\|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad 0 < h^* < \min\left(h, \frac{1}{L}\right),$$

则初值问题(1.8)在区间 $|t - t_0| \leq h^*$ 上存在唯一的解 $x = x(t)$.

附注 1 Lipschitz 条件验证起来比较困难, 容易证明: 若 $f(t, x)$ 及其对 x

^① 这个方程称为 Riccati 微分方程.

的偏导数 $D_x f$ 在闭域 $G = \{(t, x) | |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$ 上连续, 则 $f(t, x)$ 对 x 必满足 Lipschitz 条件, 从而初值问题(1.8)在区间 $|t - t_0| \leq h^*$ 上存在唯一的解, 其中 h^* 如定理 1.1 所述.

附注 2 由定理 1.1 可见, 解存在唯一的结论只在 t_0 的附近成立. 若仅停留于此, 则将使定理的应用大受限制. 实际上, 这个在局部存在的解可以逐步地延拓出去. 设 $f(t, x)$ 在区域(开的) $W \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 内连续, 且对 x 满足局部 Lipschitz 条件, 即对 W 内任一点 (t_0, x_0) , 存在足够小的形如(1.9)的闭区域 $G_0 \subseteq W$, 使在 G_0 上 f 对 x 适合 Lipschitz 条件. 这时, 根据定理 1.1, 方程过 $P_0(t_0, x_0)$ 的解 $x = x^0(t)$ 在 $|t - t_0| \leq h^*$ 上存在唯一. 令 $t_0 + h^* = t_1$, 显然点 $P_1(t_1, x^0(t_1)) \in G_0 \subseteq W$ (图 1.2). 于是以点 P_1 为中心又可作形如(1.9)的闭区域 $G_1 \subseteq W$, 由于区域 W 内局部 Lipschitz 条件总满足, 故方程过点 P_1 的解 $x = x^1(t)$ 在 $|t - t_1| \leq h_1^*$ 上存在唯一, 其中 h_1^* 与 h^* 类似定义. 由于 $x^1(t_1) = x^0(t_1)$, 由解的唯一性可知在区间 $[t_1 - h_1^*, t_1]$ 即 $[t_0, t_1]$ 上 $x^1(t) \equiv x^0(t)$, 而在区间 $[t_1, t_1 + h_1^*]$ 上, $x^1(t)$ 作为是 $x^0(t)$ 的延拓. 仿此类推, 我们可以把在 t_0 附近存在的解向两端逐步延拓出去. 可以证明(从略), 若 f 在全空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 连续, 对 x 满足局部 Lipschitz 条件, 而且 $\|f(t, x)\| \leq N \|x\|$ (N 为正常数), 则 Cauchy 问题的解可以延拓到无穷区间 $-\infty < t < +\infty$.

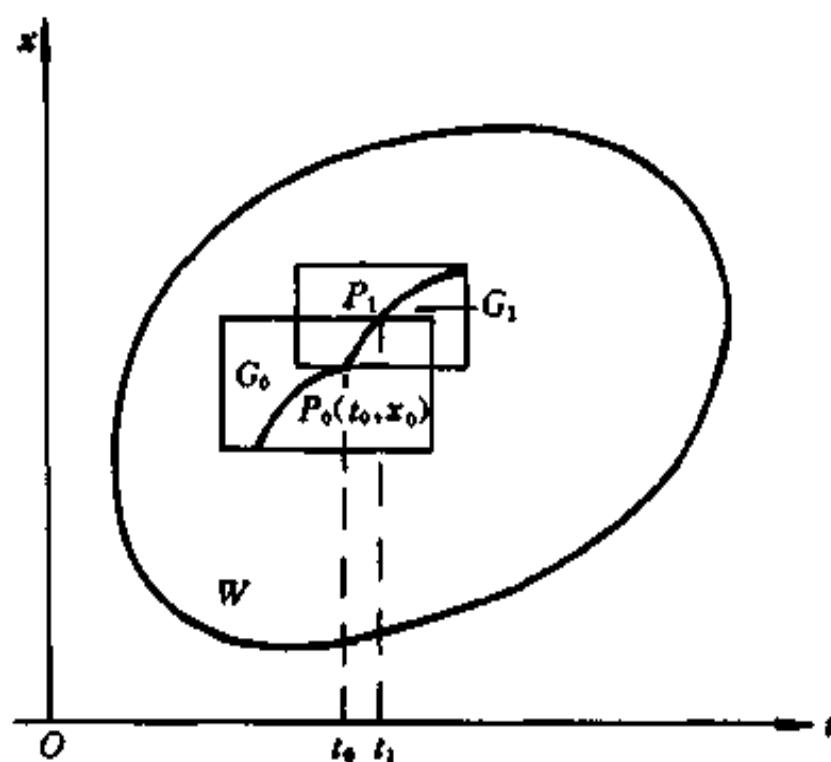


图 1.2

1.2 微分方程及其解的几何解释

为了更形象地理解微分方程及其解的涵义, 我们利用线索场和相空间两种观点来对微分方程及其解作几何解释. 让我们先从一阶微分方程入手.

设有一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f: D = (a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

f 在 D 内连续且对 x 满足 Lipschitz 条件. 给定了方程(1.10), 在 tOx 平面上看, 在域 D 内任一点 (t_0, x_0) , 确定了曲线 $x = x(t)$ 的一个斜率 $f(t_0, x_0)$, 或者说确定了一个以 $f(t_0, x_0)$ 为斜率的小线段, 称为线素, 它的方向数为 $(1, f(t_0, x_0))$. 所以方程(1.10)在域 D 内确定了一个线素场(方向场). 例如, 微分方程

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

在直线 $t = t_0$ 上任一点确定着相同方位的线素, 它的方向数为 $(1, 2t_0)$, 直线 $t = t_0$ 称为方程的等倾线. 利用等倾线可作出此方程在 tOx 平面上所确定的线素场如图 1.3 所示. 方程(1.10)的通解 $x = x(t, C)$ 在 tOx 平面上表示一族曲线. 所谓求(1.10)的通解, 就是寻求这样的曲线族, 使它们过每一点 (t_0, x_0) 时, 其切线与方程在该点所给定的线素吻合. 初值条件 $x(t_0) = x_0$ 在 tOx 平面上代表一个点; 求满足此初值条件的特解, 在几何上就是从通解所表示的曲线族中找出通过点 (t_0, x_0) 的那条曲线. 例如, $\frac{dx}{dt} = 2t$ 的通解 $x = t^2 + C$ 是由图 1.3 所示的线素场所确定的抛物线族; 而此方程满足初值条件 $x|_{t=0} = 1$ 的特解, 就是过点 $(0, 1)$ 的抛物线 $x = t^2 + 1$.

现在, 我们来考察由两个一阶微分方程所组成的方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \end{cases} \quad f_i: G = (a, b) \times D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad (1.11)$$

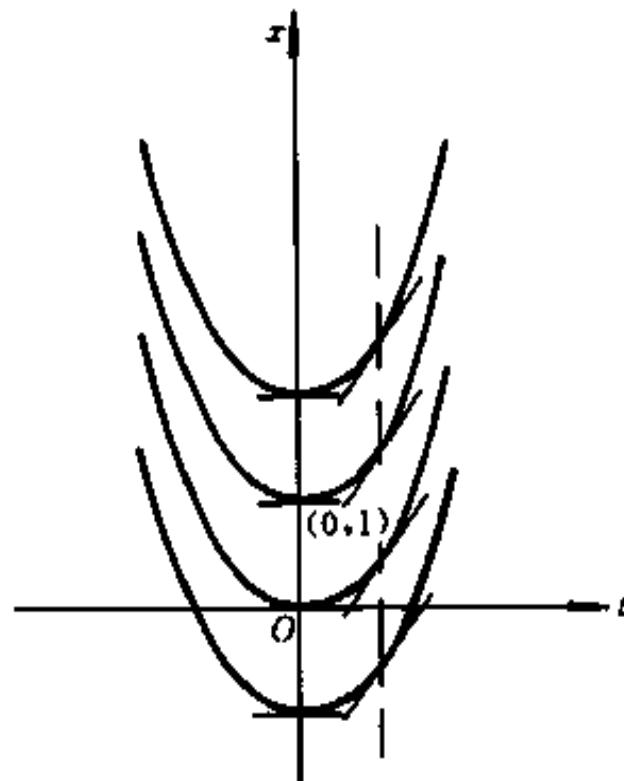


图 1.3

设 $f_i (i = 1, 2)$ 在域 G 内连续, 且对 x 与 y 满足 Lipschitz 条件. 对于 G 内任一点 (t_0, x_0, y_0) , 方程组(1.11)在空间区域 G 内确定了一个线素, 它的方向数为 $(1, f_1(t_0, x_0, y_0), f_2(t_0, x_0, y_0))$. 于是求(1.11)的通解, 在几何上就是在空间

域 G 内寻找这样的曲线族, 使它们过 G 内每一点时, 其切线与方程组(1.11)在该点所确定的线素吻合. 解的存在唯一性定理表明, 当定理的条件满足时, 过 G 内任一点必有且仅有一条曲线满足切线与该点处的线素吻合的要求. 这种曲线称为相应初值问题的积分曲线.

上面的几何解释是在 (t, x, y) 所在的三维空间 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ 内进行的. 如果把时间 t 看作参数, 而仅仅考虑 (x, y) 所在的空间 \mathbf{R}^2 , 那末这个空间称为方程组(1.11)的相空间(相平面), 而把 (t, x, y) 所在的空间 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ 称为(1.11)的增广相空间(增广相平面).

对于方程组(1.11)的一个解:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (1.12)$$

我们可以在增广相平面上去研究它, 这时, (1.12)表示(1.11)的一条积分曲线; 我们也可以在相平面上去研究它, 这时, 把 t 看作参数, 把(1.12)看作参数方程, 它在相平面上所表示的曲线就是满足微分方程组(1.11)的动点轨迹, 称为(1.11)的轨线. 容易看出它就是 (t, x, y) 空间的积分曲线(1.12)在相平面 (x, y) 上的投影.

例如, 容易验证 $x = \cos t, y = \sin t$ 是微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

满足初值条件 $x(0) = 1, y(0) = 0$ 的特解. 在增广相平面即 (t, x, y) 空间内, 此特解表示的积分曲线是过 $(1, 0, 0)$ 的一条螺旋线, 如图 1.4 所示. 若将 t 看作参数, 则此特解在相平面 xOy 上表示的轨线就是过点 $(1, 0)$ 的单位圆, 也就是螺旋线在相平面上的投影.

上述对相空间 \mathbf{R}^2 以及增广相空间 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ 的论述, 都可以就 n 维向量微分方程组(1.7)直接推广到相空间 \mathbf{R}^n 以及增广相空间 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 中去, 不再赘述.

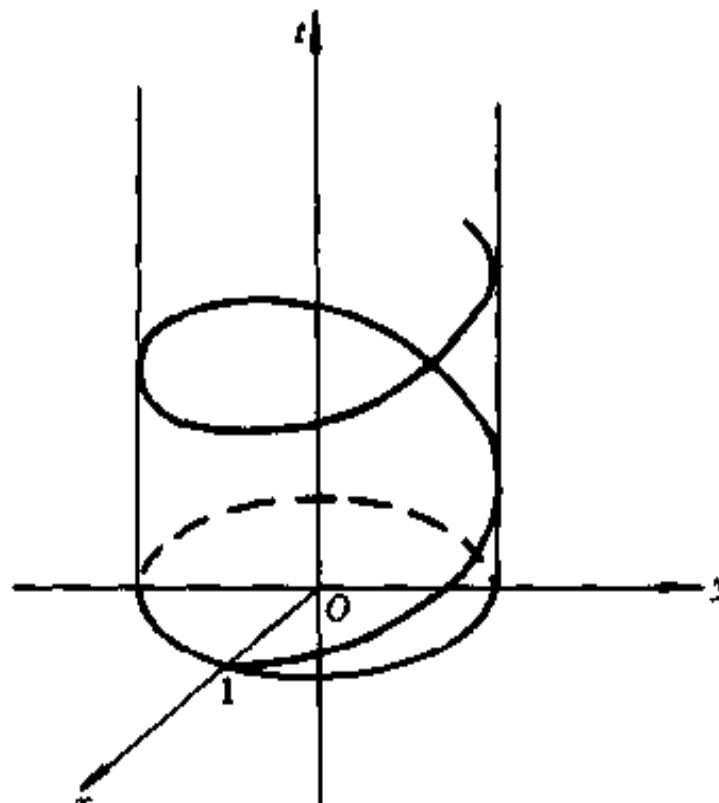


图 1.4

1.3 可积组合与首次积分

在第三章第五节中,我们曾介绍过求解一些简单的一阶微分方程的初等积分法.要用这些方法去求解方程组(1.6),一般来说是相当困难的.但是,对于某些特殊的微分方程组,如果我们能对其中的某些方程进行适当的组合,然后通过变量替换,把它们变成只含有一个未知函数的一阶微分方程,那末就有可能利用初等积分法求得有关未知函数之间的一个关系式(不再含有导数).利用这个关系式就可以把微分方程组中未知函数的个数减少一个,从而使求解问题前进一步.这个由一些方程适当组合而能求积的方程称为可积组合.下面,我们通过例子来说明这种方法.

例 1.3 求解微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2(x_1^2 + x_2^2)t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1x_2t. \end{cases} \quad (1.13)$$

解 这两个方程都不能单独积分,然而两方程相加得

$$\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} = 2(x_1 + x_2)^2 t. \quad (1.14)$$

令 $x = x_1 + x_2$, 即得关于 x 的一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt} = 2x^2 t.$$

分离变量后积分得

$$\frac{1}{x} + t^2 = C_1,$$

即

$$\frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = C_1. \quad (1.15)$$

方程(1.14)就是方程组(1.13)的一个可积组合,所得到的(1.15)式是方程组(1.13)的解所满足的一个不含导数的方程,称为方程组(1.13)的一个首次积分.从首次积分(1.15)中解出 x_1 后代入(1.13)的第二个方程可得

$$\frac{dx_2}{dt} = 4tx_2 \left(\frac{1}{C_1 - t^2} - x_2 \right). \quad (1.16)$$

这样一来,就使原方程组的未知函数减少了一个,化成了一个关于 x_2 的一阶微分方程去进一步求解.但是,方程(1.16)的求解比较麻烦,此时可以再去寻找另外的可积组合.将(1.13)中两个方程相减得另一个可积组合

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 2(x_1 - x_2)^2 t,$$

解之可得另一个首次积分

$$\frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = C_2.$$

于是,方程组(1.13)的通解可由

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = C_1, \\ \frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = C_2 \end{cases} \quad (1.17)$$

确定.我们把这种未写成显式的解(1.17)称为方程组(1.13)的通积分. ■

从例 1.3 可见,在讨论微分方程组求解时,首次积分占有颇为重要的地位,找到一个首次积分,求解问题就推进一步.

一般地,设可微函数 $\Psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ 不是常数,如果把方程组(1.6)的任一解 $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ 代入后,可使

$$\Psi(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \equiv C(\text{常数}),$$

那末 $\Psi(t, x_1, \dots, x_n) = C$ 称为方程组(1.6)的一个首次积分.读者不难验证,(1.17)中的两个方程都满足这个定义.通常首次积分正是靠可积组合来获得的.

从几何上来看,例 1.3 中(1.17)式的每个首次积分,在 (t, x_1, x_2) 三维空间中表示一族曲面(随任意常数 C 而异);而方程组(1.13)的一组解,就是同时位于由(1.17)式所表示的两族曲面上的曲线.因此,对在三维空间给定的方程组(1.13)来说,如果我们找到了两个相互独立的首次积分^①,它们所表示的曲面族相交,那末这两曲面族的交线就是方程组(1.13)的积分曲线,它们的方程就是(1.17)式.

例 1.4 求解微分方程组

^① 如果 $\frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(x, y)} \neq 0$, 那末 $\phi_1(t, x, y) = C_1$ 与 $\phi_2(t, x, y) = C_2$ 称为相互独立. 这时由隐函数存在定理可知, 解 $x = x(t, C_1, C_2)$, $y = y(t, C_1, C_2)$ 存在, 即曲面 $\phi_1 = C_1$ 与 $\phi_2 = C_2$ 相交.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 1. \end{cases} \quad (1.18)$$

解 将前两个方程相减得

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0,$$

从而得一首次积分

$$x_1 - x_2 = C_1. \quad (1.19)$$

由于寻找另外的首次积分比较困难, 我们改用消元法. 将(1.19)式代入(1.18)的第三式得

$$\frac{dx_3}{dt} = C_1 + 1,$$

从而

$$x_3 = (C_1 + 1)t + C_2, \quad (1.20)$$

将(1.20)与(1.19)两式代入(1.18)的第一式得

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2},$$

解之得

$$x_1 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3. \quad (1.21)$$

再将它代入(1.19)式得

$$x_2 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3 - C_1. \quad (1.22)$$

于是方程组(1.18)的通解由(1.21), (1.22)与(1.20)表示. ■

例 1.5 人造卫星的轨道方程

人造卫星在最后一级运载火箭点火脱落后便进入其轨道运行. 轨道的形状取决于最后一级火箭对卫星的发射角和发射速度. 要让人造卫星围绕地球正常运行, 必须正确地控制这个发射角和发射速度, 否则卫星将远离地球而去. 下面我们就来讨论这个问题.

由于人造卫星的质量与地球质量相差悬殊,故在其相互吸引中将地球视为不动而把卫星看作是一质点.为简单起见,我们忽略太阳、月亮等其它星球的影响、空气的阻力以及最后一级火箭点火处与地球的距离.这样,我们的问题便可简化为:从地球表面上一点 A 处以倾角 α 、初速 v_0 射出一质量为 m 的质点,求此质点运动的轨道.

首先,我们来证明卫星的运动轨迹是一平面曲线.事实上,将地心取作原点 O ,设卫星 P 在时刻 t 的位置为 $r(t)$.卫星在其轨道上受地球引力 F 的作用运行是一向心运动,引力 F 的大小将随时间变化,但其方向始终指向地心,即

$$F(t) = -r(t). \quad (1.23)$$

我们知道质点运动的速度和加速度分别为

$$v(t) = \dot{r}(t), \quad a(t) = \ddot{r}(t).$$

由 Newton 第二定律知

$$F = ma,$$

其中 m 为卫星的质量,再结合(1.23)可知 $-r(t)$ 与 $a(t)$ 平行同向,从而有

$$r(t) \times a(t) \equiv 0.$$

于是可知

$$\frac{d}{dt}(r \times v) = v \times v + r \times a \equiv 0.$$

故

$$r(t) \times v(t) = H(\text{常向量}).$$

这说明 $r(t)$ 始终在过原点 O 且与常向量 H 垂直的平面内变化.因此,卫星的运动轨迹是一平面曲线.

现在来建立卫星在其轨道上运行的数学模型.取发射点 A 与地心 O 的连线为 y 轴, y 轴与发射方向所构成的平面为 xOy 平面(图 1.5),发射时刻 $t=0$,把卫星看作质点 P ,在相平面 xOy 上考察质点 P 的运动轨迹.

设动点 P 的坐标为 $(x(t), y(t))$, 地球对卫星的引力就等于把地球质量 M 集中在地心 O 点时所产生的引力 F .由万有引力公式可知

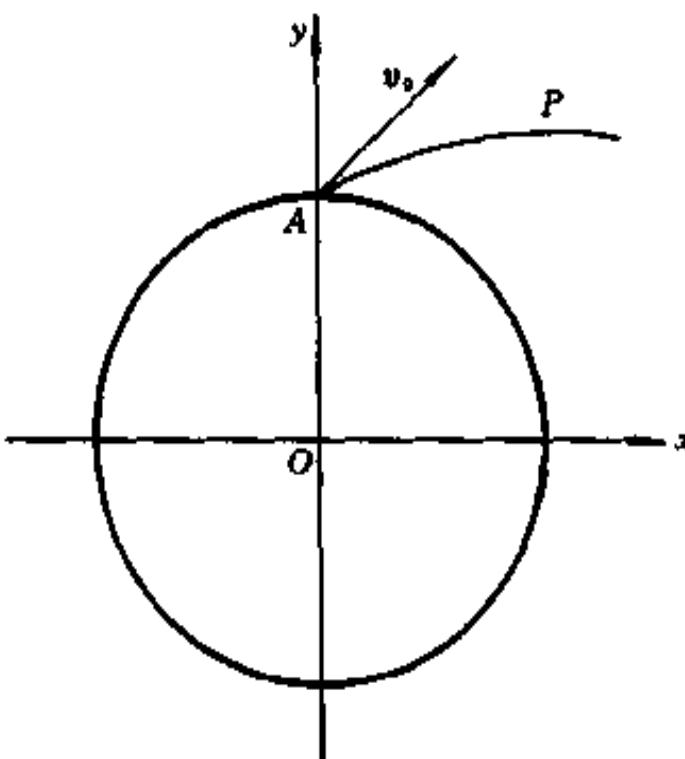


图 1.5

$$\mathbf{F} = -KMm \frac{1}{r^3} \mathbf{r} = \left(-\frac{KMm}{r^3} x, -\frac{KMm}{r^3} y \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

据 Newton 第二定律可得卫星运动的方程为：

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{KM}{r^3} x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{KM}{r^3} y, \end{cases} \quad (1.24)$$

其中 $K = 6.685 \times 10^{-23}$ ($\text{km}^3/\text{g}\cdot\text{s}^2$) 为引力常数, $M = 5.98 \times 10^{27}$ (g).

由于 $t=0$ 时卫星在点 A , 故 $x(0)=0, y(0)=R$ ($R=6370 \text{ km}$ 是地球的半径); 又由于卫星是以初速 v_0 沿倾角 α 射出, 故有

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = v_0 \sin \alpha.$$

于是求卫星运动轨道的问题, 就是求微分方程组(1.24)满足初值条件:

$$x \Big|_{t=0} = 0, \quad y \Big|_{t=0} = R, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = v_0 \sin \alpha \quad (1.25)$$

的轨迹.

下面, 我们来求解这一方程组, 分别以 y 和 x 乘(1.24)的第一和第二个方程, 相减得

$$y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

由于

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + x \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} - y \frac{d^2x}{dt^2} = x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2},$$

故有

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

从而得到(1.24)式的一个首次积分^①

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C_1. \quad (1.26)$$

^① 令 $\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v$, 把二阶微分方程组(1.24)化成与其等价的一阶微分方程组, 则由首次积分的定义可知, 此一阶微分方程组首次积分的一般形式为 $F(x, u, y, v) = C$, 从而二阶微分方程组(1.24)首次积分的一般形式为 $F\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right) = C$.

再以 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 分别乘(1.24)的第一和第二个方程, 相加得

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{KM}{r^3} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{KM}{2r^3} \frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = -\frac{KM}{r^2} \frac{dr}{dt}.$$

由于

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = 2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \right),$$

从而有

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = -2 \frac{KM}{r^2} \frac{dr}{dt},$$

积分得另一首次积分

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 2 \frac{KM}{r} + C_2. \quad (1.27)$$

为了进一步求出轨线方程, 必须将方程(1.26)与(1.27)化成极坐标方程. 为此, 令

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta.$$

由于 x, y 是 t 的函数, 故 r, θ 也是 t 的函数, 对 t 求导得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt},$$

代入(1.26)与(1.27)后化简得

$$\begin{cases} r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1, \\ \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2KM}{r} + C_2. \end{cases} \quad (1.28)$$

$$(1.28) \quad \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2KM}{r} + C_2. \quad (1.29)$$

把(1.28)代入(1.29)消去 $\frac{d\theta}{dt}$ 后开方得

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{C_2 + \frac{2KM}{r} - \frac{C_1^2}{r^2}}. \quad (1.30)$$

由于我们所关心的是卫星运动的轨线方程, 即在用极坐标表示的相平面上的曲线 $r = r(\theta)$, 故可从(1.30)与(1.28)中消去 dt 得

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{C_1} \sqrt{C_2 + \frac{2KM}{r} - \frac{C_1^2}{r^2}}.$$

这是一个可分离变量的一阶微分方程,解之得

$$\frac{1}{r} = \frac{KM}{C_1^2} + \left[\frac{C_2}{C_1^2} + \left(\frac{KM}{C_1^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cos(\theta - C), \quad (C \text{ 为任意常数.})$$

令 $p = \frac{C_1^2}{KM}$, $e = \sqrt{1 + \frac{C_2 C_1^2}{(KM)^2}}$, 则上式化简为

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e \cos(\theta - C),$$

或

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - C)}. \quad (1.31)$$

这就是所求卫星运动的轨线方程.我们知道,这一方程在极坐标系下代表以地心 O 为焦点的圆锥曲线,其中 p 为焦参数, e 为离心率.当 $e = 0$ 时,它表示一圆周,当 $0 < e < 1$ 时,表示椭圆,当 $e = 1$ 时,表示抛物线;当 $e > 1$ 时表示双曲线.

为了保证卫星能绕地球正常运行,必须使其轨线是椭圆或圆,否则卫星将远离地球而去,下面我们来研究怎样发射才能保证轨道是椭圆或圆.

首先,我们来确定方程(1.31)中的常数 e , p , C , 它们与任意常数 C_1 , C_2 有关.为此,先把初值条件(1.25)用极坐标表示

$$r \Big|_{t=0} = \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{t=0} = R, \quad \theta \Big|_{t=0} = \arctan \frac{y}{x} \Big|_{t=0} = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{dr}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{r} (x\dot{x} + y\dot{y}) \Big|_{t=0} = v_0 \sin \alpha, \quad \frac{d\theta}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2 + y^2} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{R} v_0 \cos \alpha.$$

把它们代入(1.28)与(1.29)分别可定出常数 C_1 与 C_2 为

$$C_1 = R v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = v_0^2 - \frac{2KM}{R}. \quad (1.32)$$

把(1.32)的两式代入 p 和 e 的表达式分别得

$$p = \frac{R^2}{KM} v_0^2 \cos^2 \alpha, \quad e = \sqrt{1 + \frac{R v_0^2 - 2KM}{K^2 M^2} R v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1.33)$$

再将初值条件代入(1.31)式可得

$$C = \arcsin \frac{p - R}{Re}.$$

由(1.33)中 e 的表达式可见,

$$0 \leq e < 1 \Leftrightarrow v_0 < \sqrt{\frac{2KM}{R}} = v_0^*,$$

把 K, M, R 的具体数值代入计算可得 $v_0^* \approx 11.2$ (km/s), v_0^* 称为第二宇宙速度. 当 $v_0 = v_0^*$ 时, 卫星将以抛物线轨道远离地球.

另一方面, 还必须要求卫星与地心的最小距离 r_{\min} 大于地球半径 R , 否则, 卫星运行中将与地球相撞. 由(1.31)式易见

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - C)} \Big|_{\theta=C} = \frac{p}{1 + e}.$$

令 $r_{\min} = R$ 得

$$\frac{p}{R} - 1 = e.$$

注意到(1.33)式, 得

$$\frac{R}{KM} v_0^2 \cos^2 \alpha - 1 = \sqrt{1 + \frac{R v_0^2 - 2KM}{K^2 M^2} R v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1.34)$$

由(1.34)式可见, 首先必须

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{KM}{R \cos^2 \alpha}} \geq \sqrt{\frac{KM}{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0^* \approx 7.9 \text{ (km/s)}.$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} v_0^*$ 称为第一宇宙速度, 这是卫星要飞离地球进入轨道的最小发射速度.

将(1.34)式两端平方后化简得

$$\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) = 0.$$

再注意到(1.34)式可知 $\alpha = 0$.

综上所述, 要让人造卫星在其轨道上正常运行, 其发射速度 v_0 应控制在 $7.9 \text{ (km/s)} < v_0 < 11.2 \text{ (km/s)}$ 且水平发射, 而其运行轨道一般为以地心为一焦点的椭圆. ■

习题 7.1

(A)

1. 将下列高阶微分方程化为等价的一阶微分方程组:

(1) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \beta x^3 = 0$ (ω, β 为常数);

(2) $4\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x + x = 0$; (3) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$.

2. 设有微分方程 $x^2 + \dot{x}^2 = 1$, 验证 $x = \cos(C - t)$ 与 $x = \pm 1$ 都是它的解; 同在 t, x 平面上此微分方程的解是否唯一?

3. 画出微分方程 $\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$ 的线索场, 并由此线索场画出其积分曲线族.

4. 已知微分方程组 $\frac{dx}{dt} = -y, \frac{dy}{dt} = x$,

(1) 求它的轨线族方程, 在相平面上轨线代表什么曲线?

(2) 求微分方程组的通解, 它在增广相平面上表示什么曲线?

(3) 从几何上说明积分曲线与轨线的关系.

5. 已知微分方程组 $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = y$, 求它的通解与轨线族.

6. 把微分方程组 $\frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \frac{dy}{dt} = 4x + 5y$ 写成向量形式, 并验证向量函数 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{9t} \\ -C_1 e^t + C_2 e^{9t} \end{pmatrix}, -\infty < t < \infty$ 是微分方程组的解.

7. 求下列微分方程组的通解或通积分:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\tan y}{t}; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{y}. \end{cases}$$

(B)

1. 画出 Riccati 方程 $\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2$ 的线索场, 并由此作出其积分曲线族的近似图.

2. 求下列微分方程组的通解或通积分:

$$(1) \frac{dt}{t^2 + x} = \frac{dx}{t} = \frac{dy}{t(x+y)};$$

$$(2) \frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)};$$

$$(3) \frac{dx}{e^x + u} = \frac{dy}{e^y + u} = \frac{du}{u^2 - e^{x+y}}.$$

第二节 线性微分方程组

本节中, 我们研究最简单但应用广泛的一类微分方程组——线性微分方程组, 即方程组(1.6)中诸函数 f_i 关于所有未知变量 x_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 都是线性的. 在第三章第五节中, 我们曾讨论过一阶线性微分方程, 了解了它的通解结构、求解方法和通解公式. 在本节中将看到, 与一阶线性微分方程不同, 线性微分方程组的通解, 一般来说, 不能用初等积分法求得. 但是, 借助于线性代数的知识,

可以了解它的解的一些性质,而且还可看到,它的通解有着与一阶线性微分方程类似的结构.

2.1 齐次线性微分方程组

线性微分方程组的一般形式为

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $a_{ij}(t)$ 与 $f_i(t)$ ($i, j = 1, \dots, n$) 均在区间 (a, b) 内连续. 写成向量形式为

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (2.1)$$

其中 $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$ 为 n 阶方阵.

当 $f(t) \equiv 0$ 时, 得

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (2.2)$$

称为齐次线性微分方程组(向量形式); 而 $f(t) \neq 0$ 时(2.1)称为非齐次线性微分方程组.

由解的存在唯一性定理容易看出, 在所给的条件下, 方程组(2.1)满足初值条件 $x(t_0) = x_0, t_0 \in (a, b), x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的解 $x(t)$ 存在唯一, 而且可延拓至整个区间 (a, b) , 它是一个定义在 (a, b) 内的 n 维向量值函数.

对于齐次线性微分方程组(2.2), 容易看出, 它具有以下简单性质:

- 1° $x(t) \equiv 0$ 是方程组(2.2)的解, 称为平凡解或零解;
- 2° 若方程组(2.2)的解 $x(t)$ 满足初值条件 $x(t_0) = 0$, 则必有 $x(t) \equiv 0$;
- 3° 若 $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n, t \in (a, b)$) 都是方程组(2.2)的解, C_1, \dots, C_n 均为常数, 则其线性组合 $\sum_{i=1}^n C_i x_i(t)$ ($t \in (a, b)$) 也是方程组(2.2)的解.

在线性代数中, 我们知道, n 维常向量的全体构成一 n 维线性空间, 它的基可由任意 n 个线性独立的常向量构成, 这时, 任一 n 维常向量均可用此空间的基线性表示. 从上述性质 1° 和 3° 使我们想到: 齐次线性微分方程组(2.2)的所有解(向量值函数)是否也能够构成一 n 维线性空间呢? 它的基是否也可通过把常向量的线性无关概念推广后得到呢? 若能做到这一点, 则方程组(2.2)的任一解都可表成基的线性组合, 这样, 我们就得到了方程组(2.2)通解的表达式. 为研究这一问题, 我们首先把线性相关与线性无关的概念推广到向量值函数.

定义 2.1 设有 m 个 n 维向量值函数 $x_1(t), \dots, x_m(t)$ 均在区间 (a, b) 内

有定义. 如果存在不全为零的常数 C_1, \dots, C_m 使在 (a, b) 内成立恒等式

$$\sum_{i=1}^m C_i x_i(t) = C_1 x_1(t) + \cdots + C_m x_m(t) \equiv 0,$$

那末称 $x_1(t), \dots, x_m(t)$ 在区间 (a, b) 内线性相关. 如果 $x_1(t), \dots, x_m(t)$ 在 (a, b) 内不是线性相关的, 那末就称这 m 个向量值函数在 (a, b) 内线性无关或线性独立.

把数量值函数看作是一维向量值函数, 这个定义也适用于数量值函数.

由定义可见, 向量值函数的线性相关与否是对区间内的所有点来说的. 当任意固定一点时, 它就是一个常向量, 因而自然产生这样的问题, 它们会不会对在某个点 $t_1 \in (a, b)$ 处所形成的常向量组 $x_1(t_1), \dots, x_m(t_1)$ 线性相关, 而在另一点 $t_2 \in (a, b)$ 处所形成的常向量组又线性无关呢? 一般说来, 这种情况是可能发生的(参见习题 7.2(A)3.). 但是下列定理表明, 若 $x_i(t) (i=1, 2, \dots, m)$ 是齐次线性微分方程组(2.2)的解时, 这种情况不会发生.

定理 2.1 设 $x_i(t) (t \in (a, b), i=1, 2, \dots, m)$ 是方程组(2.2)的任意 m 个解, 则这 m 个解在区间 (a, b) 内线性相关的充要条件是: $\exists t_0 \in (a, b)$, 使常向量组 $\{x_i(t_0)\} (i=1, 2, \dots, m)$ 线性相关.

证 由定义 2.1, 必要性是显然的, 现证充分性, 设存在 $t_0 \in (a, b)$ 与不全为零的常数 C_1, \dots, C_m , 使 $\sum_{i=1}^m C_i x_i(t_0) = 0$. 考虑向量值函数 $x(t) = \sum_{i=1}^m C_i x_i(t), t \in (a, b)$, 由性质 3° 可知, $x(t)$ 也是方程组(2.2)的解. 但由于 $x(t_0) = \sum_{i=1}^m C_i x_i(t_0) = 0$, 由性质 2° 可知, 必有 $x(t) = \sum_{i=1}^m C_i x_i(t) \equiv 0 (t \in (a, b))$, 即 $x_i(t) (i=1, \dots, m)$ 在 (a, b) 线性相关. ■

由这个定理我们看出, 对于方程组(2.2)在 (a, b) 内存在的解 $x_i(t)$ 来说, 如果在 (a, b) 内一点线性无关, 则必在整个区间 (a, b) 内线性无关. 因此, 我们只要在 n 维向量空间中找出一个基 (e_1, \dots, e_n) , 那末以 $x_i(t_0) = e_i (i=1, 2, \dots, n; t_0 \in (a, b))$ 为初值所得到的 n 个解 $x_i(t), i=1, 2, \dots, n$, 必然线性无关, 于是有

定理 2.2 方程组(2.2)存在 n 个线性无关的解; 而且此方程组的任一解均可表示成这 n 个线性无关解的线性组合.

证 在 \mathbb{R}^n 中任取一个基, 例如取标准基 e_1, \dots, e_n , 分别以它们作为初值, 即

$$\mathbf{x}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{x}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

根据解的存在唯一性定理, 方程组(2.2)以上述每一向量 $\mathbf{x}_i(t_0)$ 为初值的解 $\mathbf{x}_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 必在 (a, b) 内存在. 由于初始向量组(2.3)线性无关, 由定理 2.1 知 $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ 在 (a, b) 内也线性无关.

现在证明方程组(2.2)的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 均可表为 $\mathbf{x}_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的线性组合. 事实上, 由于 $\mathbf{x}_i(t_0)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 是 n 维向量空间的一个基, 故 $n+1$ 个向量: $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)$ 必线性相关. 由定理 2.1 知 $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ 也在 (a, b) 内线性相关, 即存在不全为零的常数 C, C_1, \dots, C_n 使

$$C\mathbf{x}(t) + C_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + C_n\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{0}.$$

可以肯定必有 $C \neq 0$, 否则 $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ 就线性相关了. 所以

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{C_1}{C}\mathbf{x}_1(t) - \cdots - \frac{C_n}{C}\mathbf{x}_n(t). \quad \blacksquare$$

定理 2.2 表明: 齐次线性微分方程组(2.2)的全部解构成一个 n 维线性空间, 称为此方程组的解空间. 同时, 定理 2.2 也给出了齐次线性微分方程组通解的结构: 齐次线性微分方程组的通解 $\mathbf{x}(t)$ 是它的任意 n 个线性无关的特解 $\mathbf{x}_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 与 n 个任意常数 C_i 的线性组合^①, 即

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i(t), \quad t \in (a, b).}$$

1. 基解矩阵及其判别法

定义 2.2 齐次线性微分方程组(2.2)的任意 n 个线性无关的特解 $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ 称为方程组(2.2)的一个基本解组, 它也就是由方程组(2.2)全部解所构成的解空间的一个基($\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$), 以这些解的分量为列所形成的矩阵称为方程组(2.2)的基解矩阵, 记为

^① 由此可见, 对于齐次线性微分方程组(2.2)而言, 其通解不仅含有 n 个独立的任意常数, 而且它包括了此微分方程组的全部解, 也可用后一特征来作为齐次线性微分方程组通解的定义.

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) & x_{2,1}(t) & \vdots & x_{n,1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,n}(t) & x_{2,n}(t) & \vdots & x_{n,n}(t) \end{pmatrix} = (x_1(t) \cdots x_n(t)).$$

定义 2.3 由 n 个 n 维向量值函数 $x_i(t)$ ($t \in I, i=1, 2, \dots, n$) 的分量 $x_{i,j}(t)$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) 依次为列所构成的行列式, 称为这 n 个向量值函数的 Wronsky 行列式, 记作 $W(t) = \det(x_{i,j}(t))$, $t \in I$.

利用基解矩阵可将方程组(2.2)的通解表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{C}, \quad t \in (a, b), \quad (2.4)$$

其中, $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^T$ 是一由任意常数 C_1, \dots, C_n 所组成的向量.

由此可见, 求解齐次线性微分方程组(2.2)关键在于求出它的基解矩阵, 或者说求出它的任意 n 个线性无关的特解. 然而, 当找到方程组(2.2)在 (a, b) 内的 n 个特解 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 后, 怎样来判断它们在 (a, b) 内是否线性无关呢? 我们有下列简单的判别法.

定理 2.3 齐次线性微分方程组(2.2)的 n 个解 $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 在 (a, b) 内线性无关的充要条件是存在一点 $t_0 \in (a, b)$, 使得这 n 个解的 Wronsky 行列式在 t_0 处的值 $W(t_0) \neq 0$.

证 由定理 2.1 可知, 方程组(2.2)的 n 个解 $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 在 (a, b) 内线性无关的充要条件是, $\exists t_0 \in (a, b)$ 使 $x_i(t_0)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 线性无关; 而由线性代数的知识可知, n 个 n 维向量 $x_i(t_0)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 线性无关的充要条件是由它们的分量所构成的行列式

$$W(t_0) = \det(x_{i,j}(t_0)) \neq 0. \quad \blacksquare$$

实际上, 不难看出由方程组(2.2)的 n 个解所构成的 Wronsky 行列式在解的存在区间 (a, b) 内或者恒为零, 或者恒不为零(习题 7.2(A)10.).

2. 矩阵函数的导数与积分

为了下面研究的需要, 我们给出矩阵函数的导数与积分的定义和有关基本运算.

定义 2.4 设有矩阵函数

$$\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{n \times m}, \quad t \in I.$$

(1) 若所有函数 $a_{ij}(t)$ ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$) 均在区间 I 内连续, 则称矩阵函数 $\mathbf{A}(t)$ 在 I 内连续;

(2) 若所有函数 $a_{ij}(t)$ ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$) 均在区间 I 内可导(可积), 则称矩阵函数 $\mathbf{A}(t)$ 在 I 内可导(可积), 且定义

$$\dot{\mathbf{A}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = (\dot{a}_{ij}(t))_{n \times m}, t \in I$$

$$\int_a^b \mathbf{A}(t) dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t) dt \right)_{n \times m}.$$

例如, 设

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix},$$

则

$$\dot{\mathbf{A}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \int_0^\pi \mathbf{A}(t) dt = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\pi^2}{2} \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

由定义 2.4 容易验证矩阵函数的导数满足以下运算法则:

$$(1) \frac{d}{dt}(\mathbf{C}\mathbf{A}) = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \text{ 其中 } \mathbf{C} \text{ 是一可与 } \mathbf{A} \text{ 相乘的常数矩阵};$$

$$(2) \text{ 若 } \mathbf{A} \text{ 与 } \mathbf{B} \text{ 为同阶矩阵函数, 则 } \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt};$$

$$(3) \text{ 若矩阵函数 } \mathbf{A} \text{ 与 } \mathbf{B} \text{ 可以相乘, 则 } \frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{B}.$$

3. 基解矩阵的性质

方程组(2.2)的基解矩阵具有以下重要性质:

1° 基解矩阵 $\mathbf{X}(t)$ 满足矩阵方程^①:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}.$$

事实上,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) &= \left(\frac{dx_{i,j}(t)}{dt} \right)_{n \times n} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{k,j}(t) \right)_{n \times n} \\ &= (a_{ij}(t))_{n \times n} (x_{i,j}(t))_{n \times n} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2° 若 $\mathbf{X}(t)$ 是方程组(2.2)在 (a, b) 内的任一基解矩阵, \mathbf{B} 是任一 n 阶非奇异常数矩阵, 则 $\mathbf{X}(t)\mathbf{B}$ 也是(2.2)在 (a, b) 内的一个基解矩阵(习题 7.2(B)第 1 题).

3° 若 $\mathbf{X}(t)$ 与 $\mathbf{X}^*(t)$ 是方程组(2.2)在 (a, b) 内的任意两个基解矩阵, 则必存在一 n 阶非奇异常数矩阵 \mathbf{B} , 使

^① 把矩阵 \mathbf{X} 的每一列看成是一向量, 此方程实际上是 n 个形如(2.2)的向量方程合在一起的缩写, 其中每一向量方程的系数矩阵都是 \mathbf{A} .

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*(t)\mathbf{B}, \quad t \in (a, b).$$

事实上,因为 $\mathbf{X}^*(t)$ 是一基解矩阵,而 $\mathbf{X}(t)$ 的列向量 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 都是解,所以由(2.4),必 $\exists b_i \in \mathbb{R}^n$ 使

$$x_i(t) = \mathbf{X}^*(t)b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 b_i 为非零向量,从而

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) &= (\mathbf{X}^*(t)b_1, \dots, \mathbf{X}^*(t)b_n) \\ &= \mathbf{X}^*(t)(b_1, \dots, b_n) = \mathbf{X}^*(t)\mathbf{B}.\end{aligned}$$

且由

$$\det \mathbf{X}^*(t) \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{X}(t) \neq 0,$$

可知 $\det \mathbf{B} \neq 0$,即 \mathbf{B} 是非奇异矩阵. ■

例 2.1 验证微分方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2} \sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2} \sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

的通解为

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

证 代入微分方程组直接验证可知:当 $t \in \mathbb{R}$ 时, $\begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ 是该方程组的两个特解,由于当 $t = 0$ 时 Wronsky 行列式

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以,此两特解在 $t \in \mathbb{R}$ 线性无关,于是其通解如题中所示. ■

2.2 非齐次线性微分方程组

在第三章第五节中,我们知道,一阶非齐次线性微分方程的通解是由它的任一特解与对应齐次线性微分方程的通解之和组成.现在我们来证明,非齐次线性微分方程组(2.1)的通解仍然具有同样的结构.

定理 2.4 (非齐次线性微分方程组解的结构) 非齐次线性微分方程组(2.1)的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 可以表示成它的任一特解 $\mathbf{x}^*(t)$ 与它所对应的齐次线性微分方程组(2.2)的通解(2.4)之和的形式,即

$$\boxed{x(t) = X(t)C + x^*(t), \quad t \in (a, b),} \quad (2.5)$$

其中 $X(t)$ 是齐次线性微分方程组(2.2)的一个基解矩阵, $C \in \mathbb{R}^n$ 为常向量.

证 设 $x(t)$ 是非齐次线性微分方程组(2.1)的任一解, 我们证明它都可用(2.5)式表出. 事实上, 由于 $x(t)$ 与 $x^*(t)$ 都是方程组(2.1)的解, 从而有

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &\equiv A(t)x(t) + f(t), \\ \frac{dx^*(t)}{dt} &\equiv A(t)x^*(t) + f(t).\end{aligned}$$

两式相减得

$$\frac{d}{dt}[x(t) - x^*(t)] \equiv A(t)[x(t) - x^*(t)],$$

即 $x(t) - x^*(t)$ 是对应的齐次线性微分方程组(2.2)的解, 从而有

$$x(t) - x^*(t) = X(t)C,$$

于是(2.5)成立. ■

注意到(2.5)式中的 $C \in \mathbb{R}^n$ 可以是任意常向量, 因此, (2.5)式也是非齐次线性微分方程组(2.1)通解的表达式. 由定理 2.4 可见, 与齐次线性微分方程组一样, 非齐次线性微分方程组的通解也包括了它的全部解. 故也可用后一特征去定义非齐次线性微分方程组的通解.

由定理 2.4 可知, 在已知齐次线性微分方程组(2.2)的基解矩阵的情况下, 要求非齐次线性微分方程组(2.1)的通解, 关键在于找到它的任一特解, 下述定理给出了此特解的表达式, 而其证明给出了求此特解的一种方法.

定理 2.5 设 $X(t)$ ($t \in (a, b)$) 是齐次线性微分方程组(2.2)的一个基解矩阵, 则

$$\boxed{x^*(t) = X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in (a, b)} \quad (2.6)$$

就是非齐次线性微分方程组(2.1)适合初值条件 $x^*(t_0) = 0$ 的特解.

