

Calcul de réécriture : fondements et applications

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 25 octobre 2000

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Henri Poincaré – Nancy 1
(spécialité informatique)

par

Horatiu Cirstea

Composition du jury

- Président :* Guy Cousineau, Professeur, Université Denis Diderot - Paris VII, France
- Rapporteurs :* Nachum Dershowitz, Professeur, Université de Tel Aviv, Israel
Thérèse Hardin, Professeur, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, France
François Lamarche, Directeur de recherche, INRIA, France
- Examineurs :* Alexander Bockmayr, Professeur, Université Henri Poincaré - Nancy 1, France
Claude Kirchner, Directeur de recherche, INRIA, France

Je voudrais tout d'abord remercier chaleureusement Claude Kirchner pour m'avoir aidé et guidé tout au long de la préparation de cette thèse. Il a été toujours disponible pour discuter de mes idées, souvent pas claires ou mal formulées ; ses critiques, commentaires et conseils ont certainement permis à cette thèse d'être ce qu'elle est. Je tiens à lui exprimer ma reconnaissance pour son intérêt et pour son soutien.

Je tiens ensuite à remercier sincèrement ceux qui ont bien voulu prendre part à ce jury.

Thérèse Hardin qui a accepté de bien vouloir rapporter cette thèse. Je la remercie d'avoir lu et disséqué cette thèse jusque dans les parties les plus techniques. Ses conseils et critiques m'ont permis d'apporter des améliorations à ce document.

Nachum Dershowitz qui m'a fait l'honneur de s'intéresser à ce travail en acceptant, malgré l'obstacle de la langue, la lourde tâche de rapporteur. Ses commentaires et conseils très pertinents permettront encore d'améliorer ce travail.

François Lamarche qui, en tant que rapporteur interne, a accepté d'examiner cette thèse. Je le remercie pour tout l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail.

Alexander Bockmayr pour avoir accepté d'examiner ce document et de participer à mon jury. Je le remercie vivement pour ses questions et commentaires fort judicieux.

Guy Cousineau qui m'a fait l'honneur de présider le jury. Par ses questions et ses remarques, il m'a témoigné un grand intérêt pour les travaux effectués.

Je profite de l'occasion qui m'est offerte pour remercier toute l'équipe PROTHEO pour son accueil. Je remercie tout particulièrement Hélène Kirchner qui, en tant que directeur de l'équipe PROTHEO, m'a donné tous les moyens pour poursuivre ma recherche. Je remercie profondément Christophe Ringeissen pour ses remarques, critiques et suggestions enrichissantes qui m'ont aidé pendant la réalisation de cette thèse.

Je remercie Pierre-Etienne Moreau et Peter Borovanský pour leur aide concernant l'utilisation du langage ELAN.

Je remercie mes collègues de bureau, Hubert, Laurent et Sorin, pour tous les bons moments que nous avons passé ensemble. Je leur en suis reconnaissant, à eux ainsi qu'à Christophe et Raulent, pour m'avoir expliqué les finesses de la langue, de la philosophie et de la cuisine française.

Je remercie mon fils Paul pour ses longues nuits pendant la rédaction de cette thèse. Je remercie Dana et toute ma famille pour leurs encouragements et leur soutien.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires	9
1.1 Définitions de base	9
1.1.1 Les algèbres de termes	9
1.1.2 Substitutions du premier ordre	12
1.1.3 Théories équationnelles	13
1.1.4 Propriétés des relations binaires sur un ensemble	14
1.2 Les systèmes de réécriture	17
1.2.1 Terminaison des systèmes de réécriture	17
1.2.2 Les systèmes de réécriture conditionnels	19
1.2.3 Logique de réécriture	20
1.2.4 Systèmes de calcul	22
1.2.5 Langage ELAN	24
1.3 Le λ -calcul	30
1.3.1 Le λ -calcul non-typé	31
1.3.2 Le λ -calcul simplement typé	33
1.3.3 Le formalisme de de Bruijn	34
1.3.4 Le $\lambda\sigma$ -calcul	35
1.3.5 Le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul	36
2 Le ρ-calcul non typé	39
2.1 Présentation générale	39
2.2 Les composants du calcul	41
2.3 La syntaxe	41
2.4 Les substitutions	43
2.5 Le filtrage	45
2.6 Les règles d'évaluation	46
2.6.1 L'application d'une règle en tête dans le ρ_T -calcul	47

2.6.2	Les règles <i>Congruence</i> du ρ_T -calcul	48
2.6.3	Le traitement des ensembles dans le ρ_T -calcul	49
2.6.4	Aplatir les ensembles dans le ρ_T -calcul	50
2.7	La stratégie d'évaluation	51
2.8	La définition du ρ -calcul	52
2.9	Relation de réécriture versus calcul de réécriture	52
2.10	Instances du calcul de réécriture	54
3	Sur la confluence du ρ-calcul	59
3.1	Le ρ_\emptyset -calcul	59
3.2	La non-confluence du calcul de réécriture de base	61
3.3	Stratégies confluentes pour le ρ_\emptyset -calcul	65
3.3.1	Premières stratégies	65
3.3.2	Termes ρ -préfiltrables, ρ -safes et ρ -calculables	66
3.3.3	Une stratégie opérationnelle	68
3.3.4	Les relations induites par les règles d'évaluation	69
3.3.5	Les propriétés des relations <i>Set</i>	71
3.3.6	Les propriétés des relations <i>FireCong</i>	74
3.3.7	La confluence	82
3.4	Conditions alternatives pour obtenir la confluence	95
3.4.1	Règles de réécriture quasi-régulières et strictement linéaires à droite . . .	96
3.4.2	Règles de réécriture stables	100
3.4.3	Stratégies dans le ρ_T -calcul	102
4	Récursivité dans le ρ-calcul - le ρ_T^{1st}-calcul	105
4.1	Présentation de la problématique	105
4.2	Opérateurs auxiliaires	106
4.3	L'opérateur <i>first</i> et le ρ_T^{1st} -calcul	107
4.4	Congruence générique	111
4.5	Application en profondeur	114
4.5.1	Applications multiples	115
4.5.2	Applications singulières	119
4.6	Répétition et opérateur de normalisation	121
5	L'expressivité du ρ-calcul	127
5.1	Expression du λ -calcul en ρ -calcul	127
5.1.1	Expression du λ -calcul pur	127
5.1.2	Expression du λ -calcul avec symboles de fonctions	131

5.2	Expression de la réécriture de termes en ρ -calcul	132
5.2.1	Expression de la réécriture non-conditionnelle	132
5.2.2	Expression de la réécriture conditionnelle	135
5.3	Réécriture d'ordre supérieur	138
5.4	Une sémantique d'ELAN en ρ -calcul	140
6	Le ρ-calcul typé	149
6.1	La syntaxe du ρ_θ -calcul typé	149
6.2	Les règles de typage du ρ_θ -calcul	151
6.2.1	Présentation des règles de typage	151
6.2.2	Discussion sur le typage d'une règle de réécriture	152
6.3	Substitutions typées	153
6.4	Filtrage typé	154
6.5	Les règles d'évaluation du ρ_θ -calcul typé	156
6.6	La préservation du type	158
6.7	La normalisation forte du ρ_θ -calcul	161
6.8	Le typage des ρ -termes non-restreints	166
7	Le calcul de réécriture avec substitutions explicites - le $\rho\sigma$-calcul	171
7.1	La syntaxe	171
7.2	Le filtrage	173
7.3	Les règles d'évaluation	173
7.4	Propriétés du $\rho\sigma$ -calcul	175
7.4.1	Propriétés de la relation σ_ρ	176
7.4.2	La confluence du $\rho\sigma$ -calcul	179
7.5	Le $\rho\sigma$ -calcul comme calcul de réécriture d'ordre supérieur	188
7.5.1	eXplicit Rewrite Systems - XRSs	189
7.5.2	Le $\rho\sigma$ -calcul comme XRS	190
	Conclusion	193
	Bibliographie	199
	Index	209

Introduction

La notion de réécriture est omniprésente en informatique et en logique mathématique. En effet, le concept de réécriture apparaît dès les fondements théoriques jusqu'aux réalisations logicielles. La réécriture est utilisée pour définir la sémantique opérationnelle de langages de programmation [Kah87] aussi bien que pour décrire la transformation de programmes [vdBvDK⁺96]. La réécriture est utilisée pour calculer [Der85], implicitement ou explicitement comme dans Mathematica [Wol99] ou OBJ [GKK⁺87], mais également lorsqu'on décrit par des règles d'inférence une logique [GLT89], un prouveur de théorèmes [JK86] ou un solveur de contraintes [JK91]. La réécriture est naturellement très importante dans les systèmes où la notion de règle est un objet explicite du premier ordre, comme les systèmes experts, les langages de programmation basés sur la logique équationnelle [O'D77], les spécifications algébriques (e.g. OBJ [GKK⁺87]) et les systèmes de transition (e.g. Murphi [DDHY92]).

La réécriture

Un exemple d'utilisation de la réécriture très simple mais très souvent rencontré dans la pratique est le mécanisme "Rechercher/Remplacer". Tout éditeur de texte dispose d'un tel mécanisme permettant le remplacement (i.e. la réécriture) d'une chaîne de caractères par une autre chaîne de caractères.

Nous pouvons illustrer l'utilisation de ce mécanisme de remplacement sur un exemple consistant à transformer automatiquement des programmes écrits en un langage initial ayant une construction conditionnelle "*si* $\langle test \rangle$ *alors* $\langle instructions \rangle$ *fin*" en des programmes écrits en un langage cible avec une construction conditionnelle de la forme "*if* ($\langle test \rangle$) *then* { $\langle instructions \rangle$ }". Cette transformation peut être réalisée facilement en remplaçant les mots-clés du langage initial par les mots-clés du langage cible et ceci est représenté par le système contenant les trois règles de réécriture :

$$\begin{array}{ll} si & \rightarrow if (\\ alors & \rightarrow) then \{ \\ fin & \rightarrow \} \end{array}$$

La transformation d'un programme en utilisant une telle approche implique trois applications du mécanisme "Rechercher/Remplacer" correspondant à l'application des trois règles de réécriture. Mais on dispose habituellement d'un mécanisme de remplacement des expressions régulières permettant non seulement le remplacement des chaînes de caractères définies explicitement en précisant tous leurs caractères mais aussi la transformation des chaînes de caractères respectant un certain motif.

Dans notre exemple de transformation de syntaxe nous voulons remplacer directement une construction conditionnelle du langage initial par une construction similaire du langage cible en

transformant les mots-clés et la forme mais sans modifier les conditions de test et les instructions. Les expressions régulières sont décrites en utilisant des caractères spéciaux et par exemple, nous pouvons transformer le motif “**si** \(.*\) **alors** \(.*\) **fin**” en “**if** (\1) **then** {\2}”¹.

On précise ainsi que les chaînes de caractères correspondant au test et aux instructions dans le premier motif peuvent contenir n’importe quel caractère et que ces chaînes sont utilisées dans le deuxième motif aux positions correspondantes. Le même comportement est décrit d’une manière plus concise et plus claire par la règle de réécriture

$$si\ C\ alors\ I\ fin \rightarrow if\ (C)\ then\ \{I\}$$

L’application de cette règle à un programme consiste à chercher une instruction du programme qui est obtenue en instanciant les variables C et I du membre gauche *si* C *alors* I *fin* par des expressions appropriées et à remplacer cette instruction par le membre droit *if* (C) *then* $\{I\}$ où les variables C et I sont instanciées par les expressions obtenues précédemment. Par exemple, l’application de la règle de réécriture ci-dessus à l’instruction *si* $a > b$ *alors* $a = a - 1$ *fin* mène à l’instanciation des variables C et I par $a > b$ et respectivement $a = a - 1$ et ainsi l’instruction initiale est réécrite en *if* ($a > b$) *then* $\{a = a - 1\}$.

Le mécanisme déterminant les instanciations appropriées pour les variables est appelé *filtrage*. Dans le cas des expressions régulières seulement les motifs linéaires (i.e. les termes contenant une seule fois chacune de leurs variables) peuvent être utilisés dans le filtrage menant ainsi à un pouvoir d’expression limité. Dans la réécriture on n’impose pas une telle restriction et on considère des termes quelconques dans le membre gauche des règles de réécriture.

L’application d’une règle de réécriture à un terme clos du premier ordre suppose le filtrage entre le membre gauche de la règle et le terme à réécrire et ensuite le remplacement des variables du membre droit de la règle par les termes obtenus par le filtrage. Mais le filtrage peut échouer et dans ce cas la règle de réécriture ne s’applique pas. D’un autre côté, un système de règles de réécriture (i.e. un système de réécriture) peut contenir plusieurs règles de réécriture qui peuvent être appliquées à un même terme. Les propriétés des systèmes de réécriture ainsi obtenus, comme la terminaison et la confluence, ne sont pas toujours vérifiées et par conséquent le comportement de ces systèmes ne peut pas être garanti.

Considérons par exemple une structure de liste construite en utilisant l’opérateur \otimes ayant des éléments de la forme *elem*(n) avec n un entier. La transformation des listes de telle manière que tout élément *elem*(0) précédant un autre élément est éliminé peut être réalisée en utilisant la règle de réécriture suivante :

$$elem(0) \otimes x \rightarrow x$$

L’extraction du premier élément d’une telle liste est décrite par l’opérateur *extract* avec un comportement défini par la règle de réécriture :

$$extract(elem(x) \otimes L) \rightarrow elem(x)$$

Dans le système de réécriture contenant les deux règles de réécriture présentées ci-dessus le terme *extract*(*elem*(0) \otimes *elem*(1) \otimes *elem*(2)) est évaluée soit en *extract*(*elem*(1) \otimes *elem*(2)) et puis en *elem*(1), soit directement en *elem*(0) et donc, le résultat (la forme normale) n’est pas unique.

Pour parcourir l’espace des résultats, une idée consiste à enrichir les systèmes de règles par des constructions permettant de contrôler l’application des règles de réécriture. Ceci est réalisé généralement en ajoutant du contrôle sous forme de conditions, affectations locales, etc., aux

¹ motifs utilisés dans l’outil “Replace(Regex)” d’Emacs correspondant à l’exécution de la commande UNIX `sed s/si \(.*\) alors \(.*\) fin/if (\1) then {\2}/`

règles de réécriture ainsi qu'en introduisant une notion de stratégie qui est utilisée pour décrire le processus de normalisation. On obtient ainsi la notion de système de calcul [KKV95a] intégrant les règles de réécriture et leur contrôle exprimé sous forme de stratégies.

Le système de calcul pour les listes consiste en l'ensemble des règles de réécriture présentées précédemment et la stratégie précisant que la règle de réécriture décrivant l'élimination de $elem(0)$ est appliquée avant celle pour l'extraction. Dans ce système de calcul le terme $extract(elem(0) \otimes elem(1) \otimes elem(2))$ est nécessairement évalué en $extract(elem(1) \otimes elem(2))$ et puis en $elem(1)$. Une autre possibilité de contrôler les réécritures consiste à ajouter une condition $x \neq 0$ à la règle de réécriture pour l'extraction.

Puisque la sémantique opérationnelle des stratégies peut être exprimée en utilisant la réécriture [Bor98], il est naturel d'analyser la possibilité d'exprimer les deux systèmes de règles et de stratégies au même niveau d'un calcul.

On peut considérer qu'une règle de réécriture est une stratégie élémentaire et que les stratégies générales sont construites en composant de telles stratégies élémentaires. Mais la réécriture est un calcul du premier ordre et son pouvoir d'expression n'est pas suffisant pour décrire directement la composition de règles de réécriture. Les mécanismes permettant de telles opérations sont offerts par le λ -calcul, un système de réécriture d'ordre supérieur qui a été introduit pour exprimer simplement la fonctionnalité.

Le λ -calcul

Le λ -calcul introduit par Church [Chu41] est un langage expressif possédant une sémantique simple et suffisamment puissante pour exprimer toutes les fonctions calculables. Une fonction est représentée dans le λ -calcul en utilisant une abstraction par rapport à ses arguments et l'application d'une fonction à un terme est réalisée en substituant le terme à la variable abstraite correspondante.

Dans le λ -calcul de base l'abstraction est réalisée par rapport à une variable et on n'impose aucune restriction de contexte pour les variables abstraites. L'application d'une λ -abstraction $\lambda x.t$ à un terme u consiste à substituer la variable abstraite x dans le terme t par le terme u , transformation appelée β -réduction. On doit mentionner que cette substitution n'est pas un simple remplacement d'une variable par un terme mais doit tenir compte des éventuels conflits entre les noms des variables. Cette opération de substitution utilise l' α -conversion qui permet d'éviter la capture des variables. Elle est définie au méta-niveau du λ -calcul.

Le λ -calcul avec motifs [PJ87] enrichit le λ -calcul avec une information de contexte permettant des motifs plus élaborés qu'une simple variable dans l'abstraction. Dans ce cas, l'application d'une abstraction $\lambda m.t$ où m est un motif (terme du premier ordre) à un terme u nécessite l'utilisation du même mécanisme de filtrage que dans la réécriture. La substitution résultant du filtrage peut impliquer plusieurs ou aucune variable et non une seule comme dans le λ -calcul de base où le filtrage est trivial.

Dans ce calcul nous pouvons définir les abstractions $\lambda(elem(0) \otimes x) . x$ et respectivement $\lambda(extract(elem(x) \otimes L)) . elem(x)$ correspondant aux règles de réécriture utilisées précédemment pour les listes. Par rapport à la réécriture, les termes du λ -calcul contiennent toute l'information nécessaire pour leur évaluation et le λ -terme décrivant l'extraction d'un élément $\lambda(extract(elem(x) \otimes L)) . elem(x)$ ($extract(\lambda(elem(0) \otimes x) . x (elem(0) \otimes elem(1) \otimes elem(2)))$) est évalué en $\lambda(extract(elem(x) \otimes L)) . elem(x)$ ($extract(elem(1) \otimes elem(2))$) et puis en $elem(1)$.

Comme dans la réécriture, le filtrage peut échouer mais contrairement à la réécriture ceci est

représenté explicitement en introduisant une construction *FAIL* qui est obtenue comme résultat d'une application avec échec. Par exemple l'application $\lambda(elem(0) \otimes x) . x (elem(1) \otimes elem(0))$ ainsi que l'application de la règle de réécriture $elem(0) \otimes x \rightarrow x$ au terme $(elem(1) \otimes elem(0))$ mène à un échec mais tandis que dans le premier cas ceci est représenté par un résultat *FAIL*, dans le deuxième cas il n'y a aucun résultat.

Il existe d'autres recherches reliés à l'enrichissement du λ -calcul avec des facilités de filtrage et on peut citer par exemple les travaux de Vincent van Oostrom [vO90] et Loïc Colson [Col88].

Le non-déterminisme

Nous pouvons ajouter une règle de réécriture $x \otimes elem(0) \rightarrow x$ au système de réécriture pour les listes permettant l'élimination des éléments $elem(0)$ en fin de liste et ainsi, le terme $(elem(1) \otimes elem(0))$ est réduit en $elem(1)$ par rapport à ce système.

On dit que le choix de la règle de réécriture à appliquer est non-déterministe et si plusieurs règles peuvent être appliquées à un terme alors plusieurs résultats, éventuellement différents, peuvent être obtenus. Un tel comportement a été déjà obtenu dans le cas du système de réécriture pour les listes.

Une autre source de non-déterminisme est l'utilisation d'une théorie de filtrage équationnelle dans la réécriture modulo classique [PS81]. En général, le filtrage dans une telle théorie n'est pas unitaire et des résultats différents pour le filtrage mènent à des résultats différents pour l'application d'une règle de réécriture.

Reprenons le système de réécriture pour les listes mais cette fois-ci en définissant l'opérateur \otimes comme étant associatif-commutatif, ce qui donne à notre objet une structure de multi-ensemble. Dans ce cas la règle de réécriture $elem(0) \otimes x \rightarrow x$ est suffisante pour décrire l'élimination des éléments $elem(0)$ quelque soit leur position dans le multi-ensemble. La règle de réécriture $extract(elem(x) \otimes L) \rightarrow elem(x)$ décrit maintenant l'extraction non du premier élément d'une liste mais d'un élément quelconque d'un multi-ensemble et ainsi le terme $extract(elem(1) \otimes elem(2))$ est évalué soit en $elem(1)$, soit en $elem(2)$.

On s'intéresse souvent au développement des programmes déterministes et ceci peut être facilement réalisé en réécriture en imposant un ordre sur la sélection de la règle à appliquer et en utilisant seulement un filtrage syntaxique. Mais quand ces programmes sont exécutés dans un environnement réel on obtient souvent des comportements non-déterministes qu'on veut représenter et analyser. Il existe de multiples domaines où le non-déterminisme et la possibilité de revenir en arrière pour effectuer des réductions alternatives sont essentiels. On peut ainsi mentionner, sans être exhaustifs, la démonstration automatique, la résolution de contraintes, la programmation logique, la recherche des solutions optimales ou encore le model-checking.

Dans toutes ces situations on s'intéresse aux réductions possibles à chaque étape d'exécution ou autrement dit à tous les résultats intermédiaires de l'exécution. Mais dans la réécriture la possibilité d'avoir plusieurs ou aucun résultat pour l'évaluation d'un terme par rapport à un système de réécriture ne peut pas être exprimée explicitement.

Le ρ -calcul

L'objectif de cette thèse est donc de proposer et d'étudier un calcul permettant la définition au même niveau de représentation des règles et des stratégies ainsi que leur application et les résultats obtenus.

Ce calcul doit être suffisamment puissant pour décrire le λ -calcul et la réécriture. Nous considérons aussi les règles de réécriture enrichies avec des conditions et affectations locales et nous souhaitons exprimer des stratégies construites en partant de telles règles de réécriture. Nous nous intéressons particulièrement à des stratégies de normalisation par rapport à un ensemble de règles de réécriture. De plus, l'application de règles et stratégies peut échouer ou mener à plusieurs résultats (différents) et nous voulons exprimer explicitement ces propriétés dans le calcul.

Nous partons donc des constructions du λ -calcul, l'abstraction et l'application. Puisque les membres gauches des règles de réécriture sont des termes plus élaborés qu'une simple variable il est naturel de considérer des abstractions avec des motifs autres qu'une variable. Afin de mémoriser les résultats possibles de l'application nous pouvons utiliser une structure de liste (de résultats). Mais pour mettre en évidence la nature non-déterministe de l'application, c'est-à-dire la sélection dans un ordre quelconque des règles de réécriture à appliquer, une structure de multi-ensemble où l'ordre des éléments n'est pas important semble plus appropriée. En plus, si le nombre de solutions identiques n'est pas essentiel, une structure d'ensemble peut être utilisée. Dans une telle approche l'échec ou autrement dit le fait de n'avoir aucun résultat pour une application est représenté par l'ensemble vide (de résultats).

Nous introduisons le calcul de réécriture, appelé aussi ρ -calcul. Dans ce calcul l'opérateur d'abstraction ainsi que l'opérateur d'application sont des objets du calcul. Une ρ -abstraction est une règle de réécriture dont le membre gauche précise les variables abstraites et une information de contexte. Le résultat de l'évaluation d'une application (d'une ρ -abstraction ou d'un ρ -terme plus élaboré) est toujours un ensemble, qui est également un ρ -terme. Le mécanisme permettant d'instancier les variables avec leur valeur actuelle est le filtrage qui peut être syntaxique, équationnel ou d'ordre supérieur.

Les propriétés principales que nous voulons obtenir pour le ρ -calcul sont la confluence et la terminaison. Puisque il existe une correspondance forte entre le λ -calcul et le ρ -calcul on peut s'attendre à un résultat de confluence similaire dans les deux calculs mais nous remarquons immédiatement que dans le ρ -calcul utilisant une théorie de filtrage du premier ordre cette propriété n'est pas vérifiée. Néanmoins, la confluence peut être retrouvée si une stratégie d'évaluation est utilisée pour guider les règles d'évaluation du calcul. Nous pouvons définir des stratégies d'évaluation très simples au prix de restrictions relativement fortes sur les réductions possibles ou plus compliquées mais plus flexibles.

En partant de la non-terminaison du λ -calcul le même résultat est obtenu pour le ρ -calcul. Afin d'obtenir la terminaison nous procédons comme dans le λ -calcul et nous définissons un système de types permettant d'éliminer les termes avec des réductions infinies. Nous partons d'une approche similaire à celle utilisée dans le λ -calcul typé et encore une fois les ensembles nécessitent un traitement spécial. En se limitant à des ensembles ayant tous les éléments d'un même type et avec un bon choix pour les règles de typage, le ρ -calcul typé est terminant.

Une fois que nous avons défini les conditions nous permettant d'obtenir la confluence et la terminaison du ρ -calcul nous pouvons envisager de réaliser une implantation du calcul. Nous considérons que les solutions du problème de filtrage sont fournis indépendamment. Comme dans le λ -calcul, dans le ρ -calcul l'application de substitution n'est pas une partie du calcul mais est définie au méta-niveau du calcul. La description de l'application de substitution est relativement simple mais le coût d'exécution de cette opération n'est pas constant. En effet, la complexité de l'application d'une substitution dépend de la forme du terme dans lequel elle est effectué. Deuxièmement, la correspondance entre la théorie et l'implantation devient non-triviale et la correction des implantations peut être compromise. Nous utilisons donc une approche similaire aux différentes versions de λ -calcul avec substitutions explicites et nous décrivons l'application de substitution au même niveau que l'application de règles de réécriture.

Nous montrons que le pouvoir d'expression du ρ -calcul est suffisant pour exprimer les réductions du λ -calcul et de la réécriture du premier ordre. Mais nous ne nous arrêtons pas là et nous utilisons le ρ -calcul pour donner une sémantique opérationnelle aux règles et stratégies du langage ELAN. En définissant le ρ -terme correspondant à un programme ELAN nous explicitons non seulement les opérateurs du langage mais aussi le comportement de certaines constructions. Ceci nous permet de mieux comprendre les exécutions d'un programme ELAN et particulièrement le traitement du non-déterminisme.

Plan du travail

Après cette introduction, le Chapitre 1 a pour but de rappeler les concepts utilisés au cours de cette thèse avec notamment les termes du premier ordre, les substitutions, le λ -calcul, la réécriture ainsi que le langage ELAN, un cadre logique dont le noyau est la logique de réécriture étendue avec la notion de stratégies.

Le chapitre 2 présente le ρ_T -calcul au travers ses composants et montre des exemples d'utilisation du calcul général ainsi que des instances possibles du calcul de base. Nous décrivons la formation des ρ -termes et la façon dont les substitutions sont appliquées sur ces termes. Les règles d'évaluation du ρ -calcul sont ensuite présentées en commentant nos choix et donnant des exemples de réductions. Le ρ_T -calcul est le ρ -calcul paramétré par la théorie de filtrage T et même si dans le cas général, nous considérons un filtrage d'ordre supérieur, dans les cas pratiques nous utilisons le filtrage syntaxique ou équationnel. Nous illustrons le comportement dans certaines instances du calcul général obtenues en précisant la théorie T par des exemples simples de ρ_T -réductions.

Le chapitre 3 est consacré à l'analyse des propriétés des relations induites par les règles d'évaluation et en particulier à la confluence du ρ -calcul. L'utilisation des ensembles de résultats pour représenter le non-déterminisme mène immédiatement à des réductions non-convergentes et ainsi, le ρ -calcul n'est pas confluent si les règles d'évaluation ne sont pas guidées par une stratégie d'évaluation.

Nous nous limitons à l'analyse de la confluence du ρ_θ -calcul, c'est-à-dire le ρ -calcul utilisant un filtrage syntaxique. Nous définissons une stratégie confluyente générique simple à comprendre mais pas utilisable dans une implantation du ρ -calcul et ensuite nous proposons plusieurs stratégies opérationnelles définies en imposant des restrictions structurelles sur les ρ -termes à réduire. En partant d'une stratégie confluyente permettant la réduction de l'application d'une règle de réécriture seulement à un terme clos du premier ordre, nous présentons d'autres approches où les conditions sur la structure des termes sont plus compliquées mais moins restrictives.

Le chapitre 4 présente comment nous pouvons décrire dans le ρ -calcul des stratégies de réduction et, principalement, des stratégies de normalisation. Afin d'exprimer des réductions déterministes, nous introduisons un nouvel opérateur appelé *first* qui a le rôle de sélectionner parmi ses arguments le premier terme dont l'application à un ρ -terme n'échoue pas. Nous définissons le ρ^{1st} -calcul en ajoutant cet opérateur à la syntaxe et en décrivant son comportement par des règles d'évaluation.

L'application d'une règle de réécriture en tête ou aux arguments d'un terme avec un certain symbole de tête est décrite explicitement dans le ρ -calcul par un ρ -terme approprié. Nous montrons qu'il est possible de décrire l'application d'une règle de réécriture aux arguments d'un

terme indépendamment du symbole de tête en utilisant seulement les opérateurs du ρ -calcul. Nous définissons ensuite, en utilisant le ρ^{1st} -calcul, des opérateurs décrivant l'application répétitive d'un terme en tête ou aux positions les plus profondes d'un autre terme et finalement nous décrivons la représentation de stratégies *innermost* et *outermost* dans le ρ^{1st} -calcul.

Le chapitre 5 est donc consacré à l'utilisation des opérateurs définis dans le chapitre précédent pour décrire des réductions réalisées en λ -calcul et en réécriture. La représentation des λ -termes et des réductions sous-jacentes en ρ -calcul est réalisée en définissant des fonctions de transformation entre les termes des deux formalismes et en montrant que les réductions dans les deux calculs sont identiques modulo ces transformations. Nous décrivons ensuite les ρ -termes correspondant à des réductions en réécriture (conditionnelle). Ces termes peuvent être construits soit en utilisant les preuves pour les réductions correspondantes en réécriture, soit en utilisant seulement les règles de réécriture appliquées dans les réductions respectives.

En partant de la représentation de la réécriture conditionnelle nous analysons la description en ρ -calcul des règles et stratégies du langage ELAN. Le langage ELAN introduit les affectations locales de variables aux résultats de sous-dérivations ainsi que des opérateurs permettant la construction de stratégies à partir des règles de réécriture. Nous décrivons les ρ -termes correspondant aux règles et stratégies ELAN et nous montrons comment on peut construire le ρ -terme correspondant à un module ELAN.

Le chapitre 6 est dédié à l'étude du ρ -calcul typé. Le ρ -calcul non-typé n'est pas terminant et afin d'éliminer les termes avec une réduction infinie nous imposons des restrictions sur la formation des ρ -termes en introduisant une information de type pour chaque terme. Nous utilisons une approche similaire à celle utilisée dans le λ -calcul typé et nous ajoutons des règles de typage pour les ensembles. Nous nous concentrons sur le typage du $\rho\theta$ -calcul et nous montrons que la réduction de tout terme bien typé est finie et préserve le type du terme initial.

Le chapitre 7 a pour objectif d'étendre le ρ -calcul en rendant explicite l'application de substitution. Nous étendons la syntaxe du ρ -calcul en introduisant les définitions des substitutions et un opérateur d'application de substitution ainsi que les règles d'évaluation décrivant son comportement. Nous obtenons ainsi le $\rho\sigma$ -calcul. La présentation du $\rho\sigma$ -calcul est basée sur une notation de de Bruijn et le sous-système contenant les règles d'évaluation décrivant l'application de substitution est inspiré des systèmes similaires utilisés dans le λ -calcul. Nous montrons que le $\rho\sigma$ -calcul est confluent dans les mêmes conditions que le ρ -calcul.

En conclusion, nous résumons les résultats obtenus et nous explorons les perspectives de recherche émergeant de ce travail.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Nous présentons dans ce chapitre les notions préliminaires utilisées dans ce document. Nous introduisons notamment les termes du premier ordre, les algèbres universelles, le λ -calcul ainsi que la réécriture. Les bases de ces théories sont présentées au travers de leurs principales définitions et de leurs propriétés les plus connues.

Les notions de variable et de substitution du λ -calcul et la notion de règle de réécriture seront utilisées d'une façon similaire dans le cadre du ρ -calcul.

1.1 Définitions de base

1.1.1 Les algèbres de termes

Définition 1.1 Une signature \mathcal{F} est un ensemble de symboles dont chacun est associé à un entier naturel qui est appelé son arité. Le sous-ensemble de symboles d'arité n est noté \mathcal{F}_n et donc $\mathcal{F} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{F}_i$. L'arité d'un symbole f est notée $|f|$.

Définition 1.2 Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ une signature. Soit \mathcal{X} un ensemble de variables. La \mathcal{F} -algèbre libre homogène engendrée par \mathcal{X} , notée $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ est le plus petit ensemble tel que :

- $\mathcal{X} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$,
- pour tout symbole f de \mathcal{F} d'arité n ($f \in \mathcal{F}_n$) et pour tous $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ alors $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$.

Pour désigner $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ nous parlerons le plus souvent de l'algèbre de termes engendrée par la signature \mathcal{F} . \mathcal{F} est appelé la signature de l'algèbre. Les éléments de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ sont appelés termes (du premier ordre). Un terme peut être vu comme un arbre fini étiqueté (cf. Définition 1.5).

Ce genre de définitions, dites par clôture, où un ensemble est défini par un ensemble de base (ici les variables) et des règles de “construction” de nouveaux éléments (ici les symboles de la signature), permettent de faire des définitions et des démonstrations dites par récurrence structurelle. La démonstration d'une propriété quelconque (respectivement une définition) se fait en prouvant la propriété sur les éléments de base et en prouvant que cette propriété est conservée par les règles de construction. Le principe de récurrence des entiers naturels en est l'exemple le plus connu.

Définition 1.3 L'ensemble $\mathcal{Var}(t)$ des variables d'un terme t est défini inductivement par :

- $\mathcal{Var}(t) = \emptyset$ si $t \in \mathcal{F}_0$,
- $\mathcal{Var}(t) = \{t\}$ si $t \in \mathcal{X}$,

– $\text{Var}(t) = \bigcup_{i=1}^n \text{Var}(t_i)$ si $t = f(t_1, \dots, t_n)$.

Un terme est linéaire si chacune de ses variables apparaît une seule fois dans le terme.

Définition 1.4 Une algèbre initiale, noté $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, est une algèbre homogène engendrée par un ensemble vide de variables. Les termes d'une algèbre initiale, c'est à dire les termes ne contenant pas de variable, sont appelés les termes clos.

Nous nous sommes donnés, grâce au langage des algèbres de termes, un moyen de construire des ensembles de termes. Pour pouvoir décrire les opérations sur ces termes, nous allons définir l'ensemble de positions d'un terme ainsi que la notion de sous-terme d'un terme à une position donnée.

Définition 1.5 Soit \mathbb{N}_+ l'ensemble des entiers strictement positifs, \mathbb{N}_+^* le monoïde libre engendré par \mathbb{N}_+ , ϵ le mot vide et $.$ l'opération de concaténation. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}_+^*$, p est un préfixe de q , ce que l'on note $p \leq q$, s'il existe $q' \in \mathbb{N}_+^*$ tel que $q = p.q'$. p est un préfixe strict de q , noté $p < q$, si $p \leq q$ et $p \neq q$. Si $p \not\leq q$ et $q \not\leq p$, p et q sont disjoints ou incomparables, ce qu'on note $p \bowtie q$.

Un arbre sur $\mathcal{F} \cup \mathcal{X}$ est une application t d'une partie non vide $\text{Pos}(t)$ de \mathbb{N}_+^* dans $\mathcal{F} \cup \mathcal{X}$ telle que :

1. $\text{Pos}(t)$ est clos par préfixe.
2. Pour tout $p \in \text{Pos}(t)$ et tout $i \in \mathbb{N}_+$, $p.i \in \text{Pos}(t)$ si et seulement si $t(p) = f \in \mathcal{F}$ et $1 \leq i \leq |f|$.

$\text{Pos}(t)$ est appelé ensemble des positions de t , et t est fini si $\text{Pos}(t)$ l'est. La taille $|t|$ d'un terme t est dans ce cas le cardinal de $\text{Pos}(t)$.

L'ensemble des arbres finis sur $\mathcal{F} \cup \mathcal{X}$ peut être muni naturellement d'une structure de \mathcal{F} -algèbre isomorphe à $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$. On parlera donc dorénavant indifféremment d'arbre ou de terme.

Définition 1.6

- Pour tout terme t et toute position $p \in \text{Pos}(t)$, $t(p)$ est appelé symbole à la position p dans t . $t(\epsilon)$ est également appelé symbole de tête de t .
- On appelle sous-terme de t à la position $p \in \text{Pos}(t)$, le terme noté $t|_p$, et défini par $\forall p, q \in \text{Pos}(t), q \in \text{Pos}(t|_p), t|_p(q) = t(p.q)$. $t|_p$ est un sous-terme strict de t si $p \neq \epsilon$.
- Si $t(\epsilon) = f \in \mathcal{F}$, on notera t sous la forme $f(t|_1, \dots, t|_n)$ où $n = |f|$.
- Une position p de t est variable si $t(p) \in \mathcal{X}$. L'ensemble des positions variables de t est noté $\mathcal{VPos}(t)$ alors que l'ensemble des positions non variables de t est noté $\mathcal{FPos}(t)$. Une position p de t est constante si $t(p) \in \mathcal{F}_0$. L'ensemble des positions constantes de t est noté $\mathcal{CPos}(t)$.

La notation $t_{[s]_p}$ est utilisée pour signifier que t contient s comme sous-terme à la position p et la notation $t[p \leftarrow s]$ pour faire remarquer que le sous-terme $t|_p$ a été remplacé par s dans t . Nous notons par $t(\bar{x})$ le terme t tel que $\text{Var}(t) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Définition 1.7 La relation de sous-terme, noté \leq_{sub} , est définie par $s \leq_{\text{sub}} t$ si s est un sous-terme de t . La relation de sous-terme strict, noté $\triangleleft_{\text{sub}}$, est définie par $s \triangleleft_{\text{sub}} t$ si $s \leq_{\text{sub}} t$ et $s \neq t$.

Définition 1.8 Etant donné un terme $t_{[s]_p}$ et un entier P représentant la longueur du mot p (la longueur du mot vide ϵ est 0). On dit que le terme s est un sous-terme à la profondeur P dans t . La profondeur de t est le maximum des profondeurs des sous-termes de t .

Les sous-termes (à la profondeur 1) t_1, \dots, t_n d'un terme $t = f(t_1, \dots, t_n)$ sont appelés les arguments de t .

Exemple 1.1 Une représentation algébrique possible des expressions de l'arithmétique est l'algèbre de termes engendrée par la signature $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ contenant :

- $\mathcal{F}_0 = \{0\}$: une constante ;
- $\mathcal{F}_1 = \{\text{succ}, -\}$: deux symboles unaires,
- $\mathcal{F}_2 = \{+, \times\}$: deux symboles binaires.

Le terme $t = +(\times(x, \text{succ}(\text{succ}(0))), \text{succ}(0))$ est le terme représentant en notation préfixée l'expression $x \times 2 + 0$.

On a $t(1.2) = \text{succ}$, $t_{1.2} = \text{succ}(\text{succ}(0))$ et on peut écrire $t_{[\text{succ}(\text{succ}(0))]_{1.2}}$.

L'ensemble des variables de t est $\text{Var}(t) = x$ et les positions variables de t sont décrites par $\mathcal{VPos}(t) = \{1\}$. L'ensemble des positions non variables de t est $\mathcal{FPos}(t) = \{1.2, 1.2.1, 1.2.1.1, 2, 2.1\}$ et les positions constantes de t sont $\mathcal{CPos}(t) = \{1.2.1.1, 2.1\}$.

Le terme $\text{succ}(\text{succ}(0))$ est un sous-terme de profondeur 2 de t . Les sous-termes de t de profondeur 2 sont $\text{succ}(\text{succ}(0))$ et 0. La profondeur de t est 4.

En général, lorsque nous désirons définir une algèbre de termes particulière, nous utilisons une notation empruntée aux grammaires. L'algèbre des expressions arithmétiques présentée dans l'Exemple 1.1 se définit avec cette notation par :

$$\text{exp} ::= x \mid 0 \mid \text{succ}(\text{exp}) \mid -\text{exp} \mid +(\text{exp}, \text{exp}) \mid \times(\text{exp}, \text{exp})$$

où $x \in \mathcal{X}$.

L'algèbre initiale engendrée par la signature \mathcal{F} de l'Exemple 1.1 est définie par :

$$\text{exp} ::= 0 \mid \text{succ}(\text{exp}) \mid -\text{exp} \mid +(\text{exp}, \text{exp}) \mid \times(\text{exp}, \text{exp})$$

Cette notation permet de spécifier dans le même temps les symboles d'une signature et leur arité. Nous pouvons faire implicitement des conventions de notation et utiliser une syntaxe mixfix pour certains symboles. L'algèbre initiale précédente peut être ainsi définie par :

$$\text{exp} ::= 0 \mid \text{succ}(\text{exp}) \mid -\text{exp} \mid \text{exp} + \text{exp} \mid \text{exp} \times \text{exp}$$

Définition 1.9 Soient \mathcal{K} un ensemble de symboles de sorte, \mathcal{F} une signature et \mathcal{X} un ensemble de variables. A chaque symbole f de \mathcal{F} d'arité n est associé une suite de $n+1$ symboles de sorte (k_1, \dots, k_{n+1}) , et à chaque variable x de \mathcal{X} est associé un symbole de sorte. La suite de symboles de sortes est appelée le profil du symbole f et on note :

$$f : k_1 \times \dots \times k_n \rightarrow k_{n+1}$$

où $f \in \mathcal{F}_n$ et $k_i \in \mathcal{K}$.

Les termes de la \mathcal{F} -algèbre hétérogène libre $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ engendrée par \mathcal{X} et la sorte k d'un terme t , noté $t : k$, sont définis simultanément par :

- pour toute variable $x \in \mathcal{X}$ ayant associé un symbole de sorte k , $x \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ et la sorte de x est k ,
- pour tout symbole $f : k_1 \times \dots \times k_n \rightarrow k_{n+1}$ et termes $t_1 : k_1, \dots, t_n : k_n$, $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ et la sorte de $f(t_1, \dots, t_n)$ est k_{n+1} .

Le sous-ensemble \mathcal{T}_k de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ défini par l'ensemble des termes de sorte k est appelé une sorte. Une algèbre hétérogène est aussi désignée sous le nom d'algèbre de termes multi-sortée.

On peut remarquer que lorsque nous considérons une algèbre de termes multi-sortée, nous devons distinguer les variables suivant la sorte à laquelle elles appartiennent.

Nous reprenons l'Exemple 1.1 sur les expressions arithmétiques et nous distinguons deux sortes : les entiers naturels et les expressions proprement dites.

Exemple 1.2 *Les entiers naturels et les expressions arithmétique construites en utilisant des entiers sont représentés par l'algèbre initiale engendrée par la signature \mathcal{F} de l'Exemple 1.1 et définie par :*

$$\begin{aligned} nat &::= 0 \mid succ(nat) \\ exp &::= nat \mid -exp \mid +(exp, exp) \mid \times (exp, exp) \end{aligned}$$

L'algèbre définie dans l'Exemple 1.2 n'est pas la même que l'algèbre mono-sortée donnée dans l'Exemple 1.1. En effet, $succ(0 + 0)$ n'est pas un terme de cette algèbre multi-sortée alors qu'il en est un de la précédente.

D'autre part, la notation par grammaire introduit implicitement un symbole unaire de type $N : nat \rightarrow exp$. Ce symbole n'a pas une notation explicite, mais formellement il doit être défini. Si nous avions voulu être explicite, la définition de la sorte exp aurait été

$$exp ::= N(nat) \mid -exp \mid +(exp, exp) \mid \times (exp, exp)$$

1.1.2 Substitutions du premier ordre

Dans cette section nous allons définir une opération sur les termes, que nous appellerons substitution, permettant de les modifier. Effectuer une substitution consiste à remplacer une variable d'un terme par un autre terme et pour bien comprendre le mécanisme de remplacement nous allons donner une définition formelle des substitutions et ensuite une définition équivalente plus opérationnelle et intuitive.

Définition 1.10 *Une substitution est un endomorphisme de l'algèbre $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ dont la restriction à \mathcal{X} est l'identité presque partout, c'est-à-dire sauf sur un sous-ensemble fini de \mathcal{X} .*

Les substitutions seront notées par des lettres grecques minuscules, $\sigma, \mu, \gamma, \phi, \dots$. La notation préfixe, i.e. σt , est utilisée pour l'application d'une substitution σ à un terme t . Une substitution bijective est un *renommage*. Une substitution σ est *idempotente* si $\sigma \circ \sigma = \sigma$.

On appelle *domaine* d'une substitution σ l'ensemble $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma x \neq x\}$ et *codomaine* d'une substitution σ l'ensemble $Ran(\sigma) = \{\sigma x \mid x \in Dom(\sigma)\}$. L'ensemble des variables introduites par une substitution σ est $\mathcal{VRan}(\sigma) = \cup_{x \in Dom(\sigma)} \mathcal{Var}(\sigma x)$. L'ensemble de toutes les variables impliquées dans σ est $\mathcal{Var}(\sigma) = Dom(\sigma) \cup \mathcal{VRan}(\sigma)$.

La restriction de σ à un ensemble de variables X , notée $\sigma|_X$, est définie par $\sigma|_X x = \sigma x$ si $x \in X$ et $\sigma|_X x = x$ sinon.

Le préordre de filtrage ou de *subsumption* est défini par $s \leq t$ s'il existe une substitution σ telle que $\sigma s = t$. Dans ce cas on dit que le terme s *subsume* le terme t .

Nous avons présenté une définition formelle des substitutions du premier ordre et pour renforcer l'intuition derrière cette notion nous donnons aussi une définition plus opérationnelle.

Définition 1.11 *Le remplacement du terme u dans le terme $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ à la position p , $t[p \leftarrow s]$, est définie inductivement par :*

- $t[\epsilon \leftarrow u] = u$,
- $f(t_1, \dots, t_n)[i.p \leftarrow u] = f(t_1, \dots, t_i[p \leftarrow u], \dots, t_n)$, si $f \in \mathcal{F}$.

Définition 1.12 La substitution de la variable x par le terme u dans le terme t , notée $\langle x \mapsto u \rangle t$ est la composition de chacun des remplacements du terme u à chacune des positions p telle que $t(p) = x$.

Définition 1.13 Une substitution est une fonction accomplissant en simultanée plusieurs substitutions de différentes variables par des termes. L'application d'une substitution à un terme t sera notée $\langle x_1 \mapsto u_1, \dots, x_n \mapsto u_n \rangle t$.

Remarque 1.1 Les substitutions ne commutent pas entre elles dans le cas général. La substitution $\langle x_1 \mapsto u_1, \dots, x_n \mapsto u_n \rangle$ représente le remplacement simultané des variables x_1, \dots, x_n par les termes t_1, \dots, t_n et pas la composition des substitutions $\langle x_1 \mapsto t_1 \rangle \dots \langle x_n \mapsto t_n \rangle$.

Nous avons $\langle x \mapsto y, y \mapsto x \rangle f(x, y) = f(y, x)$ mais $\langle x \mapsto y \rangle \langle y \mapsto x \rangle f(x, y) = f(y, y)$ et $\langle y \mapsto x \rangle \langle x \mapsto y \rangle f(x, y) = f(x, x)$.

1.1.3 Théories équationnelles

Une paire de termes (l, r) est appelé *égalité*, *axiome équationnel* ou *égalitaire*, ou *équation* suivant le contexte, et notée $(l = r)$.

Définition 1.14 Etant donné un ensemble de variables \mathcal{X} , une algèbre \mathcal{A} et une assignation $\alpha : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$, on note $\underline{\alpha}$ l'unique homomorphisme de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ vers l'algèbre \mathcal{A} étendant α tel que

$$\forall f \in \mathcal{F}, \underline{\alpha}(f(t_1, \dots, t_n)) = f_{\mathcal{A}}(\underline{\alpha}(t_1), \dots, \underline{\alpha}(t_n))$$

Définition 1.15 Une \mathcal{F} -algèbre \mathcal{A} valide une égalité $s = t$, noté $\mathcal{A} \models s = t$ ou plus simplement $s =_{\mathcal{A}} t$ si pour toute assignation $\alpha : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$, $\underline{\alpha}(s) = \underline{\alpha}(t)$. L'algèbre \mathcal{A} satisfait une égalité $s = t$ s'il existe une assignation α telle que $\underline{\alpha}(s) = \underline{\alpha}(t)$. Une \mathcal{F} -algèbre \mathcal{A} est un modèle d'un ensemble d'égalités E si elle valide toutes les égalités de E .

On note $\mathcal{Th}(\mathcal{A})$ l'ensemble des égalités valides dans une \mathcal{F} -algèbre \mathcal{A} et $\mathcal{Mod}(E)$ la classe des \mathcal{F} -algèbres qui sont modèles de E .

Soit E un ensemble d'égalités de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$, appelés dans ce contexte, *axiomes*.

Définition 1.16 Etant donnée une signature \mathcal{F} , une présentation équationnelle est un couple (\mathcal{F}, E) telle que E est un ensemble d'axiomes de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$.

Le problème de validité dans $\mathcal{Mod}(E)$ consiste à décider si une égalité $s = t$ est valide dans tout modèle de E . Ce problème peut se ramener à des considérations syntaxiques.

Définition 1.17 Etant donnée une présentation équationnelle (\mathcal{F}, E) , on appelle *théorie équationnelle engendrée par (\mathcal{F}, E)* ou *E -égalité* et on note $=_E$ la plus petite congruence sur $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ contenant toutes les égalités $(\sigma l = \sigma r)$ où $(l = r)$ est un axiome de E et σ une substitution quelconque.

Le théorème suivant est le fondement de la logique équationnelle. Il relie le problème sémantique de la validité d'une égalité dans une classe de modèles au problème syntaxique de la E -égalité.

Théorème 1.1 (Birkhoff [Bir35], Complétude du raisonnement équationnel pour un ensemble E d'axiomes équationnels)

$s = t$ est valide dans $\mathcal{Mod}(E)$ si et seulement si $s =_E t$.

La E -égalité peut encore être obtenue par le remplacement d'égal par égal décrit ci-après.

Définition 1.18 *Etant donné un ensemble d'axiomes E , on note \longleftrightarrow_E la relation binaire symétrique sur $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ définie par $s \longleftrightarrow_E t$ s'il existe un axiome $(l = r)$ de E , une position ω de s et une substitution σ tels que $s|_{\omega} = \sigma l$ et $t = s[\sigma r]_{\omega}$.*

Remarque 1.2 $s =_E t \iff s \xrightarrow{*}_E t$.

Par abus de langage et de notation, on confond souvent la théorie équationnelle $=_E$, la présentation équationnelle (\mathcal{F}, E) et l'ensemble des axiomes équationnels E .

L'ensemble des classes de congruence de E dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ peut être muni naturellement d'une structure d'algèbre, notée $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})/_E$, qui est l'algèbre libre sur \mathcal{X} de la classe des \mathcal{F} -algèbres modèles de E .

1.1.4 Propriétés des relations binaires sur un ensemble

Les termes sont connectés entre eux par des relations ou par des transformations des uns vers les autres. Nous donnons quelques propriétés abstraites liées aux relations binaires dont nous aurons besoin par la suite.

Définition 1.19 *Une relation binaire \longrightarrow sur un ensemble de termes construits en utilisant un ensemble d'opérateurs Φ est compatible (avec les opérateurs) si pour tous termes $u_i, v_i \in T$, $i = 1, \dots, n$ et tout opérateur ϕ_n d'arité n*

$$u_i \longrightarrow v_i, i = 1, \dots, n \implies \phi_n(u_1, \dots, u_n) \longrightarrow \phi_n(v_1, \dots, v_n)$$

Définition 1.20 *Etant donnée une relation binaire \longrightarrow sur un ensemble T :*

- la relation inverse de \longrightarrow est notée \longleftarrow ,
- la fermeture symétrique de \longrightarrow , notée \longleftrightarrow , est la plus petite relation symétrique contenant \longrightarrow .
- la fermeture transitive de \longrightarrow , notée \longrightarrow^+ , est la plus petite relation transitive contenant \longrightarrow .
- la fermeture réflexive et transitive de \longrightarrow est notée \longrightarrow^* .
- la fermeture réflexive, symétrique et transitive de \longrightarrow est notée \longleftrightarrow^* .
- la fermeture compatible (ou fermeture par contexte) de \longrightarrow est la plus petite relation contenant \longrightarrow et fermée par rapport aux règles de formation de termes de T .

La composition des relations \longrightarrow_1 et \longrightarrow_2 est notée $\longrightarrow_1 \circ \longrightarrow_2$ ou $\longrightarrow_1 \longrightarrow_2$.

Une relation binaire \sim réflexive, symétrique et transitive est une relation d'équivalence. Un ordre $>$ est une relation binaire irréflexive, antisymétrique et transitive. Un préordre \geq est une relation binaire réflexive et transitive.

Définition 1.21 *Un ordre $>$ sur T est noethérien s'il n'existe pas de suite infinie $(t_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de T telle que $t_1 > t_2 > \dots$.*

Un ordre $>$ sur T est total si $\forall s, t \in T$ on a $s > t$ ou $t > s$.

La construction d'ordres noethériens peut éventuellement se faire par extension. L'extension lexicographique permet par exemple de comparer des uplets. Pour comparer des suites d'objets, on introduit la notion de *multi-ensemble* sur T qui est une application de T vers \mathbb{N} . Un ordre sur T peut être facilement étendu à un ordre sur les multi-ensembles sur T .

Définition 1.22 Pour une relation \longrightarrow , un élément t de T est réductible par \longrightarrow s'il existe t' dans T tel que $t \longrightarrow t'$. Dans le cas contraire, il est irréductible. On appelle forme normale de t tout élément t' irréductible tel que $t \xrightarrow{*} t'$. Lorsque un terme t a une unique forme normale, celle-ci est notée $t \downarrow$.

La question que l'on se pose est de savoir si $t \xleftrightarrow{*} t'$. L'idéal serait de calculer une forme normale de chacun des éléments et de tester si elles sont égales. Cela n'est possible que si d'une part une forme normale existe pour tout élément, et si d'autre part elle est unique. Les formes normales existent dès que \longrightarrow termine, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de suite infinie $(t_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de T telle que $t_1 \longrightarrow t_2 \longrightarrow \dots$. Dans le cas où une forme normale existe, son unicité est assurée par la propriété de Church-Rosser ou par la confluence qui est une propriété équivalente.

Définition 1.23

1. \longrightarrow a la propriété de Church-Rosser si

$$\xleftrightarrow{*} \subseteq \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$$

2. \longrightarrow est confluyente si

$$\xleftarrow{*} \circ \xrightarrow{*} \subseteq \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$$

3. \longrightarrow est localement confluyente si

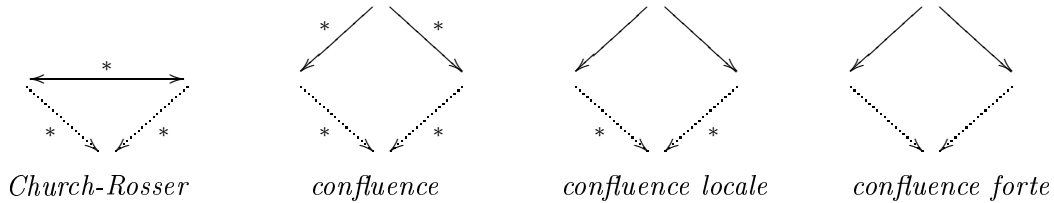
$$\longleftarrow \circ \longrightarrow \subseteq \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$$

4. \longrightarrow est fortement confluyente si

$$\longleftarrow \circ \longrightarrow \subseteq \longrightarrow \circ \longleftarrow$$

5. \longrightarrow est convergente si \longrightarrow termine et a la propriété de Church-Rosser.

Ces différentes définitions se représentent chacune par un diagramme. Dès que ce sera possible, nous adopterons cet artifice typographique pour exprimer les propriétés des relations. Une flèche pleine figure une hypothèse et une flèche en pointillé une conclusion.



Si une relation est fortement confluyente alors elle est confluyente. Si une relation est confluyente alors elle est localement confluyente. Une relation est confluyente si et seulement si elle satisfait la propriété de Church-Rosser.

La confluence est une propriété difficile à tester. En pratique, le test de confluence se fait localement grâce au théorème suivant :

Théorème 1.2 (Newman [New42])

Si \longrightarrow termine, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. \longrightarrow a la propriété de Church-Rosser,
2. \longrightarrow est confluyente,

3. \longrightarrow est localement confluente,
4. $\forall t, t' \in T : t \longleftarrow^* t' \iff t \downarrow = t' \downarrow$.

La normalisation (forte ou faible) est la seconde des deux propriétés importantes pour une relation. Si nous considérons une relation comme un calcul sur un ensemble, la normalisation forte assure que ce calcul est toujours fini ; la normalisation faible assure qu'il y a un moyen de terminer tout calcul.

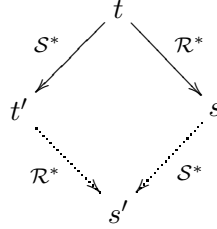
Définition 1.24 Soit une relation binaire \longrightarrow sur un ensemble T .

- On dit que $t \in T$ est une forme normale s'il n'existe pas de $u \in T$ tel que $t \longrightarrow u$ et on dit que $v \in T$ a une forme normale t s'il existe une forme normale t tel que $v \longrightarrow t$.
- La relation \longrightarrow est faiblement normalisable (weakly normalizing) si tout terme $t \in T$ a une forme normale.
- La relation \longrightarrow est fortement normalisable (strongly normalizing) ou normalisable s'il n'existe pas de suite infinie $(t_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de T telle que $t_1 \longrightarrow t_2 \longrightarrow \dots$.

Dans la pratique, on est souvent amené à analyser les propriétés d'une relation obtenue en composant deux (ou plusieurs) relations. Plusieurs méthodes ont été développées pour démontrer la confluence d'une telle relation en fonction des propriétés des deux relations.

Lemme 1.1 (Hindley-Rosen [Ros73])

Etant données deux relations confluentes $\longrightarrow_{\mathcal{R}}$ et $\longrightarrow_{\mathcal{S}}$ telles que le diagramme suivant est satisfait :

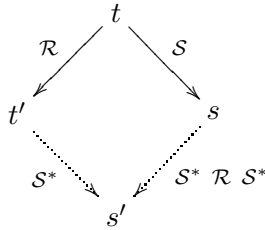


Alors la relation $\longrightarrow_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$ est confluente.

Si le diagramme du Lemme 1.1 est satisfait on dit que les relations $\longrightarrow_{\mathcal{R}}$ et $\longrightarrow_{\mathcal{S}}$ commutent.

Lemme 1.2 (Yokouchi [YH90])

Etant données deux relations $\longrightarrow_{\mathcal{R}}$ et $\longrightarrow_{\mathcal{S}}$ telles que $\longrightarrow_{\mathcal{S}}$ est confluente et terminante, $\longrightarrow_{\mathcal{R}}$ est fortement confluente et le diagramme suivant est satisfait :



Alors la relation $\xrightarrow{*}_{\mathcal{S}} \longrightarrow_{\mathcal{R}} \xrightarrow{*}_{\mathcal{S}}$ est confluente.

Si le diagramme du Lemme 1.2 est satisfait on dit que les relations $\longrightarrow_{\mathcal{R}}$ et $\longrightarrow_{\mathcal{S}}$ sont cohérentes.

On peut aussi analyser les propriétés de confluence et Church-Rosser modulo une relation d'équivalence. On considère \longrightarrow_R et \longleftrightarrow_E deux relations binaires sur l'ensemble T , dont l'une,

\longleftrightarrow_E , est une relation d'équivalence. On note $\longrightarrow_{R/E}$ la relation $\longleftrightarrow_E^* \circ \longrightarrow_R \circ \longleftrightarrow_E^*$ simulant la relation induite par \longrightarrow_R sur les classes d'équivalence de \longleftrightarrow_E^* .

D'habitude, on simule la relation $\longrightarrow_{R/E}$ par une relation \longrightarrow_S plus faible satisfaisant $\longrightarrow_R \subseteq \longrightarrow_S \subseteq \longrightarrow_{R/E}$. On a alors une propriété de Church-Rosser modulo E pour \longrightarrow_S , ainsi qu'une notion de confluence qui n'implique plus la propriété de Church-Rosser. Pour une présentation détaillée des propriétés des relations définies sur des classes d'équivalence le lecteur peut se référer à [Hue80], [JK86] et [KK99].

1.2 Les systèmes de réécriture

L'idée centrale de la réécriture [DJ90, Klo90, BN98] est d'imposer une direction dans l'utilisation d'axiomes en définissant les règles de réécriture.

Définition 1.25 Une règle de réécriture est une paire de termes orientée, noté $l \rightarrow r$, où l est le membre gauche de la règle et r son membre droit.

Un système de réécriture sur les termes est un ensemble de règles de réécriture.

Deux conditions sont imposées habituellement sur la construction des règles de réécriture :

1. le membre gauche d'une règle de réécriture n'est pas une variable ($\forall x \in \mathcal{X}, l \neq x$),
2. l'ensemble des variables du membre droit est inclu dans l'ensemble des variables du membre gauche ($\text{Var}(r) \subseteq \text{Var}(l)$).

L'ensemble des variables d'une règle $l \rightarrow r$, noté $\text{Var}(l \rightarrow r)$, est défini par $\text{Var}(l) \cup \text{Var}(r)$ et si la condition précédente est satisfaite alors $\text{Var}(l \rightarrow r) = \text{Var}(l)$.

Une règle de réécriture est *linéaire à gauche* si son membre gauche est linéaire. Un système de réécriture est linéaire à gauche si toutes ses règles le sont.

Une règle de réécriture $l \rightarrow r$ est *régulière* si $\text{Var}(l) = \text{Var}(r)$. Un système de réécriture est régulier si toutes ses règles le sont.

La relation *de réécriture* \longrightarrow_R associée à un système de réécriture R est définie par : $t \longrightarrow_R t'$ s'il existe une position p dans t , une règle $l \rightarrow r$ dans R et une substitution σ telles que $t|_p = \sigma l$ et $t' = t[\sigma r]_p$. Si on veut préciser la position, la règle et la substitution, alors on écrira $t \longrightarrow_{R,p,l \rightarrow r,\sigma} t'$.

Par application du Théorème 1.2, si la relation de réécriture \longrightarrow_R est convergente, alors pour décider de l'égalité $t \longleftrightarrow_R^* t'$, il suffit de calculer les formes normales $t \downarrow_R$ et $t' \downarrow_R$ puis de les comparer.

Définition 1.26 Un système de réécriture R est *convergent* (resp. *est confluent, termine*) si la relation de réécriture \longrightarrow_R est convergente (resp. *est confluyente, termine*).

1.2.1 Terminaison des systèmes de réécriture

La convergence requiert la terminaison. Cette propriété est indécidable en général même pour un système de réécriture réduit à une seule règle linéaire à gauche, comme l'a montré M. Dauchet [Dau89]. On peut néanmoins prouver la terminaison dans certain cas au moyen d'un ordre sur les termes.

Définition 1.27 Un ordre de réécriture sur les termes est un ordre $>$ stable par contexte et par substitution : pour tous termes t, t', u et toute substitution σ ,

$$t > t' \implies u[\sigma t]_p > u[\sigma t']_p$$

Un ordre de réduction est un ordre de réécriture *nœthérien*.

On assure la terminaison de la réécriture en orientant les règles de manière à ce que toute règle $l \rightarrow r$ vérifie $l > r$ où $>$ est un ordre de réduction sur les termes.

Théorème 1.3 [Lan77] *Le système de réécriture R termine si et seulement si \longrightarrow_R est contenu dans un ordre de réduction.*

De nombreux auteurs ont décrit des ordres de réduction sur les termes. Parmi les plus connus, citons l'ordre de Knuth-Bendix ou *kbo* [KB70], les ordres sur les chemins [Pla78, Der82, BP85, JLR82] ou encore les interprétations polynômiales [Lan75, BCL87].

Il est souvent approprié de construire un ordre de réduction par interprétation (polynômiale) en utilisant un homomorphisme τ de termes clos vers une \mathcal{F} -algèbre \mathcal{A} équipée d'un ordre bien fondé $>$. On note f_τ l'image de $f \in \mathcal{F}$ par τ et on demande que la contrainte de monotonie suivante soit satisfaite :

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \forall f \in \mathcal{F}, a > b \text{ implique } f_\tau(\dots, a, \dots) > f_\tau(\dots, b, \dots)$$

Alors, l'ordre $>_\tau$ défini par

$$\forall s, t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}, s >_\tau t \text{ si } \tau(s) > \tau(t)$$

est bien fondé.

Afin de comparer les termes contenant des variables, les variables sont introduites dans \mathcal{A} menant à $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ et aux variables de \mathcal{X} on fait correspondre des variables distinctes dans $\mathcal{A}(\mathcal{X})$. L'ordre $>_\tau$ est étendu en définissant

$$\forall s, t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X}), s >_\tau t \text{ si } \alpha(\tau(s)) > \alpha(\tau(t))$$

pour toute assignation α des valeurs dans \mathcal{A} aux variables de $\tau(s)$ et $\tau(t)$. Puisque $>$ est supposé bien fondé, on peut montrer la terminaison d'un système de réécriture si on trouve \mathcal{A} , τ , α satisfaisant les conditions précédentes.

Dans la pratique on utilise très souvent l'algèbre des entiers naturels avec l'ordre habituel et des interprétations polynômiales et exponentielles.

Exemple 1.3 *On considère le système de réécriture suivant*

$$\begin{aligned} \ominus \ominus x &\rightarrow x \\ \ominus(x \oplus y) &\rightarrow (\ominus x) \oplus (\ominus y) \\ \ominus(x \otimes y) &\rightarrow (\ominus x) \otimes (\ominus y) \\ x \otimes (y \oplus z) &\rightarrow (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \\ (x \oplus y) \otimes z &\rightarrow (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \end{aligned}$$

En utilisant l'interprétation exponentielle ci-dessous dans les entiers supérieurs à 2

$$\begin{aligned} \tau(\ominus x) &\rightarrow 2^{\tau(x)} \\ \tau(x \oplus y) &\rightarrow \tau(x) + \tau(y) + 1 \\ \tau(x \otimes y) &\rightarrow \tau(x) \times \tau(y) \\ \tau(c) &\rightarrow 3 \end{aligned}$$

pour toute constante $c \in \mathcal{F}$, le système a été montré terminant dans [Fil78].

Par exemple, pour la première règle on a $2^{2^n} > n$ pour tout entier $n > 2$ assigné à la variable x . Utiliser une interprétation dans les entiers positifs ne serait pas suffisant pour montrer les inégalités correspondant aux deux dernières règles et considérer les entiers supérieurs à 1 ne serait pas suffisant pour montrer l'inégalité correspondant à la troisième règle.

Un ordre de réduction total contient la relation de sous-terme strict. Dans le cas contraire, si $t|_\omega > t$ pour un terme t et une position ω , alors il existe une chaîne infinie décroissante $t > t[t]_\omega > t[t[t]_\omega]_\omega > \dots$. On appelle ordre *de simplification*, un ordre de réduction contenant l'ordre sous-terme.

Théorème 1.4 [Der82] *Soit \mathcal{F} un ensemble fini de symboles de fonctions. Un système de réécriture R termine s'il existe un ordre de simplification $>$ tel que pour toute règle $l \rightarrow r$ de R , $l > r$.*

Les ordres de simplifications peuvent être construits à partir d'un ordre sur les symboles de fonctions \mathcal{F} appelé *précédence*. Parmi les ordres de simplifications on peut citer l'*ordre multi-ensemble sur les chemins* [Der82] et l'*ordre lexicographique sur les chemins* [KL80]. Pour plus de détails concernant la terminaison, nous renvoyons le lecteur à [Der87].

1.2.2 Les systèmes de réécriture conditionnels

En ajoutant des conditions sur l'application des règles de réécriture, les systèmes de réécriture sont naturellement étendus à des systèmes de réécriture *conditionnels*. Plusieurs définitions des systèmes de réécriture conditionnels ont été proposées et la correspondance entre ces systèmes et la relation avec les systèmes équationnels a été analysée dans [DO90]. La différence essentielle entre les systèmes conditionnels est l'interprétation des conditions et nous présentons par la suite quelques approches possibles.

Un système de réécriture *conditionnel naturel* (natural conditional rewriting system) a des règles de réécriture de la forme

$$l \rightarrow r \quad \text{si} \quad s_1 \xrightarrow{*} t_1 \wedge \dots \wedge s_n \xrightarrow{*} t_n$$

où $s_i \xrightarrow{*} t_i$ sont appelées les conditions de la règle.

La règle $l \rightarrow r$ est appliquée dans le sens de la réécriture non-conditionnelle s'il existe une preuve pour toute condition $s_i \xrightarrow{*} t_i$, $i = 1 \dots n$, instanciée par la substitution appropriée, où les preuves peuvent utilisées un nombre quelconque de réécritures dans les deux directions. Si $n = 0$ on obtient une règle non-conditionnelle.

Puisque l'application de telles règles implique des preuves arbitraires d'égalité où la réécriture n'apporte pas beaucoup de bénéfices par rapport aux systèmes équationnelles, on peut utiliser une définition plus restrictive de la réécriture conditionnelle.

Un système de réécriture *conditionnel standard* (standard (join) conditional rewriting system) a des règles de réécriture de la forme

$$l \rightarrow r \quad \text{si} \quad s_1 \downarrow t_1 \wedge \dots \wedge s_n \downarrow t_n$$

Dans ce cas, une instance σl du membre gauche de la règle est réécrite en σr seulement si, pour tout $i = 1 \dots n$, σs_i peut être réduit (en utilisant zéro ou plusieurs réécritures) au même terme que σt_i .

La condition d'application pour une règle de réécriture peut être affaiblie encore plus. Un système de réécriture *conditionnel normal* (normal conditional rewriting system) a des règles de réécriture de la forme

$$l \rightarrow r \quad \text{si} \quad s_1 \longrightarrow^! t_1 \wedge \dots \wedge s_n \longrightarrow^! t_n$$

où $s_i \longrightarrow^! t_i$ indique que t_i est une forme normale de s_i .

Un système standard contenant des règles de la forme

$$l \rightarrow r \quad \text{si} \quad s_1 \downarrow t_1 \wedge \dots \wedge s_n \downarrow t_n$$

peut être transformé dans un système normal où les règles sont remplacées par

$$l \rightarrow r \text{ si } eq(s_1, t_1) \longrightarrow^! true \wedge \dots \wedge eq(s_n, t_n) \longrightarrow^! true$$

et la règle

$$eq(x, x) \rightarrow true$$

est ajoutée au système. Les réductions des termes ne contenant pas les symboles *eq* et *true* sont similaires dans les deux systèmes.

1.2.3 Logique de réécriture

La logique de réécriture est proposée dans [Mes92] comme une manière d'interpréter les systèmes de réécriture.

Une logique est définie en général par une syntaxe, un système de déduction, une classe de modèles et une relation de satisfaisabilité. Dans cette section, nous présentons ces quatre composantes dans le cas de la logique de réécriture.

Syntaxe

La syntaxe nécessaire pour définir une logique est spécifiée par sa signature qui nous permet de construire des formules.

Définition 1.28 *Soit \mathcal{X} un ensemble de variables et \mathcal{L} un ensemble de symboles appelés étiquettes. La signature de la logique de réécriture est un triplet*

$$\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{E})$$

où \mathcal{S} est un ensemble de sortes, \mathcal{F} est un ensemble de symboles de fonctions et \mathcal{E} est un ensemble d'axiomes équationnels dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$.

Les axiomes équationnels dans \mathcal{E} doivent être interprétés comme étant des axiomes exprimés sur la signature. Les formules $sen(\Sigma)$ formées sur la signature Σ sont définies comme des *séquents* $Seq(\Sigma)$ de la forme suivante

$$\pi : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}}$$

où $t, t' \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ et $\pi \in \mathcal{T}_{\mathcal{F} \cup \mathcal{L} \cup \{\cdot\}}$.

π est appelé un terme de preuve et l'ensemble de tous ces termes de preuve $\mathcal{T}_{\mathcal{F} \cup \mathcal{L} \cup \{\cdot\}}$ est désigné par Π .

Le sens informel du séquent $\pi : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}}$ est que π permet de dériver les termes de la classe d'équivalence $[t']_{\mathcal{E}}$ à partir des termes de la classe d'équivalence $[t]_{\mathcal{E}}$ et que le terme de preuve π représente une preuve de cette dérivation.

Système de déduction

Afin de construire le système de déduction de la logique de réécriture, on introduit d'abord la notion de *théorie de réécriture*.

Définition 1.29 *Une théorie de réécriture est définie par un quadruplet $\mathcal{TR} = (\Sigma, \mathcal{L}, \mathcal{X}, \mathcal{R})$, où $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{E})$ est une signature composée des sortes \mathcal{S} , des symboles de fonctions \mathcal{F} et des équations \mathcal{E} dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$, \mathcal{X} est un ensemble infini de variables, \mathcal{L} est un ensemble d'étiquettes des règles et \mathcal{R} est un ensemble de règles de réécriture étiquetées de la forme*

$$[\ell] \quad l \rightarrow r$$

où l'étiquette $\ell \in \mathcal{L}$, les membres gauche et droit $l, r \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ tels que $\text{Var}(r) \subseteq \text{Var}(l)$ et l'arité de l'étiquette ℓ est égale au nombre de variables distinctes dans cette règle.

L'ensemble d'équations \mathcal{E} définit une relation de congruence modulo laquelle la réécriture par les règles de \mathcal{R} est réalisée. Typiquement, l'ensemble \mathcal{E} contient des équations qui ne sont pas orientables, i.e., transformables en un système de réécriture terminant. Cependant, la terminaison, et aussi la confluence, peuvent être des propriétés souhaitables pour certains sous-ensembles de règles de \mathcal{R} .

La relation de déduction \vdash est donc définie comme suit.

Définition 1.30 *Étant donnée une théorie de réécriture étiquetée \mathcal{TR} , le séquent $\pi : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}}$ se déduit à partir de \mathcal{TR} si π est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles de déduction de la logique de réécriture données dans la figure 1.1. Ceci est désigné par*

$$\mathcal{TR} \vdash \pi : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}}$$

Réflexivité	\Rightarrow $[t]_{\mathcal{E}} : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t]_{\mathcal{E}}$ si $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$
Congruence	$\pi_1 : [t_1]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t'_1]_{\mathcal{E}}, \dots, \pi_n : [t_n]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t'_n]_{\mathcal{E}}$ \Rightarrow $f(\pi_1, \dots, \pi_n) : [f(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{E}} \rightarrow [f(t'_1, \dots, t'_n)]_{\mathcal{E}}$ si $f \in \mathcal{F}_n$
Remplacement	$\pi_1 : [t_1]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t'_1]_{\mathcal{E}}, \dots, \pi_n : [t_n]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t'_n]_{\mathcal{E}}$ \Rightarrow $\ell(\pi_1, \dots, \pi_n) : [l(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{E}} \rightarrow [r(t'_1, \dots, t'_n)]_{\mathcal{E}}$ si $[\ell(x_1, \dots, x_n)]l(x_1, \dots, x_n) \rightarrow r(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}$
Transitivité	$\pi_1 : [t_1]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t_2]_{\mathcal{E}}, \pi_2 : [t_2]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t_3]_{\mathcal{E}}$ \Rightarrow $\pi_1; \pi_2 : [t_1]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t_3]_{\mathcal{E}}$

FIG. 1.1: Règles de déduction de la logique de réécriture

Modèle

Le modèle de la logique de réécriture présenté ici est basé sur une axiomatisation algébrique des séquents de réécriture. En particulier, on s'intéresse à une *sémantique algébrique*.

La sémantique algébrique permet de décrire l'idée intuitive d'un système de réécriture : les états du système sont des classes d'équivalence de termes modulo \mathcal{E} et les transitions sont des réécritures utilisant les règles du système de réécriture. Ainsi, l'espace des calculs de la théorie de réécriture \mathcal{TR} peut être choisi comme un modèle de la logique de réécriture. Cet espace des calculs est déterminé par l'ensemble des termes de preuves π calculés dans les séquents $\pi : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}}$ modulo une équivalence de calcul. Cette équivalence est donnée par \mathcal{E} et un ensemble \mathcal{E}_{Π} d'axiomes équationnels sur les termes de preuves décrits dans la Figure 1.2, où

- les deux premiers axiomes décrivent les équations habituelles d'associativité et d'identité ;

- l’axiome de préservation de composition décrit une équivalence entre la composition de plusieurs pas de réécriture dans le contexte “ f ” et la composition de chaque pas de réécriture dans ce contexte ;
- l’axiome de préservation d’identités \mathcal{E} décrit la stabilité par contexte de \mathcal{E} ;
- l’équivalence induite par les cinq premières équations définit des termes de preuve équivalents tels que les dérivations correspondantes diffèrent uniquement par l’ordre de réduction de radicaux ;
- l’axiome de permutation parallèle décrit la réduction *simultanée* de radicaux compatibles. Ceci peut être simulé par une composition d’exécution séquentielle [Gad96]. Intuitivement, la réécriture au sommet par une règle ℓ et une réécriture en dessous sont des processus indépendants ce qui permet ainsi leur exécution dans n’importe quel ordre.

Associativité	$\forall \pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \Pi$ $\pi_1; (\pi_2; \pi_3) = (\pi_1; \pi_2); \pi_3$
Identités	$\forall \pi : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}},$ $\pi; [t']_{\mathcal{E}} = \pi, \text{ et } [t]_{\mathcal{E}}; \pi = \pi$
Préservation de composition	$\forall f \in \mathcal{F}_n, n = f , \forall \pi_1, \dots, \pi_n, \pi'_1, \dots, \pi'_n :$ $f(\pi_1; \pi'_1, \dots, \pi_n; \pi'_n) = f(\pi_1, \dots, \pi_n); f(\pi'_1, \dots, \pi'_n)$
Préservation d’identités	$\forall f \in F_n, n = f :$ $f([t_1]_{\mathcal{E}}, \dots, [t_n]_{\mathcal{E}}) = [f(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{E}}$
Axiomes de E	$\forall u = v \in \mathcal{E}, \forall \pi_1, \dots, \pi_n :$ $u(\pi_1, \dots, \pi_n) = v(\pi_1, \dots, \pi_n)$
Permutation parallèle	$\forall [\ell] \ l \rightarrow r \in \mathcal{R}, \forall \pi_1 : [t_1]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t'_1]_{\mathcal{E}}, \dots, \pi_n : [t_n]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t'_n]_{\mathcal{E}}$ $\ell(\pi_1, \dots, \pi_n) = \ell([t_1]_{\mathcal{E}}, \dots, [t_n]_{\mathcal{E}}); r(\pi_1, \dots, \pi_n) \text{ et }$ $\ell(\pi_1, \dots, \pi_n) = l(\pi_1, \dots, \pi_n); \ell([t'_1]_{\mathcal{E}}, \dots, [t'_n]_{\mathcal{E}})$

FIG. 1.2: Équivalence des termes de preuves – \mathcal{E}_{Π}

Le modèle considéré est un ensemble quotient noté

$$\mathcal{T}_{\mathcal{TR}} = \{\pi \mid \mathcal{TR} \vdash \pi : [t] \rightarrow [t']\} / (\mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{\Pi})$$

Satisfaisabilité

La relation de satisfaisabilité $\models_{\subseteq} \mathcal{T}_{\mathcal{TR}} \times Seq(\Sigma)$ doit être compatible avec les morphismes des signatures. Elle est définie dans [Mes89].

1.2.4 Systèmes de calcul

Les systèmes de calcul ont été introduits par Kirchner, Kirchner et Vittek dans [KKV95a], où ils présentent une version plus élaborée des idées qu’ils avaient proposées originalement dans [KKV93]. Un système de calcul enrichit le formalisme de la logique de réécriture avec

une notion de *stratégie* : un *système de calcul* est composé d'une théorie de réécriture et d'un *système de stratégies*. Les stratégies contrôlent l'application des règles de réécriture en spécifiant des parcours dans l'arbre de toutes les dérivations possibles et de cette façon décrivent quels sont les nœuds considérés comme des résultats d'un calcul. Elles sont utilisées, d'une part, pour décrire le déroulement de preuves qui nous intéressent et, d'autre part, pour restreindre l'espace de recherche de ces preuves.

La première composante d'un système de calcul est une théorie de réécriture \mathcal{TR} à partir de laquelle on définit la notion de calcul.

Définition 1.31 *Étant donné une théorie de réécriture \mathcal{TR} et un séquent $\pi : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}}$ avec le terme de preuve $\pi = t[\ell(\sigma x)]_{\omega}$, un pas de réécriture simple est défini par*

$$[t]_{\mathcal{E}} \Rightarrow_{\ell, \sigma, \omega} [t']_{\mathcal{E}}$$

Cette définition correspond exactement à la notion traditionnelle d'un pas de réécriture à la position ω en utilisant la règle étiquetée avec l'étiquette ℓ et le match σ .

En plus, on s'intéresse à une représentation canonique de tous les calculs qui sont équivalents modulo les axiomes $\mathcal{E}_{\Pi(R)}$. Puisque tout séquent peut être décomposé en une composition de séquents élémentaires (séquentiels)

$$\forall \pi : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}}$$

soit

$$\pi = [t]_{\mathcal{E}} = [t']_{\mathcal{E}}$$

soit

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } [t]_{\mathcal{E}} = [t_0]_{\mathcal{E}} \Rightarrow_{\ell_0} [t_1]_{\mathcal{E}} \Rightarrow_{\ell_1} [t_2]_{\mathcal{E}} \dots \Rightarrow_{\ell_{n-1}} [t_n]_{\mathcal{E}} = [t']_{\mathcal{E}}$$

et

$$\pi = A(;) (\pi_0; \pi_1; \pi_2; \dots; \pi_{n-1})$$

où $A(;)$ désigne l'associativité du “;”.

Pour un terme de preuve π , $[t_n]_{\mathcal{E}}$ est appelé le *résultat de l'application de π sur $[t_0]_{\mathcal{E}}$* et il est aussi désigné par $[t]_{\mathcal{E}} \xrightarrow{\pi} [t']_{\mathcal{E}}$. La relation d'équivalence générée par $(\mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{\Pi(R)})$ sur les termes de preuve induit une équivalence sur les calculs : deux calculs sont équivalents s'ils amènent au même résultat et que leurs termes de preuve sont équivalents.

En général, on ne s'intéresse pas à tous les calculs, on s'intéresse seulement à ceux guidés par une stratégie, c'est-à-dire une description de la séquence de pas de réécriture élémentaires permis par les calculs. D'un point de vue formel, une stratégie est un ensemble de termes de preuve, i.e., un sous-ensemble des termes de preuve Π , qui est clos par concaténation.

La relation de transition $\pi : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}}$ peut être étendue pour les stratégies.

Définition 1.32 *Soient $S \subseteq \Pi$ et $t, t' \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. La relation*

$$S : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}}$$

est vraie s'il existe un terme de preuve $\pi \in S$ tel que

$$\pi : [t]_{\mathcal{E}} \rightarrow [t']_{\mathcal{E}}$$

Le résultat de l'application d'une stratégie S sur un terme t , désigné fonctionnellement par $S(t)$, est défini comme suit

$$S(t) = \{[t']_{\mathcal{E}} | \exists \pi \in S, [t]_{\mathcal{E}} \xrightarrow{\pi} [t']_{\mathcal{E}}\}$$

La relation $S : t \rightarrow t'$ exprime la dérivabilité du terme t en t' suivant une certaine stratégie S . À partir de cette définition, on peut noter que l'application d'une stratégie sur un terme peut retourner plusieurs résultats.

Une première façon de décrire une stratégie est d'énumérer extensivement le sous-ensemble des termes de preuve. Cette approche n'est pas satisfaisante en pratique, donc le problème est de définir un langage permettant de décrire des sous-ensembles des termes de preuve. La différence entre la représentation d'une stratégie comme un ensemble de termes de preuve et une expression dans un formalisme de stratégies reflète la différence entre la vue sémantique des stratégies et la vue syntaxique des stratégies exprimées sous la forme d'un programme dans un langage de stratégies. Dans la Section 1.2.5, nous présentons les opérateurs de stratégies utilisés dans le langage ELAN qui peut être décrit comme un cadre logique pour le prototypage de systèmes de calcul.

On peut maintenant définir formellement la notion de système de calcul.

Définition 1.33 *Un système de calcul est composé d'une théorie de réécriture $\mathcal{TR} = (\Sigma, \mathcal{L}, \mathcal{X}, \mathcal{R})$ et d'une stratégie S .*

1.2.5 Langage ELAN

Le langage ELAN a été conçu au sein du projet Protheo à Nancy au début des années quatre-vingt-dix. Sa première version est décrite dans la thèse de Vittek [Vit94] et son implantation est détaillée dans [KKV95b]. Au cours des années, le langage a évolué et depuis le début de l'année 2000 la version 3.4 est disponible [BCD⁺00].

ELAN a été conçu comme un cadre logique pour le prototypage de systèmes de calcul. Du point de vue de la programmation, le langage offre la possibilité de spécifier des systèmes de calcul composés de théories de réécriture multi-sortées, chacune décrite par une signature et par un ensemble de règles de réécriture et de stratégies d'exécution.

- La signature définit les sortes et les symboles de fonctions utilisés dans la description de la théorie. ELAN permet d'utiliser des symboles libres et associatifs-commutatifs, qui peuvent être spécifiés en utilisant une notation *mixfix*.
- L'ensemble de règles de réécriture est composé de règles non-nommées et de règles nommées ou étiquetées.
 - Les règles non-nommées sont utilisées pour la normalisation de termes. Leur application n'est pas contrôlée par l'utilisateur, elles sont exécutées avec une stratégie pré-définie dans le langage. Cette stratégie pré-définie est la stratégie de normalisation *leftmost-innermost*. Puisque la stratégie de normalisation est pré-définie dans ELAN, elle n'est pas spécifiée dans la théorie de réécriture de l'utilisateur, l'ensemble de règles non-nommées doit être confluent et terminant.
 - L'ensemble de règles nommées, qui n'est pas nécessairement confluent et terminant, peut être contrôlé par des *stratégies élémentaires*. Les deux raisons principales pour leur utilisation sont
 - si l'ensemble de règles n'est pas terminant, l'utilisateur a la possibilité de restreindre l'ensemble de dérivations à un sous-ensemble de dérivations finies, afin d'éviter des dérivations infinies ;
 - si l'ensemble de règles n'est pas confluent, l'utilisateur a la possibilité de spécifier certains sous-ensembles de toutes les dérivations possibles et obtenir ainsi un sous-ensemble de tous les résultats possibles.

- Les stratégies sont utilisées en ELAN de trois façons différentes
 - pour séparer dans un programme la partie calcul de la partie contrôle ;
 - pour exprimer des dérivations non-déterministes ;
 - pour spécifier des procédures de normalisation particulières.

Parmi plusieurs caractéristiques, le calcul non-déterministe d'ELAN le différencie d'autres systèmes basés sur la réécriture. L'avantage de cette option est que cela permet de travailler avec des systèmes de réécriture non-confluents.

Le style de programmation en ELAN, basé sur le paradigme des systèmes de calcul, unifie certaines caractéristiques de la programmation fonctionnelle et logique. La programmation par réécriture est similaire à l'approche fonctionnelle restreinte au premier ordre. Cependant, la possibilité de spécifier des sous-ensembles de dérivations par un langage de stratégies joue le rôle du non-déterminisme de la programmation logique.

La variété des applications qui ont été implantées en ELAN illustre la généralité du paradigme des systèmes de calcul et montre l'expressivité et la puissance du langage comme un outil de programmation. Parmi elles, on peut citer

- une implantation de la procédure de résolution de contraintes d'ordre pour la preuve de terminaison basée sur l'ordre général sur les chemins [GG95] ;
- deux implantations de la procédure de complétion de Knuth-Bendix [KM95, KLS96] ;
- une implantation du prouveur de prédicats B [CK97] ;
- vérification du protocole d'authentification de Needham-Schroeder [Cir99] ;
- la combinaison d'algorithmes d'unification [Rin97] ;
- un algorithme d'unification d'ordre supérieur [Bor95] ;
- résolution de CSP [Cas98] ;
- CLP [KR98] ;
- la réécriture du premier ordre [KM96] et d'ordre supérieur.

La première version d'ELAN avait offert un interpréteur et un compilateur restreint [Vit96]. De nouvelles techniques de compilation de systèmes de calcul ont été étudiées et maintenant il existe un compilateur du langage permettant d'utiliser des symboles associatifs-commutatifs [MK97, MK98].

Dans le reste de cette section, nous présentons brièvement le langage ELAN. Nous illustrons la syntaxe des trois composants d'un système de calcul : signatures, règles de réécriture et stratégies. Une description formelle et détaillée du langage est donnée dans [Bor98], une sémantique du point de vue fonctionnelle est présentée dans [BKK98, BKKR01] et tous les détails nécessaires pour l'utilisation du langage peuvent être trouvés dans [BCD⁺00].

Afin d'illustrer les composants et l'utilisation du langage ELAN nous présentons une partie de la spécification du protocole d'authentification Needham-Schroeder [NS78]. Le but de ce protocole et d'établir une authentification mutuelle entre plusieurs agents communiquant dans un réseau non-sécurisé (c'est-à-dire en présence des intrus). Dans les exemples suivants nous présentons seulement quelques règles décrivant le protocole et une stratégie recherchant toutes les attaques possibles ; une description plus détaillée est donnée dans [Cir99].

Signatures ELAN

ELAN permet de définir des signatures multi-sortées qui sont spécifiées par un ensemble de sortes \mathcal{S} . L'exemple 1.4 présente la déclaration de différentes sortes utilisées pour prototyper le protocole d'authentification Needham-Schroeder.

Exemple 1.4 (*Déclaration de sortes en ELAN*)

La déclaration des sortes des termes représentant les agents, l'intrus, le réseau et leur caractéristiques, peut être faite en ELAN de la manière suivante

```
sort
  agent intruder SWC AgentId Nonce message network state;
end
```

Une fois déclarées les sortes de la signature, on peut définir les symboles de fonctions indexés qui appartiennent à l'ensemble de symboles de fonctions \mathcal{F} de la signature. Chaque symbole, défini par son profil en notation *mixfix*, peut être décoré par des attributs sémantiques comme étant un symbole libre ou associatif-commutatif ((AC)) et il peut aussi être décoré par des attributs syntaxiques tels que

- sa priorité syntaxique (e.g. `pri 10`);
- sa visibilité dans d'autres modules (e.g. `global/local`);
- son associativité syntaxique par défaut à gauche (`assocLeft`) ou à droite (`assocRight`);
- le fait d'être synonyme avec un autre symbole (e.g. `alias`).

L'Exemple 1.5 montre la définition de symboles de fonctions avec des attributs syntaxiques et sémantiques.

Exemple 1.5 (*Définition de symboles de fonctions en ELAN*)

À partir de la déclaration de sortes de l'Exemple 1.4, on peut spécifier que toute constante de la sorte `int` est un `AgentId`. On peut également définir les états (SWC) possibles d'un agent et la modalité de construire des nonces. Un message est défini en précisant son expéditeur, son destinataire et deux nonces cryptés avec la clé publique du destinataire. L'ensemble de messages représentant le réseau (`network`) est défini en utilisant l'attribut AC pour l'opérateur `&`. Le caractère spécial `@` est utilisé pour indiquer la position d'un argument.

```
operators    global
  @          : (int)      AgentId;

  SLEEP      : SWC;
  WAIT       : SWC;
  COMMIT     : SWC;

  N(@,@)     : (AgentId AgentId) Nonce;

  @ + @ + @  : ( AgentId SWC Nonce ) Agent;
  @-->@ K(@)[@,@] : (AgentId AgentId AgentId Nonce Nonce) message;

  @          : (message) network;
  @ & @      : (network network) network (AC);

  @ <> @ <> @ <> @ : ( Agent Agent intruder network) state;
end
```

L'état général consiste en les états des deux agents participant à la communication, de l'intrus et du réseau.

Règles de réécriture

Il existe deux types de règles souvent introduites dans une théorie de réécriture : les règles non-conditionnelles et les règles conditionnelles. Le langage **ELAN** introduit en plus la notion d'*affectation locale* pour des variables (locales) non-instanciées pendant le filtrage [BCD⁺00]. Cela nous permet d'appliquer une stratégie sur un terme autre que celui de tête et aussi de garder la valeur d'une variable lorsqu'elle est utilisée plusieurs fois dans une règle.

La syntaxe des règles conditionnelles avec des affectations locales est la suivante

$$[\ell] \quad l \Rightarrow r \\ \text{if} - \text{where}$$

où

- $\ell \in \mathcal{L}$ est l'étiquette de la règle (qui est vide dans le cas d'une règle non-nommée) ;
- l et r sont des termes de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ représentant les membres gauche et droit de la règle ;
- $\text{if} - \text{where} ::= \{\text{if } v \mid \text{where } y := (S)u \mid \text{where } y := ()u\}^*$ où
 - $\text{if } v$ est une condition booléenne ;
 - $\text{where } y := (S)u$ est une affectation de la variable $y \in \mathcal{X}$ par le résultat de l'application de la stratégie S sur le terme $u \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$;
 - $\text{where } y := ()u$ est une affectation de la variable $y \in \mathcal{X}$ par le résultat de la normalisation du terme u .

L'application d'une règle de réécriture à un terme clos commence par une étape de filtrage permettant de calculer la substitution associée au problème de filtrage considéré. Les évaluations locales et les conditions sont alors évaluées les unes à la suite des autres (de haut en bas) jusqu'à atteindre la dernière ; c'est seulement à ce moment là que la règle peut s'appliquer et que le membre droit est construit. Chaque condition v est mise en forme normale puis comparée à la valeur de vérité **true** pré-définie par le système. En cas d'égalité, on dit que la condition est satisfaisable et le calcul des évaluations locales se poursuit. L'affectation locale **where** $y := (S)u$ permet de déclencher l'application d'une stratégie. Dans un premier temps, le terme u est mis en forme normale en n'utilisant que des règles non nommées, la stratégie S est ensuite appliquée sur le terme en forme normale. En cas d'échec d'une condition ou (de la stratégie) d'une évaluation locale, un mécanisme de *retour arrière* (*backtracking*) est déclenché : les évaluations locales précédentes sont réévaluées pour en extraire d'autres solutions. Si aucune autre solution n'est trouvée, on dit que l'application de la règle courante échoue et une autre règle est sélectionnée.

Exemple 1.6 (Règle avec affectation locales)

Les règles du protocole Needham-Schroeder décrivent l'évolution de l'état global pendant une session. À partir des sortes et des symboles de fonctions définis dans l'Exemple 1.4 et l'Exemple 1.5, respectivement, la règle **initiate** ci-dessous décrit l'initialisation de la communication en envoyant en réseau le message construit à partir des identités des deux agents participants.

```

rules for term
  x,y : AgentId;  m,n : Nonce;  ls : network;
  I : intruder;  mes : message;
global
  [initiate] x+SLEEP+n <> y+SLEEP+m <> I <> ls
              =>
              x+WAIT+N(x,y) <> y+SLEEP+m <> I <> mes & ls
              where mes :=() genMessage(x,y)
end
end

```

La variable *mes* représentant le message envoyé en réseau par l'agent avec l'identité *x* est instanciée en normalisant le terme *genMessage(x,y)* lequel dans ce cas génère un message $x \rightarrow y \ K(y) [N(x,y), N(x,y)]$. L'émetteur du message change son état en *WAIT* et attend une réponse à son message.

Pour des raisons de confort et d'efficacité d'exécution, le langage dispose de certaines extensions pour la construction de règles : les *affectations généralisées* et la *factorisation de règles*.

L'*affectation généralisée* est une construction syntaxique

$$\text{where } (sort) \ p := (S)u$$

où *p* est un terme non-clos de sorte $sort \in \mathcal{S}$.

Le terme *p*, dit *motif*, est composé de constructeurs et de variables, où un constructeur est un symbole de fonction qui n'apparaît pas comme opérateur de tête dans un membre gauche d'une règle de réécriture.

Toutes les variables dans le motif *p* non encore instanciées, sont instanciées par le filtrage de ce motif *p* avec le résultat de l'application de la stratégie *S* au terme *u*, ou au cas où une stratégie *S* n'est pas spécifiée, le résultat de la normalisation du terme *u*.

Exemple 1.7 (Règle avec affectation généralisée)

La réponse d'un message envoyé par l'initiateur d'une communication, comme celui généré dans la règle de l'Exemple 1.6, est construite en utilisant l'information contenue dans le message initial. Une affectation généralisée est employée afin d'extraire les caractéristiques du message qui était destiné à l'agent *y*, identité qui est spécifiée dans le motif à filtrer.

```

rules for term
  y,z,n1,n2,n3,n4 : AgentId;  m : Nonce;  ls : network;
  S : Agent;  I : intruder;  mes : message;
global
  [response] S <> y+SLEEP+m <> I <> mes & ls
              =>
              S <> y+WAIT+N(y,z) <> I <> y-->z K(z) [N(n1,n3), N(y,z)] & ls
              where (message) z-->y K(y) [N(n1,n3), N(n2,n4)] :=() mes
end
end

```

La construction de factorisation permet de mettre en facteur des parties communes de plusieurs règles ayant les mêmes membres gauche et droit. Cela permet, d'une part, de supprimer une ou plusieurs règles de réécriture, et d'autre part, d'éviter le filtrage et des exécutions communes dans plusieurs règles.

En général, la syntaxe des règles est la suivante

$$\begin{aligned} \text{r\grave{e}gle} & ::= l \Rightarrow r \\ & \quad \text{if} - \text{where} - \text{choose} \\ \text{if} - \text{where} - \text{choose} & ::= \{ \text{if} - \text{where} | \\ & \quad \text{choose} \\ & \quad \{ \text{try} \text{ if} - \text{where} - \text{choose} \}^+ \\ & \quad \text{end} \}^* \end{aligned}$$

Cette construction de factorisation peut \^etre encha\^en\^ee au m\^eme niveau que des conditions **if** et des affectations locales **where**, mais elle peut \^egalement \^etre imbriqu\^ee.

Exemple 1.8 (*R\^egle avec factorisation*)

*Si l'agent initiant la communication de l'Exemple 1.6 re\^çoit le message attendu alors il peut passer dans l'\^etat **COMMIT** repr\^esentant une session accomplie. Si le message ne contient pas le nonce correct alors une erreur est obtenue.*

```
rules for term
  x,v,w,n1,n2,n3,n4 : AgentId;  ls : network;
  R : Agent;  I : intruder;
global
[ack] x+WAIT+N(x,v) <> R <> I <> w-->x K(x)[N(n1,n3),N(n2,n4)] & ls
  =>
  S
  choose
  try
    if x==n1 and v==n3
    where S:=() x+COMMIT+N(x,v) <> R <> I <> x-->v K(v)[N(n2,n4),N(n2,n4)] & ls
  try
    if x!=n1 or v!=n3
    where S:=() ERROR
  end
end end
```

Un dernier message de confirmation est envoy\^e dans le cas o\^u le nonce re\^çu \^etait correct.

Strat\^egies \^el\^ementaires d'ELAN

Le langage de *strat\^egies \^el\^ementaires* d'ELAN permet de contr\^oler l'application des r\^egles nomm\^ees, de d\^efinir des ex\^ecutions non-d\^eterministes et de sp\^ecifier des d\^erivations simultan\^ees.

Le langage de strat\^egies \^el\^ementaires offre plusieurs op\^erateurs et nous pr\^esentons juste les plus importants en d\^ecrivant

- la construction pour la concat\^enation de strat\^egies : “ ; ” ;
- les constructions de choix **dk**, **dc**, **first** ;
- la construction d'it\^eration **repeat*** ;
- les constructions pour les strat\^egies identit\^e et \^echec : **id** et **fail**, respectivement.

La syntaxe et la s\^emantique op\^erationnelle des strat\^egies \^el\^ementaires, de fa\^con informelle, sont les suivantes.

Construction de concat\^enation

- ; La concaténation de stratégies $S_1 ; S_2$ correspond à l'axiome de transitivité de la logique de réécriture. Pour typer une concaténation, il faut que les deux stratégies S_1 et S_2 soient de la même sorte, qui devient également la sorte de cette concaténation.

Constructions de choix

dk La stratégie **dk**(S_1, \dots, S_n) donne tous les résultats de l'application de toutes les stratégies S_1, \dots, S_n . Si toutes les stratégies S_i échouent alors la stratégie **dk** échoue.

dc La stratégie **dc**(S_1, \dots, S_n) donne tous les résultats de l'application d'une des stratégies S_1, \dots, S_n laquelle est choisie de manière aléatoire. Si toutes les stratégies S_i échouent alors la stratégie **dc** échoue.

first La stratégie **first**(S_1, \dots, S_n) donne tous les résultats de l'application de la première stratégie S_1, \dots, S_n qui est applicable (en ordre textuel). Si toutes les stratégies S_i échouent alors la stratégie **first** échoue.

Constructions d'itération

repeat* La stratégie **repeat*** (S) correspond à $S^i = \overbrace{S ; \dots ; S}^i$ si S^{i+1} échoue. Si la stratégie S échoue alors la stratégie **repeat*** correspond à l'identité, elle n'échoue jamais.

Constructions d'identité et d'échec

id La stratégie **id** correspond à l'identité, elle retourne le même terme d'entrée et pourtant elle peut toujours être appliquée.

fail La stratégie **fail** correspond à un échec, elle échoue toujours.

En utilisant des stratégies non-déterministes nous pouvons explorer exhaustivement l'espace de recherche d'un problème donné et trouver des schéma satisfaisant des propriétés spécifiques.

L'exemple 1.9 montre la définition d'une stratégie en ELAN.

Exemple 1.9 (Définition de stratégies en ELAN)

La stratégie recherchant des attaques possibles applique d'une manière répétitive et non-déterministe toutes les règles de réécriture décrivant le comportement des agents honnêtes et de l'intrus et sélectionne seulement les résultats représentant une attaque.

```
[]attStrat => repeat*(
    dk( initiate, response, ack, ..., intruder )
);
attackFound
end
```

*Le résultat de la stratégie **repeat***(...) est l'ensemble de tous les comportements possibles dans une session du protocole où les messages peuvent être interceptés ou truqués par un intrus. La stratégie **attackFound** vérifie ensuite si le terme reçu en entrée représente une attaque et choisit donc parmi l'ensemble précédent de résultats seulement ceux qui représentent une attaque.*

Le langage ELAN utilise implicitement une stratégie de normalisation avec l'ensemble de toutes les règles non-nommées. Cette normalisation se déclenche automatiquement après chaque application d'une règle de réécriture.

1.3 Le λ -calcul

Les systèmes de réécriture que nous avons présentés jusqu'à maintenant sont appelés *systèmes de réécriture du premier ordre* et ils permettent d'exprimer des calculs sur des expressions

contenant des variables. Le pouvoir d'expression de ces systèmes n'est pas suffisant pour décrire directement les fonctions sur les fonctions comme, par exemple, la composition de fonctions. Le λ -calcul est un système de réécriture d'ordre supérieur qui a été introduit pour exprimer simplement la fonctionnalité.

Nous présentons brièvement les concepts et les propriétés du λ -calcul. Pour une présentation détaillée du calcul dans les cas non-typé et typé la référence classique est [Bar84] mais on peut citer aussi [HS86] et [Kri90].

1.3.1 Le λ -calcul non-typé

Une fonction est souvent décrite par un terme du premier ordre qui comporte une ou plusieurs variables. Par exemple, la fonction d'incrementation est représenté par $x + 1$ et on écrit $incr(x) = x + 1$. L'application de cette fonction à l'entier 2 est notée $f(2)$.

Il y a donc deux constructions indispensables pour exprimer une fonction. La première est l'abstraction d'une variable, comme x dans $incr(x)$. La seconde est l'application d'une fonction à une valeur ; $incr(2)$ dans le cas précédent. L'ensemble des termes du λ -calcul est engendré à partir des termes du premier ordre en utilisant les deux nouveaux opérateurs, l'abstraction et l'application.

Définition 1.34 Soit \mathcal{X} un ensemble de variables et \mathcal{F} un ensemble de symboles appelés constantes. L'ensemble des termes du λ -calcul, noté $\Lambda_{\mathcal{X}}^{\mathcal{F}}$, est le plus petit ensemble satisfaisant :

- si $x \in \mathcal{X}$ est une variable, alors $x \in \Lambda_{\mathcal{X}}^{\mathcal{F}}$,
- si $f \in \mathcal{F}$ est une constante, alors $f \in \Lambda_{\mathcal{X}}^{\mathcal{F}}$,
- si $x \in \mathcal{X}$ et $t \in \Lambda_{\mathcal{X}}^{\mathcal{F}}$, alors $\lambda x.t \in \Lambda_{\mathcal{X}}^{\mathcal{F}}$,
- si $u \in \Lambda_{\mathcal{X}}^{\mathcal{F}}$ et $v \in \Lambda_{\mathcal{X}}^{\mathcal{F}}$, alors $u v \in \Lambda_{\mathcal{X}}^{\mathcal{F}}$.

Les variables et les constantes sont appelés atomes.

Si l'ensemble de symboles \mathcal{F} est vide alors l'ensemble des termes du λ -calcul est noté $\Lambda_{\mathcal{X}}$ et le calcul est appelé *pur*. Sinon le calcul est appelé *appliqué* (cf. [HS86]).

Les λ -termes peuvent être définis en utilisant la notation proposée précédemment pour la définition d'une algèbre de termes :

$$t ::= x \mid f \mid \lambda x.t \mid t t$$

Intuitivement, $\lambda x.t$ représente la fonction qui associe la valeur t à la variable x . Un terme de la forme $\lambda x.t$ est appelé une *abstraction*. Le terme $(u v)$ représente intuitivement le résultat de l'application de la fonction u à l'argument v . Un terme de la forme $(u v)$ est appelé l'*application* du terme u au terme v .

Définition 1.35 L'ensemble des variables libres d'un λ -terme t , noté $FV(t)$, est défini inductivement par :

- $FV(x) = x$,
- $FV(f) = \emptyset$,
- $FV(\lambda x.t) = FV(t) - \{x\}$,
- $FV(u v) = FV(u) \cup FV(v)$.

On dit que l'occurrence d'une variable x dans un terme t est *liée* si cette variable apparaît dans un sous-terme de t de la forme $\lambda x.u$. Dans le cas contraire l'occurrence de la variable x est *libre*. Si la variable x a au moins une occurrence libre dans le terme t alors x est appelée une variable libre de t . L'ensemble des variables libres de t est exactement $FV(t)$.

Les substitutions du premier ordre présentées dans la section 1.1.2 ne conviennent pas pour le λ -calcul car, par exemple, la variable y est libre dans le terme $\lambda x.(x y)$ alors que son image ne l'est plus dans le terme $\langle y \mapsto x \rangle \lambda x.(x y) = \lambda x.(x x)$. On dit que la variable y a été *capturée*.

Nous allons donner une définition de la substitution utilisant un mécanisme de renommage des variables qui évitera les captures éventuelles.

Définition 1.36 Soit t, u, v, s des λ -termes et x une variable. La substitution de la variable x par le terme s dans le terme t , notée $\langle x/s \rangle t$ est définie par récurrence sur la structure de t :

- si t est la variable x alors $\langle x/s \rangle t = s$,
- si t est un atome a différent de x alors $\langle x/s \rangle t = a$,
- si $t = (u v)$ alors $\langle x/s \rangle t = (\langle x/s \rangle u \langle x/s \rangle v)$,
- si $t = \lambda x.u$ alors $\langle x/s \rangle t = t$,
- si $t = \lambda y.u$ alors $\langle x/s \rangle t = \lambda z.(\langle x/s \rangle \langle y/z \rangle u)$
où z est une nouvelle variable, i.e. $z \neq x$, $z \notin FV(s)$ et $z \notin FV(u)$.

Les règles de “propagation” des substitutions ne sont pas des règles du λ -calcul. On les appelle des méta-règles.

Nous avons défini l'ensemble des termes du λ -calcul et par la suite nous définissons les relations classiques de réduction et d'équivalence sur les λ -termes.

Pour éviter la capture des variables, on définit une relation, appelée α -conversion, dont le rôle est de remplacer le nom d'une variable liée par un nouveau nom.

Définition 1.37 Soit t un λ -terme contenant un sous-terme $\lambda x.u$ et soit y une variable telle que $y \notin FV(u)$. Le remplacement de $\lambda x.u$ par $\lambda y.\langle x/y \rangle u$ est appelé renommage de la variable liée y ou α -conversion.

Deux termes u, v sont dits α -équivalents, noté $u \equiv_\alpha v$, si v est obtenu en appliquant une série finie (éventuellement vide) de renommages de variables liées à u .

Par exemple, les termes $\lambda x.x$ et $\lambda y.y$ sont α -équivalents mais $\lambda x.\lambda y.(x y)$ et $\lambda x.\lambda x.(x x)$ ne sont pas α -équivalents parce que x est libre dans $(x y)$ et donc nous ne pouvons pas renommer y en x .

En λ -calcul on raisonne toujours modulo α -équivalence, c'est-à-dire qu'on ne distingue pas deux termes α -équivalents (i.e. on raisonne sur les classes d' α -équivalence).

Définition 1.38 Un λ -terme de la forme $(\lambda x.t) u$ est appelé un β -radical et le terme $\langle x/u \rangle t$ son réduit.

Si un terme t contient un sous-terme $(\lambda x.v) u$ et le terme t' est le terme t avec le sous-terme $(\lambda x.v) u$ remplacé par le terme $\langle x/u \rangle v$, on dit que t β -réduit en t' . Formellement la β -réduction est définie par :

Définition 1.39 La relation entre termes $t \longrightarrow_\beta t'$ (t se β -réduit sur une étape en t') est la plus petite relation telle que

- $(\lambda x.t)u \longrightarrow_\beta \langle x/u \rangle t$
- si $u \longrightarrow_\beta v$ alors $(u t) \longrightarrow_\beta (v t)$
- si $u \longrightarrow_\beta v$ alors $(t u) \longrightarrow_\beta (t v)$

- si $u \longrightarrow_{\beta} v$ alors $(\lambda x.u) \longrightarrow_{\beta} (\lambda x.v)$

La relation $t \xrightarrow{*}_{\beta} t'$ (t se β -réduit sur t') est définie comme la fermeture réflexive-transitive de la relation \longrightarrow_{β} .

La relation $t \equiv_{\beta} t'$ (t et t' sont β -équivalents) est définie comme la fermeture réflexive-symétrique-transitive de la relation \longrightarrow_{β} .

Définition 1.40 Le λ -calcul est le calcul défini par l'algèbre de termes $\Lambda_{\lambda}^{\mathcal{F}}$ et la relation $\xrightarrow{*}_{\beta}$.

Théorème 1.5 Le λ -calcul est confluant.

Il existe de nombreuses preuves différentes de ce théorème, on peut entre autres se référer à [Bar84, HS86, Kri90].

Le λ -calcul n'est pas fortement normalisable (ni même faiblement normalisable) : le contre exemple classique est $\omega \ \omega$ où $\omega \equiv_{\alpha} \lambda x.(x \ x)$. Ce terme se réduit en une étape de β -réduction en lui-même, ce qui fournit une chaîne de réduction infinie.

1.3.2 Le λ -calcul simplement typé

Dans l'algèbre de termes du premier ordre présentée en Section 1.1.1, les symboles de fonctions d'arité non nulle ne sont pas des termes ; ils sont juste utilisés pour construire des termes. En λ -calcul appliqué, les symboles de fonctions sont des termes et permettent la construction de termes dénués de sens. Par exemple, les termes $(succ \ succ)$ et $(succ \ 0 \ 0)$ sont des termes de $\Lambda_{\lambda}^{succ,0}$ mais ils ne correspondent pas à des fonctions mathématiques ou à des applications de fonctions.

Il faut donc restreindre les règles de construction des λ -termes afin de ne pas générer de tels termes. La notion d'arité n'est plus suffisante, puisque elle empêcherait la construction des termes $(succ \ succ)$ et $(succ \ 0 \ 0)$ mais pas du terme $(succ \ \lambda x.x)$. Il faut donc associer à chaque terme une information indiquant sa *fonctionnalité* et cette information est appelée un *type*.

Définition 1.41 Etant donné un ensemble de types de base encore appelés *types atomiques*. L'ensemble des types est inductivement défini par

- les types de base sont des types,
- si A et B sont des types, alors $(A \multimap B)$ est un type.

Les types de la forme $(A \multimap B)$ sont appelés types *composés* et représentent l'ensemble de fonctions de A vers B .

La flèche \multimap associe à droite et donc un type de la forme $A_1 \multimap A_2 \multimap \dots \multimap A_n$ est une abréviation pour $A_1 \multimap (A_2 \multimap (\dots \multimap A_n) \dots)$.

Définition 1.42 Une variable typée est un couple $(x : A)$ où x est une variable et A un type. Un contexte est une liste de variables typées, telle que chaque variable apparaisse au plus une fois dans cette liste. On note $\Gamma[x : A]$ le contexte Γ contenant la variable typée $(x : A)$.

Définition 1.43 Soit Γ un contexte, t un terme et A un type. On dit que le terme t est bien typé et a le type A dans le contexte Γ , noté $\Gamma \vdash t : A$ si :

- $t = x$ et $\Gamma = \Gamma[x : A]$ ou,
- $t = u \ v$ et $\Gamma \vdash u : B \multimap A$ et $\Gamma \vdash v : B$ ou,
- $t = \lambda x : B.u$ et $\Gamma[x : B] \vdash u : C$ et $A = B \multimap C$.

S'il existe un type A tel que $\Gamma \vdash t : A$, le terme t est dit *bien typé* dans Γ . On dit que le terme t est bien typé s'il existe un contexte Γ tel que t est bien typé dans Γ .

Considérons les profils $0 : A$ et $\text{succ} : A \rightarrow A$, les termes $(\text{succ } \text{succ})$, $(\text{succ } 0 \ 0)$ et $(\text{succ } \lambda x : A. x)$ ne sont pas bien typés quelque soit le contexte utilisé, mais $\Gamma \vdash (\text{succ } 0)$ et $\Gamma[x : A] \vdash (\text{succ } x)$. Il n'existe pas de contexte tel que le terme $\omega_A = \lambda x : A. (x \ x)$ soit bien typé.

Proposition 1.1 *Il existe un algorithme qui prend en argument un contexte Γ et un terme t et qui décide si t est bien typé dans Γ et retourne le type de t dans ce cas.*

1.3.3 Le formalisme de de Bruijn

Dans le λ -calcul, à chaque application de substitution et donc à chaque étape de β -réduction il faut gérer explicitement un système de renommage des variables. Même si d'un point de vue théorique le renommage des variables est souvent vu (à tort) comme un détail mineur, une implantation du système tel que est très inefficace.

Le formalisme de de Bruijn ([dB72], [dB78]) est basé sur le remplacement de chaque variable du λ -calcul classique par un entier naturel représentant le nombre de λ qui la sépare du λ qui la lie. Ce nombre est appelé un indice de de Bruijn et le calcul est noté λ_{DB} -calcul.

Dans le λ_{DB} -calcul il n'est plus nécessaire d'étiqueter les λ par la variable qu'ils lient puisque cette information est déjà contenue dans chaque variable. Les variables libres sont traitées comme si elles étaient liées par des λ extérieurs. Donc il n'existe pas une unique représentation dans le formalisme de de Bruijn d'un λ -terme contenant des variables libres mais cette ambiguïté est levée si on précise un ordre sur les variables. Par exemple,

$\lambda x. \lambda y. (x \ y \ z)$ devient $\lambda \lambda (2 \ 1 \ 3)$

$\lambda x. (x \ (\lambda y. (x \ y)))$ devient $\lambda (1 \ \lambda (2 \ 1))$

La notation de de Bruijn est difficile à lire mais elle s'avère très efficace pour le traitement mécanique des substitutions. Par la suite nous introduisons les termes du λ_{DB} -calcul et la β -réduction correspondante.

Définition 1.44 *L'ensemble des termes du λ_{DB} -calcul pur, noté Λ_{DB} , est l'algèbre de termes induite par la grammaire suivante :*

$$t ::= n \mid \lambda t \mid t \ t$$

où n est un entier naturel non nul.

Le λ_{DB} -terme $\langle 1/u \rangle t$ représente le terme t où la *variable* 1 a été remplacée par le terme u . Un λ_{DB} -terme de la forme $(\lambda t) \ u$ est appelé β -radical et le terme $\langle 1/u \rangle t$ son réduit.

L'utilisation d'indices de de Bruijn à la place de noms de variables nécessite une nouvelle notion de substitution. Dans la réduction d'un β -radical $(\lambda t) \ u$, il faut d'une part mettre à jour les indices (variables) libres de t pour prendre en compte la disparition d'un λ et d'autre part, modifier les indices de de Bruijn de u pour tenir compte du nombre de λ supplémentaires traversés lors de la propagation de la substitution. Nous ne donnons pas la définition classique de la substitution du λ_{DB} -calcul mais une formulation équivalente présentée, par exemple, dans [Pag97].

Définition 1.45 *La substitution $\langle n/u \rangle t$ est définie par induction sur t :*

$\langle n/u \rangle (t' t'') = (\langle n/u \rangle t') (\langle n/u \rangle t'')$	$\uparrow^n (t' t'') = (\uparrow^n (t')) (\uparrow^n (t''))$
$\langle n/u \rangle (\lambda t) = \lambda (\langle n+1/ \uparrow^0 (u) \rangle t)$	$\uparrow^n (\lambda t) = \lambda (\uparrow^{n+1} (t))$
$\langle n/u \rangle m = \begin{cases} m-1, & \text{si } m > n \\ u, & \text{si } m = n \\ m, & \text{si } m < n \end{cases}$	$\uparrow^n (m) = \begin{cases} m+1, & \text{si } m \geq n \\ m, & \text{si } m < n \end{cases}$

Définition 1.46 La β -réduction est la plus petite relation \longrightarrow telle que :

- $(\lambda t)u \longrightarrow \langle 1/u \rangle t$
- si $u \longrightarrow v$ alors $(u t) \longrightarrow (v t)$
- si $u \longrightarrow v$ alors $(t u) \longrightarrow (t v)$
- si $u \longrightarrow v$ alors $(\lambda u) \longrightarrow (\lambda v)$

Proposition 1.2 Le λ_{DB} -calcul et le λ -calcul sont isomorphes.