证 我们采用在一阶线性微分方程中曾经用过的常数变易法(第三章 5.4 段)来证明公式(2.6). 假设方程组(2.1)有如下形式的特解

$$x^*(t) = X(t)C(t), \quad (2.7)$$

其中 $C(t)$ 为一 n 维向量值函数. 我们期望把(2.7)代入方程组(2.1)可将待定的向量值函数 $C(t)$ 确定出来. 为此, 把(2.7)代入方程组(2.1), 把 $C(t)$ 看作是

n 行一列矩阵函数, 得

$$\dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{f}(t). \quad (2.8)$$

由于 $\mathbf{X}(t)$ 为基解矩阵, 由基解矩阵的性质 1° 可知, 它应满足矩阵方程, 即

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t),$$

代入(2.8)式后化简得

$$\mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (2.9)$$

由于 $\mathbf{X}(t)$ 是基解矩阵, 故 Wronsky 行列式

$$W(t) = \det \mathbf{X}(t) \neq 0, \quad t \in (a, b),$$

从而逆矩阵 $\mathbf{X}^{-1}(t)$ ($t \in (a, b)$) 存在. 用 $\mathbf{X}^{-1}(t)$ 左乘(2.9)式两端得

$$\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{f}(t),$$

积分得

$$\mathbf{C}(t) = \int \mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt = \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau + \mathbf{C}_1,$$

其中 \mathbf{C}_1 为任意常向量, 代入(2.7)式得

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{X}(t) \left(\int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau + \mathbf{C}_1 \right),$$

由初值条件 $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{0}$ 可得 $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$, 于是定理得证. ■

综合定理 2.4 与 2.5 可得非齐次线性微分方程组(2.1)的通解表达式:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C} + \mathbf{X}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau. \quad (2.10)$$

若将初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 代入, 可得

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0,$$

于是, 方程组满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的特解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{X}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau. \quad (2.11)$$

例 2.2 求微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 \cos^2 t + x_2 \left(\frac{1}{2} \sin 2t - 1 \right) + \cos t, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \left(\frac{1}{2} \sin 2t + 1 \right) + x_2 \sin^2 t + \sin t \end{cases}$$

的通解与适合初值条件 $x_1(0)=0, x_2(0)=1$ 的特解.

解 由例 2.1 可知, 对应的齐次线性微分方程组的基解矩阵为

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

容易求得

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{aligned} \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} \cos \tau & e^{-\tau} \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^t \cos t - C_2 \sin t + (e^t - 1) \cos t \\ C_1 e^t \sin t + C_2 \cos t + (e^t - 1) \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

注意到

$$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

代入(2.11)式便得所求特解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} (e^t - 1) \cos t - \sin t \\ (e^t - 1) \sin t + \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

当然也可以把初值条件代入所求得的通解(2.12)中, 确定出 $C_1=0, C_2=1$ 从而得出特解.

应当指出, 对于线性微分方程组来说, 如果知道了对应齐次线性微分方程组的基解矩阵, 那末非齐次线性微分方程组的通解一定可以求出. 但这并不意味着

线性微分方程组的解一定可用初等积分法得到. 因为齐次线性微分方程组的解, 一般说来是很难求得的. 即使对于仅由两个方程构成的齐次线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(t)x_1 + b_1(t)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2(t)x_1 + b_2(t)x_2, \end{cases}$$

它的解一般也是无法通过初等积分法获得的.

习题 7.2

(A)

1. 下列方程(组)中哪些是线性微分方程(组)? 哪些不是?

$$(1) \frac{dx}{dt} + 2x^2 - t = 3; \quad (2) \frac{dx}{dt} + 2t^2x + e^t = 0;$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3tx + 2xy, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + ty; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^3y + z\sin x, \\ \frac{dz}{dx} = y\cos x - x^2z. \end{cases}$$

2. 证明: 若 $x = x(t)$ 是齐次线性微分方程组 $\dot{x} = A(t)x$ 满足 $x(t_0) = 0$ 的解, 则必有 $x(t) = 0$.

3. 试验证向量值函数 $x(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 线性无关; 但在 $t_1 = 1, t_2 = -1$ 时, $x(t_i)$ 与 $y(t_i)$ ($i = 1, 2$) 线性相关.

4. 证明: 若 $x_i(t), i = 1, \dots, n, t \in (a, b)$ 都是齐次线性微分方程组 $\dot{x} = A(t)x$ 的解, 则其线性组合 $\sum_{i=1}^n C_i x_i(t), t \in (a, b)$ 也是其解, 其中 C_i 为实的或复的常数.

5. 设 $v_i \in \mathbb{R}^n, v_i \neq 0, \lambda_i \in \mathbb{C}, \lambda_i$ 互不相同, $i = 1, \dots, m$. 试证向量值函数 $v_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, v_m e^{\lambda_m t}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 线性无关.

6. 证明: 非齐次线性微分方程组 $\dot{x} = A(t)x + f(t), x \in \mathbb{R}^n$ 的任意两个解之差必为对应齐次线性微分方程组的一个解.

7. 设 $A(t)$ 为实矩阵, $x = x(t)$ 是 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的复值解, 试证明 $x(t)$ 的实部和虚部分别都是它的解.

8. 设 $A(t)$ 为实矩阵, $(x_1(t) \cdots x_n(t))$ 是 $\dot{x} = A(t)x$ 的基解矩阵, 其中 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 是一对共轭复值解向量, 记

$$y_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} x_1(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)),$$

$$y_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im} x_1(t) = \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t)).$$

证明:用向量 y_1, y_2 代替 x_1, x_2 后所得的矩阵 $(y_1(t) \ y_2(t) \ x_3(t) \cdots x_n(t))$ 也是原方程组的一个基解矩阵.

9. 设 $x = x_i(t)$ 是 $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) 的解, 证明: $x = \sum_{i=1}^m x_i(t)$ 必为 $\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{i=1}^m f_i(t)$ 的解.

10. (1) 试验证向量值函数组 $(1, 0, 0)^T, (t, 0, 0)^T, (t^2, 0, 0)^T$ 在任意区间 (a, b) 内线性无关, 但它们的 Wronsky 行列式 $W(t) \equiv 0$;

(2) 试证明方程组(2.2)的 n 个解构成的 Wronsky 行列式在解存在的区间 (a, b) 内或者恒为零, 或者恒不为零.

11. 设非齐次线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}x - y + t, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}y - t^2. \end{cases}$$

(1) 验证 $x = t^2, y = -t$ 是其对应的齐次线性微分方程组的解;

(2) 求所给非齐次线性微分方程组的通解.

(B)

1. 若 $X(t)$ 是齐次线性微分方程组 $\dot{x} = A(t)x, x \in \mathbb{R}^n$ 的任一基解矩阵, B 是任一 n 阶非奇异常数矩阵, 证明: $X(t)B$ 也是此方程组的一个基解矩阵.

2. 证明: 若下列两方程组:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \frac{dx}{dt} = B(t)x$$

有相同的基解矩阵, 则 $A(t) = B(t)$, 其中 $A(t), B(t)$ 是两个 n 阶连续矩阵.

3. 证明: 若 $X(t)$ 是 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵, 则 $(X^T(t))^{-1}$ 是 $\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x$ 的基解矩阵.

4. 设 $\dot{x} = A(t)x$,

(1) 怎样的行列式称为其解的 Wronsky 行列式;

(2) 证明: Wronsky 行列式 $W(t)$ 满足下列 Liouville 公式:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}A(\tau)d\tau},$$

其中 $\text{tr}A(t)$ 表示矩阵 $A(t)$ 的迹.

第三节 常系数线性微分方程组

在上节中我们已经看到, 对线性微分方程组的解已建立了一套比较完整的理论. 然而遗憾的是, 齐次线性微分方程组的解一般是难以求得的, 正像我们所

指出的,即使是仅由两个一阶微分方程所构成的齐次线性微分方程组,它的解一般也无法通过初等积分法得到.但是,当线性微分方程组中所有未知函数及其导数的系数都是常数时,它的解却可以很容易地利用线性代数方法求出.而这种常系数的线性微分方程组恰好是在实际应用中常见的一种重要类型.本节就来讨论这类方程组的求解问题.

3.1 常系数齐次线性微分方程组的求解

回顾一阶齐次线性微分方程

$$\frac{dx}{dt} = ax,$$

若其中 a 为常数,它的通解可利用分离变量法立即得到

$$x = Ce^{at}.$$

现在,考察常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

或其向量形式

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (3.1)$$

其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为一常数矩阵.由解的存在唯一性定理可知,方程组(3.1)的任一解的存在区间均为 $(-\infty, +\infty)$.注意到指数函数的导数仍为指数函数,为求解方程组(3.1),我们可以设想方程组(3.1)有形如

$$x = re^{\lambda t} \quad (3.2)$$

的特解,其中 λ 为待定常数, r 为待定常向量.然后把(3.2)式代入方程组(3.1)去确定 λ 与 r ,这种方法称为待定系数法.将(3.2)式代入方程组(3.1)得

$$r\lambda e^{\lambda t} = Are^{\lambda t},$$

从而

$$r\lambda = Ar, \quad \text{或} \quad (A - \lambda E)r = 0,$$

其中 E 为 n 阶单位方阵.可见,当且仅当 λ 为系数矩阵 A 的特征值时,方程组(3.1)有形如(3.2)的解.此时,非零向量 r 就是 A 的特征值 λ 所对应的特征向量.这样,对于一种简单情形,即 n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量时,方程组(3.1)的基解矩阵是很容易求得的.

定理 3.1 设 n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量 r_1, r_2, \dots, r_n , 它们对

应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (未必互不相同), 则矩阵

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t} \cdots \mathbf{r}_n e^{\lambda_n t}) \quad (3.3)$$

就是常系数齐次线性微分方程组(3.1)的一个基解矩阵.

证 如上所述, 每一个向量值函数 $\mathbf{r}_i e^{\lambda_i t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 都是方程组(3.1)的解, 而且由于 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ 线性无关, 从而

$$\det \mathbf{X}(0) = \det(\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \cdots \ \mathbf{r}_n) \neq 0,$$

所以向量值函数 $\mathbf{r}_i e^{\lambda_i t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 线性无关, 故矩阵(3.3)是方程组(3.1)的一个基解矩阵. ■

根据定理 3.1, 当方程组(3.1)的系数矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量时, 此微分方程组的求解问题已经得到了解决. 那末在什么情况下, A 一定有 n 个线性无关的特征向量呢? 如果 A 的线性无关的特征向量的个数小于 n 时, 又如何去求方程组(3.1)的基解矩阵呢? 下面我们就来讨论这些问题.

(1) A 的 n 个特征值都是单重的 这时, A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互不相同, 设它们对应的特征向量分别为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$. 由线性代数知识可知, 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的. 因此, 据定理 3.1, 矩阵(3.3)便是方程组(3.1)的一个基解矩阵.

例 3.1 求齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

的通解.

解 其系数矩阵 A 的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = 3\lambda(1 - \lambda^2) = 0,$$

从而特征值为

$$\lambda = 0, \quad 1, \quad -1,$$

故 A 的 3 个特征值都是单重的. 通过计算得知它们相应的特征向量可分别取为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是所给微分方程组的一个基解矩阵为

$$\mathbf{X}(t) = (r_1 e^{0t} \ r_2 e^t \ r_3 e^{-t}) = \begin{pmatrix} -2 & 2e^t & 3e^{-t} \\ -1 & -e^t & 0 \\ 1 & 2e^t & e^{-t} \end{pmatrix},$$

故所给微分方程组的通解为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 2e^t & 3e^{-t} \\ -1 & -e^t & 0 \\ 1 & 2e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

其中 $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)^T$ 为任意常向量. ■

(2) A 有重特征值的情形 此时有两种情形. 一种简单的情形是: A 的每个重特征值所对应的线性无关的特征向量的个数正好等于该特征值的重数. 这时, 根据线性代数的知识, 与各个特征值所对应的线性无关的特征向量的全体, 就构成矩阵 A 的 n 个线性无关的特征向量. 所以这种情形也可利用定理 3.1 去直接求得方程组(3.1)的基解矩阵.

例 3.2 求齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

的通解.

解 微分方程组的系数矩阵 A 的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda + 2)^2(4 - \lambda) = 0,$$

从而求得 A 有二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, 及单重特征值 $\lambda_3 = 4$. 要求对应于特征值 $\lambda_1 = -2$ 的线性无关的特征向量, 也就是要求齐次线性方程组 $(A + 2E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系. 为此, 对其系数矩阵 $A + 2E$ 作初等行变换:

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $A + 2E$ 的秩为 1, 故方程组 $(A + 2E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系含 2 个向量, 即矩阵 A 对应于二重特征值 -2 的线性无关的特征向量有 2 个, 它们可取为

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

计算可得对应于特征值 $\lambda_3=4$ 的特征向量可取为

$$\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_3$, 所以 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 是线性无关的. 这样, 对于 3 阶方阵 A , 我们求得了 A 的 3 个线性无关的特征向量, 根据定理 3.1, 所给微分方程组的基解矩阵为

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{r}_1 e^{-2t} \mathbf{r}_2 e^{-2t} \mathbf{r}_3 e^{4t}) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}.$$

从而得微分方程组的通解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{C} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)^T$ 为任意的常向量. ■

另一种比较困难的情形是: 存在 A 的 n_i 重特征值 λ_i , 它所对应的线性无关的特征向量的个数小于该特征值的重数 n_i . 这时, 若仍像定理 3.1 那样, 仅利用 A 的特征向量, 方程组(3.1)的基解矩阵将不能得到. 对于这样的特征值 λ_i , 能否找到方程组(3.1)的 n_i 个其它形式的线性无关的特解呢? 下面的定理回答了这一问题.

定理 3.2 设 λ_i 是矩阵 A 的 n_i 重特征值, 则方程组(3.1)必存在 n_i 个形如

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_i t} \left(\mathbf{r}_0 + \frac{t}{1!} \mathbf{r}_1 + \frac{t^2}{2!} \mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{n_i-1} \right)} \quad (3.4)$$

的线性无关的特解, 其中 \mathbf{r}_0 是齐次线性方程组

$$\boxed{(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^n \mathbf{r} = \mathbf{0}} \quad (3.5)$$

的非零解, 而方程组(3.5)必有 n_i 个线性无关的解. 对于每一个解 \mathbf{r}_0 , 相应的 $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_i-1}$ 可由下列关系式逐次确定:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{r}_2 &= (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{r}_1, \\ &\dots \\ \mathbf{r}_{n_i-1} &= (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{r}_{n_i-2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

证明略去,有兴趣的读者可参阅参考文献[13,12].

对于 A 的单重特征值,我们由定理 3.1 可求出方程组(3.1)与它们所对应的线性无关的特解;对于 A 的每个多重特征值,利用定理 3.1 或 3.2,可以求得方程组(3.1)与每个多重特征值所对应的线性无关的特解,而且与每个特征值所对应的线性无关的特解数目恰好等于此特征值的重数.这样一来,我们就可以得到方程组(3.1)的 n 个特解.现在的问题是这 n 个特解是否彼此线性无关呢?把问题提得再明确一些就是:把对应于每个特征值的那些线性无关的特解合起来后是否仍然线性无关?下面的定理回答了这一问题.

定理 3.3 设 n 阶矩阵 A 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$,其相应的重数分别为 n_1, n_2, \dots, n_s ($n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$).则由定理 3.1(包括多重特征值所对应的线性无关特征向量的个数等于该特征值的重数情形)与定理 3.2 所求出的方程组(3.1)的诸线性无关特解的全体,必构成方程组(3.1)的 n 个线性无关的特解,因而构成了方程组(3.1)的一个基本解组.(证明略去).

例 3.3 求解微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

解 微分方程组的系数矩阵 A 的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = 0.$$

因此, A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1.$$

对于二重特征值 $\lambda_1 = 2$,由于 $A - 2E$ 的秩为 2,故矩阵 A 线性无关的特征向量只能有一个,从而我们不能用例 3.2 的方法去求解.根据定理 3.2,我们需要先求齐次线性方程组 $(A - 2E)^2 r = 0$ 的基础解系.为此,对矩阵 $(A - 2E)^2$ 作初等行变换

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此方程组 $(A - 2E)^2 r = 0$ 的两个线性无关的解可取为

$$r_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

把 $r_0^{(1)}$ 和 $r_0^{(2)}$ 分别代入(3.6)(注意 $n_i=2$), 就可得到

$$r_1^{(1)} = (A - 2E)r_0^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

和

$$r_1^{(2)} = (A - 2E)r_0^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

把 $r_0^{(1)}, r_1^{(1)}$ 和 $r_0^{(2)}, r_1^{(2)}$ 分别代入(3.4)式, 就得到了所给微分方程组的对应于二重特征值 $\lambda_1=2$ 的两个线性无关的特解:

$$x_1(t) = e^{2t}(r_0^{(1)} + tr_1^{(1)}) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ -t \end{pmatrix},$$

$$x_2(t) = e^{2t}(r_0^{(2)} + tr_1^{(2)}) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

对于单重特征值 $\lambda_3=-1$, 计算可得对应的特征向量可取为

$$r = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

因此所给微分方程组与特征值 $\lambda_3=-1$ 所对应的非零特解为

$$x_3(t) = e^{-t}r = e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

由定理 3.3, $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 就是所给微分方程组的一个基本解组. 因此, 微分方程组的通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t) \\ &= C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ -t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3 是任意的常数. ■

例 3.4 求微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} x$$

的一个基本解组.

解 微分方程组的系数矩阵 A 的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^3 = 0,$$

因此, 矩阵 A 只有 1 个三重特征值 $\lambda = 1$. 通过计算得知 $(A - E)^2 = \mathbf{0}$, 因此 $(A - E)^3 = \mathbf{0}$. 所以齐次线性方程组 $(A - E)^3 r = \mathbf{0}$ 的基础解系可取为

$$r_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_0^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

把 $r_0^{(1)}, r_0^{(2)}, r_0^{(3)}$ 分别代入(3.6), 并注意 $n_i = 3$, 就可得到

$$r_1^{(1)} = (A - E)r_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad r_2^{(1)} = (A - E)r_1^{(1)} = (A - E)^2 r_0^{(1)} = \mathbf{0},$$

$$r_1^{(2)} = (A - E)r_0^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r_2^{(2)} = (A - E)r_1^{(2)} = \mathbf{0},$$

$$r_1^{(3)} = (A - E)r_0^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r_2^{(3)} = (A - E)r_1^{(3)} = \mathbf{0}.$$

再把 $r_0^{(i)}, r_1^{(i)}, r_2^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) 分别代入(3.4)式, 则得

$$x_1(t) = e^t (r_0^{(1)} + t r_1^{(1)}) = e^t \begin{pmatrix} 1+4t \\ -8t \\ -4t \end{pmatrix},$$

$$x_2(t) = e^t (r_0^{(2)} + t r_1^{(2)}) = e^t \begin{pmatrix} -3t \\ 1-6t \\ 3t \end{pmatrix},$$

$$x_3(t) = e^t (r_0^{(3)} + t r_1^{(3)}) = e^t \begin{pmatrix} -2t \\ -4t \\ 1+2t \end{pmatrix},$$

于是 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 就是所给微分方程组的一个基本解组. ■

(3) A 有复特征值的情形 我们知道, 当 A 为实矩阵时, 它的特征值中有可能出现共轭复数, 从而相对应的特征向量就可能为复向量. 这时, 由定理 3.1 与 3.2 所求得的方程组(3.1)的特解也可能是复向量值函数, 使用起来颇不方便. 下面介绍一种利用线性无关的复向量值函数来构造相应的线性无关的实向量值函数解的方法.

设方程组(3.1)有一个复值解

$$x_1(t) = u(t) + i v(t),$$

其中 $u(t)$ 与 $v(t)$ 都是实向量值函数. 代入(3.1), 得

$$\dot{u}(t) + i \dot{v}(t) \equiv A(u(t) + i v(t)).$$

将上式两端取共轭, 注意到 A 为实矩阵, 得

$$\dot{u}(t) - i \dot{v}(t) \equiv A(u(t) - i v(t)),$$

因此, $x_1(t)$ 的共轭向量

$$x_2(t) = u(t) - i v(t)$$

也是方程组(3.1)的一个解. 利用齐次线性微分方程组解的性质, 可知这两个复值解的实部.

$$u(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)),$$

和虚部:

$$v(t) = \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t))$$

也都分别是方程组(3.1)的解. 由本章习题 7.2(A)第 8 题可知, 用 $u(t)$ 与 $v(t)$ 取代(3.1)的基解矩阵中的向量 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 后, 所得的矩阵仍是(3.1)的基解矩阵. 使用这种方法, 我们就可把方程组(3.1)的复值基解矩阵用实值基解矩阵来代替.

例 3.5 求解初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解 所给微分方程的系数矩阵 A 的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0.$$

解之, 得特征值

$$\lambda = 1 \text{ 与 } \lambda = 1 \pm i.$$

对于 $\lambda = 1$, 容易求得它对应的特征向量可取为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 故所对应的解为

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda = 1 + i$, 它对应的特征向量 $r = (r_1, r_2, r_3)^T$ 满足方程组

$$(A - (1+i)E)r = 0, \text{ 即 } \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0.$$

容易求得一个解为

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix},$$

从而可得 $\lambda = 1 + i$ 所对应的复值解为

$$\begin{aligned} x_2(t) &= e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^t (\cos t + i \sin t) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^t \left\{ \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \left(\cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

故 $\lambda = 1 \pm i$ 所对应的两个线性独立的实值解为

$$\mathbf{u}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \mathbf{v}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

所以原方程的通解可由 $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{u}(t)$ 与 $\mathbf{v}(t)$ 构成为

$$\mathbf{x}(t) = e^t \left(C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_2 \sin t + C_3 \cos t \\ C_2 \cos t + C_3 \sin t \end{pmatrix}.$$

代入初值条件 $\mathbf{x}(0) = (1 \ 1 \ 1)^T$, 解得

$$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1,$$

于是所求初值问题的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}. \blacksquare$$

3.2 常系数非齐次线性微分方程组的求解

在本章 2.2 段中, 我们已经讨论过一般非齐次线性微分方程组的求解问题, 并得到了其通解和满足初值条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 的特解公式, 分别如 (2.10) 与 (2.11) 所示.

对于常系数非齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{f} \in C((a, b)) \quad (3.7)$$

我们当然可以先求出对应的常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵 $\mathbf{X}(t)$, 然后代入公式 (2.10) 或 (2.11), 从而得到方程组 (3.7) 的通解和相应特解. 虽然它们必在 (a, b) 内存在, 但是为代入公式, 需要求 $\mathbf{X}(t)$ 的逆矩阵 $\mathbf{X}^{-1}(t)$, 比较麻烦. 其实, 对常系数线性微分方程组 (3.7) 来说, 公式 (2.10) 与 (2.11) 可以化成更便于计算的下述形式.

定理 3.4 常系数非齐次线性微分方程组 (3.7) 的通解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C} + \int_{t_0}^t \mathbf{X}(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau, \quad (3.8)$$

而方程组(3.7)满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的特解为

$$x(t) = X(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t - \tau)f(\tau)d\tau, \quad (3.9)$$

其中 $X(0) = E$ 为单位方阵.

证 我们首先来证明常系数齐次线性微分方程组(3.1)适合条件 $X(0) = E$ 的基解矩阵 $X(t)$ 具有以下两个性质:

$$X(t)X(\tau) \equiv X(t + \tau), \quad X^{-1}(\tau) \equiv X(-\tau), \quad (3.10)$$

其中 τ 为任意参数.

事实上, 设 $X(t)$ 是方程组(3.1)的基解矩阵且满足 $X(0) = E$. 由于 $\det X(t) \neq 0$, 由基解矩阵的性质 2° 可知, 对于任一参数 τ , $X(t)X(\tau)$ 也是(3.1)的一个基解矩阵, 从而

$$x_1 = X(t)X(\tau)x_0$$

是方程组(3.1)的解, 且适合初值条件

$$x_1(0) = X(\tau)x_0.$$

另一方面, 因为向量值函数 $X(t)x_0$ 是方程组(3.1)的解, 即

$$\frac{dX(t)x_0}{dt} \equiv A X(t)x_0,$$

注意到 A 为常数矩阵, 所以有

$$\frac{dX(t + \tau)x_0}{d(t + \tau)} \equiv A X(t + \tau)x_0,$$

即

$$\frac{dX(t + \tau)x_0}{dt} \equiv A X(t + \tau)x_0.$$

上式表明, 向量值函数 $x_2 \equiv X(t + \tau)x_0$ 也是方程组(3.1)的解, 而且它也满足初值条件

$$x_2(0) = X(\tau)x_0.$$

由解的存在唯一性定理,可知 $x_1(t) \equiv x_2(t)$, 从而

$$\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(\tau) \equiv \mathbf{X}(t+\tau),$$

即(3.10)中第一式成立.在此式中令 $t = -\tau$, 得

$$\mathbf{X}(-\tau)\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}(0) = \mathbf{E},$$

从而(3.10)中第二式成立.

现在,利用(3.10)中的两个恒等式,从非齐次线性微分方程组(2.1)的通解和特解公式(2.10)和(2.11)来导出常系数非齐次线性微分方程组(3.7)相应解的公式(3.8)与(3.9).

由(3.10)中的恒等式,公式(2.10)可改写成

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{X}(t)\mathbf{C} + \mathbf{X}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{X}(-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \\ &= \mathbf{X}(t)\mathbf{C} + \int_{t_0}^t \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \\ &= \mathbf{X}(t)\mathbf{C} + \int_{t_0}^t \mathbf{X}(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

同理,公式(2.11)可改写成

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t-t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{X}(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.$$

例 3.6 求微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

的通解.

解 此微分方程对应齐次微分方程组的一个基解矩阵可由例 3.5 得出为

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & -e^t \sin t & e^t \cos t \\ 0 & e^t \cos t & e^t \sin t \end{pmatrix}.$$

但是由于 $\mathbf{X}_1(0) \neq \mathbf{E}$, 所以 $\mathbf{X}_1(t)$ 不能用于公式(3.8). 为得到所需的基解矩阵, 利用基解矩阵的性质 2°, 我们可以选取基解矩阵为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1(t)\mathbf{X}_1^{-1}(0),$$

容易算得

$$\mathbf{X}_1^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

代入通解公式(3.8)得

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_1(t)\mathbf{X}_1^{-1}(0)\mathbf{C} + \int_0^t \mathbf{X}_1(t-\tau)\mathbf{X}_1^{-1}(0)\mathbf{f}(\tau)d\tau.$$

而

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(t)\mathbf{X}_1^{-1}(0) &= e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X}_1(t-\tau)\mathbf{X}_1^{-1}(0)\mathbf{f}(\tau) &= \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t-\tau}\cos(t-\tau) & -e^{t-\tau}\sin(t-\tau) \\ 0 & e^{t-\tau}\sin(t-\tau) & e^{t-\tau}\cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^\tau \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + e^t \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ (C_2 \cos t - C_3 \sin t) e^t - e^t (1 - \cos t) \\ (C_2 \sin t + C_3 \cos t) e^t + e^t \sin t \end{pmatrix}. \blacksquare \end{aligned}$$

例 3.7 Lanchester 作战模型 在第一次世界大战期间, F. W. Lanchester 从他所建立的作战数学模型的研究中, 得出了所谓“Lanchester 平方定律”. 由此他说明军队的集中在战争中是十分重要的. 下面我们就来介绍他的模型.

在甲乙双方的一次战役中, 甲乙双方在开始时投入士兵数分别为 x_0 与 y_0 , t 时刻时甲乙双方的士兵数分别为 $x(t)$ 与 $y(t)$, 甲乙双方战斗的有效系数(包括士气、武器装配、指挥艺术等)分别为 b 与 a , 即甲方平均一个士兵使乙方士兵在单位时间内的减员数为 b . 在 t 时刻甲乙双方士兵的增援率分别设为 $f(t)$ 与

$g(t)$. 如果把士兵病故、逃亡等因素忽略不计, 那末两正规部队作战的数学模型为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay + f(t), \\ \frac{dy}{dt} = -bx + g(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

这是一常系数非齐次线性微分方程组的 Cauchy 问题.

首先我们讨论双方均无增援的情形. 这时模型变为齐次线性微分方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay, \\ \frac{dy}{dt} = -bx, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.11)$$

在相平面 xOy 上它的轨线应满足方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \frac{x}{y},$$

这是一个可分离变量的一阶微分方程. 它的通积分为

$$ay^2 - bx^2 = C,$$

这是一族双曲线, 如图 3.1 所示.

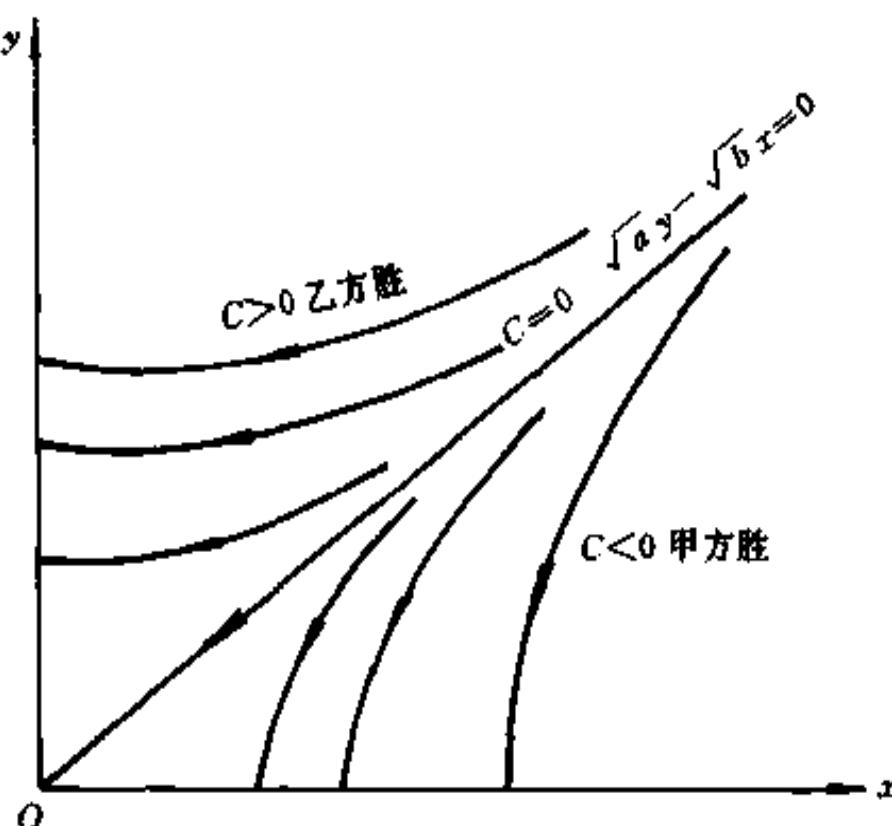


图 3.1

用初始点确定出常数 C 后得轨线方程为

$$ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2.$$

由方程组(3.11)可见,由于 $\dot{x} < 0, \dot{y} < 0$, 当 t 增大时动点 (x, y) 将沿轨线朝使 x, y 减少的方向运动. 由此可见, 当 $\sqrt{ay_0} = \sqrt{bx_0}$ 时, 动点将沿轨线 $\sqrt{ay} - \sqrt{bx} = 0$ 趋向于原点 O . 当点 (x_0, y_0) 位于直线 $\sqrt{ay} - \sqrt{bx} = 0$ 的上方时, 乙方将获胜; 位于下方时, 甲方将获胜. 因此, 如果乙方想获胜, 就必须增加其士兵的初始数量 y_0 或提高其战斗有效系数 a , 使 $ay_0^2 - bx_0^2 > 0$, 从而让动点位于直线 $\sqrt{ay} - \sqrt{bx} = 0$ 的上方. 而且我们还看到, 增加士兵数量将更为重要, 因为它是以平方出现的, 这就是著名的 Lanchester 平方定律.

例如, 假设甲乙双方战斗有效系数相仿, 即 $b = a$, 甲乙双方开始投入士兵数目分别为 $x_0 = 100$ 人与 $y_0 = 50$ 人. 在这种情况下, 通积分为

$$y^2 - x^2 = \frac{C}{a},$$

将初始值代入, 得

$$\frac{C}{a} = 50^2 - 100^2 = -7500.$$

战斗结束时意味着乙方 50 人全部损失(伤亡或被俘). 这时可算得

$$x = \sqrt{7500} \approx 87 \text{ (人)},$$

故在战斗中, 甲方仅损失 13 人.

下面我们再通过著名的硫黄岛战役来讨论非齐次模型[14].

硫黄岛位于东京南 1 062km. 第二次世界大战中, 美日双方在此岛上进行了一个月的激烈战斗, 成为第二次大战中最大的战役之一. 美军 1945 年 2 月 19 日开始进攻硫黄岛, 28 天后宣布占领了该岛, 实际到第 36 天才停止战斗. 有关资料表明, 战斗开始时, 岛上的日军数目约为 21 500 人, 以后再未补充; 而美军登陆士兵数目如下: 第 1 天 54 000 人, 第 2 天未增援, 第 3 天增援 6 000 人, 第 4, 5 天未增援, 第 6 天增援 13 000 人, 以后未再增援. 战斗结束时, 美军存活人数为 52 735, 而日军全军覆没.

设 t 时刻美日两军士兵存活数分别为 $x(t)$ 与 $y(t)$, 美日两军的战斗有效系数分别为 b 和 a , 由 Lanchester 模型有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay + f(t), \\ \frac{dy}{dt} = -bx, \\ x(0) = 0, y(0) = 21500, \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} 54000, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < 2, \\ 6000, & 2 \leq t < 3, \\ 0, & 3 \leq t < 5, \\ 13000, & 5 \leq t < 6, \\ 0 & t \geq 6. \end{cases}$$

对应齐次线性微分方程组的系数矩阵的特征值为：

$$\lambda_1 = \sqrt{ab}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{ab},$$

它们对应的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix} a \\ -\sqrt{ab} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{ab} \end{pmatrix}.$$

于是齐次线性微分方程组的一个基解矩阵为

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} ae^{\sqrt{ab}t} & ae^{-\sqrt{ab}t} \\ -\sqrt{ab}e^{\sqrt{ab}t} & \sqrt{ab}e^{-\sqrt{ab}t} \end{pmatrix},$$

从而

$$X_1^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{-1}{2\sqrt{ab}} \\ \frac{1}{2a} & \frac{1}{2\sqrt{ab}} \end{pmatrix}.$$

把基解矩阵 $X(t) = X_1(t)X_1^{-1}(0)$ 代入通解公式(3.8)得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{\sqrt{ab}t} + e^{-\sqrt{ab}t}) & -\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}(e^{\sqrt{ab}t} - e^{-\sqrt{ab}t}) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}(e^{\sqrt{ab}t} - e^{-\sqrt{ab}t}) & \frac{1}{2}(e^{\sqrt{ab}t} + e^{-\sqrt{ab}t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{f(s)}{2}(e^{\sqrt{ab}(t-s)} + e^{-\sqrt{ab}(t-s)}) \\ -\frac{f(s)}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}(e^{\sqrt{ab}(t-s)} - e^{-\sqrt{ab}(t-s)}) \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \sqrt{ab}t & -\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}t \\ -\sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}t & \operatorname{ch} \sqrt{ab}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} f(s) \operatorname{ch} \sqrt{ab}(t-s) \\ -f(s) \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{ab}(t-s) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

代入初值条件 $x(0) = 0, y(0) = y_0 = 21\ 500$, 可得

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{\frac{a}{b}}y_0 \operatorname{sh} \sqrt{ab}t + \int_0^t f(s) \operatorname{ch} \sqrt{ab}(t-s) ds, \\ y &= y_0 \operatorname{ch} \sqrt{ab}t - \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^t \operatorname{sh} \sqrt{ab}(t-s) f(s) ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

为了求得战斗有效系数 a 和 b , 把模型中第二个方程两端从 0 到 t 积分得

$$y(t) - y(0) = -b \int_0^t x(s) ds. \quad (3.13)$$

美军 Morehouse 上尉保存着硫黄岛战役中美军战斗减员的按日统计资料, 令 $t = 36$, 用这个资料可以算出

$$\int_0^{36} x(t) dt \approx \sum_{i=1}^{36} x(i) = 2\ 037\ 000.$$

已知 $y(0) = 21\ 500, y(36) = 0$, 从而

$$b = \frac{215\ 000}{2\ 037\ 000} = 0.010\ 6.$$

再把模型中第一个方程两端积分, 得

$$x(36) - x(0) = -a \int_0^{36} y(t) dt + \int_0^{36} f(t) dt.$$

已知 $x(0) = 0, x(36) = 52\ 735$, 再由已知的 $f(t)$ 可算得

$$\int_0^{36} f(t) dt = 73\ 000,$$

于是

$$a = \frac{73\ 000 - 52\ 735}{\int_0^{36} y(t) dt} = \frac{20\ 265}{\int_0^{36} y(t) dt}.$$

遗憾的是没有日军的减员记录, 但是日军每天的存活数可以利用美军的数据从(3.13)式来推算. 事实上, 由于

$$\int_0^{36} y(t) dt \approx \sum_{j=1}^{36} y(j),$$

而

$$y(j) = y(0) - b \int_0^j x(t) dt \approx 21500 - b \sum_{i=1}^j x(i),$$

从而用 Morehouse 保存的数据可算得

$$a = \frac{20265}{372500} = 0.0544.$$

把所求得的 a, b 值代入 (3.12) 便可逐日计算出两军士兵存活的数目. 例如美军存活数目如图 3.2 所示, 其中实线是利用模型计算所得, 虚线是 Morehouse 的实际统计数. 可见, Lanchester 模型是确有使用价值的.

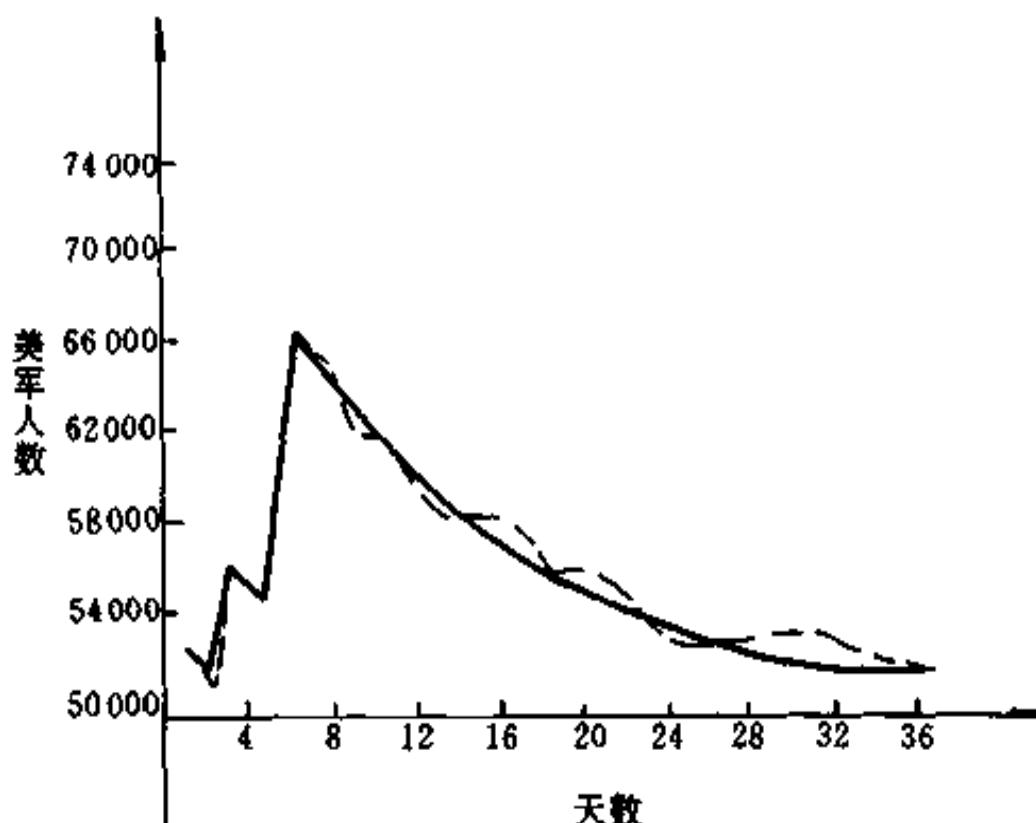


图 3.2

习题 7.3

(A)

1. 求下列常系数齐次线性微分方程组的通解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 4x_2 + 2x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2 - x_3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2; \end{cases}$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x; \quad (4) \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} x.$$

2. 求下列常系数非齐次线性微分方程组的通解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - e^{-t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 3x_2 + 4e^{-t}; \end{cases} \quad (2) \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin t \end{pmatrix};$$

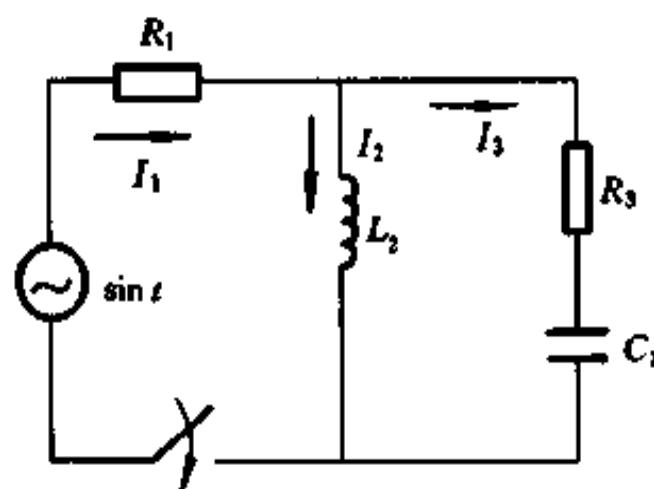
$$(3) \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

(B)

1. 求下列常系数齐次线性微分方程组的通解:

$$(1) \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x; \quad (2) \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -20 \\ 5 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} x.$$

2. 一电路如图所示, 输入电压为 $\sin t$, 电感 $L_2 = 1H$, 电容 $C_3 = 1F$, 电阻 $R_1 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, 当 $t = 0$ 时接通电路, 其时 $I_2 = I_3 = 0$, 求开关闭合后电流 $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ 的变化规律.



(第 2 题)

第四节 高阶线性微分方程

在本章 1.1 段中我们已经看到, 对于最高阶导数可解出的高阶微分方程, 总可以化成由一阶微分方程所组成的微分方程组. 因此, 在第二、三节的基础上, 可以说高阶线性微分方程的有关问题, 在理论上已经得到了解决. 但是正如我们所知, 即使对于一定能求解的常系数线性微分方程组来说, 求解过程也是相当繁杂的. 本节我们将利用线性微分方程组与高阶线性微分方程之间的转换关系, 从微分方程组的已知结果来导出高阶微分方程相应的结果, 为计算提供方便.

4.1 高阶线性微分方程解的结构

考虑 n 阶线性微分方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t), \quad (4.1)$$

其中 $a_1(t), \dots, a_n(t)$ 与 $f(t)$ 均为 (a, b) 内的连续函数, $f(t) \not\equiv 0$ 时称为非齐次线性微分方程; 当 $f(t) \equiv 0$ 时称为齐次线性微分方程, 即

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0. \quad (4.2)$$

我们在本章开始时已经指出, 若引进新的未知函数

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad \cdots, \quad x_n = x^{(n-1)},$$

则方程(4.1)与(4.2)分别等价于线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (4.3)$$

与

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (4.4)$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

当求得方程组(4.3)的解 $(x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ 后, 它的第一个分量 $x_1(t)$ 就是方程(4.1)的解; 反之, 当求得方程(4.1)的一个解 $x(t)$ 后, 对它逐次求导, 就可以得到方程组(4.3)的相应解 $(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T$.

如果求得了方程(4.2)的 n 个解 $x_1(t), \dots, x_n(t), t \in (a, b)$, 那末, 也就得

到了方程组(4.4)相应的 n 个解:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x'_1(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \dots, x_n(t) = \begin{pmatrix} x_n(t) \\ x'_n(t) \\ \vdots \\ x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (a, b).$$

注意到 $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 中, 从第二个分量开始是由第一个分量 $x_i(t)$ 逐次求导所得, 容易看出, 数量值函数组 $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, $t \in (a, b)$, 与向量值函数组 $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, $t \in (a, b)$ 的线性相关是等价的. 因此, 在得到方程(4.2)的 n 个解 $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $t \in (a, b)$ 后, 可以构造出对应方程组(4.4)的相应的 n 个解 $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $t \in (a, b)$. 若存在 $t_0 \in (a, b)$, 使在 t_0 处的 Wronsky 行列式.

$$W(t_0) = \det \begin{vmatrix} x_1(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ x'_1(t_0) & \cdots & x'_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

则由本章定理 2.3 可知, 方程组(4.4)的 n 个解 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 在 (a, b) 内线性无关, 从而方程(4.2)的 n 个解 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 在 (a, b) 内也线性无关. $W(t)$ 也称为数量值函数组 $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, $t \in (a, b)$ 的 Wronsky 行列式.

由上述微分方程组与相应高阶微分方程的解之间的关系, 容易看出, 当求得齐次微分方程(4.2)在 (a, b) 内的 n 个线性无关的解 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 后, 它在 (a, b) 内的通解就是:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(t), \quad t \in (a, b).$$

这 n 个线性无关的解 $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $t \in (a, b)$ 称为方程(4.2)的基本解组.

也容易看出, 非齐次线性微分方程(4.1)的通解等于它的任一特解与相应的齐次线性微分方程(4.2)通解之和.

对于非齐次线性微分方程(4.1)的特解, 我们当然也可以利用相应的非齐次线性微分方程组(4.3)的特解公式诱导出来, 但是, 其表达式仍然较为复杂不便应用, 故略去. 若有必要, 可直接借助微分方程组来求, 然后取其第一个分量.

4.2 高阶常系数线性微分方程的求解

本段考察 n 阶常系数非齐次线性微分方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = f(t), \quad f(t) \neq 0 \quad (4.5)$$

与相应的常系数齐次线性微分方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0 \quad (4.6)$$

的求解问题,其中 a_1, \dots, a_n 均为常数, $f \in C((a, b))$, 我们先讨论常系数齐次线性微分方程.

常系数齐次线性微分方程的求解 由 4.1 段可知,如果能求得与方程(4.6)所对应的齐次线性微分方程组的一个基解矩阵,那末,这个基解矩阵中的第一行元素,就是方程(4.6)的一个基本解组.对照(4.4)式可知,(4.6)相对应的齐次线性微分方程组为

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (4.7)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

方程组(4.7)的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & & & \\ & -\lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & -\lambda & 1 & \\ & -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (4.8)$$

值得指出,特征方程(4.8)恰好是把方程(4.6)中的 $x^{(k)}$ 换成 λ^k 后($k=0, 1, 2, \dots, n$)所得到的代数方程,它也称为方程(4.6)的特征方程.由方程(4.6)与方程组(4.7)解之间的关系不难得到下列结论:

1° 若特征方程(4.8)有 n 个互不相同的根(称为特征根) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则方程

(4.6)的通解为

$$x = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}. \quad (4.9)$$

事实上,由于此时 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 就是 A 的特征值,从而方程组(4.7)的基解矩阵为

$$X(t) = (e^{\lambda_1 t} r_1 \cdots e^{\lambda_n t} r_n),$$

其中 $r_i = (r_{i,1}, \dots, r_{i,n})^T$ 是 A 的特征值 λ_i ($i = 1, \dots, n$) 所对应的特征向量. 因而各解向量的第一个分量 $e^{\lambda_1 t} r_{1,1}, \dots, e^{\lambda_n t} r_{n,1}$ 就是方程(4.6)的一个基本解组,所以(4.9)为其通解.

2° 若特征方程(4.8)有重根,设 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为方程(4.8)的互不相同的根,它们的重数分别为 n_1, \dots, n_s ($n_1 + \dots + n_s = n$),则可以证明(从略),齐次线性微分方程(4.6)的一个基本解组由下面 n 个函数组成:

$$e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_s t}, t e^{\lambda_s t}, \dots, t^{n_s-1} e^{\lambda_s t}.$$

从而(4.6)的通解为

$$\begin{aligned} x = & C_{11} e^{\lambda_1 t} + C_{12} t e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_{1n_1} t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ & + \cdots + C_{s1} e^{\lambda_s t} + C_{s2} t e^{\lambda_s t} + \cdots + C_{sn_s} t^{n_s-1} e^{\lambda_s t}. \end{aligned}$$

3° 若特征方程(4.8)有复根,这时要求齐次线性微分方程(4.6)的实的基本解组,可与微分方程组的相应情况作同样处理,即先求出方程(4.6)的复的基本解组,再用复值解的实部和虚部代替复的基本解组中对应的共轭复值解.