Preuve : Une preuve est donnée dans [Mau85]. \square

Dans la Définition 1.45 la fonction \uparrow^n a le même rôle que l' α -conversion du λ -calcul classique et incrémente tous les indices libres du terme à substituer pour éviter la capture par le λ que la substitution vient de passer.

Comme dans le cas du λ -calcul avec des noms de variables, une substitution est une opération indivisible que l'on effectue en un seul pas et qui est décrite ici au méta-niveau du calcul.

1.3.4 Le $\lambda\sigma$ -calcul

Le $\lambda\sigma$ -calcul, introduit dans [ACCL90], est un formalisme permettant de rendre explicite l'application de substitution. Dans le $\lambda\sigma$ -calcul la substitution est gérée par un constructeur explicite de la syntaxe et son application est décrite par les règles du calcul.

Définition 1.47 L'algèbre de termes du $\lambda\sigma$ -calcul est une algèbre à deux sortes, une pour les termes et une pour les substitutions :

Termes $t ::= x_t \mid 1 \mid \lambda t \mid t t \mid t \langle s \rangle$

Substitutions $s ::= x_s \mid id \mid \uparrow \mid t.s \mid s \circ s$

Les substitutions sont appelées aussi des *environnements*. Les substitutions ne sont plus des couples variable (ou indice) et terme, mais des liste de termes.

La composition de n symboles \uparrow , i.e. $\uparrow \circ \dots \circ \uparrow$, est notée \uparrow^n . Remarquons que le seul indice de de Bruijn qui apparaît explicitement dans la syntaxe est 1 mais on peut coder l'indice n par le terme $1 \langle \uparrow^{n-1} \rangle$.

Nous distinguons deux types d'application, l'application d'un terme à un autre terme, notée par juxtaposition, et l'application d'une substitution s à un terme t , notée $t \langle s \rangle$. Le symbole \circ représente la composition de deux substitutions. La substitution id , appelée *identité*, est interprétée comme la suite des entiers de de Bruijn $(n)_{n \geq 1}$. La substitution \uparrow , appelée *shift*, est interprétée comme la suite des entiers de de Bruijn $(n+1)_{n \geq 1}$.

L'ensemble de règles du $\lambda\sigma$ -calcul est donné dans la Figure 1.3. La règle *Beta* est la règle déclenchant la β -réduction. Si on considère le système de réécriture où on omet cette règle on obtient le calcul de substitution appelé σ -calcul.

<i>Beta</i>	$(\lambda t) u$	\Rightarrow	$t\langle u.id \rangle$
<i>App</i>	$(u v)\langle s \rangle$	\Rightarrow	$(u\langle s \rangle) (v\langle s \rangle)$
<i>VarCons</i>	$1\langle u.s \rangle$	\Rightarrow	u
<i>Clos</i>	$u\langle s \rangle\langle t \rangle$	\Rightarrow	$u\langle s \circ t \rangle$
<i>Abs</i>	$(\lambda t)\langle s \rangle$	\Rightarrow	$\lambda(t\langle 1.(s \circ \uparrow) \rangle)$
<i>IdL</i>	$id \circ s$	\Rightarrow	s
<i>ShiftCons</i>	$\uparrow \circ (u.s)$	\Rightarrow	s
<i>AssEnv</i>	$(s \circ t) \circ v$	\Rightarrow	$s \circ (t \circ v)$
<i>MapEnv</i>	$(u.s) \circ t$	\Rightarrow	$u\langle t \rangle.(s \circ t)$
<i>Id</i>	$u\langle id \rangle$	\Rightarrow	u
<i>IdR</i>	$s \circ id$	\Rightarrow	s
<i>VarShift</i>	$1. \uparrow$	\Rightarrow	id
<i>SCons</i>	$1\langle s \rangle.(\uparrow \circ s)$	\Rightarrow	s

FIG. 1.3: Les règles du $\lambda\sigma$ -calcul

Proposition 1.3 *Le σ -calcul est confluent et fortement normalisable.*

Si on considère un terme du $\lambda\sigma$ -calcul sans variable et sans substitution, on obtient un λ_{DB} -terme. On peut montrer qu'un terme sans variable se réduit par σ en un terme sans substitution.

Théorème 1.6 *Le $\lambda\sigma$ -calcul est confluent pour les termes ne contenant pas de variable de substitution (termes semi-clos).*

La preuve de la confluence du $\lambda\sigma$ -calcul avec des termes clos est donnée dans [ACCL90]. La confluence dans le cas où les termes sont semi-clos a été prouvée dans [Río93].

1.3.5 Le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul

L'un des problèmes du $\lambda\sigma$ -calcul est la non-confluence sur la totalité de l'algèbre de termes. Dans [CHL96], Curien, Hardin et Lévy ont montré qu'en introduisant un nouvel opérateur unaire appelé *lift* et noté \uparrow on obtient un calcul confluent sur l'ensemble de termes ouverts.

L'opérateur \uparrow est utilisé pour simplifier la règle *Abs* en remplaçant $1.(s \circ \uparrow)$ par $\uparrow(s)$. L'idée sous-jacente est de faire disparaître une paire critique engendrée par la règle *Abs*. En complétant le $\lambda\sigma$ -calcul pour que les paires critiques introduites par ce nouveau symbole convergent on obtient le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul.

Dans le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul les indices de de Bruijn sont des vrais numéros de de Bruijn, i.e. on ne code pas l'indice n par $\langle \uparrow^{n-1} \rangle 1$.

Définition 1.48 *L'algèbre de termes du $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul est l'algèbre à deux sortes définie par :*

Termes $t ::= x_t \mid n \mid \lambda t \mid t t \mid t\langle s \rangle$

Substitutions $s ::= x_s \mid id \mid \uparrow \mid t.s \mid s \circ s \mid \uparrow(s)$

L'ensemble de règle du $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul est donné dans la Figure 1.4.

<i>Beta</i>	$(\lambda t)u$	\Rightarrow	$t\langle u.id \rangle$	<i>Ass</i>	$(s \circ t) \circ v$	\Rightarrow	$s \circ (t \circ v)$
<i>App</i>	$(uv)\langle s \rangle$	\Rightarrow	$(u\langle s \rangle)(v\langle s \rangle)$	<i>Map</i>	$(u.s) \circ t$	\Rightarrow	$u\langle t \rangle.(s \circ t)$
<i>Lambda</i>	$(\lambda t)\langle s \rangle$	\Rightarrow	$\lambda(t\langle \uparrow(s) \rangle)$	<i>SC</i>	$\uparrow \circ (u.s)$	\Rightarrow	s
<i>Clos</i>	$u\langle s \rangle\langle t \rangle$	\Rightarrow	$u\langle s \circ t \rangle$	<i>SL1</i>	$\uparrow \circ \uparrow(s)$	\Rightarrow	$s \circ \uparrow$
<i>VS1</i>	$n\langle \uparrow \rangle$	\Rightarrow	$(n+1)$	<i>SL2</i>	$\uparrow \circ \uparrow(s) \circ t$	\Rightarrow	$s \circ (\uparrow \circ t)$
<i>VS2</i>	$n\langle \uparrow \circ s \rangle$	\Rightarrow	$(n+1)\langle s \rangle$	<i>L1</i>	$\uparrow(s) \circ \uparrow(t)$	\Rightarrow	$\uparrow(s \circ t)$
<i>FVC</i>	$1\langle u.s \rangle$	\Rightarrow	u	<i>L2</i>	$\uparrow(s) \circ (\uparrow(t) \circ v)$	\Rightarrow	$\uparrow(s \circ t) \circ v$
<i>FVL1</i>	$1\langle \uparrow(s) \rangle$	\Rightarrow	1	<i>Lift</i>	$\uparrow(s) \circ (u.t)$	\Rightarrow	$u.(s \circ t)$
<i>FVL2</i>	$1\langle \uparrow(s) \circ t \rangle$	\Rightarrow	$1\langle t \rangle$	<i>IdL</i>	$id \circ s$	\Rightarrow	s
<i>RVC</i>	$(n+1)\langle u.s \rangle$	\Rightarrow	$n\langle s \rangle$	<i>IdR</i>	$s \circ id$	\Rightarrow	s
<i>RVL1</i>	$(n+1)\langle \uparrow(s) \rangle$	\Rightarrow	$n\langle s \circ \uparrow \rangle$	<i>LId</i>	$\uparrow(id)$	\Rightarrow	id
<i>RVL2</i>	$(n+1)\langle \uparrow(s) \circ t \rangle$	\Rightarrow	$n\langle s \circ (\uparrow \circ t) \rangle$	<i>Id</i>	$u\langle id \rangle$	\Rightarrow	u

FIG. 1.4: Les règles du $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul

Si on considère le système de réécriture où on omet la règle *Beta* on obtient le calcul de substitution appelé σ_{\uparrow} -calcul.

Proposition 1.4 *Le σ_{\uparrow} -calcul est confluente et fortement normalisable.*

Théorème 1.7 ([CHL96])

Le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul est confluente.

Dans ce chapitre nous avons rappelé plusieurs concepts qui seront utilisés au cours de cette thèse. Nous avons décrit brièvement différents langages exprimant des calculs et nous avons présenté leurs propriétés principales.

Chapitre 2

Le ρ -calcul non typé

Dans le chapitre précédent nous avons brièvement présenté la réécriture du premier ordre et le λ -calcul. Les deux concepts ayant de nombreux points communs et aussi des propriétés complémentaires extrêmement utiles, beaucoup de travaux s'intéressent à l'intégration de la réécriture et du λ -calcul. Ceci a déjà été réalisé soit en enrichissant la réécriture du premier ordre avec des caractéristiques d'ordre supérieur, soit en ajoutant au λ -calcul des caractéristiques algébriques permettant, en particulier, le traitement efficace de l'égalité. Dans le premier cas, on trouve les travaux sur les CRS [KvOvR93] et aussi d'autres systèmes de réécriture d'ordre supérieur [Wol93, NP98]; dans le deuxième cas on peut citer les travaux sur la combinaison du λ -calcul avec la réécriture [BT88, Oka89a, GBT89, JO97].

En partant des travaux sur le contrôle de la réécriture ([Vit94, KKV95a, BKK98]), nous avons introduit le ρ -calcul, un calcul intégrant la réécriture du premier ordre, le λ -calcul et les calculs non-déterministes. Ce chapitre a pour objectifs de présenter le ρ -calcul dans un cadre non-typé et puis de montrer des exemples d'utilisation du calcul général et des instances possibles du calcul de base.

2.1 Présentation générale

Les objets manipulés dans la réécriture du premier ordre sont les termes du premier ordre et dans une présentation simpliste nous pouvons dire qu'à chaque pas de réécriture on applique une *règle de réécriture* à une position quelconque d'un *terme (initial)* pour obtenir un autre *terme (résultat)*. On peut remarquer que les termes ne sont pas décrits au même niveau que la description des règles de réécriture qui les transforment et la façon dont cette application est effectuée est définie au méta-niveau.

De plus, si on ne considère pas une seule règle de réécriture mais un système de réécriture, la règle de réécriture à appliquer à chaque pas n'est pas sélectionnée d'une façon déterministe mais on peut appliquer toute règle de réécriture satisfaisant les conditions d'application au (sous-)terme considéré. On n'a donc aucun contrôle ni sur la sélection de la règle de réécriture à appliquer, ni sur la position où cette règle est appliquée dans le terme à réduire.

Les systèmes de calcul (voir Section 1.2.4) enrichissent les systèmes de réécriture en introduisant la notion de stratégie contrôlant l'application des règles de réécriture. On a cette fois des règles de réécriture décrivant la transformation des termes et des stratégies décrivant l'application de ces règles. On peut donc distinguer trois niveaux de description pour la définition d'un système de calcul : les termes, les règles de réécriture et les stratégies.

La caractéristique principale du ρ -calcul consiste à rendre explicites les ingrédients principaux

de la réécriture, en particulier, les notions d'application de règle et de résultat d'une telle application. Les règles et l'application des règles (ou des ρ -termes plus compliqués) sont des objets du ρ -calcul et les résultats des applications sont représentés par des ensembles qui sont également des ρ -termes.

Ainsi, les objets du ρ -calcul sont construits en utilisant une signature, un ensemble de variables, l'opérateur d'abstraction \rightarrow et l'opérateur d'application $[]()$ et nous considérons des ensembles de tels objets. Cela donne au ρ -calcul la capacité de représenter le non-déterminisme au moyen des ensembles de résultats.

Dans le ρ -calcul nous pouvons représenter explicitement l'application d'une règle de réécriture (par exemple $a \rightarrow b$) à un terme (par exemple la constante a) par l'objet $[a \rightarrow b](a)$ qui est évalué dans le ρ -terme $\{b\}$. Puisque le résultat de l'évaluation est le singleton $\{b\}$ nous pouvons dire que l'application de la règle $a \rightarrow b$ sur le terme a est déterministe et ceci signifie, intuitivement, que le terme a peut être évalué par rapport au système de réécriture contenant la règle $a \rightarrow b$ en un seul résultat, b .

L'introduction d'un opérateur d'application dans la syntaxe du ρ -calcul nous permet non seulement de définir explicitement l'application d'une règle de réécriture à un terme mais aussi de construire des ρ -termes décrivant les stratégies des systèmes de calcul. Par exemple, l'application de la règle de réécriture $a \rightarrow b$ suivie de la règle de réécriture $b \rightarrow c$ au terme a est représentée par le ρ -terme $[b \rightarrow c]([a \rightarrow b](a))$ qui est évalué d'abord en $[b \rightarrow c](\{b\})$ puis en $\{c\}$.

Naturellement, des variables peuvent être utilisées dans les règles de réécriture et nous pouvons dire qu'une ρ -règle de réécriture construite en utilisant l'opérateur \rightarrow est une *abstraction* dont le rapport avec la λ -abstraction pourra fournir une intuition utile : une λ -expression $\lambda x.t$ est représentée dans le ρ -calcul par la règle $x \rightarrow t$. En effet, le β -radical $(\lambda x.t \ u)$ correspond simplement au ρ -radical $[x \rightarrow t](u)$ représentant l'application de la règle $x \rightarrow t$ au terme u . Le λ -terme $(\lambda x.t \ u)$ est β -réduit en $\langle x/u \rangle t$ tandis que le ρ -terme correspondant est réduit dans le singleton $\{\langle x/u \rangle t\}$.

Le membre gauche des règles de réécriture peut évidemment être plus élaboré qu'une constante ou une variable comme dans $[f(x) \rightarrow x](f(a))$. Dans ce cas, le mécanisme d'évaluation du calcul réduit l'application en $\{a\}$. En fait, en évaluant cette expression, la variable x est liée à a par le mécanisme de filtrage et nous retrouvons le même comportement que dans le cas de la réécriture.

Comme nous l'avons vu ci-dessus, le résultat d'une application est toujours un ensemble et à un terme résultat obtenu dans la réécriture ou dans le λ -calcul correspond, dans le ρ -calcul, le singleton contenant ce terme. Mais l'application d'une règle de réécriture peut échouer comme dans $[a \rightarrow b](c)$ et ceci est représenté explicitement dans le ρ -calcul en fournissant l'ensemble vide comme résultat.

En plus, nous pouvons déclarer que certains symboles de la signature ne sont pas purement syntaxiques mais nécessitent un filtrage modulo une théorie (par exemple équationnelle) différente de la théorie vide et dans ce cas l'ensemble de résultats peut contenir plus d'un élément. Par exemple, si on suppose que le symbole $+$ est commutatif alors l'application de la règle $x + y \rightarrow x$ au terme $a + b$ produit l'ensemble $\{a, b\}$. Puisqu'il y a deux manières différentes d'appliquer (de filtrer) cette règle modulo la commutativité, dans la réécriture modulo classique ([PS81]) on obtient comme résultat un des deux termes a ou b tandis que dans le ρ -calcul le résultat est l'ensemble $\{a, b\}$ représentant le choix non-déterministe entre les deux termes.

Le symbole d'ensemble permet non seulement la description des résultats non-déterministes mais aussi la représentation de l'application (non-déterministe) de plusieurs règles. Par exemple, un pas de réécriture à la position de tête d'un terme a par rapport à un système de réécriture contenant les règles $a \rightarrow b$ et $a \rightarrow c$ est représenté dans le ρ -calcul par le terme $\{[a \rightarrow b, a \rightarrow$

$c\}}(a)$. Encore une fois, le résultat obtenu dans le ρ -calcul est une représentation du comportement dans la réécriture du premier ordre ; dans la réécriture on applique une des deux règles et on obtient soit b soit c , tandis que dans le ρ -calcul le résultat est l'ensemble $\{b, c\}$.

Pour résumer, nous pouvons dire que dans le ρ -calcul la flèche est un opérateur binaire utilisé pour abstraire, le filtrage est le mécanisme de passage de paramètre, la substitution prend en compte la capture de variables et les ensembles de résultats sont manipulés explicitement.

2.2 Les composants du calcul

Nous avons présenté d'une façon informelle les termes manipulés dans le ρ -calcul et nous avons donné des exemples de réductions de tels termes mais nous n'avons explicité ni les règles d'évaluation du calcul, ni les mécanismes sous-jacents comme le filtrage et la substitution.

Afin d'obtenir une définition précise du ρ -calcul nous présentons les composants principaux d'un calcul et nous décrivons par la suite chaque composant dans le cadre du ρ -calcul général.

D'abord, la *syntaxe* d'un calcul décrit formellement la formation des objets manipulés dans le calcul aussi bien que la formation des substitutions qui sont utilisées par le mécanisme d'évaluation. Dans le cas du ρ_T -calcul, la construction des objets est basée sur une signature du premier ordre qui est enrichie par un constructeur de règles de réécriture, un opérateur d'application de règle et les ensembles de résultats.

La description de l'application de *substitutions* aux termes est souvent donnée au niveau méta du calcul, excepté pour les calculs utilisant des substitutions explicites. Pour le ρ -calcul, nous utilisons la substitution d'ordre supérieur et non le remplacement du premier ordre, i.e. l'application utilise l' α -conversion pour éviter la capture des variables. Nous présenterons aussi plus tard une version du ρ -calcul avec substitutions explicites, appelé $\rho\sigma$ -calcul.

L'algorithme de *filtrage* est employé pour lier les variables à leurs valeurs actuelles. Nous appelons ρ_T -calcul le ρ -calcul paramétré par la théorie T de filtrage et les propriétés du ρ_T -calcul sont fortement influencées par les propriétés de cette théorie. Dans le cas général, nous considérons un filtrage d'ordre supérieur mais dans des cas pratiques nous utilisons le filtrage d'ordre supérieur avec motif, ou le filtrage équationnel, ou simplement le filtrage syntaxique. Si dans un contexte donné la théorie de filtrage est claire, ce paramètre est omis et nous parlons simplement de ρ -calcul.

Les *règles d'évaluation* décrivent le fonctionnement du calcul. Ces règles représentent le lien entre les composants précédents. La simplicité et la clarté de ces règles sont fondamentales pour une utilisation facile du calcul.

Un dernier composant est la *stratégie d'évaluation* utilisée pour guider l'application des règles d'évaluation du calcul. Selon la stratégie employée nous obtenons différentes versions et donc différentes propriétés pour le calcul.

Nous explicitons maintenant tous ces composants pour le ρ_T -calcul et nous commentons nos principaux choix.

2.3 La syntaxe

Définition 2.1 *Etant donné un ensemble de variables \mathcal{X} et un ensemble de symboles $\mathcal{F} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{F}_i$ tel que pour tout m , \mathcal{F}_m est le sous-ensemble de symboles d'arité m . Nous supposons que chaque symbole a une arité unique, c'est-à-dire que les \mathcal{F}_m sont disjoints.*

L'ensemble de ρ -termes de base, noté $\mathcal{Q}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$, est le plus petit ensemble tel que :

- les variables de \mathcal{X} sont des ρ -termes,

- si t_1, \dots, t_n sont des ρ -termes et $f \in \mathcal{F}_n$ alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un ρ -terme,
- si t_1, \dots, t_n sont des ρ -termes alors $\{t_1, \dots, t_n\}$ est un ρ -terme,
- si t et u sont des ρ -termes alors $[t](u)$ est un ρ -terme,
- si t et u sont des ρ -termes alors $t \rightarrow u$ est un ρ -terme.

On appelle position fonctionnelle d'un ρ -terme t , toute position p du terme tel que $t(p) \in \mathcal{F}$. Les sous-termes t_1, \dots, t_n d'un terme fonctionnel $t = f(t_1, \dots, t_n)$ sont appelés les arguments de t ou, par abus de langage, les arguments de f . Les symboles de \mathcal{F}_0 sont appelés constantes.

En notation BNF les ρ -termes peuvent être définis par :

$$\rho\text{-termes} \quad t \quad ::= \quad x \mid f(t, \dots, t) \mid \{t, \dots, t\} \mid t \mid t \rightarrow t$$

Dans la syntaxe précédente, le terme représentant l'ensemble vide ($n = 0$) est $\{\}$. Nous considérons que $\{\}$ et \emptyset dénotent tous les deux l'ensemble vide. Pour les termes de la forme $\{t_1, \dots, t_n\}$ nous supposons, comme d'habitude, que la virgule est associative, commutative et idempotente. Un terme de la forme $t \rightarrow u$ est appelé *règles de réécriture* ou ρ -abstraction. Le terme $[t](u)$ représente l'application du ρ -terme t au ρ -terme u et si t est de la forme $l \rightarrow r$ alors on dit qu'il est la règle de réécriture de l'application et u l'argument de l'application.

Nous adoptons une discipline très générale pour la formation des règles de réécriture et nous n'imposons, *a priori*, aucune des restrictions standards utilisées souvent en réécriture. Par exemple, nous pouvons avoir une variable dans le membre gauche d'une règle de réécriture et nous pouvons avoir dans le membre droit d'une règle de réécriture des variables qui n'apparaissent pas dans le membre gauche de la règle de réécriture respective. Nous permettons également des règles de réécriture contenant elles aussi des règles de réécriture aussi bien que des applications de règles de réécriture.

L'intuition principale derrière cette syntaxe est que le membre gauche d'une règle de réécriture précise les variables liées et une information structurelle. Avoir de nouvelles variables dans le membre droit d'une règle de réécriture donne la possibilité d'avoir des variables libres dans les règles de réécriture.

Les termes du λ -calcul et de la réécriture peuvent être représentés facilement par des ρ -termes. Par exemple, le λ -terme $\lambda x.(y \ x)$ correspond au ρ -terme $x \rightarrow [y](x)$ et toute règle de réécriture de la réécriture du premier ordre est représentée par la même règle dans le ρ -calcul. Dans le Chapitre 5 nous montrons que non seulement les termes des deux formalismes sont représentables dans le ρ -calcul mais aussi les réductions sous-jacentes.

Nous avons choisi les ensembles comme structure de données pour traiter le non-déterminisme potentiel. Un ensemble de termes peut être vu comme l'ensemble des résultats distincts obtenus en appliquant une règle de réécriture à un terme.

Selon l'utilisation souhaitée du calcul, d'autres choix peuvent être faits pour représenter le non-déterminisme. Par exemple, si nous voulons fournir tous les résultats d'une application, y compris les termes identiques, un multi-ensemble pourrait être utilisé. Quand l'ordre dans lequel les résultats sont obtenus est important, des listes pourraient être employées. Puisque dans cette présentation du calcul nous nous concentrons sur les résultats possibles d'un calcul et pas sur leur nombre ou leur ordre, des ensembles sont utilisés. Les propriétés de confluence présentées dans la Section 3.3 sont préservées dans une approche multi-ensemble. Il est clair que pour l'approche utilisant les listes, seule une confluence modulo la permutation des listes peut être obtenue.

Exemple 2.1 Etant donnés $\mathcal{F}_0 = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f, g\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ et les variables x, y dans \mathcal{X} , nous présentons quelques ρ -termes de $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$:

- le terme $[f(x, y) \rightarrow g(x, y)](f(a, b))$ représente une application classique de règle de réécriture.
- le terme $[x \rightarrow x + y](a)$ contient la variable libre y et nous allons voir plus tard pourquoi le résultat de cette application est $\{a + y\}$.
- le terme $[y \rightarrow [x \rightarrow x + y](b)]([x \rightarrow x](a))$ représente le λ -terme $(\lambda y.((\lambda x.x + y) b)) ((\lambda x.x) a)$. Dans la règle de réécriture $x \rightarrow x + y$ la variable y est libre mais dans la règle de réécriture $y \rightarrow [x \rightarrow x + y](b)$ cette variable est liée.
- le terme $[x \rightarrow x](x \rightarrow x)$ représente le λ -terme bien connu $(\omega\omega)$.
- le terme $[(x \rightarrow x + 1) \rightarrow (1 \rightarrow x)](a \rightarrow a + 1)(1)$ est un ρ -terme plus compliqué sans correspondant dans le λ -calcul ou dans la réécriture.

Pour un terme u avec p_1, \dots, p_n des positions disjointes dans u et t_1, \dots, t_n des termes, nous notons $u_{[t_1]_{p_1} \dots [t_n]_{p_n}}$ le terme u avec les termes t_i aux positions p_i . La position d'un sous-terme dans un ρ -terme ensemble est obtenue en considérant un des arbres représentant le ρ -terme ensemble.

2.4 Les substitutions

Dans tous les calculs utilisant des lieux, comme par exemple le λ -calcul, la substitution du premier ordre n'est pas appropriée. Afin d'obtenir un calcul de substitutions correct nous devons définir les notions de variables libres, α -conversion et substitution similaires à celles définies dans la Section 1.3.1 pour le λ -calcul mais adaptées aux ρ -termes.

Nous utilisons donc un mécanisme de substitution évitant les captures éventuelles des variables libres et nous considérons une approche similaire à celle présentée dans [DHK00] permettant de faire une distinction claire entre la *substitution* (qui prend en compte les variables liées) et la *greffe* (qui effectue un remplacement direct des variables). La *greffe* est appelée habituellement substitution du premier ordre tandis que la *substitution* désigne habituellement une substitution d'ordre supérieur.

Définition 2.2 *L'ensemble des variables libres d'un ρ -terme t , noté $FV(t)$, est défini inductivement par :*

1. si $t = x$ alors $FV(t) = \{x\}$,
2. si $t = f(u_1, \dots, u_n)$ alors $FV(t) = \bigcup_{i=1}^n FV(u_i)$,
3. si $t = \{u_1, \dots, u_n\}$ alors $FV(t) = \bigcup_{i=1}^n FV(u_i)$,
4. si $t = [u](v)$ alors $FV(t) = FV(u) \cup FV(v)$,
5. si $t = u \rightarrow v$ alors $FV(t) = FV(v) \setminus FV(u)$.

Similairement au λ -calcul, on dit que l'occurrence d'une variable x dans un terme t est *liée* si cette variable apparaît dans un sous-terme de t de la forme $v \rightarrow u$ et $x \in FV(v)$. Dans le cas contraire, l'occurrence de la variable x est *libre*. Si la variable x a au moins une occurrence libre dans le terme t alors x est appelée une variable libre de t . L'ensemble des variables libres de t est exactement $FV(t)$.

Dans la Définition 2.3 nous introduisons une notion appropriée de renommage des variables liées afin d'éviter les captures éventuelles. Ainsi, nous calculons une variante d'un ρ -terme qui est équivalente au terme initial modulo l' α -conversion.

Définition 2.3 *Etant donné un ensemble de variables \mathcal{Y} , l'application $\alpha_{\mathcal{Y}}$ (appelée α -conversion renomme les variables liées d'un terme qui se trouvent dans \mathcal{Y} . Elle est définie inductivement par :*

- $\alpha_{\mathcal{Y}}(x) = x$,
- $\alpha_{\mathcal{Y}}(\{t\}) = \{\alpha_{\mathcal{Y}}(t)\}$,
- $\alpha_{\mathcal{Y}}(f(u_1, \dots, u_n)) = f(\alpha_{\mathcal{Y}}(u_1), \dots, \alpha_{\mathcal{Y}}(u_n))$,
- $\alpha_{\mathcal{Y}}([t](u)) = [\alpha_{\mathcal{Y}}(t)](\alpha_{\mathcal{Y}}(u))$,
- $\alpha_{\mathcal{Y}}(u \rightarrow v) = \alpha_{\mathcal{Y}}(u) \rightarrow \alpha_{\mathcal{Y}}(v)$, si $FV(u) \cap \mathcal{Y} = \emptyset$,
- $\alpha_{\mathcal{Y}}(u \rightarrow v) = (\langle x_i \mapsto y_i \rangle_{x_i \in FV(u)} \alpha_{\mathcal{Y}}(u)) \rightarrow (\langle x_i \mapsto y_i \rangle_{x_i \in FV(u)} \alpha_{\mathcal{Y}}(v))$,
si $x_i \in FV(u) \cap \mathcal{Y}$ et y_i sont des variables "fraîches" et $\langle x \mapsto y \rangle$ représente le remplacement de la variable x par la variable y dans le terme sur lequel il est appliqué.

En utilisant l' α -conversion nous pouvons définir la notion usuelle de *substitution* :

Définition 2.4 *Une valuation θ est une correspondance entre les variables x_1, \dots, x_n et les termes t_1, \dots, t_n , i.e. un ensemble fini de couples $\{(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)\}$.*

Etant donnée une valuation θ nous pouvons définir les deux notions de substitution et greffe associées à θ :

- la substitution étendant θ est notée $\Theta = \langle x_1/t_1, \dots, x_n/t_n \rangle$,
- la greffe étendant θ est noté $\bar{\Theta} = \langle x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n \rangle$.

Θ et $\bar{\Theta}$ sont définies structurellement par :

- | | |
|---|---|
| - $\Theta(x) = u$, si $(x, u) \in \theta$ | - $\bar{\Theta}(x) = u$, si $(x, u) \in \theta$ |
| - $\Theta(\{t\}) = \{\Theta(t)\}$ | - $\bar{\Theta}(\{t\}) = \{\bar{\Theta}(t)\}$ |
| - $\Theta(f(u_1, \dots, u_n)) = (f(\Theta(u_1), \dots, \Theta(u_n)))$ | - $\bar{\Theta}(f(u_1, \dots, u_n)) = (f(\bar{\Theta}(u_1), \dots, \bar{\Theta}(u_n)))$ |
| - $\Theta([t](u)) = [\Theta(t)](\Theta(u))$ | - $\bar{\Theta}([t](u)) = [\bar{\Theta}(t)](\bar{\Theta}(u))$ |
| - $\Theta(u \rightarrow v) = \Theta(u') \rightarrow \Theta(v')$ | - $\bar{\Theta}(u \rightarrow v) = \bar{\Theta}(u) \rightarrow \bar{\Theta}(v)$ |

où on considère que z_i sont des variables fraîches (i.e. $\theta z_i = z_i$), que les variables z_i n'apparaissent pas dans u et v et que pour toute variable $y \in FV(u) \cup FV(v)$, $z_i \notin FV(\theta y)$, et u', v' sont définis par :

$$\begin{aligned} u' &= \langle y_i \mapsto z_i \rangle_{y_i \in FV(u)} \alpha_{FV(u) \cup \text{Var}(\theta)}(u), \\ v' &= \langle y_i \mapsto z_i \rangle_{y_i \in FV(v)} \alpha_{FV(v) \cup \text{Var}(\theta)}(v). \end{aligned}$$

Les notions introduites pour les substitutions du premier ordre sont utilisées aussi pour les substitutions présentées ci-dessus. L'ensemble de variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ s'appelle le *domaine* de la substitution Θ ou de la greffe $\bar{\Theta}$ et est noté respectivement par $\text{Dom}(\Theta)$ ou $\text{Dom}(\bar{\Theta})$. Le *codomaine* de la substitution Θ est l'ensemble $\text{Ran}(\Theta) = \{t_1, \dots, t_n\}$. L'ensemble de toutes les variables de Θ est $\text{Var}(\Theta) = \cup_{i=1}^n \text{Var}(t_i) \cup \text{Dom}(\Theta)$.

Nous rappelons que $\langle x_1/u_1, \dots, x_n/u_n \rangle$ représente la substitution simultanée des variables x_1, \dots, x_n par les termes t_1, \dots, t_n et non la composition des substitutions $\langle x_1/t_1 \rangle \dots \langle x_n/t_n \rangle$.

Il y a rien de neuf dans la définition de la substitution et de la greffe sauf que l'abstraction fonctionne dans le cas du ρ -calcul sur des termes et pas seulement sur des variables.

La complexité de la manipulation de variables pour l' α -conversion peut être évitée en utilisant des indices de de Bruijn et une notion de substitutions explicites, dans l'esprit de [CHL96]. Nous allons présenter une telle approche dans le Chapitre 7.

2.5 Le filtrage

La liaison entre paramètres formels et actuels est basée sur le filtrage qui est donc un composant fondamental du ρ -calcul. Nous définissons d'abord les problèmes de filtrage dans un cadre général :

Définition 2.5 *Etant donnée une théorie T sur les ρ -termes, une T -équation de filtrage est une formule de la forme $t \ll_T^? t'$, où t et t' sont des ρ -termes. Une substitution σ est une solution de l'équation $t \ll_T^? t'$ si $T \models \sigma(t) = t'$. Un T -système de filtrage est une conjonction de T -équations de filtrage. Une substitution est une solution d'un T -système de filtrage P si c'est une solution de toutes les T -équations de filtrage. Nous notons par \mathbf{F} un T -système de filtrage sans solution. Un T -système de filtrage est appelé trivial quand toute substitution est une solution du système.*

Nous définissons $\text{Solution}(\mathcal{S})$ pour un T -système de filtrage \mathcal{S} comme étant la fonction qui retourne l'ensemble de toutes les solutions de \mathcal{S} quand \mathcal{S} n'est pas trivial et $\{\text{ID}\}$, où ID est la substitution identité, quand \mathcal{S} est trivial.

On appelle T -filtre de t à t' une substitution σ qui est une solution d'un problème de filtrage $t \ll_T^? t'$. Si une telle substitution existe, on dit que le terme t *subsume* le terme t' .

Remarquons que si l'algorithme de filtrage échoue (i.e. retourne \mathbf{F}) alors la fonction Solution retourne l'ensemble vide.

Puisqu'en général on peut considérer des théories arbitraires sur les ρ -termes, le T -filtrage est en général indécidable, même lorsqu'on se restreint à des théories équationnelles du premier ordre [JK91]. Afin de surmonter ce problème d'indécidabilité, on peut penser à utiliser des contraintes, comme dans la résolution d'ordre supérieur avec contraintes [Hue73] ou dans la déduction avec contraintes [KKR90].

Nous sommes principalement intéressés par les cas décidables. Parmi les théories décidables, on peut mentionner le filtrage d'ordre supérieur avec motif qui est décidable et unitaire comme conséquence de la décidabilité de l'unification avec motif [Mil91, DHKP96], le filtrage linéaire d'ordre supérieur [dG00], le filtrage d'ordre supérieur qui est décidable jusqu'au quatrième ordre [Pad96, Dow92, HL78] (le problème de décision du cas général étant encore ouvert), beaucoup de théories équationnelles du premier ordre comprenant l'associativité, la commutativité, la distributivité et la majorité de leur combinaisons [Nip89, Rin96].

Par exemple, quand la théorie T est vide, la substitution résultant du filtrage syntaxique entre les termes t et t' , quand elle existe, est unique et peut être calculée par un algorithme récursif simple donné, par exemple, par G. Huet [Hue76]. Cette substitution peut également être calculée par l'ensemble de règles *SyntacticMatching* où on suppose que le symbole \wedge est associatif et commutatif.

<i>Decomposition</i>	$(f(t_1, \dots, t_n) \ll_{\emptyset}^? f(t'_1, \dots, t'_n)) \wedge P$	\mapsto	$\bigwedge_{i=1..n} t_i \ll_{\emptyset}^? t'_i \wedge P$
<i>SymbolClash</i>	$(f(t_1, \dots, t_n) \ll_{\emptyset}^? g(t'_1, \dots, t'_m)) \wedge P$	\mapsto	\mathbf{F} si $f \neq g$
<i>MergingClash</i>	$(x \ll_{\emptyset}^? t) \wedge (x \ll_{\emptyset}^? t') \wedge P$	\mapsto	\mathbf{F} si $t \neq t'$
<i>SymbolVariableClash</i>	$(f(t_1, \dots, t_n) \ll_{\emptyset}^? x) \wedge P$	\mapsto	\mathbf{F} si $x \in \mathcal{X}$

FIG. 2.1: *SyntacticMatching* - Règles pour le filtrage syntaxique

Proposition 2.1 [KK99] *La forme normale de tout problème de filtrage $t \ll_{\emptyset}^? t'$ calculée par les règles *SyntacticMatching* existe et est unique. Après avoir enlevé de la forme normale toute équation dupliquée et toute équation triviale de la forme $x \ll_{\emptyset}^? x$, si le système résultant est :*

1. **F**, alors il n'y a pas de filtre de t à t' et $\text{Solution}(t \ll_{\emptyset}^? t') = \text{Solution}(\mathbf{F}) = \emptyset$,
2. de la forme $\bigwedge_{i \in I} x_i \ll_{\emptyset}^? t_i$ avec $I \neq \emptyset$, alors la substitution $\sigma = \langle x_i/t_i \rangle_{i \in I}$ est l'unique filtre de t à t' et $\text{Solution}(t \ll_{\emptyset}^? t') = \text{Solution}(\bigwedge_{i \in I} x_i \ll_{\emptyset}^? t_i) = \{\sigma\}$,
3. vide, alors t et t' sont identiques et $\text{Solution}(t \ll_{\emptyset}^? t) = \{\text{ID}\}$.

Exemple 2.2 Si nous considérons le problème de filtrage $(f(x, g(x, y)) \ll_{\emptyset}^? f(a, g(a, b)))$, nous appliquons d'abord la règle de filtrage *Decomposition* et nous obtenons le système avec les deux équations $(x \ll_{\emptyset}^? a)$ et $(g(x, y) \ll_{\emptyset}^? g(a, b))$. Quand nous appliquons la même règle de nouveau pour la deuxième équation nous obtenons $(x \ll_{\emptyset}^? a)$ et $(y \ll_{\emptyset}^? b)$. Ainsi, l'équation initiale est réduite en $(x \ll_{\emptyset}^? a) \wedge (x \ll_{\emptyset}^? a) \wedge (y \ll_{\emptyset}^? b)$ et donc $\text{Solution}(f(x, g(x, y)) \ll_{\emptyset}^? f(a, g(a, b))) = \{\langle x/a, y/b \rangle\}$.

Pour le problème de filtrage $(f(x, x) \ll_{\emptyset}^? f(a, b))$ nous appliquons, comme avant, la règle *Decomposition* et nous obtenons le système $(x \ll_{\emptyset}^? a) \wedge (x \ll_{\emptyset}^? b)$. Ce dernier système est réduit par la règle de filtrage *MergingClash* en **F** et ainsi, $\text{Solution}(f(x, x) \ll_{\emptyset}^? f(a, b)) = \emptyset$.

Cet algorithme de filtrage syntaxique peut être étendu d'une façon naturelle quand on suppose qu'un symbole, comme le $+$ par exemple, est commutatif. Dans ce cas-ci, l'ensemble précédent de règles devrait être complété avec :

$$\begin{aligned} \text{CommDec} \quad (t_1 + t_2) \ll_{\emptyset}^? (t'_1 + t'_2) \wedge P \quad \rightsquigarrow \\ ((t_1 \ll_{\emptyset}^? t'_1 \wedge t_2 \ll_{\emptyset}^? t'_2) \vee (t_1 \ll_{\emptyset}^? t'_2 \wedge t_2 \ll_{\emptyset}^? t'_1)) \wedge P \end{aligned}$$

où la disjonction a les propriétés habituelles.

Il est clair que dans ce dernier cas le nombre de filtres peut être exponentiel par rapport à la taille des membres gauches des équations de filtrage initiales.

Exemple 2.3 Quand on filtre modulo la commutativité un terme comme $x + y$, avec $+$ défini comme étant commutatif, contre le terme $a + b$, la règle *CommDec* mène à

$$((x \ll_{\emptyset}^? a \wedge y \ll_{\emptyset}^? b) \vee (x \ll_{\emptyset}^? b \wedge y \ll_{\emptyset}^? a))$$

et ainsi, $\text{Solution}(x + y \ll_{\emptyset}^? a + b) = \{\langle x/a, y/b \rangle, \langle x/b, y/a \rangle\}$.

Le filtrage associatif-commutatif (AC) est souvent utilisé. Il pourrait être défini en utilisant une approche basée sur des règles comme dans [AK92, KR98] ou une approche sémantique comme dans [Eke93].

Comme nous l'avons déjà dit, la théorie T est un paramètre du ρ -calcul et ainsi nous notons, par exemple, par ρ_{\emptyset} -calcul le ρ -calcul avec une théorie de filtrage vide (filtrage syntaxique), par ρ_C -calcul le ρ -calcul avec une théorie de filtrage commutative, par ρ_A -calcul le ρ -calcul avec une théorie de filtrage associative, par ρ_{AC} -calcul le ρ -calcul avec une théorie de filtrage associative-commutative.

2.6 Les règles d'évaluation

Nous supposons donnée une théorie T sur les ρ -termes pour laquelle le filtrage est décidable.

Les règles d'évaluation du ρ_T -calcul décrivent principalement l'application d'un ρ -terme sur un autre ρ -terme et indiquent le comportement des différents opérateurs du calcul quand les arguments sont des ensembles. En fonction de leurs spécificités elles sont décrites dans les Figure 2.2 à 2.5.

2.6.1 L'application d'une règle en tête dans le ρ_T -calcul

L'application d'une règle de réécriture à la position de tête d'un terme t est accomplie en utilisant les méta-opérations de filtrage et application de substitution. D'abord, on filtre le membre gauche de la règle de réécriture contre le terme t et puis, les substitutions (aucune, une ou plusieurs) obtenues sont appliquées au membre droit de la règle de réécriture.

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, dans le cas général, le filtrage n'est pas unitaire et nous devons traiter ainsi les ensembles (vides ou infinis) de substitutions. Nous considérons une application des ensembles de substitutions au niveau méta du calcul représentée par l'opérateur binaire “ $_ \ll _$ ” dont le comportement est décrit par la méta-règle :

$$\textit{Propagate} \quad r \ll \{\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots\} \rightsquigarrow \{\sigma_1 r, \dots, \sigma_n r, \dots\}$$

Le résultat de l'application d'un ensemble de substitutions $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots\}$ sur un terme r est l'ensemble de termes $\sigma_i r$, où $\sigma_i r$ représente le résultat de la (méta-)application de la substitution σ_i sur le terme r comme détaillé dans la Section 2.4. Notez que lorsque n vaut 0, c'est-à-dire l'ensemble de substitutions est vide, l'ensemble de termes instanciés est également vide.

L'application d'une règle de réécriture $l \rightarrow r$ sur un terme t est décrite par la règle d'évaluation *Fire* présentée dans la Figure 2.2. La règle *Fire*, comme toutes les règles d'évaluation du calcul, peut être appliquée à n'importe quelle position d'un ρ -terme.

$$\textit{Fire} \quad [l \rightarrow r](t) \implies r \ll \textit{Solution}(l \ll_T^? t)$$

FIG. 2.2: La règle d'évaluation *Fire* du ρ_T -calcul

L'idée centrale est que l'application d'une règle de réécriture $l \rightarrow r$ à la position de tête d'un terme t , écrite $[l \rightarrow r](t)$, consiste à remplacer le terme r par $r \ll \mathcal{R}$ où \mathcal{R} est l'ensemble de substitutions obtenues en T -filtrant l contre t (c'est-à-dire $\textit{Solution}(l \ll_T^? t)$). Par conséquent, quand le filtrage échoue menant à un ensemble vide de substitutions, le résultat de l'application de la règle *Propagate* et ainsi de la règle *Fire* est l'ensemble vide.

Une autre façon de décrire l'application d'une règle de réécriture consiste à expliciter l'application d'un ensemble de substitutions dans la règle *Fire* qui devient :

$$\textit{Fire}' \quad [l \rightarrow r](t) \implies \{\sigma_1 r, \dots, \sigma_n r, \dots\} \\ \text{avec } \sigma_i \in \textit{Solution}(l \ll_T^? t)$$

Notons que, comme dans λ -calcul, une application peut toujours être évaluée, mais contrairement au λ -calcul, l'ensemble de résultats peut être vide. Plus généralement, quand on filtre modulo une théorie T , l'ensemble de filtres correspondants peut être vide, un singleton (comme dans la théorie vide), un ensemble fini (comme dans le cas d'une théorie associative-commutative) ou infini ([FH83]). Nous avons ainsi choisi de représenter les résultats de l'application d'une règle de réécriture à un terme par un ensemble. Un ensemble vide signifie que la règle de réécriture $l \rightarrow r$ ne s'applique pas sur le terme t dans le sens d'un échec pour le filtrage entre les termes l et t .

Quand nous évaluons, par exemple, l'application $[a \rightarrow b](a)$, le membre gauche a de la règle de réécriture est filtré contre l'argument a de l'application menant à un ensemble contenant la

substitution identité. L'application de cette substitution ne modifie pas le membre droit b de la règle et donc, l'application est évaluée en l'ensemble $\{b\}$.

Le système de filtrage à résoudre peut être non-trivial comme pour la ρ -application $[f(x) \rightarrow x](f(a))$ où la solution du filtrage entre le membre gauche de la règle de réécriture et le terme $f(a)$ est la substitution $\langle x/a \rangle$. Le membre droit x de la règle est instancié par cette substitution à a et donc, le résultat final de l'évaluation est le ρ -terme $\{a\}$.

Si le filtrage entre le membre gauche de la règle de réécriture et l'argument de l'application échoue comme, par exemple, pour les applications $[a \rightarrow b](c)$ et $[f(x) \rightarrow x](g(a))$, alors nous obtenons un ensemble vide de substitutions et le résultat de l'évaluation de ces applications est l'ensemble vide.

Mais un filtrage équationnel peut générer plusieurs substitutions comme, par exemple, le problème de filtrage $x \cup y \ll_{AC}^? a \cup b$ ayant les solutions $\langle x/a, y/b \rangle$ et $\langle x/b, y/a \rangle$ si le symbole \cup est considéré associatif-commutatif. Quand de tels opérateurs sont utilisés dans le membre gauche des règles de réécriture, l'application peut être évaluée à un ensemble ayant plusieurs éléments. Considérons, par exemple, l'application $[x \cup y \rightarrow x](a \cup b)$ représentant la sélection non-déterministe d'un des éléments du couple $a \cup b$. Puisque $Solution(x \cup y \ll_{AC}^? a \cup b) = \{\langle x/a, y/b \rangle, \langle x/b, y/a \rangle\}$, la méta-règle *Propagate* évalue $x \ll \{\langle x/a, y/b \rangle, \langle x/b, y/a \rangle\}$ en $\{a, b\}$ et donc le résultat de l'évaluation de l'application est $\{a, b\}$.

2.6.2 Les règles *Congruence* du ρ_T -calcul

Afin de pousser l'application de règles de réécriture plus profondément dans les termes, nous introduisons les deux règles d'évaluation *Congruence* présentées dans la Figure 2.3. Ces règles traitent l'application d'un terme de la forme $f(u_1, \dots, u_n)$ (où $f \in \mathcal{F}_n$) à un autre terme d'une forme semblable. Quand les deux termes de l'application $[u](v)$ ont le même symbole de tête, les arguments du terme u sont appliqués sur ceux du terme v . Si les symboles de tête ne sont pas identiques, un ensemble vide est obtenu.

$ \begin{array}{ll} \textit{Congruence} & [f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n)) \implies \{f([u_1](v_1), \dots, [u_n](v_n))\} \\ \textit{Congruence_fail} & [f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m)) \implies \emptyset \end{array} $
--

FIG. 2.3: Les règles d'évaluation *Congruence* du ρ_T -calcul

Nous pouvons simuler les réductions utilisant les règles d'évaluation *Congruence* pour les applications d'un terme avec un symbole de tête fonctionnel à un terme de la même forme en transformant le terme initial et utilisant la règle d'évaluation *Fire*. En effet, l'application d'un terme $f(u_1, \dots, u_n)$ à un autre terme t (i.e., le terme $[f(u_1, \dots, u_n)](t)$) est évalué, en utilisant les règles d'évaluation *Congruence* et *Congruence_fail*, au même terme que l'application du ρ -terme $f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f([u_1](x_1), \dots, [u_n](x_n))$ au terme t (formellement, le ρ -terme $[f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f([u_1](x_1), \dots, [u_n](x_n))](t)$) en utilisant la règle *Fire*. Bien que nous puissions exprimer les mêmes calculs en utilisant seulement la règle d'évaluation *Fire* et en transformant les termes de départ, nous préférons garder les règles d'évaluation *Congruence* dans le calcul pour une représentation plus concise des ρ -termes.

La représentation des résultats des applications par des ensembles a des conséquences importantes en ce qui concerne le comportement du calcul. Nous pouvons mentionner que lorsqu'on

évalue un ρ -terme, le nombre de symboles d'ensemble dans le terme résultat représente le nombre d'applications réduites dans la dérivation du terme initial.

L'application de la règle de réécriture $a \rightarrow b$ à l'argument du terme $f(a)$ peut être décrite par le ρ -terme $[f(x) \rightarrow f([a \rightarrow b](x))](f(a))$ qui est évalué en utilisant la règle d'évaluation *Fire* en $\{f([a \rightarrow b](a))\}$ et puis en $\{f(\{b\})\}$. Mais nous pouvons également donner une représentation plus concise et utiliser le ρ -terme $[f(a \rightarrow b)](f(a))$ qui est évalué en appliquant la règle d'évaluation *Congruence* en $\{f([a \rightarrow b](a))\}$ et puis, conformément à la règle d'évaluation *Fire*, en $\{f(\{b\})\}$. On peut remarquer que les deux symboles d'ensemble dans le terme résultat correspondent aux deux applications de la règle d'évaluation *Fire* dans le premier cas et aux applications des règles d'évaluation *Fire* et *Congruence* dans le deuxième cas.

2.6.3 Le traitement des ensembles dans le ρ_T -calcul

Les réductions correspondant aux termes contenant des ensembles sont définis par les règles d'évaluation présentées dans la Figure 2.4. Ces règles décrivent la propagation des ensembles par rapport aux constructeurs de ρ -termes : les règles *Distrib* et *Batch* pour l'application, *Switch_L* et *Switch_R* pour l'abstraction et *OpOnSet* pour les fonctions.

<i>Distrib</i>	$[\{u_1, \dots, u_n\}](v)$	\Longrightarrow	$\{[u_1](v), \dots, [u_n](v)\}$
<i>Batch</i>	$[v](\{u_1, \dots, u_n\})$	\Longrightarrow	$\{[v](u_1), \dots, [v](u_n)\}$
<i>Switch_L</i>	$\{u_1, \dots, u_n\} \rightarrow v$	\Longrightarrow	$\{u_1 \rightarrow v, \dots, u_n \rightarrow v\}$
<i>Switch_R</i>	$u \rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$	\Longrightarrow	$\{u \rightarrow v_1, \dots, u \rightarrow v_n\}$
<i>OpOnSet</i>	$f(v_1, \dots, \{u_1, \dots, u_m\}, \dots, v_n)$	\Longrightarrow	$\{f(v_1, \dots, u_1, \dots, v_n), \dots, f(v_1, \dots, u_m, \dots, v_n)\}$

FIG. 2.4: Les règles d'évaluation *Set* du ρ_T -calcul

Le nombre de symboles d'ensemble n'est pas modifié au cours de l'évaluation par les règles *Distrib*, *Batch*, *Switch_L*, *Switch_R* et *OpOnSet*. De cette manière, le nombre de symboles d'ensemble dans un terme (ne contenant pas d'ensemble vide) compte toujours le nombre de règles *Fire* et *Congruence* qui ont été appliquées afin d'obtenir le terme respectif.

Un résultat de la forme $\{\}$ (noté habituellement \emptyset) représente l'échec de l'application (d'une règle de réécriture) et les échecs sont strictement propagés dans les ρ -termes en utilisant l'ensemble de règles d'évaluation *Set*.

La relation de réécriture induite par les règles d'évaluation *Fire*, *Congruence* et les règles *Set* est plus fine (c'est-à-dire contient plus d'éléments) que la relation standard (sans ensemble) et elle est non-confluente. Une raison de la non-confluence est l'absence d'une règle d'évaluation similaire aux règles *Set* pour la propagation des ensemble par rapport aux ensembles.

L'application de l'ensemble de règles de réécriture $\{a \rightarrow b, a \rightarrow c\}$ au terme a (i.e. le ρ -terme $\{[a \rightarrow b, a \rightarrow c](a)\}$) est réduite en utilisant la règle d'évaluation *Distrib* en l'ensemble contenant les applications de chaque règle au terme a , c'est-à-dire le ρ -terme $\{[a \rightarrow b](a), [a \rightarrow c](a)\}$. En plus, nous pouvons factoriser un ensemble de règles de réécriture ayant le même membre gauche et utiliser le ρ -terme $a \rightarrow \{b, c\}$ qui est réduit en appliquant la règle d'évaluation *Switch_R* en

$\{a \rightarrow b, a \rightarrow c\}$. Ainsi, nous pouvons dire que le ρ -terme $[a \rightarrow \{b, c\}](a)$ décrit le choix non-déterministe entre l'application de la règle $a \rightarrow b$ au terme a et l'application de la règle $a \rightarrow c$ au même terme a et cette application est réduite en l'ensemble contenant le résultat de deux applications, c'est-à-dire $\{\{b\}, \{c\}\}$.

Considérons maintenant le ρ -terme $[f(a \rightarrow b)](f(a))$ qui est réduit, comme montré précédemment, en $\{f(\{b\})\}$ et puis, en utilisant la règle *OpOnSet* en $\{\{f(b)\}\}$. Les deux symboles d'ensemble correspondent aux deux applications des règles d'évaluation *Fire* et *Congruence* sont donc préservés par l'application de la règle *OpOnSet*.

Le résultat \emptyset obtenu pour l'évaluation d'une application comme, par exemple, $[a \rightarrow b](c)$ est propagé dans les règles de réécriture, les applications et les termes du premier ordre ayant cette application en argument. Le ρ -terme $f([a \rightarrow b](c))$ est réduit en utilisant la règle d'évaluation *Fire* en $f(\emptyset)$ et ensuite, en appliquant la règle d'évaluation *OpOnSet* en \emptyset .

Notons que la propagation d'un ensemble vide dans un terme peut mener à des résultats non-convergeants par rapport aux règles d'évaluation présentées jusqu'à maintenant. Un ρ -terme $g([a \rightarrow b](c), [a \rightarrow b](a))$ est réduit en $g(\emptyset, \{b\})$ et ensuite, en appliquant la règle d'évaluation *OpOnSet* nous obtenons soit \emptyset , soit $\{g(\emptyset, b)\}$ en fonction de l'argument considéré. Ce dernier terme est réduit en $\{\{\}\}$, avec les deux symboles d'ensemble correspondant aux applications des règles d'évaluation *Fire*, mais il ne peut pas être réduit en \emptyset , terme dans lequel l'information sur le nombre de pas d'évaluation est perdue.

2.6.4 Aplatir les ensembles dans le ρ_T -calcul

La règle d'évaluation *Flat* présentée dans la Figure 2.5 décrit la propagation des ensembles par rapport aux ρ -termes de type ensemble et l'élimination des symboles d'ensemble redondants.

$$\text{Flat} \quad \{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\} \implies \{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\}$$

FIG. 2.5: La règle d'évaluation *Flat* du ρ_T -calcul

Puisque chaque élément d'un ensemble représente un des résultats non-déterministes d'une réduction, nous pouvons dire qu'un échec dans la réduction d'un élément représente l'échec d'une des réductions possibles et ne doit pas mener à l'échec de toutes les réductions. Ceci correspond exactement au fonctionnement du ρ_T -calcul où un échec (i.e. l'ensemble vide) obtenu dans la réduction d'un élément d'un ρ -terme ensemble *n'est pas* strictement propagé dans le sens où l'ensemble initial n'est pas nécessairement réduit en l'ensemble vide.

La règle d'évaluation *Flat* est utilisée dans le ρ -calcul pour aplatir les ensembles et on doit noter que, puisque les symboles d'ensemble imbriqués sont éliminés par cette règle d'évaluation, le nombre d'étapes de réduction n'est plus indiqué par le nombre de symboles d'ensemble.

La règle d'évaluation qui correspond à la propagation des ensembles pour les symboles d'ensemble et qui préserveraient correctement le nombre de symboles d'ensemble est la règle d'évaluation *Flat_one* :

$$\text{Flat_one} \quad \{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\} \implies \{\{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\}\} \\ \text{si } m \in \mathbf{N}^*$$

L'inconvénient de cette solution est la différence faite entre des termes identiques, mais obtenus après un nombre différent de pas de réduction. Par exemple, en utilisant cette approche,

le terme $\{\{a\}\}$ ne se réduit pas en $\{a\}$, ce qui est souhaitable dans un calcul où nous souhaitons que le résultat ne contienne pas d'information sur la dérivation qui l'a produit.

Par conséquent, dans une approche utilisant la règle d'évaluation *Flat_one* nous devons aussi introduire la règle d'évaluation *Elim* qui élimine les symboles d'ensemble redondants :

$$Elim \quad \{\{u_1, \dots, u_m\}\} \implies \{u_1, \dots, u_m\}$$

En combinant les règles d'évaluation *Flat_one* et *Elim* nous obtenons exactement la règle d'évaluation *Flat* présentée ci-dessus.

Dans la section précédente nous avons vu que le ρ -terme $[a \rightarrow \{b, c\}](a)$ est réduit en $\{\{b\}, \{c\}\}$ et maintenant, nous pouvons utiliser la règle d'évaluation *Flat* pour réduire ce dernier terme en $\{b, c\}$. De la même manière, le ρ -terme $\{\{f(b)\}\}$ est réduit en $\{f(b)\}$.

En éliminant les symboles d'ensemble redondants nous pouvons résoudre le problème de non-convergence pour la réduction du terme $g([a \rightarrow b](c), [a \rightarrow b](a))$ en $\{\}$ ou $\{\{\}\}$. Puisque le terme $\{\{\}\}$ est réduit en utilisant la règle d'évaluation *Flat* en $\{\}$ alors le terme initial ne peut être réduit qu'en $\{\}$.

Le terme $[a \rightarrow b, b \rightarrow a](a)$ correspondant à l'application d'un ensemble de règles de réécriture est réduite en le terme $\{[a \rightarrow b](a), [b \rightarrow a](a)\}$ et ensuite, en appliquant la règle d'évaluation *Fire*, nous obtenons le terme $\{\{b\}, \emptyset\}$. Cet ensemble est réduit en utilisant la règle d'évaluation *Flat* en $\{b\}$ et en analysant ce terme résultat nous ne pouvons ni déduire le nombre des règles d'évaluation *Fire* et *Congruence* ni détecter un échec au cours de l'évaluation.

Ce comportement du calcul pourrait être résumé en disant que la propagation de l'échec décrite par les règles d'évaluation *Set* est stricte sur tous les opérateurs sauf l'ensemble. En fait, nous verrons plus tard que la règle *Fire* peut induire des propagations non-strictes dans quelques cas particuliers (voir l'Exemple 3.5 à la page 63).