从以上讨论可见,对于高阶的常系数齐次线性微分方程,只要求出其特征方程的根与每个根的重数,就可以直接写出它的通解表达式,特别,对于二阶齐次线性微分方程

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0, \quad (4.10)$$

由于其特征方程

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (4.11)$$

的根只有三种可能情形,从而方程(4.10)的通解也只有下列三种形式:

1° 若(4.11)有相异实根 $\lambda = \lambda_1$ 与 $\lambda = \lambda_2$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$),则方程(4.10)的通解为

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

2° 若(4.11)有重实根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$,则方程(4.10)的通解为

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}, \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

3° 若(4.11)有共轭复根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 与 $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (α, β 为实数), 则 $e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$, $e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$ 为方程(4.10)的基本解组, 而复值解的实部与虚部, 即函数组

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad e^{\alpha t} \sin \beta t$$

便是方程(4.10)的实基本解组, 从而该方程实的通解为

$$x = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

例 4.1 求解微分方程 $\ddot{x} - \dot{x} - x + x = 0$.

解 特征方程为

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

解得特征根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1,$$

所以通解为

$$x = e^t(C_1 + C_2 t) + C_3 e^{-t}. \quad \blacksquare$$

例 4.2 求解微分方程 $x^{(5)} - 3x^{(4)} + 4x^{(3)} - 4x'' + 3x' - x = 0$.

解 特征方程为

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1) = 0,$$

解得特征根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = i, \lambda_5 = -i.$$

对于三重特征根 $\lambda = 1$, 可得三个线性无关的解:

$$e^t, \quad te^t, \quad t^2 e^t;$$

对于共轭复根 $\lambda = \pm i$, 可得两个复值解

$$e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t,$$

取其实部与虚部, 便得到两个实值解: $\cos t$ 与 $\sin t$. 这 5 个解显然线性无关, 于是原方程的通解为

$$x = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^t + C_4 \cos t + C_5 \sin t. \quad \blacksquare$$

常系数非齐次线性微分方程的求解 对于这种微分方程, 我们自然可以利

用高阶微分方程与微分方程组的解之间的关系,按如下步骤去求解:在求得对应的常系数齐次线性微分方程的基本解组之后,通过求导法则就可得到对应的常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵.然后利用公式(3.9)并取其第一行元素,便可求得常系数非齐次线性微分方程的一个特解.然而这种方法过于繁杂,下面我们针对方程(4.5)中非齐次项 $f(t)$ 的一些常见类型,介绍求其特解的待定系数法.为论述简明起见,我们仅以二阶微分方程为例来加以说明,更高阶的微分方程可以类似地讨论.

设有二阶常系数非齐次线性微分方程

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t). \quad (4.12)$$

$$1^{\circ} f(t) = \varphi(t) e^{\mu t}$$

其中 μ 为常数, $\varphi(t)$ 是一个 m 次 ($m \geq 0$) 的多项式

$$\varphi(t) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_{m-1} t + b_m.$$

要寻求(4.12)的一个特解,就是要找一个函数 $x^*(t)$,使它满足方程(4.12).由于(4.12)的右端是一多项式与 $e^{\mu t}$ 的乘积,所以 $x^*(t)$ 中应含有 $e^{\mu t}$;又由于多项式与指数函数乘积的导数,一般仍是多项式与指数函数的乘积,因此,我们想到应令

$$x^*(t) = Z(t) e^{\mu t}, \quad (4.13)$$

其中 $Z(t)$ 是一个待定的多项式.将(4.13)求导后代入方程(4.12),消去 $e^{\mu t}$ 后可得

$$(\mu^2 + a_1 \mu + a_2) Z(t) + (2\mu + a_1) Z'(t) + Z''(t) = \varphi(t). \quad (4.14)$$

如果(4.13)式是方程(4.12)的解,那末(4.14)式应是一个恒等式.因此,应选取 $Z(t)$ 的次数,使(4.14)式左端多项式的次数不低于右端的次数,然后比较两端 t 的同次幂的系数,从而确定待定多项式 $Z(t)$.以下分三种情形讨论:

(1) μ 不是特征方程的根 这时, $\mu^2 + a_1 \mu + a_2 \neq 0$,于是可令 $Z(t)$ 是一个与 $\varphi(t)$ 同次数的多项式:

$$Z(t) = B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m. \quad (4.15)$$

把(4.15)式代入(4.14)式并比较(4.14)式两端 t 的同次幂系数,定出 B_i ($i = 0, 1, \dots, m$) 后代入(4.13)式,便得到常系数非齐次线性微分方程(4.12)的一个特解.

(2) μ 是特征方程的单根 这时有

$$\mu^2 + a_1 \mu + a_2 = 0, \quad 2\mu + a_1 \neq 0,$$

如果仍令 $Z(t)$ 是 m 次多项式(4.15), 那末代入(4.14)后其左端是 $m-1$ 次多项式, 等式(4.14)将无法成立. 为了使左端仍保持为 m 次, 可令

$$Z(t) = t(B_0t^m + B_1t^{m-1} + \cdots + B_{m-1}t + B_m).$$

(3) μ 是特征方程的重根 这时有

$$\mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0, \quad 2\mu + a_1 = 0,$$

按照上面同样的想法, 易知可令

$$Z(t) = t^2(B_0t^m + B_1t^{m-1} + \cdots + B_{m-1}t + B_m).$$

例 4.3 求微分方程 $x - 5x + 6x = t e^{2t}$ 的通解.

解 对应于齐次线性微分方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

故特征根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$, 从而齐次微分方程的通解为

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

现求非齐次线性微分方程的一个特解, 由于 $\mu = 2$ 是特征方程的单根, 故应令

$$x^* = t(B_0 + B_1 t)e^{2t},$$

求导后代入原方程, 化简得

$$-2B_0t + 2B_0 - B_1 = t.$$

比较同次幂的系数, 得

$$-2B_0 = 1, \quad 2B_0 - B_1 = 0,$$

从而

$$B_0 = -\frac{1}{2}, \quad B_1 = -1,$$

于是, 特解为

$$x^* = -\left(\frac{t}{2} + t^2\right)e^{2t}.$$

所以, 原方程的通解为

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} - \left(\frac{t}{2} + t^2\right)e^{2t}. \quad \blacksquare$$

$$2^\circ f(t) = e^{\mu t} \varphi(t) \cos vt \text{ 或 } f(t) = e^{\mu t} \varphi(t) \sin vt$$

读者容易证明,若函数 $x = x_R(t) \pm ix_I(t)$ 是微分方程

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = f_1(t) \pm if_2(t)$$

的解,其中 i 为虚单位,则其实部 $x_R(t)$ 与虚部 $x_I(t)$ 分别是方程

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = f_1(t)$$

与

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = f_2(t)$$

的解.

因此,我们可以先求微分方程

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = e^{\mu t}\varphi(t)\cos\nu t \pm ie^{\mu t}\varphi(t)\sin\nu t = e^{(\mu \pm i\nu)t}\varphi(t) \quad (4.16)$$

的特解,然后分出其实部、虚部,便可得出所求微分方程的特解,这样,就把类型 2°化成了类型 1°.

例 4.4 求微分方程 $\ddot{x} + x = te^t \cos t$ 的通解.

解 对应齐次线性微分方程的特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

故特征根为

$$\lambda = \pm i,$$

从而齐次线性微分方程的通解为

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

为求原方程的一个特解,先求微分方程

$$\ddot{x} + x = te^{(1+i)t} \quad (4.17)$$

的特解,由于 $\mu = 1 + i$ 不是特征根,故令

$$x^* = (B_0 + B_1 t)e^{(1+i)t}.$$

求导后代入相应方程(4.17)并化简得

$$B_1(1+2i)t + [2B_1(1+i) + 2B_0i + B_0] = t.$$

比较系数得

$$B_1 = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}, \quad B_0 = -\frac{2(1+i)}{1+2i} B_1 = \frac{-2+14i}{25},$$

从而

$$x^* = e^t \left(\frac{1-2i}{5}t + \frac{-2+14i}{25} \right) (\cos t + i \sin t).$$

$$\begin{aligned}\text{它的实部 } x_R^* &= e^t \left[\left(\frac{1}{5}t - \frac{2}{25} \right) \cos t + \left(\frac{2}{5}t - \frac{14}{25} \right) \sin t \right] \\ &= \frac{e^t}{25} [(5t-2)\cos t + (10t-14)\sin t]\end{aligned}$$

就是原方程的一个特解,于是原方程的通解为

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{e^t}{25} [(5t-2)\cos t + (10t-14)\sin t]. \quad \blacksquare$$

由此例可见,当非齐次项如 2°所示时,用上述方法求特解时要进行复数运算,颇不方便,下面我们由此导出另一种待定系数法,它可以仅在实数域内作运算.

为求方程(4.16)的特解,令

$$x^* = t^k Z(t) e^{(\mu \pm iv)t},$$

其中当 $\mu \pm iv$ 不是特征根时,取 $k=0$;是特征根时,取 $k=1$. 通过代入方程,比较系数可定出与 $\varphi(t)$ 同次数的复值多项式

$$Z(t) = R(t) \pm iI(t).$$

于是

$$\begin{aligned}x^* &= t^k (R(t) + iI(t)) e^{\mu t} (\cos vt + i \sin vt) \\ &= t^k e^{\mu t} [(R(t) \cos vt - I(t) \sin vt) + i(I(t) \cos vt + R(t) \sin vt)],\end{aligned}$$

从而其实部与虚部分别为

$$x_R^* = t^k e^{\mu t} [R(t) \cos vt - I(t) \sin vt] \text{ 与 } x_I^* = t^k e^{\mu t} [I(t) \cos vt + R(t) \sin vt],$$

它们分别是

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = e^{\mu t} \varphi(t) \cos vt \quad \text{与} \quad \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = e^{\mu t} \varphi(t) \sin vt \quad (4.18)$$

的特解.

由此可见,对于形如(4.18)的非齐次线性微分方程,我们可以直接令其特解为

$$x^* = t^k e^{\mu t} [Z_1(t) \cos vt + Z_2(t) \sin vt],$$

其中 $Z_1(t)$ 与 $Z_2(t)$ 均为与 $\varphi(t)$ 同次数的实系数多项式. 当 $\mu + i\nu$ 不是特征根时, 取 $k=0$; 是特征根时, 取 $k=1$.

例 4.5 求微分方程 $x - 3\dot{x} + 2x = t \cos t$ 满足初值条件 $x(0) = \frac{22}{25}$, $\dot{x}(0) = \frac{19}{25}$ 的特解.

解 容易求得对应齐次线性微分方程的通解为

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

由于 $\mu = i$ 不是特征根, 故令原方程的一个特解为

$$x^* = (A_0 + A_1 t) \cos t + (B_0 + B_1 t) \sin t.$$

代入原方程后整理得

$$\begin{aligned} & (A_0 - 3A_1 - 3B_0 + 2B_1) \cos t + (3A_0 + B_0 - 2A_1 - 3B_1) \sin t + \\ & (A_1 - 3B_1)t \cos t + (3A_1 + B_1)t \sin t \equiv t \cos t, \end{aligned}$$

比较两端同类项系数, 得

$$\begin{aligned} A_0 - 3A_1 - 3B_0 + 2B_1 &= 0, & 3A_0 + B_0 - 2A_1 - 3B_1 &= 0, \\ A_1 - 3B_1 &= 1, & 3A_1 + B_1 &= 0. \end{aligned}$$

从而解得

$$A_1 = \frac{1}{10}, \quad B_1 = -\frac{3}{10}, \quad A_0 = \frac{-3}{25}, \quad B_0 = -\frac{17}{50},$$

所以得

$$x^* = \left(\frac{-3}{25} + \frac{1}{10}t \right) \cos t - \left(\frac{17}{50} + \frac{3}{10}t \right) \sin t,$$

故原方程的通解为

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \left(\frac{-3}{25} + \frac{1}{10}t \right) \cos t - \left(\frac{17}{50} + \frac{3}{10}t \right) \sin t.$$

为求适合初值条件的特解, 先将上式求导, 得

$$\dot{x} = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - \frac{12}{50} \cos t - \frac{9}{50} \sin t - \frac{3}{10} t \cos t - \frac{1}{10} t \sin t.$$

将初值条件代入上面两式, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{3}{25} = x(0) = \frac{22}{25}, \\ C_1 + 2C_2 - \frac{6}{25} = x'(0) = \frac{19}{25}, \end{cases}$$

解得

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0.$$

于是所求特解为

$$x = e^t + \left(-\frac{3}{25} + \frac{1}{10}t \right) \cos t - \left(\frac{17}{50} + \frac{3}{10}t \right) \sin t.$$

例 4.6 求微分方程 $\ddot{x} + 3x = \sin 2t$ 的一个特解.

解 我们可以利用例 4.5 的方法来求解. 然而, 这个方程不含 x' 项, 由于正弦函数的二阶导数仍是正弦函数, 容易看出, 可令特解为

$$x^* = A \sin 2t.$$

代入原方程, 得

$$(-4A + 3A) \sin 2t \equiv \sin 2t,$$

由此得

$$A = -1,$$

从而原方程的一个特解为

$$x^* = -\sin 2t.$$

上述求特解的待定系数法, 可以推广到一般的 n 阶常系数线性微分方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t),$$

其中 $f(t)$ 是如 1°(或 2°) 中所示的函数. 若 μ (或 $\mu + i\nu$) 是对应特征方程的 k 重根, $k = 0, 1, \dots, n$ (或 $k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$)^①, 则可令特解为

$$x^* = t^k Z(t) e^{\mu t}, \quad (\text{或 } x^* = t^k e^{\mu t} [Z_1(t) \cos \nu t + Z_2(t) \sin \nu t]),$$

其中 $Z(t)$ ($Z_1(t)$ 与 $Z_2(t)$) 均是与 $\varphi(t)$ 同次数的待定多项式.

例 4.7 求微分方程 $y^{(6)} + y^{(5)} - 2y^{(4)} = x - 1$ 的通解.

解 对应于齐次线性微分方程的特征方程为

$$\lambda^6 + \lambda^5 - 2\lambda^4 = \lambda^4(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0,$$

① $k=0$ 时表示 μ 不是特征根.

故特征根为 $\lambda_1 = 0$ (4重根), $\lambda_2 = 1$ (单根), $\lambda_3 = -2$ (单根). 于是齐次线性微分方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6.$$

由于 $\mu = 0$ 是4重特征根, 故令非齐次线性微分方程的特解为

$$y^* = x^4(Ax + B),$$

代入原方程, 得

$$120A - 240Ax - 48B \equiv x - 1.$$

比较同次幂系数, 得

$$-240A = 1, \quad 120A - 48B = -1,$$

从而 $A = -\frac{1}{240}, \quad B = \frac{1}{96}$.

于是原方程的通解为

$$\begin{aligned} y = & C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 x^3 + C_4 x^2 \\ & + C_5 x + C_6 + \frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{240}x^5. \end{aligned}$$

例 4.8 弹簧的机械振动 图4.1表示一个简单的减振装置. 质量为 m 的物体安置在弹簧上, 当物体稳定在位置 O 时, 作用在物体上的重力和弹性力大小相等, 方向相反, 这个位置是物体的平衡位置. 设在垂直方向有一随时间周期变化的外界强迫力 $f_1(t) = H \sin pt$ 作用在物体上, 物体将受外力驱使而上下振动, 求振动过程中位移与时间的关系.

解 取物体的平衡位置为坐标原点, x 轴的方向垂直向下, 设振动开始时刻 $t = 0$, t 时刻物体离开平衡位置的位移为 $x(t)$, 先来建立 $x(t)$ 所应满足的方程.

由 Hooke 定律知弹性力:

$$f = -kx,$$

其中 k 为弹簧的弹性系数. 设物体在振动过程中所受介质(如空气)的阻力 f_0 与运动速度 v 成正比, 即

$$f_0 = -\mu v = -\mu \frac{dx}{dt},$$

其中 μ 为介质的阻尼系数, 负号表示阻力方向与速度方向相反. 于是根据

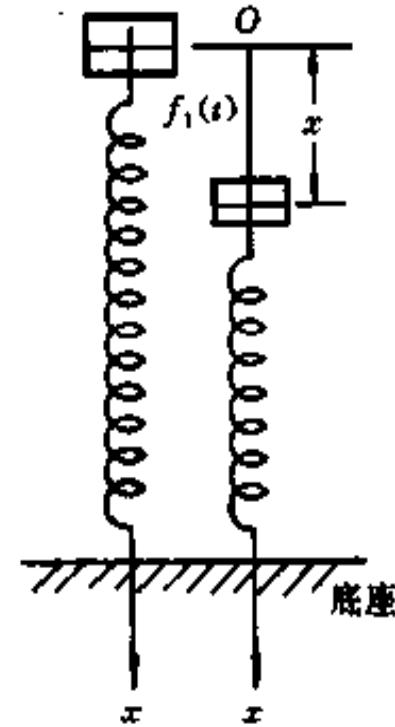


图 4.1

Newton第二定律可得

$$ma = -kx - \mu \frac{dx}{dt} + f_1(t),$$

由于加速度 $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, 故 $x(t)$ 应满足的微分方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = H \sin pt,$$

将微分方程改写为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = h \sin pt, \quad (4.19)$$

其中 $\delta = \frac{\mu}{2m}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $h = \frac{H}{m}$. 这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程, 称为
强迫振动的微分方程, 它对应的齐次线性微分方程称为自由振动的微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \quad (4.20)$$

首先, 我们来求齐次线性微分方程(4.20)的通解, 它的特征方程为

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0,$$

故特征根为

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

下面, 分三种情况讨论.

1° $\delta^2 - \omega^2 > 0$, 这时, 齐次线性微分方程的通解为

$$x = C_1 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})t}.$$

由此可见, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(t) \rightarrow 0$, 这说明当外力为零且阻尼 μ 很大时, $\delta > \omega$, 物体运动按指数函数规律迅速衰减, 不会产生振动, 如图 4.2 所示.

2° $\delta^2 - \omega^2 = 0$. 这时, 特征方程有重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$, 于是齐次线性微分方程的通解为

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t},$$

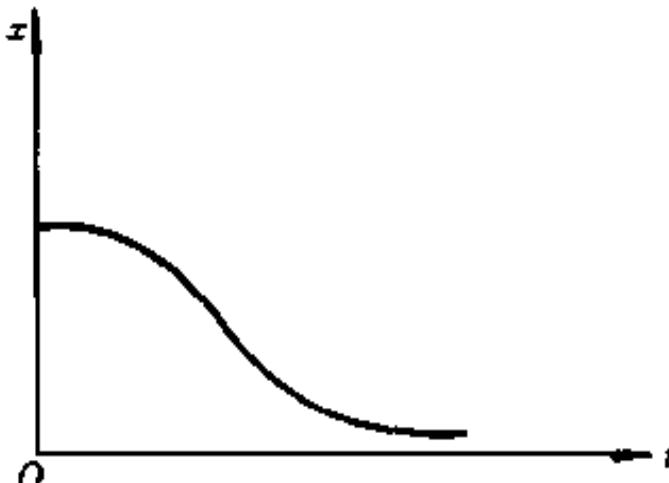


图 4.2

物体仍按指数规律衰减, 图形与图 4.2 相似, 这时的阻尼 μ 称为临界阻尼.

3° $\delta^2 - \omega^2 < 0$. 这时, 特征根是共轭复根

$$\rho = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2},$$

齐次线性微分方程的通解为

$$\begin{aligned} x &= e^{-\delta t} (C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t) \\ &= A e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + \varphi), \end{aligned}$$

其中 $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ 与 $\varphi = \arctan \frac{C_1}{C_2}$ 是两个任意常数.

由通解可见, 一方面, 运动的振幅 $A e^{-\delta t}$ 随时间的增大而减少, 所以运动是衰减的; 另一方面, 由于通解中含有正弦函数, 所以运动又是振荡的. 因此, 当阻尼 μ 很小时, $\delta < \omega$, 物体作衰减振荡运动, 如图 4.3 所示.

为求解非齐次线性微分方程 (4.19), 关键在于求它的任意一个特解. 设阻尼 $\mu \neq 0$, 从而 ip 不是特征根, 于是令特解为

$$x^* = A_1 \cos pt + A_2 \sin pt,$$

代入方程(4.19), 比较同类项系数, 得

$$\begin{cases} (\omega^2 - p^2)A_1 + 2\delta p A_2 = 0, \\ (\omega^2 - p^2)A_2 - 2\delta p A_1 = h. \end{cases}$$

解之得

$$A_1 = -\frac{2\delta ph}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}, \quad A_2 = \frac{h(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}.$$

于是

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{h(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2} \sin pt - \frac{2\delta ph}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2} \cos pt \\ &= B \sin(pt - \psi), \end{aligned}$$

其中

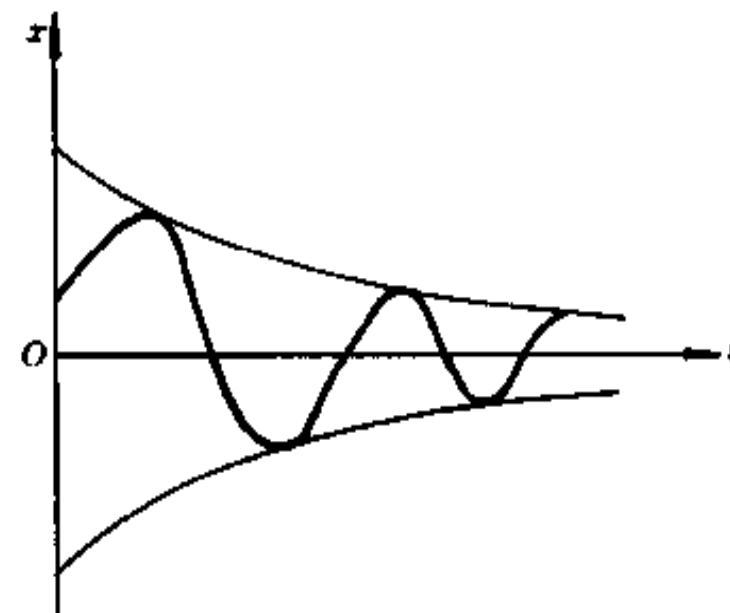


图 4.3

$$B = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \quad \psi = \arctan\left(\frac{2p\delta}{\omega^2 - p^2}\right).$$

所以强迫振动方程(4.19)的通解为

$$x = A e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + \varphi) + B \sin(pt - \psi), (\delta < \omega).$$

容易看出, 随时间 t 的增大, 上式右端第一项很快地衰减为零, 故称它为暂态项, 第二项不随时间衰减, 故称它为稳态项. 由此可见, 弹簧的强迫振动规律, 主要取决于特解, 即

$$x \approx x^* = B \sin(pt - \psi), (\text{当 } t \gg 1 \text{ 时}).$$

换句话说, 主要取决于外界强迫力的作用, 其中 p 就是强迫力周期运动的频率.

当阻尼很小时, 振动的振幅为

$$B = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}} \approx \frac{h}{|\omega^2 - p^2|}.$$

由此可见, 当外界强迫力的频率 p 与弹簧的固有频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 相差不大时, 振幅 B 将会很大, 这时就会产生所谓共振现象. 共振现象在很多问题中有很大的破坏作用, 它可能引起机器损坏, 桥梁折断, 建筑物倒塌等严重事故. 例如, 1831 年一队士兵以整齐的步伐通过英国 Lanchester 附近的布劳顿吊桥时, 由于整齐的步伐产生了周期性的外力, 而且这个力的频率非常接近于吊桥振动的固有频率, 从而引起了共振, 导致了吊桥倒塌. 因此, 在一些工程问题中, 常需算出固有频率, 调整有关参数和采取各种措施, 以避免共振现象的发生. 但是, 事物都是一分为二的, 有时人们却恰恰要利用共振. 例如, 收音机、电视机必须要调节频率使之与所接受电台、电视台的发射频率相同, 产生共振, 才能收到需要的信息.

4.3 高阶变系数线性微分方程的求解问题

高于一阶的变系数线性微分方程, 一般来说是难以用初等方法求解的. 但是, 对于某些特殊类型的微分方程, 我们可以通过适当的变换把它化成常系数线性微分方程, 从而使求解问题得到解决. 下面将要介绍的后继课中颇有用处的 Euler 微分方程就是其中的一种.

Euler 微分方程 Euler 微分方程的一般形式是

$$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} t \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t),$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_n 都是常数. 对于这类微分方程, 通过变换

$$t = e^\tau, \text{ 或 } \tau = \ln t,$$

就可化为常系数线性微分方程,下面通过例子来具体说明.

例 4.9 求微分方程 $t^2x - tx + x = 0$ 的通解.

解 这是一个 Euler 微分方程.令

$$t = e^\tau, \text{ 即 } \tau = \ln t,$$

从而有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t} \frac{dx}{d\tau},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t^2} \left(\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau} \right).$$

代入原方程,化简得

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2 \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

这是一个二阶常系数齐次线性微分方程,容易求得它的通解为

$$x = (C_1\tau + C_2)e^\tau,$$

把 τ 代换成 $\ln t$,即得原方程的通解为

$$x = (C_1 \ln t + C_2)t. \blacksquare$$

例 4.10 求微分方程 $(x+2)^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (x+2) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1$ 的通解.

解 令 $x+2=t$,原方程变为

$$t^2 \frac{d^3y}{dt^3} + t \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 1,$$

这不是 Euler 方程,但两端同乘以 t ,即得 Euler 微分方程

$$t^3 \frac{d^3y}{dt^3} + t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} = t.$$

再令 $t = e^\tau$,上方程可化为

$$\frac{d^3y}{d\tau^3} - 2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2 \frac{dy}{d\tau} = e^\tau.$$

容易求得它的通解为

$$y = C_0 + e^\tau (C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau) + e^\tau,$$

所以,原方程的通解为

$$y = C_0 + (x+2)[C_1 \cos \ln(x+2) + C_2 \sin \ln(x+2)] + x. \quad \blacksquare$$

高阶线性微分方程的幂级数解法 我们曾经指出,除了那些很特殊的线性微分方程外,即使二阶变系数线性微分方程,它的求解问题也是很困难的.然而在科学技术中,往往碰到这种无法用初等方法求解的线性微分方程,这时研究它们的解就需要另辟途径.下面,我们简要介绍一种新的求解方法,即幂级数解法.这种解法就是将微分方程的解用收敛的幂级数表达出来,我们仅就二阶线性微分方程为例对它作简要的介绍.

定理 设有二阶线性微分方程

$$\ddot{x} + a_1(t)x + a_2(t)x = f(t), \quad (4.21)$$

若 $a_1(t), a_2(t)$ 与 $f(t)$ 均可展开为 $(t - t_0)$ 的幂级数,而且都在 $|t - t_0| < R$ 内收敛,则对任意给定的初值条件:

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1, \quad (4.22)$$

方程(4.21)存在满足该初值条件的唯一的解,且可在 $|t - t_0| < R$ 内展开成 $(t - t_0)$ 的幂级数.

证明从略,下面只举例说明它的应用.

例 4.11 求 Legendre 微分方程

$$(1-t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + k(k+1)x = 0 \quad (4.23)$$

在 $t=0$ 附近的幂级数解.

解 与(4.21)式对照,显见

$$a_1(t) = -\frac{2t}{1-t^2}, \quad a_2(t) = \frac{k(k+1)}{1-t^2}, \quad f(t) = 0,$$

且 $a_1(t), a_2(t)$ 均在 $|t| < 1$ 内可展开为收敛的幂级数.由定理可知,对任意初值条件,方程(4.23)均存在唯一的解,且它在 $|t| < 1$ 内可展成幂级数

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \quad (4.24)$$

现在,用待定系数法来定出其中的系数 a_n ($n = 0, 1, \dots$).

将解(4.24)逐次求导后代入方程(4.23),得

$$(1-t^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1} + k(k+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \equiv 0,$$

即

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n t^n \\ + \sum_{n=0}^{\infty} k(k+1)a_n t^n \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

在(4.25)左端的第一个和式中令 $n-2=m$, 从而

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} t^m.$$

注意到(4.25)左端的第二与第三个和式中分别有因式 $n(n-1)$ 与 n , 故不妨把它们都从 $n=0$ 开始相加, 从而(4.25)式可合并写成

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n \\ + k(k+1)a_n] t^n \equiv 0, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-k)(n+k+1)a_n] t^n \equiv 0, \\ t \in (-1, 1). \end{aligned}$$

于是上式中每一项的系数均应为零, 即

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-k)(n+k+1)a_n = 0, \quad n=0, 1, \dots \quad (4.26)$$

利用递推式(4.26), 可以把一切 a_{2n} 表为 a_0 的倍数, 把一切 a_{2n+1} 表成 a_1 的倍数:

$$a_2 = \frac{-k(k+1)}{2} a_0,$$

$$a_4 = \frac{(-k+2)(k+3)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{-k(-k+2)(k+1)(k+3)}{4!} a_0,$$

.....

$$a_3 = \frac{(-k+1)(k+2)}{3 \cdot 2} a_1,$$

$$a_5 = \frac{(-k+3)(k+4)}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(-k+1)(-k+3)(k+2)(k+4)}{5!} a_1,$$

.....

代入解的表达式(4.24)得

$$x = a_0 \left[1 - \frac{k(k+1)}{2!} t^2 + \frac{(k-2)k(k+1)(k+3)}{4!} t^4 - \dots \right]$$

$$+ a_1 \left[t - \frac{(k-1)(k+2)}{3!} t^3 + \frac{(k-3)(k-1)(k+2)(k+4)}{5!} t^5 - \dots \right], \\ t \in (-1, 1).$$

容易看出, 把 a_0, a_1 视为两个任意常数, 上式就是 Legendre 微分方程 (4.23) 的通解. 事实上, 由于 a_0 与 a_1 的任意性, 取 $a_0=0, a_1=1$ 和 $a_0=1, a_1=0$, 分别可得 (4.23) 的解 x_1 和 x_2 , 由它们的幂级数表达式易见, 它们是线性无关的. ■

习题 7.4

(A)

1. 证明: n 阶线性微分方程在自变量的变换 $x = \varphi(t)$ 下, 仍为 n 阶线性微分方程, 并且齐次线性微分方程仍变为齐次线性微分方程, 其中 $x = \varphi(t)$ 具有 n 阶连续导数, 并且 $\varphi'(t) \neq 0$.
2. 验证 $y_1 = x$ 与 $y_2 = \sin x$ 是微分方程 $(y')^2 - yy'' = 1$ 的两个线性无关的解, 问 $y = C_1x + C_2\sin x$ 是否为该方程的通解?
3. 设 y_1 与 y_2 线性无关, 证明: $A_1y_1 + A_2y_2$ 与 $B_1y_1 + B_2y_2$ 当 $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ 时也线性无关.
4. 已知 $y_1 = x, y_2 = x + e^x, y_3 = 1 + x + e^x$ 是微分方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x)$$

的解, 试求此方程的通解.

5. 求下列各微分方程的通解:

- (1) $x + 8x + 15x = 0;$
- (2) $x - 6x + 9x = 0;$
- (3) $x + 9x = 0;$
- (4) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0;$
- (5) $\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0;$
- (6) $y'' + 4y' + 5y = 0.$

6. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

- (1) $x + 2x + 2x = 0, x(0) = 1, x(0) = -1;$
- (2) $4 \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0;$
- (3) $y'' + 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15.$

7. 写出下列微分方程待定特解的形式:

- (1) $x - 5x + 4x = (t^2 + 1)e^t;$
- (2) $x - 6x + 9x = (2t + 1)e^{3t};$
- (3) $y'' - 4y' + 8y = 3e^x \sin x;$
- (4) $y'' + a_1y' + a_2y = A,$ 其中 a_1, a_2, A 均为常数.

8. 求下列微分方程的通解或满足给定初值条件的特解:

- (1) $x + x' - x = 2e^t$; (2) $x + a^2 x = e^t$;
 (3) $2x + 5x' = 5t^2 - 2t - 1$; (4) $x + 3x' + 2x = 3te^{-t}$;
 (5) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$; (6) $y'' + 4y = x \cos x$;
 (7) $y'' - 3y' + 2y = 5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
 (8) $x - 10x' + 9x = e^{2t}$, $x(0) = \frac{6}{7}$, $x'(0) = \frac{33}{7}$.

9. 设一物体以初速度 v_0 沿斜面下滑. 设斜面的倾角为 θ , 且物体与斜面的摩擦系数为 μ , 证明: 在 t s 内物体下滑的距离为

$$\delta = \frac{1}{2} g (\sin \theta - \mu \cos \theta) t^2 + v_0 t.$$

10. 一质量为 m 的质点, 由静止开始沉入液体. 下沉时液体的阻力与下沉的速度成正比, 求质点的运动规律.

11. 求下列微分方程的通解:

- (1) $t^2 x + 5tx + 13x = 0$; (2) $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$;
 (3) $x^3 y'' + xy' - y = 3x^4$.

12. 求下列微分方程在 $t=0$ 附近幂级数形式的通解:

- (1) $x + tx + x = 0$; (2) $(x^3 + 1)y'' + x^2 y' - 4xy = 0$.

(B)

1. 证明: 函数组

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{与} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内线性无关, 但它们的 Wronsky 行列式却恒等于零. 这与本节关于 Wronsky 行列式的结论是否矛盾? 为什么?

2. 设有 n 阶齐次线性微分方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x + a_n(t)x = 0,$$

试利用它对应的一阶线性微分方程组的 Liouville 公式(习题 7.2(B)第 4 题)导出此方程的 Liouville 公式:

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau)d\tau},$$

其中 $W(t)$ 是方程的 Wronsky 行列式.

3. 利用第 2 题中的 Liouville 公式证明: 设 $x_1(t)$ 为二阶齐次线性微分方程 $x + a_1(t)x + a_2(t)x = 0$ 的一个非零解, 则其通解为

$$x = x_1(t) [C_1 \int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{(x_1(t))^2} dt + C_2].$$

4. 验证 $x = \frac{\sin t}{t}$ 是微分方程

$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x = 0$$

的解，并求此方程的通解。

5. 在 $t=0$ 附近求微分方程 $x + xsint = e^{t^2}$ 的幂级数形式的通解(展开至 t^4 项)。

第五节 微分方程的定性分析方法初步

在本章第二节中，我们对线性微分方程(组)进行了比较系统的讨论。线性微分方程(组)，在理论和应用方面都有重要的地位。但是，一般来说，线性微分方程(组)只是对实际问题近似地描述，随着科学技术的发展，人们需要更精密地认识自然现象、研究客观事物，这就往往需要去研究非线性微分方程(组)。例如，在例 4.8 中，我们研究弹簧的机械振动时，所依据的 Hooke 定律只适用于 $|x|$ 很小的情况。当 $|x|$ 不太小时，材料的应变与应力之间的关系便不是 $f = -kx$ 这样简单的线性关系了。譬如，对橡皮、皮革、硬弹簧之类的材料，恢复力 $f = -kx - cx^3$ ，因而所建立的微分方程就变成了非线性微分方程。如果我们不加区分，一概粗略地用线性化方法去处理，往往就无法去认识和研究那些非线性振动所特有的重要现象和规律。

但是，我们曾多次指出，即便是二阶线性微分方程，它的解一般来说也是难以求得的。对于非线性微分方程(组)，除了极少数特殊情况之外，要想用初等积分法去求解，往往是不可能的。这就迫使人们去寻找其它的研究途径，本章 4.3 段中所介绍的幂级数解法就是途径之一。另一个重要的途径是利用数值计算法通过计算机去求其近似解，这是一种很实用的方法，我们将在后继课程中专门学习。本节即将介绍的重要方法，就是不通过求解而直接从微分方程的系数去研究其解的主要特征和性态，这就是所谓定性分析方法。这种方法有利于人们掌握解的最终趋势，了解全部解的分布特征和相互关系。在理论分析和实际应用中，定性方法和数值计算方法两者若能相互结合、相辅相成，将会产生更好的效果。限于篇幅，本节我们主要介绍定性分析方法中稳定性理论的初步知识，而且局限于对自治系统进行讲解。

5.1 自治系统与非自治系统

在第六章第七节，我们介绍过向量场的概念，而且看到场有稳定场(定常场)与时变场(非定常场)两大类型。给定了一个微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f: G = (a, b) \times D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (5.1)$$

我们把它看成是一个运动系统的数学描述，把 t 理解为时间， x 理解为相空间

\mathbb{R}^n 内动点的坐标, 那末, 微分方程组(5.1)就在相空间 \mathbb{R}^n 的域 D 内确定了一个向量场(速度场). 如果 f 不显含 t , 这时微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (5.2)$$

在相空间 \mathbb{R}^n 的域 D 内所确定的向量场不随时间 t 而改变, 它是稳定场(定常场). 相应的方程组(5.2)称为定常系统或自治系统; 而把描述时变场(非定常场)的微分方程组(5.1)称为非定常系统或非自治系统, 也称为时变系统.

从几何上来看, 自治系统在相空间 \mathbb{R}^n 的域 D 内任一点 x_0 确定着唯一的向量 $f(x_0) = (f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0))^T$. 换句话说, 动点无论在什么时刻过点 x_0 时, 它的运动都沿确定的方向, 即向量 $f(x_0)$ 的方向前进; 非自治系统则不然, 它在相空间 \mathbb{R}^n 的域 D 内任一点 x_0 处可以确定无穷多个不同的向量 $f(t, x_0) = (f_1(t, x_0), \dots, f_n(t, x_0))^T$, 这些向量可能因 t 的不同而不同. 换句话说, 动点在不同的时刻从同一点 x_0 可能沿不同的方向继续前进. 如果解的存在唯一性定理条件满足, 容易看出, 对于自治系统, 不仅在增广相空间内积分曲线不会相交, 而且在相空间内其轨线也不会相交; 但是对于非自治系统来说, 尽管解的唯一性保证了其积分曲线在增广相空间内不会相交, 但是其轨线(即积分曲线在相空间的投影)在相空间内却可能相交, 这是自治系统与非自治系统最本质的差异. 自治系统的这一特性, 使我们对它的研究一般放在相空间内进行, 而把 t 看作参数, 主要研究其轨线的性态.

本节仅限于讨论自治系统(5.2), 而且总是假定 $f \in C(D)$, 适合 Lipschitz 条件, 且其任一解均可向正负方向无限延拓.

定义 5.1 若存在 $x^* \in D$ 使 $f(x^*) = 0$, 则点 x^* 称为系统(5.2)的一个平衡位置, 也称为此系统的一个奇点.

由定义可见, 若 x^* 是系统(5.2)的一个平衡位置, 则 $x = x^*$ 就是此系统的一组常数解. 它在增广相空间中表示一条与 t 轴平行的直线, 该直线在相空间 \mathbb{R}^n 内的投影就是点 x^* , 此点不随时间 t 变化, 这正是平衡位置名称的由来. 显然, 求系统(5.2)的平衡位置, 就是求方程 $f(x) = 0$ 的根, 而平衡位置本身也是一条特殊的轨线.

容易看出, 当动点沿轨线移动时, 在任何有限时间内均不可能到达奇点(平衡位置), 否则, 将与解的唯一性矛盾. 因此, 轨线只可能在时间 $t \rightarrow \infty$ 时趋向奇点. 另一方面, 可以证明(从略): 若解满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0, x_0 \in D$, 则 x_0 必为系统(5.2)的奇点. 对于一给定的自治系统, 奇点或平衡位置是人们关注的一种重要性态. 一个自治系统的轨线在奇点附近的分布情况是多种多样的, 这也是对自治系统进行研究的重要内容之一, 本书对此不作进一步讨论, 有兴趣的读者可参阅

参考文献[16,17].

5.2 稳定性的基本概念

稳定性是人们在日常生活中经常遇到的一种现象.例如,把一个小球放置在弧形轨道的最低点 A 处,如图 5.1

(a) 所示.这时球不随时间变化而运动,球的位置 A 就是运动的一个平衡位置.当把球稍微拨动后,球将会在点 A 附近来回振动,但过一段时间后,它又回到平衡位置 A ,这时,我们说球的平衡位置 A 是稳定的.如果把球放在弧形轨道的顶端 B 处,如图

5.1(b)所示,这时点 B 仍是一平衡位置.但是,当把球稍微拨动后,球将永远远离平衡位置 B ,这时,我们说平衡位置 B 是不稳定的.再如,我们为某种目的而发射火箭,当然希望火箭沿预先设计的轨道运行.但是,在发射时难免会有种种因素干扰.如果由于某种干扰使火箭的初始位置有点偏离,但随时间的变化,它与预定的轨道始终相差很小,那末称所设计的轨道是稳定的;若初始位置稍有偏离,火箭运行的轨道与预定轨道将产生很大的偏离,则称此预定轨道是不稳定的.这种不稳定的轨道显然是没有实用价值的.由此也可看到研究稳定性的重要意义.

对于自治系统,人们通常最为关注的是它的常数解,即平衡位置的稳定性.本书仅讨论这种特殊情形.

对自治系统任一常数解的研究,都可以化成对相应自治系统零解的研究.事实上,设 $x = x^*$ 是自治系统(5.2)的任一常数解.作变换

$$y = x - x^*,$$

则系统(5.2)变为

$$\frac{dy}{dt} = f(y + x^*) \stackrel{\text{def}}{=} F(y), \quad (5.3)$$

而系统(5.2)的解 $x = x^*$, 对应于系统(5.3)的解 $y = 0$.

因此,研究系统(5.2)任一常数解 $x = x^*$ 的稳定性就等价于研究系统(5.3)零解的稳定性.所以,我们不妨直接讨论系统(5.2)零解 $x = 0$ 的稳定性.

设 $x = 0$ 是系统(5.2)的解, 它满足初值条件 $x(t_0) = 0$. 所谓零解 $x = 0$ 是稳定的, 就是只要初值 $x(t_0) = x_0$ 与 0 足够接近, 系统(5.2)在 $t = t_0$ 以 x_0 为初值的解 $x(t; t_0, x_0)$ 对一切 $t \geq t_0$ 均与 $x = 0$ 充分接近; 如果不仅如此, 而且随着

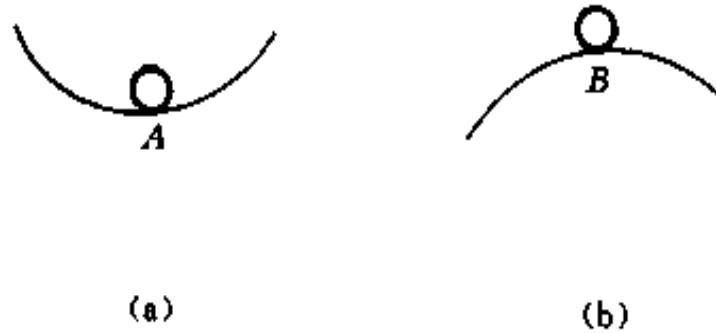


图 5.1

$t \rightarrow +\infty$, 解 $x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0$, 那末就称 $x = 0$ 是渐近稳定的; 如果在 $x = 0$ 任意邻近, 都有解远离 $x = 0$, 就称 $x = 0$ 不稳定. 把这些状态用 $\epsilon - \delta$ 数学语言表述, 就有下述定义.

定义 5.2 设 $x(t; t_0, x_0)$ 是系统(5.2)适合初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解.

(1) 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$, 使得只要 $\|x_0\| < \delta$, 对一切 $t \geq t_0$ 恒有

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon,$$

则称系统(5.2)的零解 $x = 0$ 是稳定的;

(2) 若 1) $x = 0$ 是稳定的;

2) $\forall t_0 \geq 0, \exists \delta_1 > 0$, 使得只要 $\|x_0\| < \delta_1$, 就有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) = 0,$$

则称 $x = 0$ 是渐近稳定的, 区域 $\{x | \|x\| < \delta_1\}$ 称为 $x = 0$ 的吸引域; 如果吸引域是全空间, 则称 $x = 0$ 是全局渐近稳定的;

(3) 若 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0$, 都 $\exists x_0$ 与 $t_1 \geq t_0$, 使 $\|x_0\| < \delta$ 但 $\|x(t_1; t_0, x_0)\| \geq \epsilon_0$, 则称 $x = 0$ 是不稳定的.

例如, 微分方程 $\frac{dx}{dt} = ax$ 满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解为

$$x = x_0 e^{a(t-t_0)}.$$

由定义 5.2 容易看出, 当 $a < 0$ 时, 此方程的零解 $x = 0$ 不仅稳定而且是渐近稳定的; 当 $a > 0$ 时, $x = 0$ 不稳定; 当 $a = 0$ 时, 满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解变为 $x = x_0$, 它显然是稳定而不渐近稳定的, 因为当初值 $|x_0| \ll 1$ 时, 解 $x = x_0$ 与 $x = 0$ 可充分靠近, 但当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 解 $x = x_0$ 始终为 x_0 而不会趋于 0. 还可看到, 当 $a < 0$ 时, 由于 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 均有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_0 e^{a(t-t_0)} = 0$, 因此, $x = 0$ 也是全局渐近稳定的, $x = 0$ 的吸引域为 $(-\infty, +\infty)$.

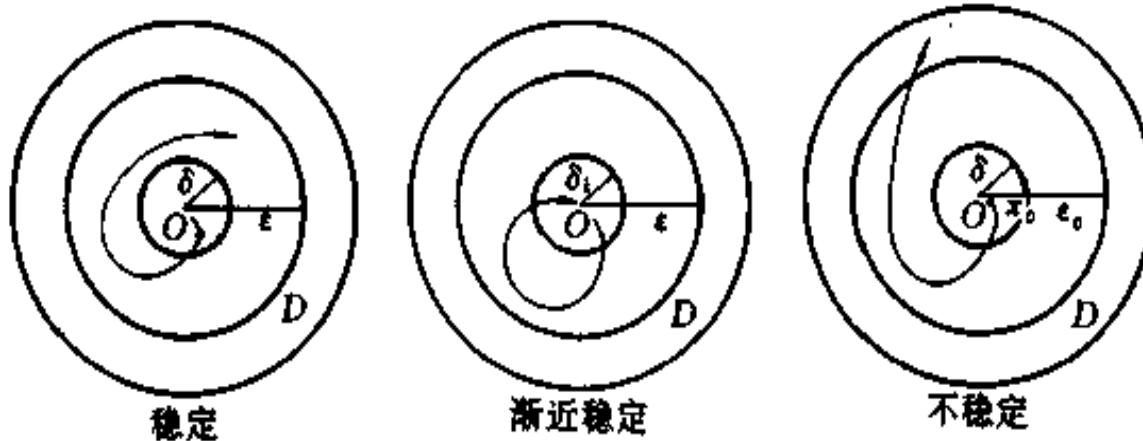


图 5.2

由上述定义可知,除全局渐近稳定外,这里的稳定性都是在 $x = 0$ 附近讨论的,即都是局部性态. 零解 $x = 0$ 的稳定性,也就是此系统平衡位置 $x = 0$ 的稳定性,读者不难在相空间中给出平衡位置稳定性的几何解释,对于二维情形,其几何解释如图 5.2 所示.