La décision d'utiliser des ensembles pour représenter les résultats des réductions a une autre conséquence importante concernant le traitement des ensembles par rapport au filtrage.

En effet, les ensembles sont juste utilisés pour enregistrer des résultats et nous ne souhaitons pas qu'ils fassent partie de la théorie de filtrage. Nous supposons de ce fait que le filtrage utilisé dans la règle d'évaluation *Fire* n'est pas réalisé modulo une théorie équationnelle axiomatisant les ensembles. Ceci exige dans certains cas l'utilisation d'une stratégie qui pousse les symboles d'ensemble des termes autant que possible vers les positions les plus petites (c'est-à-dire distribuer les ensembles vers l'extérieur).

2.7 La stratégie d'évaluation

La définition générale d'une stratégie est donnée dans [KKV95a] mais nous spécialisons cette définition dans le cas du ρ -calcul.

Définition 2.6 Une stratégie d'évaluation dans le ρ -calcul est un sous-ensemble de toutes les dérivations possibles.

La stratégie \mathcal{S} guidant l'application des règles d'évaluation du ρ_T -calcul peut être cruciale pour obtenir les bonnes propriétés pour le calcul. Dans une première étape, la propriété principale analysée est la confluence du calcul et nous verrons que si la règle *Fire* est appliquée sans aucune restriction et à n'importe quelle position d'un ρ -terme alors le calcul n'est pas confluent.

Par exemple, la stratégie \mathcal{NCE} représente l'ensemble de toutes les dérivations, c'est-à-dire qu'elle n'est pas restrictive. La stratégie vide est la stratégie qui ne permet aucune réduction.

Nous désirons définir la stratégie la moins restrictive permettant d'obtenir certaines propriétés et en particulier la confluence du calcul.

Les raisons de la non-confluence du calcul général sont expliquées dans la Section 3.2 et une solution est proposée pour obtenir un calcul confluent. La stratégie garantissant la confluence du calcul peut être donnée explicitement ou exprimée comme une condition sur l'application de la règle d'évaluation *Fire*.

2.8 La définition du ρ -calcul

En utilisant les notions présentées dans les sections précédentes nous donnons la définition du ρ_T -calcul général.

Définition 2.7 *Etant donné un ensemble de symboles de fonctions \mathcal{F} , un ensemble de variables \mathcal{X} et une théorie T sur les termes de $\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ avec un problème de filtrage décidable, nous appelons ρ_T -calcul (ou calcul de réécriture) un calcul défini par :*

- *un sous-ensemble non vide $\varrho_-(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ de l'ensemble de termes $\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$,*
- *l'application (d'ordre supérieur) de substitution aux termes comme définie dans la Section 2.4,*
- *une théorie T ,*
- *l'ensemble de règles d'évaluation \mathcal{E} : *Fire*, *Congruence*, *Congruence_fail*, *Distrib*, *Batch*, *Switch_L*, *Switch_R*, *OpOnSet*, *Flat* (Figure 2.6),*
- *une stratégie d'évaluation \mathcal{S} qui guide l'application des règles d'évaluation.*

Nous utilisons la notation $(\varrho_-(\mathcal{F}, \mathcal{X}), T, \mathcal{S})$ pour rendre explicite les composants principaux du calcul de réécriture considéré. Lorsque ces composants sont clairs suivant le contexte, la notation simplifiée ρ_T est utilisée.

Définition 2.8 *Un ρ -terme t tel qu'il existe une règle d'évaluation de l'ensemble \mathcal{E} applicable à la position de tête de t est appelé un ρ -radical ou radical.*

Quand les paramètres du calcul général sont remplacés par certaines valeurs spécifiques, différentes instances du calcul sont obtenues. Nous pouvons préciser un ou plusieurs des paramètres et obtenir des calculs (partiellement) instanciés comme, par exemple, $\rho_\emptyset = (\varrho_\emptyset(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \emptyset, \mathcal{S})$, où $\varrho_\emptyset(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ est un sous-ensemble bien défini de $\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$, le filtrage employé est syntaxique et \mathcal{S} dénote une stratégie pas encore précisée.

2.9 Relation de réécriture versus calcul de réécriture

Les termes du ρ -calcul contiennent toute l'information nécessaire pour leur évaluation. C'est également le cas pour le λ -calcul mais ceci est tout à fait différent de la manière habituelle dont les *relations de réécriture* sont définies.

Comme vu plus haut, la relation de réécriture engendrée par un système de réécriture $\mathcal{R} = \{l_1 \rightarrow r_1, \dots, l_n \rightarrow r_n\}$ est la plus petite relation transitive stable par contexte et substitution et contenant $(l_1, r_1), \dots, (l_n, r_n)$.

Exemple 2.4 *Si $\mathcal{R} = \{a \rightarrow f(b), b \rightarrow c\}$ alors la relation de réécriture correspondante contient $(a, f(b))$, (b, c) , $(a, f(c))$ et on peut dire que la dérivation $a \rightarrow f(b) \rightarrow f(c)$ est engendrée par \mathcal{R} .*

On dit que la relation de réécriture associée à un système de réécriture contenant la règle de réécriture $a \rightarrow a$ ne termine pas puisque la dérivation $a \rightarrow a \rightarrow a \rightarrow \dots$ est générée dans un tel système.

<i>Fire</i>	$[l \rightarrow r](t)$	$\Longrightarrow r\langle\langle\text{Solution}(l \ll_T^? t)\rangle\rangle$
<i>Congruence</i>	$[f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n))$	$\Longrightarrow \{f([u_1](v_1), \dots, [u_n](v_n))\}$
<i>Congruence_fail</i>	$[f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m))$	$\Longrightarrow \emptyset$
<i>Distrib</i>	$[\{u_1, \dots, u_n\}](v)$	$\Longrightarrow \{[u_1](v), \dots, [u_n](v)\}$
<i>Batch</i>	$[v](\{u_1, \dots, u_n\})$	$\Longrightarrow \{[v](u_1), \dots, [v](u_n)\}$
<i>Switch_L</i>	$\{u_1, \dots, u_n\} \rightarrow v$	$\Longrightarrow \{u_1 \rightarrow v, \dots, u_n \rightarrow v\}$
<i>Switch_R</i>	$u \rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$	$\Longrightarrow \{u \rightarrow v_1, \dots, u \rightarrow v_n\}$
<i>OpOnSet</i>	$f(v_1, \dots, \{u_1, \dots, u_m\}, \dots, v_n) \Longrightarrow$ $\{f(v_1, \dots, u_1, \dots, v_n), \dots, f(v_1, \dots, u_m, \dots, v_n)\}$	
<i>Flat</i>	$\{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\} \Longrightarrow$ $\{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\}$	

FIG. 2.6: Les règles d'évaluation du ρ_T -calcul

Dans le ρ -calcul la situation est différente puisqu'un ρ -terme est évalué seulement en fonction de l'information de réécriture explicitement contenue dans le terme. L'ensemble des règles de réécriture utilisées dans la réduction n'est pas décrit au méta-niveau du calcul mais toutes les règles sont présentes dans le ρ -terme à réduire.

Exemple 2.5 Dans le ρ -calcul une dérivation similaire à celle générée par la règle de réécriture $a \rightarrow a$ de l'Exemple 2.4 doit être construite explicitement en décrivant, par exemple, toutes les applications de la règle $a \rightarrow a$.

Le ρ -terme $[a \rightarrow a](a)$ décrit un pas de réécriture et il est réduit en utilisant la règle d'évaluation *Fire* en $\{a\}$. Le ρ -terme $[a \rightarrow a]([a \rightarrow a](a))$ décrit deux applications de la règle $a \rightarrow a$ étant réduit d'abord en $[a \rightarrow a](\{a\})$ et ultérieurement en $\{a\}$.

On doit noter que l'utilisation des règles de réécriture avec une variable comme membre gauche dans les ρ -termes ne conduit pas systématiquement à des réductions non-terminantes.

Exemple 2.6 La forme normale d'un ρ -terme $[x \rightarrow x](a)$ est l'ensemble $\{a\}$ tandis que la relation engendrée par tout système de réécriture contenant la règle $x \rightarrow x$ est non-terminante.

Dans l'Exemple 2.5 on peut remarquer que pour chaque application d'une règle dans une réduction de la réécriture classique le ρ -terme correspondant doit contenir une application de la règle respective à la position appropriée.

Une autre approche consiste à définir des ρ -opérateurs d'itération permettant la description des stratégies de normalisation par rapport à un ensemble de règles de réécriture. La manière dont ces opérateurs sont construits sera décrite ultérieurement mais pour donner une intuition sur leur utilisation nous pouvons dire que le ρ -terme $[im(\{a \rightarrow a\})](a)$ décrit la réduction innermost du terme a par rapport à la règle $a \rightarrow a$ et la réduction de ce terme dans le ρ -calcul est très similaire à celle du terme a par rapport au système de réécriture contenant la règle $a \rightarrow a$.

Nous allons présenter dans la Section 5.2 une description plus détaillée de la correspondance entre la réécriture du premier ordre et le ρ -calcul mais nous pouvons noter immédiatement une similarité entre les termes de preuve de la logique de réécriture et les ρ -termes.

Exemple 2.7 *Considérons une théorie de réécriture basée sur la règle de réécriture étiquetée $[a2b]$ $a \rightarrow b$. Dans cette théorie nous pouvons déduire le séquent $f(a2b) : f(a) \rightarrow f(b)$, où f est un symbole de la signature.*

En partant du terme de preuve $f(a2b)$ pour la réduction $f(a) \rightarrow f(b)$ nous construisons le ρ -terme $[f(a \rightarrow b)](f(a))$ avec la réduction $[f(a \rightarrow b)](f(a)) \rightarrow_{\rho} f([a \rightarrow b](a)) \rightarrow_{\rho} f(\{b\}) \rightarrow_{\rho} \{f(b)\}$.

Si nous identifions l'étiquette d'une règle avec la règle nous pouvons dire que l'application du terme de preuve $f(a2b)$ au terme initial $f(a)$ (i.e. le ρ -terme $[f(a \rightarrow b)](f(a))$) est réduite en l'ensemble contenant le terme final $f(b)$ (i.e. $\{f(b)\}$).

Nous avons donc une interprétation immédiate des termes de preuve de la logique de réécriture par des ρ -termes mais il existe des réductions des ρ -termes sans terme de preuve correspondant.

Il n'existe pas de correspondance directe entre la réduction des ρ -termes contenant des ensembles et les termes de preuve mais nous pouvons considérer, par exemple, qu'à la réduction du terme $\{[a \rightarrow b, a \rightarrow c]\}(a)$ en $\{b, c\}$ correspondent les deux termes de preuve pour l'application des règles de réécriture $a \rightarrow b$ et $a \rightarrow c$ au terme a .

Si nous considérons des ρ -règles de réécriture ne contenant pas seulement des termes du premier ordre dans le membre droit nous obtenons immédiatement des ρ -réductions sans aucune correspondance dans les termes de preuve. Par exemple, pour la ρ -réduction de l'application $[x \rightarrow [y \rightarrow x \cup y](b)](a)$ en $\{a \cup b\}$ il n'existe pas de terme de preuve associé.

2.10 Instances du calcul de réécriture

Cette section a pour objectif d'illustrer les concepts que nous avons présentés auparavant en donnant quelques exemples de ρ -termes et de ρ -réductions.

Nous allons commencer par la partie fonctionnelle du calcul et nous donnons les ρ -termes représentant certains λ -termes. Par exemple, la λ -abstraction $\lambda x.(y \ x)$, où y est une variable, est représentée par la ρ -règle $x \rightarrow [y](x)$. L'application de ce λ -terme à une constante a , notée en λ -calcul $\lambda x.(y \ x) \ a$, est représentée dans le ρ -calcul par l'application $[x \rightarrow [y](x)](a)$. Cette application est réduite dans le λ -calcul en $(y \ a)$ tandis que dans le ρ -calcul le résultat de la réduction du terme correspondant est le singleton $\{[y](a)\}$. Nous pouvons être plus précis et dire que les λ -termes et réductions ci-dessus sont représentés dans le ρ_0 -calcul où le filtrage est syntaxique. Lorsqu'une notation fonctionnelle $f(x)$ est choisie pour $(f \ x)$, le λ -terme $\lambda x.f(x)$ est représenté par le ρ -terme $x \rightarrow f(x)$. On note que pour les ρ -termes de cette forme (c'est-à-dire des règles de réécriture qui ont une variable comme membre gauche) le filtrage syntaxique effectué dans le ρ_0 -calcul est trivial, il n'échoue jamais et fournit toujours un seul résultat.

Il n'y a pas de difficulté à représenter des λ -termes plus élaborés dans le ρ_0 -calcul :

Exemple 2.8 *Considérons le terme $\lambda x.f(x) (\lambda y.y \ a)$ avec la β -dérivation suivante :*

$$\lambda x.f(x) (\lambda y.y \ a) \longrightarrow_{\beta} \lambda x.f(x) \ a \longrightarrow_{\beta} f(a)$$

La dérivation correspondante dans le ρ_0 -calcul pour le ρ -terme correspondant est la suivante :

$$\begin{aligned} [x \rightarrow f(x)]([y \rightarrow y](a)) &\longrightarrow_{Fire} [x \rightarrow f(x)](\{a\}) \longrightarrow_{Batch} \\ &\{[x \rightarrow f(x)](a)\} \longrightarrow_{Fire} \{\{f(a)\}\} \longrightarrow_{Flat} \{f(a)\} \end{aligned}$$

Naturellement, plusieurs stratégies de réduction peuvent être utilisées dans le λ -calcul et être reproduites en conséquence dans le ρ_0 -calcul. En effet, nous verrons dans la Section 5.1 que le ρ_0 -calcul contient strictement le λ -calcul.

Le λ -calcul avec motifs présenté dans [PJ87] enrichit le λ -calcul avec des “ λ -abstractions filtrantes” permettant des motifs plus élaborés qu’une simple variable dans l’abstraction. De la même manière que dans le ρ -calcul, le mécanisme de filtrage est utilisé pour instancier les variables liées d’une abstraction et ce calcul peut être représenté dans le ρ -calcul de la même façon que le λ -calcul.

Exemple 2.9 *Considérons, par exemple, le λ -terme $\lambda(PAIR\ x\ y).x$ qui sélectionne le premier élément d’une paire et l’application $\lambda(PAIR\ x\ y).x\ (PAIR\ a\ b)$. En filtrant le motif $(PAIR\ x\ y)$ contre le terme $(PAIR\ a\ b)$ la variable x est liée à a et donc l’application est réduite en a .*

La représentation dans le ρ -calcul du premier λ -terme est la règle $Pair(x, y) \rightarrow x$, où $Pair$ est le symbole de fonction qui correspond au symbole $PAIR$, et l’application correspondante $[Pair(x, y) \rightarrow x](Pair(a, b))$ est réduite dans le ρ -calcul en $\{x/a, y/b\}x$, c’est-à-dire en $\{a\}$.

Si nous introduisons de l’information contextuelle dans les membres gauches des règles de réécriture nous obtenons les règles de réécriture classiques comme, par exemple, $f(a) \rightarrow f(b)$ ou $f(x) \rightarrow g(x)$. Quand nous appliquons une telle règle de réécriture le filtrage peut échouer et par conséquent, l’application peut échouer. Comme nous l’avons déjà précisé dans les sections précédentes, l’échec d’une règle de réécriture n’est pas une méta-propriété dans le ρ -calcul mais elle est représentée par un ensemble vide (de résultats).

Exemple 2.10 *Dans la réécriture de termes classique on dit que l’application de la règle de réécriture $f(a) \rightarrow f(b)$ ne s’applique pas au terme $f(c)$ tandis que dans le ρ -calcul le terme $[f(a) \rightarrow f(b)](f(c))$ est réduit en \emptyset .*

Puisque la construction des règles de réécriture est faite sans aucune restriction, une règle de réécriture peut avoir une variable comme membre gauche comme, par exemple, $x \rightarrow x + 1$ et une règle peut introduire de nouvelles variables comme dans $f(x) \rightarrow g(x, y)$. L’utilisation des variables libres dans les ρ -règles, permet par exemple la construction dynamique de règles de réécriture classiques.

Exemple 2.11 *Le ρ -terme $[f(x) \rightarrow g(x, y)](f(a))$ représentant l’application de la règle de réécriture $f(x) \rightarrow g(x, y)$ au terme $f(a)$ est évalué en $\{g(a, y)\}$ en gardant donc la variable y libre.*

En partant de la ρ -règle de réécriture précédente nous pouvons construire une application $[y \rightarrow (f(x) \rightarrow g(x, y))](a)$ qui est évaluée en $\{f(x) \rightarrow g(x, a)\}$. Dans ce cas-ci la variable y est libre dans la règle de réécriture $f(x) \rightarrow g(x, y)$, mais elle est liée dans la règle $y \rightarrow (f(x) \rightarrow g(x, y))$.

On peut aussi remarquer que les variables libres dans le membre droit d’une ρ -règle de réécriture nous permettent la “paramétrisation” des règles de réécriture par des “stratégies”, comme dans le terme $y \rightarrow [f(x) \rightarrow [y](x)](f(a))$ où le terme appliqué à x n’est pas connu dans la règle $f(x) \rightarrow [y](x)$. La réduction de l’application $[y \rightarrow [f(x) \rightarrow [y](x)](f(a))](a \rightarrow b)$ revient à la réduction de l’application $[f(x) \rightarrow [a \rightarrow b](x)](f(a))$ en $\{b\}$.

Quand le filtrage est effectué modulo une théorie équationnelle nous obtenons des comportements intéressants nous permettant de décrire d’une manière concise des opérations complexes. Nous rappelons que le ρ_C -calcul, le ρ_A -calcul et le ρ_{AC} -calcul représentent le ρ_T -calcul avec une théorie de filtrage commutative, associative et associative-commutative respectivement.

L’utilisation d’une théorie de filtrage associative nous permet, par exemple, d’exprimer le fait qu’une expression accepte plusieurs parenthésages.

Exemple 2.12 Prenons l'opérateur binaire \circ qui représente la concaténation de deux listes avec des éléments d'un certain type *Elem*. Nous considérons que tout objet de type *Elem* représente une liste contenant seulement cet objet.

Si nous définissons l'opérateur \circ comme étant associatif, la règle de réécriture décrivant la décomposition d'une liste peut être définie dans le ρ_A -calcul par $l \circ l' \rightarrow l$. Quand nous appliquons cette règle à la liste $a \circ b \circ c \circ d$ nous obtenons comme résultat le ρ -terme $\{a, a \circ b, a \circ b \circ c\}$. Si l'opérateur \circ n'avait pas été défini comme étant associatif, nous aurions obtenu comme résultat de l'application précédente un des singletons $\{a\}$ ou $\{a \circ b\}$ ou $\{a \circ (b \circ c)\}$ ou encore $\{(a \circ b) \circ c\}$, en fonction du parenthésage du terme $a \circ b \circ c \circ d$.

Dans l'exemple précédent nous avons considéré tous les parenthésages possibles d'un terme construit en utilisant un opérateur associatif mais l'ordre des arguments était le même dans tous les cas. En utilisant une théorie de filtrage commutative nous pouvons, par exemple, représenter le fait que l'ordre des arguments d'un terme n'est pas significatif.

Exemple 2.13 Considérons un opérateur commutatif \oplus et la règle de réécriture $x \oplus y \rightarrow x$ qui sélectionne un des éléments d'un t -uplet $x \oplus y$. Dans le ρ_C -calcul l'application $[x \oplus y \rightarrow x](a \oplus b)$ est réduite en l'ensemble $\{a, b\}$ correspondant au choix non-déterministe entre les deux résultats.

Dans la réécriture modulo classique, le résultat de l'application peut être soit a soit b .

Nous pouvons également utiliser une théorie associative-commutative comme, par exemple, dans le cas d'un opérateur décrivant la formation des multi-ensembles.

Exemple 2.14 Nous considérons de nouveau l'opérateur \circ mais cette fois-ci nous le définissons comme étant associatif-commutatif. Nous introduisons la règle de réécriture $x \circ x \circ L \rightarrow L$ qui élimine les doublons des listes de type *Elem*. Puisque le filtrage est fait modulo l'associativité-commutativité, l'application de cette règle à un ensemble élimine les doublons quelles que soient leurs positions dans la représentation de l'ensemble.

Par exemple, dans le ρ_{AC} -calcul, l'application $[x \circ x \circ L \rightarrow L](a \circ b \circ c \circ a \circ d)$ est réduite en $\{b \circ c \circ d\}$: la recherche des deux éléments égaux est faite grâce au filtrage modulo l'associativité-commutativité de l'opérateur \circ .

Une autre facilité est obtenue grâce à l'utilisation des ensembles pour décrire le non-déterminisme. Ceci nous permet d'exprimer facilement l'application non-déterministe d'un ensemble de règles de réécriture à un terme.

Exemple 2.15 Considérons, par exemple, l'opérateur \otimes en tant qu'opérateur syntaxique. Si nous voulons le même comportement que pour l'opérateur commutatif \oplus de l'Exemple 2.13 et sélectionner chaque élément du terme $x \otimes y$, deux règles de réécriture devraient être appliquées d'une façon non-déterministe comme dans la réduction suivante :

$$\begin{aligned} [\{x \otimes y \rightarrow x, x \otimes y \rightarrow y\}](a \otimes b) &\longrightarrow_{\text{Distrib}} \{[x \otimes y \rightarrow x](a \otimes b), [x \otimes y \rightarrow y](a \otimes b)\} \longrightarrow_{\text{Fire}} \\ &\{\{a\}, \{b\}\} \longrightarrow_{\text{Flat}} \{a, b\} \end{aligned}$$

Nous pouvons exprimer le même comportement en utilisant une règle de réécriture avec un membre droit non-déterministe et dans ce cas nous obtenons deux réductions possibles :

$$[x \otimes y \rightarrow \{x, y\}](a \otimes b) \longrightarrow_{\text{Switch}_R} [\{x \otimes y \rightarrow x, x \otimes y \rightarrow y\}](a \otimes b) \longrightarrow \{a, b\}$$

ou

$$[x \otimes y \rightarrow \{x, y\}](a \otimes b) \longrightarrow_{\text{Fire}} \{\{a, b\}\} \longrightarrow_{\text{Flat}} \{a, b\}$$

Le non-déterminisme représenté par un ensemble de résultats peut apparaître non seulement au niveau des règles de réécriture d'une application mais aussi bien au niveau des arguments de l'application. L'argument d'une application peut être un ρ -terme quelconque et en particulier un terme se réduisant en un ensemble. Cet ensemble représente le choix non-déterministe parmi ses éléments et l'application d'une règle de réécriture à l'ensemble est réduite en l'ensemble d'applications de la règle respective à chaque élément.

Exemple 2.16 *Pour le terme $[a \rightarrow b](\{a, b\})$ nous obtenons la réduction*

$$[a \rightarrow b](\{a, b\}) \longrightarrow_{Batch} \{[a \rightarrow b](a), [a \rightarrow b](b)\} \longrightarrow_{Fire} \{\{b\}, \emptyset\} \longrightarrow_{Flat} \{b\}$$

On doit remarquer que dans la réduction du terme ρ -terme $[a \rightarrow b](\{a, b\})$ seuls les résultats des applications ne menant pas à un échec figurent dans le terme final. Nous pouvons ainsi obtenir un résultat déterministe (ensemble avec un seul élément) même si le terme de départ contient des ensembles ayant plus d'un élément ou des termes se réduisant d'une façon non-déterministe (en un ensemble ayant plus d'un élément).

Nous avons insisté dans cette section sur l'application des règles de réécriture mais des ρ -termes plus élaborés peuvent être utilisés dans les applications comme décrit, par exemple, par les règles d'évaluation *Congruence*. Dans la Section 5.2 nous détaillons l'encodage de la réécriture (conditionnelle) de termes et dans la Section 5.4 nous montrons l'utilisation des ρ -termes pour représenter les règles et stratégies du langage ELAN.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit le ρ -calcul en définissant ses composants : la syntaxe, l'application de substitution, le filtrage, les règles d'évaluation et la stratégie d'évaluation. Nous avons discuté nos principaux choix et nous avons présenté des exemples d'utilisation du calcul.

Dans le ρ -calcul l'opérateur d'abstraction est la flèche, l'application est une opération explicite représentée en utilisant l'opérateur $[]()$ et le non-déterminisme est exprimé en utilisant les ensembles de ρ -termes. Nous employons la substitution d'ordre supérieur qui utilise l' α -conversion afin d'éviter la capture des variables. La théorie de filtrage est un paramètre du ρ -calcul et même si dans le cas général nous considérons un filtrage d'ordre supérieur, nous sommes principalement intéressés par les cas décidables. Les règles d'évaluation décrivent l'application des ρ -termes ainsi que le comportement des ensembles par rapport aux autres opérateurs du ρ -calcul. La stratégie d'évaluation guide l'application des règles d'évaluation et elle est utilisée principalement afin d'obtenir certaines propriétés pour le ρ -calcul et en particulier la confluence du calcul.

Nous avons introduit plusieurs instances du ρ -calcul obtenues en remplaçant les paramètres du calcul par certaines valeurs spécifiques. Nous avons présenté la translation de certains λ -termes en des ρ -termes et la manière dont nous pouvons décrire en ρ -calcul des réductions de la réécriture de termes classique. Nous avons aussi montré le pouvoir d'expression des instances du ρ -calcul utilisant une théorie de filtrage équationnelle. Ces travaux ont été présentés aux conférences ASIAN'98 [CK98] et FroCoS'98 [CK99a].

Chapitre 3

Sur la confluence du ρ -calcul

Dans le Chapitre 2 nous avons introduit le ρ_T -calcul général et nous avons mentionné que le calcul n'est pas confluente si les règles d'évaluation sont guidées par la stratégie *NON* qui n'impose aucune restriction. Ce résultat négatif est obtenu même si la théorie T de filtrage est vide.

Nous analysons dans ce chapitre les raisons conduisant à la non-confluence du ρ -calcul et nous proposons plusieurs stratégies confluentes. En partant des exemples simples de réductions non-confluentes nous déduisons les conditions à imposer pour l'application des règles d'évaluation afin d'empêcher de telles réductions non-convergentes. Nous voulons obtenir d'un côté une stratégie simple à exprimer et aussi facile à implanter, et d'un autre côté une stratégie qui n'impose aucune restriction sur les réductions de certaines instances spécifiques du ρ -calcul, comme par exemple la représentation du λ -calcul dans le ρ -calcul.

Dans un premier temps, nous introduisons une stratégie confluente générique en décrivant les réductions interdites. Nous définissons ensuite plusieurs contraintes sur la structure des termes permettant d'éliminer les réductions non-confluentes et donc, d'établir la confluence du calcul. Les conditions imposées sur les termes sont relativement simples mais assez restrictives et dans la dernière section de ce chapitre nous présentons une autre approche où les conditions sur la structure des termes sont plus compliquées mais moins restrictives.

3.1 Le ρ_\emptyset -calcul

Pour une instance spécifique du ρ_T -calcul, il y a un rapport fort entre les termes présents dans le membre gauche d'une règle de réécriture et la théorie T . Intuitivement, la théorie T doit être assez puissante pour permettre suffisamment d'applications de règles de réécriture.

Par exemple, si nous utilisons le filtrage syntaxique, le ρ -terme $[[a \rightarrow c](a) \rightarrow a]([b \rightarrow c](b))$ est réduit par la règle *Fire* appliquée à la position de tête en l'ensemble vide. Si nous commençons par évaluer les deux applications $[a \rightarrow c](a)$ et $[b \rightarrow c](b)$ en $\{c\}$ et si les ensembles sont ensuite distribués en utilisant les règles d'évaluation du ρ -calcul, alors nous obtenons comme résultat de l'application initiale le terme $\{[c \rightarrow a](c)\}$ qui est ensuite réduit en $\{a\}$.

Afin d'obtenir la confluence du calcul nous pouvons demander que la règle d'évaluation *Fire* soit appliquée sur un terme $[l \rightarrow r](t)$ seulement si les termes l et t sont des termes du premier ordre, i.e. $l, t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$. De cette manière nous garantissons que le résultat \emptyset est la conséquence d'une incompatibilité (du premier ordre) entre les termes l et t et pas d'une évaluation incomplète d'un des deux termes.

Il semble plus intéressant d'utiliser le filtrage d'ordre supérieur au lieu du filtrage syntaxique

quand les membres gauches des règles contiennent des abstractions et des applications. Si nous utilisons une théorie T d'ordre supérieur, alors le terme $[[a \rightarrow c](a) \rightarrow a]([b \rightarrow c](b))$ peut être réduit directement par la règle *Fire* dans le terme $\{a\}$. Mais la complexité du calcul et donc de l'analyse de la confluence sont fortement influencées par la complexité de cette théorie de filtrage.

Puisque le ρ_T -calcul est très général, nous nous limitons dans l'analyse de la confluence au ρ_\emptyset -calcul que nous définissons comme le ρ -calcul où la théorie de filtrage est limitée au filtrage syntaxique du premier ordre. Nous obtenons la définition du ρ_\emptyset -calcul comme une instance de la Définition 2.7 :

Définition 3.1 *Etant donné un ensemble de symboles de fonctions \mathcal{F} , un ensemble de variables \mathcal{X} , nous appelons ρ_\emptyset -calcul un calcul défini par :*

- un sous-ensemble $\varrho_\emptyset(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ de l'ensemble de termes $\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ tel que toutes les règles de réécriture soient de la forme $l \rightarrow r$ avec $l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$,
- l'application (d'ordre supérieur) de substitution aux termes,
- la théorie \emptyset (filtrage syntaxique),
- les règles d'évaluation *Fire*, *Congruence*, *Congruence_fail*, *Distrib*, *Batch*, *Switch_L*, *Switch_R*, *OpOnSet*, *Flat*,
- une stratégie d'évaluation \mathcal{S} qui guide l'application des règles d'évaluation.

Nous obtenons donc le calcul $\rho_\emptyset = (\varrho_\emptyset(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \emptyset, \mathcal{S})$ où la stratégie \mathcal{S} n'est pas encore précisée.

Puisque toutes les règles de réécriture du ρ_\emptyset -calcul ont comme membre gauche un terme du premier ordre, nous pouvons remarquer immédiatement que la règle d'évaluation *Switch_L* ne sera jamais utilisée. Pour permettre l'extension facile du ρ_\emptyset -calcul à un calcul avec un ensemble de termes étendu, nous considérerons la règle d'évaluation *Switch_L* dans les preuves et nous préciserons explicitement les points où la restriction aux termes de $\varrho_\emptyset(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ est nécessaire.

Puisque le filtrage syntaxique du premier ordre est unitaire, la méta-règle *Propagate* présentée dans la Section 2.6.1 donne toujours comme résultat un singleton $\{\sigma r\}$ ou l'ensemble vide. Par conséquent, la règle d'évaluation *Fire* peut être remplacée par la règle :

$$\text{Fire}_\emptyset \quad [l \rightarrow r](t) \implies \{\sigma r\} \\ \text{avec } \sigma \in \text{Solution}(l \ll_\emptyset^? t)$$

Si le filtrage $l \ll_\emptyset^? t$ échoue alors, il n'existe pas de substitution σ et le résultat de l'application de la règle *Fire_{empty}* est l'ensemble vide. Nous pouvons simplifier encore plus cette règle en définissant explicitement les cas d'échec et de succès par les deux règles suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{Fire}' & [l \rightarrow r](\sigma l) \implies \{\sigma r\} \\ \text{Fire}'' & [l \rightarrow r](t) \implies \emptyset \end{array} \\ \text{si il n'existe aucune substitution } \sigma \text{ telle que } \sigma l = t$$

Le cas des théories équationnelles finitaires décidables est plus technique mais est conceptuellement similaire au cas de la théorie vide. Le cas des théories avec des problèmes de filtrage infinitaires ou indécidables pourrait être traitée sans difficultés majeures initiales en utilisant des ρ -termes contraints dans l'esprit de [KKR90].

Dans les sections suivantes nous analysons les problèmes liés à la confluence du ρ_\emptyset -calcul en présentant d'abord des exemples de réductions non-confluentes dans le cas où les règles d'évaluation sont guidées par la stratégie \mathcal{NONE} et nous proposons ensuite des stratégies permettant d'obtenir la confluence.

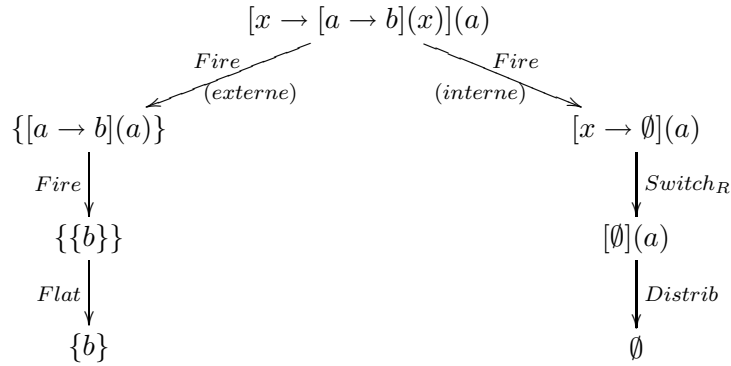
3.2 La non-confluence du calcul de réécriture de base

Il est facile de remarquer que le ρ_0 -calcul n'est pas confluente et nous fournissons dans cette section des exemples typiques de dérivations non-confluentes.

Une première raison de la non-confluence est le conflit entre l'utilisation du filtrage syntaxique et la représentation des résultats des réductions par des ensembles. Ceci mène, d'une part, à des échecs de filtrage indésirables dus aux termes qui ne sont pas complètement évalués ou pas encore instanciés. D'autre part, nous pouvons avoir soit des ensembles ayant plus d'un élément qui peuvent mener à des résultats indésirables dans un contexte non linéaire, soit des ensembles vides qui ne sont pas strictement propagés.

Un premier exemple de non-confluence est obtenu si nous réduisons un (sous-)terme de la forme $[l \rightarrow r](t)$ en filtrant l et t et le filtrage échoue :

Exemple 3.1 [*Variable potentiellement instanciée*]

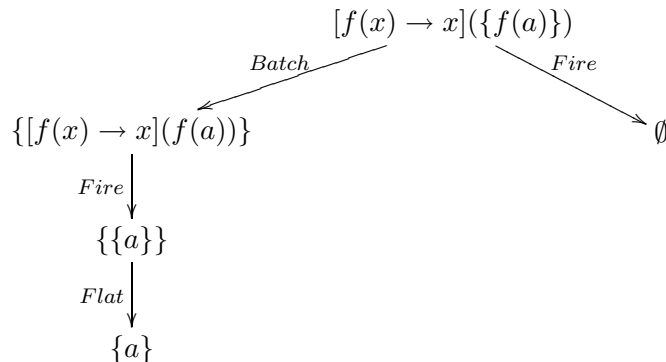


Dans l'évaluation du radical $[a \rightarrow b](x)$ le filtrage $a \ll_0^? x$ échoue, menant au résultat \emptyset . Par contre, dans le radical extérieur, le filtrage $x \ll_0^? a$ réussit et le résultat de l'application permet de filtrer maintenant $a \ll_0^? a$ qui réussit et a comme résultat la substitution identité.

Dans l'Exemple 3.1 on peut remarquer qu'un terme peut être réduit en un ensemble vide à cause d'un échec de filtrage impliquant ses variables liées. Un résultat différent de l'ensemble vide peut être obtenu si les réductions des sous-termes contenant les variables respectives sont effectuées après l'instanciation de ces variables.

Une situation similaire est obtenue lorsque la règle d'évaluation *Fire* engendre un résultat \emptyset par suite d'un échec de filtrage et l'application d'une autre règle d'évaluation avant la règle *Fire* mène à un résultat non vide. Dans l'Exemple 3.2 nous illustrons ce comportement en commençant l'évaluation soit par la règle d'évaluation *Fire* soit par la règle d'évaluation *Batch*.

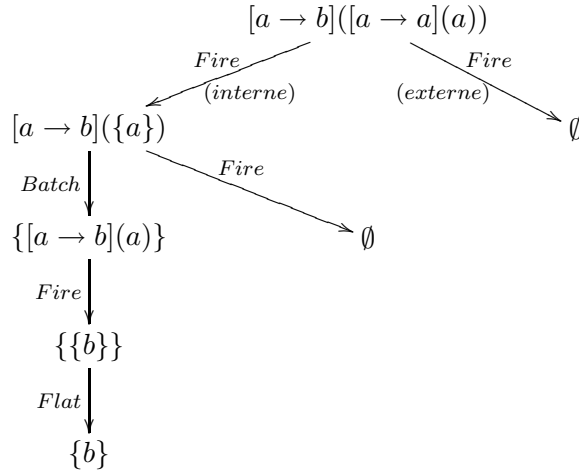
Exemple 3.2 [*Terme non réduit*]



Le filtrage $f(x) \ll_{\emptyset}^? \{f(a)\}$ échoue mais le filtrage $f(a) \ll_{\emptyset}^? f(a)$ réussit et ainsi, nous obtenons deux réductions non-convergentes.

Dans les exemples précédents les réductions non-confluentes d'un terme sont provoquées par le filtrage qui peut soit échouer, si la première étape de la réduction est l'application de la règle *Fire*, soit réussir, si une autre réduction est effectuée avant l'application de la règle *Fire*. Une situation similaire survient si un échec de filtrage est obtenu du à un sous-terme non réduit de l'argument de l'application et le filtrage réussit quand le sous-terme est réduit. Dans ce cas, des exemples de non-confluence peuvent être facilement trouvés :

Exemple 3.3 [*Sous-terme non réduit*]



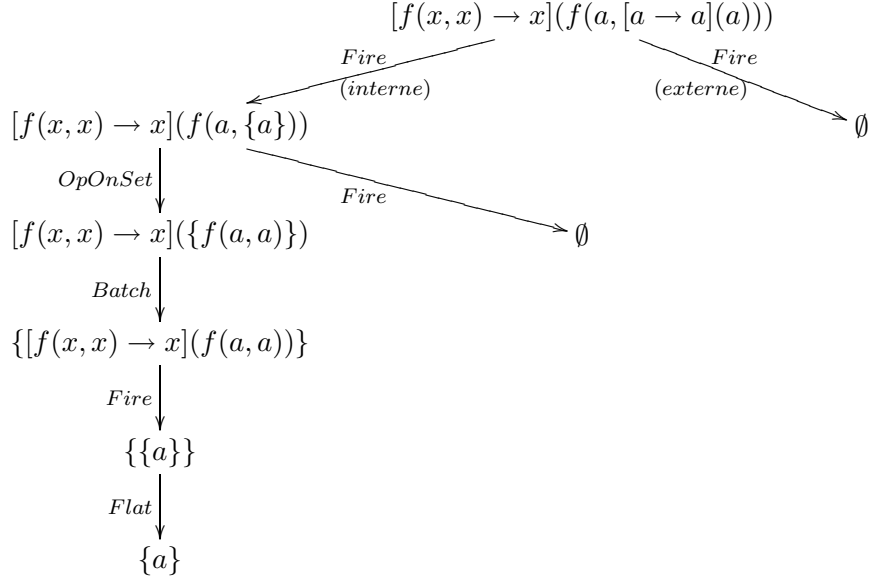
Les filtrages $a \ll_{\emptyset}^? [a \rightarrow a](a)$ et $a \ll_{\emptyset}^? \{a\}$ échouent mais le filtrage $a \ll_{\emptyset}^? a$ réussit et ainsi, nous obtenons une réduction avec un résultat qui ne peut pas être réduit en \emptyset .

Afin d'éviter ce genre de situation nous ne devrions pas permettre la réduction d'une application de la forme $[l \rightarrow r](t)$ lorsque l'échec du filtrage entre les termes l et t est causé par les règles de filtrage *SymbolVariableClash* (Exemple 3.1) ou *SymbolClash* (Exemple 3.2, 3.3) mais il existe dans t des variables qui ne sont pas instanciées ou il existe certains sous-termes (stricts ou non) de t qui soient des ensembles ou qui ne soient pas suffisamment réduits.

Les règles de filtrage *SymbolVariableClash* et *SymbolClash* ne seraient jamais appliquées dans les conditions précédentes si l'ensemble de positions fonctionnelles du terme l était un sous-ensemble de l'ensemble de positions fonctionnelles du terme t . Ce n'est pas le cas dans l'Exemple 3.1 où, dans le terme $[a \rightarrow b](x)$, la position de a est une position fonctionnelle et la position correspondante dans l'argument de l'application est la position variable de x . Dans l'Exemple 3.2 et dans l'Exemple 3.3 une position fonctionnelle dans le membre gauche de la règle de réécriture correspond à un ensemble et à une application respectivement dans le terme à filtrer et la condition n'est pas satisfaite.

Par conséquent, nous pourrions considérer que la règle d'évaluation *Fire* est appliquée seulement quand la condition sur les positions fonctionnelles est satisfaite. Malheureusement, une telle condition ne suffira pas pour éviter un échec indésirable du filtrage à cause de l'application de la règle de filtrage *MergingClash* quand le terme l n'est pas linéaire, comme montré dans l'exemple suivant :

Exemple 3.4 [*Non-linéarité à gauche*]

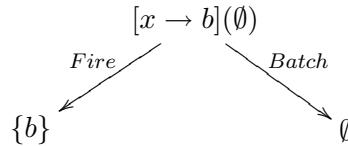


L'ensemble de positions fonctionnelles du terme $f(x, x)$ est un sous-ensemble de l'ensemble de positions fonctionnelles du terme $f(a, [a \rightarrow a](a))$ mais le filtrage $f(x, x) \ll_{\emptyset}^? f(a, [a \rightarrow a](a))$ échoue et le terme est réduit en \emptyset . Similairement, le filtrage $f(x, x) \ll_{\emptyset}^? f(a, \{a\})$ échoue menant à \emptyset .

Dans l'Exemple 3.4 la présence des ensembles dans le terme t peut conduire à un échec de filtrage qui est évité si les ensembles sont distribués avant l'application de la règle d'évaluation *Fire*. De la même manière, des variables non-instanciées ou des termes insuffisamment réduits peuvent engendrer des échecs de filtrage qui peuvent être évités si les variables sont instanciées et les termes réduits. Ainsi, une condition suffisante pour assurer le comportement désiré imposerait que l'argument de l'application soit un terme du premier ordre clos.

Un autre cas pathologique survient quand le terme t de l'application $[l \rightarrow r](t)$ contient un ensemble vide. Plus précisément, l'application de la règle d'évaluation *Fire* peut mener à la non-propagation de l'échec et ainsi, à la non-confluence du calcul, comme dans l'Exemple 3.5.

Exemple 3.5 [*Propagation non stricte de l'échec*]



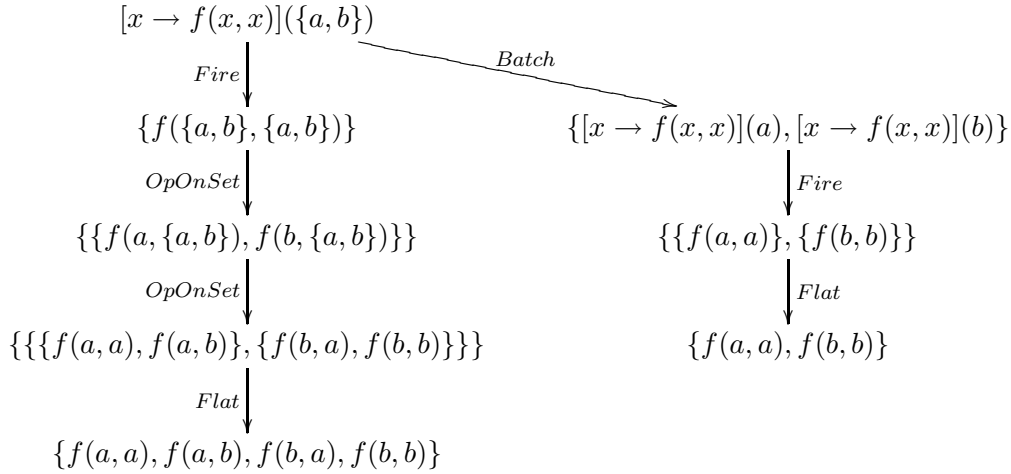
Un comportement similaire à celui présenté dans l'Exemple 3.5 est obtenu si l'argument de l'application peut être réduit en un ensemble vide, comme dans le terme $[x \rightarrow b]([a \rightarrow b](b))$ qui peut être réduit en $\{b\}$ ou \emptyset . De la même façon, si l'argument de l'application peut être instancié en un ensemble vide nous obtenons deux résultats non-convergents, comme pour le terme $[y \rightarrow [x \rightarrow b](y)](\emptyset)$ qui mène soit à un ensemble vide soit à $\{b\}$.

Une première approche pour résoudre ce problème consiste à ne pas appliquer la règle d'évaluation *Fire* si l'argument de l'application de la règle de réécriture est l'ensemble vide ou peut être réduit ou instancié en l'ensemble vide. On peut remarquer que la condition d'application de la règle d'évaluation *Fire* est nécessaire seulement dans le cas des règles dites non-régulières, c'est-à-dire telles que les variables libres du membre gauche de la règle de réécriture ne soient pas libres dans le membre droit de la règle. Par exemple, le terme $[x \rightarrow x](\emptyset)$ sera toujours réduit en \emptyset indépendamment de la règle d'évaluation utilisée.

L'application de règles de réécriture non-régulières à des ensembles vides peut donc mener à des réductions non-convergentes. Des échecs de filtrage indésirables et donc des réductions non-confluentes peuvent être obtenus si des ensembles avec un (ou plusieurs) élément(s) sont présents dans l'argument d'une application. Les ensembles ayant plus d'un élément peuvent mener également à des réductions non-convergentes s'ils apparaissent dans un contexte non-linéaire.

En effet, en appliquant une règle de réécriture non-linéaire à droite sur un terme qui contient des ensembles ayant plus d'un élément, nous obtenons des réductions non-convergentes comme dans l'exemple suivant :

Exemple 3.6 [*Non-linéarité à droite*]



On peut remarquer qu'un comportement similaire à celui présenté dans l'Exemple 3.6 est obtenu si l'argument de l'application de la règle de réécriture peut être réduit ou instancié en un ensemble ayant plus d'un élément, comme pour les termes $[x \rightarrow f(x, x)]([a \rightarrow \{a, b\}](a))$ ou $[y \rightarrow [x \rightarrow f(x, x)](y)](\{a, b\})$.

La solution immédiate pour éviter des réductions non-convergentes comme celles présentées dans l'Exemple 3.6 consiste à ne pas appliquer la règle d'évaluation *Fire* si l'argument de l'application est un ensemble ayant plus d'un élément ou si l'argument peut être réduit ou instancié en un ensemble ayant plus d'un élément. Cette restriction peut être allégée en imposant la condition sur l'argument de l'application seulement quand la règle de réécriture de l'application est non-linéaire à droite.

Pour résumer les problèmes présentés dans les exemples de cette section, la non-confluence est due à l'application de la règle d'évaluation *Fire* trop tôt dans une réduction et les situations typiques que nous voulons éviter sont :

- l'application prématurée de la règle d'évaluation *Fire* pour une application contenant des variables non-instanciées (Exemple 3.1),
- l'application prématurée de la règle d'évaluation *Fire* pour une application contenant des termes non-réduits (Exemple 3.2, Exemple 3.3),
- l'application prématurée de la règle d'évaluation *Fire* pour une application contenant une règle de réécriture non-linéaire à gauche (Exemple 3.4),
- l'application de la règle d'évaluation *Fire* pour l'application d'une règle de réécriture (non-linéaire à droite) à un terme contenant un ensemble ayant plus d'un élément (Exemple 3.6),

- l'application de la règle d'évaluation *Fire* pour l'application d'une règle de réécriture (ne conservant pas les variables du membre gauche dans le membre droit) à un terme contenant l'ensemble vide (Exemple 3.5).

3.3 Stratégies confluentes pour le ρ_0 -calcul

Comme nous venons de le voir, le calcul n'est pas confluent si aucune stratégie n'est employée pour guider l'application des règles d'évaluation. Mais la confluence peut être obtenue avec une stratégie appropriée d'évaluation. En particulier, cette stratégie devrait imposer que la propagation de l'échec dans les termes soit stricte et que les variables non-linéaires des termes ne soient pas instanciées par des ensembles ayant plus d'un élément.

3.3.1 Premières stratégies

Nous avons vu dans la section précédente que la possibilité d'avoir des ensembles vides ou ayant plusieurs éléments mène immédiatement à des réductions non-confluentes impliquant les règles d'évaluation *Fire* et *Congruence*. Une première approche envisagée consiste à réduire un ρ -terme en appliquant d'abord toutes les règles manipulant des ensembles (*Distrib*, *Batch*, *Switch_L*, *Switch_R*, *OpOnSet*, *Flat*) et seulement quand aucune de ces règles ne s'applique plus, appliquer une des règles *Fire*, *Congruence*, *Congruence_fail* à des termes ne contenant pas d'ensemble.

Mais une application peut être réduite, en utilisant la règle *Fire*, en un ensemble vide ou ayant plusieurs éléments générant ainsi des éventuelles réductions non-confluentes et donc, cette stratégie n'est pas suffisante pour assurer la confluence du calcul. Un autre inconvénient de cette approche est que pour aucune instance du ρ -calcul la stratégie proposée ne se réduit pas à la stratégie triviale \mathcal{NONE} .

Puisque les ensembles (vide ou ayant plus d'un élément) sont la cause principale de la non-confluence du calcul, une stratégie naturelle consiste à réduire l'application d'une règle de réécriture en un terme en respectant les étapes suivantes : instancier et réduire d'abord l'argument de l'application, faire monter les symboles d'ensemble à l'extérieur de l'application en les distribuant dans les termes et seulement lorsqu'aucune des réductions précédentes n'est possible, appliquer la règle d'évaluation *Fire*. Nous pouvons exprimer facilement cette stratégie en imposant une condition simple pour l'application de la règle d'évaluation *Fire*.

Définition 3.2 Nous appelons *ConfStratStrict* la stratégie qui consiste à appliquer la règle d'évaluation *Fire* à un radical $[l \rightarrow r](t)$ seulement si le terme t est un terme clos du premier ordre.

La stratégie *ConfStratStrict* est très restrictive et nous voudrions définir une stratégie plus générale qui devient triviale (c'est-à-dire n'impose aucune restriction) pour des restrictions du ρ_0 -calcul général à des calculs plus simples comme le λ -calcul.

Nous proposons maintenant une stratégie qui émerge des contre-exemples présentés dans la Section 3.2 et qui permet l'application de la règle d'évaluation *Fire* seulement si un éventuel échec dans le filtrage est préservé par les ρ -réductions et l'argument de l'application ne peut pas être réduit en un ensemble vide ou ayant plus d'un élément.

Définition 3.3 Nous appelons *ConfStratGen* la stratégie qui consiste à appliquer la règle d'évaluation *Fire* à un radical $[l \rightarrow r](t)$ seulement si :

- $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est un terme clos du premier ordre

ou

- le terme t est tel que si le filtrage $l \ll_0^? t$ échoue alors pour tout terme t' obtenu en instanciant ou ρ -réduisant t le filtrage $l \ll_0^? t'$ échoue et
- le terme t ne peut pas être ρ -réduit en un ensemble vide ou ayant plus d'un élément.

Si nous considérons une instance du ρ_0 -calcul telle que tous les ensembles soient des singletons et toutes les applications soient de la forme $[x \rightarrow u](v)$ alors, toutes les conditions de la Définition 3.3 sont toujours satisfaites et ainsi, nous pouvons dire que dans ce cas la stratégie *ConfStratGen* est équivalente à la stratégie *NONÉ*, c'est-à-dire n'impose aucune restriction sur les réductions. On peut remarquer que les termes de la représentation du λ -calcul pur dans le ρ -calcul satisfont la condition précédente et donc, la stratégie *ConfStratGen* n'impose aucune restriction sur les réductions de cette instance du ρ -calcul.

Les conditions imposées dans la Définition 3.3 dans le cas où le terme t n'est pas un terme clos du premier ordre ne sont clairement pas utilisables dans une implantation du ρ -calcul et donc nous devons définir des stratégies opérationnelles garantissant la confluence du calcul. Dans les sections suivantes nous allons définir des restrictions structurelles sur les ρ -termes et des stratégies confluentes définies en utilisant ces notions.

3.3.2 Termes ρ -préfiltrables, ρ -safes et ρ -calculables

Dans les exemples présentés dans la Section 3.2 nous avons vu que l'application de la règle d'évaluation *Fire* à un terme peut mener à des résultats non-confluents si le terme respectif n'est pas suffisamment réduit. Afin de résoudre ce problème, dans la Définition 3.3 nous avons imposé une condition générale de “filtrage cohérent” pour les termes l et t mais nous voulons définir des conditions qui peuvent être implantées facilement et efficacement.

Nous introduisons maintenant une définition plus opérationnelle et plus restrictive garantissant la “cohérence” du filtrage en imposant des conditions structurelles sur les termes l et t pouvant apparaître dans un problème de filtrage $l \ll_0^? t$. Afin d'assurer la préservation d'un éventuel échec de filtrage par les ρ -réductions, l'échec doit être généré seulement par des symboles du premier ordre différents dans les positions correspondantes des deux termes. Cette propriété est toujours vérifiée si les deux termes sont des termes du premier ordre mais une condition supplémentaire doit être imposée si le terme t contient des symboles du ρ -calcul.

Définition 3.4 Un ρ -terme l subsume faiblement un ρ -terme t si

$$\forall p \in \mathcal{FPos}(l) \cap \mathcal{Pos}(t) \Rightarrow t(p) \in \mathcal{F}$$

Ainsi, un ρ -terme l subsume faiblement un ρ -terme t si pour toute position fonctionnelle du terme l , soit cette position n'est pas une position du terme t , soit elle est une position fonctionnelle du terme t .

Remarque 3.1 Si $l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ subsume faiblement t , alors pour toute position non-fonctionnelle (i.e. la position d'une variable, d'une application, d'une abstraction ou d'un ensemble) dans t la position correspondante dans l , si elle existe, est une position variable. Ainsi, si la position de tête de t n'est pas une position fonctionnelle alors l est une variable.

On peut aussi remarquer que si un terme l du premier ordre subsume un terme t alors l subsume faiblement t .

Exemple 3.7 Le terme $f(a, y, c)$ subsume faiblement le terme $g(b, [x \rightarrow x](c))$ et le terme $f(a)$ subsume faiblement le terme $g(b, [x \rightarrow x](c))$. Le terme $f(a, y)$ subsume faiblement le terme $g(b, [x \rightarrow x](c))$ mais le terme $f(a)$ ne subsume pas faiblement le terme $g([x \rightarrow x](c))$.

Définition 3.5 Le couple de ρ -termes (l, t) est ρ -préfiltrable si $l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ est un terme du premier ordre et :

- le terme $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est un terme clos du premier ordre ou,
- le terme $l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ est linéaire et le terme l subsume faiblement le terme t .

Par abus de langage nous disons que les ρ -termes l et t sont ρ -préfiltrables.

Il est clair que pour tout terme l de la forme $f(l_1, \dots, l_n)$ et tout terme t de la forme $t = g(t_1, \dots, t_m)$ tels que l, t soient ρ -préfiltrables, les termes l_i, t_i sont ρ -préfiltrables pour tout $i = 1, \dots, \min(m, n)$.

Remarque 3.2 Si les termes l et t sont ρ -préfiltrables, conformément à la Remarque 3.1 le filtrage $l \ll_{\emptyset}^? t$ ne peut pas échouer à cause de l'application des règles de filtrage *SymbolClash* ou *SymbolVariableClash* (Figure 2.1) pour un symbole non-fonctionnel de t . Puisque l est linéaire le filtrage $l \ll_{\emptyset}^? t$ ne peut pas échouer à cause de l'application de la règle de filtrage *MergingClash*. Ainsi, le filtrage $l \ll_{\emptyset}^? t$ peut échouer seulement à cause de l'application de la règle de filtrage *SymbolClash* et donc, du à des symboles fonctionnels différents à la même position des termes l et t .

Lemme 3.1 Etant donnés les termes ρ -préfiltrables l, t . Si le filtrage $l \ll_{\emptyset}^? t$ échoue alors pour tout terme t' obtenu en ρ -réduisant ou instanciant le terme t , le filtrage $l \ll_{\emptyset}^? t'$ échoue.

Preuve : Si le terme $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est un terme clos du premier ordre alors $t' = t$ et le lemme est clairement vrai. Pour le cas où $t \notin \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ nous procédons par induction sur la structure du ρ -terme t . Dans ce cas, conformément à la Remarque 3.2, le filtrage $l \ll_{\emptyset}^? t$ peut échouer seulement à cause de deux symboles de fonctions différents à la même position des deux termes.

Si $t = f(t_1, \dots, t_m)$ et $l = g(l_1, \dots, l_n)$ avec $f \neq g$ alors le terme t' ne peut être que de la même forme que t ou un ensemble. Dans les deux cas le filtrage $l \ll_{\emptyset}^? t'$ échoue. Si $t = f(t_1, \dots, t_m)$ et $l = f(l_1, \dots, l_m)$ alors l_i, t_i sont ρ -préfiltrables et $t = f(t'_1, \dots, t'_m)$ avec t'_i obtenus en ρ -réduisant ou instanciant les termes t_i . Puisque $l \ll_{\emptyset}^? t$ échoue, un des filtrages $l_i \ll_{\emptyset}^? t_i$ échoue et par induction le filtrage $l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i$ correspondant échoue et donc $l \ll_{\emptyset}^? t'$ échoue. \square

Un premier pas pour obtenir un calcul confluent est la réduction du terme $[l \rightarrow r](t)$ en filtrant l et t seulement si l et t sont ρ -préfiltrables. Nous pouvons remarquer dans l'Exemple 3.6 et dans l'Exemple 3.5 que cette condition ne suffit pas pour établir la confluence du calcul et nous devons ajouter certaines conditions (structurelles) afin d'éviter les réductions non-confluentes.

Comme nous l'avons déjà remarqué dans la Section 3.2, les contraintes sur la réduction de l'application des règles de réécriture doivent garantir qu'une règle de réécriture (non-régulière) n'est pas appliquée à (un terme réductible en) un ensemble vide et qu'une règle de réécriture (non-linéaire à droite) n'est pas appliquée à (un terme réductible en) un ensemble ayant plus d'un élément. Nous pouvons être encore plus restrictifs et ne pas permettre la réduction d'une application $[l \rightarrow r](t)$ en utilisant la règle d'évaluation *Fire* si le terme t est réductible en un ensemble vide ou à un ensemble ayant plus d'un élément.

Définition 3.6 Nous disons que le ρ -terme t est ρ -safe si les conditions suivantes sont satisfaites :

- le terme t ne contient aucun ensemble ayant plus d'un élément et aucun ensemble vide et,
- le terme t ne contient pas de sous-terme de la forme $[u](v)$ où u n'est pas une abstraction et,

– pour tout sous-terme $[u \rightarrow w](v)$ de t , u subsume v .

Si tous les termes du codomaine d'une substitution σ sont ρ -safes, nous disons que σ est ρ -safe.

Intuitivement, la première condition permet seulement des ensembles avec un élément dans le terme t et les deux dernières interdisent la présence dans t des termes pouvant se réduire en \emptyset .