还应注意,仅有渐近稳定定义中的条件 2) 成立,不足以保证 $x = 0$ 渐近稳定. 这是因为它并不能保证从点 O 足够小邻域内出发的轨线,始终保持在点 O 的充分小邻域内. 例如,图 5.3 所示的轨线,当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时都趋向于奇点 O , 条件 2) 成立. 但在点 O 的任意邻近出发的轨线不可能永远保持在图中所示点 O 的邻域内.

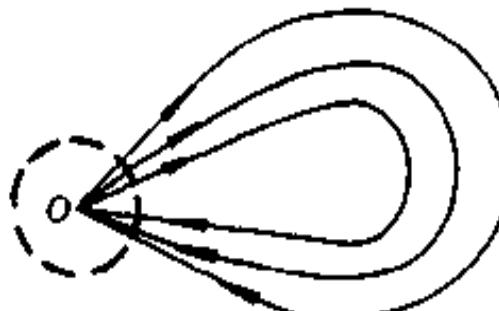


图 5.3

5.3 判定稳定的 Liapunov 函数法

俄罗斯数学家 Liapunov(1857—1918)创立了一种方法,它不通过求解微分方程,而是利用一个辅助函数来判定零解的稳定性. 为介绍这个方法,我们先看一个具体例子.

例 5.1 设有平面自治系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + ax(x^2 + y^2 - 1), \\ \frac{dy}{dt} = x + ay(x^2 + y^2 - 1), \end{cases} \quad (5.4)$$

试研究它的零解或平衡位置 $O(0,0)$ 的稳定性.

解 作一辅助函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

它满足条件:

$$V(0,0) = 0; \quad \text{当 } (x, y) \neq (0,0) \text{ 时}, \quad V(x, y) > 0.$$

显然

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = C$$

在相平面上表示围绕点 O 的一系列圆周,其中 $C > 0$ 为任意常数.

设系统(5.4)的解为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

它也就是相平面上轨线的方程. 把它代入函数 V 并关于 t 求全导数(称为函数 V 沿系统(5.4)的轨线对 t 的全导数),得

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.4)} &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right)_{(5.4)} \\ &= x[-y + \alpha x(x^2 + y^2 - 1)] + y[x + \alpha y(x^2 + y^2 - 1)] \\ &= \alpha(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1).\end{aligned}$$

在点 O 的去心邻域 $\dot{U}(0,0) = \{(x,y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ 内, 我们有

(1) 当 $\alpha = 0$ 时, $\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.4)} \equiv 0$, 这表示沿着系统的一条轨线, V 的值不会变化. 实际上, 这时系统(5.4)变成

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

容易看出, 这时 $V(x,y) = C$, 即 $x^2 + y^2 = 2C$ 就是系统的一个首次积分, 它也就是轨线的方程. 由定义 5.2 容易看出, 这时平衡位置 O 是稳定的.

(2) 当 $\alpha > 0$ 时, 在 $\dot{U}(0,0)$ 内 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.4)} < 0$, 这表示沿着系统的轨线, 当 t 增大时 V 将严格地减小. 换句话说, 当 t 增大时, 轨线与任一圆周 $x^2 + y^2 = 2C$ ($0 < C < \frac{1}{2}$) 相遇时, 都一定从它的外部穿向内部, 在图 5.4 中, 假设 $C_1 > C_2 > C_3 > \dots$, $\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.4)} < 0$ 就迫使轨线不仅保持在 $V = C$ 内部而且最终趋向于点 O . 所以这时平衡位置 O 是渐近稳定的.

(3) 当 $\alpha < 0$ 时, 在 $\dot{U}(0,0)$ 内

$\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.4)} > 0$, 这表示沿着系统的轨线, 当 t 增大时 V 将严格地增大, 从而迫使轨线远离奇点, 故这时平衡位置 O 是不稳定的. ■.

把上面所用的方法加以抽象, 就可以得到判定稳定性的 Liapunov 函数法.

定义 5.3 设

$$D = \{x | \|x\| \leq H\} \subseteq \mathbb{R}^n, V \in C^{(1)}(D).$$

若 $V(\mathbf{0}) = 0$ 且当 $x \in D \setminus \{\mathbf{0}\}$ 时, $V(x) \geq 0 (\leq 0)$, 则称函数 V 在 D 上是常正(常负)的; 若 $V(\mathbf{0}) = 0$ 且当 $x \in D \setminus \{\mathbf{0}\}$ 时, $V(x) > 0 (< 0)$, 则称函数 V 在 D 上是定正(定负)的. 常正或常负的函数统称为常号函数; 定正或定负的函数统

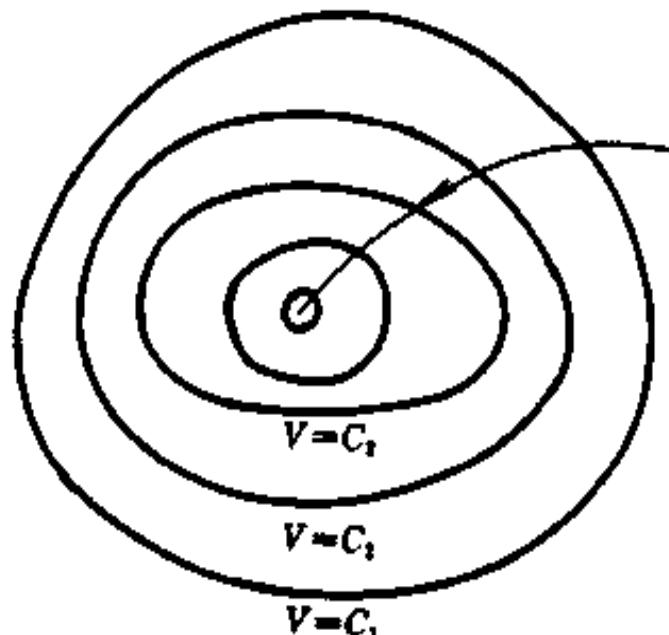


图 5.4

称为定号函数.若 $V(\mathbf{0})=0$ 且在 $x=\mathbf{0}$ 的任意邻域内均既有使 $V(x)>0$ 的点,也有使 $V(x)<0$ 的点,则称函数 V 在 D 上是变号的.

例如,在 \mathbb{R}^2 中 $V(x,y)=x^2+y^2$ 是定正的;但在 \mathbb{R}^3 中 $V=x^2+y^2$ 却只是常正的,因为在 z 轴上每一点都有 $V=0$.

又如,由于 $V=-x^2-y^2+2xy=-(x-y)^2$,所以它在 \mathbb{R}^2 中是常负的;而 $V=-2x^2-y^2+2xy=-x^2-(x-y)^2$ 在 \mathbb{R}^2 中是定负的.

下面,我们以二维空间为例来说明定号函数的几何意义.设有定正函数 $V(x,y), (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. 由于 $V \in C(D)$, $V(0,0)=0$,且当 $x^2+y^2 \neq 0$ 而 $(x,y) \in D$ 时有 $V(x,y)>0$. 所以 $O(0,0)$ 是函数 $z=V(x,y)$ 的严格极小值点(图 5.5). 因而容易看出,平面 $z=C$ ($0 < C \ll 1$) 与曲面 $z=V(x,y)$ 的交线 $\begin{cases} V(x,y)=C, \\ z=C \end{cases}$ 必为闭曲线,这些交线在 xOy 平面上的投影 $V(x,y)=C^{\Phi}$ 是围绕点 O 的一族闭曲线,它们互不相交,且随 C 的减小而缩小^②.

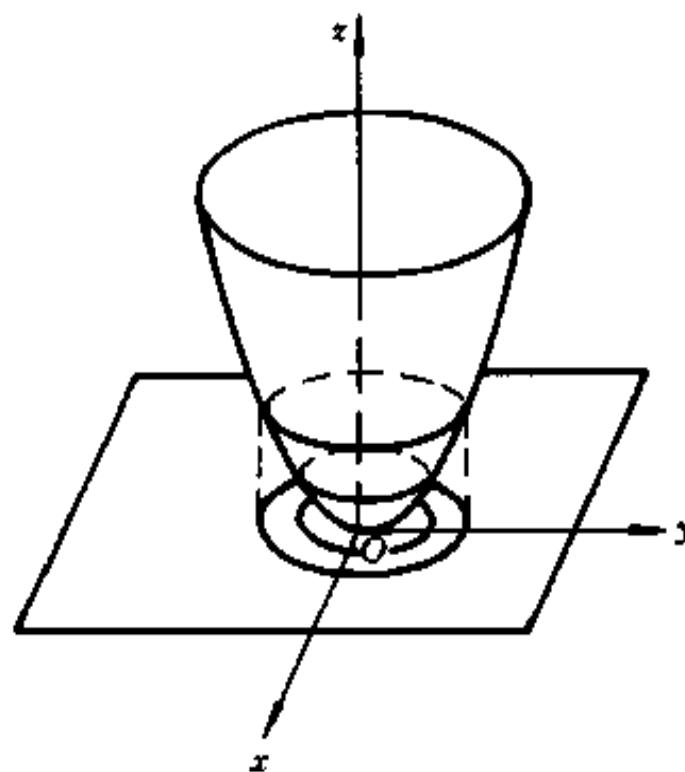


图 5.5

一般地,设有 $V:D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,若 $V(x)$ 是定号的,则当 $0 < C \ll 1$ 时 $V(x)=C$ 是 n 维空间 \mathbb{R}^n 内围绕原点的闭合的超曲面.

利用定号函数,我们可以给出判定稳定性的下述 Liapunov 函数法.

定理 5.1 (稳定性 Liapunov 判别法) 设有定义在 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的定正(定负)函数 $V(x)$, $\frac{dV}{dt}|_{(5.2)}$ 表示 $V(x)$ 沿系统(5.2)的轨线的全导数

(1) 若 $\frac{dV}{dt}|_{(5.2)}$ 在 D 上是常负(常正)的,则 $x=\mathbf{0}$ 是稳定的;

(2) 若 $\frac{dV}{dt}|_{(5.2)}$ 在 D 上是定负(定正)的,则 $x=\mathbf{0}$ 是渐近稳定的;

(3) 若 $\frac{dV}{dt}|_{(5.2)}$ 在 D 上是定正(定负)的,则 $x=\mathbf{0}$ 是不稳定的.

用来判定稳定性的这种函数 $V(x,y)$ 称为 Liapunov 函数,也称为 V 函数.

定理的证明从略,它的正确性不难由定号函数的几何意义来理解,例如对于

① 这里我们在 xOy 平面上理解这个方程.

② 一般说来,定正函数 $V(x,y)=C$ 所表示的闭曲线族不一定随 C 的减小而单调缩小. 我们选取的定正函数要求这一性质.

情形(1),由于 $V(x)$ 定正,而 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.2)} \leq 0$ (常负),故沿(5.2)的轨线,当 t 增大时不会使 $V(x)$ 增大. 所以从任一闭合超曲面 $V(x) = \varepsilon$ 内部出发的轨线,当 t 增大时不会越出 $V(x) = \varepsilon$,从而知 $x=0$ 是稳定的.

我们指出,定理 5.1 中(2)与(3)的条件都还可以减弱.

附注 1 若 $V(x)$ 定正(定负), $\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.2)}$ 常负(常正),但集合 $\Omega = \left\{ x \left| \frac{dV}{dt} \Big|_{(5.2)} = 0 \right. \right\}$ 内除 $x=0$ 外不含有系统(5.2)的整条轨线,则 $x=0$ 是渐近稳定的.

附注 2 若 $V(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内是变号函数,而 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.2)}$ 定号,则 $x=0$ 是不稳定的.

这两个附注的正确性也是容易理解的. 事实上,对于附注 1,由于 $\frac{dV}{dt} \leq 0$,且集合 Ω 内不含有除 $x=0$ 外的整条轨线,因而沿轨线 t 增大时 $\frac{dV}{dt}$ 不可能永远为零. 换句话说, V 总要减小,所以也势必迫使轨线最终趋向平衡位置 O ;对于附注 2,例如,设 $\frac{dV}{dt}$ 定正, V 的变号保证了在点 O 的任意邻近均有点 x_0 使 $V(x_0) > 0$,于是当 t 增大时,从 x_0 出发的轨线,始终使 V 增大,所以轨线随 t 的增大当然会远离 $x=0$.

遗憾的是定理 5.1 并没有给出适应定理 5.1 要求的 Liapunov 函数 $V(x)$ 的构造方法,而且迄今为止,一般说来,对于一个给定的微分方程组,为判定平衡位置的稳定性,寻求适当的 Liapunov 函数 $V(x)$ 仍然是一个十分困难的问题. 对于某些简单的情况,通常寻求 V 函数有两种思路:一种是从原方程组中舍掉某些项,利用简化后所得方程组的首次积分来作为原方程组的 V 函数,再进行必要的系数调整;另一种是选用由多项式所构成的定正函数来进行试探和调整. 下面举例加以说明.

例 5.2 讨论系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - ay(1+y)^2, \quad a \geq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

的零解 $x=y=0$ 的稳定性.

解 系统(5.5)的首次积分是难以求得的. 然而若舍去第二个方程右端的第二项,则简化后所得的线性系统为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \end{cases} \quad (5.6)$$

它的首次积分很容易得出为

$$x^2 + y^2 = C.$$

取函数 $V(x, y) = x^2 + y^2$, 它是一个定正函数. 由于 $V = C$ 是系统(5.6)的首次积分, 故有

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.6)} = 0.$$

而系统(5.5)是在系统(5.6)的第二个方程的右端添加一项所得, 因此沿(5.5)的轨线计算 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.5)}$ 时, 由于前两项将被消去, 所得的结果必然会相对比较简单, 从而便于讨论 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.5)}$ 的性态. 这就是为什么这样选取 V 函数的原因和思路. 具体计算可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.5)} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy + 2y[-x - \alpha(1+y^2)y] \\ &= -2\alpha y^2(1+y)^2, \end{aligned}$$

于是:(1)当 $\alpha = 0$ 时, 由于 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.5)} = 0$, 由定理 5.1(1)知零解稳定, 但由于此时 $x^2 + y^2 = C$ 为系统(5.5)的轨线族, 故零解不渐近稳定;

(2) 当 $\alpha > 0$ 时, 由于 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.5)} \leq 0$ (常负), 且 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.5)} = 0$ 当且仅当 $y = 0$ 或 $y = -1$. 显然 $y = 0$ 与 $y = -1$ 均不满足系统(5.5), 故不是(5.5)的轨线. 根据附注 1 可知, 此时零解渐近稳定. ■

例 5.3 无强迫外力的非线性振动 在例 4.8 中, 我们建立了二阶常系数线性微分方程. 如果阻尼系数是位移的函数, 即 $\mu = f(x)$, 而弹性力为 $-g(x)$, 那末当无强迫外力时, 物体振动所应满足的微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0.$$

这里我们假设: $f, g \in C(\mathbb{R})$; $f > 0$, 表示阻尼始终阻碍运动; $xg(x) > 0$ 表示弹性力始终与位移方向相反. 现在证明, 平衡位置 $x = 0$ 必是渐近稳定的.

证 令 $\frac{dx}{dt} = y$, 则这个非线性微分方程等价于下列非线性系统:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y. \quad (5.7)$$

平衡位置 $x=0$ 对应于此系统的平衡位置 $O(0,0)$.

在(5.7)的第二个方程中舍去 $-f(x)y$, 观察系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \quad (5.8)$$

容易求得(5.8)的首次积分为

$$G(x) + \frac{1}{2}y^2 = C,$$

其中

$$G(x) = \int_0^x g(u)du.$$

取

$$V(x, y) = G(x) + \frac{1}{2}y^2,$$

显然, $V(0,0)=0$, 而由条件 $xg(x)>0$, 可知 $G(x)>0$, 所以 $V(x,y)$ 是一定正函数. 沿系统(5.7)的轨线有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(5.7)} &= g(x)y + y[-g(x) - f(x)y] \\ &= -f(x)y^2. \end{aligned}$$

由条件 $f(x)>0$ 可知, $\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.7)}$ 常负.

$$\text{令 } \frac{dV}{dt} \Big|_{(5.7)} = 0, \text{ 得 } y=0.$$

由(5.7)第二个方程可见, 若要 $y=0$ 满足系统(5.7), 应有 $g(x)=0$, 从而 $x=0$. 换句话说, 集合 $\left\{x \mid \frac{dV}{dt} \Big|_{(5.7)} = 0\right\}$ 内除 $O(0,0)$ 外不含有(5.7)的轨线, 由定理 5.1 的附注 1 知, 系统(5.7)的平衡位置 $O(0,0)$, 即零解 $x=0, y=0$ 漐近稳定, 从而原系统的平衡位置, 即零解 $x=0$ 漉近稳定. ■

例 5.4 判定系统

$$\frac{dx}{dt} = -x^5 - y^3, \quad \frac{dy}{dt} = -3x^3 + y^3 \quad (5.9)$$

的零解的稳定性.

解 在定理 5.1 及附注 1 与 2 的所有判别条件中, 都要求 $\frac{dV}{dt}$ 定号或者常号. 可见, 在选取 V 函数时, 更应优先考虑 $\frac{dV}{dt}$ 的定号或常号性. 为了使我们在试探中有较大的选择和调整余地, 我们选取

$$V(x, y) = Ax^\alpha + By^\beta,$$

其中, A, B, α, β 均为待定的常数, 则

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.9)} &= \alpha Ax^{\alpha-1}(-x^5 - y^3) + \beta By^{\beta-1}(-3x^3 + y^3) \\ &= -\alpha Ax^{\alpha+4} + \beta By^{\beta+2} - (\alpha Ax^{\alpha-1}y^3 + 3\beta Bx^3y^{\beta-1}).\end{aligned}$$

为了使上式右端的第三项可以消去, 可先取 $\alpha = \beta = 4$, 从而

$$\alpha Ax^{\alpha-1}y^3 + 3\beta Bx^3y^{\beta-1} = 4(A + 3B)x^3y^3.$$

再令

$$A + 3B = 0, \quad \text{或} \quad A = 3, B = -1,$$

便有

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.9)} = -4(3x^8 + y^6),$$

这是一定负函数. 可见若取

$$V(x, y) = 3x^4 - y^4, \quad (5.10)$$

则有 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.9)}$ 定负而 (5.10) 中的函数 V 显然在 $U(0, 0)$ 是变号函数. 据定理 5.1 的附注 2 可知, 零解不稳定. ■

5.4 由线性近似系统判定稳定性

下面, 我们介绍判定零解稳定性的另一种方法. 考察自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f \in C^{(1)}(D), D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

设 $x = 0$ 为其解, 即 $f(0) = 0$, 把 f 在 $x = 0$ 处用带有 Peano 余项的 Taylor 公式展开, 得

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \Phi(x), \quad (5.11)$$

其中 $A = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{0})}{\partial x_j} \right)_{n \times n}$ 为一常数矩阵, $\Phi(x)$ 适合条件

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|\Phi(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

线性系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

称为系统(5.11)的线性近似系统.

定理 5.2 (1) 若矩阵 A 的全部特征值都具有负实部, 则系统(5.11)的零解是渐近稳定的;

(2) 若矩阵 A 的特征值中至少有一个具有正实部, 则系统(5.11)的零解是不稳定的.

证 我们仅就 $n=2$ (即平面系统) 来证明此定理, 一般情形下的证明可参阅有关书籍.

对于平面系统, (5.11) 可具体写成

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + \Phi_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + \Phi_2(x, y), \end{cases} \quad (5.12)$$

其中

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi_i(x, y)}{r} = 0, i = 1, 2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

相应线性近似系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

(1) 容易看出, 两个特征值均具有负实部的充要条件为

$$ad - bc > 0, \quad a + d < 0. \quad (5.13)$$

令 Liapunov 函数

$$V(x, y) = (ad - bc)(x^2 + y^2) + (cx - ay)^2 + (dx - by)^2,$$

沿系统(5.12)的轨线有

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.12)} = \frac{\partial V}{\partial x}(ax + by + \Phi_1) + \frac{\partial V}{\partial y}(cx + dy + \Phi_2).$$

将 $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ 的值代入化简, 得

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.12)} = 2(a+d)(ad-bc)(x^2+y^2) + \frac{\partial V}{\partial x} \Phi_1 + \frac{\partial V}{\partial y} \Phi_2. \quad (5.14)$$

因为在 $U(0,0)$ 内

$$\left| \frac{\frac{\partial V}{\partial x} \Phi_1 + \frac{\partial V}{\partial y} \Phi_2}{r^2} \right| \leq M_1 \frac{|\Phi_1|}{r} + M_2 \frac{|\Phi_2|}{r},$$

其中 M_1, M_2 均为常数. 由定理 5.2 的条件可知

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial V}{\partial x} \Phi_1 + \frac{\partial V}{\partial y} \Phi_2}{r^2} = 0.$$

因此, 当 $0 < r \ll 1$ 时, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.12)}$ 的符号由(5.14)式的第一项确定. 再据(5.13)式可知, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.12)}$ 是定负的. 于是由定理 5.1 中(2)可知, 系统(5.12)的零解是渐近稳定的.

(2) 两个特征值至少有一个具有正实部的充要条件是

$$ad - bc > 0 \text{ 且 } a + d > 0, \text{ 或 } ad - bc < 0.$$

这时, 当 $a + d \neq 0$ 时 V 函数仍可取(1)中的函数 $V(x, y)$; 当 $a + d = 0$ 时, 取

$$V(x, y) = ax^2 + (b+c)xy - ay^2,$$

可证明 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(5.12)}$ 是定号函数. 从而由定理 5.1 中(3)或附注 2 可得零解是不稳定的. ■

应当指出, 当 A 有零实部且无正实部的特征值时, 系统(5.11)零解的稳定性不能由它的线性近似系统来确定.

由定理 5.2 可见, 对于自治系统, 当它对应线性近似系统的系数矩阵没有零实部的特征值(这时, 称系统是双曲的)时, 要判定解的稳定性, 只需要去判定是否所有特征值都具有负实部. 当特征方程的次数较低时, 我们可以把特征值解出来; 当特征方程的次数较高时, 如何去判定呢? 我们介绍下述的 Hurwitz 准则(证明略去).

定理 5.3 (Hurwitz 准则) 实系数 n 次代数方程

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

的所有根具有负实部(包括负实根)的充分必要条件是:

$$\Delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} a_1 > 0, \Delta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\dots, \Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & \cdots & a_{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} > 0,$$

其中当 $k > n$ 时, $a_k = 0$.

例 5.5 判定系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - z - 2\sin x, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + (\sin y + z^2)e^x, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - \frac{z}{1-z} \end{cases}$$

的零解的稳定性.

解 将 $\sin x, \sin y, e^x, \frac{z}{1-z}$ 均用 Taylor 公式展开, 求出相应的一次项, 从而可得原系统的线性近似系统为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z, \end{cases}$$

其系数矩阵的特征方程为

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0.$$

由于

$$\Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 17 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 51 > 0,$$

由定理 5.3 可知, 所有特征值均具有负实部. 再据定理 5.2 可知, 原系统的零解是渐近稳定的.

例 5.6 讨论系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + xy^2 - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = x + \beta y - x^2 y - y^3 \end{cases}$$

的零解的稳定性,其中 β 为常数

解 原系统对应的线性近似系统为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x + \beta y, \end{cases}$$

其系数矩阵的特征方程为

$$\lambda^2 - \beta\lambda + 1 = 0.$$

易见,当 $\beta < 0$ 时,两个特征值均具有负实部,从而原系统的零解渐近稳定;

当 $\beta > 0$ 时,两特征值均具有正实部,从而零解不稳定;

当 $\beta = 0$ 时,特征值具有零实部,零解的稳定性由线性近似系统不能判定.

这时,我们改用 Liapunov 函数法.令

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

沿原系统的轨线有

$$\frac{dV}{dt} = -(x^4 + y^4),$$

据定理 5.1 中(2)可知,此时零解也是渐近稳定的.

例 5.7 S-I-S 传染病模型的研究 考察某种很少导致死亡的传染病,例如感冒,在人群中流行的规律.当人们传染上感冒病菌之后,很快发病,经过短时期的治疗和休息便会痊愈,但痊愈后没有免疫性又可能被再次感染.将给定地区在时刻 t 的人口分成两类:一类是无病但有可能被感染的,称为易感类,其数量记作 $S(t)$;另一类是病人,其数量记作 $I(t)$.由于从发病到痊愈时间较短,且很少死亡,故可不必考虑此地区人口的出生与死亡,也忽略人口在此地区内外之间的流动,即设此地区人口总数: $S(t) + I(t)$ 为一常数 N .

设单位时间内一个病人平均传染的人数与该时刻的易感人数成正比,比例常数为 $\beta > 0$,从而在时刻 t ,易感类由于患病而引起的人数的减少率为 $\beta S(t)I(t)$.这也正是病人在此时刻的增加率.再设病程(即从感染生病到康复

的时间)平均为 τ , 从而单位时间康复的人数为 $\frac{I(t)}{\tau}$. 这些康复者又将进入易感类. 于是可得下述传染病模型

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t) I(t) + \frac{1}{\tau} I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t) - \frac{1}{\tau} I(t). \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t) I(t) + \frac{1}{\tau} I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t) - \frac{1}{\tau} I(t). \end{cases} \quad (5.16)$$

这是一非线性微分方程组. 将两式相加得

$$\frac{d(S+I)}{dt} = 0,$$

从而得一首次积分

$$S(t) + I(t) = C.$$

为简单起见, 不妨设 $C=1$, 于是

$$S(t) = 1 - I(t).$$

代入方程(5.16), 得

$$\frac{dI}{dt} = \beta I(1-I) - \frac{1}{\tau} I = \beta I[(1-\rho)-I], \quad (0 \leq I \leq 1), \quad (5.17)$$

其中 $\rho = \frac{1}{\beta\tau}$.

令方程(5.17)的右端为 0, 易见: 当 $\rho \geq 1$ 时, (5.17)仅有平衡位置 $I=0$; 当 $\rho < 1$ 时, 有两个平衡位置 $I=0$ 与 $I=1-\rho$. 对于这种简单情况, 平衡位置的稳定性不难依据定义从方程(5.17)直接观察得到.

当 $\rho \geq 1$ 时, 由方程(5.17)可见, $\frac{dI}{dt} \leq 0$, 从而 $\forall I_0 \in [0, 1]$, 解 $I(t; t_0, I_0)$ 的极限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t; t_0, I_0) = I^*$$

必存在. I^* 必为(5.17)的一个平衡位置, 而此时方程(5.17)仅有唯一平衡位置 $I=0$, 所以 $I^* = 0$. 因此, 这时平衡位置 $I=0$ 是渐近稳定的, 且其吸引域为区间 $[0, 1]$.

当 $\rho < 1$ 时, 由于 $\frac{dI}{dt} > 0$ ($0 < I < 1 - \rho$), 所以平衡位置 $I=0$ 不稳定(图 5.6). 再由 $I \leq 1$ 可知 $\forall I_0 \in (0, 1 - \rho]$, 极限

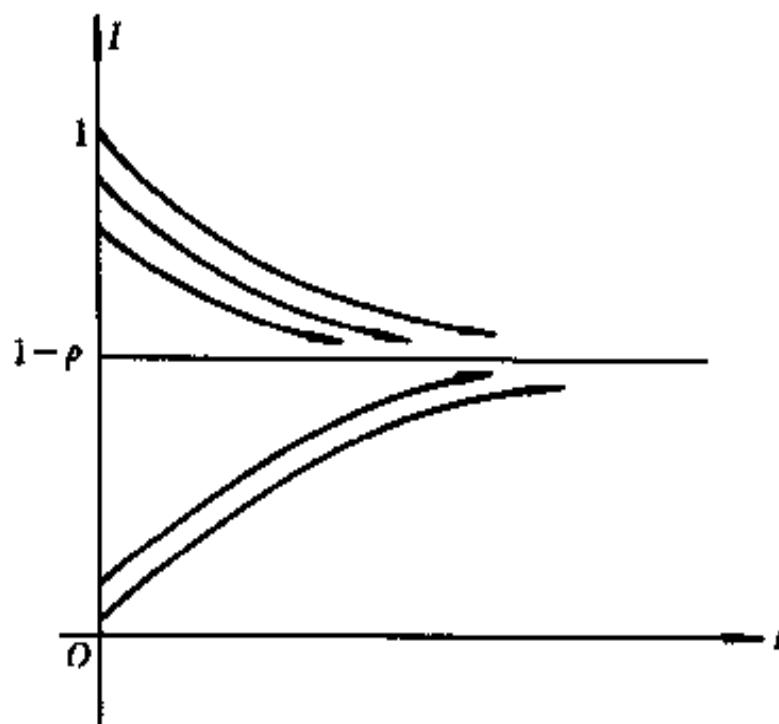


图 5.6

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t; t_0, I_0) = I^*$$

存在,且 I^* 应为(5.17)的一个平衡位置.从而可知 $I^* = 1 - \rho$.类似地, $\forall I_0 \in [1 - \rho, 1]$ 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t; t_0, I_0) = 1 - \rho.$$

于是平衡位置 $I = 1 - \rho$ 是渐近稳定的,其吸引域为区间 $(0, 1]$.

由以上分析可见,当 $\rho \geq 1$ 时,无论初始病人有多少,随时间增加病人将单调地减少,即疾病不会流行且经过一段时间之后,病人将全部康复;但当 $\rho < 1$ 时,一旦有人生病,就会发生流行,而且总有病人存在,经过一段时间之后,生病人数将大致保持在 $1 - \rho$.这时,我们说此疾病变成了这个区域的地方病.由此可见,为了控制疾病的流行,应该设法提高 $\rho = \frac{1}{\beta\tau}$ 的数量,使 $\rho \geq 1$.这就要采取隔离、预防等措施以减小 β ,从而减少传染;同时,加强治疗以缩短病程 τ .

例 5.8 革新传播规律 用数学方法来研究技术革新、产品革新、思想观念等传播过程中的演变规律是属于“革新传播学”的范畴.它是 1985 年以来新近形成的一个新的学科分支^[20].现举例说明如下.

设 $N(t)$ 表示从初始时刻 $t = t_0$ 到 t 时刻采用某项革新的人数; \bar{N} 表示社会中可能接受该项革新的潜在人数,通常设为常数.假定 $N(t)$ 的增长率与尚未采纳此项革新的人数成正比,即

$$\frac{dN(t)}{dt} = a[\bar{N} - N(t)], \quad (5.18)$$

其中比例常数 $a (a > 0)$ 表示宣传、广告等外部媒体对革新传播的影响,称为外部影响系数.方程(5.18)称为外部影响传播模型.

除外部媒体外,传播速度还取决于接受和未接受革新成员之间的交往,称其为内部影响.若仅考虑内部影响,传播模型为

$$\frac{dN(t)}{dt} = bN(t)[\bar{N} - N(t)], \quad (5.19)$$

其中 $b > 0$ 为常数,表示已采用和未采用此革新的成员间相互作用对传播的影响,称为内部影响系数.方程(5.19)称为内部影响传播模型.

综合外部与内部影响,可得混合传播模型如下:

$$\frac{dN(t)}{dt} = [a + bN(t)][\bar{N} - N(t)],$$

初值条件 $N(t_0) = N_0$ 表示 t_0 时刻已接受此革新的人数.

现在,我们来讨论一种较为现实但稍许复杂的情况[20].把给定区域的成员(假设他们都有可能接受某项革新)分成三类: $A(t)$ 表示到 t 时刻已采用此项革新的成员数; $U(t)$ 表示到 t 时刻尚未采用者的人数; $R(t)$ 表示曾采用但到 t 时刻已放弃采用者的人数,而且设他们不会再次采用.此外,假设成员对本地区的迁入与迁出率相等,不考虑出生率和死亡率,因而总成员将保持一常数,为简单起见,不妨设

$$U(t) + A(t) + R(t) = 1.$$

还假设迁入者都是可能接受此项革新但尚未采用者;而迁出者在各类成员中有相同的比例,比例系数为 δ ;到 t 时刻的放弃率与该时刻采用者的人数成正比,比例系数为 α .采用上述混合模型,容易建立此项革新在所在地区传播的数学模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -[a + bA(t)]U(t) - \delta U(t) + \delta, \\ \frac{dA}{dt} = [a + bA(t)]U(t) - \delta A(t) - \alpha A(t), \\ \frac{dR}{dt} = \alpha A(t) - \delta R(t), \\ U(t_0) = U_0, A(t_0) = A_0, R(t_0) = R_0, \\ U_0 + A_0 + R_0 = 1, (U_0, R_0) \in D = \{(U, R) | U \geq 0, R \geq 0, U + R \leq 1\} \end{cases}$$

由于前两个方程中不含有 R ,而且 $R = 1 - U - A$,故只须对前两个方程进行讨论,即讨论

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -[a + bA(t)]U(t) - \delta U(t) + \delta, \\ \frac{dA}{dt} = [a + bA(t)]U(t) - (\delta + a)A(t). \end{cases} \quad (5.20)$$

令(5.20)右端为0, 不难解得(5.20)在区域 D 内仅有的平衡位置 (U^*, A^*) , 其中

$$U^* = \frac{2\delta(\delta + a)}{(\delta + a)(\delta + a) + b\delta + \sqrt{\Delta}}, \quad A^* = \frac{\delta}{\delta + a}(1 - U^*), \quad (5.21)$$

而 $\Delta = [(\delta + a)(\delta + a) - b\delta]^2 + 4\delta b(\delta + a)a$.

为判定平衡位置 (U^*, A^*) 的稳定性, 先把系统(5.20)变形. 由于 (U^*, A^*) 为(5.20)的平衡位置, 故有

$$\begin{cases} -(a + bA^*)U^* - \delta U^* + \delta = 0, \\ (a + bA^*)U^* - (\delta + a)A^* = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

将(5.20)中两方程的右端分别减去(5.22)中两式的左端, 并适当插入项, 可将系统(5.20)变形为

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -(a + \delta + bA^*)(U - U^*) - bU(A - A^*), \\ \frac{dA}{dt} = a(U - U^*) - (\delta + a - bU^*)(A - A^*) + bA(U - U^*). \end{cases}$$

由(5.22)式可知

$$a + \delta + bA^* = \frac{\delta}{U^*}, \quad \delta + a - bU^* = \frac{aU^*}{A^*}.$$

从而上方程组可写成

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -\frac{\delta}{U^*}(U - U^*) - bU(A - A^*), \\ \frac{dA}{dt} = a(U - U^*) - \frac{aU^*}{A^*}(A - A^*) + bA(U - U^*). \end{cases} \quad (5.23)$$

舍弃(5.23)中两方程的线性项后, 求出首次积分, 借助于此首次积分, 选取 Liapunov 函数为

$$\begin{aligned} V(U, A) = & C_1 \left(U - U^* - U^* \ln \frac{U}{U^*} \right) \\ & + C_2 \left(A - A^* - A^* \ln \frac{A}{A^*} \right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

其中 C_1, C_2 为待定的正常数, 于是, 沿(5.23)的轨线有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(5.23)} &= -\frac{C_1 \delta}{U^* U} (U - U^*)^2 - C_1 b(U - U^*)(A - A^*) \\ &+ C_2 b(U - U^*)(A - A^*) + \frac{C_2 a}{A}(U - U^*)(A - A^*) - \frac{C_2 a U^*}{A^* A} (A - A^*)^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

我们希望能选取常数 C_1, C_2 使 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.23)}$ 定负, 因而首先需要通过变形把出现在交叉乘积项中的变量 A 去掉, 易见

$$\begin{aligned} &\frac{C_2 a}{A}(U - U^*)(A - A^*) - \frac{C_2 a U^*}{A^* A} (A - A^*)^2 \\ &= C_2 a(A - A^*) \left(\frac{U}{A} - \frac{U^*}{A^*} \right) \\ &= C_2 a(A - A^*) \left(\frac{U}{A} - \frac{U}{A^*} + \frac{U}{A^*} - \frac{U^*}{A^*} \right) \\ &= \frac{C_2 a}{A^*}(U - U^*)(A - A^*) - \frac{C_2 a U}{A^* A} (A - A^*)^2. \end{aligned}$$

代入(5.25)式并取

$$C_1 = b + \frac{a}{A^*}, \quad C_2 = b$$

则得

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.23)} = - \left(b + \frac{a}{A^*} \right) \frac{\delta}{U^* U} (U - U^*)^2 - b \frac{a U}{A^* A} (A - A^*)^2.$$

即 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(5.23)}$ 定负. 注意到 V 函数(5.24)在域 D 内定正, 所以平衡位置(5.21)是在 D 内全局渐近稳定的.

由以上结论可见, 随着时间的推移, 此项革新在该地区的传播将会使采用者逐渐稳定在数量 A^* .

由(5.21)式还可看到, 当内部影响系数 $b \rightarrow 0$ 时有

$$\lim_{b \rightarrow 0} A^* = \frac{a \delta}{(\delta + a)(\delta + a)},$$

但当外部影响系数 $a \rightarrow 0$ 时有 $A^* \rightarrow 0$. 可见广告等宣传的作用是十分重要的.

最后, 我们再介绍一个应用定性分析方法的有趣实例.

例 5.9 战争期间为什么掠肉鱼的比例会增加?

本世纪 20 年代,意大利生物学家 D'Ancona 在研究鱼类数量变化规律时,无意中发现了第一次世界大战期间,意大利 Finme 港收购站的软骨掠肉鱼(如鲨鱼等以其它鱼类为食的鱼)在鱼类收购量中的下述比例资料:

1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
11.9%	21.4%	22.1%	21.2%	36.4%	27.3%	16.0%	15.0%	14.8%	10.7%

使 D'Ancona 感到惊异的是:在战争期间掠肉鱼捕获的比例较非战争时期显著地增加,起初他认为这是由于战争使捕鱼量减少,掠肉鱼获得了更充裕的食物,从而促进了它们更快地繁殖.但再转念一想,捕获量的减少也同样有利于非掠肉鱼,为什么会导致掠肉鱼的比例上升呢? D'Ancona 无法从生物学的观点来解释这一现象,于是就去请教他当时的同事,后来成为他女婿的意大利著名数学家 Volterra. Volterra 构造了一个数学模型,利用定性分析的方法成功地解释了这一使 D'Ancona 迷惑不解的现象.下面我们就来介绍他的这一工作.

Volterra 假设: t 时刻 finme 港中的掠肉鱼(称为捕食者)的数量为 $y(t)$;其它鱼(称为被捕食者)的数量为 $x(t)$;当不存在捕食者 y 时,被捕食者种群 x 的增长符合 Malthus 模型(第三章例 5.15),即

$$\frac{dx}{dt} = ax(t),$$

其中 a 为正常数.当捕食种群 y 存在时,单位时间内每个捕食者吞食 x 的数量设与 $x(t)$ 的数量成正比,比例常数为 b ,从而

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t).$$

再假定捕食者吞食食物后,立即转化为能量供给它繁殖增长,并设转化系数为 α ,而捕食种群的死亡率与其个体数量成正比,比例系数为 d .于是有

$$\frac{dy(t)}{dx} = \alpha bx(t)y(t) - dy(t).$$

这样,就得到了由捕食者与被捕食者所构成的两种群在无外界干扰下相互作用的模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} = cxy - dy, \end{cases} \quad (5.26)$$

其中 $c = ab$.这是一个非线性自治系统,为了求两种群的个体数量 x 与 y 的变化

规律, 我们对它作定性分析. 令

$$\begin{cases} ax - bxy = 0, \\ cxy - dy = 0. \end{cases}$$

解得系统(5.26)的两个平衡位置为

$$O(0,0), \quad M\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right).$$

从(5.26)的两方程中消去 dt , 分离变量可求得首次积分

$$F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} cx + by - d \ln|x| - a \ln|y| = k. \quad (5.27)$$

容易求得函数 $F(x, y)$ 有唯一的驻点为 $M\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$. 再用第五章中所讲的极值的充分条件可以判定 M 是 F 的极小值点. 同时易见, 当 $x \rightarrow +\infty$ 或 $y \rightarrow +\infty$ 时均有 $F \rightarrow +\infty$; 而 $x \rightarrow 0^+$ 或 $y \rightarrow 0^+$ 时也有 $F \rightarrow +\infty$. 由此不难看出, 在第一象限内部连续的函数, $z = F(x, y)$ 的图形是以 M 为最小值点, 且在第一卦限内向上无限延伸的曲面, 因而它与 $z = k (k > 0)$ 的交线在相平面 xOy 的投影 $F(x, y) = k (k > 0)$ 是环绕点 M 的一族闭曲线. 换句话说, 系统(5.26)在第一象限内的轨线是围绕点 M 的闭曲线族(5.27). 这说明捕食种群 y 和被捕食种群 x 两者的个体数量呈周期变化(图 5.7). 从生态意义来看这是容易理解的: 当捕食者 y 较少时有利于被捕食者 x 的生长; 而 x 的增多意味着 y 的食物的增多, 这又促进了 y 的生长; y 的增多必造成 x 的减少, 而这又反过来造成了 y 的减少, 这样周而复始. 由图 5.7 显见, 从不同初始点出发, 上述变化将在不同的闭轨线上运行. 然而, 我们可以证明: 尽管闭轨线不同, 但在其周期内 x 和 y 的平均数量都分别是一常数, 而且恰为平衡点 M 的两个坐标. 事实上, 由(5.26)的第二个方程可得

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = cx - d,$$

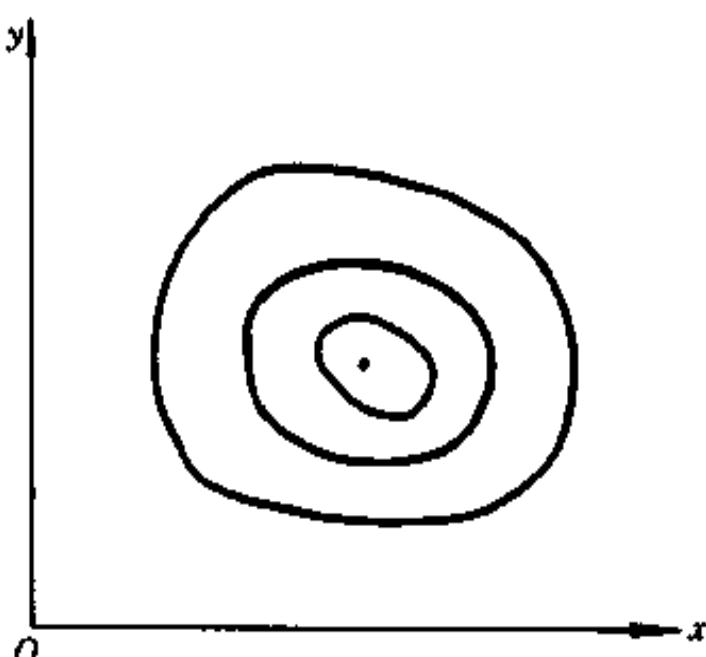


图 5.7

两端在一个周期时间 T 内积分, 得

$$\int_0^T \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} dt = c \int_0^T x dt - dT. \quad (5.28)$$

注意到当 t 经过一个周期 T 时, 点 (x, y) 绕闭轨线 Γ 运行一圈又回到初始点, 从而

$$\int_0^T \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} dt = \oint_{\Gamma} \frac{1}{y} dy = 0,$$

所以, 由(5.28)式可得

$$\frac{1}{T} \int_0^T x dt = \frac{d}{c}.$$

同理, 由(5.26)的第一个方程可得

$$\frac{1}{T} \int_0^T y dt = \frac{a}{b}.$$

现在考虑捕捞对上述模型的影响. 设捕获率与该时刻种群个体的数量成正比, 比例系数为 h , h 反映了捕捞的能力. 在这种情况下, 上述捕食与被捕食模型应变为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - hx = (a - h)x - bxy, \\ \frac{dy}{dt} = cxy - dy - hy = cxy - (d + h)y. \end{cases} \quad (5.29)$$

将(5.29)式与(5.26)式比较, 可见两者形式完全相同, 前者仅是把(5.26)中 x 与 y 的系数分别换成了 $a - h$ 与 $d + h$. 因此, 对(5.29)有

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x dt = \frac{d + h}{c}, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y dt = \frac{a - h}{b}. \quad (5.30)$$

利用(5.30)式, Volterra 对 D'Ancona 所提出的问题作了满意的回答. 由(5.30)式可见, h 的增大将使 \bar{x} 增加、 \bar{y} 减少. 大战期间, 由于忙于战争使渔业萧条, 即 h 减小了, 与无战争时期相比, 将有利于 y 的增长. 这就是 Finme 港收购站统计表中所呈现的规律的原因. Volterra 所发现的这一规律称为 Volterra 原理.

Volterra 原理不仅很好地解释了 D'Ancona 所提出的问题, 而且还有着重要的指导意义. 我们知道害虫通常都有它的天敌, 把天敌看作是捕食种群, 害虫看作是被捕食种群, 人们常常使用农药去毒杀害虫, 这当然在农业中是一项有力措施. 然而农药在毒杀害虫的同时, 也毒杀了其天敌, 而且上述 Volterra 原理表明, 农药的使用对天敌更为不利. 一个著名的例证是: 1968 年一种叫吹绵蚧的害虫

从澳洲传入了美国,使美国的柑桔业遭受了很大的损失。不久人们引入了它的天敌——澳洲瓢虫,使吹棉蚧减少到很低的程度。后来,农民们使用 D.D.T.,以期望彻底消灭吹棉蚧。然而事与愿违,正如 Volterra 原理所预示的那样,结果反而使吹棉蚧的数量增加了。因此,我们在使用农药时应有所选择和控制,而发展天敌以虫治虫是更优的策略。

习题 7.5

(A)

1. 积分曲线与轨线有何区别? 有何关系?
2. 对自治系统和非自治系统分别回答下述问题: 若解的存在唯一性定理条件满足, 同一微分方程的积分曲线可能相交吗? 轨线可以相交吗?
3. 若某一系统的解 $x = x(t)$ 满足 $x(t+T) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $T > 0$ 为一常数, 则称 $x = x(t)$ 为一周期解。对于自治系统, 其周期解在相空间的轨线具有什么特征?
4. 自治系统的奇点或平衡位置是否是它的解, 若是, 这种解有何特征?
5. 若自治系统 $\dot{x} = f(x)$, $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的一切解均满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, 问 $x = 0$ 是否渐近稳定, 为什么?
6. 讨论下列系统零解的稳定性:

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = -y - xy^2, \\ \dot{y} = x - x^4y; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x - y^3; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2); \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a^2 \sin x; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \dot{x} = y + ax^3, \\ \dot{y} = -x + ay^3; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - 3(1+y)^2y. \end{cases}$$

7. 讨论下列系统零解的稳定性:

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = -x - y + 2z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = x + y; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \dot{x} = x - y + z + x^2yz, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z + z^3, \\ \dot{z} = x + 2y + z + xy; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z + x^2, \\ \dot{y} = x - y + xy, \\ \dot{z} = x + y - z + yz. \end{cases}$$

(B)

1. 设齐次线性微分方程组 $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 连续, 证明: 零解稳定的充要条件是它的一个基解矩阵有界。
2. 讨论下列自治系统零解的稳定性:

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = -x + 2x(x+y)^2, \\ \dot{y} = -y^3 + 2y^3(x+y)^2; \end{cases}$$

$$(2) \dot{x} + 2nx + k^2x = 0 \quad (0 < n < k);$$

$$(3) \begin{cases} \dot{x} = y - z - 2\sin x, \\ \dot{y} = x - 2y + (\sin y + z^2)e^z, \\ \dot{z} = x + y + \frac{z}{1-z}; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \dot{x} = e^{x+y} + z - 1, \\ \dot{y} = 2x + y - \sin z, \\ \dot{z} = -8x - 5y - 3z + xy^2. \end{cases}$$

3. 设有常系数齐次线性微分方程组 $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, A 为二阶常数矩阵, 记 $p = -\text{tr}A$, $q = \det A$. 设 $p^2 + q^2 \neq 0$, 试证:

- (1) 当 $p > 0$ 且 $q > 0$ 时, 零解渐近稳定;
- (2) 当 $p > 0$ 且 $q = 0$; 或 $p = 0$ 且 $q > 0$ 时, 零解稳定但不渐近稳定;
- (3) 其它情形下零解都不稳定.

4. 设 Volterra 系统 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1[b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2], \\ \dot{x}_2 = x_2[b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2] \end{cases}$ 有正平衡位置 $M(x_1^*, x_2^*)$ (即 $x_1^* > 0, x_2^* > 0$). 证明: 点 M 渐近稳定的充要条件是

$$x_1^* a_{11} + x_2^* a_{22} < 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

5. 为了研究传染病的流行规律, 我们把人划分为三群, 易感染者 S , 病人 I , 排除者(包括痊愈者, 隔离者和因病死亡者) R . 假设一个病人的传染率(单位时间内传染的人数)与该时刻易感染者人数成正比, 比例常数为 $r > 0$; 病人的排除率与该时刻的病人成正比, 比例常数为 γ ; 被排除者不再被传染; 不考虑人口的出生、自然死亡和流动.

- (1) 试建立 S, I, R 的微分方程模型;
- (2) 在相平面 S, R 上画出轨线的草图;
- (3) 求出决定疾病流行与否的易感染者的临界值 ρ (即当初始易感染者 $s_0 < \rho$ 时, 病人 $I(t)$ 将单调减少至灭绝, 疾病不会流行; 当 $s_0 > \rho$ 时, 病人 $I(t)$ 将会增加, 疾病将会流行).

综合练习题

1. 猪的最佳出售时间问题 养猪场出售生猪有一个最佳出售时间. 因为将生猪在体重过小的时候出售, 显然利润不佳. 而猪养得越大, 单位时间饲养费用就越大, 到一定的时候体重的增加速度却会下降, 且单位体重的销售价格却不会随体重增加而增加. 因此, 饲养时间过短或过长, 都是不合算的. 只有选取一个最佳的出售时间, 才能获得最大的利润. 试建立这一问题的数学模型, 并对最佳出售时间作出理论探讨. (提示: 可假定生猪体重 $w(t)$ 符合 Logistic 模型 $\frac{dw}{dt} = \alpha(1 - \alpha w)$, 饲养费用 $y(t)$ 满足方程 $\frac{dy}{dt} = b + cw$.)

2. 竞争排斥原理 1934 年, 生物学家 G. F. Gause 研究相近物种的竞争情况时, 做了一个有趣的实验. 他收集了两种草履虫: 双小核草履虫和普通草履虫, 先将它们分别放在环境完全相同的两个容器中分别饲养, 发现它们的数量随饲养天数而逐渐增多, 最后都分别趋向于一稳定数目. 然后, 他把这两种草履虫在相同的条件下放在同一个容器中饲养. 发现在开始几天中, 它们数量的增长情况与分开饲养相仿, 但大约 10 天以后, 普通草履虫的数量急剧减少

而最终灭绝;但双小核草履虫作为竞争的胜利者而逐渐达到稳定的平衡态.试建立数学模型,并解释这一现象所反映的一般规律:习性相近的两种群不可能在一小环境内同时生存.(提示:可以先假定两种竞争种群的数量变化规律符合 Volterra 模型,然后在相平面上对轨线作分析.)

第八章 无限维分析入门

在本书的前四章,我们系统地介绍了一元函数微积分和无穷级数的理论,讲解了一维 Euclid 空间(直线) \mathbf{R} 上的分析学.在第五到第七章中,又将空间从一维推广到有限维,介绍了多元函数微积分和微分方程,讲解了 $n(n \geq 2)$ 维空间 \mathbf{R}^n 上的分析学.本章再将空间从有限维过渡到无限维,简要地介绍无限维分析的一些初步知识和基本思想.我们从线性代数中已经学过的内积空间出发,先由内积诱导出的范数的基本特征抽象出赋范线性空间,讨论赋范线性空间的收敛性、完备性等重要概念以及压缩映射原理,然后再讨论 Hilbert 空间的几何性质与最佳逼近问题.为了研究 L^2 空间的 Fourier 级数理论,还简要地介绍了 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分的基本知识.本章的重点是展示现代分析的一些思想方法,开拓视野,活跃思想,因此不追求严密性.

第一节 从有限维空间到无限维空间

大家知道,空间是物质存在的普遍形式.现实世界中的万事万物都存在于空间之中,并在其中运动、变化和发展,这种现实的空间就是通常所说的三维 Euclid 空间.19 世纪以前的数学都是在三维 Euclid 空间中讨论的,二维空间(平面)与一维空间(直线)是它的特殊情况.

从 19 世纪中叶开始,数学家开始在数学中讨论高于三维的多维空间,并且逐步建立了多维空间的几何学.进入 20 世纪以后,人们又引入了无限维空间,并建立了无限维空间的几何学与分析学.既然现实的空间是三维的,为什么要引入多维空间甚至无限维空间呢?它们有什么现实基础和现实意义呢?数学中所讲的抽象空间是什么意思?本节,我们试图对这些问题作简要的说明.

1.1 多维空间概念的现实基础

多维空间的概念早在 18 世纪末就被一些数学家在有意或无意之中引入了.例如 d'Alembert 和 Lagrange 都曾把时间当成第四个维数而提出四维空间的概念.但是,关于多维空间几何的系统表述是由德国数学家 Grassmann 和英国数学家 Cayley 各自独立完成的.

开始,人们提出多维空间的概念并建立多维空间几何学,主要是为了在研究

代数和分析的问题时利用几何的类比,利用形象直观的几何概念和方法来表述和解决代数与分析中的问题.例如,既然三个有序实数组成的三元数组 (x_1, x_2, x_3) 表示三维空间 \mathbb{R}^3 中的一个点或向量,那末,自然可以把 n 个有序实数组成的 n 元数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 看成一个 n 维点或 n 维向量 x ^①,并且像三维向量的加法以及实数与向量的乘法那样,定义两个 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 的加法为:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

实数 λ 与向量 x 的乘法(简称数乘)为:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

将对加法与数乘运算封闭的 n 维向量的全体构成的集合 \mathbb{R}^n 称为 n 维向量空间.

在三维空间中,二维平面可以用一个三元线性方程来表示,直线(可以看作一维平面)可以用两个联立线性方程来表示.直接的类比与推广容易得知,在 n ($n > 3$)维空间中,可以用 n 元线性方程

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

来表示一个 $n - 1$ 维平面, m ($m \leq n$)个这种方程:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

表示 m 个 $n - 1$ 维平面(超平面),将它们联立起来(假定它们是相容的和独立的),就表示一个 $n - m$ 维超平面. m 个 n 元联立线性方程组的每个解都表示 m 个 $n - 1$ 维平面的交点.一般情况下,这些平面可能相交,也可能不相交;可能相交于一点,也可能相交于一条直线或者一个 k 维($n - m \leq k \leq n - 1$)超平面.因此,讨论线性方程组解的存在性问题就可以转化为讨论由这些方程所表示的平面是否相交的问题.这样,不但 n 元线性方程组理论的研究可以从三维空间的几何方法中得到直观的启示,而且关于线性方程组的许多理论可以有更清楚的几何解释.

在分析中也有类似的情况.我们知道,如果二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域是一个平面区域,并且 f 是连续函数,那末,它的图象是三维空间的曲面.类似

^① 本章中,我们用字母 x, y 等来表示向量,而不用黑体.

地,如果 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的定义域就是 n 维空间的一个区域,并且 f 在该区域上连续,那末,它的图象就是 $n+1$ 维空间的(超)曲面.将三维空间中两点间的距离推广到 n 维空间后,就可以将“长度”、“球”和“夹角”等概念移植到 n 维空间,研究 n 元函数的极限和连续等概念,建立 n 维 Euclid 空间 \mathbf{R}^n 上的微积分.读者只要回顾一下在第五、六两章中的许多分析概念和结果,不难发现,其中不但经常使用着几何语言,使得那些概念和结果有了类似于三维空间的直观性,而且有些结果还可以用推广到 \mathbf{R}^n 后的几何方法来证明.

随着科学技术的不断发展,人们发现,多维空间不仅仅是一个纯粹的数学概念,而且有着广泛的现实基础,是处理许多实际问题的重要数学方法.例如,根据理想气体状态方程式 $PV = RT$,为了表示在温度 T 一定的条件下气体的压力 P 和体积 V 之间的关系,只要在二维平面 \mathbf{R}^2 上画出描述这种关系的函数图象就行了.但是,如果要讨论更复杂的物理系统,它的状态不能仅由两个因素确定,而要由三个或更多的因素来确定,那末,描绘它的状态的函数图象就需要多维空间了.例如,考察四种理想气体的混合物,若体积 V 一定,则混合物的状态由五个因素决定:温度 T ,压力 P 以及三种气体的浓度,即它们含量的百分比 C_1, C_2, C_3 (另一气体的百分含量 $C_4 = 1 - C_1 - C_2 - C_3$,不是独立变量).因此,四种气体混合物的每个状态可以看成五维空间的点, n 种气体混合物的每个状态就可以看成 $n+1$ 维空间的点.

现代科学技术中所研究的系统往往由成千上万个独立变量确定,因此,多维空间的几何方法现在已被广泛地应用于自然科学、社会科学和工程技术的众多领域之中.如果一个系统(物理的、化学的、生物的或者经济的)由 n 个独立变量(独立因素)决定,即系统的状态随着 n 个变量中任何一个的改变而改变,那末就说这个系统具有 n 个自由度.这些确定该系统状态的自由度起着它的坐标的作用,因此,具有 n 个自由度的系统的每个状态可以看作 n 维空间的一个点,这种 n 维空间就是现代科学中广为运用的所谓相空间.上面列举的描写多种气体混合物状态的空间就是相空间.在分子物理学中,描写每个分子的运动状态需要六个量,即位置的三个坐标和速度的三个分量.因此, n 个分子的运动状态就要由 $6n$ 个变量给定,因而描写 n 个分子所构成系统运动状态的相空间是 $6n$ 维的.

1.2 为什么要研究无限维空间

多维空间概念的广泛应用,推动了空间概念的进一步发展.20世纪初,为了研究那些不能用有限个因素确定的对象,或者具有无限多个自由度的系统,数学中开始研究所谓无限维空间.

平方可和数列空间 ℓ^2 是最早引进的无限维空间之一.空间 ℓ^2 中的每个元

素都是一个实数列 $\{x_n\}$, 记作 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, 并且满足下述条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty.$$

类比于 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n , 在 l^2 中定义元素的加法以及数与元素的乘法分别为

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots), \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \dots). \end{aligned}$$

定义内积和范数分别为:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \\ \|x\| &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

人们论证了这些定义的合理性, 并得到了一系列与空间 \mathbb{R}^n 类似的性质. 这个空间与 \mathbb{R}^n 的不同之处在于其中的每个点 x 是由无穷多个坐标 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 所确定的, 因此是无限维的. 由于这个空间是伟大的德国数学家 Hilbert 在 1906 年研究积分方程时首先提出来的, 因此称它为 Hilbert 空间. 其实它只是后来定义的更一般的 Hilbert 空间的一个特例, 关于这类空间的详细论述将在本章的后面给出.

像有限维空间一样, 无限维空间也有广泛的现实基础, 是在处理许多实际问题时不可缺少的数学概念. 我们来考察弹性系统的微小振动问题. 设 AB 为一条拉紧的柔韧的线, 在 AB 上的 n 个不同点处配置有 n 个重物, 假定直线 AB 没有重量(就是说, 它的质量是这样的小, 与所配置的重物的质量相比可以忽略不计). 因此, 该系统可看成由 n 个质点组成的质点系. 将重物从平衡位置(未配置重物前线 AB 的位置)放开, 它们就开始振动. 在每一时刻, 该质点系的位置由 n 个数 y_1, y_2, \dots, y_n (各重物对平衡位置的位移)确定(图 1.1), 即系统在每一时刻的位置就由这 n 个数所确定, 这 n 个数可以看成 n 维空间的一个点. 如果 AB 是一条拉紧的弦, 质量沿 AB 非均匀连续地分布, 那末, 研究弦 AB 的微小振动就不能看成由有限个质点组成的质点系的微小振动问题. 在每一时刻, 弦的位置不能由 n 个数 y_1, y_2, \dots, y_n 确定, 必须由弦上每一点 x 的位移 $y = f(x)$ 确定(图 1.2). 也就是说, 每个时刻弦的位置由位移函数 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 给出. 由于对于区间 $[a, b]$ 中的每个 x , 都对应着位移函数 $y = f(x)$ 的一个值, 因此, 对于 $[a, b]$ 中的所有的 x , $f(x)$ 有无穷多个对应值. 类比于有限维空间, 如果把无穷多个 $f(x)$ 的值看成某空间中点(或向量)的坐标(或分量), 那末, 每个位移

函数就可以看成该空间的一个点(或向量),所有这种位移函数的全体就构成一个无限维空间.这说明,研究弦的微小振动问题就需要利用无限维空间,很多类似的实际问题都可以用上述观点来研究.

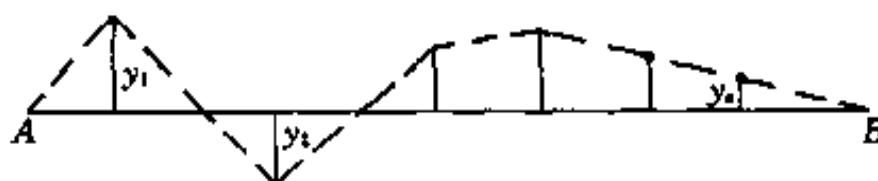


图 1.1

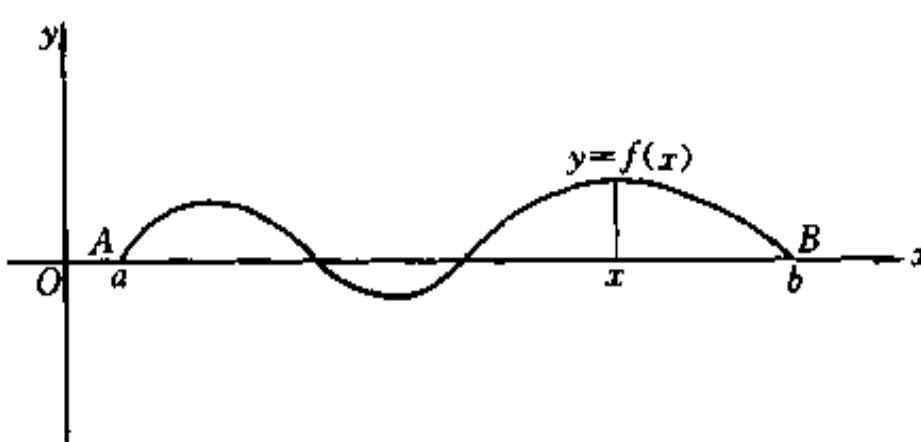


图 1.2

把一个函数看成无限维空间的一个点(元素或向量),是 20 世纪发展起来的现代数学最重要的思想之一.在此基础上,产生了分析学的一个新分支——泛函分析,由于它在各个学科的成功应用,已成为现代数学的三大基础之一.为了说明在数学中引入这种无限维的函数空间的优越性,下面再举一个例子.

在第七章中曾介绍过向量微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

解的存在唯一性定理.这个定理的证明可以转化为连续函数空间(是一个无限维空间)上压缩映射不动点的存在唯一性问题.事实上,求解初值问题(1.1)等价于寻求一个定义在含 t_0 的区间上的连续函数 $x(t)$,使它满足方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (1.2)$$

如果把 $x(t)$ 看成函数空间 $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ ($\delta > 0$) 中的点,令

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

则 $(Tx)(t)$ 自然是 $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ 中的点. 对于 $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ 中的不同点 x , 一般来说, 就有 $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ 中的不同点 $y = Tx$ 与它相对应. 因此, T 可以看成是从空间 $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ 到自身的一个映射, 即 $T: C([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \rightarrow C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$. 这样, 方程(1.2)可以表示为

$$(Tx)(t) = x(t), t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

方程(1.2)(或初值问题(1.1))的解的存在唯一性问题就转化为映射 T 的不动点的存在唯一性问题, 关于这个问题的详细证明在本章第二节中给出. 当然, 问题的最终解决还需要将有限维空间的许多概念与方法推广到无限维空间中去. 虽然推广到无限维空间以后几何直观性已经消失, 但还保留着某些类似的几何概念与思想方法.

1.3 数学中空间概念的含义

在数学中虽然定义了各种各样的空间, 但是并没有对空间概念给出统一的严格定义. 通常所谓“空间”是指某种对象(函数、图形、向量、状态等)的一个集合, 在这个集合中建立了(规定了)对象(元素)间的一种或几种数学结构^①. 空间与集合不同, 集合只是把一些具有某种共同特性的元素聚集在一起, 元素之间并没有什么联系, 好像是由一些无组织无纪律的“散兵游勇”集中在一起的“乌合之众”; 而空间则是通过其中的数学结构建立了元素与元素之间的关系. 例如, 线性代数中的线性空间就是在集合 X 上建立了一种代数结构——线性结构, 也就是在 X 上定义了元素间的加法和数乘两种代数运算(线性运算), 从而可以定义元素之间的线性关系(线性相关与线性无关等).

推动抽象空间理论发展的一个重要因素是公理化. 19世纪数学的各个分支积累了大量的实际材料, 通过对不同方面的材料的分析, 人们发现了它们之间的相似性和联系, 认识到用统一的观点去理解和概括它们的必要性和可能性, 促进了公理化方法的发展. 例如, 在三维空间 \mathbf{R}^3 中, 向量的加法运算与数乘运算满足一些带有普遍性的规律, 即加法的交换律与结合律, 数乘的结合律, 数乘关于加法的分配律, 加法存在着零元、负元, 数乘存在着单位元等. 不仅如此, 其他诸如在次数不超过 n 的多项式的全体所构成的集合中, 多项式的加法运算以及多项式与数的乘法运算; 在区间 $[a, b]$ 上连续函数全体构成的集合 $C([a, b])$ 中, 函数的加法运算以及函数与数的乘法运算等, 都具有同样的性质. 人们将这些共同的性质集中起来加以概括, 用公理的形式抽象出一种代数结构, 这就是所谓线性结构, 具有线性结构的集合就是线性空间. 由于线性空间中的加法和数乘是用一

^① 所谓数学结构通常是指数学运算、法则、关系等.

些公理来定义的,因此,线性空间是一个非常抽象的空间.但是,由于它抓住了线性运算的本质属性进行统一研究,因此,所得到的结果能用于任何一个具体的线性问题,使得线性空间这个重要概念在现代科学中得到了广泛的应用.高度的抽象性与广泛的应用性是相辅相成的,这是现代数学的一个重要特征.

代数结构是一种基本的数学结构.除此之外,数学中还有三种基本结构,就是所谓拓扑结构、序结构和测度结构.由这四种结构相互交错相互结合又可以派生出许许多多不同的数学结构.用结构的观点来统观数学对现代数学的发展产生了深远的影响,是 20 世纪发展起来的现代数学的显著标志之一.本章不可能对各种各样的数学结构作全面的介绍,后面几节中,我们简要介绍在线性空间中由范数与内积诱导出的拓扑结构和相应的拓扑空间——赋范线性空间与 Hilbert 空间.

空间概念的推广,使得“空间”这个术语有了两重含义:一方面,是普通的现实空间,即物质存在的普遍形式;另一方面,是数学中的抽象空间,即定义了数学结构的某种对象的集合.后者是前者的推广,虽然它已不再具有现实空间的几何直观性,但是仍然能使我们在研究各种各样的问题时利用几何的概念和思想.抽象空间理论已成为研究许多理论和实际问题的重要数学方法.

第二节 赋范线性空间与压缩映射原理

本节从内积空间出发,由内积诱导出的范数的基本特征,抽象出一类重要的拓扑空间——赋范线性空间,讨论该空间的收敛性与完备性,介绍压缩映射原理及其应用.

2.1 内积空间

在线性代数中,通过将 n 维 Euclid 空间 \mathbf{R}^n 中内积的基本性质加以抽象,用公理的形式在线性空间中引入了内积的概念,定义了内积空间,研究了内积空间的一些初步性质,现将有关概念及性质简要概述如下.

本书中所涉及的数域 \mathbf{K} 是指实数域 \mathbf{R} 或复数域 \mathbf{C} .

定义 2.1(内积空间) 设 X 是数域 \mathbf{K} 上的线性空间,如果对于每一元素对 $x, y \in X$,存在着 \mathbf{K} 中唯一的数与它们相对应,记作 $\langle x, y \rangle$,并且对于任意的 $x, y, z \in X$ 与数 $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$,满足下述条件(称为内积公理):

- (1) 共轭对称性 $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};$
- (2) 对第一变元的线性性 $\langle ax + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle;$

(3) 非负性 $\langle x, x \rangle \geq 0$, 且 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta^{\textcircled{1}}$.

那末, 称 $\langle x, y \rangle$ 为 x 与 y 的内积. 定义了内积的线性空间 X 称为内积空间. 内积空间的元素又称为点或向量.

由内积公理易得:

(4) 对第二变元的共轭线性性

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle;$$

$$(5) \langle x, \theta \rangle = \langle \theta, y \rangle = 0.$$

当 K 为实数域 R 时, 称 X 为实内积空间(实 Euclid 空间). 此时, 内积公理(1)变为:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

(4) 变为对第二变元的线性性: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$.

当 K 为复数域 C 时, 称 X 为复内积空间(复 Euclid 空间或酉空间).

定理 2.1 设 X 为内积空间, 则对任意的 $x, y \in X$, 都满足 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}, \quad (2.1)$$

其中等号成立的充要条件是 x 与 y 线性相关.

证 当 $y = \theta$ 时, 由(5)知(2.1)式成立. 现设 $y \neq \theta$, 则对任意的 $\alpha \in K$, 有

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - \bar{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha \langle y, x \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle y, y \rangle.$$

取 $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$, 代入上式后再利用共轭对称性便得

$$\langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \geq 0,$$

从而可得不等式(2.1).

定理中其余的结论留给读者证明. ■

定义 2.2 设 X 是内积空间, $x \in X$, 称由等式

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

定义的映射 $\|\cdot\|: X \rightarrow R$ 为 X 上由内积诱导出的范数, 称数 $\|x\|$ 为 x 的范数. 由内积诱导出的范数称为 Euclid 范数.

利用范数, Cauchy-Schwarz 不等式可以写成如下形式:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \quad (2.2)$$

^① θ 表示线性空间 X 中的零元.

定理 2.2 内积空间 X 上由内积诱导出的范数具有下列基本性质:

- (1) 非负性 $\|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
- (2) 绝对齐性 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- (3) 三角不等式 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

其中 $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.

证 (1) 可由内积的非负性直接得到. 再由内积对第一变元的线性与对第二变元的共轭线性可知

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \bar{\alpha} \alpha \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2,$$

从而证得(2). 又因为

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2,\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle$ 表示复数 $\langle x, y \rangle$ 的实部. 根据 Cauchy-Schwarz 不等式(2.2),

$$\operatorname{Re}\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

所以

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

故知三角不等式成立. ■

定理 2.3 在内积空间 X 中, 由内积诱导出的范数满足:

- (1) 平行四边形公式 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$;
- (2) 极化恒等式 当 X 是实内积空间时,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2);$$

当 X 是复内积空间时,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2).$$

定理中的几个等式都可以通过直接计算得到, 由读者自己去验证.

平行四边形公式就是平面几何中“平行四边形两条对角线长度的平方和等于两邻边长度平方和的二倍”这一事实的直接推广. 我们知道, 内积空间中的范数是由内积诱导出来的; 反过来, 极化恒等式表明内积又可用由它诱导出的范数来表示.

内积空间的概念是相当广泛的, 下面举两个例子.

例 2.1 我们知道, n 维实(复)向量空间 $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ 按照向量的加法和数乘构

成线性空间, 定义向量 x 与 y 的内积为

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k,$$

容易验证它满足内积公理, 因此 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 是一个内积空间. $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 中由内积诱导出的范数为

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

它就是 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 中向量 x 的长度. 在 \mathbf{R}^n 与 \mathbf{C}^n 中 Cauchy-Schwarz 不等式为:

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \| \quad (2.3)$$

例 2.2 平方可和数列空间 ℓ^2 是指满足条件 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$ 的实(或复)数列 $|x_n|$ 全体所构成的集合:

$$\ell^2 = \{x = |x_n| \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty, x_n \in \mathbf{K}, n \in \mathbf{N}_+ \}.$$

容易验证, 在 ℓ^2 中按照第一节中定义的加法与数乘构成线性空间. 定义

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n, \quad (2.4)$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式(2.3)得

$$\sum_{k=1}^n |x_k \bar{y}_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

因此, (2.4)式右端的级数是收敛的. 进一步不难验证由(2.4)式定义的 $\langle x, y \rangle$ 满足内积公理, 故 ℓ^2 是一个内积空间. ℓ^2 中由内积诱导出的范数为:

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

相应的 Cauchy-Schwarz 不等式为

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

上述事实表明, ℓ^2 空间是 \mathbf{R}^n 空间的推广. \|

2.2 赋范线性空间

上面已经看到, 在线性空间中若能引入内积, 则元素(向量)的范数可以用内

积来定义.如果其中不能引入内积(见下面的例 2.3),能否定义元素的范数呢?元素的范数是否必须用内积来定义呢?下面来讨论这个问题.例 2.1 告诉我们,在二维空间 \mathbb{R}^2 中由内积诱导出的向量 $x = (x_1, x_2)$ 的范数就是 x 的长度,也就是该向量在平面 \mathbb{R}^2 上所对应的点 x 到原点 $\theta = (0, 0)$ 的距离,即

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} = \rho_2(x, \theta).$$

这个距离 $\rho_2(x, \theta)$ 表示 x 与 θ 之间的直线距离.但在许多问题中仅考虑两点间的直线距离是不符合实际需要的.例如,城市内的公共汽车不可能全走直线,往往要走折线.因此,计算两地间沿汽车线路的距离就要用折线距离.这启发我们在 \mathbb{R}^2 中点 x 到原点 θ 的距离即向量 x 的范数用

$$\rho_1(x, \theta) = |x_1| + |x_2| = \|x\|_1$$

来定义(图 2.1).可以证明,这样的范数

不能由内积诱导出来(见例 2.3).因此,需要避开内积来直接定义范数.在有限维空间中,向量的范数就是向量的长度.从几何直观上看,向量的长度具有定理 2.2 中由内积诱导出的范数的三个性质,而且这些性质也是向量长度的基本属性.因此可以从这些性质出发,用公理的形式直接定义线性空间中元素的范数,建立一类比内积空间更为广泛的空间——赋范线性空间.

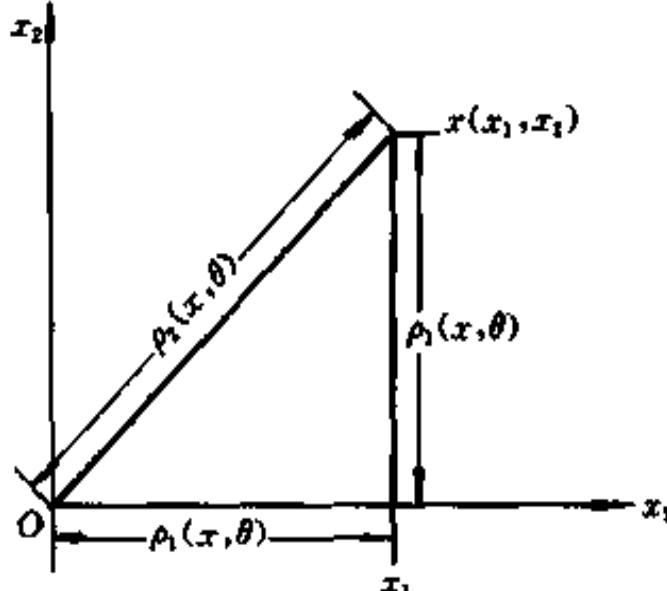


图 2.1

定义 2.3(赋范线性空间) 设 X 是数域 K 上的线性空间.如果对于每个元素 $x \in X$,存在着 K 中唯一的数与它相对应,记作 $\|x\|$,并且对于任意的 $x, y \in X$ 与数 $\alpha \in K$,满足下述条件(称为范数公理):

- (1) 非负性 $\|x\| \geq 0$ 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
- (2) 绝对齐性 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- (3) 三角不等式 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

那末,称 $\|x\|$ 为 x 的范数,定义了元素范数的线性空间 X 称为赋范线性空间.

当 K 为实数域 \mathbb{R} 时,称 X 为实赋范线性空间;当 K 为复数域 \mathbb{C} 时,称 X 为复赋范线性空间.赋范线性空间中的元素也称为点或向量.

由定理 2.2 知,内积诱导出的范数满足范数公理,因而内积空间是赋范线性空间. n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 与平方可和数列空间 l^2 分别按照例 2.1 与例 2.2 中的范数构成赋范线性空间.但是赋范线性空间却不一定都是内积空间,就是说,其

中不一定能定义一个内积,使元素的范数恰好由它的内积诱导出来.

例 2.3 在线性空间 \mathbb{R}^2 中, 定义

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|,$$

其中 $x = (x_1, x_2)$, 则 $\|x\|_1$ 是 x 的范数. 事实上, 它显然满足范数公理(1)与(2). 设 $y = (y_1, y_2)$, 则

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= |x_1+y_1| + |x_2+y_2| \\ &\leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = \|x\|_1 + \|y\|_1,\end{aligned}$$

故知三角不等式也成立. 因此, $\|x\|_1$ 是 x 的一个范数. 读者不难验证, 在 \mathbb{R}^2 中, 按照范数 $\|\cdot\|_1$, 元素 $x = (1, 0)$ 与 $y = (0, 1)$ 不满足平行四边形公式, 因此, 由定理 2.3 易知范数 $\|\cdot\|_1$ 不能由内积诱导出来. 类似可以证明

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

也是 x 的一个范数. 这就是说, 线性空间 \mathbb{R}^2 按照 $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 都构成赋范线性空间. ■

例 2.4 p 方可和数列空间 l^p ($1 \leq p < +\infty$) 是指满足条件 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ 的实(或复)数列 $|x_n|$ 全体所构成的集合:

$$l^p = \{x = \{x_n\} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty, x_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_+\}.$$

在 l^p 中定义加法和数乘如下:

$$\begin{aligned}x+y &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n, \dots), \\ ax &= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n, \dots).\end{aligned}$$

显然, $ax \in l^p$, 下面证明 $x+y \in l^p$. 事实上, 由于

$$|x_n+y_n|^p \leq (|x_n|+|y_n|)^p \leq 2^p [\max\{|x_n|, |y_n|\}]^p \leq 2^p (|x_n|^p + |y_n|^p),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p \leq 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right) < +\infty.$$

进一步可以验证, l^p 按照上面定义的加法和数乘运算构成一个线性空间, 其中零元 θ 是指各项均为 0 的数列.

定义

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

显然它满足范数公理(1)与(2). 根据级数形式的 Minkowski 不等式(见参考文献 [19])

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

立即得知它也满足三角不等式: $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. 因此, $\|x\|_p$ 是 x 的范数, 故 l^p 按照该范数构成赋范线性空间. ■

例 2.5 连续函数空间 $C([a,b])$. 我们已经知道, $C([a,b])$ 表示 $[a,b]$ 上连续函数 $x = x(t)$ 的全体所构成的集合. 不难验证, 按照通常的函数加法和函数与数的乘法:

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), (ax)(t) = ax(t), t \in [a,b],$$

$C([a,b])$ 是一个线性空间(其中零元 θ 是在 $[a,b]$ 上恒等于 0 的函数). 在 $C([a,b])$ 中定义

$$\|x\| = \max\{|x(t)|, t \in [a,b]\},$$

读者容易验证, 它满足范数公理. 因此, $C([a,b])$ 按此范数构成一个赋范线性空间. ■

可以证明, 空间 l^p ($p \neq 2$) 与 $C([a,b])$ 中的上述范数不能由内积诱导出来. 另外, 在同一个线性空间中可以根据需要用不同的方法来定义范数, 使之成为不同的赋范线性空间. 例如, 在 $C([a,b])$ 中, 容易验证,

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt, x(t) \in C([a,b])$$

也是一个范数. 类似于例 2.3, 在 \mathbb{R}^n 中除 Euclid 范数外还可以用

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \text{ 或 } \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

来定义 x 的范数, 因此, \mathbb{R}^n 按照 $\|\cdot\|_\infty$ 与 $\|\cdot\|_1$ 都是赋范线性空间. 在同一线性空间中赋予不同的范数, 空间的结构也不相同. 今后, 如无特别说明, 凡论及 \mathbb{R}^n, l^2, l^p 及 $C([a,b])$ 等空间时, 其中的范数均指例 2.1、例 2.2 及例 2.4、例 2.5 中所定义的范数.

2.3 赋范线性空间的收敛性与拓扑结构

类比于 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n , 在一般的赋范线性空间中, 也可以利用范数引

人两点之间的距离,进而研究收敛性以及闭集和开集的性质.

设 X 为赋范线性空间, $x, y \in X$ 是任意两点, 称

$$\rho(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x - y\|$$

为 x 与 y 之间的距离. 利用范数公理容易证明, 距离有下述性质:

- (1) 非负性 $\rho(x, y) \geq 0$, 且 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (2) 对称性 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- (3) 三角不等式 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X$.

定义 2.4(点列极限) 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 中的一个点列, $a \in X$ 是一点. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\| = 0,$$

或用 $\epsilon-N$ 语言来表述, 就是

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall n > N, \text{恒有 } \|x_n - a\| < \epsilon, \quad (2.5)$$

则称点列 $\{x_n\}$ 按范数收敛于 a , 称 a 为它的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

赋范线性空间中点列的收敛性也具有 n 维 Euclid 空间 \mathbf{R}^n 中点列收敛性所具有一些基本性质, 而且证明方法也类似.

定理 2.4 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 中的收敛点列, 则

- (1) $\{x_n\}$ 的极限是唯一的;
- (2) $\{x_n\}$ 是有界点列, 即 $\exists M > 0$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 恒有 $\|x_n\| \leq M$;
- (3) 若 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则它的任一子列也收敛于 a .

证 仅以(1)为例说明证法, 其余留给读者. 设 $x_n \rightarrow a$, 并且 $x_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$). 根据三角不等式, $\forall n \in \mathbb{N}_+$,

$$\|a - b\| = \|a - x_n + x_n - b\| \leq \|a - x_n\| + \|x_n - b\|.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则必有 $\|a - b\| = 0$, 因此 $a = b$. ■

下面讨论几个具体赋范线性空间中点列按范数收敛的含义.

第五章第一节中已经证明, \mathbf{R}^n 中点列按范数收敛等价于按坐标收敛. 用类似的方法可以证明, 在空间 l^p ($1 \leq p < +\infty$) 中点列按范数收敛也等价于按坐标(分量)收敛.

在空间 $C([a, b])$ 中, 若点列 $\{x_n\}$ (其中 $x_n = x_n(t) \in C([a, b])$) 收敛于 $x = x(t) \in C([a, b])$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| = 0,$$

从而

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall n > N(\epsilon), \text{恒有 } \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| < \epsilon,$$

即

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall n > N(\epsilon), \forall t \in [a, b], \text{恒有 } |x_n(t) - x(t)| < \epsilon,$$

因此, 函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $x(t)$.

易见, 上述推理过程反过来也成立. 所以, 在空间 $C([a, b])$ 中点列按范数收敛等价于函数列在 $[a, b]$ 上一致收敛.

有了范数和点列收敛的概念, 就可以把空间 \mathbf{R}^n 中的闭集与开集等有关概念和性质推广到赋范线性空间中来. 由于这些概念的定义及定理的证明几乎可以逐字逐句地移植过来, 因此, 为了节省篇幅, 这里不再赘述, 希望读者参照第五章第一节把它们写出来. 值得注意的是, 虽然它们在表述形式上与空间 \mathbf{R}^n 中的有关概念和定理几乎完全一样, 但是, 推广到一般的赋范线性空间 X 中后, 已不具有像在 \mathbf{R}^n 中那样的几何直观性, 而且有更丰富的内涵. 例如, 在无限维赋范线性空间 X 中, 很难画出以 a 为中心, δ 为半径的开球(或 a 的 δ 邻域) $U(a, \delta) = \{x \in X \mid \|x - a\| < \delta\}$ 的几何图形. 即使在不高于三维的空间中, 它的几何图形的形状也随其中范数的不同而不同. 例如, 在二维空间 \mathbf{R}^2 中, 按照 Euclid 范数 $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, 开单位球 $U((0, 0), 1)$ 是以原点 $(0, 0)$ 为中心、1 为半径的单位圆盘 $x_1^2 + x_2^2 < 1$ (图 2.2(a)); 若按照范数 $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, 则 $U((0, 0), 1)$ 就是正方形 $|x_1| < 1, |x_2| < 1$ (图 2.2(b)); 若按照范数 $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$, 则 $U((0, 0), 1)$ 就是以 $|x_1| + |x_2| = 1$ 为边界的正方形的内部 (图 2.2(c)). 可见, 开球(或邻域)被推广到赋范线性空间以后变得非常抽象了. 其他的概念也有类似的情况.

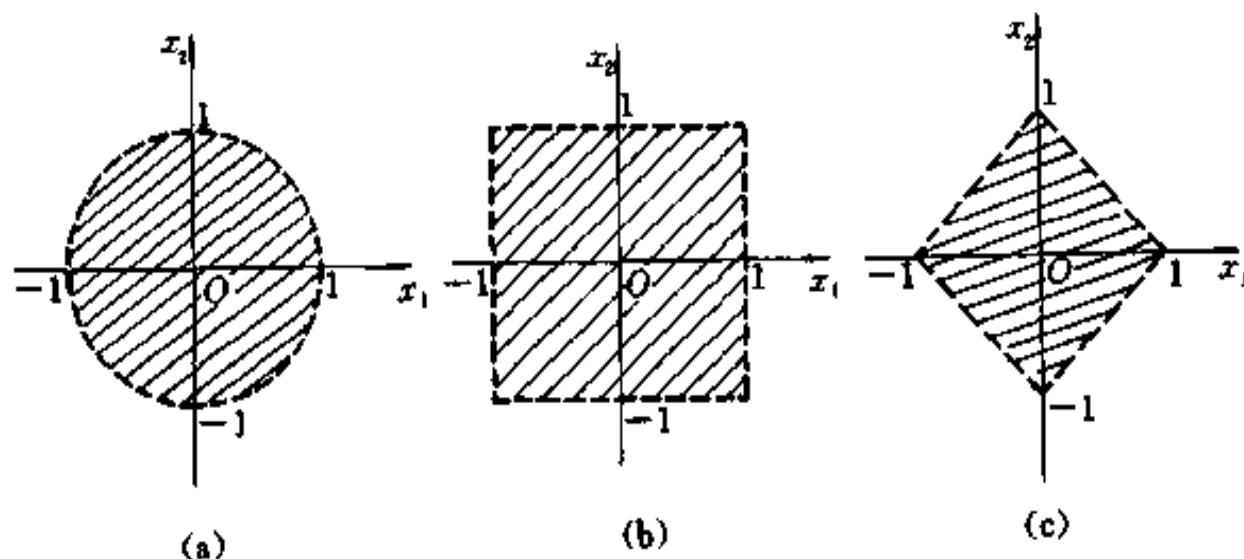


图 2.2

下面,再将函数的连续性概念推广到赋范线性空间中来.

定义 2.5(连续映射) 设 X 与 Y 都是赋范线性空间, 分别以 $\|\cdot\|_X$ 与 $\|\cdot\|_Y$ 为范数, $T: X \rightarrow Y$ 是一个映射, $x_0 \in X$. 若

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得 } \forall x \in U(x_0, \delta) \cap X, \text{恒有 } \|Tx - Tx_0\|_Y < \epsilon, \quad (2.6)$$

则称映射 T 在 x_0 处连续. 若 T 在 X 中的每一点连续, 则称 T 在 X 上连续, 此时, 称 T 为 X 上的连续映射(或连续算子). 若 $Y = \mathbb{R}$, 则称 T 为 X 上的连续泛函.

如果 $X = Y = \mathbb{R}$, 那末 T 就是一元连续函数; 如果 $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, 那末 T 就是 n 元连续函数; 如果 $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, 那末 T 就是 n 元向量值连续函数.

下面的定理给出了刻画连续映射的一些等价条件.

定理 2.5 设 X 与 Y 都是赋范线性空间, $T: X \rightarrow Y$ 是一个映射. 下列命题是等价的:

- (1) 对 X 中的任一点列 $\{x_n\}$, 当 $x_n \rightarrow x_0$ 时, $Tx_n \rightarrow Tx_0$ ($n \rightarrow \infty$);
- (2) T 在 $x_0 \in X$ 处连续;
- (3) 对于 Tx_0 的任一 ϵ 邻域 $U(Tx_0, \epsilon)$, 存在 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0, \delta)$, 使得 $TU(x_0, \delta) \subseteq U(Tx_0, \epsilon)$, 其中

$$TU(x_0, \delta) = \{Tx \mid x \in U(x_0, \delta)\}.$$

证明可按照 $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ 的步骤由读者完成.

例 2.6 设 $X = C([a, b])$, 证明: 由

$$x^*(x) = \int_a^b x(t) dt, \quad x = x(t) \in C([a, b])$$

定义的映射 $x^*: C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ 是 $C([a, b])$ 上的一个线性连续泛函.

证 在第三章第二节中已经说明, x^* 是 $C([a, b])$ 上的线性泛函, 下面证明它的连续性. 在 $C([a, b])$ 中任取 $x = x(t), y = y(t)$, 由于

$$\begin{aligned} |x^*(x) - x^*(y)| &\leq \int_a^b |x(t) - y(t)| dt \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \int_a^b dt \\ &= (b - a) \|x - y\|, \end{aligned}$$

因此, 根据定义 2.5, x^* 在 $C([a, b])$ 上连续. ■

下面的两个定理分别说明了赋范线性空间中范数和内积空间中内积都是连续泛函.

定理 2.6(范数的连续性) 设 X 是赋范线性空间, $\{x_n\} \subseteq X$, 若 $x_n \rightarrow x$, 则 $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

证 利用范数公理中的三角不等式容易证明(由读者补证)

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|.$$

由已知, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, 故 $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. ■

定理 2.7(内积的连续性) 设 X 是内积空间, 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都是 X 中的点列, 且 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, 则 $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle (n \rightarrow \infty)$.

证 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

由已知 $\|x_n - x\| \rightarrow 0, \|y_n - y\| \rightarrow 0$, 所以有

$$\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle (n \rightarrow \infty). \quad \blacksquare$$

2.4 空间的完备性

在第一章中我们就曾指出, 极限理论必须在实数集 \mathbb{R} 上来研究, 这是因为实数集具有完备性. 极限运算在实数集中是封闭的, 就是说, 任何实数列的极限仍然是实数. 但是, 有理数列的极限却不一定是有理数, 因为有理数集没有完备性. 在一般的抽象空间中, 极限运算是否也是封闭的呢? 是否任何一个抽象空间都具有“完备性”呢? 下面我们来研究这个问题.

刻画实数完备性有许多方法, 其中 Cauchy 收敛原理是仅需距离而无需其他概念的最为简洁的方法, 因此, 现代数学中都用这个原理作为空间完备性的定义.

定义 2.6 设 X 是赋范线性空间, $\{x_n\} \subseteq X$ 是一个点列. 如果

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall m, n > N, \text{恒有 } \|x_m - x_n\| < \epsilon, \quad (2.7)$$

那末称 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个基本列或 Cauchy 列. 若 X 中的每个基本列都收敛于 X 中的点, 则称 X 是完备的赋范线性空间, 或 Banach 空间.

若 X 是内积空间, 按照由内积诱导出的范数构成完备的赋范线性空间, 则称 X 是完备的内积空间, 或 Hilbert 空间.

与实数基本列类似, 在赋范线性空间中基本列也具有下列性质:

- (1) 基本列都是有界的;
- (2) 收敛点列都是基本列.

根据第五章定理 1.5 易知, n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 是 Banach 空间, 也是 Hilbert 空间.

例 2.7 证明: $C([a, b])$ 是 Banach 空间.

证 设 $\{x_n\}$ 是 $C([a, b])$ 中的基本列, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\forall m, n > N$, 恒有

$$\|x_m - x_n\| = \max_{t \in [a, b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon.$$

从而 $\forall t \in [a, b], |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon$.

根据函数列的 Cauchy 一致收敛原理(第四章习题 4.2(A)第 12 题), 存在着 $x(t) \in C([a, b])$, 使 $|x_n(t)|$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $x(t)$. 又因为 $C([a, b])$ 中点列收敛等价于函数列的一致收敛, 故点列 $|x_n|$ 收敛于 $C([a, b])$ 中的点 x , 所以 $C([a, b])$ 是 Banach 空间. ■

在实际应用中很多非常重要的空间都是完备的. 例如, 可以证明 l^p 是 Banach 空间, l^2 是 Hilbert 空间. 但是, 确实还存在着不完备的赋范线性空间. 例如, 设 X 为有理数集, 按照通常数的加法与乘法构成有理数域上的线性空间. 对于 $x \in X$ 定义范数为 $\|x\| = |x|$, 则 X 是赋范线性空间, 前面已经指出, 它是不完备的. 下面再举一例.

例 2.8 证明:集合 $C([-1, 1])$ 按照通常函数的加法和数与函数的乘法以及范数

$$\|x\| = \int_{-1}^1 |x(t)| dt, x(t) \in C([-1, 1])$$

构成不完备的赋范线性空间.