Lemme 3.2 *Etant donné le terme ρ -safe t . Alors, le terme t ne peut pas être ρ -réduit en un ensemble vide ou ayant plus d'un élément.*

Preuve : Le terme t ne contient aucun ensemble ayant plus d'un élément et aucun ensemble vide et donc, t peut être ρ -réduit en tel ensemble seulement en utilisant les règles d'évaluation *Fire* ou *Congruence_fail*. Mais toute application de t est de la forme $[u \rightarrow w](v)$ ou u subsume v et donc la règle *Fire* ne peut pas mener à un échec et la règle *Congruence_fail* ne peut pas être appliquée. Puisque le filtrage est syntaxique et donc unitaire dans le ρ_0 -calcul, la règle *Fire* ne peut pas mener à un ensemble ayant plus d'un élément. En plus, la forme des applications est préservée par la ρ -réduction et donc, la propriété est vérifiée. \square

Définition 3.7 *Le couple de ρ -termes (l, t) est ρ -calculable si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- les termes l, t sont ρ -préfiltrables et
- le terme t est ρ -safe.

Par abus de langage nous disons que les ρ -termes l et t sont ρ -calculables.

Ainsi, la première condition assure la préservation de l'échec de filtrage par rapport aux ρ -réductions tandis que la deuxième condition permet seulement des termes qui ne peuvent pas être ρ -réduits en un ensemble vide ou ayant plus d'un élément.

Suivant la définition des termes ρ -calculables nous déduisons immédiatement des propriétés pour les substitutions obtenues comme résultat du filtrage impliquant de tels termes.

Proposition 3.1 *Etant donnés les termes ρ -calculables l, t , si $\sigma l = t$, alors σ est ρ -safe.*

Proposition 3.2 *Etant donnés des termes l, t ρ -calculables et une substitution σ ρ -safe, les termes $l, \sigma t$ sont ρ -calculables.*

3.3.3 Une stratégie opérationnelle

Les notions de termes ρ -préfiltrables et ρ -safes nous permettent de faire une distinction claire entre les problèmes menant à la non-confluence du ρ_0 -calcul sans stratégie : d'une part, le conflit entre l'utilisation du filtrage syntaxique et les termes d'ordre supérieur qui peuvent intervenir dans les problèmes de filtrage et d'autre part, le traitement du non-déterminisme représenté par des ensembles vides ou ayant plus d'un élément.

Nous introduisons une stratégie appelée *ConfStrat* qui consiste à appliquer la règle d'évaluation *Fire* à un terme de la forme $[l \rightarrow r](t)$ seulement quand les termes l, t sont ρ -calculables. Cette stratégie peut être vue comme une version opérationnelle de la stratégie *ConfStratGen* introduite dans la Section 3.3.1 et afin de mettre en évidence les similitudes avec cette stratégie et avec les stratégies définies plus tard dans la Section 3.4 nous explicitons les notions de termes ρ -calculables, ρ -préfiltrables et ρ -safes :

Définition 3.8 *Nous appelons *ConfStrat* la stratégie qui consiste à appliquer la règle d'évaluation *Fire* à un radical $[l \rightarrow r](t)$ seulement si :*

- $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est un terme clos du premier ordre

ou

- le terme $l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ est linéaire et le terme l subsume faiblement le terme t et,
- le terme t ne contient aucun ensemble ayant plus d'un élément et aucun ensemble vide et,
- pour tout sous-terme $[u \rightarrow w](v)$ de t , u subsume v et,
- le terme t ne contient pas de sous-terme de la forme $[u](v)$ où u n'est pas une abstraction.

On doit remarquer que les conditions imposées par la stratégie *ConfStrat* sont décidables même dans le cas où le terme t n'est pas un terme clos du premier ordre. On peut clairement décider si un terme est de la forme $[u](v)$ ou $[u \rightarrow w](v)$ ainsi que le nombre d'éléments d'un ensemble fini. La condition que l subsume faiblement t est simplement une condition sur les symboles aux mêmes positions des deux termes et puisque le filtrage est syntaxique alors la condition de subsomption est aussi décidable. Par conséquent, toutes les conditions utilisées dans la stratégie *ConfStrat* sont décidables.

L'interdiction d'avoir des sous-termes de t de la forme $[u](v)$ si u n'est pas une règle de réécriture est imposée afin d'empêcher des réductions en un ensemble vide en utilisant la règle d'évaluation *Congruence_fail*. Si on considère une version du ρ_0 -calcul sans les règles d'évaluation *Congruence* alors cette dernière condition n'est plus nécessaire dans la stratégie *ConfStrat*. Dans ce cas tous les termes de la représentation du λ -calcul dans le ρ -calcul satisfont les conditions de la stratégie *ConfStrat* et dans ce cas cette stratégie est équivalente à la stratégie *NONÉ*.

Théorème 3.1 *Si la stratégie d'évaluation ConfStrat est utilisée alors, le ρ_0 -calcul est confluent.*

Preuve : Nous donnons dans la Section 3.3.7 la preuve de la confluence pour le ρ_0 -calcul avec la règle d'évaluation *Fire* transformée dans une règle conditionnelle. Les conditions de cette règle sont exactement les conditions de la Définition 3.8 et ainsi, les réductions dans le calcul utilisant la règle *Fire* conditionnelle et dans le ρ_0 -calcul avec les règles d'évaluation guidées par la stratégie *ConfStrat* sont identiques. \square

Dans le cas des calculs intégrant des réductions modulo une théorie équationnelle (par exemple associativité et commutativité), comme exemplifié dans la Section 2.10, la preuve de la confluence est plus compliquée et dépend fortement des propriétés (décidabilité, ensemble fini de solutions, etc.) de la théorie de filtrage utilisée.

3.3.4 Les relations induites par les règles d'évaluation

Chaque fois qu'un ρ -terme est réduit en utilisant les règles d'évaluation *Fire*, *Congruence* et *Congruence_fail* du ρ_0 -calcul, un ensemble est produit. Ces règles d'évaluation sont celles qui décrivent l'application d'une règle de réécriture à la position de tête ou plus profondément dans un terme. L'ensemble obtenu en utilisant une de ces trois règles d'évaluation peut déclencher l'application des autres règles d'évaluation du calcul. Les règles d'évaluation traitant la propagation des ensembles calculent “une forme normale d'ensemble” pour les ρ -termes en poussant vers l'extérieur les symboles d'ensemble et en aplatissant les ensembles. Par exemple, l'application d'un ensemble à un ρ -terme est évaluée en l'ensemble d'applications de chacun des éléments de l'ensemble au ρ -terme respectif.

Par conséquent, nous pouvons considérer que l'ensemble des règles d'évaluation du ρ_T -calcul est la réunion d'un ensemble de règles de *déduction* (*Fire*, *Congruence*, *Congruence_fail*)

et d'un ensemble de règles de *calcul* (*Distrib*, *Batch*, *Switch_L*, *Switch_R*, *OpOnSet*, *Flat*) et que l'évaluation se comporte comme dans la déduction modulo [DHK98]. Cette approche nous permet de considérer les règles de calcul comme permettant de décrire une congruence modulo sur laquelle les règles de déduction sont appliquées.

Alternativement, nous pouvons considérer la relation habituelle induite par les règles d'évaluation du calcul.

Dans cette section nous définissons une relation induite par la règle *Fire* et les règles *Congruence*, appelée *FireCong*, et une deuxième relation induite par les règles *Distrib*, *Batch*, *Switch_L*, *Switch_R*, *OpOnSet*, *Flat* appelée *Set*. Nous analysons les propriétés des deux relations et des relations obtenues en les composant.

A partir des règles d'évaluation du ρ_0 -calcul définissant la propagation des ensembles sur les ρ -opérateurs et de la règle d'évaluation *Flat* qui aplatit les ensembles et élimine les symboles d'ensemble (redondants) nous définissons la relation *Set*.

Définition 3.9 *Nous considérons la relation sur $\varrho_0(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ appelée *Set* induite par les règles d'évaluation *Distrib*, *Batch*, *Switch_L*, *Switch_R*, *OpOnSet* et *Flat*.*

*Les relations suivantes sont induites par la relation *Set* :*

- \longrightarrow_S est la fermeture compatible de la relation *Set*,
- $\xrightarrow{*}_S$ est la fermeture réflexive, transitive de \longrightarrow_S (la réduction engendrée par *Set*),
- \longleftrightarrow_S est la relation d'équivalence engendrée par $\xrightarrow{*}_S$.

L'application de la règle d'évaluation *Fire* est guidée par une stratégie qui tient compte des conditions présentées dans la section précédente et qui peut être exprimée explicitement en transformant la règle *Fire* dans une règle conditionnelle :

$$\begin{aligned} \text{Fire}_c \quad [l \rightarrow r](t) &\Longrightarrow \{\sigma r\} \\ &\text{si } l, t \text{ sont } \rho\text{-calculables} \\ &\text{avec } \sigma \in \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t) \end{aligned}$$

Définition 3.10 *Nous considérons la relation appelée *FireCong* sur $\varrho_0(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ induite par la règle d'évaluation *Fire_c* et les règles d'évaluation *Congruence* et *Congruence_{fail}*.*

*Nous considérons les relations suivantes induites par les relations *FireCong* et *Set* (Définition 3.9) :*

- \longrightarrow_F est la fermeture compatible de la relation *FireCong*,
- $\xrightarrow{*}_F$ est la fermeture réflexive, transitive de \longrightarrow_F ,
- $\longrightarrow_{F/S}$ est la relation \longrightarrow_F modulo la relation \longleftrightarrow_S définie de façon standard ([ASU72]) : étant donnés deux ρ -termes u, v nous avons $u \longrightarrow_{F/S} v$ ssi il existe deux ρ -termes u', v' tels que $u \longleftrightarrow_S u'$, $u' \longrightarrow_F v'$ et $v \longleftrightarrow_S v'$,
- $\xrightarrow{*}_{F/S}$ est la fermeture réflexive, transitive de $\longrightarrow_{F/S}$.

La relation \longrightarrow_F et toutes les relations induites par cette relation sont définies sur l'ensemble de termes $\varrho_0(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ ne contenant que des règles de réécriture ayant un terme $l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ du premier ordre comme membre gauche. Pour permettre l'extension facile du ρ_0 -calcul à un calcul avec un ensemble de termes étendu, nous considérons, dans les preuves, n'importe quelle forme de règle de réécriture et nous indiquons les situations où la restriction à des termes de $\varrho_0(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ est nécessaire.

3.3.5 Les propriétés des relations Set

Dans cette section nous montrerons que la relation \longrightarrow_S est confluyente et terminante. Nous donnons d'abord une preuve de la terminaison et ensuite nous obtenons la confluence comme une conséquence de la confluence locale.

Lemme 3.3 *La relation \longrightarrow_S termine.*

Preuve : Nous utilisons les interprétations polynômiales suivantes :

$$\begin{aligned} P(\{u_1, \dots, u_n\}) &= \Sigma_{i=1}^n P(u_i) + 2 \quad (P(\emptyset) = 2) \\ P(f(u_1, \dots, u_n)) &= \Pi_{i=1}^n P(u_i) \\ P(u \rightarrow v) &= P([u](v)) = P(u) \times P(v) \end{aligned}$$

Nous utilisons l'ordre standard sur les naturels. Puisque l'addition et la multiplication sont croissantes sur les naturels, la condition de monotonie $a > b$ implique $P(a) > P(b)$ est clairement satisfaite. Nous montrons que pour tous termes t, t' tels que $t \longrightarrow_S t'$, l'image de t est strictement supérieure à celle de t' pour tout remplacement des interprétations des variables de t, t' avec des naturels supérieurs à 2 (i.e. $P(u), P(u_i), P(v), P(v_i) > 2$).

Les inégalités correspondant aux règles *Distrib*, *Batch*, *Switch_L*, *Switch_R*, *OpOnSet* et *Flat* sont présentées ci-dessous :

- les inégalités pour les règles *Distrib* et *Batch* sont similaires et nous présentons uniquement les interprétations pour la règle *Batch* :

$$\begin{aligned} P([u](\{v_1, \dots, v_m\})) &= \\ (P(v_1) + \dots + P(v_m) + 2) \times P(u) &= \\ ((P(v_1) + \dots + P(v_m)) \times P(u) + 2 \times P(u) &> \\ ((P(v_1) + \dots + P(v_m)) \times P(u) + 2 &= \\ = P(v_1) \times P(u) + \dots + P(v_m) \times P(u) + 2 &= \\ = P(\{[u](v_1), \dots, [u](v_m)\}) \end{aligned}$$

- les inégalités pour les règles *Switch_L* et *Switch_R* sont similaires et nous présentons seulement les interprétations pour la règle *Switch_R* :

$$\begin{aligned} P(u \rightarrow \{v_1, \dots, v_m\}) &= \\ (P(v_1) + \dots + P(v_m) + 2) \times P(u) &= \\ (P(v_1) + \dots + P(v_m)) \times P(u) + 2 \times P(u) &> \\ (P(v_1) + \dots + P(v_m)) \times P(u) + 2 &= \\ = P(v_1) \times P(u) + \dots + P(v_m) \times P(u) + 2 &= \\ = P(\{u \rightarrow v_1, \dots, u \rightarrow v_m\}) \end{aligned}$$

- pour la règle *OpOnSet* nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(f(u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m)) &= \\ P(u_1) \times \dots \times (\Sigma_{i=1}^n P(v_i) + 2) \times \dots \times P(u_m) &= \\ P(u_1) \times \dots \times \Sigma_{i=1}^n P(v_i) \times \dots \times P(u_m) + 2 \times P(u_1) \times \dots \times P(u_m) &> \\ P(u_1) \times \dots \times \Sigma_{i=1}^n P(v_i) \times \dots \times P(u_m) + 2 &= \\ = \Sigma_{i=1}^n (P(u_1) \times \dots \times P(v_i) \times \dots \times P(u_m)) + 2 &= \\ = P(\{f(u_1, \dots, v_1, \dots, u_m), \dots, f(u_1, \dots, v_n, \dots, u_m)\}) \end{aligned}$$

– pour la règle *Flat* nous avons :

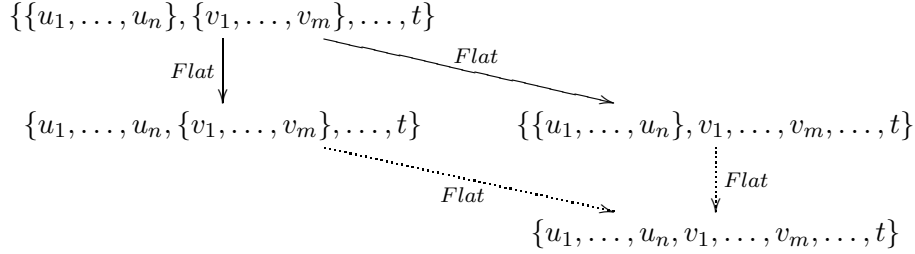
$$\begin{aligned}
 &P(\{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\}) = \\
 &P(u_1) + \dots + (\sum_{i=1}^n P(v_i) + 2) + \dots + P(u_m) + 2 = \\
 &P(u_1) + \dots + \sum_{i=1}^n P(v_i) + \dots + P(u_m) + 4 > \\
 &P(u_1) + \dots + \sum_{i=1}^n P(v_i) + \dots + P(u_m) + 2 \\
 &= P(\{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\})
 \end{aligned}$$

□

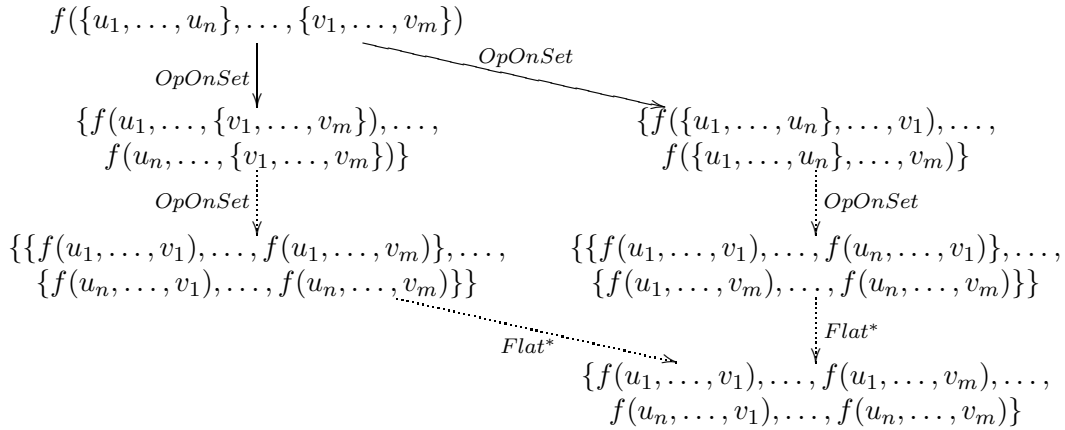
Lemme 3.4 *La relation \longrightarrow_S est localement confluente.*

Preuve : Nous analysons les paires critiques engendrées par les règles d'évaluation.

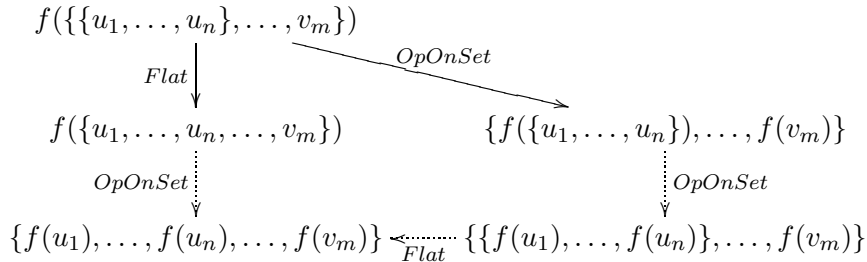
La règle *Flat* a une paire critique avec elle-même :



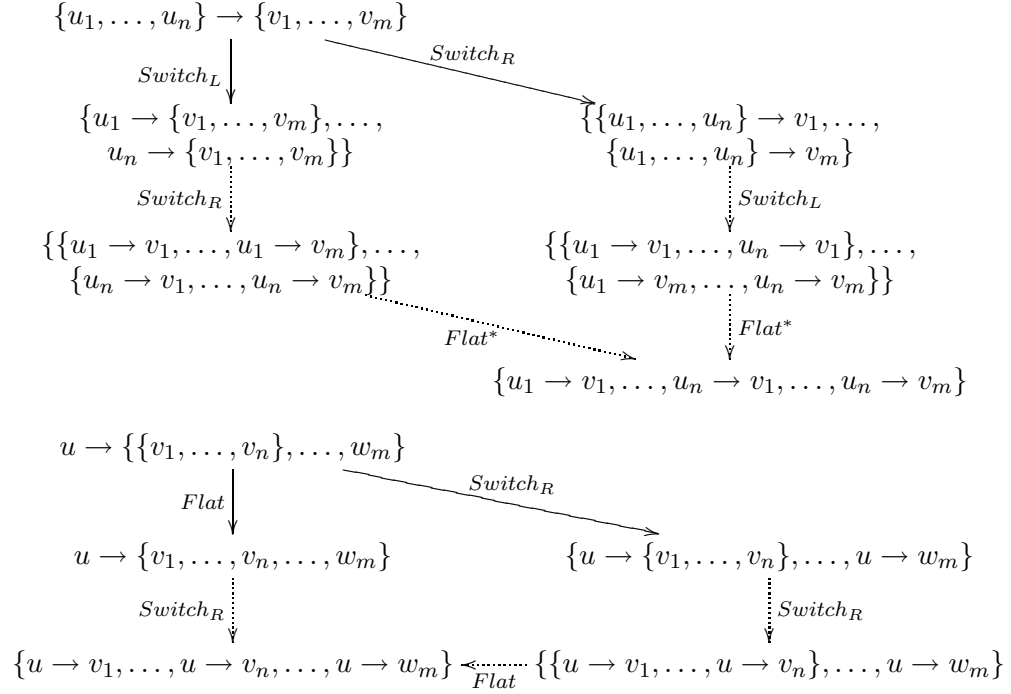
Nous procédons de la même façon pour la règle *OpOnSet* :



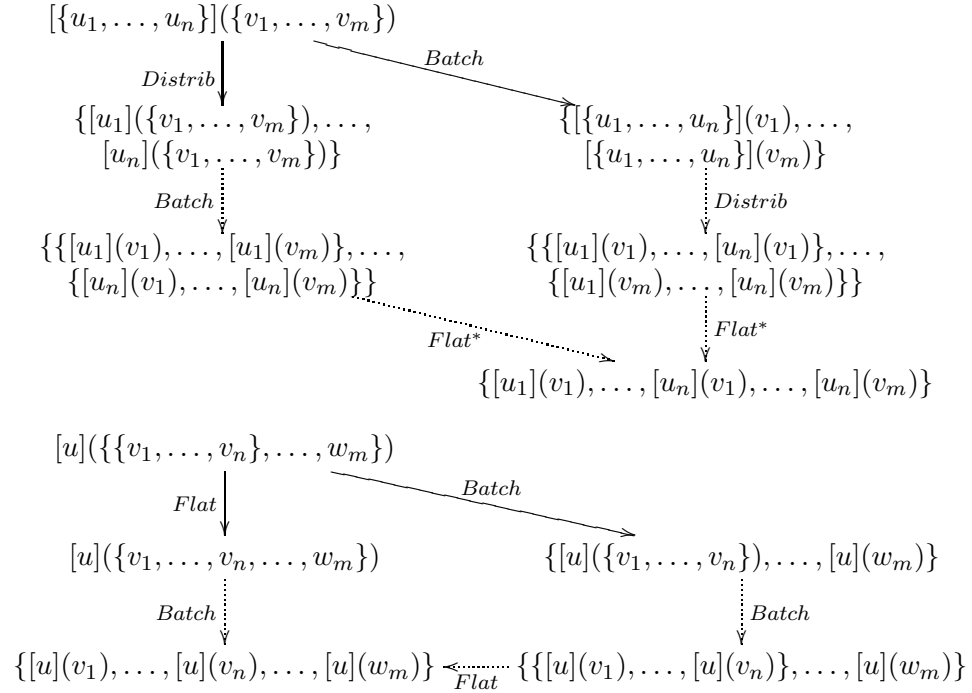
Les règles *OpOnSet* et *Flat* mènent à une paire critique convergente :



Les diagrammes pour les paires critiques de *Switch_L* et *Switch_R* d'une part et *Flat* et *Switch_R* d'autre part sont présentés ci-dessous. Nous pouvons montrer de la même manière la convergence de la paire critique due à *Flat* et *Switch_L*.



Les paires critiques pour les règles *Distrib*, *Batch* et *Flat* sont traitées comme dans les cas précédents :



□

Lemme 3.5 La relation \rightarrow_S est confluente.

Preuve : Puisque \rightarrow_S est terminante (Lemme 3.3) et localement confluente (Lemme 3.4) alors, \rightarrow_S est confluente. □

Corollaire 3.1 La relation \rightarrow_S^* est confluente.

Lemme 3.6 *Les relations \longrightarrow_S , $\xrightarrow{*}_S$, $\xleftarrow{*}_S$ sont compatibles.*

Preuve : Par la construction de la relation \longrightarrow_S . Pour les deux autres relations la preuve est faite par induction sur la génération de ces relations. \square

3.3.6 Les propriétés des relations *FireCong*

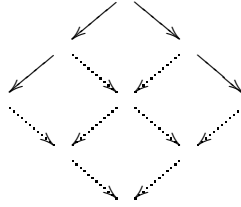
La relation \longrightarrow_F est trivialement non-terminante comme montré par le contre exemple classique ω_ρ où $\omega_\rho = x \rightarrow x$. Ce terme se réduit en une étape en lui-même et on obtient ainsi une chaîne de réduction infinie.

Dans cette section nous montrerons que la relation \longrightarrow_F est confluente et pour cela nous nous inspirons de la preuve de confluence du λ -calcul donnée par exemple dans [Bar84].

Nous montrerons que la relation \longrightarrow_F est confluente, propriété qui est obtenu immédiatement à partir de la confluence forte de la relation $\xrightarrow{*}_F$. Pour prouver la confluence forte de $\xrightarrow{*}_F$ nous exhibons une relation δ qui est fortement confluente et dont la fermeture transitive est la relation $\xrightarrow{*}_F$. Ayant trouvé une telle relation, nous pouvons prouver facilement, en utilisant le lemme suivant, que la relation $\xrightarrow{*}_F$ est fortement confluente et ainsi, que \longrightarrow_F est confluente.

Lemme 3.7 ([Bar84]) *Etant données une relation \longrightarrow et sa fermeture transitive $\xrightarrow{*}$. Si \longrightarrow est fortement confluente alors $\xrightarrow{*}$ est fortement confluente.*

Preuve : En utilisant un diagramme simple suggéré par :



\square

Nous pourrions choisir comme relation δ la fermeture réflexive de \longrightarrow_F . Malheureusement, dans l'Exemple 3.8 nous pouvons voir que cette relation n'est pas fortement confluente.

Exemple 3.8 *Nous considérons le terme $t = [x \rightarrow x](r)$ avec $r \longrightarrow_F r'$. Alors, nous obtenons $[x \rightarrow x](r) \longrightarrow_F \{r\}$ et $[x \rightarrow x](r) \longrightarrow_F [x \rightarrow x](r')$ mais il n'existe aucun terme t' tel que $\{r\} \longrightarrow_F t'$ et $[x \rightarrow x](r') \longrightarrow_F t'$.*

Afin d'obtenir la relation δ appropriée nous adoptons une approche similaire à la réduction parallèle introduite par *Tait & Martin-Löf*.

On doit noter que dans l'Exemple 3.8 nous n'obtenons pas la confluence forte parce que la réduction est effectuée pour seulement un sous-terme à la fois. Nous recherchons donc une relation effectuant le maximum de réductions en une étape. La relation qui émerge naturellement est la version parallèle de la relation \longrightarrow_F et elle est décrite dans la Définition 3.11.

Définition 3.11 *La relation $\longrightarrow_{F\parallel}$ est définie par les règles suivantes :*

1. $t \longrightarrow_{F\parallel} t$,
2. $u_i \longrightarrow_{F\parallel} u'_i, i = 1 \dots n \Rightarrow \{u_1, \dots, u_n\} \longrightarrow_{F\parallel} \{u'_1, \dots, u'_n\}$,
3. $u_i \longrightarrow_{F\parallel} u'_i, i = 1 \dots n \Rightarrow f(u_1, \dots, u_n) \longrightarrow_{F\parallel} f(u'_1, \dots, u'_n)$
4. $u \longrightarrow_{F\parallel} u', v \longrightarrow_{F\parallel} v' \Rightarrow u \rightarrow v \longrightarrow_{F\parallel} u' \rightarrow v'$
5. $u \longrightarrow_{F\parallel} u', v \longrightarrow_{F\parallel} v' \Rightarrow [u](v) \longrightarrow_{F\parallel} [u'](v')$,

6. $l \longrightarrow_{F_{\parallel}} l', t \longrightarrow_{F_{\parallel}} t', r \longrightarrow_{F_{\parallel}} r' \Rightarrow$
 $[l \rightarrow r](t) \longrightarrow_{F_{\parallel}} \{\sigma r'\}$ (Fire_c)
si l, t sont ρ -calculables
avec $\sigma \in \mathcal{Solution}(l' \ll_{\emptyset}^? t')$
7. $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'_i, v_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} v'_i, i = 1 \dots n \Rightarrow$
 $[f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n)) \longrightarrow_{F_{\parallel}} \{f([u'_1](v'_1), \dots, [u'_n](v'_n))\},$ (Congruence)
8. $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'_i, v_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} v'_i, i = 1 \dots n \Rightarrow$
 $[f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m)) \longrightarrow_{F_{\parallel}} \emptyset$ (Congruence_fail)
si $f \neq g$

D'une façon similaire à la relation \longrightarrow_F , la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ modulo la relation \longleftarrow^*_S est notée $\longrightarrow_{F_{\parallel}/S}$ et la fermeture réflexive et transitive de $\longrightarrow_{F_{\parallel}/S}$ est notée $\xrightarrow{*}_{F_{\parallel}/S}$.

Pour le terme $t = [x \rightarrow x](r)$ présenté dans l'Exemple 3.8 nous avons toujours les réductions $[x \rightarrow x](r) \longrightarrow_{F_{\parallel}} \{r\}$ et $[x \rightarrow x](r) \longrightarrow_{F_{\parallel}} [x \rightarrow x](r')$ mais les deux termes se réduisent dans un seul pas en le même terme puisque $\{r\} \longrightarrow_{F_{\parallel}} \{r'\}$ et $[x \rightarrow x](r') \longrightarrow_{F_{\parallel}} \{r'\}$.

Dans le reste de cette section nous nous concentrons sur la preuve de la confluence forte de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$. Une fois que nous aurons prouvé cette propriété, nous prouverons que $\xrightarrow{*}_F$ est la fermeture transitive de $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ et comme corollaire, nous obtiendrons la confluence forte de la relation $\xrightarrow{*}_F$.

Nous devons préciser que, selon nos restrictions sur les réductions $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$, tout membre gauche d'une règle de réécriture $l \rightarrow r$ doit être un terme du premier ordre ($l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$) afin d'appliquer la règle d'évaluation *Fire_c* pour réduire un terme de la forme $[l \rightarrow r](t)$. Par conséquent, pour le terme l' tels que $l \longrightarrow_{F_{\parallel}} l'$ ou $l \longrightarrow_F l'$ nous avons $l' = l$.

Le premier lemme décrit la préservation de la propriété de termes ρ -calculables par les relations \longrightarrow_F et $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$. Ce lemme est utilisé pour prouver que la relation $\xrightarrow{*}_F$ est la fermeture transitive de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ ainsi que pour montrer la confluence forte de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$.

Lemme 3.8 *Etant donnés les ρ -termes l, t, l', t' tels que $l \longrightarrow_F l'$ et $t \longrightarrow_F t'$. Alors,*

- *si l, t sont ρ -préfiltrables alors l', t' sont ρ -préfiltrables,*
- *si t est ρ -safe alors t' est ρ -safe,*
- *si l, t sont ρ -calculables alors l', t' sont ρ -calculables.*

Preuve : Par définition du ρ_0 -calcul $l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ et par conséquent $l' = l$. Si le terme $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ alors $t = t'$ et le lemme est clairement vrai. Nous considérons par la suite que $t \notin \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Puisque l, t sont ρ -préfiltrables alors le terme l subsume faiblement le terme t et donc toute position fonctionnelle du terme l est une position fonctionnelle du terme t ou n'est pas une position du terme t . Par définition de la relation \longrightarrow_F on peut noter que le symbole de tête d'un terme u n'est pas le même que celui du terme u' tel que $u \longrightarrow_F u'$ seulement si u est une application (de la forme $[]()$) et dans ce cas u' est un ensemble. Par conséquent, l'ensemble des positions fonctionnelles du terme t est le même que l'ensemble des positions fonctionnelles du terme t' , et donc, le terme l subsume faiblement le terme t' . Ainsi, les termes l', t' sont ρ -préfiltrables.

Nous montrons maintenant que t' est ρ -safe si t est ρ -safe et donc, nous analysons les types des applications et des ensembles pouvant apparaître dans le terme t' .

Puisque t est ρ -safe, tout sous-terme $[u \rightarrow w](v)$ de t est tel que u subsume v . En utilisant la définition de la relation \longrightarrow_F de la même manière que précédemment, nous obtenons que u subsume v' pour tout terme v' tel que $v \longrightarrow_F v'$. Ainsi, tout terme t' contenant le sous-terme $[u \rightarrow w](v')$ et donc tel que $t \longrightarrow_F t'$ est ρ -safe. Tout sous-terme de t' de la forme $[u](v)$ où u n'est pas une règle de réécriture peut être engendré par une réduction \longrightarrow_F seulement si le terme t contient un sous-terme de cette forme mais ceci n'est pas possible puisque t est ρ -safe.

Aucune règle de réécriture dans t ne peut mener à un ensemble vide parce que le membre gauche de toute règle de réécriture subsume son argument et donc le filtrage n'échoue pas. Puisque il n'existe pas de sous-terme de la forme $[u](v)$ dans t , la règle d'évaluation *Congruence_fail* ne peut pas engendrer un ensemble vide. La seule règle d'évaluation qui peut introduire des ensembles ayant plus d'un élément est *Fire_c* mais puisque le filtrage est syntaxique et donc unitaire dans le ρ_0 -calcul, l'application d'une règle de réécriture ne peut pas générer un ensemble ayant plus d'un élément. Ainsi, un ensemble ayant plus d'un élément ou un ensemble vide peuvent être engendrés dans le terme t' seulement si le terme t contient de tels ensembles mais ceci n'est pas possible puisque t est ρ -safe.

Nous avons donc montré que toutes les conditions de la Définition 3.6 sont satisfaites par le terme t' si elles sont satisfaites pour le terme t et donc, t' est ρ -safe.

Ainsi, les propriétés de termes ρ -préfiltrables et ρ -safes sont préservées par la relation \longrightarrow_F et donc, la propriété de termes ρ -calculables est préservée par la relation \longrightarrow_F . \square

Lemme 3.9 *Etant donnés les ρ -termes l, t, l', t' tels que $l \longrightarrow_{F_{\parallel}} l'$ et $t \longrightarrow_{F_{\parallel}} t'$. Alors,*

- *si l, t sont ρ -préfiltrables alors l', t' sont ρ -préfiltrables,*
- *si t est ρ -safe alors t' est ρ -safe,*
- *si l, t sont ρ -calculables alors l', t' sont ρ -calculables.*

Preuve : Similaire au Lemme 3.8. \square

Nous analysons maintenant la correspondance entre les solutions des problèmes de filtrage ($l \ll_{\emptyset}^? t$) et ($l \ll_{\emptyset}^? t'$) où $t \longrightarrow_{F_{\parallel}} t'$. Plus précisément, nous voulons montrer que les termes du codomaine de la substitution obtenue pour le premier problème de filtrage se réduisent dans les termes du codomaine de la substitution obtenue pour le deuxième problème de filtrage et qu'un échec dans le premier cas implique un échec dans le deuxième cas.

Lemme 3.10 *Etant donnés les ρ -termes l, t et t' tels que l, t soient ρ -préfiltrables et $t \longrightarrow_{F_{\parallel}} t'$.*

- a. *Si $\langle x_1/u_1, \dots, x_n/u_n \rangle$ est le résultat de $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ et $\langle x_1/v_1, \dots, x_n/v_n \rangle$ est le résultat de $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ (où n est le nombre de variables de l), alors $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} v_i$.*
- b. *$Solution(l \ll_{\emptyset}^? t) = \emptyset$ ssi $Solution(l \ll_{\emptyset}^? t') = \emptyset$.*

Preuve : Si $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ alors, $t' = t$ et le lemme est trivialement vrai. Pour le cas où $t \notin \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ nous procédons par induction sur la structure du ρ -terme t .

Le cas de base : $t = x$, avec $x \in \mathcal{X}$.

- a. Puisque $t = t'$ ce cas est trivial.
- b. Puisque l, t sont ρ -préfiltrables alors l subsume faiblement t et conformément à la Remarque 3.1, l est une variable et donc, $(l \ll_{\emptyset}^? t) = (l \ll_{\emptyset}^? t')$ ne peut pas échouer.

Induction : Les cas que nous devons analyser sont $t = \{t_1, \dots, t_q\}$, $t = f(t_1, \dots, t_q)$, $t = t_1 \rightarrow t_2$ et $t = [t_1](t_2)$. Si la position de tête de t n'est pas une position fonctionnelle,

c'est-à-dire si $t = \{t_1, \dots, t_q\}$, $t = t_1 \rightarrow t_2$ ou $t = [t_1](t_2)$, alors $l = x$ (cf. Remarque 3.1) et dans ces cas le lemme est clairement vrai. Le cas où $l = x$ et $t = f(t_1, \dots, t_q)$ est trivial.

Si $t = f(t_1, \dots, t_q)$ et l n'est pas une variable nous analysons les deux points :

- a. Si $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ n'échoue pas alors le terme l doit être de la forme $l = f(l_1, \dots, l_q)$ avec l_i, t_i ρ -préfiltrables pour tout $i = 1, \dots, q$ et $\langle x_1/u_1, \dots, x_n/u_n \rangle$ est la solution de $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ est donc, la solution du système $(\bigwedge_{i=1, \dots, q} l_i \ll_{\emptyset}^? t_i)$. Par hypothèse d'induction, si $t_i \rightarrow_{F_{\parallel}} t'_i$ et la solution de $(l_i \ll_{\emptyset}^? t_i)$ est la substitution $\langle x_{1i}/u_{1i}, \dots, x_{mi}/u_{mi} \rangle$, alors la solution de $(l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i)$ est $\langle x_{1i}/u'_{1i}, \dots, x_{mi}/u'_{mi} \rangle$ avec $u_{ki} \rightarrow_{F_{\parallel}} u'_{ki}$, $k = 1 \dots m$. Puisque $t' = f(t'_1, \dots, t'_q)$ avec $t_i \rightarrow_{F_{\parallel}} t'_i$, la première règle de filtrage appliquée pour filtrer l' et t' est *Decomposition* : $(l \ll_{\emptyset}^? t') = (\bigwedge_{i=1, \dots, q} l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i)$.

Du à la linéarité de l les variables x_{ki} , $i = 1 \dots q$, $k = 1 \dots m$ sont différentes et donc la règle de filtrage *MergingClash* ne peut pas être appliquée. Ainsi, la propriété est vérifiée.

- b. Conformément à la Remarque 3.2, l'échec peut être obtenu seulement en appliquant la règle de filtrage *SymbolClash* à la position de tête ou à des positions plus profondes. Nous pouvons donc avoir $l = g(l_1, \dots, l_q)$ et $t' = f(t'_1, \dots, t'_q)$ avec $t_i \rightarrow_{F_{\parallel}} t'_i$ et $f \neq g$ et ainsi, $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ et $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ échouent. Si $l = f(l_1, \dots, l_q)$ alors l'échec est obtenu à une position plus profonde. Puisque par induction, le problème $(l_i \ll_{\emptyset}^? t_i)$ mène à un échec de filtrage ssi le problème $(l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i)$ mène à un échec alors, $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ échoue ssi $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ échoue.

□

Nous analysons maintenant la correspondance entre l'application d'une substitution à un terme r et l'application de la même substitution ou d'une substitution en correspondance forte avec cette substitution, à un terme obtenu en réduisant le terme r .

Lemme 3.11 *Etant donnés les ρ -termes l, t, r et t', r' tels que l, t soient ρ -calculables et $t \rightarrow_{F_{\parallel}} t'$, $r \rightarrow_{F_{\parallel}} r'$. Si les problèmes de filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ et $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ ont comme solutions les substitutions σ et σ' respectivement alors, $\sigma r \rightarrow_{F_{\parallel}} \sigma' r'$.*

Preuve : Si nous considérons la substitution $\sigma = \langle x_1/s_1, \dots, x_m/s_m \rangle$ alors, par le Lemme 3.10, $\sigma' = \langle x_1/s'_1, \dots, x_m/s'_m \rangle$, avec $s_i \rightarrow_{F_{\parallel}} s'_i$, $i = 1 \dots m$. Nous procédons par induction sur la structure du terme r en considérant toutes les réductions possibles $r \rightarrow_{F_{\parallel}} r'$. Les cas à analyser correspondent aux règles de la Définition 3.11 :

1. $r = x$ et $r' = x$
2. $r = \{u_1, \dots, u_n\}$ et $r' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ avec $u_i \rightarrow_{F_{\parallel}} u'_i$
3. $r = f(u_1, \dots, u_n)$ et $r' = f(u'_1, \dots, u'_n)$ avec $u_i \rightarrow_{F_{\parallel}} u'_i$
4. $r = u \rightarrow v$ et $r' = u' \rightarrow v'$ avec $u \rightarrow_{F_{\parallel}} u'$, $v \rightarrow_{F_{\parallel}} v'$
5. $r = [u](v)$ et $r' = [u'](v')$ avec $u \rightarrow_{F_{\parallel}} u'$, $v \rightarrow_{F_{\parallel}} v'$
6. $r = [u \rightarrow v](w)$ avec u, w ρ -calculables et $r' = \{\mu v'\}$, avec $\mu \in \text{Solution}(u' \ll_{\emptyset}^? w')$ et $u \rightarrow_{F_{\parallel}} u'$, $v \rightarrow_{F_{\parallel}} v'$, $w \rightarrow_{F_{\parallel}} w'$.
7. $r = [f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n))$ et $r' = \{f([u'_1](v'_1), \dots, [u'_n](v'_n))\}$ avec $u_i \rightarrow_{F_{\parallel}} u'_i$, $v_i \rightarrow_{F_{\parallel}} v'_i$ pour tout $i = 1 \dots n$.
8. $r = [f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m))$ et $r' = \emptyset$.

Pour le cas de base, $r = x$, nous devons prouver que $\sigma x \longrightarrow_{F_{\parallel}} \sigma' x$ et cette réduction suit immédiatement par le Lemme 3.10.

Le seul cas où l'application de l'induction est plus élaborée est le cas 6 décrivant l'application d'une règle de réécriture. Pour ce cas nous devons prouver que

$$\sigma([u \rightarrow v](w)) \longrightarrow_{F_{\parallel}} \sigma'\{\mu v'\} \quad (3.1)$$

avec $\mu \in \text{Solution}(u' \ll_{\emptyset}^? w')$.

Puisque u est un terme du premier ordre, $u' = u$. Par α -conversion, nous supposons que u ne contient aucune variable de σ et aucune variable de σ' . Avec cette supposition nous avons $\sigma([u \rightarrow v](w)) = [u \rightarrow \sigma v](\sigma w)$. Puisque σ représente la solution d'un problème de filtrage entre deux termes ρ -calculables et u, w sont ρ -calculables, nous obtenons que $u, \sigma w$ sont ρ -calculables.

Si $\text{Solution}(u \ll_{\emptyset}^? \sigma w) = \emptyset$ alors, en utilisant le Lemme 3.10, nous obtenons la réduction $[u \rightarrow \sigma v](\sigma w) \longrightarrow_{F_{\parallel}} \emptyset$ et nous devons prouver que $\sigma' r' = \emptyset$ et donc, que $r' = \{\mu v'\} = \emptyset$. Puisque les termes $u, \sigma w$ sont ρ -calculables alors ils sont ρ -préfiltrables et conformément à la Remarque 3.2 le filtrage $u \ll_{\emptyset}^? \sigma w$ peut échouer seulement à cause des symboles fonctionnels différents à la même position des termes u et σw et donc, des termes u et w . En plus, tout terme de la forme $f(\dots)$ peut être réduit en utilisant la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ seulement en un terme de la même forme et donc, le filtrage $u \ll_{\emptyset}^? w'$ échoue et nous obtenons $\{\mu v'\} = \emptyset$.

Si le filtrage $u \ll_{\emptyset}^? \sigma w$ n'échoue pas, nous pouvons appliquer l'induction aux sous-termes v et w et nous avons $\sigma v \longrightarrow_{F_{\parallel}} \sigma' v'$ et $\sigma w \longrightarrow_{F_{\parallel}} \sigma' w'$. Ainsi, nous obtenons la réduction :

$$\sigma([u \rightarrow v](w)) = [u \rightarrow \sigma v](\sigma w) \longrightarrow_{F_{\parallel}} \{\mu'(\sigma' v')\} \quad (3.2)$$

avec $\mu' \in \text{Solution}(u \ll_{\emptyset}^? \sigma' w')$.

En utilisant les réductions (3.1) et (3.2), l'égalité qui nous permettrait de conclure la preuve est :

$$\{\mu'(\sigma' v')\} = \sigma'\{\mu v'\}$$

ou

$$\mu'(\sigma' v') = \sigma'(\mu v').$$

Nous supposons que $\sigma' = \langle x_1/t_1, \dots, x_n/t_n \rangle$ et $\mu = \langle y_1/s_1, \dots, y_m/s_m \rangle$. Il est clair que $\mu' = \langle y_1/\sigma' s_1, \dots, y_m/\sigma' s_m \rangle$. Puisque u ne contient aucune variable de σ' nous déduisons que y_j n'est pas une variable de t_i et $x_i \neq y_j$ pour tous $j = 1 \dots m, i = 1 \dots n$. Ainsi, nous avons $\mu'(\sigma' v') = \langle y_1/\sigma' s_1, \dots, y_m/\sigma' s_m \rangle(\langle x_1/t_1, \dots, x_n/t_n \rangle v')$ et puisque y_j n'est pas une variable de t_i ,

$$\mu'(\sigma' v') = \langle y_1/\sigma' s_1, \dots, y_m/\sigma' s_m, x_1/t_1, \dots, x_n/t_n \rangle v'.$$

Pour le deuxième terme nous prenons $\sigma'(\mu v') = \langle x_1/t_1, \dots, x_n/t_n \rangle(\langle y_1/s_1, \dots, y_m/s_m \rangle v)$ et puisque $x_i \neq y_j$ et y_j n'est pas une variable de t_i ,

$$\begin{aligned} \sigma'(\mu v') &= \langle x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y_1/\langle x_1/t_1, \dots, x_n/t_n \rangle s_1, \dots, y_m/\langle x_1/t_1, \dots, x_n/t_n \rangle s_m \rangle v = \\ &\quad \langle x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y_1/\sigma' s_1, \dots, y_m/\sigma' s_m \rangle v \end{aligned}$$

L'égalité $\mu'(\sigma' v') = \sigma'(\mu v')$ est valide et ainsi, le lemme est prouvé. \square

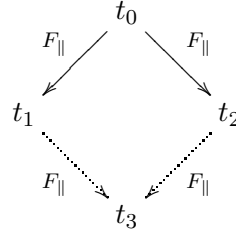
Si la condition de termes ρ -calculables de la règle d'évaluation $Fire_c$ est changée en une condition de termes ρ -préfiltrables, nous pouvons montrer facilement que $\sigma r \longrightarrow_{F_{\parallel}} \sigma' r'$ si les termes l, t sont seulement ρ -préfiltrables. Pour prouver cette réduction il faut juste remarquer que si σ représente la solution d'un problème de filtrage entre deux termes u, w ρ -préfiltrables, nous obtenons que $u, \sigma w$ sont ρ -préfiltrables.

En gardant la condition de termes ρ -calculables pour la règle d'évaluation $Fire_c$ nous ne pouvons pas démontrer la relation $\sigma r \longrightarrow_{F_{\parallel}} \sigma' r'$ si nous demandons que les termes l, t soient simplement ρ -préfiltrables au lieu de ρ -calculables.

La condition que les termes sont non seulement ρ -préfiltrables mais ρ -calculables est nécessaire essentiellement pour éviter que des termes (non- ρ -safe) \emptyset apparaissent dans le codomaine de la substitution σ sans être propagés strictement. Par exemple, si $l = y$ et $t = \emptyset$ alors l, t sont ρ -préfiltrables mais pas ρ -calculables (t n'est pas ρ -safe) et $\sigma = \langle y/\emptyset \rangle$. Si $r = [x \rightarrow b](y)$ et $r' = \{b\}$ alors $\sigma r = [x \rightarrow b](\emptyset)$, $\sigma r' = \{b\}$ et il n'existe pas de réduction $[x \rightarrow b](\emptyset) \longrightarrow_{F_{\parallel}} \{b\}$ puisque x, \emptyset ne sont pas ρ -calculables (\emptyset n'est pas ρ -safe).

Lemme 3.12 ($\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ est fortement confluente)

Etant donnés les termes t_0, t_1, t_2 tels que $t_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} t_1$ et $t_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} t_2$. Alors, il existe un terme t_3 tel que $t_1 \longrightarrow_{F_{\parallel}} t_3$ et $t_2 \longrightarrow_{F_{\parallel}} t_3$:



Preuve : Nous montrons le lemme par induction sur la structure du terme t_0 .

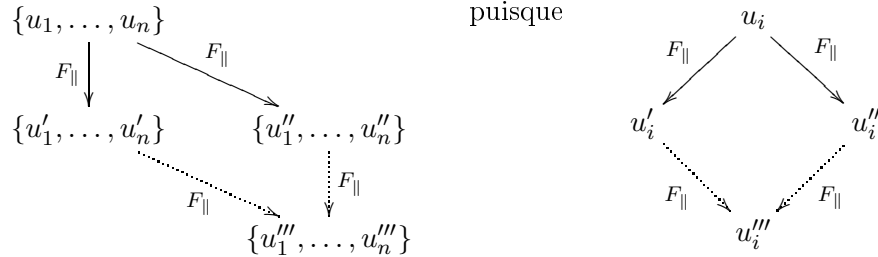
1. $t_0 = x$

Par la définition de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$, $t_0 = t_1 = t_2$ et nous pouvons choisir $t_3 = t_0$.

2. $t_0 = \{u_1, \dots, u_n\}$

Nous avons $t_1 = \{u'_1, \dots, u'_n\}$, $t_2 = \{u''_1, \dots, u''_n\}$ avec $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'_i$ et $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u''_i$, $i = 1 \dots n$. Par induction, il existe les termes u'''_i tels que $u'_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'''_i$, $u''_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'''_i$, $i = 1 \dots n$. Ainsi, nous pouvons choisir $t_3 = \{u'''_1, \dots, u'''_n\}$.

Les diagrammes correspondants sont présentés ci-dessous :



3. $t_0 = f(u_1, \dots, u_n)$

Nous avons $t_1 = f(u'_1, \dots, u'_n)$ et $t_2 = f(u''_1, \dots, u''_n)$ avec $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'_i$ et $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u''_i$, $i = 1 \dots n$. Par induction, il existe les termes u'''_i tels que $u'_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'''_i$, $u''_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'''_i$, $i = 1 \dots n$. Ainsi, nous pouvons choisir $t_3 = \{u'''_1, \dots, u'''_n\}$.

4. $t_0 = u_0 \rightarrow v_0$

Par la définition de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$, $t_1 = u_1 \rightarrow v_1$ et $t_2 = u_2 \rightarrow v_2$ avec $u_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} u_1$, $u_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} u_2$, $v_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} v_1$, $v_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} v_2$. Par induction, il existe les termes u_3, v_3 tels que $u_1 \longrightarrow_{F_{\parallel}} u_3$, $u_2 \longrightarrow_{F_{\parallel}} u_3$ et $v_1 \longrightarrow_{F_{\parallel}} v_3$, $v_2 \longrightarrow_{F_{\parallel}} v_3$. En fait, du aux conditions sur le membre gauche d'une règle de réécriture, $u_0 = u_1 = u_2 = u_3$ et nous obtenons $t_3 = u_0 \rightarrow v_3$.

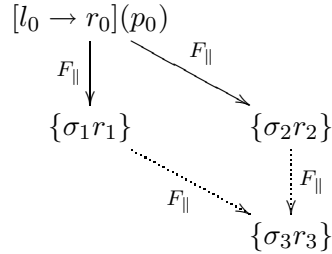
5. $t_0 = [u_0](v_0)$

Nous avons plusieurs possibilités pour choisir les termes t_1, t_2 selon les propriétés des termes u_0, v_0 décrites dans la définition de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$:

- (a) $t_1 = [u_1](v_1)$ et $t_2 = [u_2](v_2)$ avec $u_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} u_1$, $u_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} u_2$, $v_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} v_1$, $v_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} v_2$. Par induction, il existe les termes u_3, v_3 tels que $u_1 \longrightarrow_{F_{\parallel}} u_3$, $u_2 \longrightarrow_{F_{\parallel}} u_3$ et $v_1 \longrightarrow_{F_{\parallel}} v_3$, $v_2 \longrightarrow_{F_{\parallel}} v_3$. Ainsi, nous obtenons $t_3 = [u_3](v_3)$.
- (b) $t_0 = [l_0 \rightarrow r_0](p_0)$ avec l_0, p_0 ρ -calculables.

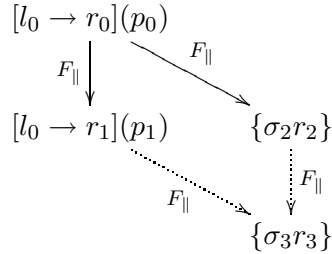
Si nous avons $r_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} r_1$, $p_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} p_1$, $r_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} r_2$, $p_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} p_2$ alors nous obtenons $t_1 = \{\sigma_1 r_1\}$, $t_2 = \{\sigma_2 r_2\}$, avec $\sigma_1 \in \text{Solution}(l_0 \ll_{\emptyset}^? p_1)$ et $\sigma_2 \in \text{Solution}(l_0 \ll_{\emptyset}^? p_2)$.

Par induction, il existe les termes r_3, p_3 tels que $r_1 \longrightarrow_{F_{\parallel}} r_3$, $r_2 \longrightarrow_{F_{\parallel}} r_3$ et $p_1 \longrightarrow_{F_{\parallel}} p_3$, $p_2 \longrightarrow_{F_{\parallel}} p_3$. Si le filtrage $(l_0 \ll_{\emptyset}^? p_1)$ échoue alors, conformément au Lemme 3.10, $\text{Solution}(l_0 \ll_{\emptyset}^? p_0) = \emptyset$ et $\text{Solution}(l_0 \ll_{\emptyset}^? p_2) = \emptyset$. Nous obtenons ainsi $\{\sigma_1 r_1\} = \{\sigma_2 r_2\} = \emptyset$ et le lemme est clairement vrai. Si le filtrage n'échoue pas, puisque l_0, p_1 et l_0, p_2 sont ρ -calculables par le Lemme 3.9 alors, nous pouvons utiliser le Lemme 3.11 et choisir $t_3 = \{\sigma_3 r_3\}$, avec $\{\sigma_3\} = \text{Solution}(l_0 \ll_{\emptyset}^? p_3)$:



Si nous avons $(l_0 \rightarrow r_0) \longrightarrow_{F_{\parallel}} (l_0 \rightarrow r_1)$, $p_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} p_1$ et $r_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} r_2$, $p_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} p_2$ alors nous obtenons $t_1 = [u_1](p_1)$ et $t_2 = \{\sigma_2 r_2\}$, avec $\sigma_2 \in \text{Solution}(l_0 \ll_{\emptyset}^? p_2)$. Par conséquent, nous devons avoir $u_1 = l_0 \rightarrow r_1$, avec $r_0 \longrightarrow_{F_{\parallel}} r_1$.

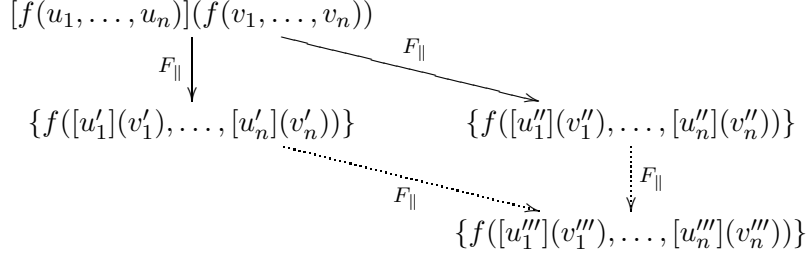
En raisonnant de la même façon que dans le cas précédent nous obtenons, soit $\{\sigma_2 r_2\} = \emptyset$ et $[l_0 \rightarrow r_1](p_1) \longrightarrow_{F_{\parallel}} \emptyset$, soit :



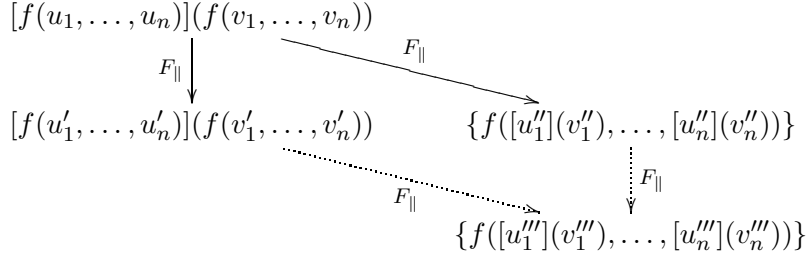
(c) $t_0 = [f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n))$

Nous considérons $t_1 = \{f([u'_1](v'_1), \dots, [u'_n](v'_n))\}$, $t_2 = \{f([u''_1](v''_1), \dots, [u''_n](v''_n))\}$ avec $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'_i$, $v_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} v'_i$ et $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u''_i$, $v_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} v''_i$, $i = 1 \dots n$. Par induction, il existe les termes u'''_i, v'''_i tels que $u'_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'''_i$, $u''_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u'''_i$ et

$v'_i \rightarrow_{F_{\parallel}} v'''_i, v''_i \rightarrow_{F_{\parallel}} v'''_i, i = 1 \dots n$. Par conséquent, nous pouvons choisir $t_3 = \{f([u'''_1](v'''_1)), \dots, [u'''_n](v'''_n))\}$.

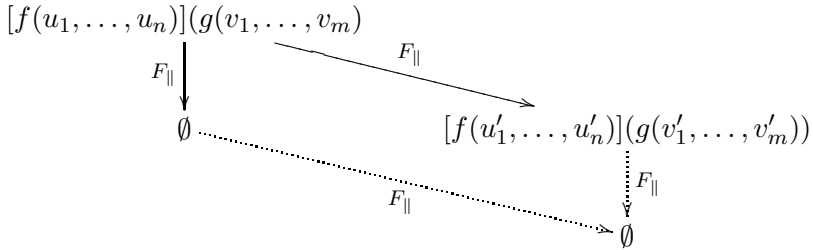


Maintenant, nous considérons les termes $t_1 = [f(u'_1, \dots, u'_n)](f(v'_1, \dots, v'_n))$ et $t_2 = \{f([u''_1](v''_1)), \dots, [u''_n](v''_n))\}$ tels que nous avons $f(u_1, \dots, u_n) \rightarrow_{F_{\parallel}} f(u'_1, \dots, u'_n)$, $f(v_1, \dots, v_n) \rightarrow_{F_{\parallel}} f(v'_1, \dots, v'_n)$ et $u_i \rightarrow_{F_{\parallel}} u'_i, v_i \rightarrow_{F_{\parallel}} v'_i, i = 1 \dots n$. Par conséquent, nous devons avoir $u_i \rightarrow_{F_{\parallel}} u'_i$ et $v_i \rightarrow_{F_{\parallel}} v'_i, i = 1 \dots n$. Par induction, il existe les termes u'''_i, v'''_i tels que $u'_i \rightarrow_{F_{\parallel}} u'''_i, u'_i \rightarrow_{F_{\parallel}} u'''_i$ et $v'_i \rightarrow_{F_{\parallel}} v'''_i, v'_i \rightarrow_{F_{\parallel}} v'''_i, i = 1 \dots n$. Par conséquent, nous pouvons choisir $t_3 = \{f([u'''_1](v'''_1)), \dots, [u'''_n](v'''_n))\}$.



(d) $t_0 = [f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m))$

Si nous avons $t_1 = \emptyset, t_2 = [f(u'_1, \dots, u'_n)](g(v'_1, \dots, v'_m))$ avec $u_i \rightarrow_{F_{\parallel}} u'_i, i = 1 \dots n, v_j \rightarrow_{F_{\parallel}} v'_j, j = 1 \dots m$ alors nous pouvons choisir $t_3 = \emptyset$.