证 不难验证 $C([-1, 1])$ 是一个赋范线性空间(证明留给读者). 为证明此空间不完备, 只要在该空间中找出一个不收敛于 $C([-1, 1])$ 中点的 Cauchy 列即可. 构造函数列(图 2.3(a))如下:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right), \\ nt, & t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ 1, & t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

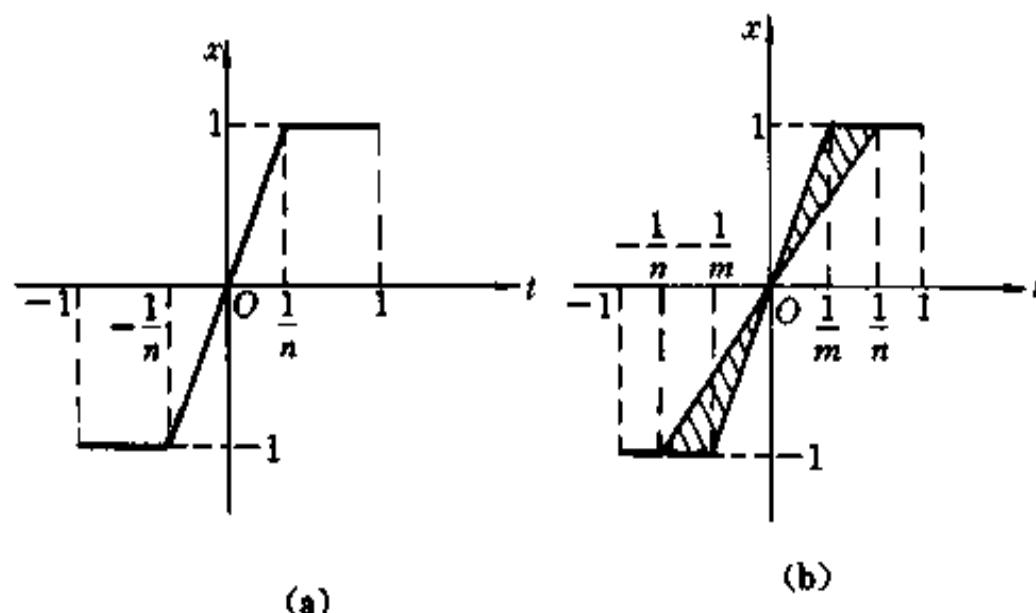


图 2.3

显然, $x_n(t) \in C([-1, 1])$. 不妨设 $m > n$, 则

$$\|x_m - x_n\| = \int_{-1}^1 |x_m(t) - x_n(t)| dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)$$

(上式左端为图 2.3(b) 中阴影部分的面积), 因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 但它不收敛于 $C([-1, 1])$ 中的点. 事实上, 函数列 $|x_n(t)|$ 的极限为间断函数 ($t=0$ 为间断点)

$$x(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, 0), \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t \in (0, 1], \end{cases}$$

这是因为

$$\|x_n - x\| = \int_{-1}^1 |x_n(t) - x(t)| dt = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \blacksquare$$

在第三章中, 我们曾用 $\mathcal{R}([a, b])$ 表示区间 $[a, b]$ 上所有 Riemann 可积函数构成的集合, 容易验证, 按照通常的函数加法和数与函数的乘法, $\mathcal{R}([a, b])$ 成为一个线性空间. 若在其中定义范数

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt, x(t) \in \mathcal{R}([a, b]),$$

则 $\mathcal{R}([a, b])$ 是一个赋范线性空间. 可以证明, 这个赋范线性空间也是不完备的, 就是说, Riemann 可积函数列的极限函数不一定是 Riemann 可积的. 因此, 在 $\mathcal{R}([a, b])$ 中极限运算不是封闭的, 这对 Riemann 积分的应用带来了不便.

设 X 是一个赋范线性空间, E 是它的线性子空间. 若 E 按照 X 中的范数也是一个赋范线性空间, 则称 E 为 X 的子空间. 若子空间 E 又是闭的, 则称 E 为 X 的闭子空间.

定理 2.8 设 E 为 Banach 空间 X 中的闭子空间, 则 E 是 X 的完备子空间. 就是说, Banach 空间的闭子空间是 Banach 空间.

证 设 $\{x_n\}$ 是 E 中的基本列. 由于 X 是完备的, 所以存在 $x \in X$, 使得 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$. 又因为 E 是闭的, 故 $x \in E$. 这就是说, $\{x_n\}$ 是 E 中的收敛点列, 因此, E 是完备的. \blacksquare

在理论研究与实际应用中, 经常会遇到与空间的完备性有关的问题. 例如, 很多实际问题常常归结为求某方程的解, 如果只能求得该方程的一系列近似解, 而且这些近似解是某函数空间 X 中的 Cauchy 列. 试问, 能否用这个近似解列来描述问题的精确解并研究精确解的性质呢? 从数学上来看, 就是要看这个近似解列的极限(精确解)是否属于该空间 X , 即 X 是否完备. 如果 X 不完备, 又能

否将 X “扩大”,使近似解列在扩大后的空间中有极限呢?这就是将空间 X “完备化”的问题.将不完备空间“完备化”的基本思路与将有理数系完备化为实数系类似,粗略地说,就是在不完备的空间 X 中“添进”一些点,“扩大”为新空间 \tilde{X} ,使得新空间中的所有 Cauchy 列都在新空间 \tilde{X} 中有极限,这个新空间 \tilde{X} 称为 X 的完备化空间.关于空间完备化定理的准确表述与证明,有兴趣的读者可参看参考文献[19].

2.5 压缩映射原理及其应用

在第一章中曾经介绍过一维空间 \mathbf{R} 上的压缩映射原理.在那里,我们已经看到,压缩映射原理不但能够用于证明函数方程根的存在唯一性,而且还给出了一种求方程近似解的有效方法——迭代法.如果仔细分析一下它的证明过程,不难发现其中主要用到三个条件:(1) 映射的压缩性;(2) 实数集 \mathbf{R} 的完备性;(3) 绝对值的三角不等式.对于任何定义在完备赋范线性空间上的压缩映射,这些条件都能得到满足.因此,可以将这个原理推广到完备的赋范线性空间.

定理 2.9(压缩映射原理) 设 X 是一个 Banach 空间, T 是将 X 映为自身的一个压缩映射,即存在常数 $k \in (0, 1)$, 使

$$\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|, \forall x, y \in X,$$

则 T 在 X 中存在唯一的不动点 \hat{x} (即 $\hat{x} = T\hat{x}$).

证 任取 $x_0 \in X$, 作迭代点列 $\{x_n\}$:

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots, \quad (2.8)$$

则 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列.事实上,因为

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n-1}\| &= \|Tx_{n-1} - Tx_{n-2}\| \\ &\leq k \|x_{n-1} - x_{n-2}\| = k \|Tx_{n-2} - Tx_{n-3}\| \\ &\leq k^2 \|x_{n-2} - x_{n-3}\| \\ &\leq \dots \leq k^{n-1} \|x_1 - x_0\|, \end{aligned}$$

所以,对于任何 $p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\| \\ &\quad + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \dots + k^n) \|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{k^n(1-k^p)}{1-k} \|x_1 - x_0\| < \frac{k^n}{1-k} \|Tx_0 - x_0\|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

由于 $k < 1$, 故 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 使当 $n > N$ 时,

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \frac{k^n}{1-k} \|Tx_0 - x_0\| < \epsilon,$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 根据空间 X 的完备性, 存在 $\bar{x} \in X$, 使 $x_n \rightarrow \bar{x}$ ($n \rightarrow \infty$).

下面证明, \bar{x} 是映射 T 的一个不动点. 事实上, 对迭代关系式 $x_n = Tx_{n-1}$ 两边取极限, 由于 T 是连续映射(读者补证), 故有 $\bar{x} = T\bar{x}$, 即 \bar{x} 是 T 的不动点.

最后证明, T 的不动点是唯一的. 用反证法, 若 T 还有另一个不动点 \bar{x}_1 , 即 $\bar{x}_1 = T\bar{x}_1$, 则

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}\| = \|T\bar{x}_1 - T\bar{x}\| \leq k \|\bar{x}_1 - \bar{x}\|.$$

因为 $k < 1$, 上式当且仅当 $\|\bar{x}_1 - \bar{x}\| = 0$ 时才成立, 由范数的非负性得知 $\bar{x}_1 = \bar{x}$.

综上所述, T 有唯一的不动点. ■

压缩映射原理证明了 Banach 空间中压缩映射不动点的存在唯一性, 因此又称它为 Banach 不动点定理. 定理的证明过程不但提供了求解的方法, 而且还可以得到近似解的误差估计. 在(2.9)式中, 令 $p \rightarrow \infty$, 就得到误差估计式:

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|Tx_0 - x_0\| (n = 1, 2, \dots). \quad (2.10)$$

如果将压缩映射原理中的映射 T 改成定义在 Banach 空间 X 的非空闭子集 F 上的压缩映射, 任取 $x_0 \in F$, 按照同样的方法可以证明, 迭代点列 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列. 由 X 的完备性与 F 的闭性, $x_n \rightarrow \bar{x} \in F$, 而且 \bar{x} 是 T 在 F 中的唯一不动点. 由此得到下面的推论:

推论 2.1 设 F 是 Banach 空间 X 中的非空闭子集. 若 T 是将 F 映为自身的压缩映射, 即存在 $k \in (0, 1)$, 使 $\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\| (\forall x, y \in F)$, 则 T 在 F 中存在唯一不动点.

压缩映射原理在研究代数方程、微分方程和积分方程解的存在唯一性及求解中都有重要的应用. 应用时, 关键的问题是如何将所讨论的问题纳入某一完备的赋范线性空间, 定义相应的映射并证明它是压缩的.

例 2.9 常微分方程解的存在唯一性

在第七章中, 已经介绍过向量形式微分方程初值问题解的存在唯一性定理, 现在利用压缩映射原理给出它的证明. 为了方便起见, 我们把这个定理重新叙述如下.

考察向量微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, f 为向量值函数. 设

$$G = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\},$$

$f \in C(G)$, 并且关于 x 满足 Lipschitz 条件:

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, (t, x_i) \in G (i=1, 2),$$

其中 Lipschitz 常数 $L > 0$. 令

$$M = \max_{(t, x) \in G} \|f(t, x)\|, h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), 0 < h^* < \min\left(h, \frac{1}{L}\right),$$

则初值问题(2.11)在区间 $[t_0 - h^*, t_0 + h^*]$ 上存在唯一的解 $x = x(t)$.

证 将初值问题(2.11)中的微分方程两端在区间 $[t_0 - h^*, t_0 + h^*]$ 上对 t 积分并代入初值条件, 得到积分方程:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, t \in [t_0 - h^*, t_0 + h^*]; \quad (2.12)$$

反之, 若将(2.12)式两端对 t 求导即得(2.11)式中的微分方程, 再将 $t = t_0$ 代入(2.12)式又得初值条件. 因此, 求解初值问题(2.11)与求解积分方程(2.12)是等价的. 于是, 证明初值问题(2.11)在区间 $[t_0 - h^*, t_0 + h^*]$ 上解的存在唯一性就转化为证明积分方程(2.12)解的存在唯一性.

由于初值问题(2.11)或积分方程(2.12)的解 $x = x(t)$ 是 $[t_0 - h^*, t_0 + h^*]$ 上的连续函数, 因此, 我们应在连续函数空间 $C([t_0 - h^*, t_0 + h^*])$ 中来讨论, 并利用积分方程(2.12)定义映射 $T: C([t_0 - h^*, t_0 + h^*]) \rightarrow C([t_0 - h^*, t_0 + h^*])$ 如下:

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, t \in [t_0 - h^*, t_0 + h^*].$$

下面证明 T 是压缩映射. 事实上,

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_2\|_C &= \max_{|t - t_0| \leq h^*} \|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)\| \\ &= \max_{|t - t_0| \leq h^*} \left\| \int_{t_0}^t [f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))] d\tau \right\| \\ &\leq \max_{|t - t_0| \leq h^*} \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))\| d\tau \right|, \end{aligned}$$

其中等式左端的 $\|\cdot\|_C$ 表示连续函数空间 $C([t_0 - h^*, t_0 + h^*])$ 中的范数, 而右端的 $\|\cdot\|$ 表示 \mathbb{R}^n 中的 Euclid 范数. 代入 Lipschitz 条件得

$$\begin{aligned}\|Tx_1 - Tx_2\|_C &\leq \max_{|t-t_0| \leq h^*} \left| \int_{t_0}^t L \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau \right| \\ &\leq L \max_{|t-t_0| \leq h^*} \|x_1(t) - x_2(t)\| |t-t_0| \\ &\leq Lh^* \|x_1 - x_2\|_C.\end{aligned}$$

由已知 $h^* < \min\left(h, \frac{1}{L}\right)$, 故 $Lh^* < 1$, 从而得知 T 是将空间 $C([t_0 - h^*, t_0 + h^*])$ 映为自身的一个压缩映射. 根据压缩映射原理, T 在 $C([t_0 - h^*, t_0 + h^*])$ 中有唯一的不动点 $x = x(t)$, 即积分方程(2.12)在区间 $[t_0 - h^*, t_0 + h^*]$ 上有唯一的连续解 $x = x(t)$. 这就证明了初值问题(2.11)有唯一的解. ■

例 2.10 线性代数方程组解的存在唯一性.

设有线性代数方程组:

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.13)$$

若对于每个 i ,

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq k < 1,$$

证明该方程组有唯一的解.

证 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 在本节第 2.2 段中已经指出, \mathbb{R}^n 按照范数

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

构成一个赋范线性空间, 而且是完备的(习题 8.2(A)第 14 题). 定义映射 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 如下:

$$Tx = Ax + b,$$

其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$. 则对

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ 与 } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

有

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j - y_j| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j| \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq k \|x - y\|_\infty.\end{aligned}$$

所以, T 是从 \mathbb{R}^n 到自身的压缩映射, 故有唯一的不动点, 即方程组(2.13)有唯

一的解. 这个解的近似值可以通过任取初值 $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})^T \in \mathbb{R}^n$ 由迭代点列

$$x_{m,i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{m-1,j} + b_i \quad (i=1, 2, \dots, n; m=1, 2, \dots)$$

求得. ■

习题 8.2

(A)

1. 证明: 在实连续函数空间 $C([a, b])$ 中, 关系式

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y(t) dt$$

定义了函数 $x = x(t)$ 与 $y = y(t)$ 的一个内积, 从而 $C([a, b])$ 构成一个实内积空间.

2. 在复内积空间 X 中, 试由内积公理证明: 内积对于第二变元具有共轭线性性质, 即

$$\langle x, ay + bz \rangle = \bar{a}\langle x, y \rangle + \bar{b}\langle x, z \rangle.$$

3. 设 X 是内积空间, 证明: 由内积诱导的范数满足平行四边形公式.

4. 设 X 是实内积空间, $x, y \in X$. 证明:

$$(1) \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ (勾股定理);}$$

$$(2) \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2.$$

5. 证明: 在线性空间 \mathbb{R}^n 中,

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \text{ 与 } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

都是 $x \in \mathbb{R}^n$ 的范数, 因而 \mathbb{R}^n 按照这两种范数分别构成赋范线性空间.

6. 有界数列全体构成的集合

$$l^\infty = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid x_n \in \mathbb{R}, \sup_{n \in \mathbb{N}_+} |x_n| < +\infty\}$$

按照通常数列的加法和数与数列的乘法构成线性空间. 证明: (1) 关系式

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}_+} |x_n|, x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^\infty$$

定义了 l^∞ 上的一个范数, 从而 l^∞ 构成一个赋范线性空间(称为有界数列空间); (2) 在 l^∞ 中点列按范数收敛等价于按坐标收敛.

7. 在平面 \mathbb{R}^2 中, 能否用下列关系式定义 $x = (x_1, x_2)$ 的范数?

$$(1) \|x\|_1 = \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|};$$

$$(2) \|x\|_2 = \begin{cases} |x_1|, & x_2 = 0, \\ |x_1| + |x_2|, & x_2 \neq 0. \end{cases}$$

8. 试用图形表示实连续函数空间 $C([a, b])$ 中的开球 $U(x_0, 1)$, 其中 $x_0 = x_0(t) \in C([a, b])$.

9. 证明: 赋范线性空间中的任一开球 $S(x_0, r)$ 是凸开集(赋范线性空间 X 中的集合 A 称为凸的, 若 $\forall x_1, x_2 \in A, t \in [0, 1]$, 都有 $tx_1 + (1-t)x_2 \in A$).

10. 证明: 赋范线性空间 X 中任一凸集 A 的内部 A° 是凸开集.

11. 设 X 为赋范线性空间, $x_n, y_n, x, y \in X (n \in \mathbb{N}_+)$. 若数列 $\lambda_n \rightarrow \lambda$, 且 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y (n \rightarrow \infty)$, 证明: $\lambda x_n \rightarrow \lambda x, x_n \pm y_n \rightarrow x \pm y, \lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$.

12. 证明定理 2.5.

13. 证明: 在赋范线性空间中, 任何收敛点列都是基本列; 任何基本列都是有界的.

14. 证明: \mathbb{R}^n 按照范数 $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ 构成 Banach 空间.

15. 证明: 有界数列空间 l^∞ (见第 6 题) 是 Banach 空间.

16. 设线性代数方程组 (2.13) 满足条件

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}^2 < 1,$$

试证明该方程组存在唯一的解.

17. 设 $f \in C([a, b]), K \in C([a, b] \times [a, b]), M = \max_{(t, \tau) \in [a, b] \times [a, b]} |K(t, \tau)|$. 证明: 第二类 Fredholm 方程

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

当参数 λ 满足 $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ 时, 存在唯一解 $x = x(t) \in C([a, b])$.

(B)

1. 设 X 是任一集合, 若对任意的 $x, y \in X$, 都存在一个实数与它们相对应, 记作 $\rho(x, y)$, 并且满足下列条件(称为距离公理):

- (1) 非负性 $\rho(x, y) \geq 0$, 且 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (2) 对称性 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- (3) 三角不等式 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

则称 $\rho(x, y)$ 为 x 与 y 之间的距离, 并称定义了距离的集合 X 为距离空间或度量空间. 证明: n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n , 连续函数空间 $C([a, b])$ 与 p 方可和数列空间 l^p 都是距离空间.

2. 设在线性空间 X 中定义了两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 若存在着正常数 m 与 M , 使得

$$m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是两个等价的范数. 证明:

(1) 在 \mathbb{R}^n 中, 下面三个范数:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

都是等价的;

(2) 在线性空间 X 中两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价的充要条件是: 对 X 中的点列 $\{x_n\}$, $\|x_n\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x_n\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

3. 证明: 赋范线性空间中的任何完备子空间必是闭子空间.

4. 设 X 是 Banach 空间, $\{\bar{S}(x_n, r_n)\}$ 是一个闭球套, 即

(1) $\bar{S}(x_1, r_1) \supseteq \bar{S}(x_2, r_2) \supseteq \cdots \supseteq \bar{S}(x_n, r_n) \supseteq \cdots$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

证明: 存在着唯一的点 $x \in X$, 使 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}(x_n, r_n)$.

5. 证明:

$$A = \{x \in C([0,1]) \mid x = x(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]\}$$

是连续函数空间 $C([0,1])$ 中的一个闭凸集.

第三节 Lebesgue 积分与 $L^p([a,b])$ 空间

在本书第三章中我们已经详细地研究了一元函数的 Riemann 积分(以后简称 R 积分), 在第六章又将它推广到多元函数. R 积分在科学技术中发挥着非常重要的作用, 很多几何量与物理量都可以用 R 积分来计算. 随着现代数学和其他科学的发展, 人们逐步发现 R 积分存在着严重的缺陷而不能满足需要, 希望建立一种应用更为方便的新积分, 这就是所谓 Lebesgue 积分(以后简称 L 积分).

建立 L 积分的方法很多, 不少教材采用完备化的方法. 上一节中已经指出, R 可积函数全体构成的赋范线性空间 $\mathcal{R}([a,b])$ 是不完备的, 将 $\mathcal{R}([a,b])$ 中的基本列的极限函数(它可能不属于 $\mathcal{R}([a,b])$)作为新的点添加到 $\mathcal{R}([a,b])$ 中就得到 $\mathcal{R}([a,b])$ 的完备化空间, 即 L 可积函数空间 $L([a,b])$. 本书采用更加直观和易于理解的方法来建立 L 积分.

3.1 从 R 积分到 L 积分

在第三章中讨论 R 积分存在条件的时候就曾指出, R 积分要求被积函数 f 在积分区间 $[a,b]$ 上函数值的变化不能“太快”, 至少急剧变化的点不能“太多”. 因此, R 积分只适用于连续函数或者间断点“不太多”的函数, 使得诸如 Dirichlet 函数这样的很多函数都被拒之于 R 可积函数类之外. R 积分对于被积函数如此苛刻的要求大大地限制了它在现代科学技术中的应用, 这是 R 积分的一个重要缺陷.

在第四章和第六章中我们还看到, 求积分与求极限, 求积分与求微分, 求积分与求积分交换顺序要求很严格的一致收敛条件. 很多函数列不具有一致收敛性, 即使有, 往往也很难验证, 这也使得 R 积分应用起来很不方便.

R 积分的种种缺陷要求人们去改造旧积分, 创立新积分. 法国数学家 Lebesgue 于 1902 年设计的积分就是其中被广为应用的一种, 后来被称为 Lebesgue 积分. 下面就来简要地说明建立这种积分的基本思想.

我们知道, 将被积函数的定义域分割为(除共公端点外)互不相交的子区间, 在每个子区间上用小矩形面积近似代替小曲边梯形的面积是 R 积分的基本思想. 这种对定义域进行分割的方法可能导致被积函数在某些子区间上变化很大, 使得用小矩形面积代替小曲边梯形面积产生很大的误差, 当被积函数具有较强的连续性时积分才可能存在. 为了避免在某些子区间上可能出现使函数振幅很大的情况, Lebesgue 改变了这种分割方法, 采用对被积函数值域进行分割的方法, 相应地定义域被分割为互不相交的子集之并, 从而能使被积函数的值在这些子集上变化不大. 现就定义在区间上的有界函数来说明这种方法.

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数, f 的值域是 y 轴上的区间 $[c, d]$. 在 $[c, d]$ 内任意插入 $n - 1$ 个点 y_1, y_2, \dots, y_{n-1} , 使

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = d,$$

则 $[c, d]$ 被分割为 n 个子区间 $[y_{i-1}, y_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 相应地, $[a, b]$ 被分割为 n 个互不相交的子集 E_i :

$$E_i = \{x \mid x \in [a, b], y_{i-1} \leq f(x) < y_i\},$$

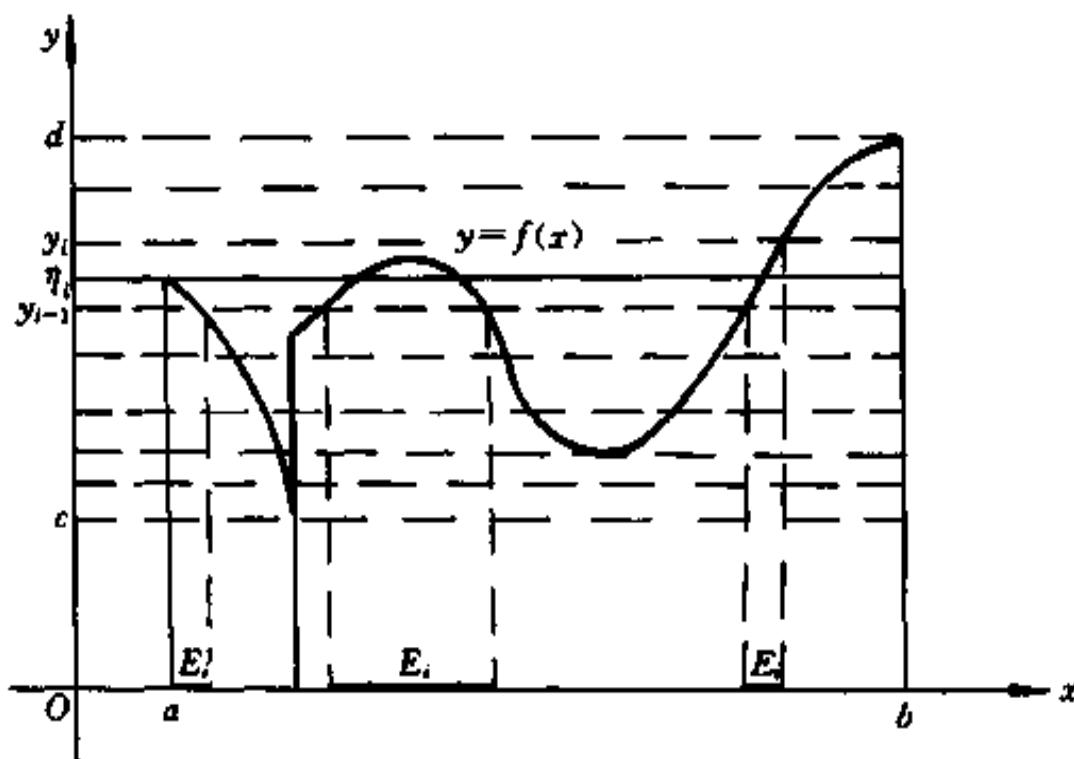


图 3.1

(图 3.1 中的 E_i 是三个子区间的并). 用 mE_i 表示集合 E_i 的“长度”, 任取 $\eta_i \in [y_{i-1}, y_i]$, 作和式:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \eta_i \cdot mE_i. \quad (3.1)$$

如果不不论对 $[c,d]$ 如何分割, 不论 η_i 如何选取, 当 $\max_{1 \leq i \leq n} |y_i - y_{i-1}| \rightarrow 0$ 时, 和式 (3.1) 都趋于同一个数, 那末就把该极限值定义为 f 在 $[a,b]$ 上的积分.

由上面的说明不难看出, 为了严格地定义 Lebesgue 积分, 必须解决两个问题. 第一个问题是: 什么是集合 E_i 的“长度” mE_i ? 在图 3.1 中, mE_i 自然可以理解为三个子区间的长度之和. 但在一般情况下, E_i 的结构可能呈现出很复杂的情况. 例如, 对于定义在区间 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的有理数,} \\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的无理数,} \end{cases}$$

按照上面的分割方法, 对应于包含函数值 1 的子区间 $[y_{i-1}, y_i)$, E_i 就是 $[0,1]$ 中的有理数集; 对应于包含函数值 0 的子区间 $[y_{i-1}, y_i)$, E_i 就是 $[0,1]$ 中的无理数集. 那末, 它们的“长度” mE_i 应当如何规定呢? 因此, 就要把“区间长度”的概念加以推广, 为点集规定一种适当的度量, 这就是所谓点集的“测度”问题.

第二个问题与第一个问题密切相关. 上面已经看到, E_i 是由被积函数 f 确定的. 为使和式 (3.1) 有意义, 必须对 f 加以限制, 使每个由 f 产生的点集 E_i 的“测度”存在, 也就是要使每个 E_i 都是“可测的”, 具有这种性质的函数就是所谓可测函数.

因此, 为了建立 Lebesgue 积分, 必须建立点集的测度与可测函数的概念. 实际上, 点集的测度与可测函数是现代数学中的两个重要概念, 测度结构也是一种重要的数学结构.

3.2 点集的 Lebesgue 测度与可测函数

首先研究点集的测度问题. 为了叙述简单起见, 下面仅就直线 \mathbf{R} 上的点集进行讨论. 实际上, 所采用的方法对于 n 维空间 \mathbf{R}^n 中的点集也是适用的.

既然点集的测度是区间长度的推广, 那末, 它应当保持区间长度的一些基本属性. 设 I 表示直线上的有限开区间 (a,b) , 自然规定它的测度为该区间的长度 $b-a$, 记作 $mI = b-a$ (实际上这样的规定对于闭区间, 半开半闭区间也是对的). 区间的长度有下列基本性质:

- (1) 非负性 $mI \geq 0$;
- (2) 完全可加性 设 $\{I_n\}$ 是一列互不相交的区间, 即 $I_i \cap I_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} mI_n.$$

因此, 非负性与完全可加性是测度必须具备的性质. 但是, 点集的测度不像区间长度那末直观. 例如, 区间 $[0,1]$ 中的有理点集的测度如何来规定就是一件很困

难的事.下面介绍 Lebesgue 所采用的方法.

定义 3.1(外测度) 设 E 是 \mathbb{R} 上的任一点集. 如果存在着一列(有限个或无限个)开区间 (a_i, b_i) , 使得 $E \subseteq \bigcup_i (a_i, b_i)$, 那末称这些开区间是点集 E 的一个覆盖. E 的每个覆盖都对应着一个确定的数 $\sum_i (b_i - a_i)$ (或 $+\infty$), 所有这些数组成一个有下界的数集, 因而必有下确界, 称这个下确界为点集 E 的外测度, 记作 $m^* E$, 即

$$m^* E = \inf \left\{ \sum_i (b_i - a_i) \mid E \subseteq \bigcup_i (a_i, b_i) \right\}. \quad (3.2)$$

由这个定义容易证明外测度有下列性质:

$$(1) \quad m^* E \geq 0, \text{ 且当 } E = \emptyset \text{ 时, } m^* E = 0;$$

$$(2) \quad \text{若 } E_1 \subseteq E_2, \text{ 则 } m^* E_1 \leq m^* E_2;$$

$$(3) \quad m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^* E_n.$$

但是外测度却不满足完全可加性. 因此, 点集的外测度虽然也是区间长度概念的一种推广, 但是, 它还不能作为点集的测度.

细心的读者可能会注意到, 定义外测度的方法与用圆的外切正多边形面积从外面收缩来逼近圆面积的方法是一致的. 这就启示我们用另一种方法, 即用圆内接正多边形面积从里面扩张来逼近圆面积的方法来定义点集的内测度. 如果外测度与内测度相等, 那末就把它们作为点集的测度. 实际上, 在第三章中也是用这种方法来定义(计算)曲边梯形面积的. 下面, 就用这种方法来定义点集的测度.

定义 3.2(测度与可测集) 设 E 是有界点集, 若 $E \subseteq [a, b]$, $\{(a_i, b_i)\}$ 是 $[a, b] \setminus E$ 的任一覆盖, 则 $[a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i)$ 就是包含在 E 中的闭集. 称

$$m_* E = \sup \left\{ (b - a) - \sum_i (b_i - a_i) \mid [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i) \subseteq E \right\} \quad (3.3)$$

为 E 的内测度. 若

$$m_* E = m^* E,$$

则称点集 E 是 Lebesgue 可测集, 简称 E 为可测集. 此时, 内外测度的共同值称为 E 的 Lebesgue 测度, 简称为 E 的测度, 记作 mE :

$$mE = m_* E = m^* E.$$

不难证明, $m_* E \geq 0$, 且 $m_* E \leq m^* E$.

如果 E 是无界点集, 它与任何开区间 $(-\alpha, \alpha)$ 的交都是可测集, 其中 $\alpha \in$

$\mathbb{R}, \alpha > 0$, 则称 E 是可测集. 此时, 定义 E 的测度为

$$mE = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} m((-\alpha, \alpha) \cap E). \quad (3.4)$$

因此, 无界可测集的测度可能是有限值, 也可能为 $+\infty$.

上面所定义的 Lebesgue 测度是区间长度概念的推广. 这不仅是因为容易证明任何区间都是可测集, 区间的测度就等于区间的长度, 而且还能证明点集的 Lebesgue 测度具有区间长度的一些重要性质, 特别是完全可加性. 由于这些性质的证明需要较大的篇幅, 因此, 我们仅把常用的性质罗列如下, 而略去它们的证明. 有兴趣的读者可参阅参考文献[18]或[19].

定理 3.1 设 $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ 都是可测集, 则

- (1) $E_n (n = 1, 2, \dots)$ 的余集 E_n^c 是可测集;
- (2) 若 $E_1 \subseteq E_2$, 则 $mE_1 \leq mE_2$ (单调性);
- (3) $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 \setminus E_2$ 都是可测集; 若 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 则 $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$ (有限可加性);
- (4) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 与 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 都是可测集; 若 $\{E_n\}$ 是互不相交的, 即 $E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n \text{ (完全可加性);}$$

若 $mE = 0$, 则称 E 为零测集.

例 3.1 证明: 直线 \mathbb{R} 上任何可数集都是 Lebesgue 可测集, 并且是零测集.

证 在本书第一章习题 1.2(B) 的第 5 题中已经指出, 凡能与正整数集 \mathbb{N}_+ 一一对应的集合称为可数集. 因此, 可数集中的所有元素可以用正整数编号排成一个元素列(点列). 设 E 为 \mathbb{R} 中的可数集, 则 E 中的所有点可以排成如下的点列:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

由定义 3.2 不难直接验证, 任何单点集都是可测的, 并且测度为零. 可数集 E 可以看成可数个单点集 $\{a_n\}$ 的并, 即

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\},$$

而且, 这些单点集 $\{a_n\} (n = 1, 2, \dots)$ 是互不相交的. 因此根据完全可加性, 可数集 E 是可测集, 而且测度为零. ■

由于直线 \mathbb{R} 上的有理点集是可数集(证明见参考文献[18]或[19]), 因此, 有理点集是零测集.

例 3.2 证明: 零测集的任何子集都是零测集.

证 设 E 为零测集, 则 $m^* E = mE = 0$. 若 F 是 E 的任一子集, 即 $F \subseteq E$, 则由外测度的性质(2), $m^* F \leq m^* E = 0$, 故 $m^* F = 0$. 又 $m_* F \leq m^* F = 0$, 故 $m_* F = 0$. 从而 $m_* F = m^* F = 0$, 因此 F 是可测的, 并且是零测集. ■

根据这个结论, 区间 $[0,1]$ 中的有理点集也是零测集. 再利用测度的有限可加性得知, $[0,1]$ 中的无理点集的测度为 1.

例 3.3 证明: 区间 $[0,1]$ 中的 Cantor 集是零测集.

证 Cantor 是集合论的创始人, 他曾构造一个非常有趣而重要的集合, 后来人们称之为 Cantor 集. 下面来说明它的构造.

将区间 $[0,1]$ 三等分, 挖去中间的开区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 将剩下的两个闭区间 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 与 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 再分别三等分, 挖去各自中间的开区间 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ 与 $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. 再将剩下的四个闭区间分别三等分, 再挖去各自中间的开区间……如此无限地进行下去, 把 $[0,1]$ 中剩下的点所构成的集合称为 Cantor 三分集, 简称 Cantor 集, 记作 P_0 . (图 3.2).

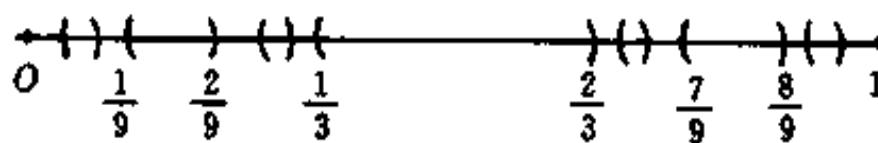


图 3.2

根据 Cantor 集的构造易见, 从 $[0,1]$ 中挖去的集合为

$$\begin{aligned} G_0 &= \underbrace{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{\text{第1次挖去}} \cup \underbrace{\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)}_{\text{第2次挖去}} \\ &\quad \cup \underbrace{\left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right) \cup \left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right) \cup \left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right) \cup \left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right)}_{\text{第3次挖去}} \cup \cdots, \end{aligned}$$

该集合的测度为

$$mG_0 = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3^2} + 4 \times \frac{1}{3^3} + \cdots.$$

容易证明, 上式右端的无穷级数是收敛的, 且其和为 1. 因此,

$$mP_0 = 1 - mG_0 = 0. \quad ■$$

进一步可以证明, 开集与闭集都是可测集. 根据可测集的性质, 对开集与闭

集进行至多可数次的交与并的运算所得到的集(称为 Borel 集)也是可测集. 因此, Lebesgue 可测集类是相当广泛的集类. 但是, 可以证明确实存在着不可测集.

定义 3.3(可测函数) 设 E 为直线 \mathbb{R} 上的可测集, f 是定义在 E 上的函数. 若 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 集合

$$E(\alpha \leq f < \beta) = \{x \mid \alpha \leq f(x) < \beta, x \in E\} \quad (3.5)$$

是 Lebesgue 可测的, 则称 f 是 E 上的 Lebesgue 可测函数, 简称为可测函数.

可测函数也可以用下列定理中指出的更简单的等价条件来定义.

定理 3.2 设 f 为定义在可测集 E 上的函数, α 是任意实数, 则 f 是 E 上可测函数的充要条件为集合

$$E(f \geq \alpha) = \{x \mid f(x) \geq \alpha, x \in E\}$$

是 Lebesgue 可测的.

证 必要性 设 f 是 E 上的可测函数, 容易证明

$$E(f \geq \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(\alpha \leq f < \alpha + n).$$

根据可测函数的定义, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $E(\alpha \leq f < \alpha + n)$ 都是可测集, 因此根据可测集的性质(定理 3.1(4)), $E(f \geq \alpha)$ 也是可测集.

充分性 由于

$$E(\alpha \leq f < \beta) = E(f \geq \alpha) \setminus E(f \geq \beta),$$

由已知 $E(f \geq \alpha)$ 与 $E(f \geq \beta)$ 都是可测集, 故 $E(\alpha \leq f < \beta)$ 是可测集. ■

例 3.4 证明: 定义在 $E = (-\infty, +\infty)$ 上的连续函数是可测函数.

证 设 f 是 E 上的连续函数, 根据第五章习题 5.2(B) 中的第 4 题, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 集 $E(f \geq \alpha)$ 是闭集, 因而是可测集, 故 f 是 E 上的可测函数. ■

例 3.5 证明: 区间 $[0, 1]$ 上的 Dirichlet 函数是可测的.

证 由于

$$E(D \geq \alpha) = \begin{cases} \emptyset, & \alpha > 1, \\ [0, 1] \text{ 中的有理点集}, & 0 < \alpha \leq 1, \\ [0, 1], & \alpha \leq 0. \end{cases}$$

易见, 无论 α 是何实数, $E(D \geq \alpha)$ 都是可测集(因为空集 \emptyset , $[0, 1]$ 中的有理点集与区间 $[0, 1]$ 都是可测集), 因此 Dirichlet 函数在 $[0, 1]$ 上是可测的. ■

以上两例说明, 可测函数是比连续函数更为广泛的一类函数. 可以证明, 可测函数有下列性质.

定理 3.3 设 f 与 g 都是 E 上的可测函数, 则 kf ($k \in \mathbb{R}$), $f \pm g$, fg , $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0, x \in E$) 以及 $|f|$ 都是 E 上的可测函数.

今后, 经常用到一个所谓“几乎处处”的概念. 设 $P(x)$ 是一个数学命题, 如果它在集 E 上除了一个零测子集外处处成立, 那末, 就说命题 $P(x)$ 在 E 上几乎处处成立.

例如, 若 $E(f \neq g) = \{x | f(x) \neq g(x), x \in E\}$ 是 E 的零测子集, 则称函数 f 与 g 在 E 上几乎处处相等, 记作 $f = g(a.e.)$ ^①. 若函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上不收敛于 f 的点组成一个零测集, 则称 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) (a.e.), \quad \text{或 } f_n \rightarrow f (a.e.) \quad (n \rightarrow \infty).$$

设 $f = g(a.e.)$, 则 $E(f \geqslant \alpha)$ 与 $E(g \geqslant \alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) 至多相差一个零测集. 因此, 若 f 在 E 上可测, 则 g 也在 E 上可测. 这就是说, 任意改变函数 f 在某零测集上的值, 不改变该函数的可测性.

3.3 Lebesgue 积分

有了上面的准备, 就可以利用第 3.1 段中所讲的办法来建立 Lebesgue 积分了.

定义 3.4 设 $mE < +\infty$, f 是定义在 E 上的有界可测函数, 并且 $c < f(x) < d$. 任取一组分点分割区间 $[c, d]$:

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d,$$

令 $E_i = \{x | y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i, x \in E\}$, $\lambda = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i - y_{i-1}|$. 任取 $\eta_i \in [y_{i-1}, y_i)$, 作和式

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \eta_i mE_i. \quad (3.6)$$

如果不论 $[c, d]$ 如何分割, 不论 η_i 如何选取, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和式 (3.6) 都趋于同一个常数, 则称 f 在 E 上是 Lebesgue 可积的, 简称 L 可积. 此时, 该常数称为 f 在 E 上的 Lebesgue 积分, 简称 L 积分, 记作

$$(L) \int_E f(x) dm = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \eta_i mE_i.$$

在不致混淆的情况下, 也记作 $\int_E f(x) dm$.

^① a.e. 是英文 almost everywhere 的缩写.

利用定义可以证明函数 Lebesgue 可积的一个充分条件.

定理 3.4 设 $mE < +\infty$, 则 E 上的任何有界可测函数都是 Lebesgue 可积的.

L 积分保持了 R 积分的一些基本性质.

定理 3.5 设 $mE < +\infty$, f 与 g 是 E 上的有界可测函数, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则

$$(1) \quad \int_E \alpha dm = \alpha mE;$$

(2) **线性性**

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)] dm = \alpha \int_E f(x) dm + \beta \int_E g(x) dm;$$

(3) **单调性** 若 $f \leq g$ (a.e.), 则 $\int_E f(x) dm \leq \int_E g(x) dm$. 进而有

$$\left| \int_E f(x) dm \right| \leq \int_E |f(x)| dm;$$

(4) **有限可加性** 设 $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, E_i 为互不相交的可测集, 则

$$\int_E f(x) dm = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f(x) dm;$$

(5) 若 $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, 则 $\alpha mE \leq \int_E f(x) dm \leq \beta mE$. 特别, 当 $mE = 0$ 时,

$$\int_E f(x) dm = 0;$$

(6) 若 $f = g$ (a.e.), 则 $\int_E f(x) dm = \int_E g(x) dm$.

这些性质大多可利用定义直接证明, 下面仅证明(5)与(6), 先证(5). 任取 $\epsilon > 0$, 则

$$\alpha - \epsilon < f(x) < \beta + \epsilon \quad (x \in E).$$

任取分点组 $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 分割 $[\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon]$, 任取 $\eta_i \in [y_{i-1}, y_i]$, 我们有

$$(\alpha - \epsilon) \sum_{i=1}^n mE_i \leq \sum_{i=1}^n \eta_i mE_i \leq (\beta + \epsilon) \sum_{i=1}^n mE_i,$$

从而有

$$(\alpha - \epsilon) mE \leq \sigma_n \leq (\beta + \epsilon) mE.$$

令 $\lambda \rightarrow 0$, 得

$$(\alpha - \epsilon) mE \leq \int_E f(x) dm \leq (\beta + \epsilon) mE.$$

再令 $\epsilon \rightarrow 0$, 即得所要证明的(5)中的不等式. 根据该不等式,(5)中的另一结论显然成立.

再证(6). 设 $A = \{x | f(x) \neq g(x), x \in E\}$, $B = \{x | f(x) = g(x), x \in E\}$, 则 $mA = 0$. 由(5)得

$$\int_A f(x) dm = \int_A g(x) dm = 0.$$

又因为

$$\int_B f(x) dm = \int_B g(x) dm,$$

将上面两式相加, 根据有限可加性立即可得

$$\int_E f(x) dm = \int_E g(x) dm. \blacksquare$$

性质(6)说明,任意改变被积函数在一个零测集上的值,并不改变函数的可积性以及积分值,即便该函数在此零测集上没有定义也未尝不可. 因此,在 Lebesgue 积分理论中,两个几乎处处相等的函数可以看成是同一个函数.

例 3.6 证明: 区间 $[0, 1]$ 上的 Dirichlet 函数 $D(x)$ 是 Lebesgue 可积的, 而且 $\int_{[0,1]} D(x) dm = 0$.

证 由例 3.5、定理 3.4 知, 函数 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是 Lebesgue 可积的. 又因为 $D(x) = 0$ (*a.e.*), 根据定理 3.5 中的(6), 便有

$$\int_{[0,1]} D(x) dm = 0. \blacksquare$$

此例说明,存在着 L 可积但不 R 可积的函数. 另一方面,人们已经证明了: 凡在有限区间 $[a, b]$ 上 R 可积的函数必 L 可积,而且积分值相等. 因此, L 可积函数类比 R 可积函数类广泛得多.

利用 L 积分理论,还可以证明一个关于 R 积分的重要结论: 函数 f 在区间 $[a, b]$ 上 R 可积的充要条件是 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续. 因此, R 积分只适用于几乎处处连续的函数,也就是前面所讲的间断点“不太多”的函数.

定义 3.4 给出的 Lebesgue 积分要求:(1) 集 E 的测度是有限的, 即 $mE < +\infty$; (2) 被积函数 f 在 E 上是有界可测的. 类似于反常 R 积分, 下面去掉这两个限制, 将 L 积分的概念推广到任意可测集 E (即 mE 可以等于 $+\infty$) 上的无界可测函数的情形,也就是建立反常 L 积分^①, 分成两步来进行.

首先, 设 $mE < +\infty$, f 是 E 上的无界可测函数.

^① 应当指出, 反常 L 积分不是反常 R 积分的推广.

若 f 在 E 上是非负的, 即 $f(x) \geq 0 (x \in E)$. 令

$$[f]_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n, \\ n, & f(x) > n, \end{cases}$$

则 $\{[f]_n\}$ 是 E 上的有界可测函数列. 根据定理 3.5, 对于每个 $n \in \mathbb{N}_+$, 积分 $\int_E [f]_n(x) dm$ 都存在. 又因为

$$[f]_1 \leq [f]_2 \leq \cdots \leq [f]_n \leq \cdots,$$

所以

$$\int_E [f]_1(x) dm \leq \int_E [f]_2(x) dm \leq \cdots \leq \int_E [f]_n(x) dm \leq \cdots,$$

从而得知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [f]_n(x) dm$ 存在(可以取有限值或 $+\infty$). 若此极限值是有限的, 则称 f 在 E 上 Lebesgue 可积, 并且积分值为

$$\int_E f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [f]_n(x) dm. \quad (3.7)$$

若 f 在 E 上是变号的, 令

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0, \\ 0, & f(x) > 0, \end{cases}$$

分别称 f^+ 与 f^- 为 f 的正部与负部(图 3.3). 显然, f^+ 与 f^- 在 E 上都是非负可测的, 并且 $f = f^+ - f^-$.

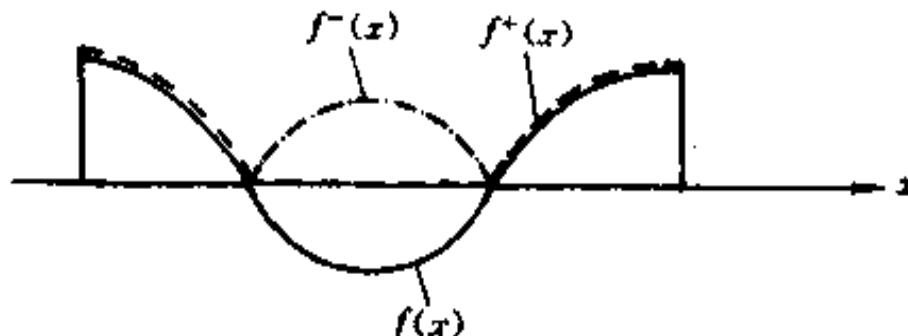


图 3.3

若 $\int_E f^+(x) dm$ 与 $\int_E f^-(x) dm$ 不同时为 $+\infty$, 则定义 f 在 E 上的 Lebesgue 积分为

$$\int_E f(x) dm = \int_E f^+(x) dm - \int_E f^-(x) dm. \quad (3.8)$$

当等式右端两个积分同时为有限值,则称 f 在 E 上 Lebesgue 可积.

最后,再去掉条件 $mE < +\infty$ 的限制.假定 E 是任意可测集, f 是 E 上的任意可测函数(有界的或无界的).对于每个 $n \in \mathbb{N}_+$, 令

$$E_n = [-n, n] \cap E,$$

则 $\{E_n\}$ 是一列测度有限的可测集, 并且

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \cdots, E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

按照上面的方法, 在每个 E_n 上都可定义 f 的 L 积分.若极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f(x)| dm$$

存在且有限, 则称 f 在 E 上 Lebesgue 可积, 此时, 定义 f 在 E 上的 Lebesgue 积分为:

$$\int_E f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dm. \quad (3.9)$$

至此, Lebesgue 积分的推广工作已告完成. 还应当指出的是, 上面所讨论的 Lebesgue 测度、可测函数以及积分都可以推广到空间 \mathbf{R}^n 中去, 建立 Lebesgue 重积分. 由于篇幅所限, 这里不一一重述.