□

Nous avons montré que le Lemme 3.11 est vrai même si les termes d'une application doivent être seulement ρ -préfiltrables afin de réduire l'application en utilisant la règle d'évaluation $Fire_c$ et dans ce cas la condition du lemme peut être transformée dans une condition de termes ρ -préfiltrables. Nous pouvons remarquer que la même restriction de termes ρ -préfiltrables a été suffisante pour montrer le Lemme 3.10.

Nous pouvons donc montrer facilement que la relation $\rightarrow_{F_{\parallel}}$ est fortement confluente même si la condition de la règle d'évaluation $Fire_c$ impose que les termes soient seulement ρ -préfiltrables. Cette condition évite les échecs de filtrage indésirables et elle est suffisante pour empêcher les réductions $\rightarrow_{F_{\parallel}}$ non-convergentes. Les autres restrictions imposées pour les termes ρ -calculables seront nécessaires pour obtenir la cohérence entre les relations $\rightarrow_{F_{\parallel}}$ et \rightarrow_S .

Nous montrons maintenant que la relation $\xrightarrow{*}_F$ est la fermeture transitive de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ et nous obtenons comme conséquence immédiate la confluence de la relation \longrightarrow_F .

Lemme 3.13 *La relation $\xrightarrow{*}_F$ est la fermeture transitive de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$.*

Preuve : Nous prouvons les inclusions suivantes :

$$\longrightarrow_F \subseteq \longrightarrow_{F_{\parallel}} \subseteq \xrightarrow{*}_F$$

et dans ce cas, puisque $\xrightarrow{*}_F$ est la fermeture transitive de la relation \longrightarrow_F , $\xrightarrow{*}_F$ est la fermeture transitive de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$.

Nous devons donc prouver les deux inclusions :

$$\longrightarrow_F \subseteq \longrightarrow_{F_{\parallel}} \quad \text{et} \quad \longrightarrow_{F_{\parallel}} \subseteq \xrightarrow{*}_F$$

Il est clair que $\longrightarrow_F \subseteq \longrightarrow_{F_{\parallel}}$.

Pour prouver que $\longrightarrow_{F_{\parallel}} \subseteq \xrightarrow{*}_F$ le seul cas non-trivial est celui correspondant à la règle d'évaluation *Fire_c* :

si $u \xrightarrow{*}_F u'$, $v \xrightarrow{*}_F v'$ et $w \xrightarrow{*}_F w'$ avec les termes u, w ρ -calculables alors $[u \rightarrow w](v) \xrightarrow{*}_F \{\sigma w'\}$, avec $\sigma \in \text{Solution}(u' \ll_{\emptyset}^? v')$.

Il est clair que $[u \rightarrow w](v) \xrightarrow{*}_F [u' \rightarrow w'](v')$ et puisque, par le Lemme 3.8, les termes u', w' sont ρ -calculables alors, en utilisant la définition de la relation \longrightarrow_F , nous déduisons que $[u' \rightarrow w'](v') \longrightarrow_F \{\sigma w'\}$, avec $\sigma \in \text{Solution}(u' \ll_{\emptyset}^? v')$. Ainsi, nous obtenons par transitivité $[u \rightarrow w](v) \xrightarrow{*}_F \{\sigma w'\}$ et donc $\longrightarrow_{F_{\parallel}} \subseteq \xrightarrow{*}_F$. \square

Théorème 3.2 ($\xrightarrow{*}_F$ est fortement confluente, \longrightarrow_F est confluente)

Si $t \xrightarrow{*}_F u$ et $t \xrightarrow{*}_F v$ alors il existe un terme w tel que $u \xrightarrow{*}_F w$ et $v \xrightarrow{*}_F w$.

Preuve : Conformément au Lemme 3.13, la relation $\xrightarrow{*}_F$ est la fermeture transitive de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$. Le Lemme 3.12 montre la confluence forte de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$. Ainsi, par le Lemme 3.7, la relation $\xrightarrow{*}_F$ est fortement confluente et par conséquent, la relation \longrightarrow_F est confluente. \square

Le même résultat peut être montré pour une relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ utilisant une règle d'évaluation *Fire_c* avec la condition d'application imposant des termes ρ -préfiltrables. La confluence et la terminaison de la relation \longrightarrow_S ont été obtenues sans imposer aucune restriction sur les termes. Malheureusement, afin d'obtenir la confluence de la relation construite à partir des deux relations, la condition de termes ρ -préfiltrables n'est pas suffisante et nous devons imposer que les termes soient ρ -calculables dans la règle d'évaluation *Fire_c*.

3.3.7 La confluence

En début de la Section 3.3.4 nous avons présenté deux possibilités pour décrire les réductions dans le ρ -calcul. La première approche consiste à considérer deux sous-ensembles de règles d'évaluation : un premier ensemble contenant les règles de *déduction* qui décrivent la réduction d'une application et un deuxième ensemble contenant les règles de *calcul* qui décrivent le comportement des ensembles par rapport aux autres symboles du ρ -calcul. Nous considérons donc, la relation induite par l'ensemble de règles de *déduction* modulo la relation de congruence induite par l'ensemble de règles de *calcul* et cette relation correspond à la relation $\longrightarrow_{F/S}$ présentée dans la Définition 3.10.

Une autre approche consiste à ne pas faire la distinction entre la *déduction* et le *calcul* et considérer la relation induite par l'ensemble de règles d'évaluation du ρ -calcul. Cette relation correspond à la relation $\xrightarrow{*}_S \longrightarrow_F \xrightarrow{*}_S$ avec \longrightarrow_F et $\xrightarrow{*}_S$ introduit dans la Définition 3.10 et la Définition 3.9 respectivement.

Cette dernière approche a l'avantage de la simplicité mais l'approche précédente permet une flexibilité supérieure du calcul. Ainsi, si nous voulons remplacer les ensembles par des listes pour représenter le non-déterminisme nous devons juste remplacer la relation de *calcul* avec une relation appropriée qui doit être confluente et terminante afin d'obtenir la confluence du calcul. Nous montrons par la suite que la confluence du calcul est obtenue pour les deux approches.

Confluence de la relation $\longrightarrow_{F/S}$

Dans cette section nous nous concentrons sur la preuve de la confluence forte de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}/S}$. Une fois prouvée cette propriété, nous montrons que $\xrightarrow{*}_{F/S}$ est la fermeture transitive de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}/S}$ et comme corollaire, nous obtenons la confluence forte de la relation $\xrightarrow{*}_{F/S}$.

La confluence de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}/S}$ est montrée en utilisant les propriétés des relations $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ et \longrightarrow_S prouvées dans les sections précédentes et en démontrant que les deux relations sont cohérentes.

Nous commençons par regarder la correspondance entre les solutions des problèmes de filtrage ($l \ll_{\emptyset}^? t$) et ($l \ll_{\emptyset}^? t'$) où $t \xrightarrow{*}_S t'$. Nous voulons obtenir un résultat similaire à celui présenté dans le Lemme 3.10 pour le cas où $t \longrightarrow_{F_{\parallel}} t'$ et plus précisément, nous voulons montrer qu'un échec pour le premier problème de filtrage implique un échec pour le deuxième problème de filtrage, et que pour toute substitution obtenue comme solution pour le premier problème de filtrage, les termes du codomaine de la substitution sont réduits dans les termes du codomaine de la substitution obtenue pour le deuxième problème de filtrage.

Ce résultat ne peut pas être obtenu dans le cas de la relation $\xrightarrow{*}_S$ mais la propriété est montrée si une condition supplémentaire est imposée sur le terme t' .

Lemme 3.14 *Etant donnés deux ρ -termes l, t et t' tels que l, t soient ρ -préfiltrables, $t \xrightarrow{*}_S t'$ et l, t' soient ρ -préfiltrables.*

- Si $\langle x_1/u_1, \dots, x_n/u_n \rangle$ est le résultat de $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ et $\langle x_1/v_1, \dots, x_n/v_n \rangle$ est le résultat de $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ (avec n le nombre de variables de l), alors $u_i \xrightarrow{*}_S v_i$.*
- Solution($l \ll_{\emptyset}^? t$) = \emptyset ssi Solution($l \ll_{\emptyset}^? t'$) = \emptyset .*

Preuve : Si $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ alors, $t' = t$ et le lemme est trivialement vrai. Pour le cas où $t \notin \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ nous procédons par induction sur la structure du ρ -terme t .

Le cas de base : $t = x$, avec $x \in \mathcal{X}$.

Puisque l, t sont ρ -préfiltrables alors l subsume faiblement t et conformément à la Remarque 3.1, l est une variable.

a. Puisque $t = t'$ ce cas est trivial.

b. Puisque l est une variable, $(l \ll_{\emptyset}^? t) = (l \ll_{\emptyset}^? t')$ ne peut pas échouer.

Induction : Les cas que nous devons analyser sont $t = \{t_1, \dots, t_q\}$, $t = f(t_1, \dots, t_q)$, $t = t_1 \rightarrow t_2$ et $t = [t_1](t_2)$. Si $t = \{t_1, \dots, t_q\}$, $t = t_1 \rightarrow t_2$ ou $t = [t_1](t_2)$ alors la position de tête de l est une position variable (cf. Remarque 3.1) et si nous considérons que $l = x$, le lemme est clairement vrai. Le cas où $l = x$ et $t = f(t_1, \dots, t_q)$ est trivial.

Si $t = f(t_1, \dots, t_q)$ et l n'est pas une variable nous analysons les deux points :

- a. Si $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ n'échoue pas alors le terme l doit être de la forme $l = f(l_1, \dots, l_q)$ et la solution de $(l \ll_{\emptyset}^? t) = (\bigwedge_{i=1, \dots, q} l_i \ll_{\emptyset}^? t_i)$ est $\langle x_1/u_1, \dots, x_n/u_n \rangle$.

Puisque l, t' sont ρ -préfiltrables et $t \xrightarrow{*}_S t'$ alors, conformément à la Définition 3.9 nous devons avoir $t' = f(t'_1, \dots, t'_q)$ avec $t_i \xrightarrow{*}_S t'_i$ et l_i, t'_i ρ -préfiltrables, pour $i = 1 \dots q$.

Par hypothèse d'induction, si $t_i \xrightarrow{*}_S t'_i$ et la solution de $(l_i \ll_{\emptyset}^? t_i)$ est la substitution $\langle x_{1i}/u_{1i}, \dots, x_{mi}/u_{mi} \rangle$, alors la solution de $(l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i)$ est $\langle x_{1i}/u'_{1i}, \dots, x_{mi}/u'_{mi} \rangle$ avec $u_{ki} \xrightarrow{*}_S u'_{ki}$, $k = 1 \dots m$.

La première règle de filtrage appliquée pour filtrer l' et t' est *Decomposition* et nous obtenons $(l \ll_{\emptyset}^? t') = (\bigwedge_{i=1, \dots, q} l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i)$. Du à la linéarité de l les variables x_{ki} , $i = 1 \dots q$, $k = 1 \dots m$ sont différentes et donc la règle de filtrage *MergingClash* ne peut pas être appliquée et la propriété est vérifiée.

- b. Conformément à la Remarque 3.2, l'échec peut être obtenu seulement en appliquant la règle de filtrage *SymbolClash* à la position de tête ou à des positions plus profondes. Nous pouvons donc avoir $l = g(l_1, \dots, l_q)$ et $t' = f(t'_1, \dots, t'_q)$ avec $t_i \xrightarrow{*}_S t'_i$ et $f \neq g$ et ainsi, $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ et $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ échouent. Si $l = f(l_1, \dots, l_q)$ alors l'échec est obtenu à une position plus profonde. Puisque par induction, le problème $(l_i \ll_{\emptyset}^? t_i)$ mène à un échec de filtrage ssi le problème $(l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i)$ mène à un échec alors, $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ échoue ssi $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ échoue.

□

La preuve de ce lemme est très similaire à celle du Lemme 3.10. Puisque la propriété de termes ρ -préfiltrables n'est pas préservée par la relation $\xrightarrow{*}_S$, comme il était le cas pour la relation $\xrightarrow{*}_F$ (Lemme 3.8), nous avons ajouté la condition que l, t' soient ρ -préfiltrables. Cette condition est cruciale pour le premier point du lemme et un contre-exemple est obtenu immédiatement si la condition n'est pas satisfaite : si $l = f(x)$ et $t = f(\{a\})$ alors $\text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t) \neq \emptyset$, tandis que $t' = \{f(a)\}$ et $\text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t') = \text{Solution}(f(x) \ll_{\emptyset}^? \{f(a)\}) = \emptyset$.

Nous analysons par la suite la relation entre les termes obtenus en appliquant deux substitutions avec les codomaines liées, comme précédemment, par la relation $\xrightarrow{*}_S$, à un même terme.

Lemme 3.15 *Etant donnés les ρ -termes l, t, r et t' tels que l, t soient ρ -préfiltrables, $t \xrightarrow{*}_S t'$ et l, t' soient ρ -préfiltrables. Si les problèmes de filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ et $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ ont comme solutions les substitutions σ et σ' respectivement alors, $\sigma r \xrightarrow{*}_S \sigma' r$.*

Preuve : Nous procédons par induction sur la structure du terme r .

Le cas de base, $r = x$ suit immédiatement par le Lemme 3.14.

Tous les autres cas sont traités facilement en utilisant l'hypothèse d'induction. Par exemple, si $r = \{u_1, \dots, u_m\}$ nous avons par induction $\sigma u_i \xrightarrow{*}_S \sigma' u_i$, $i = 1 \dots m$, et puisque la relation $\xrightarrow{*}_S$ est fermée par contexte, $\sigma\{u_1, \dots, u_m\} = \{\sigma u_1, \dots, \sigma u_m\} \xrightarrow{*}_S \{\sigma' u_1, \dots, \sigma' u_m\} = \sigma'\{u_1, \dots, u_m\}$. □

Nous montrons maintenant que la relation $\xrightarrow{*}_S$ est stable par rapport à l'application d'une substitution résultant d'un problème de filtrage.

Lemme 3.16 *Etant donnés les ρ -termes l, t, r et r' tels que $r \xrightarrow{*}_S r'$. Si la substitution σ est la solution du problème de filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? t)$, alors $\sigma r \xrightarrow{*}_S \sigma r'$.*

Preuve : Nous procédons par induction sur le nombre n de pas dans la réduction $r = r_1 \longrightarrow_S \dots \longrightarrow_S r_n = r'$. Il est suffisant de montrer que si $r_n \longrightarrow_S r_{n+1}$ alors $\sigma r_n \xrightarrow{*}_S \sigma r_{n+1}$.

Nous montrons que $t \longrightarrow_S t'$ implique $\sigma t \xrightarrow{*}_S \sigma t'$ en utilisant une induction sur la structure du terme t .

Le cas de base, $t = x$ est évident puisque $t' = x$ et donc, $\sigma x \xrightarrow{*}_S \sigma x$.

Nous considérons toute les formes d'un ρ -terme et toute les réductions \longrightarrow_S possibles.

1. $t = \{u_1, \dots, u_m\}$
 - (a) Si $t = \{u_1, \dots, u_m\}$ et $t' = \{u'_1, \dots, u_m\}$, avec $u_1 \longrightarrow_S u'_1$, nous obtenons, par induction, $\sigma u_1 \xrightarrow{*}_S \sigma u'_1$ et donc, $\sigma t = \{\sigma u_1, \dots, \sigma u_m\} \xrightarrow{*}_S \{\sigma u'_1, \dots, \sigma u_m\} = \sigma t'$. Dans le cas où nous avons à la place de u_1 un autre sous-terme u_k tel que $u_k \longrightarrow_S u'_k$ la preuve est similaire.
 - (b) Si $t = \{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\}$ et $t' = \{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\}$ alors, $\sigma t = \{\sigma u_1, \dots, \{\sigma v_1, \dots, \sigma v_n\}, \dots, \sigma u_m\} \xrightarrow{*}_S \{\sigma u_1, \dots, \sigma v_1, \dots, \sigma v_n, \dots, \sigma u_m\} = \sigma t'$.
2. $t = f(u_1, \dots, u_m)$
 - (a) Si $t = f(u_1, \dots, u_m)$ et $t' = f(u'_1, \dots, u_m)$, avec $u_1 \longrightarrow_S u'_1$, nous obtenons, par induction, $\sigma u_1 \xrightarrow{*}_S \sigma u'_1$ et donc, $\sigma t = f(\sigma u_1, \dots, \sigma u_m) \xrightarrow{*}_S f(\sigma u'_1, \dots, \sigma u_m) = \sigma t'$. Dans le cas où nous avons à la place de u_1 un autre sous-terme u_k tel que $u_k \longrightarrow_S u'_k$ la preuve est similaire.
 - (b) Si nous considérons le terme $t = f(u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m)$ et le terme $t' = \{f(u_1, \dots, v_1, \dots, u_m), \dots, f(u_1, \dots, v_n, \dots, u_m)\}$ alors nous obtenons la réduction $\sigma t = f(\sigma u_1, \dots, \{\sigma v_1, \dots, \sigma v_n\}, \dots, \sigma u_m) \xrightarrow{*}_S \{f(\sigma u_1, \dots, \sigma v_1, \dots, \sigma u_m), \dots, f(\sigma u_1, \dots, \sigma v_n, \dots, \sigma u_m)\} = \sigma t'$.
3. $t = u \rightarrow v$

Nous utilisons les mêmes arguments que dans les cas précédents.

 - (a) Si $t = u \rightarrow v$ et $t' = u' \rightarrow v$ la preuve est similaire au point 2a.
 - (b) Si $t = u \rightarrow v$ et $t' = u \rightarrow v'$ la preuve est similaire au point 2a.
 - (c) Le terme $t = \{u_1, \dots, u_m\} \rightarrow v$ n'est pas un terme de $\rho_0(\mathcal{F}, \mathcal{X})$. Le lemme ne serait pas valide si la relation \longrightarrow_S était définie sur l'ensemble de termes $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$.
 - (d) Si $t = u \rightarrow \{v_1, \dots, v_m\}$ et $t' = \{u \rightarrow v_1, \dots, u \rightarrow v_m\}$ la preuve est similaire au point 2b.
4. $t = [u](v)$
 - (a) Si $t = [u](v)$ et $t' = [u'](v)$ la preuve est similaire au point 2a.
 - (b) Si $t = [u](v)$ et $t' = [u](v')$ la preuve est similaire au point 2a.
 - (c) Si $t = [\{u_1, \dots, u_m\}](v)$ et $t' = \{[u_1](v), \dots, [u_m](v)\}$ la preuve est similaire au point 2b.
 - (d) Si $t = [u](\{v_1, \dots, v_m\})$ et $t' = \{[u](v_1), \dots, [u](v_m)\}$ la preuve est similaire au point 2b.

□

Dans le Lemme 3.16, l'appartenance du terme r à l'ensemble de termes $\rho_0(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ est essentielle et le lemme n'est pas valide dans le cas où r est un terme quelconque de $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$. En particulier, la présence d'une règle de réécriture avec un membre gauche qui n'est pas un terme du premier ordre peut conduire à des réductions non-confluentes comme montré dans l'Exemple 3.9.

Exemple 3.9 Nous considérons $r = \{x, y\} \rightarrow x$ et donc, $r' = \{x \rightarrow x, y \rightarrow x\}$. Pour une substitution $\sigma = \langle x/a \rangle$ nous obtenons $\sigma r = \{x, y\} \rightarrow x$ et $\sigma r' = \{x \rightarrow x, y \rightarrow a\}$ et il est évident qu'il n'existe pas de réduction $\sigma r \xrightarrow{*}_S \sigma r'$.

Lemme 3.17 Etant donnés les ρ -termes l, t, r et t', r' tels que l, t soient ρ -préfiltrables $t \xrightarrow{*}_S t'$, $r \xrightarrow{*}_S r'$ et l, t' soient ρ -préfiltrables. Si les problèmes de filtrage ($l \ll_{\emptyset}^? t$) et ($l \ll_{\emptyset}^? t'$) ont comme solutions les substitutions σ et σ' respectivement alors, $\sigma r \xrightarrow{*}_S \sigma' r'$.

Preuve : Le résultat est obtenu immédiatement par transitivité en utilisant le Lemme 3.15 et le Lemme 3.16. \square

Ce dernier lemme correspond au Lemme 3.11 où la même propriété est obtenue pour la relation $\rightarrow_{F_{\parallel}}$ mais en imposant une condition plus forte sur les termes l et t . Intuitivement, une variable x du terme r peut disparaître dans le terme r' , où $r \rightarrow_{F_{\parallel}} r'$, mais ce n'est pas le cas si $r \xrightarrow{*}_S r'$. Par conséquent, le terme \emptyset d'une substitution $\sigma = \langle x/\emptyset \rangle$ peut ne pas apparaître dans le terme $\sigma r'$ dans le cas de la relation $\rightarrow_{F_{\parallel}}$ mais il est toujours propagé strictement dans le cas de la relation \rightarrow_S . Ainsi, nous imposons une condition de termes ρ -préfiltrables afin d'obtenir les propriétés ci-dessus pour la relation \rightarrow_S mais dans le cas de la relation $\rightarrow_{F_{\parallel}}$ nous demandons en plus l'absence des ensembles vides dans t en utilisant une condition de termes ρ -calculables.

Nous analysons par la suite les dérivations de certains ρ -termes contenant des ensembles.

Lemme 3.18 Etant donnés les ρ -termes $l, \{t\}, r$ tels que $l, \{t\}$ soient ρ -calculables. Si les problèmes de filtrage ($l \ll_{\emptyset}^? \{t\}$) et ($l \ll_{\emptyset}^? t$) ont comme solutions les substitutions σ et σ' respectivement alors, $\sigma r \xrightarrow{*}_S \{\sigma' r\}$.

Preuve : Puisque les termes $l, \{t\}$ sont ρ -calculables, ils sont ρ -préfiltrables et par la Remarque 3.1, l est une variable x . Ainsi, la solution de ($x \ll_{\emptyset}^? \{t\}$) est $\langle x/\{t\} \rangle = \sigma$ et la solution de ($x \ll_{\emptyset}^? t$) est $\langle x/t \rangle = \sigma'$.

Nous procédons par induction sur la structure du ρ -terme r .

Le cas de base : $r = x$, avec $x \in \mathcal{X}$.

Nous avons $\sigma x = \langle x/\{t\} \rangle x = \{t\}$, $\{\sigma' x\} = \{\langle x/t \rangle x\} = \{t\}$ et $\{t\} \xrightarrow{*}_S \{t\}$.

Induction :

1. $r = \{r_1, \dots, r_m\}$

Nous avons $\sigma r = \sigma \{r_1, \dots, r_m\} = \{\sigma r_1, \dots, \sigma r_m\}$ et $\{\sigma' r\} = \{\sigma' \{r_1, \dots, r_m\}\} = \{\{\sigma' r_1, \dots, \sigma' r_m\}\}$. Par induction, $\sigma r_i \xrightarrow{*}_S \{\sigma' r_i\}$ et donc, $\{\sigma r_1, \dots, \sigma r_m\} \xrightarrow{*}_S \{\{\sigma' r_1\}, \dots, \{\sigma' r_m\}\}$. En plus, nous avons $\{\{\sigma' r_1\}, \dots, \{\sigma' r_m\}\} \xrightarrow{*}_S \{\{\sigma' r_1, \dots, \sigma' r_m\}\}$ et ainsi, $\{\sigma r_1, \dots, \sigma r_m\} \xrightarrow{*}_S \{\{\sigma' r_1, \dots, \sigma' r_m\}\}$.

2. $r = f(r_1, \dots, r_m)$

Nous procédons de la même façon que dans le premier cas.

3. $r = u \rightarrow v$

Nous procédons de la même façon que dans le premier cas.

4. $r = [u](v)$

Nous procédons de la même façon que dans le premier cas.

\square

Nous devons remarquer que la condition que les termes $l, \{t\}$ sont ρ -calculables est essentielle pour garantir que $\{t\}$ n'est pas un ensemble vide et donc, assurer l'existence de la substitution σ' . Si le nombre d'éléments de l'ensemble $\{t\}$ n'est pas restreint alors le lemme est reformulé en :

Etant donnés les ρ -termes $x, \{t_1, \dots, t_n\}, r$ et les substitutions $\sigma, \sigma_i, i = 1 \dots n$, telles que $\{\sigma\} = \text{Solution}(x \ll_0^? \{t_1, \dots, t_n\})$ et $\{\sigma_i\} = \text{Solution}(x \ll_0^? t_i)$. Alors, $\sigma r \xrightarrow{*}_S \{\sigma_1 r, \dots, \sigma_n r\}$.

Si $n = 0$ alors, il faut prouver que $\langle x/\emptyset \rangle r \xrightarrow{*}_S \emptyset$. Si r est un terme clos du premier ordre alors $\langle x/\emptyset \rangle r = r$ et puisque dans ce cas il n'existe pas de réduction $r \xrightarrow{*}_S \emptyset$ il est clair que le lemme n'est pas valide.

La possibilité d'avoir des ensembles ayant plus d'un élément mène immédiatement à des contre-exemples. Si nous avons $r = f(x, x), l = x, t = \{a, b\}$ avec $a, b \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ alors $\sigma = \langle x/\{a, b\} \rangle$ et $\sigma_1 = \langle x/a \rangle, \sigma_2 = \langle x/b \rangle$. Ainsi, nous devons trouver un terme u tel que $\{f(\{a, b\}, \{a, b\})\} \xrightarrow{*}_S u$ et $\{f(a, a), f(b, b)\} \xrightarrow{*}_S u$ mais il est évident que un tel terme n'existe pas.

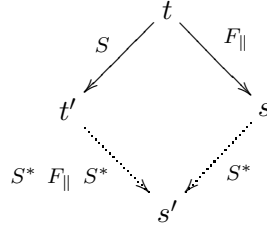
Lemme 3.19 Etant donnés les ρ -termes $l, f(u_1, \dots, \{t\}, \dots, u_m), r$ tels que $l, f(u_1, \dots, \{t\}, \dots, u_m)$ soient ρ -calculables. Si les substitutions σ et σ' sont les solutions des problèmes de filtrage ($l \ll_0^? f(u_1, \dots, \{t\}, \dots, u_m)$) et ($l \ll_0^? f(u_1, \dots, t, \dots, u_m)$) respectivement alors, $\sigma r \xrightarrow{*}_S \{\sigma' r\}$.

Preuve : Puisque les termes $l, f(u_1, \dots, \{t\}, \dots, u_m)$ sont ρ -préfiltrables alors, soit l est une variable, soit l est de la forme $f(l_1, \dots, l_m)$.

Si l est une variable alors la preuve est très similaire à celle du Lemme 3.18.

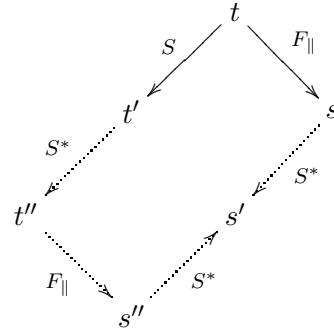
Si $l = f(l_1, \dots, l_m)$, puisque $l, f(u_1, \dots, \{t\}, \dots, u_m)$ sont ρ -préfiltrables alors l_i, u_i ($i = 1 \dots m$) sont ρ -préfiltrables. Par conséquent, si $\{t\}$ est le k -ième argument alors $l_k = x$ et la preuve est similaire à celle du Lemme 3.18. \square

Lemme 3.20 Etant donnés les ρ -termes t, t' et s tels que $t \xrightarrow{*}_S t'$ et $t \xrightarrow{*}_{F_{\parallel}} s$. Alors, il existe un terme s' tel que $t' \xrightarrow{*}_S \xrightarrow{*}_{F_{\parallel}} \xrightarrow{*}_S s'$ et $s \xrightarrow{*}_S s'$:



Preuve : Nous pouvons reformuler le lemme en décrivant toutes les étapes intermédiaires :

Etant donnés les ρ -termes t, t' et s tels que $t \xrightarrow{*}_S t'$ et $t \xrightarrow{*}_{F_{\parallel}} s$. Alors, il existe les termes s', s'' et t'' tel que $t' \xrightarrow{*}_S t'', t'' \xrightarrow{*}_{F_{\parallel}} s'', s'' \xrightarrow{*}_S s'$ et $s \xrightarrow{*}_S s'$.



Nous procédons par induction sur la structure du terme t et nous analysons toutes les réductions $\xrightarrow{*}_S$ et $\xrightarrow{*}_{F_{\parallel}}$ possibles.

Le cas de base : Si t est une variable les réductions sont triviales.

Induction : Les cas plus élaborés sont obtenus quand la règle d'évaluation Fire_c peut être appliquée au terme t à la position de tête afin d'obtenir le terme s . Nous présentons par la suite tous les cas possibles et nous insistons sur les plus compliqués.

1. t est un ensemble.

Nous avons deux possibilités pour réduire t en t' :

(a) $t = \{u_1, \dots, u_k, \dots, u_n\}$ et $t' = \{u_1, \dots, v_k, \dots, u_n\}$ avec $u_k \longrightarrow_S v_k$.

Si $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u_i^1$, $i = 1 \dots n$, alors, nous avons :

$$\begin{array}{ccc}
 \{u_1, \dots, u_k, \dots, u_n\} & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{u_1^1, \dots, u_k^1, \dots, u_n^1\} \quad \text{puisque} \\
 \downarrow S & & \downarrow S^* \\
 \{u_1, \dots, v_k, \dots, u_n\} & & \{u_1^1, \dots, u_k^3, \dots, u_n^1\} \\
 \downarrow S^* & & \uparrow S^* \\
 \{u_1, \dots, w_k, \dots, u_n\} & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{u_1^1, \dots, u_k^2, \dots, u_n^1\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 u_k & \xrightarrow{F_{\parallel}} & u_k^1 \\
 \downarrow S & & \downarrow S^* \\
 v_k & & u_k^3 \\
 \downarrow S^* & & \uparrow S^* \\
 w_k & \xrightarrow{F_{\parallel}} & u_k^2
 \end{array}$$

est obtenu par induction.

(b) $t = \{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\}$ et $t' = \{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\}$.

Si $u_i \longrightarrow_{F_{\parallel}} u_i^1$, $v_j \longrightarrow_{F_{\parallel}} v_j^1$, $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$, alors, nous avons :

$$\begin{array}{ccc}
 \{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\} & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{u_1^1, \dots, \{v_1^1, \dots, v_n^1\}, \dots, u_m^1\} \\
 \downarrow S & & \downarrow S \\
 \{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\} & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{u_1^1, \dots, v_1^1, \dots, v_n^1, \dots, u_m^1\}
 \end{array}$$

2. t est de la forme $f(u_1, \dots, u_n)$

(a) $t = f(u_1, \dots, u_k, \dots, u_m)$ et $t' = f(u_1, \dots, v_k, \dots, u_m)$ avec $u_k \longrightarrow_S v_k$

Similaire au cas 1a.

(b) $t = f(u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m)$,
 $t' = \{f(u_1, \dots, v_1, \dots, u_m), \dots, f(u_1, \dots, v_n, \dots, u_m)\}$.

Similaire au cas 1b.

3. t est de la forme $u \rightarrow v$

(a) $t = u \rightarrow v$, $t' = u' \rightarrow v$ avec $u \longrightarrow_S u'$.

Similaire au cas 1a.

(b) $t = u \rightarrow v$, $t' = u \rightarrow v'$ avec $v \longrightarrow_S v'$.

Similaire au cas 1a.

(c) $t = \{l_1, \dots, l_n\} \rightarrow r$, $t' = \{l_1 \rightarrow r, \dots, l_n \rightarrow r\}$.

Similaire au cas 1b.

(d) $t = l \rightarrow \{r_1, \dots, r_n\}$, $t' = \{l \rightarrow r_1, \dots, l \rightarrow r_n\}$.

Similaire au cas 1b.

4. t est de la forme $[v](u)$ et les règles d'évaluation *Fire_c* et *Congruence* ne sont pas appliquées à la position de tête

(a) $t = [v](u)$, $t' = [v'](u)$ avec $v \longrightarrow_S v'$.

Similaire au cas 1a.

(b) $t = [v](u)$, $t' = [v](u')$ avec $v \longrightarrow_S v'$.

Similaire au cas 1a.

(c) $t = \{[r_1, \dots, r_n]\}(u)$, $t' = \{[r_1](p), \dots, [r_n](p)\}$.

Similaire au cas 1b.

(d) $t = [r](\{u_1, \dots, u_n\})$, $t' = \{[r](u_1), \dots, [r](u_n)\}$.

Similaire au cas 1b.

5. t est de la forme $[l \rightarrow r](u)$ avec l, u ρ -calculables.

(a) $t = [l \rightarrow r](u)$, $t' = [l' \rightarrow r](u)$ avec $l \longrightarrow_S l'$,

Si l, u sont ρ -calculables alors $l = l'$ et le lemme est trivialement vrai. Si l, u ne sont pas ρ -calculables alors nous ne pouvons pas appliquer la règle d'évaluation *Fire_c* à la position de tête et donc, la preuve est similaire à celle du cas 1a.

(b) $t = [l \rightarrow r](u)$, $t' = [l \rightarrow r'](u)$ avec $r \longrightarrow_S r'$,

Nous considérons les termes r^1, u^1 tels que $r \longrightarrow_{F_{\parallel}} r^1$, $u \longrightarrow_{F_{\parallel}} u^1$ et la substitution σ telle que $\sigma \in \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? u^1)$. Alors, nous avons :

$$\begin{array}{ccc}
 [l \rightarrow r](u) & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{\sigma r^1\} \\
 \downarrow S & & \downarrow S^* \\
 [l \rightarrow r'](u) & & \{\sigma r^3\} \\
 \downarrow S^* & & \uparrow S^* \\
 [l \rightarrow r''](u) & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{\sigma r^2\}
 \end{array}
 \quad \text{puisque par induction}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 r & \xrightarrow{F_{\parallel}} & r^1 \\
 \downarrow S & & \downarrow S^* \\
 r' & & r^3 \\
 \downarrow S^* & & \uparrow S^* \\
 r'' & \xrightarrow{F_{\parallel}} & r^2
 \end{array}$$

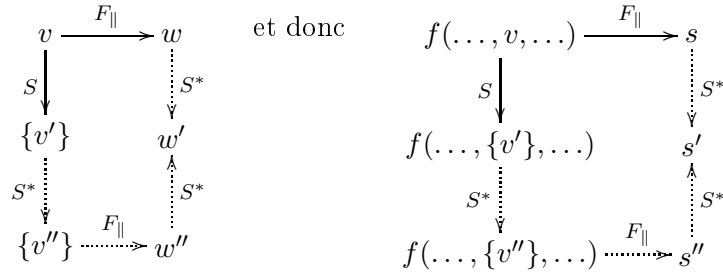
et nous appliquons le Lemme 3.16. Le cas où $\text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? u^1) = \emptyset$ est trivial.

(c) $t = [l \rightarrow r](u)$, $t' = [l \rightarrow r](u')$ avec $u \longrightarrow_S u'$,

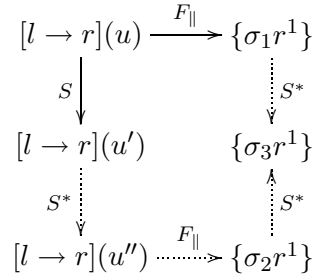
Nous considérons d'abord que l, u sont ρ -calculables et l, u' sont ρ -calculables et nous obtenons par induction :

$$\begin{array}{ccc}
 u & \xrightarrow{F_{\parallel}} & u^1 \\
 \downarrow S & & \downarrow S^* \\
 u' & & u^3 \\
 \downarrow S^* & & \uparrow S^* \\
 u'' & \xrightarrow{F_{\parallel}} & u^2
 \end{array}$$

Nous voulons avoir l, u'' ρ -calculables et le seul cas où la propriété n'est pas vraie est obtenu pour les termes de la forme $u = f(\dots, v, \dots)$, $u' = f(\dots, \{v'\}, \dots)$ et $u'' = \{f(\dots, v', \dots)\}$ mais nous avons



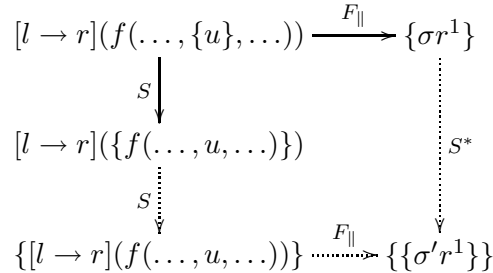
Par conséquent, nous pouvons trouver un terme u'' satisfaisant le diagramme précédent et tel que si l, u' sont ρ -calculables alors l, u'' sont ρ -calculables. Nous considérons $r \rightarrow_{F_{\parallel}} r^1$ et en utilisant le Lemme 3.15 nous obtenons :



avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ telles que $\sigma_1 \in \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? u^1)$, $\sigma_2 \in \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? u^2)$ et $\sigma_3 \in \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? u^3)$. Si le filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? u^1)$ échoue alors, en utilisant le Lemme 3.14 nous obtenons que le filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? u^2)$ échoue et le lemme est clairement vrai.

Nous traitons maintenant le cas où l, u sont ρ -calculables mais l, u' ne sont pas ρ -calculables. Si $t = [l \rightarrow r](f(\dots, \{u\}, \dots))$ et $t' = [l \rightarrow r](\{f(\dots, u, \dots)\})$ alors, l doit être une variable ou de la forme $l = f(l_1, \dots, l_n)$ avec l_i, u_i ($i = 1 \dots n$) ρ -calculables. Dans le dernier cas, la position dans le terme l correspondant à la position du terme $\{u\}$ dans le terme $f(\dots, \{u\}, \dots)$ est une position variable. Ainsi, dans les deux cas les termes $l, f(\dots, u, \dots)$, $i = 1 \dots n$, sont ρ -calculables.

Nous considérons $r \rightarrow_{F_{\parallel}} r^1$, $u \rightarrow_{F_{\parallel}} u^1$ et les substitutions σ, σ' telles que nous avons $\sigma \in \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? f(\dots, \{u^1\}, \dots))$ et $\sigma' \in \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? f(\dots, u^1, \dots))$. Puisque $l, f(\dots, \{u\}, \dots)$ sont ρ -calculables, par le Lemme 3.9 $l, f(\dots, \{u^1\}, \dots)$ sont ρ -calculables et nous obtenons, en utilisant le Lemme 3.19,



Conformément à la Remarque 3.2, le filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? f(\dots, \{u^1\}, \dots))$ peut échouer seulement à cause des symboles fonctionnels différents à la même position des termes l et $f(\dots, \{u^1\}, \dots)$ et dans ce cas, le filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? f(\dots, u^1, \dots))$ échoue aussi et le lemme est trivialement vrai.

- (d) $t = [l \rightarrow \{r_1, \dots, r_n\}](u)$, $t' = [\{l \rightarrow r_1, \dots, l \rightarrow r_n\}](u)$.

Si nous considérons $r_i \longrightarrow_{F_\parallel} r_i^1$, $i = 1 \dots n$, $u \longrightarrow_{F_\parallel} u^1$ et la substitution σ telle que $\sigma \in \text{Solution}(l \ll_\emptyset^? u^1)$, puisque l, u sont ρ -calculables, nous obtenons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 [l \rightarrow \{r_1, \dots, r_n\}](u) & \xrightarrow{F_\parallel} & \{\sigma\{r_1^1, \dots, r_n^1\}\} \\
 \downarrow S & & \downarrow S^* \\
 [l \rightarrow r_1, \dots, l \rightarrow r_n](u) & & \{\sigma r_1^1, \dots, \sigma r_n^1\} \\
 \downarrow S & & \uparrow S^* \\
 \{[l \rightarrow r_1](u), \dots, [l \rightarrow r_n](u)\} & \xrightarrow{F_\parallel} & \{\{\sigma r_1^1\}, \dots, \{\sigma r_n^1\}\}
 \end{array}$$

Le cas où $\text{Solution}(l \ll_\emptyset^? u^1) = \emptyset$ est trivial.

- (e) $t = [l \rightarrow r](\{u\})$, $t' = \{[l \rightarrow r](u)\}$.

Nous considérons $u \longrightarrow_{F_\parallel} u^1$, $r \longrightarrow_{F_\parallel} r^1$ et les substitutions σ, σ' telles que $\sigma \in \text{Solution}(l \ll_\emptyset^? \{u^1\})$ et $\sigma' \in \text{Solution}(l \ll_\emptyset^? u^1)$. Puisque $l, \{u\}$ sont ρ -calculables, par le Lemme 3.9 $l, \{u^1\}$ sont ρ -calculables et par la Remarque 3.1, l est une variable et donc, les filtrages $l \ll_\emptyset^? \{u^1\}$ et $l \ll_\emptyset^? u^1$ n'échouent pas. En utilisant le Lemme 3.18, nous obtenons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 [l \rightarrow r](\{u\}) & \xrightarrow{F_\parallel} & \{\sigma r^1\} \\
 \downarrow S & & \downarrow S^* \\
 \{[l \rightarrow r](u)\} & \xrightarrow{F_\parallel} & \{\{\sigma' r^1\}\}
 \end{array}$$

6. t est de la forme $[f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n))$ et nous appliquons la règle d'évaluation *Congruence* à la position de tête.

- (a) $t = [f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n))$, $t' = [f(u'_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n))$ et $u_1 \longrightarrow_S u'_1$.

Si $u_i \longrightarrow_{F_\parallel} u_i^1$, $v_i \longrightarrow_{F_\parallel} v_i^1$, $i = 1 \dots n$, alors, nous avons :

$$\begin{array}{ccc}
 [f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n)) & \xrightarrow{F_\parallel} & \{f([u_1^1](v_1^1), \dots, [u_n^1](v_n^1))\} \\
 \downarrow S & & \downarrow S^* \\
 [f(u'_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n)) & & \{f([u_1^3](v_1^1), \dots, [u_n^1](v_n^1))\} \\
 \downarrow S^* & & \uparrow S^* \\
 [f(u''_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n)) & \xrightarrow{F_\parallel} & \{f([u_1^2](v_1^1), \dots, [u_n^1](v_n^1))\}
 \end{array}$$

puisque par induction le diagramme est vrai pour le terme u_1 et ses réduits.

- (b) $t = [f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n))$, $t' = [f(u_1, \dots, u_n)](f(v'_1, \dots, v_n))$ et $v_1 \longrightarrow_S v'_1$.

Similaire au cas 6a.

- (c) $t = [f(s_1, \dots, \{u_1, \dots, u_n\}, \dots, s_m)](f(v_1, \dots, v_m))$,
 $t' = [\{f(s_1, \dots, u_1, \dots, s_m), \dots, f(s_1, \dots, u_n, \dots, s_m)\}](f(v_1, \dots, v_m))$.

Pour simplicité, nous supposons que $t = [f(\{u_1, \dots, u_n\})](f(v))$ et donc, $t' = [\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}](f(v))$. Le cas général est traité exactement de la même façon. Si nous considérons $v^1 \rightarrow_{F_{\parallel}} v^1$, $u_i^1 \rightarrow_{F_{\parallel}} u_i^1$, $i = 1 \dots n$, nous obtenons :

$$\begin{array}{ccc}
 [f(\{u_1, \dots, u_n\})](f(v)) & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{f(\{u_1^1, \dots, u_n^1\})(v^1))\} \\
 \downarrow S & & \downarrow S \\
 [\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}](f(v)) & & \{f(\{u_1^1\}(v^1), \dots, [u_n^1](v^1))\} \\
 \vdots S & & \downarrow S \\
 & & \{\{f([u_1^1](v^1)), \dots, f([u_n^1](v^1))\}\} \\
 & & \downarrow S \\
 & & \{f([u_1^1](v^1)), \dots, f([u_n^1](v^1))\} \\
 & & \uparrow S^* \\
 & & \vdots
 \end{array}$$

$$\{[f(u_1)](f(v)), \dots, [f(u_n)](f(v))\} \xrightarrow{F_{\parallel}} \{\{f([u_1^1](v^1))\}, \dots, \{f([u_n^1](v^1))\}\}$$

- (d) $t = [f(u_1, \dots, u_m)](f(s_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, s_m))$,
 $t' = [f(u_1, \dots, u_m)](\{f(s_1, \dots, v_1, \dots, s_m), \dots, f(s_1, \dots, v_n, \dots, s_m)\})$.

Similaire au cas 6c.

7. t est de la forme $[f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m))$ et nous appliquons la règle d'évaluation *Congruence_fail* à la position de tête.

- (a) $t = [f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m))$, $t' = [f(u'_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m))$, $u_1 \rightarrow_S u'_1$.

Nous obtenons immédiatement :

$$\begin{array}{ccc}
 [f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m)) & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \emptyset \\
 \downarrow S & \nearrow F_{\parallel} & \\
 [f(u'_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m)) & &
 \end{array}$$

- (b) $t = [f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m))$, $t' = [f(u_1, \dots, u_n)](g(v'_1, \dots, v_m))$, $v_1 \rightarrow_S v'_1$.

Similaire au cas 7a.

- (c) $t = [f(\dots, \{u_1, \dots, u_n\}, \dots)](g(v_1, \dots, v_m))$,
 $t' = [\{f(\dots, u_1, \dots), \dots, f(\dots, u_n, \dots)\}](g(v_1, \dots, v_m))$.

Nous obtenons immédiatement :

$$\begin{array}{ccc}
 [f(\dots, \{u_1, \dots, u_n\}, \dots)](g(v_1, \dots, v_m)) & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \emptyset \\
 \downarrow S & & \downarrow S^* \\
 [\{f(\dots, u_1, \dots), \dots, f(\dots, u_n, \dots)\}](g(v_1, \dots, v_m)) & & \vdots \\
 \vdots S & & \vdots \\
 \{[f(\dots, u_1, \dots)](g(v_1, \dots, v_m)), \dots, [f(\dots, u_n, \dots)](g(v_1, \dots, v_m))\} & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{\emptyset, \dots, \emptyset\}
 \end{array}$$

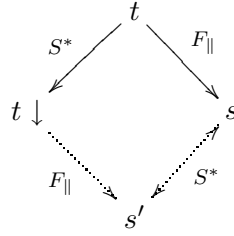
- (d) $t = [f(u_1, \dots, u_n)](g(\dots, \{v_1, \dots, v_m\}, \dots))$,
 $t' = [f(u_1, \dots, u_n)](\{g(\dots, v_1, \dots), \dots, g(\dots, v_m, \dots)\})$.

Similaire au cas 7c.

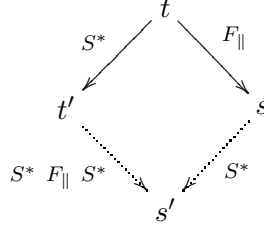
□

En utilisant le lemme précédent et la terminaison de la relation \longrightarrow_S (Lemme 3.3) nous obtenons le résultat intermédiaire ci-dessous qui nous permet de prouver la confluence forte de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}/S}$.

Lemme 3.21 *Etant donnés les termes t, s et $t \downarrow$, avec $t \downarrow$ représentant la forme normale du terme t par rapport à la relation $\xrightarrow{*}_S$. Si $t \longrightarrow_{F_{\parallel}} s$ alors, il existe un terme s' tel que $t \downarrow \longrightarrow_{F_{\parallel}} s'$ et $s \xleftarrow{*}_S s'$:*



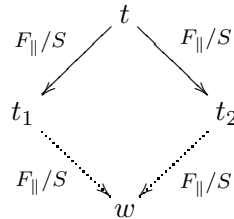
Preuve : Puisque la relation \longrightarrow_S est terminante, nous pouvons utiliser une induction sur le nombre d'étapes dans la réduction $t \xrightarrow{*}_S t'$ et obtenir, en utilisant le Lemme 3.20 :



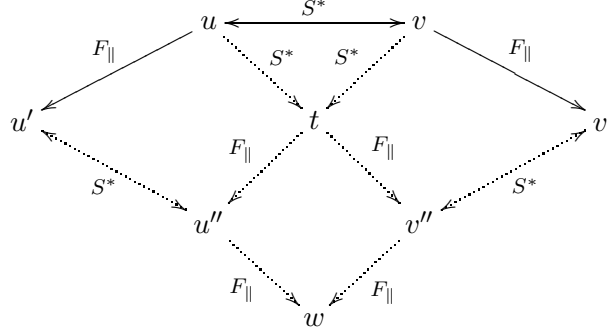
Si $t' = t \downarrow$ alors, t' ne peut pas être réduit en utilisant la relation $\xrightarrow{*}_S$ et donc, nous obtenons le diagramme du lemme. □

Lemme 3.22 ($\longrightarrow_{F_{\parallel}/S}$ est fortement confluente)

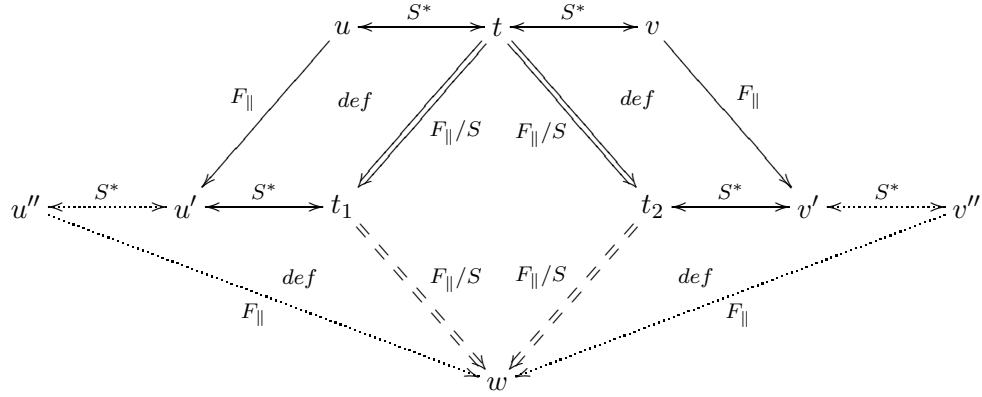
Etant donnés les termes t, t_1, t_2 tels que $t \longrightarrow_{F_{\parallel}/S} t_1$ et $t \longrightarrow_{F_{\parallel}/S} t_2$. Alors, il existe un terme w tel que $t_1 \longrightarrow_{F_{\parallel}/S} w$ et $t_2 \longrightarrow_{F_{\parallel}/S} w$:



Preuve : Puisque la relation \longrightarrow_S a la propriété de Church-Rosser, si nous considérons deux termes u, v tels que $u \xleftarrow{*}_S v$ alors, les termes u, v ont la même forme normale et nous notons cette forme normale par t . Nous utilisons le Lemme 3.12 et Lemme 3.21 et nous obtenons :



En utilisant ce dernier diagramme et la définition de la relation $\rightarrow_{F_{||}/S}$ nous obtenons :



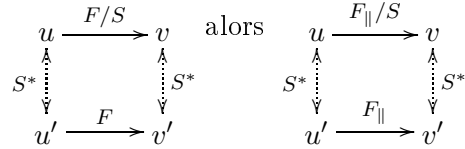
□

Ayant prouvé la confluence forte de la relation $\rightarrow_{F_{||}/S}$, nous devons montrer que la relation $\xrightarrow{*}_{F/S}$ est la fermeture transitive de la relation $\rightarrow_{F_{||}/S}$ pour obtenir la confluence de la relation $\rightarrow_{F/S}$. Nous avons déjà démontré que la relation $\xrightarrow{*}_F$ est la fermeture transitive de la relation $\rightarrow_{F_{||}}$ et ce résultat s'étend naturellement quand nous considérons les deux relations modulo la relation $\xrightarrow{*}_S$.

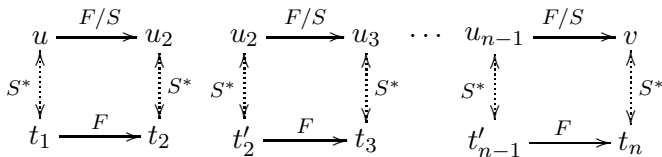
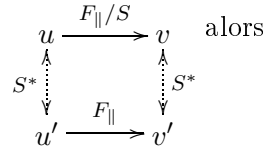
Lemme 3.23 *La relation $\xrightarrow{*}_{F/S}$ est la fermeture transitive de la relation $\rightarrow_{F_{||}/S}$.*

Preuve : Conformément au Lemme 3.13 nous avons $\rightarrow_F \subseteq \rightarrow_{F_{||}} \subseteq \xrightarrow{*}_F$. Nous devons prouver que $\rightarrow_{F/S} \subseteq \rightarrow_{F_{||}/S}$ et $\rightarrow_{F_{||}/S} \subseteq \xrightarrow{*}_{F/S}$.

Pour l'inclusion $\rightarrow_{F/S} \subseteq \rightarrow_{F_{||}/S}$ il suffit de voir que pour tous termes u', v' tels que $u' \rightarrow_F v'$ nous avons $u' \rightarrow_{F_{||}} v'$ et donc, si



Pour $\rightarrow_{F_{||}/S} \subseteq \xrightarrow{*}_{F/S}$ nous devons prouver que si



Puisque $\longrightarrow_{F_{\parallel}} \subseteq \overset{*}{\longrightarrow}_F$, nous pouvons choisir $t_i = t'_i, i = 2 \dots n-1$ pour prouver l'inclusion. \square

Théorème 3.3 ($\overset{*}{\longrightarrow}_{F/S}$ est fortement confluente, $\longrightarrow_{F/S}$ est confluente)

Etant donnés les ρ -termes t, u, v tels que $t \overset{*}{\longrightarrow}_{F/S} u$ et $t \overset{*}{\longrightarrow}_{F/S} v$. Alors, il existe un terme w tel que $u \overset{*}{\longrightarrow}_{F/S} w$ et $v \overset{*}{\longrightarrow}_{F/S} w$.

Preuve : Conformément au Lemme 3.23, la relation $\overset{*}{\longrightarrow}_{F/S}$ est la fermeture transitive de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}/S}$. Le Lemme 3.22 montre la confluence forte de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}/S}$. Ainsi, par le Lemme 3.7, la relation $\overset{*}{\longrightarrow}_{F/S}$ est fortement confluente et par conséquent, la relation $\longrightarrow_{F/S}$ est confluente. \square

Confluence de la relation $\overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_F \overset{*}{\longrightarrow}_S$

Jusqu'à maintenant nous avons considéré que les règles d'évaluation du ρ -calcul sont soit des règles de *déduction* soit des règles de *calcul* et nous avons analysé la relation induite par les règles de *déduction* modulo la congruence générée par les règles de *calcul*.

Une deuxième approche consiste à considérer la relation habituelle induite par les règles d'évaluation du calcul correspondant à la relation $\overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_F \overset{*}{\longrightarrow}_S$. Dans cette section nous nous concentrons sur la confluence de cette relation. La preuve est réalisée en utilisant le Lemme de Yokouchi [YH90] (voir Section 1.1.4) qui a déjà été utilisé dans [CHL96] pour montrer la confluence du $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul.

Lemme 3.24 La relation $\overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_{F_{\parallel}} \overset{*}{\longrightarrow}_S$ est fortement confluente.

Preuve : Les hypothèses pour le Lemme de Yokouchi ont été prouvées dans le Lemme 3.5 et le Lemme 3.3 (confluence et terminaison de la relation \longrightarrow_S), le Lemme 3.12 (confluence forte de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$) et le Lemme 3.20 (le diagramme de Yokouchi). \square

Théorème 3.4 La relation $\overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_F \overset{*}{\longrightarrow}_S$ est confluente.

Preuve : Conformément au Lemme 3.23 nous avons :

$$\longrightarrow_F \subseteq \longrightarrow_{F_{\parallel}} \subseteq \overset{*}{\longrightarrow}_F$$

et donc

$$\overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_F \overset{*}{\longrightarrow}_S \subseteq \overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_{F_{\parallel}} \overset{*}{\longrightarrow}_S \subseteq (\overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_F \overset{*}{\longrightarrow}_S)^*$$

où $(\overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_F \overset{*}{\longrightarrow}_S)^*$ représente la fermeture transitive de $\overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_F \overset{*}{\longrightarrow}_S$.

Puisque dans le Lemme 3.24 nous montrons la confluence forte de la relation $\overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_{F_{\parallel}} \overset{*}{\longrightarrow}_S$ alors, la relation $\overset{*}{\longrightarrow}_S \longrightarrow_F \overset{*}{\longrightarrow}_S$ est confluente. \square

3.4 Conditions alternatives pour obtenir la confluence

Dans la Section 3.3.3 nous avons proposé une stratégie *ConfStrat* pour guider les règles d'évaluation du $\rho\theta$ -calcul. Nous avons montré que toutes les réductions obtenues en utilisant cette stratégie sont confluentes et que la stratégie devient triviale, c'est-à-dire n'impose aucune restriction, pour certaines instances spécifiques du calcul (e.g. le λ -calcul). Afin d'obtenir la confluence nous avons imposé des conditions relativement restrictives sur les termes du $\rho\theta$ -calcul

et sur l'application des règles d'évaluation et ces restrictions peuvent être relaxées au prix de la simplicité de la stratégie. Les conditions que nous voulons affaiblir concernent d'un côté, la forme des règles de réécriture et d'un autre côté, le nombre d'éléments dans l'argument d'une application.

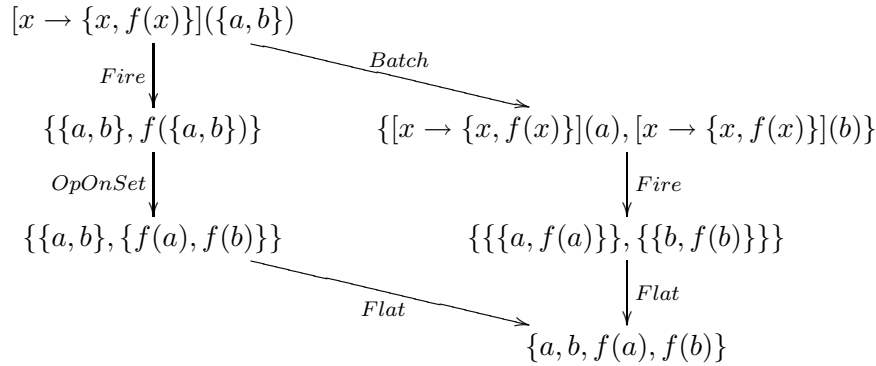
3.4.1 Règles de réécriture quasi-régulières et strictement linéaires à droite

Premièrement, l'absence des ensembles ayant plus d'un élément est nécessaire pour garantir un bon comportement pour les règles de réécriture non-linéaires à droite. Par linéarité à droite d'une règle de réécriture nous désignerons ici des membres droits linéaires par rapport aux variables du membre gauche. Par exemple, $x \rightarrow f(z, z)$ est linéaire à droite, mais $x \rightarrow f(x, x)$ n'est pas linéaire à droite. De plus, la linéarité du membre droit peut être imposée seulement aux opérateurs différents des symboles d'ensemble ($\{\}$) et ainsi, la règle de réécriture $x \rightarrow \{f(x), f(x)\}$ peut être considérée linéaire à droite. Intuitivement, nous n'avons pas besoin d'imposer la linéarité à droite pour les ensembles parce que, en raison de la règle d'évaluation *Flat*, ils ne mènent pas à des réductions non-convergentes comme dans l'Exemple 3.6.

Définition 3.12 *On dit que la ρ -règle de réécriture $l \rightarrow r$ est strictement linéaire à droite si tout sous-terme de r n'étant pas un ensemble est linéaire par rapport aux variables libres de l et toute règle de réécriture de r est strictement linéaire à droite.*

L'application d'une règle de réécriture qui n'est pas strictement linéaire à droite à un ensemble avec plus d'un élément mène à des réductions non-convergentes, comme montré dans l'Exemple 3.6 mais ce n'est pas le cas si la règle de réécriture appliquée est strictement linéaire à droite :

Exemple 3.10 *[Règle de réécriture strictement linéaire à droite appliquée à un ensemble ayant plus d'un élément]*



D'un autre côté, afin de garantir la propagation stricte de l'échec, nous avons demandé que la règle d'évaluation Fire_c soit appliquée seulement si l'argument de l'application n'est pas un ensemble vide et il ne peut pas mener à un ensemble vide. Dans l'Exemple 3.5 nous pouvons remarquer que les variables libres du membre gauche de la règle de réécriture ne sont pas préservées dans le membre droit de la règle. Si la règle de réécriture $l \rightarrow r$ de l'application conserve les variables du membre gauche dans le membre droit (e.g. $x \rightarrow x$) alors, l'application d'une substitution de la forme $\langle x/\emptyset \rangle$, avec x une variable de l , au terme r mène à un terme contenant \emptyset et donc, qui est réduit éventuellement en \emptyset .

Nous définissons par la suite plus formellement les règles de réécriture conservant les variables (libres) et nous présentons une nouvelle stratégie définie en utilisant cette propriété. D'abord,

nous introduisons une notion similaire à celle de variable libre mais en considérant cette fois-ci le comportement des opérateurs du ρ -calcul et en particulier la nature non-déterministe des ensembles.

Définition 3.13 *L'ensemble des variables présentes d'un ρ -terme t , noté $PV(t)$, est défini inductivement par :*

1. si $t = x$ alors $PV(t) = \{x\}$,
2. si $t = \{u_1, \dots, u_n\}$ alors $PV(t) = \bigcap_{i=1, \dots, n} PV(u_i)$ ($PV(\emptyset) = \mathcal{X}$),
3. si $t = f(u_1, \dots, u_n)$ alors $PV(t) = \bigcup_{i=1, \dots, n} PV(u_i)$ ($PV(c) = \emptyset$ si $c \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$),
4. si $t = [u](v)$ alors $PV(t) = PV(u) \cup PV(v)$,
5. si $t = u \rightarrow v$ alors $PV(t) = PV(v) \setminus FV(u)$.

L'ensemble de *variables libres* d'un ρ -terme ensemble est l'union des ensembles de variables libres de chaque ρ -terme de l'ensemble, tandis que l'ensemble de *variables présentes* d'un ρ -terme ensemble est l'intersection des ensembles de *variables présentes* de chaque ρ -terme de l'ensemble. Nous pouvons dire qu'une variable est *présente* dans un ensemble seulement si elle est présente dans tous les éléments de l'ensemble. Par exemple, $PV(\{x, y, x\}) = \emptyset$ et $PV(\{x, f(x, y)\}) = \{x\}$.

Nous voulons définir les règles de réécriture telles que les variables libres du membre gauche de la règle soit inclus dans l'ensemble de variables libres du membre droit de la règle mais en tenant compte du comportement de tous les opérateurs du ρ -calcul.

Définition 3.14 *On dit que la ρ -règle de réécriture $l \rightarrow r$ est quasi-régulière si $FV(l) \subseteq PV(r)$ et toute règle de réécriture de r est quasi-régulière.*

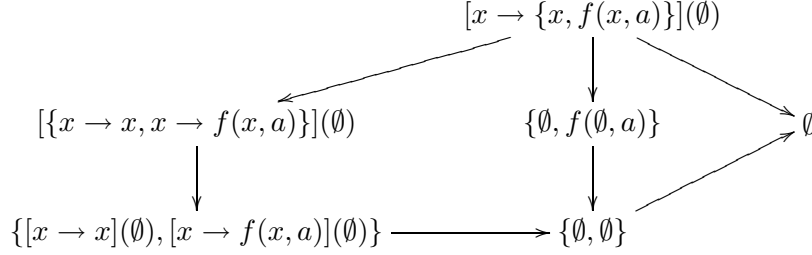
Intuitivement, à toute variable libre du membre gauche d'une règle de réécriture quasi-régulière correspond, d'une façon déterministe, une variable libre dans le membre droit de la règle. Pour tout ρ -terme ensemble dans r , la correspondance entre les variables libres des termes l et r doit être vérifiée pour chaque élément de l'ensemble.

Par exemple, la règle de réécriture $x \rightarrow f(x, y)$ est quasi-régulière tandis que la règle de réécriture $x \rightarrow \{x, y\}$ n'est pas quasi-régulière. La règle de réécriture $\{f(x), g(x)\} \rightarrow x$ est quasi-régulière tandis que la règle de réécriture $\{f(x), g(y)\} \rightarrow x$ n'est pas quasi-régulière. Si la définition des règles de réécriture quasi-régulières avait demandé la condition $PV(l) \subseteq PV(r)$, alors la règle de réécriture $\{f(x), g(y)\} \rightarrow x$ serait devenu quasi-régulière aussi. Ceci n'est pas souhaitable puisque la règle de réécriture $\{f(x), g(y)\} \rightarrow x$ est réduite en $\{f(x) \rightarrow x, g(y) \rightarrow x\}$ et seulement la première des deux règles est quasi-régulière. Notez que ces dernières règles de réécriture contiennent des ensembles dans leur membre gauche et donc, ne sont pas des termes de $\rho_0(\mathcal{F}, \mathcal{X})$. Remarquons que la règle de réécriture $x \rightarrow \emptyset$ est quasi-régulière aussi bien que la règle $\emptyset \rightarrow x$.

Puisque les variables du membre gauche d'une règle de réécriture quasi-régulière se retrouvent dans le membre droit, en appliquant une telle règle à un terme \emptyset nous garantissons qu'au moins une variable du membre droit de la règle est instanciée à \emptyset et donc, la propagation stricte de l'échec. Du point de vue des variables présentes d'une règle de réécriture, l'ensemble vide peut être vu comme un terme du premier ordre contenant toutes les variables utilisées afin de construire les ρ -termes et donc, le comportement approprié est assuré pour toute règle de réécriture quasi-régulière avec un \emptyset dans le membre droit.

Dans l'Exemple 3.5 nous avons montré que l'application d'une règle de réécriture qui n'est pas quasi-régulière à un ensemble vide peut mener à des résultats non-convergeants. Si la règle de réécriture est quasi-régulière, l'échec est distribué strictement et nous obtenons des réductions confluentes comme dans l'Exemple 3.11.

Exemple 3.11 [Règle de réécriture quasi-régulière appliquée à un ensemble vide]



En utilisant les notions de règle quasi-régulière et de règle linéaire à droite nous introduisons une nouvelle stratégie plus générale que la stratégie *ConfStrat* (3.3.3).

Définition 3.15 Nous appelons *ConfStratLin* la stratégie qui consiste à appliquer la règle d'évaluation *Fire* à un radical $[l \rightarrow r](t)$ seulement si $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est un terme clos du premier ordre ou :

- le terme l est linéaire
- et
- le terme l subsume faiblement le terme t
- et
- la règle $l \rightarrow r$ est quasi-régulière
- ou
- le terme t ne contient aucun ensemble vide et,
- le terme t ne contient pas de sous-terme de la forme $[u](v)$ où u n'est pas une abstraction et,
- pour tout sous-terme $[u \rightarrow w](v)$ de t , u subsume v ,
- et
- la règle $l \rightarrow r$ est strictement linéaire à droite
- ou
- le terme t ne contient aucun ensemble ayant plus d'un élément.

Par rapport à la stratégie *ConfStrat* nous permettons l'application de la règle d'évaluation *Fire* à une application avec un argument \emptyset ou qui peut être réduit en l'ensemble vide si la règle de réécriture de l'application est quasi-régulière. En plus, si la règle de réécriture est linéaire à droite nous permettons des arguments contenant un ensemble ayant plus d'un élément. Puisque on peut clairement décider si une règle est quasi-régulière, toutes les conditions utilisées dans la stratégie *ConfStratLin* sont décidables.

Pour prouver la confluence dans le cas de la stratégie *ConfStratLin* nous procédons de la même façon que pour la stratégie *ConfStrat* et nous considérons que la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ est modifiée afin de représenter la nouvelle stratégie. Nous montrons d'abord une propriété de préservation pour les notions de règle quasi-régulière et règle strictement linéaire à droite par rapport à la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ et que les lemmes utilisés dans la Section 3.3.7 restent valides dans le cas de la stratégie *ConfStratLin*.

Lemme 3.25 Etant donné une règle de réécriture quasi-régulière $u \rightarrow v$ et le terme v' tel que $v \longrightarrow_{F_{\parallel}} v'$ ou $v \longrightarrow_S v'$. Alors, la règle de réécriture $u \rightarrow v'$ est quasi-régulière.

Preuve : Afin d'obtenir ce résultat il suffit de prouver que pour tous ρ -termes v, v' tels que $v \longrightarrow_{F_{\parallel}} v'$ ou $v \longrightarrow_S v'$ nous avons $PV(v) \subseteq PV(v')$. Nous donnons juste une idée de la preuve qui utilise une induction sur la structure du terme v et considère toutes les réductions possibles.

Considérons d'abord une règle de réécriture $[l \rightarrow r](t)$ satisfaisant les bonnes conditions d'application. Dans le cas où le filtrage $l \ll_{\emptyset}^? t$ échoue, nous obtenons immédiatement un terme \emptyset et donc $PV([l \rightarrow r](t)) \subseteq \mathcal{X}$. Sinon, nous considérons que la substitution σ est la solution du problème de filtrage $l \ll_{\emptyset}^? t$ et nous avons l'union des ensembles de variables présentes de tous les termes de son codomaine égale à $PV(t)$. Puisque $FV(l) \subseteq PV(r)$ et nous avons $Dom(\sigma) = FV(l)$ alors $PV(\sigma r) = (PV(r) \setminus FV(l)) \cup PV(Ran(\sigma)) = (PV(r) \setminus FV(l)) \cup PV(t) = PV([l \rightarrow r](t))$.

Pour les réductions $v \longrightarrow_S v'$ le résultat est obtenu immédiatement par induction en remarquant que un \emptyset dans v mène à $v' = \emptyset$ si v n'est pas un ensemble. \square

Nous pouvons montrer facilement que la linéarité des membres gauches des règles de réécriture est préservée par les réductions respectant la stratégie *ConfStratLin*.

Lemme 3.26 *Etant donnée une règle de réécriture strictement linéaire à droite $u \rightarrow v$ et le terme v' tel que $v \longrightarrow_{F_{\parallel}} v'$ ou $v \longrightarrow_S v'$. Alors, la règle de réécriture $u \rightarrow v'$ est strictement linéaire à droite.*

Preuve : La preuve est réalisée par induction sur la structure du terme v en considérant toutes les réductions possibles.

Pour toute réduction $v \longrightarrow_S v'$ la linéarité de v' par rapport à u est clairement préservée. Par exemple, pour un terme de la forme $v = f(\{v_1, v_2\})$, v_1 et v_2 sont linéaires par rapport aux variables de u et donc, $f(v_1)$ et $f(v_2)$ sont aussi linéaires. Par conséquent, la règle de réécriture $u \rightarrow \{f(v_1), f(v_2)\}$ est strictement linéaire à droite.

Nous devrions vérifier si le terme v' peut devenir non-linéaire par rapport à u pour une réduction $v \longrightarrow_{F_{\parallel}} v'$. Ceci serait possible seulement en appliquant une règle de réécriture non-linéaire à droite dans un sous-terme de v mais il n'existe pas de telle règle dans v . \square

En utilisant les propriétés précédentes nous pouvons adapter les preuves de confluence de la Section 3.3.7 et considérant les nouveaux cas introduits par une stratégie *ConfStratLin*, c'est-à-dire l'application d'une règle de réécriture quasi-régulière à un terme contenant éventuellement l'ensemble vide et l'application d'une règle de réécriture strictement linéaire à droite à un terme contenant éventuellement des ensembles ayant plus d'un élément.

Théorème 3.5 *Si une stratégie d'évaluation *ConfStratLin* est utilisée, alors le ρ_0 -calcul est confluent.*

Preuve : La preuve du Lemme 3.18 est facilement adaptée en considérant des substitutions de la forme $\sigma = \langle x/\{t_1, \dots, t_n\} \rangle$ appliquées à un terme r tel que $x \rightarrow r$ soit strictement linéaire à droite et des substitutions de la forme $\sigma = \langle x/\emptyset \rangle$ appliquées à un terme r tel que $x \rightarrow r$ soit quasi-régulière.

Dans le Lemme 3.20 nous n'avons pas considéré des applications de règle de réécriture quasi-régulière à un argument \emptyset et des applications de règle de réécriture strictement linéaire à droite à un terme ayant plus d'un élément. Le Lemme 3.25 et le Lemme 3.26 nous permettent d'étendre le Lemme 3.18 dans le cas de la stratégie *ConfStratLin* et donc d'une règle d'évaluation *Fire_c* avec les conditions modifiées pour décrire cette stratégie.

Si nous considérons le terme r telle que la règle de réécriture $x \rightarrow r$ soit quasi-régulière et $r \longrightarrow_{F_{\parallel}} r^1$ alors, nous obtenons :

$$\begin{array}{ccc}
[x \rightarrow r](\emptyset) & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{\langle x/\emptyset \rangle r^1\} \\
\downarrow S & \nearrow S^* & \\
\emptyset & &
\end{array}
\quad \text{et} \quad
\begin{array}{ccc}
[x \rightarrow r](\emptyset) & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{\langle x/\emptyset \rangle r^1\} \\
\downarrow S & & \downarrow S^* \\
[x \rightarrow r'](\emptyset) & \xrightarrow{S^*} & \emptyset
\end{array}$$

Pour l'application d'une règle de réécriture strictement linéaire à droite à un terme ayant plus d'un élément nous obtenons :

$$\begin{array}{ccc}
[x \rightarrow r](\{p_1, \dots, p_n\}) & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \{\langle x/\{p_1, \dots, p_n\} \rangle r^1\} \\
\downarrow S & & \downarrow S^* \\
\{[x \rightarrow r](p_1), \dots, [x \rightarrow r](p_n)\} & & u \\
\downarrow S^* & \xrightarrow{F_{\parallel}} & \downarrow S^* \\
\{\langle x/p_1 \rangle r, \dots, \langle x/p_n \rangle r\} & & \{\langle x/p_1 \rangle r^1, \dots, \langle x/p_n \rangle r^1\}
\end{array}$$

Nous pouvons ainsi montrer que la relation $\rightarrow_{F_{\parallel}}$ induite par la nouvelle règle $Fire_c$ utilisant les conditions de la stratégie $ConfStratLin$ et la relation \rightarrow_S sont cohérentes. Puisque les autres lemmes utilisés pour prouver la confluence des relation induites par les règles d'évaluation du calcul n'utilisent pas les restrictions sur le nombre d'éléments des ensembles, nous déduisons la confluence des réductions guidées par la stratégie $ConfStratLin$. \square

3.4.2 Règles de réécriture stables

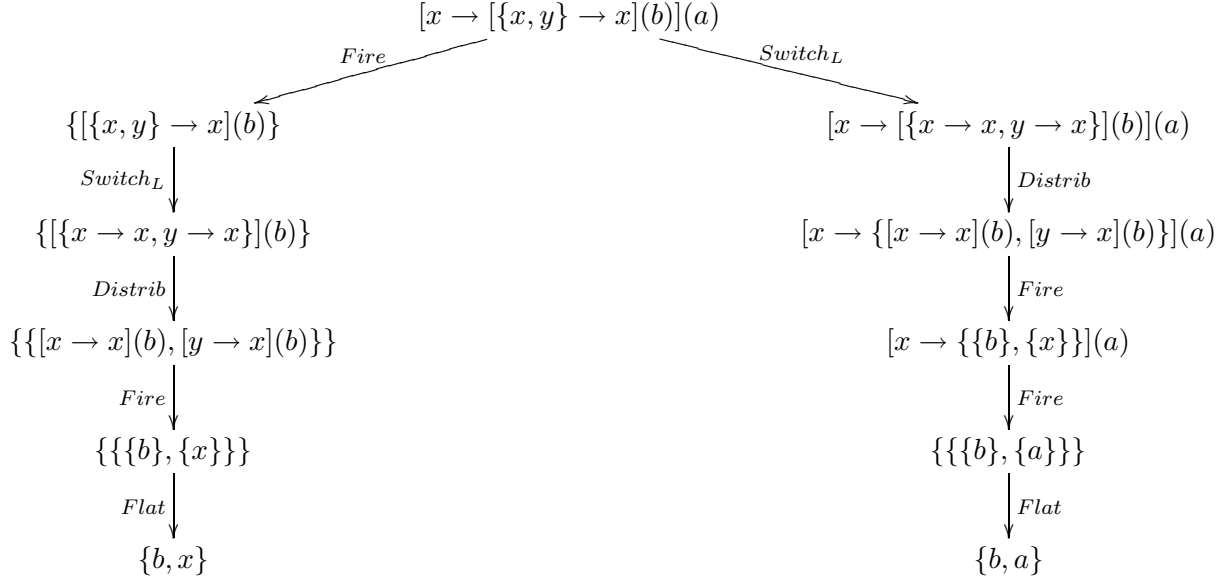
Nous avons montré la confluence du calcul $(\varrho_{\emptyset}(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \emptyset, \mathcal{S})$ (i.e. le ρ_{\emptyset} -calcul) où la stratégie \mathcal{S} est une des stratégies $ConfStrat$, $ConfStratLin$ et nous présentons brièvement par la suite les problèmes liés à la confluence du calcul $(\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \emptyset, \mathcal{S})$ que nous appelons le ρ_{\emptyset}^+ -calcul.

Définition 3.16 *Etant donné un ensemble de symboles de fonctions \mathcal{F} , un ensemble de variables \mathcal{X} , nous appelons ρ_{\emptyset}^+ -calcul un calcul défini par :*

- l'ensemble de termes $\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$,
- l'application (d'ordre supérieur) de substitution aux termes,
- la théorie \emptyset (filtrage syntaxique),
- l'ensemble de règles d'évaluation $\mathcal{E} : Fire, Congruence, Congruence_fail, Distrib, Batch, Switch_L, Switch_R, OpOnSet, Flat$,
- une stratégie d'évaluation \mathcal{S} qui guide l'application des règles d'évaluation.

Rappelons que les règles de réécriture de l'ensemble de termes $\varrho_{\emptyset}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ ne peuvent avoir qu'un terme du premier ordre dans le membre gauche. Cette restriction a du être imposée à cause de l'instabilité de la notion de variable libre par rapport aux règles d'évaluation du calcul qui mène immédiatement à l'instabilité des réductions par rapport à la substitution. Par exemple, l'ensemble des variables libres d'un terme $\{x, y\} \rightarrow x$ est $FV(\{x, y\} \rightarrow x) = \emptyset$ mais pour le terme résultant de l'application de la règle d'évaluation $Switch_L$ sur le terme initial nous obtenons $FV(\{x \rightarrow x, y \rightarrow x\}) = FV(x \rightarrow x) \cup FV(y \rightarrow x) = \{x\}$. Si le membre gauche des règle de réécriture contient de tels termes alors, nous pouvons obtenir facilement des réductions non-confluentes, comme dans l'Exemple 3.12.

Exemple 3.12 [Règle avec un ensemble dans le membre gauche]



Une première méthode utilisée pour obtenir la confluence du ρ_\emptyset^+ -calcul consiste à définir une stratégie qui combine les conditions sur les termes de $\varrho_\emptyset(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et les restrictions imposées par les stratégies déjà définies.

Définition 3.17 Nous appelons *ConfStratPlus* la stratégie qui consiste à appliquer la règle d'évaluation *Fire* à un radical $[l \rightarrow r](t)$ seulement si les conditions de la stratégie *ConfStratLin* sont satisfaites et tous les membres gauches des règles de réécriture de r sont des termes du premier ordre.

Il est clair que si une stratégie d'évaluation *ConfStratPlus* est utilisée, alors le ρ_\emptyset^+ -calcul est confluent.

La restriction sur la forme des règles de réécriture est relativement restrictive et nous voulons alléger cette restriction en gardant la confluence du calcul. Afin d'obtenir la confluence nous devons imposer une condition garantissant la stabilité des réductions par rapport à la substitution, c'est-à-dire un résultat similaire au Lemme 3.16 pour les termes de $\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$.

En utilisant la notion de variable présente nous définissons les règles de réécriture conservant l'ensemble de variables libres et ainsi, ne menant pas à des réductions non-convergentes comme dans l'Exemple 3.12.

Définition 3.18 On dit que la ρ -règle de réécriture $l \rightarrow r$ est stable si $FV(r) \cap FV(l) = FV(r) \cap PV(l)$ et toute règle de réécriture de r est stable.

Intuitivement, le membre gauche d'une règle de réécriture stable peut lier seulement ses variables présentes dans le membre droit de la règle. Ainsi, toute règle de réécriture avec le membre gauche un terme du premier ordre est stable.

Exemple 3.13 Les règles de réécriture $x \rightarrow f(x, y)$ et $\{f(x, y), g(x)\} \rightarrow x$ sont stables et la première règle est quasi-régulière tandis que la deuxième règle n'est pas quasi-régulière. La règle de réécriture $x \rightarrow \{x, y\}$ n'est pas quasi-régulière mais elle est stable.

Nous définissons une nouvelle stratégie en utilisant la notion de règle de réécriture stable pour remplacer la restriction imposée sur la forme des règles de réécriture dans la définition de la stratégie *ConfStratPlus*.

Définition 3.19 Nous appelons *ConfStratStable* la stratégie qui consiste à appliquer la règle d'évaluation *Fire* à un radical $[l \rightarrow r](t)$ seulement si les conditions pour la stratégie *ConfStratLin* sont satisfaites et toutes les règles de réécriture dans r sont stables.

La condition qu'une règle de réécriture soit stable est clairement décidable et donc, toutes les conditions utilisées dans la stratégie *ConfStratStable* sont décidables.

Pour prouver la confluence du ρ_0^+ -calcul avec les règles d'évaluation guidées par une stratégie *ConfStratStable* il suffit de remarquer que parmi les lemmes prouvés dans la Section 3.3 seulement le Lemme 3.16 utilise la restriction imposant des règles de réécriture ayant un terme du premier ordre dans le membre gauche. Nous démontrons un lemme similaire pour la stratégie *ConfStratStable* et nous déduisons immédiatement la confluence du calcul dans ce cas.

Lemme 3.27 *Etant donné le terme t ne contenant que des règles de réécriture stables et une substitution σ . Si $t \rightarrow_S t'$ alors, $\sigma t \xrightarrow{*}_S \sigma t'$.*

Preuve : Cette propriété a été prouvée dans le Lemme 3.16 pour les termes appartenant à $\rho_0(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et donc, seulement les règles de réécriture de la forme $t = \{u_1, \dots, u_n\} \rightarrow v$ avec $t' = \{u_1 \rightarrow v, \dots, u_n \rightarrow v\}$ n'ont pas été considérées.

Nous avons $FV(\{u_1, \dots, u_n\} \rightarrow v) = FV(v) \setminus (\cup_i FV(u_i))$, $FV(\{u_1 \rightarrow v, \dots, u_n \rightarrow v\}) = \cup_i (FV(v) \setminus FV(u_i))$ et $FV(v) \cap FV(\{u_1, \dots, u_n\}) = FV(v) \cap PV(\{u_1, \dots, u_n\})$. Ainsi, toute variable de $FV(\{u_1, \dots, u_n\})$ éliminée de $FV(v)$ doit être une variable de $PV(\{u_1, \dots, u_n\})$ et donc, elle doit être présente dans tous les termes u_i . Nous obtenons donc,

$$FV(v) \setminus (\cup_i FV(u_i)) = FV(v) \setminus FV(u_1) = \dots = FV(v) \setminus FV(u_n) = \cup_i (FV(v) \setminus FV(u_i)).$$

Nous pouvons donc considérer une substitution σ telle que $\text{Dom}(\sigma) \cap PV(\{u_1, \dots, u_n\}) = \emptyset$ et ainsi, nous obtenons $\sigma t = \{u_1, \dots, u_n\} \rightarrow \sigma v$. Par conséquent, nous pouvons utiliser une induction sur la structure des termes comme dans le Lemme 3.16. \square

Théorème 3.6 *Si une stratégie d'évaluation *ConfStratStable* est utilisée, alors le ρ_0^+ -calcul est confluente.*

Nous pouvons ainsi dire que le calcul $(\rho(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \emptyset, \text{ConfStratStable})$ est confluente.

3.4.3 Stratégies dans le ρ_T -calcul

Dans les stratégies que nous avons proposées jusqu'à maintenant notre but principal était de permettre le maximum de réductions en gardant des conditions décidables relativement simples à comprendre et à implanter.

La théorie de filtrage vide du ρ_0 -calcul nous a permis d'imposer des conditions d'application pour la règle d'évaluation *Fire* relativement simple à décider mais dès que la théorie T de filtrage est plus élaborée les notions utilisées doivent être modifiées en conséquence.

Si nous considérons une théorie T non-unitaire par exemple, l'absence des ensembles ayant plus d'un élément dans un terme ne garantit pas l'absence des telles ensembles dans son réduit. Par exemple, dans une théorie de filtrage avec un opérateur commutatif \oplus , le terme $[x \oplus y \rightarrow x](a \oplus b)$ ne contient pas d'ensemble ayant plus d'un élément mais son réduit $\{a, b\}$ ne satisfait plus cette condition. Ainsi, la condition sur la réduction d'une application $[l \rightarrow r](t)$ en utilisant la règle d'évaluation *Fire* doit imposer non seulement que t ne contient pas d'ensemble ayant plus d'un élément mais aussi qu'il ne contient pas de radical de la forme $[u](v)$. En plus, les notions de subsomption doivent être adaptées afin de tenir compte des caractéristiques de la théorie T .

Des conditions similaires à celles utilisées dans les stratégies pour le ρ_0 -calcul sont difficile à définir dans le cas général du ρ_T -calcul mais nous pouvons imposer des conditions plus restrictives

sur l'application de la règle d'évaluation *Fire* pour une application $[l \rightarrow r](t)$ impliquant les conditions utilisées précédemment.

Définition 3.20 *Nous appelons $\text{ConfStratFirstOrder}$ la stratégie qui consiste à appliquer la règle d'évaluation *Fire* à un radical $[l \rightarrow r](t)$ seulement si l, r sont des termes du premier ordre et t est un terme clos du premier ordre.*

La stratégie $\text{ConfStratFirstOrder}$ est assez restrictive mais, puisque les conditions imposées sont purement structurelles, elle peut être implantée d'une manière très efficace et ses propriétés, avec en particulier la confluence, sont plus facile à analyser.

Théorème 3.7 *Si une stratégie d'évaluation $\text{ConfStratFirstOrder}$ est utilisée, alors le ρ_T -calcul est confluent.*

Preuve : En partant de la règle d'évaluation *Fire* qui est appliquée pour un ρ -terme $[l \rightarrow r](t)$ si les conditions de la stratégie $\text{ConfStratFirstOrder}$ sont imposées nous considérons la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ induite par cette règle d'évaluation.

La preuve de la cohérence de cette relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ avec la relation \longrightarrow_S (Définition 3.9) peut être facilement adaptée pour le ρ_T -calcul avec les règles d'évaluation guidées par la stratégie $\text{ConfStratFirstOrder}$. Nous obtenons immédiatement la confluence forte de la relation $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ et en utilisant une approche similaire que pour le ρ_0 -calcul nous obtenons la confluence du ρ_T -calcul. \square

Nous pouvons ainsi dire que le calcul $(\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X}), T, \text{ConfStratFirstOrder})$ est confluent.

Nous pouvons aussi voir les stratégies définies précédemment pour le ρ_0 -calcul comme des raffinements de la stratégie $\text{ConfStratFirstOrder}$ utilisables dans un ρ -calcul avec une théorie de filtrage vide. De la même façon, des raffinements de la stratégie $\text{ConfStratFirstOrder}$ peuvent être réalisées pour des théories équationnelles mais ceci devient plus difficile pour des théories de filtrage d'ordre supérieur.

Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la confluence du ρ -calcul. En analysant des exemples de réductions non-convergentes dans le ρ_0 -calcul, nous avons remarqué que les raisons de la non-confluence de ce calcul sont le pouvoir limité du filtrage syntaxique et la manipulation des ensembles.

Afin de résoudre ce problème nous avons proposé des stratégies d'évaluation garantissant la confluence. Une stratégie simple consiste à réduire l'application d'une règle de réécriture seulement si le sujet de l'application est un terme clos du premier ordre, mais cette stratégie est relativement restrictive. Nous avons donc proposé une stratégie moins restrictive définie en imposant des conditions sur les ρ -réductions possibles des termes impliqués dans une application. Cette stratégie devient triviale (c'est-à-dire n'impose aucune restriction) pour certaines instances du calcul, mais les conditions imposées ne sont pas utilisables dans une implantation du ρ -calcul. Par conséquent, nous avons défini des conditions décidables sur les ρ -termes et des stratégies confluentes définies en utilisant ces restrictions. Nous avons présenté ces résultats dans [CK99a] et [CK99b].

Chapitre 4

Récurtivité dans le ρ -calcul - le ρ_T^{1st} -calcul

Le pouvoir d'expression du ρ -calcul nous permet de représenter des λ -termes et leur dérivation ainsi que l'application d'une règle de réécriture de la réécriture de termes classique. Les λ -termes contiennent toute l'information nécessaire pour leur réduction tandis que dans la réécriture cette information est implicite et différentes stratégies peuvent être utilisées pour guider l'application des règles de réécriture. En effet, les travaux de Huet et Levy [HL79, HL91] et d'O'Donnell [HO83] ont inspiré l'étude de stratégies efficaces de réduction.

La description explicite des stratégies de réduction nécessite l'utilisation d'un opérateur testant l'échec de l'application d'une règle de réécriture. Nous introduisons donc un opérateur *first* décrivant l'application du premier argument ne menant pas à un échec. Nous appelons ρ^{1st} -calcul le calcul obtenu en ajoutant la description de cet opérateur au ρ -calcul. Nous présentons une définition des stratégies de réduction *innermost* et *outermost* basée sur des opérateurs définis dans le ρ^{1st} -calcul.

4.1 Présentation de la problématique

L'application d'une règle de réécriture de la réécriture standard est décrite explicitement dans le ρ -calcul par un ρ -terme approprié. Par exemple, l'application de la règle de réécriture $a \rightarrow b$ au terme a est représentée par le ρ -terme $[a \rightarrow b](a)$. La réduction de cette application en le terme b dans la réécriture correspond à la réduction du ρ -terme $[a \rightarrow b](a)$ en le ρ -terme $\{b\}$ dans le ρ -calcul. Mais une réduction en réécriture peut impliquer l'application de plusieurs règles et puisque nous voulons représenter dans le ρ -calcul toute réduction de la réécriture et pas seulement les réductions nécessitant un seul pas de réécriture alors nous voulons répondre à la question :

Etant donnée une théorie de réécriture \mathcal{R} existe-il un ρ -terme $\xi_{\mathcal{R}}$ tel que pour tout terme u , si u se réduit en le terme v dans la théorie de réécriture \mathcal{R} alors $[\xi_{\mathcal{R}}](u)$ se ρ -réduit en un ensemble contenant le ρ -terme v ?

Nous allons voir dans la Section 5.2.2 que pour toute réduction dans une théorie de réécriture, il existe une réduction correspondante dans le ρ -calcul : si le terme u se réduit en le terme v dans une théorie de réécriture \mathcal{R} nous pouvons construire un ρ -terme $\xi_{\mathcal{R}}(u)$ qui se réduit en le terme

$\{v\}$ dans le ρ -calcul. La méthode utilisée permet de construire le terme $\xi_{\mathcal{R}}(u)$ à partir des étapes de réduction de u en v dans la théorie \mathcal{R} .

Nous voulons aller plus loin et donner une méthode pour construire le terme $\xi_{\mathcal{R}}(u)$ sans connaître la dérivation de u en v dans la théorie \mathcal{R} . Ce problème s'avère plus difficile parce que les propriétés du système de réécriture, comme la terminaison et la confluence, ne sont pas connues *a priori*.

Ceci signifie que nous souhaitons décrire dans le ρ -calcul des stratégies de réduction et, principalement, des stratégies de normalisation. Les ρ -termes représentant des stratégies de normalisation nous permettront d'obtenir, entre autres, un codage naturel de la réécriture conditionnelle. La question que nous nous sommes posée précédemment peut être ainsi reformulée en :

Etant donnée une théorie de réécriture \mathcal{R} existe-il un ρ -terme $\xi_{\mathcal{R}}$ tel que pour tout terme u , si u se normalise en le terme v dans la théorie de réécriture \mathcal{R} alors $[\xi_{\mathcal{R}}](u)$ se ρ -réduit en un ensemble contenant le ρ -terme v ?

La définition de stratégies (de normalisation) est faite en général au méta-niveau et nous voulons montrer que le ρ -calcul est assez puissant pour nous permettre la représentation de telles dérivations au niveau objet du calcul. Dans la Section 5.1 nous montrerons que le ρ_0 -calcul contient le λ -calcul et donc, toute fonction calculable, comme la normalisation par exemple, est exprimable dans le formalisme.

Ce que nous apportons ici, grâce à la puissance du filtrage et à l'utilisation du non-déterminisme, est la facilité d'exprimer en utilisant les ρ -termes, des stratégies (de normalisation) guidant l'application d'une ou plusieurs règles de réécriture. Nous pouvons ainsi exprimer les stratégies dans un formalisme uniforme combinant les mécanismes standard de réécriture et les techniques d'ordre supérieur.

Pour calculer la forme normale d'un terme u par rapport à un système de réécriture \mathcal{R} , les règles de réécriture de \mathcal{R} sont appliquées *répétitivement* à une position *quelconque* de u jusqu'à ce qu'aucune règle de \mathcal{R} ne soit plus *applicable*. Par conséquent, les ingrédients nécessaires pour définir une telle stratégie sont :

- un opérateur d'itération qui applique *répétitivement* des règles de réécriture,
- un opérateur de parcours de termes qui applique une règle de réécriture à une position *quelconque* d'un terme,
- un opérateur testant si un ensemble de règles de réécriture est *applicable* sur un terme.

Il existe évidemment plusieurs stratégies de réduction obtenues en précisant la position d'application des règles de réécriture à chaque pas de réduction. Par exemple, si les règles de réécriture sont appliquées d'abord à la position la plus profonde alors une stratégie *innermost* est obtenue tandis que si les règles de réécriture sont appliquées en tête alors une stratégie *outermost* est obtenue.

Nous décrivons par la suite une possibilité de définir dans le ρ -calcul les opérateurs utilisés pour la définition de stratégies. Nous commençons par quelques opérateurs auxiliaires et ensuite nous présentons les ρ -opérateurs qui correspondent aux fonctionnalités énumérées ci-dessus.

4.2 Opérateurs auxiliaires

Nous définissons d'abord trois opérateurs auxiliaires qui seront utilisés dans les sections suivantes. Ces opérateurs sont simplement utilisés pour définir et nommer des ρ -termes plus com-

plexes et ont été introduits pour donner des définitions plus compactes et plus intuitives pour les opérateurs de récursion.

Le premier de ces trois opérateurs est appelé *l'identité* et noté *id*. L'application de cet opérateur sur un ρ -terme quelconque t est réduite en le singleton contenant ce terme, c'est-à-dire $[id](t) \longrightarrow_\rho \{t\}$. Le ρ -terme *id* n'est rien d'autre que la règle de réécriture $x \rightarrow x$:

$$id \triangleq x \rightarrow x.$$

De la même manière nous pouvons définir la stratégie *fail* qui échoue toujours :

$$fail \triangleq x \rightarrow \emptyset.$$

Nous introduisons aussi l'opérateur binaire “;” qui représente l'application séquentielle de deux ρ -termes. Un ρ -terme de la forme $[u;v](t)$ représente l'application du terme v sur le résultat de l'application du terme u sur le terme t . Par conséquent, nous définissons l'opérateur “;” par :

$$u;v \triangleq x \rightarrow [v]([u](x)).$$

Dans les sections suivantes nous employons généralement la forme abrégée de ces opérateurs et pas leur forme étendue mais nous montrons éventuellement les réductions correspondantes.

4.3 L'opérateur *first* et le ρ_T^{1st} -calcul

Nous analysons maintenant la possibilité de représenter dans le ρ -calcul le test d'applicabilité d'une règle sur un terme, c'est-à-dire tester si le résultat n'est pas \emptyset . Ce test sera utilisé principalement pour appliquer une règle de réécriture seulement si elle ne mène pas au résultat \emptyset et nous définissons un opérateur qui cherche les termes qui ne mènent pas à un échec.

Description de l'opérateur *first*

Nous introduisons un nouvel opérateur n -aire appelé *first* qui a le rôle de sélectionner parmi ses arguments le premier terme dont l'application à un ρ -terme donné n'est pas réduite en \emptyset .

Nous voulons donc que l'application d'un ρ -terme $first(s_1, \dots, s_n)$ à un terme t retourne le résultat de la première application sans échec d'un de ses arguments au terme t . Si la réduction de tout terme $[s_i](t)$, $i = 1, \dots, k-1$, mène à \emptyset et que le terme $[s_k](t)$ ne se réduit pas en \emptyset , alors $[first(s_1, \dots, s_n)](t)$ est réduit en le même terme que le terme $[s_k](t)$.

Ainsi, lorsque la réduction de tout terme $[s_i](t)$, $i = 1, \dots, k-1$, mène à \emptyset et que la réduction de $[s_k](t)$ ne termine pas alors la réduction du terme $[first(s_1, \dots, s_n)](t)$ ne termine pas.

Nous pouvons résumer la description de l'opérateur *first* donné ci-dessus par les deux règles d'évaluation *First'* et *First''* :

$$\begin{array}{ll} First' & [first(s_1, \dots, s_n)](t) \implies \{u_k \downarrow\} \\ & \text{si } [s_i](t) \xrightarrow{*}_\rho \emptyset, i = 1, \dots, k-1 \\ & \quad [s_k](t) \xrightarrow{*}_\rho u_k \downarrow \neq \emptyset, u_k \downarrow \text{ clos, sans radical} \\ First'' & [first(s_1, \dots, s_n)](t) \implies \emptyset \\ & \text{si } [s_i](t) \xrightarrow{*}_\rho \emptyset, i = 1, \dots, n \end{array}$$

Dans les deux règles précédentes la condition qu'un terme soit réduit en \emptyset ou en un terme clos en forme normale ($u_k \downarrow$) est testée au méta-niveau du calcul. En procédant de cette manière,

des opérations intrinsèques au niveau objet doivent être exécutées au méta-niveau et donc, les réductions au niveau objet ne contiennent plus toute l'information sous-jacente.

Par exemple, en utilisant la règle *First'* le ρ -terme $[first(a \rightarrow b, b \rightarrow c)](b)$ est réduit dans un seul pas en $\{c\}$:

$$[first(a \rightarrow b, b \rightarrow c)](b) \longrightarrow_{First'} \{c\}$$

et donc les réductions $[a \rightarrow b](b) \rightarrow \emptyset$ et $[b \rightarrow c](b) \rightarrow \{c\}$ ne sont plus visibles au niveau objet.

Le ρ_T^{1st} -calcul

Pour rendre explicite le fonctionnement de l'opérateur *first* nous introduisons un nouvel opérateur *n*-aire " $\langle \rangle$ " qui, intuitivement, sélectionne les termes non vides. Contrairement à un terme de la forme $\{t_1, \dots, t_n\}$ où la virgule est supposée respecter les axiomes des ensembles (associativité, commutativité, idempotence), nous ne faisons aucune supposition sur un terme $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ où l'ordre des arguments est essentiel dans l'évaluation.

Définition 4.1 *L'ensemble des ρ^{1st} -termes étend l'ensemble $\mathcal{Q}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ de ρ -termes de base (Définition 2.1) comme étant le plus petit ensemble tel que :*

- les éléments de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ sont des ρ^{1st} -termes,
- si t_1, \dots, t_n sont des ρ^{1st} -termes et $f \in \mathcal{F}_n$ alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un ρ^{1st} -terme,
- si t_1, \dots, t_n sont des ρ^{1st} -termes alors $\{t_1, \dots, t_n\}$ est un ρ^{1st} -terme,
- si t et u sont des ρ^{1st} -termes alors $[t](u)$ est un ρ^{1st} -terme,
- si t et u sont des ρ^{1st} -termes alors $t \rightarrow u$ est un ρ^{1st} -terme.
- si t_1, \dots, t_n sont des ρ^{1st} -termes alors $first(t_1, \dots, t_n)$ est un ρ^{1st} -terme,
- si t_1, \dots, t_n sont des ρ^{1st} -termes alors $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ est un ρ^{1st} -terme.

Cet ensemble est noté $\mathcal{Q}^{1st}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$.

Les règles d'évaluation décrivant l'opérateur *first* et l'opérateur auxiliaire $\langle \rangle$ sont présentées dans la Figure 4.1. La description des deux opérateurs utilise une condition qui teste si un terme est (évalué en) un ensemble vide et nous ne savons pas actuellement exprimer ces opérateurs dans le ρ -calcul de base.

<i>First</i>	$[first(s_1, \dots, s_n)](t)$	\Longrightarrow	$\langle [s_1](t), \dots, [s_n](t) \rangle$
<i>First_fail</i>	$\langle \emptyset, t_1, \dots, t_n \rangle$	\Longrightarrow	$\langle t_1, \dots, t_n \rangle$
<i>First_success</i>	$\langle t, t_1, \dots, t_n \rangle$	\Longrightarrow	$\{t\}$
			si t ne contient pas de radical et de variable libre et n'est pas \emptyset
<i>First_single</i>	$\langle \rangle$	\Longrightarrow	$\{\}$

FIG. 4.1: Les règles d'évaluation de l'opérateur *first*

L'opérateur *first* lance l'évaluation de l'application de ses arguments sur le terme donné et l'opérateur $\langle \rangle$ teste explicitement l'échec de ces applications. Les conditions testées par les règles d'évaluation présentées dans la Figure 4.1 sont des conditions structurelles sur les termes et n'impliquent aucune réduction au méta-niveau.

Avec cette dernière approche toutes les applications des règles d'évaluation sont effectuées au niveau objet du calcul et la réduction du terme $[first(a \rightarrow b, b \rightarrow c)](b)$ présentée précédemment devient :

$$\begin{array}{ll}
& [first(a \rightarrow b, b \rightarrow c)](b) \\
\longrightarrow_{First} & \langle [a \rightarrow b](b), [b \rightarrow c](b) \rangle \\
\longrightarrow_{Fire}^* & \langle \emptyset, \{c\} \rangle \\
\longrightarrow_{First_fail} & \langle \{c\} \rangle \\
\longrightarrow_{First_success} & \{\{c\}\} \\
\longrightarrow_{Flat} & \{c\}
\end{array}$$

Nous étendons maintenant la Définition 2.7 du ρ_T -calcul en considérant les nouveaux opérateurs et les règles d'évaluation correspondantes.

Définition 4.2 *Etant donné un ensemble de symboles de fonctions \mathcal{F} , un ensemble de variables \mathcal{X} , une théorie T sur les termes du $\rho^{1st}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ avec un problème de filtrage décidable, nous appelons ρ_T^{1st} -calcul un calcul défini par :*

- un sous-ensemble non vide $\rho^{1st}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ de l'ensemble de termes $\rho^{1st}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$,
- l'application (d'ordre supérieur) de substitution aux termes,
- une théorie T ,
- l'ensemble de règles d'évaluation noté $\mathcal{E}_{\rho^{1st}}$: *Fire, Congruence, Congruence_fail, Distrib, Batch, Switch_L, Switch_R, OpOnSet, Flat, First, First_fail, First_success et First_single*,
- une stratégie d'évaluation \mathcal{S} qui guide l'application des règles d'évaluation.

Les exemples suivants présentent la réduction de certains ρ^{1st} -termes contenant les opérateurs du calcul étendu.

Exemple 4.1 *L'application non-déterministe d'une des règles $a \rightarrow b, a \rightarrow c, a \rightarrow d$ au terme a est représentée dans le ρ -calcul par l'application $[a \rightarrow b, a \rightarrow c, a \rightarrow d](a)$. Ce dernier ρ -terme est réduit en l'ensemble $\{b, c, d\}$ qui représente un choix non-déterministe parmi les trois termes. Si nous voulons appliquer les règles $a \rightarrow b, a \rightarrow c, a \rightarrow d$ d'une façon déterministe et dans l'ordre précisé, nous utilisons le ρ -terme $[first(a \rightarrow b, a \rightarrow c, a \rightarrow d)](a)$ avec par exemple la réduction :*

$$\begin{array}{ll}
& [first(a \rightarrow b, a \rightarrow c, a \rightarrow d)](a) \\
\longrightarrow_{First} & \langle [a \rightarrow b](a), [a \rightarrow c](a), [a \rightarrow d](a) \rangle \\
\longrightarrow_{Fire} & \langle \{b\}, [a \rightarrow c](a), [a \rightarrow d](a) \rangle \\
\longrightarrow_{First_success} & \{\{b\}\} \\
\longrightarrow_{Flat} & \{b\}
\end{array}$$

Nous pouvons remarquer que même si toutes les règles de réécriture utilisées s'appliquent au terme a avec succès (pas de \emptyset), le résultat final est donné par la première règle de réécriture essayée.

Exemple 4.2 *Nous considérons maintenant le cas où certaines règles données en argument à *first* mènent à un échec :*

$$\begin{array}{ll}
& [first(a \rightarrow b, b \rightarrow c, a \rightarrow d)](b) \\
\longrightarrow_{First} & \langle [a \rightarrow b](b), [b \rightarrow c](b), [a \rightarrow d](b) \rangle \\
\longrightarrow_{Fire} & \langle \emptyset, [b \rightarrow c](b), [a \rightarrow d](b) \rangle \\
\longrightarrow_{First_fail} & \langle [b \rightarrow c](b), [a \rightarrow d](b) \rangle \\
\longrightarrow_{Fire} & \langle \{c\}, [a \rightarrow d](b) \rangle
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \longrightarrow_{First_success} & \{\{c\}\} \\ \longrightarrow_{Flat} & \{c\} \end{array}$$

Exemple 4.3 Si aucune des règles données en argument à *first* n'est appliquée avec succès le résultat est bien sur l'ensemble vide :

$$\begin{array}{ll} \longrightarrow_{First} & [first(a \rightarrow b, a \rightarrow c, a \rightarrow d)](b) \\ \longrightarrow_{Fire}^* & \langle [a \rightarrow b](b), [a \rightarrow c](b), [a \rightarrow d](b) \rangle \\ \longrightarrow_{First_fail}^* & \langle \rangle \\ \longrightarrow_{First_single} & \emptyset \end{array}$$

En utilisant l'opérateur *first* nous introduisons d'autres opérateurs permettant une description plus concise et intuitive des ρ -termes. Par exemple, nous pouvons définir un terme

$$try(s) \triangleq first(s, id)$$

tel que l'application de ce terme au terme t est réduite en le résultat de l'application $[s](t)$ si $[s](t)$ n'est pas réduite en \emptyset et à $\{t\}$ si $[s](t)$ est réduite en \emptyset .

L'opérateur *dc*

L'ordre des arguments de l'opérateur *first* dans un terme $first(t_1, \dots, t_n)$ est essentiel pour la réduction d'une application $[t](u)$. Nous pouvons définir facilement deux opérateurs n -aire *dc* (*dont care choose*) et “ $\langle\langle\rangle\rangle$ ” avec un comportement similaire à celui des opérateurs *first* et $\langle\rangle$ mais cette fois-ci sans imposer un ordre sur l'application et sur l'évaluation des arguments respectivement. Pour cela, dans les termes de la forme $\langle\langle t_1, \dots, t_n \rangle\rangle$ nous considérons que la virgule est associative, commutative et idempotente. Les règles d'évaluation caractérisant ces opérateurs sont présentées dans la Figure 4.2.

<i>DC</i>	$[dc(s_1, \dots, s_n)](t)$	\Longrightarrow	$\langle\langle [s_1](t), \dots, [s_n](t) \rangle\rangle$
<i>DC_fail</i>	$\langle\langle t_1, \dots, t_{k-1}, \emptyset, t_{k+1}, \dots, t_n \rangle\rangle$	\Longrightarrow	$\langle\langle t_1, \dots, t_n \rangle\rangle$
<i>DC_success</i>	$\langle\langle t_1, \dots, t, \dots, t_n \rangle\rangle$	\Longrightarrow	$\{t\}$
			si t ne contient pas de radical et de variable libre et il n'est pas \emptyset
<i>DC_single</i>	$\langle\langle \rangle\rangle$	\Longrightarrow	\emptyset

FIG. 4.2: Les règles d'évaluation de l'opérateur *dc*

De la même manière que l'opérateur *first*, l'opérateur *dc* lance l'évaluation de l'application de ses arguments sur le terme donné. L'opérateur $\langle\langle\rangle\rangle$ teste l'échec de la réduction de ses arguments mais, contrairement à l'opérateur $\langle\rangle$, pas dans un ordre précis. Dès que nous trouvons un terme t_k clos en forme normale parmi les arguments d'un terme $\langle\langle t_1, \dots, t_n \rangle\rangle$ nous pouvons fournir $\{t_k\}$ comme résultat et ignorer les autres arguments. Toute réduction en \emptyset d'un argument est ignorée.

Exemple 4.4 En utilisant les règles d'évaluation précédentes nous obtenons deux réductions possibles pour le terme $[dc(a \rightarrow b, a \rightarrow c)](a)$ menant soit au terme $\{b\}$, soit au terme $\{c\}$.

$$\begin{array}{ll}
[dc(a \rightarrow b, a \rightarrow c)](a) & [dc(a \rightarrow b, a \rightarrow c)](a) \\
\longrightarrow \langle\langle [a \rightarrow b](a), [a \rightarrow c](a) \rangle\rangle & \longrightarrow \langle\langle [a \rightarrow b](a), [a \rightarrow c](a) \rangle\rangle \\
\longrightarrow \langle\langle \{b\}, \{c\} \rangle\rangle & \longrightarrow \langle\langle \{b\}, \{c\} \rangle\rangle \\
\longrightarrow \{\{b\}\} & \longrightarrow \{\{c\}\} \\
\longrightarrow \{b\} & \longrightarrow \{c\}
\end{array}$$

Nous obtenons ainsi pour l'application d'un terme $dc(t_1, \dots, t_n)$ sur un autre terme u un comportement non-déterministe dans le sens où plusieurs réductions peuvent mener à des résultats différents si plusieurs réductions sans échec sont possibles. Cette approche permettrait la description de l'application d'une règle de réécriture à une position *quelconque* dans un terme mais le calcul obtenu serait évidemment non-confluent. L'inconvénient de cette méthode est le manque de contrôle et donc l'impossibilité de décrire des stratégies de réduction précises et particulièrement des stratégies de normalisation du type *leftmost innermost* ou *leftmost outermost*.

Dans le reste de ce chapitre nous utilisons l'opérateur *first* pour la descriptions de nouveaux opérateurs, mais cet opérateur peut être remplacé avec l'opérateur *dc* si nous désirons permettre des éventuelles réductions non-convergentes.

4.4 Congruence générique

Nous définissons maintenant les opérateurs qui permettent l'application d'un ρ -terme r à une certaine position d'un autre ρ -terme t en descendant à chaque étape de réduction d'un niveau dans la profondeur du terme t .

La première étape est la définition de deux opérateurs qui décrivent l'application d'un terme non au sommet d'un autre terme mais à ses sous-termes directs. Il est déjà possible de décrire cette opération dans le ρ -calcul en utilisant la règle d'évaluation *Congruence*. Ainsi, pour tout symbole $f \in \mathcal{F}$, nous pouvons représenter l'application d'un terme r aux sous-termes d'un terme $f(u_1, \dots, u_n)$ par le ρ -terme $[f(r, \dots, r)](f(u_1, \dots, u_n))$ qui est réduit en $\{f([r](u_1), \dots, [r](u_n))\}$. Mais nous voulons définir un opérateur générique qui applique un ρ -terme r aux sous-termes u_i , $i = 1, \dots, n$ d'un terme de la forme $F(u_1, \dots, u_n)$ indépendamment du symbole de tête F .

Pour cela, nous introduisons deux opérateurs unaire Φ et Ψ dont le comportement est décrit par les règles d'évaluation présentées dans la Figure 4.3. Ces opérateurs permettent la représentation de l'application d'un ρ -terme aux arguments d'un autre ρ -terme et ils sont inspirés des opérateurs similaires du *System S* décrit dans [VeAB98]. Nous montrerons que le comportement de ces opérateurs peut être exprimé en utilisant seulement les opérateurs du ρ^{1st} -calcul.

$$\begin{array}{ll}
\textit{Traverse_seq} & [\Phi(r)](f(u_1, \dots, u_n)) \implies \langle \{f([r](u_1), \dots, u_n)\}, \dots, \{f(u_1, \dots, [r](u_n))\} \rangle \\
\textit{Traverse_par} & [\Psi(r)](f(u_1, \dots, u_n)) \implies \{f([r](u_1), \dots, [r](u_n))\}
\end{array}$$

FIG. 4.3: Congruence générique

L'évaluation de l'application du ρ -terme $\Phi(r)$ au terme $t = f(u_1, \dots, u_n)$ revient à l'évaluation de l'application du terme r à un des sous-termes u_i . Plus précisément, r est appliqué sur le premier u_i , $i = 1, \dots, n$ tel que l'application $[r](u_i)$ n'est pas réduite en l'ensemble vide. S'il n'*existe* pas un tel sous-terme u_i et en particulier, si t est une fonction sans arguments (t est une constante), alors le terme $[\Phi(r)](t)$ se réduit en l'ensemble vide.

Le comportement dans le cas des constantes devient plus clair si le membre droit de la règle *Traverse_seq* est écrit $\langle \{f(\dots, [r](u_i), \dots) \mid i = 1 \dots n\} \rangle$ et si nous remarquons qu'une constante est un terme de la forme $c(u_1, \dots, u_n)$ avec $n = 0$ obtenant ainsi la réduction suivante :

$$[\Phi(r)](c) \longrightarrow_{Traverse_seq} \langle \{ \} \rangle \longrightarrow_{First_fail} \langle \rangle \longrightarrow_{First_single} \emptyset$$

Lorsque le ρ -terme $\Psi(r)$ est appliqué à un terme $t = f(u_1, \dots, u_n)$, le terme r est appliqué à tous les arguments u_i , $i = 1, \dots, n$ si *pour tout* i , $[r](u_i)$ n'est pas réduite en \emptyset . S'il existe un u_i tel que $[r](u_i)$ est réduit en \emptyset , alors le résultat est l'ensemble vide. Si nous appliquons $\Psi(r)$ sur une constante c , puisque il n'y a aucun sous-terme, nous obtenons la réduction :

$$[\Psi(r)](c) \longrightarrow_{Traverse_par} \{c\}$$

Si nous considérons un ρ -calcul avec une signature finie \mathcal{F} et si nous notons par $\mathcal{F}_0 = \{c_1, \dots, c_n\}$ l'ensemble de symboles de fonctions constantes et par $\mathcal{F}_+ = \{f_1, \dots, f_m\}$ l'ensemble de symboles de fonctions non constantes, les deux opérateurs $\Phi(r)$ et $\Psi(r)$ peuvent être exprimés par certains ρ -termes appropriés.

Si les deux définitions suivantes sont considérées

$$\Phi'(r) \triangleq first(f_1(r, id, \dots, id), \dots, f_1(id, \dots, id, r), \dots, f_m(r, id, \dots, id), \dots, f_m(id, \dots, id, r))$$

$$\Psi(r) \triangleq \{c_1, \dots, c_n, f_1(r, \dots, r), \dots, f_m(r, \dots, r)\}$$

avec $c_i \in \mathcal{F}_0$, $i = 1, \dots, n$, et $f_j \in \mathcal{F}_+$, $j = 1, \dots, m$, nous obtenons les réductions suivantes :

$$\begin{aligned} & \triangleq [\Phi'(r)](f_k(u_1, \dots, u_p)) \\ & \xrightarrow{First} [first(f_1(r, id, \dots, id), \dots, f_m(id, \dots, id, r))](f_k(u_1, \dots, u_p)) \\ & \xrightarrow{*}_{Congruence} \langle \emptyset, \dots, \emptyset, \{f_k([r](u_1), \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, [r](u_p))\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\ & \xrightarrow{*}_{First_fail} \langle \{f_k([r](u_1), \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, [r](u_p))\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \triangleq [\Psi(r)](f_k(u_1, \dots, u_p)) \\ & \xrightarrow{Distrib} \{[c_1](f_k(u_1, \dots, u_p)), \dots, [f_m(r, \dots, r)](f_k(u_1, \dots, u_p))\} \\ & \xrightarrow{*}_{Congruence} \{ \emptyset, \dots, \emptyset, \{f_k([r](u_1), \dots, [r](u_p))\}, \emptyset, \dots, \emptyset \} \\ & \xrightarrow{*}_{Flat} \{f_k([r](u_1), \dots, [r](u_p))\} \end{aligned}$$

L'opérateur Φ' ne correspond donc pas exactement à la description de l'opérateur Φ donnée dans la Figure 4.3 mais le même résultat est obtenu en appliquant les termes $\Phi(r)$ et $\Phi'(r)$ à un terme $f_k(u_1, \dots, u_p)$ comme montré ci-dessous.