推广后的 L 积分除具有定理 3.5 中所指出的基本性质外, 还有一个重要性质, 就是完全可加性, 现叙述如下, 证明从略.

定理 3.6(完全可加性) 设 f 在可测集 E 上 L 可积, 且 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $\{E_k\}$ 为互不相交的可测集列, 则

$$\int_E f(x) dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dm.$$

前面已经指出, L 积分适用的函数类比 R 积分广泛得多. 不仅如此, 读者从下面罗列的几个常用的极限定理中容易看到, L 积分与极限交换顺序所要求的条件也比 R 积分弱得多, 因而 L 积分在应用中更加方便, 这是 L 积分的另一个显著优点.

定理 3.7 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的可测函数列.

(1) (Lebesgue 控制收敛定理) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ (a.e.), 且存在 E 上

的一个 L 可积函数 g , 使得对所有的 $n \in \mathbb{N}_+$,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ (a.e.)}, \quad x \in E,$$

则 f 在 E 上 L 可积, 且

$$\int_E f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dm;$$

(2) (Lebesgue 有界收敛定理) 若 $mE < +\infty$, 且(1)中的 $g(x) = M$ (常数), 则有与(1)中相同的结论;

(3) (逐项积分定理) 若 $|f_n|$ 是 E 上非负的可测函数列, 且 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (a.e.), 则

$$\int_E f(x) dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) dm.$$

积分与极限交换顺序是理论研究和实际应用中经常碰到的一个重要问题. 在 R 积分中要求很严格的一致收敛条件, 这就限制了它在现代科学中的应用. 上述几个定理表明, 在 L 积分中不但减弱了这个条件, 而且更便于验证, 下面举例说明.

例 3.7 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^3 nx dx$.

解 上面已经指出, 如果 f 在有限区间 $[a, b]$ 上 R 可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上必 L 可积, 且积分值相等. 因此, 可以利用 L 积分理论解决有限区间上的 R 积分问题. 关于这一点, 以后不再重述. 在本题中,

$$(R) \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^3 nx dx = (L) \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^3 nx dm.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^3 nx = 0, \quad x \in [0, 1],$$

并且

$$\left| \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^3 nx \right| \leq \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \leq \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{2nx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, 1].$$

又 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $[0, 1]$ 上 R 可积, 因而 L 可积. 由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^3 nx dx = (L) \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^3 nx dm = 0. \quad \blacksquare$$

例 3.8 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (R) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx.$

解 设 $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, 易见 $\{f_n\}$ 在 $[-1, 1]$ 上是非负可测函数列, 根据逐项积分定理,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (R) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = (L) \int_{-1}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dm.$$

又因为当 $x=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = 0$; $x \neq 0$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1,$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 0, & x=0, \\ 1, & x \neq 0, \end{cases}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = 1(a.e.)$. 从而得知

$$\sum_{n=1}^{\infty} (R) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = (L) \int_{-1}^1 dm = 2. \quad \blacksquare$$

此题中, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $[-1, 1]$ 上处处收敛于和函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ 1, & x \neq 0, \end{cases}$$

但不一致收敛于 $f(x)$ (否则, 根据一致收敛级数的性质(第四章第二节), 其和函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上也应当是连续函数, 但此处 $f(x)$ 是间断的), 因此, 无法利用第四章中关于函数项级数逐项积分的定理. 这说明 L 积分中逐项积分定理的条件更便于应用.

3.4 $L^p([a, b])$ 空间

设 $[a, b]$ 为直线 \mathbf{R} 上的一个闭区间, $1 \leq p < +\infty$. 若 $|f|^p$ 在 $[a, b]$ 上 L 可积, 即

$$\int_{[a, b]} |f(x)|^p dm < +\infty,$$

则称 f 为 $[a, b]$ 上的 p 方可积函数。 $[a, b]$ 上 p 方可积函数的全体组成的集合记为 $L^p([a, b])$ 。当 $p = 1$ 时, $L^1([a, b])$ 就表示 $[a, b]$ 上 L 可积函数全体组成的集合, 简记为 $L([a, b])$ 。在 $L^p([a, b])$ 中, 两个元素 f 与 g 相等是指在 $[a, b]$ 上, $f(x) = g(x)$ ($a.e.$)。

在 $L^p([a, b])$ 中, 按照通常的函数加法运算和数与函数相乘运算构成线性空间。事实上, 设 $f, g \in L^p([a, b])$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 是任一常数。由于

$$\int_{[a, b]} |\alpha f|^p dm = |\alpha|^p \int_{[a, b]} |f|^p dm < +\infty,$$

所以 $\alpha f \in L^p([a, b])$ 。又因为

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq [2\max(|f|, |g|)]^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p),$$

故

$$\int_{[a, b]} |f+g|^p dm \leq 2^p \left(\int_{[a, b]} |f|^p dm + \int_{[a, b]} |g|^p dm \right) < +\infty.$$

从而 $f+g \in L^p([a, b])$ 。这就是说, $L^p([a, b])$ 关于线性运算是封闭的, 因此构成一个线性空间。

下面不加证明地给出两个常用的积分不等式。

Hölder 不等式 设 $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 若 $f \in L^p([a, b])$, $g \in L^q([a, b])$, 则 $fg \in L([a, b])$, 并且

$$\int_{[a, b]} |fg| dm \leq \left(\int_{[a, b]} |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{[a, b]} |g|^q dm \right)^{\frac{1}{q}}.$$

当 $p=2$ 时, 就得到积分形式的 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\int_{[a, b]} |fg| dm \leq \left(\int_{[a, b]} |f|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[a, b]} |g|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Minkowski 不等式 设 $f, g \in L^p([a, b])$, $p \geq 1$, 则

$$\left(\int_{[a, b]} |f+g|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{[a, b]} |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{[a, b]} |g|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}.$$

在线性空间 $L^p([a, b])$ 中, 定义

$$\|f\|_p = \left(\int_{[a, b]} |f(x)|^p dm \right)^{\frac{1}{p}},$$

容易验证, 它就是 $L^p([a, b])$ 中元素 f 的范数(范数公理的前两条显然成立, 由 Minkowski 不等式可证明它也满足三角不等式), 因此 $L^p([a, b])$ 是一个赋范线性空间, 进而还能证明, $L^p([a, b])$ 是完备的, 即它是一个 Banach 空间.

当 $p = 2$ 时, 就得到一类有广泛应用的重要的函数空间 $L^2([a, b])$. 在这个空间中, 如果定义

$$\langle f, g \rangle = \int_{[a, b]} f(x) \overline{g(x)} dm,$$

那末不难验证, 它满足内积公理, 因此, $L^2([a, b])$ 关于此内积构成内积空间. 由此内积诱导出的范数为

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{[a, b]} |f(x)|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}},$$

它就是上面所定义的范数 $\|f\|_2$, 因此, $L^2([a, b])$ 也是一个 Hilbert 空间. 关于这个空间的应用, 下一节中再作介绍.

习题 8.3

(A)

1. 利用外测度的定义证明: 若 $E_1 \subseteq E_2$, 则 $m^* E_1 \leq m^* E_2$.

2. 设

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \mid \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, x \in \mathbb{R} \right\},$$

证明 $mA = 1$.

3. 证明: 两个零测集的并与交都是零测集.

4. 设 E_1 与 E_2 都是有界可测集, 且 $E_1 \subseteq E_2$. 证明:

$$m(E_2 \setminus E_1) = mE_2 - mE_1.$$

5. 证明: 函数 f 在可测集 E 上可测的充要条件是对于任意实数 a , 集合 $E(f < a)$ 可测.

6. 设 f 与 g 都是 E 上的可测函数, 证明

$$E(f \geq g) = \{x \mid f(x) \geq g(x), x \in E\}$$

也是可测集.

7. 设 f 是 E 上的可测函数, E_1 是 E 的一个可测子集, 证明 f 在 E_1 上也是可测函数.

8. 设 E 为直线 \mathbb{R} 上的任一点集, 称

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

为集 E 的特征函数. 证明: 若 E 是可测集, 则 χ_E 是直线 \mathbb{R} 上的可测函数.

9. 证明: 定义在零测集上的任何函数都是可测的.

10. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \text{ 为无理数}, \\ 1, & x \text{ 为有理数}. \end{cases}$$

问 f 在区间 $[0,1]$ 上是否 L 可积? 若可积, 试求其积分值.

11. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_0^1 \frac{\sin nx}{nx} dx; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_0^1 e^{-nx^2} dx;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_0^1 \frac{x^n}{1 + |\sin x|} dx.$$

12. 证明: 在 $[a,b]$ 上 p 方 L 可积函数必是 L 可积函数, 即

$$L^p([a,b]) \subseteq L([a,b]) \quad (1 \leq p < +\infty).$$

第四节 Hilbert 空间与最佳逼近问题

前面已经指出, 在内积空间中, 可以利用内积诱导出范数, 使内积空间成为一类特殊的赋范线性空间. 因而, Hilbert 空间也是一类特殊的 Banach 空间, 具有 Banach 空间所具有的一切性质. 但是, 一般的赋范线性空间却没有内积空间的许多性质. 例如, 因为其中缺少内积概念, 所以, 它没有 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 中诸如正交、正交投影等重要的几何性质. 本节中, 我们将仿照 \mathbb{R}^3 中的办法, 利用内积来引入向量正交的概念, 并由此讨论 Hilbert 空间内正交投影、正交分解以及与之密切相关的最佳逼近问题、Fourier 展开问题. 最后, 还将简要介绍应用中非常重要的最佳均方逼近问题.

4.1 正交投影与正交分解

我们知道, 在空间 \mathbb{R}^3 中, 两个向量正交的充要条件是它们的内积等于零. 仿此, 本段将在内积空间中引入正交的概念, 并进而讨论正交投影与正交分解等问题.

定义 4.1(正交) 设 X 是内积空间, $x, y \in X$, M 与 N 是 X 中的两个子集. 若 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x 与 y 正交, 记作 $x \perp y$; 若 x 与 M 中任何元素(向量)正交, 即

$$x \perp y, \quad \forall y \in M,$$

则称 x 与 M 正交, 记作 $x \perp M$; 若

$$x \perp y, \quad \forall x \in M, y \in N,$$

则称 M 与 N 正交, 记作 $M \perp N$; X 中与 M 正交的元素全体所构成的集, 称为 M 的正交补, 记作 M^\perp , 即

$$M^\perp = \{x \mid x \perp M, x \in X\}.$$

由定义 4.1 及内积的性质容易证明下面的定理.

定理 4.1 设 X 是内积空间, $x_1, x_2, x \in X$, M 是 X 的一个子集. 则

- (1) 若 $x_1 \perp x_2$, 且 $x = x_1 + x_2$, 则 $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ (勾股定理);
- (2) 设 M 在 X 中是稠密的, 即

$$\forall x \in X, \exists \{x_n\} \subseteq M, \text{使 } x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty).$$

若 $x \perp M$, 则 $x = \theta$;

(3) M 的正交补 M^\perp 是 X 的闭线性子空间.

证 (1) 留给读者自己去证明(见习题 8.2(A)第 4 题), 下面证明(2)与(3).

(2) 由于 M 在 X 中稠密, 故 $\exists \{x_n\} \subseteq M$, 使 $x_n \rightarrow x$. 由内积的连续性(定理 2.7)得知

$$\langle x, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle = 0,$$

故 $x = \theta$.

(3) 任取 $x, y \in M^\perp$, 则对任意的 $z \in M$ 及 $\alpha, \beta \in K$,

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = 0,$$

故 $\alpha x + \beta y \in M^\perp$, 从而知 M^\perp 是 X 的线性子空间. 再证 M^\perp 是闭的. 设 $\{x_n\} \subseteq M^\perp$, 且 $x_n \rightarrow x$, 由内积的连续性, 对任意的 $z \in M$, 有

$$\langle x, z \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, z \rangle = 0,$$

故 $x \in M^\perp$, 因此, M^\perp 是 X 的闭线性子空间. ■

设 M 为 \mathbb{R}^3 中过坐标原点 O 的一个平面, 则 M 就是 \mathbb{R}^3 的一个子空间, 因此, 过原点 O 且与 M 垂直的直线就是 M^\perp . 若 x 为 \mathbb{R}^3 中任一向量, 则 x 可分解为

$$x = x_0 + x_1$$

(图 4.1), 其中 $x_0 \in M$ 就是 x 在 M 上的正交投影, $x_1 \in M^\perp$, 且 $\|x_1\| = \|x - x_0\|$ 就是 x 到 M 的距离, 即 $\|x_1\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$. 上述分解称为 x 关于 M 的正交分解, 正交投影与正交分解的概念可以推广到内积空间中.

定义 4.2(正交投影) 设 M 是内积空间 X 的线性子空间, $x \in X$, 若存在

$x_0 \in M, x_1 \in M^\perp$, 使

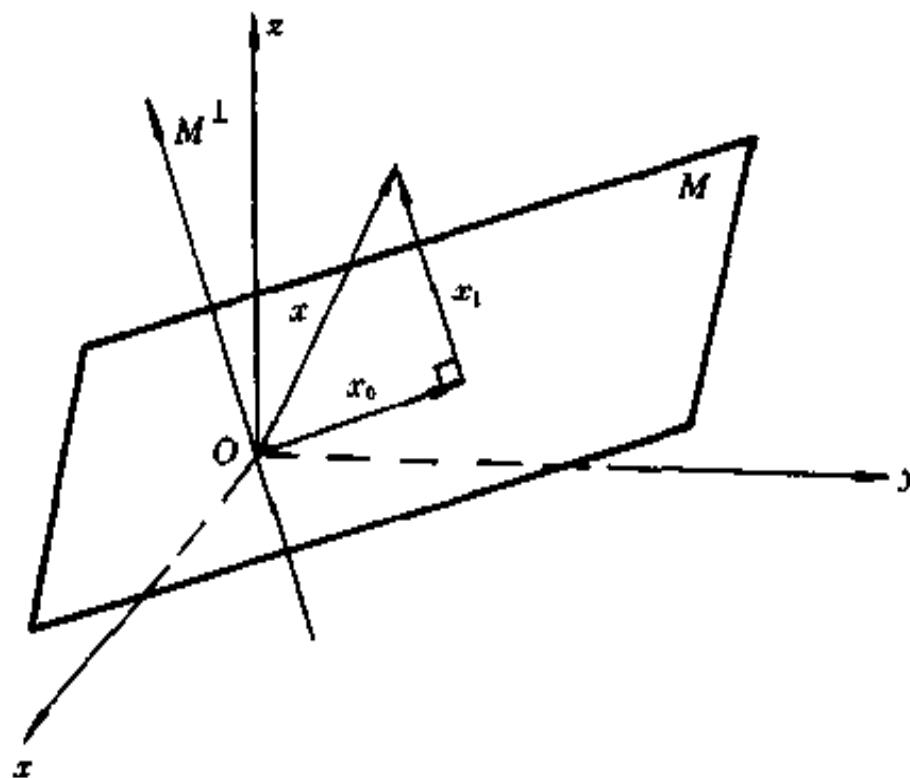


图 4.1

$$x = x_0 + x_1, \quad (4.1)$$

则称 x_0 为 x 在 M 上的正交投影, 简称投影, (4.1) 式称为 x 关于 M 的正交分解.

应当注意, 对于内积空间而言, 它的元素 x 在其线性子空间 M 上的投影不一定存在, 但若存在, 则必定是唯一的, 即有下面的定理.

定理 4.2 设 M 是内积空间 X 的线性子空间, $x \in X$. 若 x 在 M 上的投影 x_0 存在, 则它必定唯一, 并且

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|. \quad (4.2)$$

证 先证唯一性. 若 x_0 与 \bar{x}_0 都是 x 在 M 上的投影, 则由定义, $x_0, \bar{x}_0 \in M$, 且 $x - x_0, x - \bar{x}_0 \in M^\perp$. 由于 M 与 M^\perp 都是 X 的线性子空间, 故 $x_0 - \bar{x}_0 \in M$, 且 $x_0 - \bar{x}_0 = (x - \bar{x}_0) - (x - x_0) \in M^\perp$, 从而有

$$\langle x_0 - \bar{x}_0, x_0 - \bar{x}_0 \rangle = 0.$$

根据内积公理(3), $x_0 - \bar{x}_0 = \theta$, 即 $x_0 = \bar{x}_0$.

再证(4.2)式. 由于 $x_0 \in M, x - x_0 \in M^\perp$, 故对任意的 $y \in M, x_0 - y \in M$, 且 $x - x_0 \perp x_0 - y$. 又由于 $x - y = (x - x_0) + (x_0 - y)$, 根据勾股定理, 我们有

$$\|x - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2 \geq \|x - x_0\|^2.$$

上式中当且仅当 $x_0 = y$ 时, 等号才成立. 上式两端在 M 上对 y 取下确界即得(4.2)式. ■

定理 4.2 说明,若 x 在线性子空间 M 上的投影 x_0 存在,则 x 到其投影 x_0 的距离正好等于 x 到 M 的距离. 实际上,该定理的逆定理也成立.

定理 4.3 设 M 为内积空间 X 的线性子空间, $x \in X$, $x_0 \in M$, 并且(4.2) 式成立, 则 x_0 为 x 在 M 上的投影.

证 由假设 $x_0 \in M$, 令 $x_1 = x - x_0$, 为了证明 x_0 为 x 在 M 上的投影, 根据定义, 只要证明 $x_1 \in M^\perp$. 记 $d = \inf_{y \in M} \|x - y\|$, 任取 $z \in M$, $z \neq \theta$, 对于任意的复数 λ , 必有 $x_0 + \lambda z \in M$, 从而

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|x - (x_0 + \lambda z)\|^2 = \langle x - x_0 - \lambda z, x - x_0 - \lambda z \rangle \\ &= \langle x - x_0, x - x_0 \rangle - \bar{\lambda} \langle x - x_0, z \rangle - \lambda \langle z, x - x_0 \rangle + |\lambda|^2 \langle z, z \rangle \\ &= \|x - x_0\|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle x - x_0, z \rangle) + |\lambda|^2 \|z\|^2. \end{aligned}$$

由于 $\|x - x_0\|^2 = d^2$, 移项得

$$2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle x - x_0, z \rangle) - |\lambda|^2 \|z\|^2 \leq 0.$$

取 $\lambda = \frac{\langle x - x_0, z \rangle}{\|z\|^2}$ ($z \neq \theta$) 代入上式, 则有

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{|\langle x - x_0, z \rangle|^2}{\|z\|^2}\right) - \frac{|\langle x - x_0, z \rangle|^2}{\|z\|^4} \|z\|^2 \leq 0.$$

又由于 $\frac{|\langle x - x_0, z \rangle|^2}{\|z\|^2}$ 是非负实数, 所以上式变为 $|\langle x - x_0, z \rangle|^2 \leq 0$. 显然, 仅当 $\langle x - x_0, z \rangle = 0$ 时才有可能, 故 $x_1 = x - x_0 \in M^\perp$, 从而 $x = x_0 + x_1$, 即 x_0 是 x 在 M 上的投影. ■

在什么条件下, 才能保证 X 中的每个元 x 在 M 上的投影一定存在呢? 下面的定理回答了这个问题.

定理 4.4(变分引理) 设 M 为 Hilbert 空间 X 的闭子空间, 则对每个 $x \in X$, 必存在唯一的 $x_0 \in M$, 使

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

证 令 $d = \inf_{y \in M} \|x - y\|$, 根据下确界的定义, 必存在点列 $\{x_n\} \subseteq M$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = d$ (称 $\{x_n\}$ 为极小化序列). 下面证明 $\{x_n\}$ 是基本列. 事实上, 对 $x_m - x$ 与 $x_n - x$ 应用平行四边形公式, 得

$$2 \left\| \frac{x_m - x_n}{2} \right\|^2 = \|x_m - x\|^2 + \|x_n - x\|^2 - 2 \left\| \frac{x_m + x_n}{2} - x \right\|^2.$$

因为 $\frac{x_m + x_n}{2} \in M$, 故 $\left\| \frac{x_m + x_n}{2} - x \right\| \geq d$, 代入上式得

$$0 \leq 2 \left\| \frac{x_m - x_n}{2} \right\|^2 \leq \|x_m - x\|^2 + \|x_n - x\|^2 - 2d^2.$$

令 $m, n \rightarrow \infty$, 则 $\|x_m - x_n\|^2 \rightarrow 0$, 故 $\{x_n\}$ 是基本列. 由 X 的完备性及 M 是闭子空间知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in M$, 于是

$$\|x - x_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = d.$$

由定理 4.3, 上面的 x_0 就是 x 在 M 上的投影, 唯一性在定理 4.2 中已经证明. ■

综合上面所得到的结果, 即有

定理 4.5(正交分解定理) 设 M 为 Hilbert 空间 X 的闭子空间, 则对每个 $x \in X$, 必可唯一地表示为

$$x = x_0 + x_1, x_0 \in M, x_1 \in M^\perp, \quad (4.3)$$

即 $X = M \oplus M^\perp$, 其中 \oplus 表示直和.

4.2 最佳逼近问题

我们已经看到, Hilbert 空间既是线性空间, 又是赋范空间, 而且其中还有内积概念. 因而, 在 Hilbert 空间中, 既可以进行代数运算(线性运算), 又可以进行分析运算(极限运算), 而且还具有诸如正交、正交投影与正交分解等重要的几何性质. 这表明 Hilbert 空间比赋范线性空间具有 Euclid 空间 \mathbf{R}^n 更多的一些性质, 是更接近于 Euclid 空间的一类应用广泛的抽象空间. 下面简单介绍上述正交投影理论在最佳逼近问题中的应用.

在理论和应用研究中, 经常遇到这样一类问题: 用较简单类型的函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 的线性组合去逼近较复杂的函数 f . 例如, 在第四章中所讨论的将函数展开为 Taylor 级数或 Fourier 级数都属于这类问题. 前者是用幂函数 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 的线性组合(即 n 次多项式)去逼近一个无穷可微函数 f , 后者则是用三角函数 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$ 的线性组合(即 n 次三角多项式)去逼近一个周期函数 f . 由于函数 f 可以看成无穷维空间中的一个向量(元素), 函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 的线性组合的全体构成该无穷维空间的一个线性子空间 M , 因此上述问题可以抽象为: 用线性子空间 M 中的向量去逼近无穷维空间中的某一向量 f 的问题. 自然要问, 是否存在所谓最佳逼近? 如果存在, 应当如何求? 为了回答这个问题, 首先要解决如何衡量逼近好坏的问题, 也就是要建立一个衡量逼近误差的“尺度”. 正如在上一段中已经看到的, 在三维空间 \mathbf{R}^3 中, 如果要用过原点的平面 M (即 \mathbf{R}^3 的线性子空间)中的向量(点)去逼近 \mathbf{R}^3 中的向量(点) x , 那末, M 中到 x 距离最近的那个向量(点) x_0 (即 x 在 M 上的

投影)是 x 的最佳逼近(图 4.1). 这启发我们在无穷维函数空间中也采用点与点之间的“距离”(即赋范线性空间中两点之差的范数)作为衡量逼近好坏(误差)的尺度. 这样,便可以一般地在赋范线性空间中定义最佳逼近的概念.

定义 4.3 设 X 是一个赋范线性空间, M 是 X 的线性子空间, $x \in X$. 若存在 $x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|,$$

则称 x_0 是 M 中对 x 的最佳逼近元(向量).

在这个定义中, 子空间 M 可以是有限维的, 也可以是无限维的, 上面所提出的最佳逼近问题可以归结为在 X 的有限维子空间 M 中求最佳逼近元的问题. 设 $x \in X$, M 是由 e_1, e_2, \dots, e_n 所张成的线性子空间, 即由 e_1, e_2, \dots, e_n 的线性组合全体所构成的线性子空间, 记作 $M = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. 若存在 $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 使得

$$\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\| = \inf_{y \in M} \|x - y\| = \inf \left\{ \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| \mid \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

则 $x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ 就是 M 中对 x 的最佳逼近元.

关于最佳逼近元的存在性、唯一性及如何寻求问题在 Hilbert 空间中得到了圆满的解决, 在第 4.1 段中介绍的正交投影理论就是解决这些问题的理论基础. 设 X 是内积空间, $x \in X$, M 是 X 的线性子空间. 根据定理 4.2 与定理 4.3, \tilde{x}_0 是 M 中对 x 的最佳逼近元的充要条件为 \tilde{x}_0 是 x 在 M 上的投影. 若 X 是 Hilbert 空间, M 是 X 的闭线性子空间, 根据定理 4.4, 最佳逼近元 x_0 存在而且唯一. 不但如此, 在定理 4.4 的证明过程中还给出了最佳逼近元 x_0 的构造方法, 它就是极小化序列 $\{\tilde{x}_n\}$ 的极限. 由于定理 4.4 是《变分法》中求泛函极值的许多近似算法的基础, 因此称该定理为变分引理, 在微分方程和最优控制理论中有重要的应用. 下面仅讨论当 M 是 Hilbert 空间 X 中的有限维子空间时最佳逼近元 x_0 的求法.

设 $\dim M = n$, e_1, e_2, \dots, e_n 是 M 的一个基, 则 M 中关于 x 的最佳逼近元 $x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ 必满足

$$\langle x - x_0, y \rangle = 0, \forall y \in M.$$

上式等价于

$$\langle x - x_0, e_i \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

或者等价于线性方程组

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n.$$

这样,求最佳逼近元 x_0 的问题就转化为求上述线性方程组的解 $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 的问题.由于 x_0 存在且唯一,所以此方程组的解存在且唯一,它的 Gram 行列式

$$G(e_1, e_2, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_2, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_1 \rangle \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_1, e_n \rangle & \langle e_2, e_n \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{vmatrix} \neq 0,$$

并且解为

$$\lambda_j = \frac{G_j}{G(e_1, e_2, \dots, e_n)} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (4.4)$$

G_j 表示将 $G(e_1, e_2, \dots, e_n)$ 中第 j 列换成 $(\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)^T$ 后所得的行列式.

例 4.1(最小二乘法) 在第五章中曾经从多元函数最大最小值的角度介绍过最小二乘法,现在说明,最小二乘法实际上可以归结为有限维空间的最佳逼近问题.在实际问题中,为了寻求变量 y 与变量 x_1, x_2, \dots, x_n 之间的函数关系 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的解析表达式,通常只能根据多次的实验数据:

$$y_j; x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n} \quad (j = 1, 2, \dots, m, m > n),$$

求出它的近似表达式.常用的方法之一就是线性最小二乘法,即利用变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性组合来建立它的近似表达式,也就是求出数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,使得用 $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{j,i}$ 来近似表达 $y_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 时产生的误差

$$\delta_j = y_j - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{j,i} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

的平方和最小.这个问题显然可以归结为求一组数 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$,使得

$$\sum_{j=1}^m \left(y_j - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{j,i} \right)^2 = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \left(y_j - \sum_{i=1}^n a_i x_{j,i} \right)^2 \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

设 $w = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $u_i = (x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{m,i}) (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $w, u_i \in \mathbb{R}^m$.不妨设 u_1, u_2, \dots, u_n 是线性无关的,令

$$M = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\},$$

则 M 是 \mathbf{R}^m 的线性子空间, 且 $\dim M = n < m$. 上述问题实际上就是在空间 \mathbf{R}^m 中, 求有限维子空间 M 对向量 $w \in \mathbf{R}^m$ 的最佳逼近向量 $w_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ 的问题, 因而可以利用(4.4)式求解. ■

4.3 Hilbert 空间的正交系与 Fourier 展开

在三维 Euclid 空间 \mathbf{R}^3 中, 任何一个向量 x 均可唯一地表示为直角坐标系中三个单位向量(标准正交基) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ 与 $e_3 = (0, 0, 1)$ 的线性组合, 即

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 x 的三个坐标(分量). 由于 e_1, e_2, e_3 是相互正交的单位向量, 所以 x 的三个坐标可以用内积来表示:

$$\begin{aligned} \langle x, e_i \rangle &= \langle \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, e_i \rangle \\ &= \alpha_1 \langle e_1, e_i \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_i \rangle + \alpha_3 \langle e_3, e_i \rangle \\ &= \alpha_i (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

从而

$$x = \sum_{i=1}^3 \langle x, e_i \rangle e_i.$$

本段我们将这一结果推广到抽象的 Hilbert 空间 X 中, 说明 X 中的任一元素(向量) x 可以用它的规范正交基表示出来, 这就是将 x 展开为 Fourier 级数问题.

定理 4.4 设 X 是内积空间, 若 X 中的元素列 $\langle e_n \rangle$ 满足:

$$\langle e_m, e_n \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

则称 $\{e_n\}$ 为 X 中的一个规范正交系. 若 X 中不再存在非零元素与所有的 e_n 正交, 则称 $\{e_n\}$ 为 X 中的一个完全规范正交系或标准正交基.

例 4.2 在 n 维 Euclid 空间 \mathbf{R}^n 中, 向量(元素)组

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

构成 \mathbf{R}^n 的一个完全规范正交系. 事实上, 若在 X 中存在着一个非零元素 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 与所有的 $e_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 正交, 即

$$\langle x, e_i \rangle = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

则

$$x_i = \langle x, e_i \rangle = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

故 $x = \theta$, 得到矛盾. 因此该正交系是完全的. 但若在这个正交系中少选一个, 例如, 选取 e_2, \dots, e_n , 它虽然仍然是 \mathbb{R}^n 的一个规范正交系, 但却不是完全的. ■

例 4.3 在 l^2 空间中, 元素

$$e_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 1}_{n \text{ 个}}, 0, \dots), n = 1, 2, \dots$$

构成 l^2 的一个规范正交系, 而且是完全的, 证明留给读者. ■

例 4.4 在复 $L^2([-\pi, \pi])$ 空间中, 元素列 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是它的一个规范正交系; 在实 $L^2([-\pi, \pi])$ 空间中, 元素列

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

构成它的一个规范正交系, 而且可以证明, 它们都分别是各自空间中的完全规范正交系. ■

定义 4.5 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 的一个规范正交系, $x \in X$, 则称 $\langle x, e_n \rangle$ ($n = 1, 2, \dots$) 为 x 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ 为 x 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 级数, 记作

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

现在自然要问, 对于 X 中给定的规范正交系 $\{e_n\}$ 及 $x \in X$, x 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ 是否收敛? 如果收敛, 它的和是否就是 x ? 如果 x 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 级数收敛于 x , 即

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

则称上式为 x 的 Fourier 展开式. 下面来讨论这些问题.

首先说明, x 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 级数的部分和是相应子空间中对 x 的最佳逼近元.

定理 4.6 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的一个规范正交系, $M = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots\}$

$\cdots, e_n \rangle, x \in X$, 则

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

是 M 中对 x 的唯一最佳逼近元, 并且

$$\|x_0\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2, \|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 - \|x_0\|^2. \quad (4.5)$$

证 为了证明 x_0 是 M 中对 x 的最佳逼近元, 只要证明 x_0 是 x 在 M 上的投影就行了. 显然, $x_0 \in M$, 并且

$$\langle x_0, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j, e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

即 $\langle x - x_0, e_i \rangle = 0$. 故 $x - x_0 \perp e_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 从而 $x - x_0 \perp M$. 就是说, x_0 是 x 在 M 上的唯一投影.

又由于 $x - x_0, e_1, e_2, \dots, e_n$ 是相互正交的, 由勾股定理,

$$\begin{aligned} \|x_0\|^2 &= \sum_{i=1}^n \|\langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2, \\ \|x\|^2 &= \|(x - x_0) + x_0\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0\|^2, \end{aligned}$$

故

$$\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 - \|x_0\|^2. \blacksquare$$

(4.5)式给出了 x 与它的最佳逼近元 x_0 之间的误差.

推论 4.1 设 $\{e_n\}$ 为内积空间 X 中的规范正交系, x 是 X 中的任一元素, 则

$$(1) \text{ (Bessel 不等式)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, e_n \rangle = 0.$$

证 (1) 由(4.5)式易见, 对于任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

令 $n \rightarrow \infty$, 即得 Bessel 不等式.

(2) 由 Bessel 不等式知, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ 是一个收敛级数, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, e_n \rangle = 0$. \blacksquare

定理 4.7 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 X 中的规范正交系, $x \in X$, 则 x 关于 $\{e_n\}$

的 Fourier 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ 必收敛.

证 记 Fourier 级数的部分和为 $S_n = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$, 则对任意的 $n, p \in \mathbb{N}_+$, 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ 是一个收敛级数, 我们有

$$\begin{aligned} \|S_{n+p} - S_n\|^2 &= \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} \|\langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+p} |\langle x, e_i \rangle|^2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

因此, $\{S_n\}$ 是 X 中的基本列. 由 X 的完备性得知 $\{S_n\}$ 在 X 中是收敛的, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ 收敛. ■

在 Bessel 不等式中, 若等号成立, 即

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2,$$

则称它为 x 关于 $\{e_n\}$ 的 Parseval 等式.

Parseval 等式可以看成勾股定理的推广. 在有限维空间中, 例如在 \mathbb{R}^3 中, 每个向量 x 都可唯一地表示成

$$x = \sum_{i=1}^3 \langle x, e_i \rangle e_i.$$

由勾股定理得知, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^3 |\langle x, e_i \rangle|^2$, 它就是 Parseval 等式. 但若在 \mathbb{R}^3 中的规范正交系仅由两个规范正交向量组成, 即规范正交系不完全, 那末, 就不能保证 Parseval 等式成立, 只有 Bessel 不等式成立. 这就是说, 在有限维空间中, 规范正交系的完全性、Parseval 等式(勾股定理)成立以及任一向量能对规范正交系展开是等价的. 将这个事实推广到一般的 Hilbert 空间中, 就得到下面的定理.

定理 4.8 设 X 是 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 X 的规范正交系, $x \in X$, 则下列命题是等价的:

(1) x 关于 $\{e_n\}$ 的 Parseval 等式成立;

(2) x 能展开为关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 级数 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$;

(3) $\{e_n\}$ 是完全的.

证 (1) \Rightarrow (2) 由(4.5)式, 得

$$\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2,$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由于 Parseval 等式成立, 上式右端趋于零, 所以(2)成立.

(2) \Rightarrow (3) 假定 $\{e_n\}$ 不是完全的, 那末, 必存在着非零元 $x \in X$, 使 $\langle x, e_n \rangle = 0 (n = 1, 2, \dots)$. 由已知对此 x 有展开式

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

其中每个系数 $\langle x, e_n \rangle = 0$, 故 $x = \theta$, 这与 x 是非零元矛盾.

(3) \Rightarrow (1) 假定存在 $x \in X$, 使得 x 关于 $\{e_n\}$ 的 Parseval 等式不成立, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \|x\|^2$, 从而 $\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 > 0$. 由定理 4.7, $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ 是收敛的, 令

$$\tilde{x} = x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

则

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle &= \left\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, x \rangle = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 > 0, \end{aligned}$$

故知 $\tilde{x} \neq \theta$. 又对于每个 $i \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\langle \tilde{x}, e_i \rangle = \langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0,$$

这就是说, $\{e_n\}$ 是不完全的, 与假设矛盾. ■

定理 4.8 揭示了在一般的 Hilbert 空间 X 中元素 $x \in X$ 能展开为关于规范正交系 $\{e_n\}$ 的 Fourier 级数与 $\{e_n\}$ 的完全性、Parseval 等式成立之间的本质联系, 给出了 $x \in X$ 展开为 Fourier 级数的充分必要条件, 是一个内容丰富应用广泛的结果. 根据这个定理, 对于实际应用中的每一个具体的 Hilbert 空间, 可以选择适当的完全规范正交系(正交基), 求得所需要的 Fourier 展开式. 在本节的最后, 我们讨论在应用中最重要的一类 Hilbert 空间 $L^2([a, b])$ 中的 Fourier 展开问题, 说明有广泛应用的均方收敛与最佳均方逼近的含义.

4.4 $L^2([a, b])$ 空间的 Fourier 展开与最佳均方逼近

例 4.4 中已经指出, 三角函数系

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, e'_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt \quad (n=1,2,\dots)$$

是实 $L^2([-\pi, \pi])$ 空间中的一个完全的规范正交系. 根据定理 4.8, 每个周期为 2π 的函数 $x \in L^2([-\pi, \pi])$ 都可以展开为关于此三角函数系 $\{e_0, e_n, e'_n\}$ 的 Fourier 级数:

$$x(t) = \langle x, e_0 \rangle e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\langle x, e_n \rangle e_n + \langle x, e'_n \rangle e'_n], \quad (4.6)$$

其中 Fourier 系数为: $\langle x, e_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt,$

$$\langle x, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt dt,$$

$$\langle x, e'_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt dt \quad (n=1,2,\dots).$$

令

$$a_0 = 2\langle x, e_0 \rangle e_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt,$$

$$a_n = \frac{\langle x, e_n \rangle}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt dt,$$

$$b_n = \frac{\langle x, e'_n \rangle}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt dt \quad (n=1,2,\dots),$$

于是 $x(t)$ 的 Fourier 展开式(4.6)就可以写成如下的形式:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \quad (4.7)$$

在第四章中也曾讨论过函数的 Fourier 展开, 但对被展开的函数有较强的要求. 例如, 要求 $x(t)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 Dirichlet 定理中的条件(分段单调且在 $[-\pi, \pi]$ 上除有限个第一类间断点外连续), 这就大大地限制了 Fourier 分析的应用范围. 上面讨论的在 $L^2([-\pi, \pi])$ 中函数 $x(t)$ 的 Fourier 展开说明, 只要在 $[-\pi, \pi]$ 上 L 平方可积, $x(t)$ 就可以展开为 Fourier 级数, 比 Dirichlet 定理中的条件弱得多, 这就拓广了 Fourier 分析的应用范围.

值得注意的是, Dirichlet 定理中所讲的 $x(t)$ 的 Fourier 级数实际上是几乎处处收敛于 $x(t)$, 而在 $L^2([-\pi, \pi])$ 空间中 $x(t)$ 的 Fourier 级数则是按 $L^2([-\pi, \pi])$ 空间中的范数收敛于 $x(t)$, 下面来说明 $L^2([-\pi, \pi])$ 中的这种收敛性. 设 $x \in L^2([-\pi, \pi])$, 它能展开为形如(4.6)或(4.7)式的 Fourier 级数, 是指级数的部分和 $S_n(t)$ 按照 $L^2([-\pi, \pi])$ 中的范数收敛于 $x(t)$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - S_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} [x(t) - S_n(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

这种收敛性称为平均平方收敛,简称均方收敛.我们知道,将函数 $x(t)$ 展开为 Fourier 级数也就是用三角多项式 $S_n(t)$ 来逼近 $x(t)$. 根据定理 4.6, 在 $L^2([-\pi, \pi])$ 中, 用 n 次三角多项式来逼近 $x(t)$, $x(t)$ 的 Fourier 三角多项式(即以 $x(t)$ 的 Fourier 系数为系数的三角多项式 $S_n(t)$)是它的最佳逼近, 这里的逼近指的也是按照 $L^2([-\pi, \pi])$ 空间中的范数逼近于 $x(t)$. 也就是说, 在 n 次三角多项式

$$g_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

中, 当 $a_0 = a_0, a_k = a_k, b_k = b_k$ (a_0, a_k, b_k 为 $x(t)$ 的 Fourier 系数) 时误差

$$\|x - g_n\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} [x(t) - g_n(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

最小. 这种逼近称为最佳平均平方逼近,简称最佳均方逼近.

关于均方收敛与均方逼近的含义,在第四章中曾经通过例子作过初步的说明. 读者回忆第四章的例 4.2, 按照 Dirichlet 定理, 周期函数 $x(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < 0, \\ 1, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$ 的 Fourier 级数 $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$ 并非处处收敛于 $x(t)$, 实际上是在 $(-\infty, +\infty)$ 上几乎处处收敛于 $x(t)$. 如果将 $x(t)$ 看成是在空间 $L^2([-\pi, \pi])$ 中的 Fourier 展开, 那末其 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上(也可周期延拓到 $(-\infty, +\infty)$ 上)均方收敛于 $x(t)$, 或者说 $x(t)$ 的 Fourier 三角多项式是 $x(t)$ 的最佳均方逼近. 均方收敛(或均方逼近)与处处收敛、几乎处处收敛不同, 它并不着眼于(也不要求)函数在每个点上的局部收敛性,而是从整体上来看的平均收敛性,也就是要求当 n 充分大时区间 $[-\pi, \pi]$ 上的平均误差

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} [x(t) - S_n(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

可以任意小. 因此, 在实际问题中得到广泛的应用.

上面讨论了 $L^2([-\pi, \pi])$ 空间中任一元素按三角函数系展开为 Fourier 级数的问题. 在实际问题中还有很多重要的特殊函数系, 例如, Legendre 函数系、Hermite 函数系、Laguerre 函数系等都是 $L^2([a, b])$ 空间的完全正交系, $L^2([a, b])$ 中的任一函数也可以按照这些正交系展开成不同的 Fourier 级数. 近年来发展起来的在信号与图象处理以及数据压缩等方面有广泛应用的小波分析实际上也是在 L^2 空间 Fourier 分析的基础上发展起来的, 可以看成是 L^2 空间

中按照某种正交基的 Fourier 展开问题. 由于篇幅所限, 本书不可能对上述问题一一介绍.

习题 8.4

(A)

1. 设 M 与 N 是内积空间 X 中的两个子集, 证明:

- (1) 若 $M \perp N$, 则 $M \subseteq N^\perp$;
- (2) 若 $M \subseteq N$, 则 $N^\perp \subseteq M^\perp$;
- (3) $M \subseteq M^{\perp\perp}$;
- (4) 若 M 为 X 的子空间, 则 $M \cap M^\perp = \{0\}$.

2. 设 M 为 Hilbert 空间 X 的凸子集, $\{x_n\} \subseteq M$, 且

$$\|x_n\| \rightarrow d = \inf_{x \in M} \|x\| (n \rightarrow \infty),$$

证明: $\{x_n\}$ 是 X 中的收敛点列.

3. 设 X 为 Hilbert 空间, M 是 X 的真闭子空间, 证明 M^\perp 必含有非零元.

4. 试求常数 a_0, a_1, a_2 , 使 $\int_0^1 (e^t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2)^2 dt$ 取最小值.

5. 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系, $x, y \in X$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

6. 证明例 4.3 中的结论.

习题答案与提示

第五章

习题 5.1

(A)

2. (1) $(0,1)$; (2) $(1,e)$.

4. (1) $A' = \{(x,y) | x^2 + y^2 \geq 2\}$, $\bar{A} = A'$, A 不是闭集;

(2) $A' = \{(0,0)\}$, $\bar{A} = A \cup A'$, A 不是闭集;

(3) $A' = \emptyset$, $\bar{A} = A$, A 是闭集;

(4) $A' = \mathbb{R}^2$, $\bar{A} = \mathbb{R}^2$, A 不是闭集.

5. (1) 闭集, $\text{int } A = \{(x,y) | x > 0, y > 0, x + y < 1\}$, $\partial A = \{(x,y) | x = 0, 0 \leq y \leq 1 \text{ 或 } y = 0, 0 \leq x \leq 1 \text{ 或 } x + y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$, $\bar{A} = A$;

(2) 开集, $\text{int } A = A$, $\partial A = \{(x,y) | y = x^2\}$, $\bar{A} = \{(x,y) | y \leq x^2\}$;

(3) 闭集, $\text{int } A = \emptyset$, $\partial A = A$, $\bar{A} = A$;

(4) 不是开集也不是闭集, $\text{int } A = \emptyset$, $\partial A = \bar{A} = \{(x,y) | -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$.

6. (1) 有界闭域; (2) 无界区域; (3) 不是区域; (4) 不是区域.

(B)

1. 提示: 利用定理 1.3.

3. 提示: 取 $x_k \in F_k$ 且 $x_k \in \overline{F_{k+1}}$, 再证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k = \xi$.

习题 5.2

(A)

1. (1) $D = \{(x,y) | y \geq 0\}$;

(2) $D = \{(x,y) | |y| \leq |x| \text{ 且 } x \neq 0\}$;

(3) $D = \{(x,y) | x < x^2 + y^2 \leq 2x\}$;

(4) $D = \{(x,y) | |x| \leq y^2, 0 < y \leq 2\}$;

(5) $D = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 > 1\}$;

(6) $D = \{(x,y,z) | z^2 \leq x^2 + y^2 \text{ 且 } (x,y) \neq (0,0)\}$.

2. (1) 平面; (2) 椭圆锥面; (3) 双曲抛物面; (4) 旋转面; (5) 椭圆抛物面; (6) 上半椭

球面.

4. (2) 提示: 沿直线 $y=0$ 与曲线 $y=x^2-x$ 趋向点 $(0,0)$ 的极限值不同.

5. (1) 2; (2) 0; (3) 2; (4) 0.

6. (1) 在 $(0,0)$ 点间断; (2) 在 $x+y=0$ 上间断;

(3) 处处连续; (4) 在 $(0,0)$ 点间断.

7. (1) 存在; (2) 不存在.

(B)

1. (3) 提示: 先证 $f^{-1}(W^C) = [f^{-1}(W)]^C$.

2. 提示: 取 $P_n = \left(n + \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}\right)$, $Q_n = (n, n)$, $n = 1, 2, \dots$, 则 $\|P_n - Q_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), 但 $|f(P_n) - f(Q_n)| \rightarrow 1$ ($n \rightarrow +\infty$).

4. 提示: (1) 利用本节习题(A)中第 12 题的结论;

(3) 题(2) 中两闭集的交集仍为闭集.

习题 5.3

(A)

$$1. (1) \frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2};$$

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)};$$

$$(3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x - y^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{1 + (x - y^2)^2};$$

$$(4) \frac{\partial z}{\partial x} = (1 + xy)^x \left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \right], \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2(1 + xy)^{x-1};$$

$$(5) \frac{\partial z}{\partial x} = x^{y-1} y^x (y + x \ln y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y^{x-1} x^y (x + y \ln x);$$

$$(6) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln \frac{x}{y};$$

$$(7) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x;$$

$$(8) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$(9) \frac{\partial u}{\partial x} = z e^{\sin(yz)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x z^2 e^{\sin(yz)} \cos(yz), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x e^{\sin(yz)} [1 + yz \cos(yz)];$$

$$(10) \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y} + \frac{x}{z^2}.$$

$$2. (1) f_x(x, 1) = 1; (2) f_y\left(\pi, \frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}.$$

$$3. \frac{\pi}{4}. \quad 4. f_x(0, 0) \text{ 不存在}, f_y(0, 0) = 0.$$

$$7. dz = \frac{1}{3} \Delta x + \frac{2}{3} \Delta y. \quad 8. \Delta y = -\frac{5}{42}, dy = -\frac{1}{8}.$$

9. $u = x^2 - \frac{3}{2}y^2 + C$.

12. (1) $1 + mx + ny$; (2) $x + y$.

13. (1) 0.502; (2) 0.97.

14. $\Delta V \approx -628(\text{cm}^3)$.

16. 8.3333 kg/m^3 , 绝对误差为 0.5139 kg/m^3 , 相对误差为 6%;

18. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}$. 19. 5.

20. $\nabla u = -\frac{1}{r^2}(x-a, y-b, z-c)$, 在球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1$ 上各点处 $\|\nabla u\| = 1$.

21. 沿 $t = \left\{-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}$ 方向增大最快, 沿 $-t$ 方向减小最快, 沿与 t 垂直的方向变化率为零.

22. $\nabla r = \frac{1}{r}(x, y, z)$, $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3}(x, y, z)$.

25. (1) $z_{xx} = e^x(2\sin y + \cos y + x\sin y)$, $z_{xy} = e^x(x\cos y + \cos y - \sin y)$,

$$z_{yy} = -e^x(\cos y + x\sin y);$$

(2) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$;

(3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^4 f_{11} + 4xy^3 f_{12} + 4x^2y^2 f_{22} + 2yf_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xy^3 f_{11} + 5x^2y^2 f_{12} + 2x^3yf_{22} + 2yf_1 + 2xf_2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^2y^2 f_{11} + 4x^3yf_{12} + x^4f_{22} + 2xf_1;$$

(4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x^2 f'' + 2f'$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4y^2 f'' + 2f'$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4z^2 f'' + 2f'$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xyf'', \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 4yzf'', \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 4xzf''.$$

26. $u = C_1 \arctan \frac{y}{x} + C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

27. $a = 1, b = -1, c = -6$.

28. (1) $dz = \left(y\phi' + \frac{1}{y}\psi'\right)dx + \left(x\phi' - \frac{x}{y^2}\psi'\right)dy$;

(2) $dz = e^{xy} \{ [y\sin(x+y) + \cos(x+y)]dx + [x\sin(x+y) + \cos(x+y)]dy \}$;

(3) $du = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x dx + y dy + z dz)$;

(4) $du = (2xf_1 + ye^{xy}f_2)dx + (-2yf_1 + xe^{xy}f_2)dy + f_3 dz$.

29. (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}$;

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

30. (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2}{(x+z)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 z^2}{y^2(x+z)^3};$$

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z-x}{z+1}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z+1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(z+1)^2 + (2-x)^2}{(z+1)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y(x-2)}{(z+1)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{(z+1)^2 - 2y^2}{(z+1)^3}.$$

31. (1) -2; (2) -1.

$$32. (1) dz = \frac{F'_1 dx + F'_2 dy}{aF'_1 + bF'_2};$$

$$(2) dz = \frac{1}{f'(u) - 2z} \{ 2x dx + [2y - f(u) + uf'(u)] dy \}, \text{ 其中 } u = \frac{x}{y}.$$

(B)

$$1. e_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \text{ 或 } e_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right).$$

$$2. \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{13}} (15 - 2\sqrt{2}).$$

$$4. \text{ 提示: } |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \leqslant |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)| + |f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)|,$$

利用微分中值定理与连续的定义.

5. 提示: 利用可微的定义, $f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = f(x)[g(x) - g(x_0)] = f(x)[dg(x_0) + \alpha]$. 而 $f(x) = f(x_0) + \beta$, 其中 α, β 为无穷小量.

6. 提示: 由 $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=x} = \frac{df(tx)}{dt}$ 积分可得.

$$7. (1) d^2 u = 2\cos y dx dy - x \sin y dy^2;$$

$$(2) d^2 u = 2\cos y dx dy - x \sin y dy^2 + \sin y d^2 x + x \cos y d^2 y.$$

习题 5.4

(A)

$$1. f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

$$2. f(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \left(y - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2!} \left[- \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(y - \frac{\pi}{4} \right) - \left(y - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] \right\} + R_2,$$

$$\text{其中 } R_2 = o(\rho^2), \rho = \sqrt{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{\pi}{4} \right)^2}.$$

$$3. f(x, y) = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)(y-4) + R_2, (1.08)^{3.96} \approx 1.3552.$$

4. (1) 无极值; (2) 在点(0,0)取极大值1;

(3) $a > 0$ 时在点 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3} \right)$ 取极大值 $\frac{a^3}{27}$, $a < 0$ 时在点 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3} \right)$ 取极小值 $\frac{a^3}{27}$, $a = 0$ 时无极值;

(4) 在点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 取极小值 $-\frac{e}{2}$;

(5) 在点 $(2a-b, 2b-a)$ 取极小值.

5. (1) 最大值为 4, 最小值为 0;

(2) 最大值为 $8+4\sqrt{2}$, 最小值为 -28 .

6. 三个正因子为 $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, 最小值 $\frac{3}{\sqrt[3]{a}}$.

7. $H = 2R = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. 其中 R 为圆柱底半径, H 为高.

8. $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$. 9. $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right)$.

10. 最短距离 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$, 最长距离 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$.

12. 长、宽、高相等.

13. 当三角形顶点在 $(0, 2)$, $(-3, -1)$, $(3, -1)$ 三点时其面积最大, 且此面积为 9.

(B)

1. 提示: 在 $a+b+c=L$ (L 为常数) 的条件下, 求 abc^3 的最大值.

2. 提示: 求出极值后, 利用极值的结论.

3. 提示: (1) 用反证法. 若 u 在 D 内取正最大值, 则 $u_{xx} \leq 0$, $u_{yy} \leq 0$, 题中等式不能成立;

(2) 利用(1)的结论.

习题 5.5

(A)

1. (1) $Df(x) = (a_{ij})_{m \times n}$, 其中所有的 $a_{ij} = 0$; (2) $Df(x) = A$.

2. (1) $Df = \begin{pmatrix} 2x & \cos y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$; (2) $Df = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$;

(3) $Df = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y & 0 \\ y e^x & e^x & 0 \\ z \cos(xz) & 0 & x \cos(xz) \end{pmatrix}$.

3. (1) $Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \tan 1 \end{pmatrix}$; (2) $Df(1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $Df(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

(4) $Df(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

5. (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{yv - xu}{x^2 - y^2};$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^2}{(u-v)(u-w)}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{(u-v)(w-u)}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-1}{(u-v)(w-u)}.$

6. $Dg = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$

(B)

1. 提示: f 可微, 则 f 的每个分量可微, 写出 f 的每个分量的方向导数, 即可得出结论.

2. 提示: 证明 f 的每个分量 f_i 可微即可.

3. 提示: 先求 $(f \times g)(x)$, 再求每个分量的导数.

4. 提示: 利用 n 元数量值函数的 Lagrange 公式.

习题 5.6

(A)

1. (1) $x-1 = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{2}, x+4y+2z-11=0;$

(2) $\frac{x-\frac{3}{\sqrt{2}}}{-3} = \frac{y-\frac{3}{\sqrt{2}}}{3} = \frac{z-\pi}{4\sqrt{2}}, 3x-3y-4\sqrt{2}z+4\sqrt{2}\pi=0;$

(3) $\begin{cases} x=1, \\ z=1, \end{cases} y=0.$

2. $\frac{x-\frac{1}{3}}{3} = \frac{y+\frac{1}{9}}{-2} = z-\frac{1}{27}$ 及 $x-1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}.$

4. (1) $\frac{p}{2}[\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{6}];$

(2) $\sqrt{1+e^4} - \sqrt{1+e^2} + \ln \frac{\sqrt{1+e^2}+1}{\sqrt{1+e^4}+1} + 1;$

(3) $6a;$

(4) $\sqrt{2}(e^{\frac{a}{2}}-1); \quad (5) 2\pi^2 a;$

(6) $8a; \quad (7) \frac{3}{2}\pi a;$

(8) $\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}; \quad (9) \ln(\sec a + \tan a).$

5. (1) $\sqrt{3}(e^{\frac{a}{2}}-1); \quad (2) 6 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(2\sqrt{2}+3);$

(3) $5.$

7. (1) $r = (a \sin \theta \cos \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, c \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$

(2) $r = (v, \frac{b}{a} \sqrt{v^2 - a^2} \cos u, \frac{c}{a} \sqrt{v^2 - a^2} \sin u), a \leq |v| < +\infty, 0 \leq u \leq 2\pi;$

(3) $r = (a(u+v), b(u-v), 2uv)$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$;

(4) $r = (au \cos v, bu \sin v, cu)$, $-\infty < u < +\infty$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

8. $r = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $a \leq v \leq b$.

9. $\rho(\lambda, \mu) = r(u_0, v_0) + \lambda r_u(u_0, v_0) + \mu r_v(u_0, v_0)$,

$\rho(t) = r(u_0, v_0) + t[r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)]$.

其中 ρ 为图形上动点的向径.

10. (1) $(\cos\theta_0 \cos\varphi_0)x + (\cos\theta_0 \sin\varphi_0)y + (\sin\theta_0)z = a$,

$$\frac{x}{\cos\theta_0 \cos\varphi_0} = \frac{y}{\cos\theta_0 \sin\varphi_0} = \frac{z}{\sin\theta_0};$$

(2) $9x + 8y - 30z = 0$, $\frac{x-6}{9} = \frac{y-12}{8} = \frac{z-5}{-30}$;

(3) $x + 11y + 5z = 18$; $x - 1 = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$;

(4) $x + y - (\ln 4)z = 0$, $x - \ln 2 = y - \ln 2 = \frac{z-1}{-\ln 4}$.

11. $x + y - z = 2$, $6x + 3y - 5z = 9$.

12. $x + y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$, $x + y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})$.

13. $x + 3 = \frac{y+1}{3} = z - 3$.

14. $x + 2 = 1 - y = \frac{z+4}{2}$, $x - 2 = -y - 1 = \frac{z-4}{2}$.

15. $\frac{1}{5}(0, \sqrt{10}, \sqrt{15})$.

16. $\frac{11}{7}$.

17. $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{z_0 z}{c^2}$.

(B)

1. 先证明 Oz 轴为转轴, 再证明曲面上点 P 处的法向量 n , 向径 \overrightarrow{OP} 及转轴上的向量 $(0, 0, 1)$ 共面.

2. 利用 $\|F\|^2$ 为常数当且仅当 $\frac{\partial}{\partial u} \|F\|^2 = 0$ 及 $\frac{\partial}{\partial v} \|F\|^2 = 0$.

3. 设 Σ 的所有法线均通过定点 X_0 , 则 $r(u, v) - X_0$ 及 $n = r_u \times r_v$ 均是 Σ 上点 $r(u, v)$ 处的法向量, 故 \exists 数量值函数 $f(u, v)$, 使 $r(u, v) - X_0 = f(u, v)n$, 由此并利用上题和 $r_u \cdot n = 0$ 及 $r_v \cdot n = 0$ 可得 $[r(u, v) - X_0]$ 的长度为常数.

4. 利用有约束极值的 Lagrange 乘数法.

习题 5.7

(A)

1. $\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}$, $\mathbf{B}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}$, $\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$.

2. (1) $\mathbf{T} = \frac{1}{5}(-3\cos t, 3\sin t, -4)$, $\mathbf{N} = (\sin t, \cos t, 0)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{5}(4\cos t, -4\sin t, -3)$;

(2) $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2(1+t^2)}}(1-t^2, 2t, 1+t^2)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{1+t^2}(-2t, 1-t^2, 0)$,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2(1+t^2)}}(t^2-1, -2t, 1+t^2);$$

(3) $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t, a\sin t, b)$, $\mathbf{N} = (\sin t, \cos t, 0)$,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b\cos t, b\sin t, -a).$$

3. $bx - ay + abz = 2ab$, $a(b^2+1)x + by - b^2z = a^2(b^2+1) - b^2$.

4. 次法线方程: $\rho = (\text{cht}, \text{sht}, t) + \lambda(-\text{sht}, \text{cht}, -1)$;

主法线方程: $\rho = (\text{cht}, \text{sht}, t) + \lambda(2\text{cht}, 0, -\text{sh}2t)$.

5. 主法线方程: $\rho = (a\cos t, a\sin t, bt) + \lambda(\cos t, \sin t, 0)$.

7. (1) $\frac{3}{25|\sin t \cos t|}$; (2) $\frac{1}{3(1+t^2)^2}$; (3) $\frac{a}{a^2+b^2}$.

8. (1) 2; (2) 1; (3) $\frac{2}{3a|\sin 2t_0|}$; (4) $\frac{1}{4a \left| \sin \frac{t_0}{2} \right|}$.

9. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 10. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$.

11. 约为1246, 在原点处按圆周运动作近似处理.

14. (1) $\frac{4}{25\sin t \cos t}$; (2) $\frac{1}{3(1+t^2)^2}$; (3) $\frac{-b}{a^2+b^2}$.

(B)

1. $r = \left(\frac{3y^2}{2p} + p, -\frac{y^3}{p^2} \right)$, 或直角坐标方程 $27p\eta^2 = 8(\xi - p)^3$.

2. $\rho(s) = (a\cos\omega s, a\sin\omega s, b\omega s) + (a_0 - s)\omega(-a\sin\omega s, a\cos\omega s, b)$,

其中 $\omega = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, a_0 为任意常数.

3. 提示: $r(s)$ 处的曲率中心为 $\rho(s) = r(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s)$, 只要证明 $r'(s) \cdot \rho'(s) = 0$ (利用 Frenet 公式).

4. 提示: 设曲线方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$ 其自然参数方程为: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, 且设 $s=0$ 对应于点 $(0, 0, 0)$, 则有

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}F[x(s), y(s), z(s)] = 0, \\ \frac{d}{ds}G[x(s), y(s), z(s)] = 0, \\ [x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 + [z'(s)]^2 = 1. \end{cases} \quad (*)$$

在(*)式中令 $s=0$, 可得 $\mathbf{T}(0) = \mathbf{r}'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$; 对(*)式关于 s 再求导后令 $s=0$, 可得 $\mathbf{r}''(0) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$, 从而得 $\kappa = \frac{1}{9}\sqrt{6}$, $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$, $\mathbf{B}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$.

5. 提示: (1) 只要证曲线的曲率 $\kappa \equiv 0$ 或 $\mathbf{r}''(s) \equiv 0$;
 (2) 只要证曲线的挠率 $\tau \equiv 0$ 或 $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r''''}) \equiv 0$.

综合练习题

$$y = 0.884x - 5.881, \quad 100.2 \text{ (千元)}.$$

第六章

习题 6.1

(B)

2. 提示: 由原题知 $\exists M \in (\Omega)$, 使 $f(M) > 0$. 又 f 连续, 则存在 M 的邻域, 在此邻域内 $f > 0$.

习题 6.2

(A)

1. $\iint_{(\sigma)} [f_2(x, y) - f_1(x, y)] d\sigma.$

2. (4) 当 $f(x, y)$ 是 y 的奇函数时, $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 0$;

当 $f(x, y)$ 是 y 的偶函数时, $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) d\sigma.$

3. (1) $\frac{2}{21}$; (2) $\frac{9}{4}$;

(3) $\frac{1}{8}$; (4) $\frac{2}{3}$;

(5) 3; (6) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

4. (1) $\int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx$, $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} f(x, y) dy$;

(2) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{y+1} f(x, y) dx$, $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{x-1}^1 f(x, y) dy$.

5. (1) $\int_{-\frac{1}{4}}^0 dy \int_{-\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}}}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}}} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{y-1}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}}} f(x, y) dx$;

(2) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx - \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx$;

(3) $\int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$;

(4) $\int_0^2 dx \int_{x/2}^3 f(x, y) dy + \int_2^{18} dx \int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^3 f(x, y) dy$.

6. (1) $\pi(e^b^2 - e^a^2)$; (2) $-\frac{8}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $\frac{\pi a^2}{2}$.

7. (1) $\frac{2}{3}\pi ab$; (2) $\frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

8. (1) $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{\pi}{2}$; (3) $\frac{35\pi a^4}{12}$.

9. $\frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

10. (1) $\left(\frac{15}{8} - 2\ln 2\right)a^2$; (2) $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)a^2$;

(3) $\frac{3}{2}\pi a^2$.

11. (1) $\frac{128}{3}$; (2) $\frac{32}{9}a^3$; (3) $\frac{16}{3}a^3$; (4) $\frac{1}{24}$.

12. $\frac{5k\pi}{3}a^3$.

13. $\frac{4}{3}\pi[64 - 15\sqrt{15}]$.

(B)

1. $F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t^3}{3}, & 0 < t \leq 1, \\ t - \frac{2}{3} - \frac{(t-1)^3}{6}, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$

2. $-\frac{2}{5}$.

3. $\frac{A^2}{2}$.

6. $\frac{\pi}{|a_1b_2 - a_2b_1|}$. 提示: 令 $a_1x + b_1y + c_1 = u$, $a_2x + b_2y + c_2 = v$.

7. $2x - z = 0, \quad V_{\min} = \frac{\pi}{2}$.

9. $\frac{H}{3}$.

习题 6.3

(A)

1. (1) $f(x, y, z)$ 关于 z 分别是奇函数和偶函数;

(2) $f(x, y, z)$ 关于 x 分别是奇函数和偶函数;

(3) $f(x, y, z)$ 关于 y 分别是奇函数和偶函数.

2. (1) $\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x, y, z) dz;$

(2) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^2 f(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) r^2 \sin\theta dr;$

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} d\rho \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z) \rho dz;$

(4) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} d\rho \int_{a-\sqrt{a^2-\rho^2}}^{\sqrt{a^2-\rho^2}} f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z) \rho dz.$

3. (1) $\frac{a^9}{36}; \quad (2) \frac{\pi^2 - 8}{16};$

(3) $2\pi e^2; \quad (4) \frac{4}{15}\pi(A^5 - a^5);$

(5) $\frac{13}{4}\pi; \quad (6) \pi \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \right);$

(7) $\frac{\pi(2^6 - 1)}{48}; \quad (8) \frac{1}{6}\sin 1.$

4. (1) $\frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)(2 - \sqrt{2}); \quad (2) \frac{17}{12} - 2\ln 2;$

(3) $\frac{\pi}{3}a^3; \quad (4) \frac{4}{3}\pi abc;$

(5) $\frac{4}{3}\pi abc(2\sqrt{2} - 1).$

(B)

1. (1) $\frac{\pi}{6}(7 - 4\sqrt{2}); \quad (2) \frac{\pi}{6}(\sqrt{2} - 1);$

(3) $\frac{\pi^2}{4}abc.$

$$\begin{aligned} 2. & \int_0^1 dz \left\{ \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y}}^1 f(x, y, z) dx + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx \right\} \\ & + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y}}^1 f(x, y, z) dx \\ & = \int_0^1 dx \left\{ \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \right\}. \end{aligned}$$

3. $\frac{\pi}{2}t^3 \ln(1+t^2)$.

4. $2\pi ht \left[\frac{h^3}{3} + f(t^2) \right], \quad \frac{\pi}{3}h[h^2 + f(0)]$.

5. $\frac{4}{15}\pi abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

习题 6.4

(A)

1. (1) $\left(-\frac{a}{2}, \frac{8}{5}a\right)$; (2) $\left(\pi a, \frac{5}{6}a\right)$; (3) $\rho = \frac{5}{6}a, \varphi = 0$.

2. (1) $\left(0, 0, \frac{3}{8}c\right)$; (2) $\left(0, 0, \frac{5a}{6\sqrt{3}-5}\right)$; (3) $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2\right)$.

3. $I_x = \frac{1}{64}(7e^8 + 1), I_y = \frac{1}{32}(34e^4 + 6)$.

4. $\frac{8}{3}\mu\pi$.

5. $M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)$.

6. $2\pi k\mu H(1 - \cos\alpha)$, 其中 k 为引力常数.

7. $\frac{\pi R^2 H}{6}(3R^2 + 2H^2)$.

8. $\left[\frac{1}{h}\left(\frac{V}{32\pi} + h^3\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]$.

(B)

1. $\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

2. $-\frac{2GMM'}{a^2}\left(1 + \frac{1}{h}\left\{[a^2 + (b-h)^2]^{\frac{1}{2}} - (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}\right\}\right)$.

4. $\frac{7}{5}mR^2$.

习题 6.5

(A)

1. (1) $\frac{\pi}{4}$; (2) $\frac{8}{3}$; (3) $\frac{\pi}{4}$.

2. (1) $F'(x) = 2xe^{-x^2} - e^{-x^2} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy$;

(2) $F'(y) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b+y}\right)\sin y(b+y) - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a+y}\right)\sin y(a+y)$;

(3) $F'(a) = f(a, -a) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx$; 其中 $u = x + a, v = x - a$;

- (4) $F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$.
3. (1) $\frac{\pi}{8} \ln 2$; (2) $\pi \ln \frac{a+b}{2}$.
4. (1) 一致收敛; (2) 一致收敛;
- (3) 一致收敛; (4) 不一致收敛.
5. (1) $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$; (2) $\ln \frac{b}{a}$.
6. (1) 2π ; (2) $\frac{\pi}{2}$;
- (3) 2; (4) $\frac{\pi}{2}$.

(B)

1. $F(x) = \begin{cases} 2f(x), & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases}$
2. 提示: $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$
 $= \lim_{A \rightarrow 0^+} \left(\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx \right).$

3. 0.

习题 6.6

(A)

1. (1) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1)$; (2) $2\pi a^{2n+1}$;
 (3) $\frac{1}{3}[(t_0^2 + 2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}]$; (4) $1 + \sqrt{2}$;
 (5) π .
3. (1) $2a^2$; (2) $2(2 - \sqrt{2})a^2$; (3) $\frac{2ka^2}{1 + 4k^2} \sqrt{1 + k^2}$.
4. $2a^2$. 5. $3\pi R^2$.
6. (1) $I_z = \frac{2}{3}\pi a^2 \sqrt{a^2 + k^2}(3a^2 + 4\pi^2 k^2)$;
 (2) $\bar{x} = \frac{6ak^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \bar{y} = \frac{-6\pi ak^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \bar{z} = \frac{3k(\pi a^2 + 2\pi^3 k^2)}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}$.
7. $\sqrt{2}\pi$.
8. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{12}\pi R^2 (\text{km})^2$.
9. (1) $\frac{12}{5}\pi a^2$; (2) $2\sqrt{2}\pi a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.
10. (1) $4\sqrt{61}$; (2) $\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$.

(3) $2\pi \arctan \frac{H}{R}$;

(4) $\pi^2 [a \sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})]$;

(5) $\frac{1}{2}\pi a^4 \sin a \cos^2 a$.

11. μa .

12. (1) $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$; (2) $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

13. $\frac{\pi \mu a^3}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.

14. (1) $4\pi \mu h R^3$; (2) $2\pi \mu h R \left[R^2 + \frac{2}{3} h^2 \right]$; (3) $2\pi \mu h R \left[R^2 + \frac{8}{3} h^2 \right]$.

(B)

1. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. 2. $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx$.

3. (1) $\frac{64}{3}\pi a^2$; (2) $16\pi^2 a^2$; (3) $\frac{32}{3}\pi a^2$.

4. $4\pi^2 ab$. 6. $-\frac{4\pi R^2}{a^2} \mu$; 7. $\frac{9h_0}{124a}(5\sqrt{5}+1)$.

习题 6.7

(A)

1. (1) $Ax + By + Cz + k = 0$, (k 为非零常数);(2) 不含原点的圆锥面 $z = k \sqrt{x^2 + y^2}$ ($|k| \leq 1$ 为常数);(3) $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (R 为非零常数);(4) 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ (除原点).

2. (1) $-\frac{14}{15}$; (2) (i) $\frac{1}{3}$; (ii) $\frac{17}{30}$; (iii) $-\frac{1}{20}$;

(3) $-2ab\pi$; (4) 10; (5) $\frac{1}{35}$.

3. (1) πR^2 ; (2) 0.

4. -2π .

5. (1) $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$; (2) 0.

6. (1) $-\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 e^\rho d\rho$;

(2) $\int_0^t dx \int_0^1 (x+y+1) dy = \int_0^t dx \int_0^1 (x+y) dy + \int_0^t dy \int_0^1 (y+z) dz = \int_0^t dy \int_0^1 (y-z) dz$.

8. (1) $-4R^3$; (2) 0.

9. $-\frac{2}{3}$.

10. (1) $\pi R^2 \left(1 + \frac{R^2}{4}\right)$; (2) $\frac{1}{8}$.

11. (1) $2\pi a^2 h$; (2) $3\pi a^2 h$.

12. $4\pi R^3$.

(B)

1. $-\frac{\pi}{4} R^3$.

2. (1) $\frac{1}{2}\pi^2 R$; (2) $\frac{4}{3}\pi abc$.

5. 提示: $|Pdx + Qdy| = |P\cos\alpha + Q\sin\alpha| ds \leq \sqrt{P^2 + Q^2} ds$.

6. $-2\pi R^2$; 提示: 在计算时注意将球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 代入.

习题 6.8

(A)

1. (1) $\frac{\pi}{2} R^4$; (2) $-2\pi ab$;

(3) $-46 \frac{2}{3}$; (4) $\frac{4}{5}(e^x - 1)$.

2. $\frac{3\pi}{8} a^2$.

4. $2S$, 其中 S 为由简单闭曲线(C)所围区域的面积.

5. (1) $\frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C$; (2) $y^2\cos x + x^2\cos y + C$.

6. (1) -2 ; (2) 9 ; (3) $\frac{e-1}{2}$.

7. (1) $u(x, y) = x^2\cos y + y^2\cos x + C$; (2) $u(x, y) = e^x[e^y(x - y + 1) + y] + C$.

8. $-\sqrt{3}\pi a^2$.

10. (1) $2\pi r^2$; (2) $2\pi R^2$.

11. $\text{rot } A|_M = -i - 3j + 4k$, $\text{rot}_n A|_M = \frac{1}{3}$.

12. (1) 0 ; (2) 0 .

13. $4z(xz - 4)j + 3x^2yk$.

14. (1) $3a^4$; (2) $\frac{12}{5}\pi a^5$;

(3) $\frac{\pi}{2}h^4$; (4) $\pi ab(2c + 1)$;

(5) $\pi a^2(e^{2a} - 1)$.

15. $2\pi a^3$.

16. (1) 6 ; (2) 8 ; (3) 36 .

17. (1) $\cos z - \sin xy + C$; (2) $x^2\cos y + y^2\cos x + \frac{1}{2}z^2 + C$.

18. (1) $u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$; (2) $u = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C$.

(B)

3. $\frac{7}{8}\pi$.

4. $\frac{93\pi}{5}(2-\sqrt{2})$.

5. 4π ;

6. $(x^2 + y^2)f_{11} + \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right) f_{22} + \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right) f_{33} + \frac{2y}{z} f_{12} + \frac{2xy}{z^4} f_{23} + \frac{2x}{z} f_{13} + \frac{2}{z^3} [xf_2 + yf_3]$,

7. $\frac{C_1}{r} + C_2$.

综合练习题

1. 1) 油库容积为 $\frac{432}{5}\pi m^3$;

2) 提示: 先求出油库界于 $y = -6$ 和 $y = 6$ ($-6 \leq y \leq 6$) 之间的容积 V_y ,

$$V_y = \pi \left[\frac{y^5}{6480} - \frac{x^3}{18} + 9x + \frac{216}{5} \right].$$

然后求五次方程 $\pi \left[\frac{y^5}{6480} - \frac{x^3}{18} + 9x + \frac{216}{5} \right] = V$. 当 V

分别等于 $10, 20, 30, \dots$ 时的近似根.

2. 提示: 问题的本质是曲面 $z = \left(1 - \frac{x^2}{1+\alpha} - \frac{y^2}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的面积比 2π 小还是比 2π 大, 将此面积记为 $S(\alpha, \beta)$, 此值不易求, 利用 Taylor 公式将 $S(\alpha, \beta)$ 在 $(0, 0)$ 展开后可知: 当 $\alpha + \beta < 0$ 时, $S(\alpha, \beta) < 2\pi$; 当 $\alpha + \beta > 0$ 时, $S(\alpha, \beta) > 2\pi$.

第七章

习题 7.1

(A)

1. (1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x - \beta x^3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{4}x_3; (x_1 = x); \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = y, \\ y = -f(x)y - g(x). \end{cases}$

2. 在直线 $x = \pm 1$ 上解不唯一.

4. (1) $x^2 + y^2 = C^2$, 圆; (2) $\begin{cases} x = C_1 \cos(t + C_2), \\ y = C_1 \sin(t + C_2), \end{cases}$ 螺旋线;

(3) 螺旋线在相平面内的投影为圆.

5. $\begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y = C_2 e^t; \end{cases} \quad y = Cx \text{ 与 } x = 0.$

7. (1) $\begin{cases} x = C_1 t, \\ \sin y = C_2 t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ xy - z = C_2. \end{cases}$

(B)

2. (1) $\begin{cases} y + x + 1 = C_1 e^x, \\ t^2 + x + \frac{1}{2} = C_2 e^{2x}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1, \\ xyz = C_2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + ue^{-y} = C_1, \\ y + ue^{-x} = C_2. \end{cases}$

习题 7.2

(A)

1. (2), (4)是;(1), (3)不是.

11. (2) $\begin{cases} x = C_1 t^2 + C_2 t^2(1 - \ln t) + \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{2} \ln^2 t + \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{4}, \\ y = -C_1 t + C_2 t \ln t + t^2 \ln^2 t + \frac{t}{2} \ln t - \frac{3}{4} t^3 + \frac{3}{4} t. \end{cases}$

习题 7.3

(A)

1. (1) $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^t & e^{2t} \\ 0 & 2e^t & 2e^{2t} \\ 2 & e^t & 0 \end{pmatrix};$

(2) $X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} & e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix};$

(3) $X(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t + \sin t & \sin t - \cos t \end{pmatrix};$

(4) $X(t) = \begin{pmatrix} 0 & (11+15t)e^t & 3e^t \\ 0 & (-7-30t)e^t & -6e^t \\ e^{-2t} & 100te^t & 20e^t \end{pmatrix}.$

2. (1) $x = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t \\ 2t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t};$

(2) $x = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix};$

$$(3) \quad x = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} t^2 - 3t + 3 \\ t \\ t - 1 \end{pmatrix}.$$

(B)

$$1. (1) \quad X(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & -1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad X(t) = \begin{pmatrix} -2e^{5t} & (\sin t - \cos t)e^{2t} & 2\cos t e^{2t} \\ 0 & -\cos t e^{2t} & (\sin t + \cos t)e^{2t} \\ e^{5t} & \left(-\frac{2}{5}\sin t + \frac{4}{5}\cos t\right)e^{2t} & \left(-\frac{2}{5}\sin t - \frac{6}{5}\cos t\right)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad \begin{cases} I_1 = -\frac{1}{87}e^{-\frac{3}{5}t} + \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{9}{58}\cos t + \frac{21}{58}\sin t, \\ I_2 = -\frac{5}{81}e^{-\frac{3}{5}t} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{16}{58}\cos t + \frac{18}{58}\sin t, \\ I_3 = I_1 - I_2. \end{cases}$$

习题 7.4

(A)

2. 否.

5. (1) $x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-3t}$; (2) $x = (C_1 + C_2 t) e^{3t}$;
 (3) $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$; (4) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$;
 (5) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$; (6) $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

6. (1) $x = e^{-t} \cos t$; (2) $y = (2+x)e^{-\frac{x}{2}}$; (3) $y = 3e^{-2x} \sin 5x$.

8. (1) $x = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 e^{-t} + e^t$; (2) $x = C_1 \cos at + C_2 \sin at + \frac{e^t}{1+a^2}$;
 (3) $x = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}t} + \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{5}t^2 + \frac{7}{25}t$;
 (4) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \left(\frac{3}{2}t^2 - 3t\right)e^{-t}$;
 (5) $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4}xe^x \cos 2x$;
 (6) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}x \cos x + \frac{2}{9} \sin x$;
 (7) $y = -5e^x + \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}$;
 (8) $x = \frac{1}{2}(e^{9t} + e^t) - \frac{1}{7}e^{2t}$.

11. (1) $x = \frac{1}{t^2} [C_1 \sin(3 \ln t) + C_2 \cos(3 \ln t)]$;

(2) $y = x(C_1 + C_2 \ln x) + C_3 x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x(\ln x)^2$;

(3) $y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x \ln^2 x + \frac{1}{9}x^4$.

12. (1) $x = C_0 \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2 \cdot 4}t^4 - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdots 2n} t^{2n} + \cdots \right)$

$$+ C_1 \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3 \cdot 5}t^5 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} t^{2n-1} + \cdots \right);$$

(2) $y = C_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k-5}{3k} \cdot \frac{3k-8}{3k-3} \cdots \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) x^{3k} \right]$

$$+ C_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k-4}{3+1} \cdot \frac{3k-7}{3k-2} \cdots \frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) x^{3k+1} \right].$$

(B)

4. $x = C_1 \frac{\cos t}{t} + C_2 \frac{\sin t}{t}$;

5. $x = C_0 \left(1 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \cdots \right) + C_1 \left(t - \frac{1}{12}t^4 + \cdots \right) + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{12}t^4 + \cdots \right)$.

习题 7.5

(A)

1. 轨线是积分曲线在相空间的投影.

2. 积分曲线不能相交, 非自治系统的轨线可能相交.

3. 闭轨线.

4. 常数解.

5. 否.

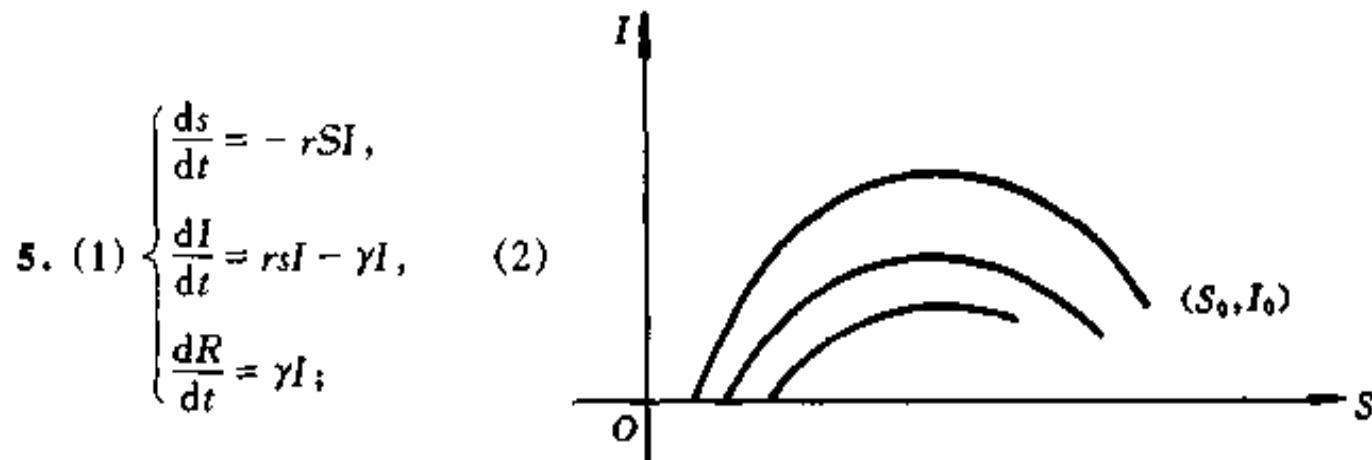
6. (1) 稳定; (2) 漐近稳定; (3) 不稳定; (4) 稳定;

(5) $a < 0$, 漐近稳定; $a = 0$, 稳定; $a > 0$, 不稳定; (6) 漐近稳定.

7. (1) 不稳定; (2) 漐近稳定; (3) 不稳定; (4) 漐近稳定.

(B)

2. (1) 漐近稳定; (2) 漐近稳定; (3) 漐近稳定; (4) 不稳定.



$$(3) \rho = \frac{\gamma}{r}.$$

综合练习题

1. 设 $w(t)$ 为一头猪出生七天后的体重(单位:kg), $y(t)$ 为一头猪从出生到七天后所消耗的总饲养费用, C 为每公斤生猪的出售价, $L(t)$ 为 t 时刻出售生猪可获得的纯利润, 则所给问题的数学模型为: 求函数

$$L(t) = Cw(t) - y(t)$$

的最大值点, 其中 $w(t)$ 与 $y(t)$ 满足下列微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{w}{\bar{w}}\right), \\ \frac{dy}{dt} = b + ew, \end{cases}$$

和初值条件:

$$w(0) = w_0 (\text{初生小猪的体重}), y(0) = 0,$$

C, α, b, e 均为正常数, \bar{w} 为生猪体重的最大值.

设 $w(t_s) = w_s$ 为可上市出售的猪的最小体重, t_s 为饲养时间, 注意到达到最小可出售体重且能获利的充要条件为

$$Cw_s - y(t_s) \geq Cw_0,$$

则可得下列结论:

(i) 若 $\frac{\bar{w}\gamma}{\bar{w} - w_s} < Ca + \beta$, 则

$$t_0 = \frac{\bar{w}}{\alpha} \ln \frac{(\alpha + \beta)(\bar{w} - w_0)}{\alpha \bar{w}} > \frac{\bar{w}}{\alpha} \ln \frac{\bar{w} - w_0}{\bar{w} - w_s} = t_s.$$

这时应让猪在达到最低销售体重后再饲养一段时间当 $t = t_0$ 时再出售可获最大利润;

(ii) 若 $\frac{\bar{w}\gamma}{\bar{w} - w_s} > Ca + \beta$ 则有 $t_0 < t_s$, 这时只能等到 $t = t_s$ 才能销售出去;

(iii) 若 $\frac{\bar{w}\gamma}{\bar{w} - w_s} = Ca + \beta$ 则 $t_0 = t_s$, 故此时出售利润最大.

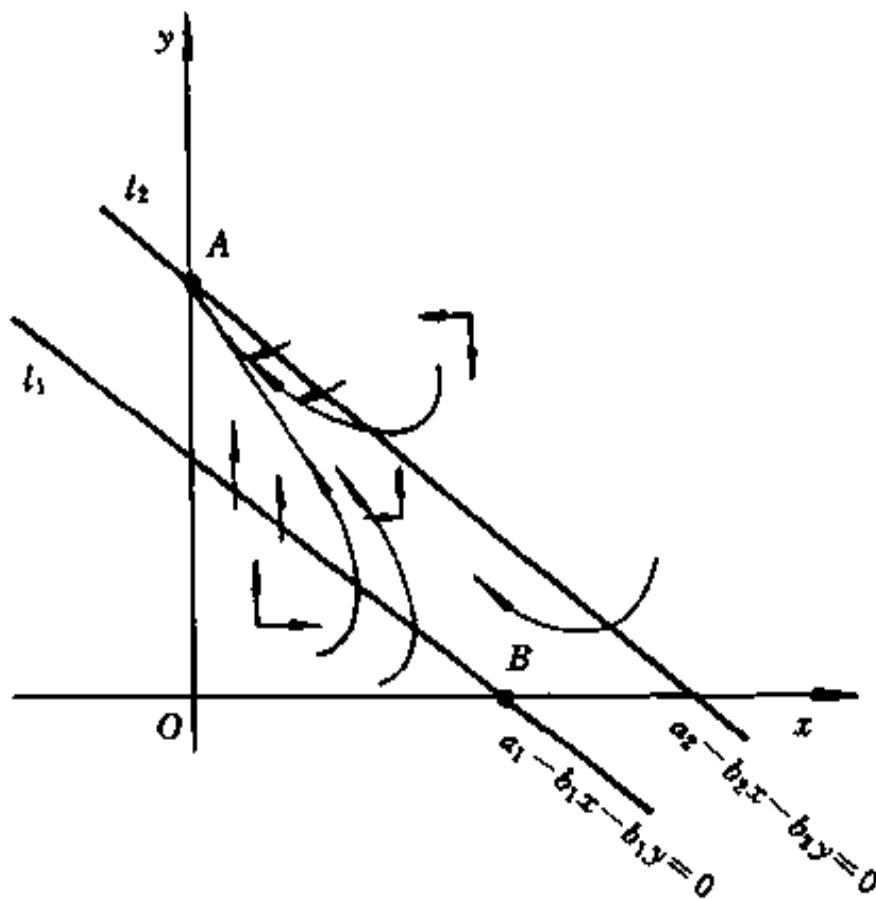
2. 设两竞争种群 x 和 y 的变化规律符合 Volterra 模型. 当此两种群生活习性相近时, 近似地有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_1 - b_1x - b_1y), \\ \frac{dy}{dt} = y(a_2 - b_2x - b_2y), \end{cases} \quad (1)$$

其中 a_1, b_1, a_2, b_2 均为正常数.

方程组(1)有三个平衡点 $O(0,0)$, $A\left(0, \frac{a_2}{b_2}\right)$, $B\left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$. $x=0$ 与 $y=0$ 均为轨线. 直线 $a_1 - b_1x - b_1y = 0$ 与 $a_2 - b_2x - b_2y = 0$ 分别为方程组(1)的垂直等倾线和水平等倾线, 它们把第一象限分成了三部分. 利用由方程组(1)所确定的方向场, 分析轨线的走向如图所示

(不妨设 $\frac{a_2}{b_2} > \frac{a_1}{b_1}$). 由图即可对竞争排斥原理作出解释.



(第 2 题图)

第八章

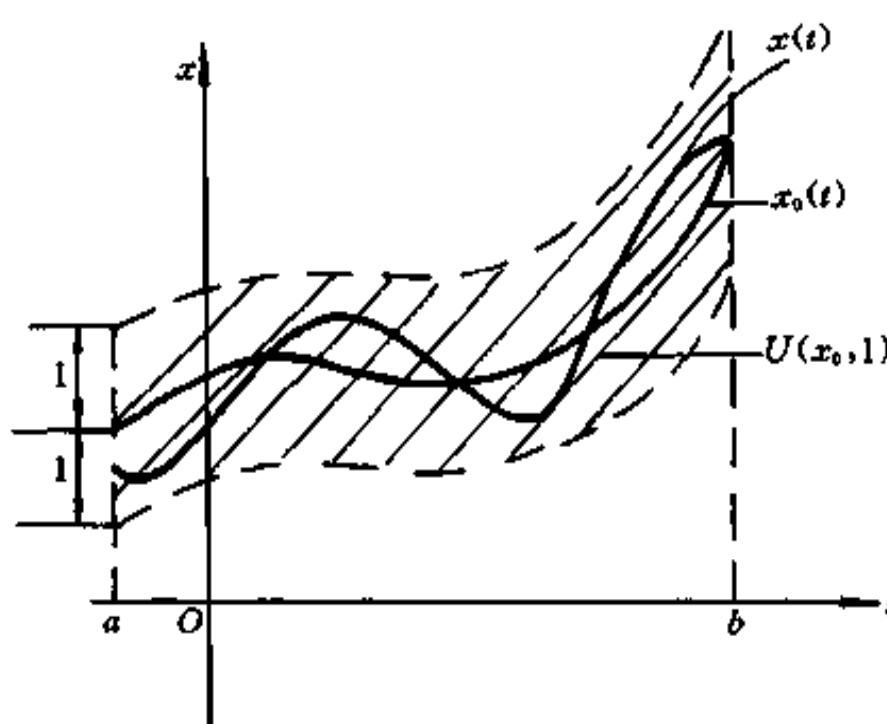
习题 8.2

(A)

1. 提示: 用反证法及连续函数若在一点处大于零则必在该点的某一邻域内大于零的性质.

7. (1) 不能; (2) 能.

8.



(第 8 题图)

10. 提示: 证明等式 $U(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \delta) = \alpha U(x_1, \delta) + (1-\alpha)U(x_2, \delta)$, 其中 $x_1, x_2 \in A^{\circ}, \alpha > 0, \delta > 0$.

12. 提示: (1) \Rightarrow (2), 用反证法; (2) \Rightarrow (3), 用邻域的语言来表述连续的定义.

15. 提示: 利用第 6 题的结果, 并证明完备性.

17. 提示: 取 $X = C[a, b]$, 证明映射 $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau, t \in [a, b]$$

是一个压缩映射.

(B)

2. 提示: (1) 只要在 \mathbb{R}^2 中证明即可. 分别证明不等式:

$$\frac{1}{2} \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1, \frac{\sqrt{2}}{2} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{2} \|x\|_2;$$

(2) 用反证法证明充分性.

4. 提示: 证明由球心组成的点列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 它的极限 x 就是唯一的公共点.

习题 8.3

(A)

5. 提示: $E(f \geq \alpha)$ 与 $E(f < \alpha)$ 互余.

7. 提示: $E_1(f \geq \alpha) = E_1 \cap E(f \geq \alpha)$.

10. f 在 $[0, 1]$ 上 L 可积, $(L) \int_{[a, b]} f(x) dm = b^3 - a^3$.

11. (1) 0; (2) 0; (3) 0.

习题 8.4

(A)

2. 提示: 对 $\frac{x_n}{2}$ 与 $\frac{x_m}{2}$ 利用平行四边形公式证明 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列.

3. 提示: 利用正交分解定理.

4. 提示: 取 $M = \text{span}\{1, t, t^2\}$, 在 $L^2([0, 1])$ 空间求 $f(t) = e^t$ 在 M 中的最佳逼近元.

$a_0 \approx 1.0130, a_1 \approx 0.8511, a_3 \approx 0.8392$.

5. 提示: 利用 Cauchy 不等式与 Bessel 不等式.

参 考 文 献

- [1] 西安交通大学高等数学教研室编.高等数学 下册.第二版.北京:高等教育出版社,1985
- [2] 萧树铁,居余马主编.高等数学 第Ⅲ卷 多元微积分与微分几何初步.北京:清华大学出版社,1997
- [3] 朱自清主编.工科用数学分析 下册.武汉:华中理工大学出版社,1995
- [4] 廖可人,李正元编.数学分析 第三册.北京:高等教育出版社,1986
- [5] 欧阳光中,朱学炎,秦曾复编.数学分析 下册.上海:上海科学技术出版社,1982
- [6] 吉林大学数学系编.数学分析 下册.北京:人民教育出版社,1978
- [7] 李心灿主编.高等数学应用 205 例 北京:高等教育出版社,1997
- [8] 陈维桓编著.微分几何初步 北京:北京大学出版社,1990
- [9] 梅向明,黄敬之编.微分几何 北京:人民教育出版社,1981
- [10] 吴大任编.微分几何讲义 第三版.北京:人民教育出版社,1979
- [11] 丁同仁,李承治编.常微分方程教程 北京:高等教育出版社,1991
- [12] 叶彦谦编.常微分方程讲义 第二版.北京:人民教育出版社,1982
- [13] 蔡燧林,盛骤编.常微分方程组与稳定性理论 北京:高等教育出版社,1986
- [14] M. Braun 著.微分方程及其应用 下册.张鸿林译.北京:人民教育出版社,1980
- [15] 廖晓昕著.稳定性的数学理论及应用 武汉:华中师范大学出版社,1988
- [16] 高慧贞,黄启宇编著.微分方程定性与稳定性理论 福州:福建科学技术出版社,1995
- [17] 蔡燧林,钱祥征编著.常微分方程定性理论引论 北京:高等教育出版社,1994
- [18] 龚怀云,寿纪麟,王绵森.应用泛函分析 西安:西安交通大学出版社,1985
- [19] 郑维行,王声望编.实变函数与泛函分析概要 第一、二册.第二版.北京:高等教育出版社,1992
- [20] V. Mahajan , R . A . Peterson , Model for innovation diffusion . London : Sage University Press, 1985
- [21] V. Capasso, A. D. Liddo, L. Maddalema. Asymptotic behavior of a nonlinear model for the geographical diffusion of innovations. Dynamic system and applications, 3. 1994. 207—220