Lemme 4.1 *Les applications des termes $\Phi(r)$ et $\Psi(r)$ à un terme t peuvent être décrites dans le ρ_T^{1st} -calcul.*

Preuve : Si nous considérons $t = f_k(u_1, \dots, u_p)$ et si pour tout $i = 1, \dots, p$ nous avons les réductions $[r](u_i) \xrightarrow{*}_{\rho} \emptyset$ alors, selon les règles d'évaluation décrivant le comportement de $\Phi(r)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & [\Phi(r)](f_k(u_1, \dots, u_p)) \\ & \xrightarrow{Traverse_seq} \langle \{f_k([r](u_1), \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, [r](u_p))\} \rangle \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \langle \{f_k(\emptyset, \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, \emptyset)\} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{*}_{OpOnSet} \langle \{\emptyset\}, \dots, \{\emptyset\} \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{Flat} \langle \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{First_fail} \langle \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{First_single} \emptyset
\end{aligned}$$

Autrement, s'il existe un l tel que $[r](u_i) \xrightarrow{*}_\rho \emptyset$, $i = 1, \dots, l-1$ et $[r](u_l) \xrightarrow{*}_\rho v_l \downarrow$, avec $v_l \downarrow$ un terme clos ne contenant pas de radical, la réduction suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{*}_{Traverse_seq} [\Phi(r)](f_k(u_1, \dots, u_p)) \\
&\xrightarrow{*}_\rho \langle \{f_k([r](u_1), \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, [r](u_p))\} \rangle \\
&\xrightarrow{*}_\rho \langle \{f_k(\emptyset, \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, v_l \downarrow, \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, \emptyset)\} \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{OpOnSet} \langle \emptyset, \dots, \emptyset, \{f_k(u_1, \dots, v_l \downarrow, \dots, u_p)\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{First_fail} \langle \{f_k(u_1, \dots, v_l \downarrow, \dots, u_p)\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle
\end{aligned}$$

Maintenant, si nous considérons la définition de $\Phi'(r)$ et si pour tout $i = 1, \dots, p$ nous avons $[r](u_i) \xrightarrow{*}_\rho \emptyset$ alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{*}_\rho [\Phi'(r)](f_k(u_1, \dots, u_p)) \\
&\xrightarrow{*}_\rho \langle \{f_k([r](u_1), \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, [r](u_p))\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\
&\xrightarrow{*}_\rho \langle \{f_k(\emptyset, \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, \emptyset)\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{OpOnSet} \langle \{\emptyset\}, \dots, \{\emptyset\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{Flat} \langle \emptyset, \dots, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{First_fail} \langle \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{First_single} \emptyset
\end{aligned}$$

Pour le même terme $[\Phi'(r)](f_k(u_1, \dots, u_p))$, s'il existe un l tel que $[r](u_i) \xrightarrow{*}_\rho \emptyset$, $i = 1, \dots, l-1$ et $[r](u_l) \xrightarrow{*}_\rho v_l \downarrow$, avec $v_l \downarrow$ un terme clos ne contenant pas de radical, la réduction suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{*}_\rho [\Phi'(r)](f_k(u_1, \dots, u_p)) \\
&\xrightarrow{*}_\rho \langle \{f_k([r](u_1), \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, [r](u_p))\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\
&\xrightarrow{*}_\rho \langle \{f_k(\emptyset, \dots, u_p)\}, \dots, \{f_k(u_1, \dots, v_l \downarrow, \dots, u_p)\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{OpOnSet} \langle \{\emptyset\}, \dots, \{\emptyset\}, \{f_k(u_1, \dots, v_l \downarrow, \dots, u_p)\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{Flat} \langle \emptyset, \dots, \emptyset, \{f_k(u_1, \dots, v_l \downarrow, \dots, u_p)\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \\
&\xrightarrow{*}_{First_fail} \langle \{f_k(u_1, \dots, v_l \downarrow, \dots, u_p)\}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle
\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que les résultats des réductions pour l'application d'un terme r aux arguments d'un terme $f_k(u_1, \dots, u_p)$ en utilisant les deux opérateurs, Φ et Φ' , sont identiques. Si les termes u_i , $i = 1 \dots p$, sont des termes clos ne contenant pas de radical alors le résultat final des deux réductions dans le cas sans échec est $\{f_k(u_1, \dots, v_l \downarrow, \dots, u_p)\}$.

Quand les opérateurs sont appliqués à une constante $c_k \in \mathcal{F}_0$ nous obtenons :

$$[\Phi'(r)](c_k) \xrightarrow{*}_\rho \langle \rangle \longrightarrow_\rho \emptyset,$$

$$[\Psi(r)](c_k) \xrightarrow{*}_\rho \{c_k\}.$$

□

L'application d'un terme r à tous les sous-termes de profondeur n d'un terme t est représentée par le ρ -terme $[\Psi(\dots(\Psi(r))\dots)](t)$ avec n niveaux d'imbrication de l'opérateur Ψ . L'application

à seulement un sous-terme de profondeur n est représentée par le ρ -terme $[\Phi(\dots(\Phi(r))\dots)](t)$ avec n niveaux d'imbrication de l'opérateur Φ .

Pour une présentation plus concise et plus claire, dans les réductions décrites ultérieurement nous utilisons la description de l'opérateur Φ donné par les règles d'évaluation dans la Figure 4.3.

4.5 Application en profondeur

La définition des stratégies d'évaluation (normalisation) comme, par exemple, *top-down* ou *bottom-up*, est basée sur l'application d'un terme à la position de tête ou aux positions les plus profondes d'un autre terme. Pour le moment nous avons la possibilité d'appliquer un ρ -terme r soit à un ou à tous les arguments u_i d'un ρ -terme $t = f(u_1, \dots, u_n)$, soit aux sous-termes se trouvant à une profondeur de t précisée explicitement. Mais la profondeur d'un terme n'est pas connue *a priori* et donc, nous ne pouvons pas appliquer un terme r aux positions les plus profondes d'un terme t . Si nous voulons appliquer le terme r aux sous-termes à la profondeur maximale d'un terme t (i.e. les sous-termes n'ayant pas de sous-terme strict) nous devons définir un opérateur récursif qui réitère l'application des termes $\Phi(r)$ et $\Psi(r)$ et ainsi, pousse l'application le plus profondément possible dans les termes.

Nous commençons par présenter le ρ -terme permettant la description des applications récursives dans le ρ -calcul. En s'inspirant des opérateurs de point fixe du λ -calcul nous pouvons définir un ρ -terme qui applique récursivement un ρ -terme donné. Nous utilisons le combinateur de point fixe classique du λ -calcul ([Bar84]), $\Theta_\lambda = (A_\lambda A_\lambda)$ où

$$A_\lambda = \lambda xy.y(xxy)$$

Θ_λ est appelé le combinateur de point fixe de Turing ([Tur37]).

Ce terme correspond dans le ρ -calcul au ρ -terme $\Theta = A$ avec

$$A = x \rightarrow (y \rightarrow [y](x)(y))).$$

Dans le λ -calcul, pour tout λ -terme G nous avons la réduction :

$$\Theta_\lambda G \xrightarrow{*}_\beta G(\Theta_\lambda G).$$

Dans le ρ -calcul nous avons une réduction similaire :

$$[\Theta](G) \xrightarrow{*}_\rho \{[G]([\Theta](G))\} \quad (Point_Fixe)$$

qui est détaillée par :

$$\begin{array}{ll} \longrightarrow_{Fire} & [\Theta](G) \triangleq [A](G) \triangleq [[x \rightarrow (y \rightarrow [y](x)(y))]](A)](G) \\ \longrightarrow_{Distrib} & \{[y \rightarrow [y](A)(y))]\}(G) \\ \longrightarrow_{Fire} & \{[G](A)(G))\} \\ \longrightarrow_{Flat} & \{[G](A)(G))\} \\ \triangleq & \{[G]([\Theta](G))\} \end{array}$$

Nous avons obtenu le résultat souhaité mais la dernière application de la règle *Fire* dans la réduction ci-dessus peut être remplacée par une réduction dans le sous-terme $[A](y)$. Nous pouvons réduire ainsi $[A](y) \triangleq [[x' \rightarrow (y' \rightarrow [y'](x')(y'))]](A)](y)$ en le terme $\{[y](A)(y))\} \triangleq \{[y]([\Theta](y))\}$. Nous obtenons donc la réduction :

$$\begin{array}{lcl}
& & [\Theta](G) \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \\ \xrightarrow{\rho} \end{array} & & \{[y \rightarrow [y](A(y))](G)\} \triangleq \{[y \rightarrow [y]([\Theta](y))](G)\} \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \\ \xrightarrow{\rho} \end{array} & & \{[y \rightarrow [y]([\Theta](y))](G)\} \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \\ \xrightarrow{\rho} \end{array} & & \{[y \rightarrow [y]([y]([\Theta](y)))](G)\} \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \\ \xrightarrow{\rho} \end{array} & & \dots
\end{array}$$

qui ne termine jamais si à chaque fois le même radical $[\Theta](y)$ est sélectionné pour réduction.

Dans une approche opérationnelle nous ne voudrions pas que les nouvelles constructions conduisent à des réductions qui ne terminent pas. Puisque le ρ -terme $[\Theta](G)$ peut évidemment mener à des réductions infinies, une stratégie devrait être imposée afin d'obtenir la terminaison et donc le comportement souhaité.

Nous devrions ainsi utiliser une stratégie qui applique les règles d'évaluation à un terme de la forme $[\Theta](G)$ seulement lorsqu'aucune autre réduction n'est possible. D'un point de vue opérationnel, cette stratégie est assez difficile à implanter et évidemment pas très efficace dans un calcul où le terme Θ est représenté par sa forme étendue et donc, plus difficile à identifier. Dans le cas où Θ est considéré comme un ρ -terme indépendant avec le comportement décrit par une règle d'évaluation correspondant à la réduction *Point_Fixe*, la stratégie proposée précédemment est facilement réalisable.

Une stratégie satisfaisant la condition de terminaison et plus facile à implanter pourrait appliquer les règles d'évaluation d'abord aux positions de tête des termes et seulement au moment où aucune règle d'évaluation n'est applicable en tête, réduire les sous-termes à des positions plus profondes. Il est clair que cette stratégie *outermost* empêche seulement les réductions infinies dues à l'opérateur Θ mais elle ne peut pas assurer la terminaison du calcul non-typé.

Comme nous l'avons dit précédemment, le but principal est la représentation des stratégies de normalisation par des ρ -termes et donc, nous voulons décrire l'application d'un terme r à toutes les positions d'un autre terme t . Par conséquent, nous devons définir le terme G approprié qui propage l'application d'un ρ -terme dans les sous-termes d'un autre ρ -terme.

4.5.1 Applications multiples

Dans un premier temps, nous voulons définir les opérateurs *BottomUp* et *TopDown* décrivant l'application d'un terme r à tous les sous-termes d'un terme t en commençant avec les positions les plus profondes et respectivement avec la position de tête. Nous voudrions donc trouver un terme qui appliquerait récursivement le terme r à tous les sous-termes de t et ultérieurement au sommet du terme résultat et un autre terme qui appliquerait le terme r d'abord au sommet du terme t et ensuite aux sous-termes du terme résultat. Le terme r doit être appliqué à un sous-terme seulement si cette application ne mène pas à un échec.

Nous proposons d'abord deux définitions "naïves" pour ces opérateurs et nous commentons les problèmes rencontrés. En analysant les réductions obtenues nous définissons finalement des opérateurs décrivant exactement le comportement souhaité.

Une première approche consiste à définir le ρ -terme :

$$G_{sds}(r) \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow [\Psi(f); r](x))$$

qui décrit l'application d'un terme f (qui sera instancié par le mécanisme de filtrage) à tous les arguments du terme qui instancie la variable x , suivie de l'application du terme r à la position de tête du terme résultant de l'application précédente.

Nous définissons l'opérateur *SDS* (pour *SpreadDownSimple*) :

$$SDS(r) \triangleq [\Theta](G_{sds}(r))$$

et nous obtenons la réduction suivante pour l'application de ce terme au terme $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned}
& [SDS(r)](t) \triangleq [[\Theta](G_{sds}(r))](t) \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{[[G_{sds}(r)]([\Theta](G_{sds}(r)))](t)\} \\
& \triangleq \{[[G_{sds}(r)](SDS(r))](t)\} \\
& \triangleq \{[[f \rightarrow (x \rightarrow [\Psi(f); r](x))](SDS(r))](t)\} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{[[x \rightarrow [\Psi(SDS(r)); r](x)]](t)\} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{[\Psi(SDS(r)); r](f(t_1, \dots, t_n))\} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{[r](\Psi(SDS(r))(f(t_1, \dots, t_n)))\} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{[r](f([SDS(r)](t_1), \dots, [SDS(r)](t_n)))\}
\end{aligned}$$

Ainsi, le terme $SDS(r)$ est appliqué à tous les arguments du terme initial et le terme r est appliqué en tête. Si le terme initial est une constante c alors, le résultat de la réduction est $\{[r](c)\}$ et nous obtenons donc le comportement souhaité.

L'inconvénient de cette méthode est la non-confluence des dérivations quand le terme r est un ensemble ayant plus d'un élément. Par exemple, dans le cas où $r = \{a, b\}$ le terme $G_{sds}(r) = G_{sds}(\{a, b\})$ peut être réduit en le terme $\{G_{sds}(a), G_{sds}(b)\}$ comme montré par la réduction :

$$\begin{aligned}
& G_{sds}(\{a, b\}) \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow [\Psi(f); \{a, b\}](x)) \\
& \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow [z \rightarrow [\{a, b\}](\Psi(f)(z))](x)) \\
& \xrightarrow{*}_{Distrib} f \rightarrow (x \rightarrow [z \rightarrow \{[a](\Psi(f)(z)), [b](\Psi(f)(z))\}](x)) \\
& \xrightarrow{*}_{Switch_R} f \rightarrow (x \rightarrow \{[z \rightarrow [a](\Psi(f)(z)), z \rightarrow [b](\Psi(f)(z))]\}(x)) \\
& \xrightarrow{*}_{Distrib} f \rightarrow (x \rightarrow \{[z \rightarrow [a](\Psi(f)(z))](x), [z \rightarrow [b](\Psi(f)(z))](x)\}) \\
& \xrightarrow{*}_{Switch_R} f \rightarrow (\{x \rightarrow [z \rightarrow [a](\Psi(f)(z))](x), x \rightarrow [z \rightarrow [b](\Psi(f)(z))](x)\}) \\
& \xrightarrow{*}_{Distrib} \{f \rightarrow (x \rightarrow [z \rightarrow [a](\Psi(f)(z))](x)), f \rightarrow (x \rightarrow [z \rightarrow [b](\Psi(f)(z))](x))\} \\
& \triangleq \{G_{sds}(a), G_{sds}(b)\}
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat précédent, nous obtenons la réduction suivante pour le ρ -terme $SDS(\{a, b\})$:

$$\begin{aligned}
& SDS(\{a, b\}) \\
& \triangleq [\Theta](G_{sds}(\{a, b\})) \\
& \xrightarrow{*}_\rho [\Theta](\{G_{sds}(a), G_{sds}(b)\}) \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{[\Theta](G_{sds}(a)), [\Theta](G_{sds}(b))\}
\end{aligned}$$

qui représente l'ensemble des applications récursives des a et b et non l'application récursive de l'ensemble $\{a, b\}$ qui est obtenue si l'ensemble $\{a, b\}$ n'est pas distribué dans les termes $G_{sds}(\{a, b\})$ et $SDS(\{a, b\})$.

Nous pouvons donc remarquer facilement que la raison de la non-confluence est la propagation de symboles d'ensemble dans les termes $G_{sds}(\{a, b\})$ et $SDS(\{a, b\})$.

Nous avons discuté dans le Chapitre 3 les problèmes liés à la confluence du calcul et nous avons proposé des stratégies pour obtenir cette propriété. Une des conditions imposées afin d'obtenir la confluence interdit l'application d'une règle de réécriture (non-linéaire à droite) si l'argument de l'application contient un ensemble ayant plus d'un élément. Cette restriction n'est évidemment pas satisfaite dans la réduction d'un terme $[\Theta](G)$ en $\{[G](\Theta(G))\}$ dans le cas où G contient un ensemble ayant plus d'un élément et donc dans la réduction du terme $SDS(\{a, b\})$.

La condition de ne pas évaluer en utilisant la règle d'évaluation *Fire* une application contenant un ensemble ayant plus d'un élément dans son argument a été imposée afin d'éviter l'évaluation de l'argument à un tel ensemble. Nous pouvons donc réduire le terme $[\Theta](G)$ en

$\{[G](\Theta(G))\}$ si le terme G contient un ensemble mais il ne peut pas être réduit en un ensemble ayant plus d'un élément.

Dans le cas de l'opérateur SDS nous proposons une solution qui consiste à empêcher l'évaluation du terme $G_{sds}(r)$ en un ensemble même si r ne satisfait pas cette condition. Nous définissons l'opérateur G_{sd} :

$$G_{sd}(r) \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow \langle [\Psi(f); r](x) \rangle)$$

et respectivement SD (pour *SpreadDown*) :

$$SD(r) \triangleq [\Theta](G_{sd}(r)).$$

Si $r = \{a, b\}$ alors, le terme $G_{sd}(r) = G_{sd}(\{a, b\})$ n'est pas réduit en le terme $\{G_{sd}(a), G_{sd}(b)\}$ comme il était le cas pour le terme $G_{sds}(r)$:

$$\begin{array}{lcl} & G_{sd}(r) \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow \langle [\Psi(f); \{a, b\}](x) \rangle) & \\ \xrightarrow{*}_\rho & f \rightarrow (x \rightarrow \langle [\{a, b\}](\langle [\Psi(f)](x) \rangle) \rangle) & \\ \xrightarrow{*}_{Distrib} & f \rightarrow (x \rightarrow \langle \{[a](\langle [\Psi(f)](x) \rangle), [b](\langle [\Psi(f)](x) \rangle)\} \rangle) & \end{array}$$

Dans ce dernier terme le premier argument de l'opérateur $\langle \rangle$ contient la variable libre x et donc il ne peut pas être réduit en utilisant la règle d'évaluation *First_success*.

Puisque ce dernier terme n'est pas un ensemble, la propagation des symboles d'ensemble n'intervient plus dans le cas de l'opérateur G_{sd} et nous pouvons réduire le terme $[\Theta](G_{sd}(r))$ en $\{[G_{sd}(r)]([\Theta](G_{sd}(r)))\}$. Par conséquent, nous obtenons la réduction :

$$\begin{array}{lcl} & [SD(r)](t) \triangleq [[\Theta](G_{sd}(r))](t) & \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{[[G_{sd}(r)]([\Theta](G_{sd}(r)))](t)\} & \\ \triangleq & \{[[G_{sd}(r)](SD(r))](t)\} & \\ \triangleq & \{[f \rightarrow (x \rightarrow \langle [\Psi(f); r](x) \rangle)](SD(r))](t)\} & \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\{x \rightarrow \langle [\Psi(SD(r)); r](x) \rangle\}(t)\} & \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\langle [\Psi(SD(r)); r](f(t_1, \dots, t_n)) \rangle\} & \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\langle [r](f([SD(r)](t_1), \dots, [SD(r)](t_n))) \rangle\} & \end{array}$$

Exemple 4.5 Si nous utilisons une stratégie qui applique les règles d'évaluation d'abord en tête alors, la réduction suivante est obtenue :

$$\begin{array}{lcl} & [SD(\{a \rightarrow b, id\})](f(a, g(a))) & \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\langle [\{a \rightarrow b, id\}](f([SD(\{a \rightarrow b, id\}](a), [SD(\{a \rightarrow b, id\}](g(a)))))) \rangle\} & \\ \longrightarrow_{Distrib} & \{\langle \{[a \rightarrow b](f([SD(\{a \rightarrow b, id\}](a), [SD(\{a \rightarrow b, id\}](g(a))))), & \\ & [id](f([SD(\{a \rightarrow b, id\}](a), [SD(\{a \rightarrow b, id\}](g(a)))))) \rangle\} & \\ \longrightarrow_{Fire} & \{\langle \{\emptyset, [id](f([SD(\{a \rightarrow b, id\}](a), [SD(\{a \rightarrow b, id\}](g(a)))))) \rangle\} & \\ \longrightarrow_{Flat} & \{\langle \{f([SD(\{a \rightarrow b, id\}](a), [SD(\{a \rightarrow b, id\}](g(a)))) \rangle\} & \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\langle \{f(\langle [\{a \rightarrow b, id\}](a)) \rangle, [SD(\{a \rightarrow b, id\}](g(a))) \rangle\} & \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\langle \{f(\{b, a\}, [SD(\{a \rightarrow b, id\}](g(a)))) \rangle\} & \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\langle \{f(\{b, a\}, \langle [\{a \rightarrow b, id\}](g([SD(\{a \rightarrow b, id\}](a)))) \rangle) \rangle\} & \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\langle \{f(\{b, a\}, g(\{b, a\})) \rangle\} & \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{f(b, g(b)), f(a, g(b)), f(b, g(a)), f(a, g(a))\} & \end{array}$$

Nous pouvons remarquer que l'application $[SD(r)](t)$ ne garantit pas que les applications du terme r aux sous-termes les plus profonds de t sont les premières à être réduites. Par exemple,

puisque nous essayons d'appliquer les règles d'évaluation d'abord en tête, dans la réduction de l'Exemple 4.5 nous obtenons, en appliquant la règle d'évaluation *Fire*,

$$[a \rightarrow b](f([SD(\{a \rightarrow b, id\}))(a), [SD(\{a \rightarrow b, id\}))(g(a))]) \longrightarrow_{Fire} \emptyset$$

et non

$$\begin{aligned} & [a \rightarrow b](f([SD(\{a \rightarrow b, id\}))(a), [SD(\{a \rightarrow b, id\}))(g(a))]) \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} [a \rightarrow b](f(\{b, a\}, \{g(\{b, a\})\})) \xrightarrow{*}_{\rho} \emptyset \end{aligned}$$

comme dans une réduction *innermost*.

L'inconvénient de la non-confluence dans le cas de l'opérateur *SDS* a été éliminé en utilisant l'opérateur $\langle \rangle$ dans la définition de l'opérateur *SD*, mais nous n'avons pas encore obtenu le comportement souhaité pour ce type d'itérateur. Dans l'évaluation du terme $[SD(r)](t)$, si une des applications du terme r à un sous-terme de t est évaluée en \emptyset alors, cet échec est propagé et l'ensemble vide est obtenu comme résultat de la réduction.

Si nous voulons garder inchangés les sous-termes de t tels que l'application de r mène à un échec nous pouvons utiliser le terme *id* soit de la même façon que dans l'Exemple 4.5, soit en définissant l'opérateur G_{bu} :

$$G_{bu}(r) \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow [first(\Psi(f), id); first(r, id)](x))$$

De la même manière que dans les cas précédents nous obtenons l'opérateur *BottomUp* :

$$BottomUp(r) \triangleq [\Theta](G_{bu}(r))$$

correspondant à la description présentée en début de cette section.

Lemme 4.2 *L'opérateur BottomUp décrivant l'application d'un terme à tous les sous-termes d'un autre terme d'une manière bottom-up est exprimable dans le ρ_T^{1st} -calcul.*

Preuve : Il est facile de remarquer que pour l'application de l'opérateur *BottomUp* à une constante c nous obtenons :

$$[BottomUp(r)](c) \xrightarrow{*}_{\rho} \{[first(r, id)](c)\}$$

et donc le résultat de l'application est soit \emptyset si $[r](c)$ mène à un échec, soit le résultat de la réduction de l'application $[r](c)$ dans le cas contraire.

Pour un terme $t = f(t_1, \dots, t_n)$ nous obtenons la réduction suivante :

$$\begin{aligned} & [BottomUp(r)](t) \triangleq [[\Theta](G_{bu}(r))](t) \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[[G_{bu}(r)]([\Theta](G_{bu}(r)))](t)\} \\ & \triangleq \{[[G_{bu}(r)](BottomUp(r))](t)\} \\ & \triangleq \{[[f \rightarrow (x \rightarrow [first(\Psi(f), id); first(r, id)](x))](BottomUp(r))](t)\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[x \rightarrow [first(\Psi(BottomUp(r)), id); first(r, id)](x)](t)\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[first(\Psi(BottomUp(r)), id); first(r, id)](f(t_1, \dots, t_n))\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[first(r, id)]([first(\Psi(BottomUp(r)), id)](f(t_1, \dots, t_n)))\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[first(r, id)]([\Psi(BottomUp(r))](f(t_1, \dots, t_n)), [id](f(t_1, \dots, t_n)))\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[first(r, id)]([f([BottomUp(r)](t_1), \dots, [BottomUp(r)](t_n)), \{f(t_1, \dots, t_n)\}])\} \end{aligned}$$

Grâce à l'utilisation de l'opérateur id dans la définition de $G_{bu}(r)$ et donc de $BottomUp(r)$, l'application de $BottomUp(r)$ à un terme ne mène jamais à un échec. Ainsi, nous obtenons pour le terme ci-dessus la même réduction que pour le terme

$$\{[first(r, id)](f([BottomUp(r)](t_1), \dots, [BottomUp(r)](t_n)))\}$$

représentant l'application de r , ou de l'identité si l'application de r mène à un échec, à tous les sous-termes et ensuite au sommet du terme $f(t_1, \dots, t_n)$. \square

Exemple 4.6 L'application $[BottomUp(a \rightarrow b)](a)$ est réduite en $\{[first(a \rightarrow b, id)](a)\}$ et donc, en le terme $\{b\}$.

En considérant l'application de la règle de réécriture $a \rightarrow b$ au terme $g(a)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} & [BottomUp(a \rightarrow b)](g(a)) \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{[first(a \rightarrow b, id)](\langle g([BottomUp(a \rightarrow b)](a)), \{g(a)\} \rangle)\} \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{ \langle [a \rightarrow b](\langle g([BottomUp(a \rightarrow b)](a)), \{g(a)\} \rangle), \{ \langle g([BottomUp(a \rightarrow b)](a)), \{g(a)\} \rangle \} \rangle \} \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{ \langle [a \rightarrow b](\langle g(\{b\}), \{g(a)\} \rangle), \{ \langle g([BottomUp(a \rightarrow b)](a)), \{g(a)\} \rangle \} \rangle \} \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{ \langle \{ [a \rightarrow b](g(b)) \}, \{ \langle g([BottomUp(a \rightarrow b)](a)), \{g(a)\} \rangle \} \rangle \} \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{ \langle \emptyset, \{ \langle g([BottomUp(a \rightarrow b)](a)), \{g(a)\} \rangle \} \rangle \} \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{ \langle \{ g(\{b\}), \{g(a)\} \} \rangle \} \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{ g(b) \} \end{aligned}$$

De la même façon nous obtenons :

$$\begin{aligned} & [BottomUp(a \rightarrow b)](f(a, g(a))) \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{ f(b, g(b)) \} \end{aligned}$$

Le résultat de cette dernière réduction n'est pas le même que celui obtenu dans l'Exemple 4.5 pour le même terme de départ, mais l'ensemble obtenu dans cet exemple est inclus dans celui obtenu dans l'Exemple 4.5.

Une réduction du type *top-down* peut être définie de la même façon qu'une réduction *bottom-up*. Nous introduisons un opérateur $G_{td}(r)$:

$$G_{td}(r) \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow \langle [first(r, id); first(\Psi(f), id)](x) \rangle)$$

et nous obtenons immédiatement

$$TopDown(r) \triangleq [\Theta](G_{td}(r)).$$

Lemme 4.3 L'opérateur $TopDown$ décrivant l'application d'un terme à tous les sous-termes d'un autre terme d'une manière *top-down* est exprimable dans le ρ_T^{1st} -calcul.

4.5.2 Applications singulières

En utilisant les opérateurs $BottomUp$ et $TopDown$ nous pouvons décrire l'application d'une règle de réécriture r à tous les sous-termes d'un autre terme t mais non la normalisation des sous-termes et en particulier du terme t par rapport à la règle r . Nous voulons donc appliquer une règle de réécriture r jusqu'à ce qu'elle ne soit plus applicable et ceci peut être réalisé en répétant l'application des termes $BottomUp(r)$ ou $TopDown(r)$. Mais une telle approche ne permettrait pas la description des stratégies de normalisation *innermost* ou *outermost* et nous voulons donc définir des opérateurs plus fins décrivant l'application d'une règle de réécriture à un seul sous-terme et répéter l'application de tels opérateurs.

En utilisant l'opérateur Φ nous pouvons définir des ρ -termes similaires à ceux introduits dans la section précédente mais qui appliquent un terme donné à une seule position d'un terme d'une manière *bottom-up* ou *top-down*.

Dans le cas *bottom-up* nous introduisons un terme qui essaie l'application d'un terme r à tous les arguments d'un terme donné et en cas d'échec applique le terme r en tête :

$$H_{bu}(r) \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow [first(\Phi(f), r)](x))$$

En utilisant ce terme nous définissons l'opérateur $Once_{bu}$:

$$Once_{bu}(r) \triangleq [\Theta](H_{bu}(r)).$$

Comme dans le cas de l'opérateur SD , le terme $[Once_{bu}(r)](t) \triangleq [[\Theta](H_{bu}(r))](t)$ peut mener à des réductions infinies si aucune stratégie n'est employée. La même stratégie que dans le cas précédent est suffisante pour assurer la terminaison et elle consiste à appliquer les règles d'évaluation d'abord en tête d'un terme de la forme $[u](v)$ et seulement si aucune règle d'évaluation n'est applicable à cette position, réduire les sous-termes v et u .

Lemme 4.4 *L'opérateur $Once_{bu}$ décrivant l'application d'un terme une fois d'une manière bottom-up est exprimable dans le ρ_T^{1st} -calcul.*

Preuve : Nous pouvons remarquer que l'application d'un terme $Once_{bu}(r)$ à une constante mène à une réduction :

$$[Once_{bu}(r)](c) \xrightarrow{*}_\rho \{\langle [r](c) \rangle\}.$$

et donc le résultat de l'application est soit \emptyset si $[r](c)$ mène à un échec, soit le résultat de la réduction de l'application $[r](c)$ dans le cas contraire.

La réduction suivante montre le comportement de l'application d'un terme $t = f(t_1, \dots, t_n)$ $Once_{bu}(r)$ à un terme $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned} & [Once_{bu}(r)](t) \triangleq [[\Theta](H_{bu}(r))](t) \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{[[H_{bu}(r)]([\Theta](H_{bu}(r)))](t)\} \\ \triangleq & \{[[f \rightarrow (x \rightarrow [first(\Phi(f), r)](x))](Once_{bu}(r))](t)\} \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\{x \rightarrow [first(\Phi(Once_{bu}(r)), r)](x)\}(t)\} \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{[first(\Phi(Once_{bu}(r)), r)](f(t_1, \dots, t_n))\} \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\langle [\Phi(Once_{bu}(r))](f(t_1, \dots, t_n)), [r](f(t_1, \dots, t_n)) \rangle\} \\ \xrightarrow{*}_\rho & \{\langle \langle f([Once_{bu}(r)](t_1), \dots, t_n), \dots, f(t_1, \dots, [Once_{bu}(r)](t_n)) \rangle, [r](f(t_1, \dots, t_n)) \rangle \rangle \} \end{aligned}$$

Si tous les termes $f(t_1, \dots, [Once_{bu}(r)](t_k), \dots, t_n)$, $k = 1, \dots, n$, sont réduits en l'ensemble vide (l'application de $Once_{bu}(r)$ à tout sous-terme t_i est réduite en \emptyset) et $[r](f(t_1, \dots, t_n))$ est aussi réduit en l'ensemble vide, alors le dernier terme de la réduction ci-dessus est réduit en \emptyset . Cette situation correspond à un terme $t = f(t_1, \dots, t_n)$ tel que r n'est pas appliqué avec succès (résultat différent de \emptyset) à aucun de ses sous-termes.

Si tous les termes $f(t_1, \dots, [Once_{bu}(r)](t_k), \dots, t_n)$, $k = 1, \dots, n$, sont réduits en l'ensemble vide mais le terme $[r](f(t_1, \dots, t_n))$ n'est pas réduit en l'ensemble vide alors, le résultat de la réduction est le même que pour le terme $\{[r](f(t_1, \dots, t_n))\}$.

Si un des termes t_i est réduit en \emptyset alors le résultat final est évidemment \emptyset . Si aucun des termes t_i n'est réduit en \emptyset et s'il existe un terme $[Once_{bu}(r)](t_k)$ qui n'est pas réduit en l'ensemble vide alors, nous obtenons le même résultat que pour la réduction de $\{f(t_1, \dots, [Once_{bu}(r)](t_k), \dots, t_n)\}$ tel que pour tout $i < k$, $[Once_{bu}(r)](t_i) \xrightarrow{*}_\rho \emptyset$ et $[Once_{bu}(r)](t_k)$ n'est pas réduit en \emptyset .

Par conséquent, si p est la position la plus profonde et la plus à gauche d'un terme clos du premier ordre $t_{[u]_p}$ telle que l'application du terme r au terme u n'est pas réduite en \emptyset alors, le terme $[Once_{bu}(r)](t)$ est réduit en le même terme que $t_{[r](u)]_p}$. S'il n'existe pas de telle position p alors, le résultat est \emptyset . \square

Exemple 4.7 L'application $[Once_{bu}(a \rightarrow b)](a)$ est réduite en $\{\langle [(a \rightarrow b)](a) \rangle\}$ et donc, en le terme $\{b\}$.

L'application de la règle de réécriture $a \rightarrow b$ une fois à la position la plus profonde et la plus à gauche du terme $f(a, g(a))$ est représentée par le terme $[Once_{bu}(a \rightarrow b)](f(a, g(a)))$ avec la réduction :

$$\begin{aligned}
& [Once_{bu}(a \rightarrow b)](f(a, g(a))) \\
& \xrightarrow{*}_{\rho} \{ \langle \langle f([Once_{bu}(a \rightarrow b)](a), g(a)), f(a, [Once_{bu}(a \rightarrow b)](g(a))) \rangle, [a \rightarrow b](f(a, g(a))) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_{\rho} \{ \langle \langle f(\{b\}, g(a)), f(a, [Once_{bu}(a \rightarrow b)](g(a))) \rangle, [a \rightarrow b](f(a, g(a))) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_{\rho} \{ \langle \langle f(b, g(a)), [a \rightarrow b](f(a, g(a))) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_{\rho} \{ f(b, g(a)) \}
\end{aligned}$$

Si nous voulons définir un opérateur décrivant l'application d'un terme à une seule position d'un autre terme d'une manière *top-down* alors nous pouvons utiliser le terme :

$$H_{td}(r) \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow [first(r, \Phi(f))](x))$$

et nous obtenons immédiatement l'opérateur $Once_{td}$:

$$Once_{td}(r) \triangleq [\Theta](H_{td}(r)).$$

Dans ce cas, l'application du terme r est essayée d'abord au sommet du terme t et dans le cas d'un échec le terme r est appliqué plus profondément dans le terme t .

Lemme 4.5 L'opérateur $Once_{td}$ décrivant l'application d'un terme une fois d'une manière *top-down* est exprimable dans le ρ_T^{1st} -calcul.

4.6 Répétition et opérateur de normalisation

Dans les sections précédentes nous avons défini les opérateurs qui décrivent l'application (avec succès) d'un terme à la position la plus profonde ou la plus haute d'un autre terme. Dans cette section nous voulons définir un opérateur qui applique à plusieurs reprises un terme donné r à un ρ -terme t .

D'abord, nous voulons définir un opérateur décrivant l'application répétitive d'un ρ -terme r au sommet d'un terme t , c'est-à-dire un terme correspondant au ρ -terme $[r; r; \dots; r](t)$. En remplaçant le terme r par un des termes d'application en profondeur décrits dans la section précédente (e.g. $Once_{bu}$ ou $Once_{td}$) nous obtenons un ρ -terme décrivant une procédure de normalisation (e.g. *innermost* ou *outermost*).

Nous appelons *repeat* l'opérateur de répétition et son comportement peut être décrit par la règle d'évaluation suivante :

$$Repeat \quad [repeat(r)](t) \implies [repeat(r)]([r](t))$$

Nous pouvons utiliser l'opérateur de point fixe Θ pour introduire le terme

$$I(r) \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow [r; f](x))$$

permettant la définition de l'opérateur *repeat* :

$$repeat(r) \triangleq [\Theta](I(r)).$$

Cette approche a deux inconvénients évidents. Premièrement, la terminaison de la réduction n'est pas garantie même dans le cas où la stratégie d'évaluation utilisée pour les opérateurs précédents est utilisée. Lorsque la stratégie d'évaluation employée applique les règles d'évaluation d'abord en tête d'une application $[u](v)$ et puis au sous-terme gauche u , nous n'obtenons pas le résultat désiré. En utilisant cette stratégie *rightmost outermost* pour la réduction précédente, nous obtenons :

$$[repeat(r)](t) \xrightarrow{*}_\rho \{[repeat(r)]([r](t))\} \xrightarrow{*}_\rho \dots \xrightarrow{*}_\rho \{[repeat(r)]([r]([r](\dots [r](t) \dots)))\} \xrightarrow{*}_\rho \dots$$

et donc, la réduction est infinie. Une méthode permettant de résoudre ce problème consiste à évaluer d'abord l'argument v de l'application dans le cas où les règles d'évaluation ne peuvent pas être appliquées en tête de l'application $[u](v)$.

Deuxièmement, quand la réduction termine, le résultat est toujours l'ensemble vide. Si à un certain point dans la réduction, l'application du terme r au terme t est réduite en l'ensemble vide, alors, \emptyset est strictement propagé et le terme $[repeat(r)](t)$ est réduit ainsi en l'ensemble vide.

Afin de résoudre ces problèmes, nous pouvons définir un opérateur appelé *repeat** avec un comportement défini par les règles d'évaluation présentées dans la Figure 4.4.

$ \begin{array}{ll} \text{Repeat}' & [repeat^*(r)](t) \implies [repeat^*(r)]([r](t)) \\ & \text{si } [r](t) \text{ n'est pas évalué en } \emptyset \\ \text{Repeat}'' & [repeat^*(r)](t) \implies t \\ & \text{si } [r](t) \text{ est évalué en } \emptyset \end{array} $
--

FIG. 4.4: L'opérateur *repeat**

Nous devons donc définir un opérateur similaire à *repeat* qui permet la mémorisation du résultat précédent et effectue un retour arrière à la réduction de ce terme si un échec est obtenu pour le terme courant. Nous modifions le terme $I(r)$ qui devient

$$J(r) \triangleq f \rightarrow (x \rightarrow [first(r; f, id)](x))$$

et nous l'utilisons comme d'habitude pour la définition de l'opérateur *repeat*(r)*

$$repeat^*(r) \triangleq [\Theta](J(r))$$

Il ne faut pas oublier que la réduction d'une application $[u](v)$ s'effectue en appliquant les règles d'évaluation en tête, ensuite à son argument v et seulement après au terme u .

Lemme 4.6 *L'opérateur *repeat** décrivant l'application répétée d'un terme tant que le résultat de l'application n'est pas \emptyset est exprimable dans le ρ_T^{1st} -calcul.*

Preuve : Nous obtenons la réduction suivante pour l'application d'un terme *repeat*(r)* à un terme t :

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \\ \rho \end{array} [repeat*(r)](t) \triangleq [[\Theta](J(r))](t) \\
\triangleq \{[[J(r)]([\Theta](J(r)))](t)\} \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \\ \rho \end{array} \{[[f \rightarrow (x \rightarrow [first(r; f, id)](x))](repeat*(r))](t)\} \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \\ \rho \end{array} \{\{[x \rightarrow [first(r; repeat*(r), id)](x)](t)\}\} \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \\ \rho \end{array} \{[first(r; repeat*(r), id)](t)\} \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \\ \rho \end{array} \{\langle [r; repeat*(r)](t), [id](t) \rangle\} \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \\ \rho \end{array} \{\langle [repeat*(r)]([r](t)), [id](t) \rangle\}
\end{array}$$

Si le terme $[r](t)$ est réduit en l'ensemble vide alors, le terme $[repeat*(r)]([r](t))$ est réduit immédiatement en \emptyset et donc, pour la réduction précédente nous obtenons :

$$\begin{array}{lcl}
& & \{\langle [repeat*(r)]([r](t)), [id](t) \rangle\} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{*} \\ \xrightarrow{*} \\ \xrightarrow{*} \\ \xrightarrow{*} \end{array} \rho & & \{\langle [repeat*(r)](\emptyset), [id](t) \rangle\} \\
& & \{\langle \emptyset, [id](t) \rangle\} \\
& & \{\langle [id](t) \rangle\} \\
& & \{\langle \{t\} \rangle\}
\end{array}$$

et si $t \xrightarrow{\rho}^* t'$, avec t' un terme clos ne contenant pas de radical alors, le résultat final est $\{t'\}$.

Nous considérons maintenant que le terme $[r](t)$ est réduit en un terme $\{t'\}$ différent de \emptyset et irréductible. Dans ce cas nous obtenons la réduction :

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{*}_{\rho} \{ \langle [repeat*(r)]([r](t)), [id](t) \rangle \} \\ \xrightarrow{*}_{\rho} \{ \langle [repeat*(r)](\{t'\}), [id](t) \rangle \} \\ \xrightarrow{*}_{\rho} \{ \langle \{ [repeat*(r)](t') \}, [id](t) \rangle \} \\ \xrightarrow{*}_{\rho} \{ \langle \{ \langle [repeat*(r)]([r](t')), [id](t') \rangle \}, [id](t) \rangle \} \end{array}$$

et le résultat final est soit un terme $\{t''\}$ tel que $[repeat*(r)]([r](t')) \xrightarrow{\rho} \{t''\}$, soit $\{t'\}$ si $[r](t') \xrightarrow{\rho} \emptyset$. \square

Exemple 4.8 L'application répétitive des deux règles de réécriture $a \rightarrow b$ et $b \rightarrow c$ à un terme a est représentée par le ρ -terme $[\text{repeat}^*(\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})](a)$ et la réduction suivante est obtenue :

$$\begin{array}{l}
[repeat*(\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})](a) \\
\begin{array}{l}
\begin{array}{l} \xrightarrow{*} \rho \\ \xrightarrow{*} \rho \\ \xrightarrow{*} \rho \\ \xrightarrow{*} \rho \\ \xrightarrow{*} \rho \\ \xrightarrow{*} \rho \\ \xrightarrow{*} \rho \\ \xrightarrow{*} \rho \\ \xrightarrow{*} \rho \\ \xrightarrow{*} \rho \end{array} \\
\begin{array}{l}
\{\langle [repeat*(\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})](\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})(a), [id](a) \rangle\} \\
\{\langle [repeat*(\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})](\{b\}), [id](a) \rangle\} \\
\{\langle \langle [repeat*(\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})](\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})(b), [id](b) \rangle, [id](a) \rangle\} \\
\{\langle \langle [repeat*(\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})](\{c\}), [id](b) \rangle, [id](a) \rangle\} \\
\{\langle \langle \langle [repeat*(\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})](\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})(c), [id](c) \rangle, [id](b) \rangle, [id](a) \rangle\} \\
\{\langle \langle \langle [repeat*(\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\})](\emptyset), \{c\} \rangle, [id](b) \rangle, [id](a) \rangle\} \\
\{\langle \langle \langle \emptyset, \{c\} \rangle, [id](b) \rangle, [id](a) \rangle\} \\
\{\langle \langle \{c\}, [id](b) \rangle, [id](a) \rangle\} \\
\{\langle \{c\}, [id](a) \rangle\} \\
\{c\}
\end{array}
\end{array}$$

Si le terme r est un ensemble de règles de réécriture non-confluentes alors nous obtenons un ensemble ayant plusieurs éléments comme résultat de la réduction du terme $[repeat*(r)](t)$.

Exemple 4.9 Si nous considérons l'ensemble de règles de réécriture $\mathcal{S} = \{a \rightarrow b, a \rightarrow c, b \rightarrow d\}$ alors, nous obtenons facilement les réductions $[\mathcal{S}](a) \xrightarrow{*}_\rho \{b, c\}$, $[\mathcal{S}](b) \xrightarrow{*}_\rho \{d\}$, $[\mathcal{S}](c) \xrightarrow{*}_\rho \emptyset$, $[\mathcal{S}](d) \xrightarrow{*}_\rho \emptyset$. Par conséquent, la réduction suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
& [repeat*(\mathcal{S})](a) \triangleq [repeat*({a \rightarrow b, a \rightarrow c, b \rightarrow d})](a) \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle [repeat*(\mathcal{S})](a), [id](a) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle [repeat*(\mathcal{S})](\{b, c\}), [id](a) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle \langle [repeat*(\mathcal{S})](b), [repeat*(\mathcal{S})](c) \rangle, [id](a) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle \{ \langle [repeat*(\mathcal{S})](\{d\}), [id](b) \rangle \}, \{ \langle [repeat*(\mathcal{S})](\emptyset), [id](c) \rangle \} \rangle, [id](a) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle \{ \{ \langle [repeat*(\mathcal{S})](\emptyset), [id](d) \rangle \}, [id](b) \rangle \}, \{ \langle \emptyset, [id](c) \rangle \} \rangle, [id](a) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle \{ \{ \langle [repeat*(\mathcal{S})](\emptyset), [id](d) \rangle \}, [id](b) \rangle \}, \{ \langle [id](c) \rangle \} \rangle, [id](a) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle \{ \{ \langle \emptyset, [id](d) \rangle \}, [id](b) \rangle \}, \{ c \} \rangle, [id](a) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle \{ \{ \langle d, [id](b) \rangle \}, \{ c \} \} \rangle, [id](a) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle \{ d, c \}, [id](a) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ d, c \}
\end{aligned}$$

En utilisant les opérateurs de répétition et d'application en profondeur présentés précédemment nous pouvons définir des stratégies spécifiques de normalisation. Par exemple, la stratégie *innermost* est représentée par le terme

$$im(r) \triangleq repeat*(Once_{bu}(r))$$

et la stratégie *outermost* par le terme

$$om(r) \triangleq repeat*(Once_{td}(r)).$$

Corollaire 4.1 Les opérateurs *im* et *om* décrivant la normalisation de type *innermost* et *outermost* respectivement sont exprimables dans le ρ_T^{1st} -calcul.

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour représenter par un ρ -terme la normalisation d'un terme t dans une théorie de réécriture \mathcal{R} . Le terme $\xi_{\mathcal{R}}$ décrit au début de ce chapitre peut être défini par un des ρ -termes *im*(\mathcal{R}) ou *om*(\mathcal{R}) et donc, nous pouvons représenter la normalisation d'un terme u dans une théorie de réécriture \mathcal{R} par les ρ -termes

$$\xi_{\mathcal{R}}(u) \triangleq [im(\mathcal{R})](u)$$

ou

$$\xi_{\mathcal{R}}(u) \triangleq [om(\mathcal{R})](u).$$

Exemple 4.10 Si nous notons l'ensemble de règles de réécriture $\{a \rightarrow b, f(x, g(x)) \rightarrow x\}$ par \mathcal{R} , nous représentons par $[im(\mathcal{R})](f(a, g(a)))$ la normalisation du terme $f(a, g(a))$ dans une théorie de réécriture contenant les deux règles et la réduction suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
& [im(\mathcal{R})](f(a, g(a))) \\
& \triangleq [repeat*(Once_{bu}(\mathcal{R}))](f(a, g(a))) \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle [repeat*(Once_{bu}(\mathcal{R}))](\{f(b, g(a))\}), [id](f(a, g(a))) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle [repeat*(Once_{bu}(\mathcal{R}))](\{f(b, g(a))\}), [id](f(a, g(a))) \rangle \} \\
& \xrightarrow{*}_\rho \{ \langle \{ [repeat*(Once_{bu}(\mathcal{R}))](f(b, g(a))) \}, [id](f(a, g(a))) \rangle \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{ \{ [repeat*(Once_{bu}(\mathcal{R}))](f(b, g(a))) \}, [id](f(b, g(a))) \} \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{ [repeat*(Once_{bu}(\mathcal{R}))](f(b, g(b))) \}, [id](f(b, g(a))) \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{ \{ [repeat*(Once_{bu}(\mathcal{R}))](f(b, g(b))) \}, [id](f(b, g(b))) \}, [id](f(b, g(a))) \}, [id](f(a, g(a))) \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{ \{ [repeat*(Once_{bu}(\mathcal{R}))](\{b\}) \}, [id](f(b, g(b))) \}, [id](f(b, g(a))) \}, [id](f(a, g(a))) \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{ \{ \{ [repeat*(Once_{bu}(\mathcal{R}))](b) \}, [id](b) \}, [id](f(b, g(b))) \}, [id](f(b, g(a))) \}, [id](f(a, g(a))) \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{ \{ \{ [repeat*(Once_{bu}(\mathcal{R}))](\emptyset) \}, [id](b) \}, [id](f(b, g(b))) \}, [id](f(b, g(a))) \}, [id](f(a, g(a))) \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{ \{ \{ \emptyset, [id](b) \}, [id](f(b, g(b))) \}, [id](f(b, g(a))) \}, [id](f(a, g(a))) \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{ \{ \{ \{b\} \}, [id](f(b, g(b))) \}, [id](f(b, g(a))) \}, [id](f(a, g(a))) \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{ \{ \{b\} \}, [id](f(b, g(a))) \}, [id](f(a, g(a))) \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{ \{b\} \}, [id](f(a, g(a))) \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{ \{ \{b\} \}, [id](f(a, g(a))) \} \} \\
& \xrightarrow{\rho} \{b\}
\end{aligned}$$

Etant donné un terme u , si la théorie de réécriture \mathcal{R} n'est pas confluente alors le résultat de la réduction du terme $[im(\mathcal{R})](u)$ est un ensemble représentant les résultats possibles de la réduction du terme u dans la théorie de réécriture \mathcal{R} .

Exemple 4.11 Nous considérons l'ensemble $\mathcal{R} = \{a \rightarrow b, a \rightarrow c, f(x, x) \rightarrow x\}$ de règles de réécriture non-confluents. Le terme $[im(\mathcal{R})](f(a, a))$ représentant la normalisation innermost du terme $f(a, a)$ par rapport à l'ensemble de règles de réécriture \mathcal{R} est réduit en $\{b, f(c, b), f(b, c), c\}$. Le terme $[om(\mathcal{R})](f(a, a))$ représentant la normalisation outermost est réduit en $\{b, c\}$.

Conclusion

Nous avons défini dans ce chapitre plusieurs opérateurs décrivant principalement l'application d'un terme à une position donnée d'un autre terme. Nous pouvons décrire facilement l'application d'un terme aux sous-termes d'un autre terme en utilisant uniquement les opérateurs du ρ -calcul de base mais si nous voulons appliquer un terme seulement si ceci ne mène pas à un échec alors nous devons utiliser les opérateurs du ρ^{1st} -calcul.

Ces opérateurs nous permettent de tester l'échec d'une réduction et en utilisant cette facilité nous pouvons appliquer uniquement les termes ne menant pas à un échec. Afin de descendre dans la profondeur du terme t nous utilisons un ρ -terme correspondant au combinateur de point fixe de Turing du λ -calcul. Cet opérateur nous permet aussi de décrire l'application répétitive d'un ρ -terme donné.

En combinant ces opérateurs nous pouvons décrire d'une manière concise la normalisation d'un terme par rapport à une théorie de réécriture. Nous n'imposons pas la terminaison ou la confluence de l'ensemble de règles de réécriture mais dans ces cas nous pouvons obtenir des ρ -réductions non-terminantes ou menant à un ensemble ayant plusieurs éléments. En utilisant les opérateurs du ρ^{1st} -calcul nous allons donner une description des règles et stratégies du langage ELAN [Bor98, BKK98]. La même approche peut être utilisée pour d'autres langages basés sur la réécriture comme ASF+SDF [Deu96], CafeOBJ [FN97], Maude [CELM96], ML [Mil84] ou

Stratego [Vis99] mais également pour des démonstrateurs de théorèmes utilisant la réécriture comme par exemple Coq [BBC⁺97] ou HOL [GM93].

Chapitre 5

L'expressivité du ρ -calcul

La syntaxe du ρ -calcul général nous permet la représentation des abstractions du λ -calcul [Bar84] et des règles de réécriture utilisées en logique de réécriture. Dans cette section nous analysons la correspondance entre la réduction d'un terme du premier ordre par rapport à un ensemble de règles de réécriture ([DJ90, Klo90, BN98]) et la réduction du ρ -terme correspondant. Nous présentons aussi des fonctions de traduction entre les λ -termes et les ρ -termes et nous montrons que des réductions similaires sont obtenues dans les deux cas.

La représentation des λ -termes et des réductions sous-jacentes est réalisée en considérant une restriction de la syntaxe et des règles d'évaluation du ρ -calcul. Les réductions des termes par rapport à un système de réécriture sont représentées par des ρ -termes construits, soit en utilisant les termes de preuve des réductions dans la réécriture, soit en utilisant seulement les règles de réécriture et les opérateurs du ρ_T^{1st} -calcul.

En partant de la représentation des règles de réécriture conditionnelles, nous utilisons le ρ -calcul pour donner une sémantique opérationnelle aux règles et stratégies du langage ELAN dont une description est donnée dans [Bor98] et une sémantique du point de vue fonctionnelle est présentée dans [BKK98]. La représentation d'un programme ELAN par un ρ -terme nous permet de mieux comprendre le comportement des constructions du langage et particulièrement le traitement du non-déterminisme.

5.1 Expression du λ -calcul en ρ -calcul

Nous analysons d'abord l'encodage du λ -calcul pur [HS86] où les λ -termes sont construits en utilisant seulement les variables, l'opérateur d'abstraction et l'opérateur d'application (cf. Section 1.3.1) et ensuite nous adaptons cet encodage au cas du λ -calcul appliqué.

5.1.1 Expression du λ -calcul pur

Nous considérons une restriction de l'ensemble $\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ de ρ -termes noté $\varrho_\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et définie inductivement par :

$$\rho_\lambda\text{-termes} \quad t \quad ::= \quad x \mid \{t\} \mid t \mid x \rightarrow t$$

ou $x \in \mathcal{X}$.

Par rapport à la syntaxe du ρ -calcul général, les règles de réécriture du ρ_λ -calcul sont restreintes à des règles avec une variable en tant que membre gauche. En plus, les ensembles sont toujours des singletons.

Définition 5.1 *Etant donné un ensemble de variables \mathcal{X} , nous appelons ρ_λ -calcul l'instance du ρ -calcul défini par :*

- l'ensemble de termes $\varrho_\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{X})$,
- l'application (d'ordre supérieur) de substitution aux termes,
- la théorie \emptyset (filtrage syntaxique),
- l'ensemble de règles d'évaluation $\mathcal{E}_\lambda : \text{Fire}, \text{Congruence}, \text{Congruence_fail}, \text{Distrib}, \text{Batch}, \text{Switch}_L, \text{Switch}_R, \text{OpOnSet}, \text{Flat}$,
- la stratégie d'évaluation $\mathcal{N}\mathcal{O}\mathcal{N}\mathcal{E}$ qui n'impose aucune restriction sur l'application des règles d'évaluation.

En raison des restrictions de syntaxe que nous venons d'imposer, les règles d'évaluation du ρ_λ -calcul peuvent être spécialisées en celles décrites dans la Figure 5.1.

Fire_λ	$[x \rightarrow r](t)$	\Longrightarrow	$\{\langle x/t \rangle r\}$
Distrib_λ	$\{\{u\}\}(v)$	\Longrightarrow	$\{\{u\}(v)\}$
Batch_λ	$[v](\{u\})$	\Longrightarrow	$\{\{v\}(u)\}$
Switch_λ	$x \rightarrow \{v\}$	\Longrightarrow	$\{x \rightarrow v\}$
Flat_λ	$\{\{v\}\}$	\Longrightarrow	$\{v\}$

FIG. 5.1: Les règles d'évaluation du ρ_λ -calcul

La règle d'évaluation Fire_λ initialise, dans le ρ_λ -calcul, (comme la règle β dans le λ -calcul) l'application d'une substitution sur un terme. Une conséquence immédiate de la syntaxe restreinte imposée pour les termes de $\varrho_\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ est que le filtrage effectué dans la règle d'évaluation Fire_λ réussit toujours et la solution de l'équation de filtrage qui est nécessairement de la forme $x \ll_{\emptyset}^? t$ est simplement $\text{Solution}(x \ll_{\emptyset}^? t) = \{\langle x/t \rangle\}$.

Puisque le membre gauche d'une règle de réécriture est toujours une variable, la règle d'évaluation Switch_L n'est pas nécessaire et puisque nous n'utilisons pas des symboles de fonctions, les règles Congruence et Congruence_fail ainsi que la règle OpOnSet ne sont jamais utilisées.

Dans le ρ_λ -calcul nous aurions pu ajouter une règle d'évaluation éliminant tous les symboles d'ensemble. Mais dès que l'échec, représenté par l'ensemble vide, et le non-déterminisme, représenté par des ensembles ayant plus d'un élément, sont introduits, une telle règle d'évaluation ne serait plus significative.

La confluence du λ -calcul est obtenu indépendamment de la stratégie de réduction et nous voudrions obtenir le même résultat pour sa ρ -représentation. Afin d'assurer la confluence du ρ_λ -calcul nous devons utiliser la stratégie d'évaluation ConfStrat définie dans la Section 3.3.3 pour le ρ_\emptyset -calcul. Cette stratégie permet la réduction d'un terme de la forme $[l \rightarrow r](t)$ seulement si :

- le terme l est linéaire,
- le terme l subsume faiblement le terme t et,
- le terme t ne contient aucun ensemble ayant plus d'un élément et aucun ensemble vide et,
- le terme t ne contient pas de sous-terme de la forme $[u](v)$ où u n'est pas une règle de réécriture et,
- pour tout sous-terme $[u \rightarrow w](v)$ de t , u subsume v .

Nous voulons déterminer maintenant quelles sont les conditions satisfaites implicitement par les termes de $\varrho_\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et quelles sont les conditions que nous devons toujours imposer pour garantir la confluence du ρ_λ -calcul.

La condition interdisant les termes de la forme $[u](v)$ dans le terme t si u n'est pas une règle de réécriture est imposée dans le seul but de ne pas permettre des termes réductibles en \emptyset dans l'argument t de l'application. Par exemple, dans le ρ_\emptyset -calcul un sous-terme $[a](b)$, avec a, b des constantes, est réduit en \emptyset par la règle d'évaluation *Congruence_fail* et si nous supposons une propagation stricte de l'échec alors le terme t est réduit en \emptyset .

Il est évident que dans $\varrho_\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ il existe des termes de la forme $[u](v)$ où u n'est pas une règle de réécriture, mais les symboles de tête de u et v ne sont pas fonctionnels et donc, un échec ne peut pas être obtenu à cause d'une application de la forme $[u](v)$ avec u, v ayant des symboles de tête fonctionnels différents.

Proposition 5.1 *Le ρ_λ -calcul est confluent.*

Preuve : Les preuves de confluence de la Section 3.3 peuvent être facilement adaptées pour montrer que le ρ_λ -calcul est confluent si les règles d'évaluation sont guidées par une stratégie permettant la réduction d'un terme de la forme $[l \rightarrow r](t)$ seulement si :

- le terme l est linéaire et,
- le terme l subsume faiblement le terme t et,
- le terme t ne contient aucun ensemble ayant plus d'un élément et aucun ensemble vide et,
- pour tout sous-terme $[u \rightarrow w](v)$ de t , u subsume v .

Nous montrons que toutes les conditions imposées dans la stratégie précédente sont satisfaites par tous les termes du $\varrho_\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{X})$.

Tous les membres gauches des règles de réécriture du ρ_λ -calcul sont des variables et donc, ils sont linéaires. Puisque une variable subsume et donc subsume faiblement tout terme, la deuxième et la dernière condition sont satisfaites aussi pour tout terme de $\varrho_\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{X})$. La troisième condition est trivialement vraie grâce à la construction des termes du ρ_λ -calcul.

Toutes les conditions imposées dans la stratégie ci-dessus sont donc implicitement satisfaites dans le ρ_λ -calcul permettant ainsi l'application de la règle d'évaluation *Fire $_\lambda$* à tout terme de la forme $[u](v)$. Cette stratégie est donc équivalente à la stratégie *NONÉ* dans le cas du ρ_λ -calcul et par conséquent, nous pouvons conclure que le ρ_λ -calcul est confluent quelle que soit la stratégie d'évaluation utilisée. \square

Maintenant nous pouvons noter que tout λ -terme peut être représenté par un ρ -terme. La fonction φ décrivant la correspondance entre les termes représentés dans la syntaxe du λ -calcul et les termes représentés dans la syntaxe du ρ_λ -calcul est définie par les règles de transformation suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightsquigarrow x, \text{ si } x \text{ est une variable} \\ \varphi(\lambda x.t) &\rightsquigarrow x \rightarrow \varphi(t) \\ \varphi(t \ u) &\rightsquigarrow [\varphi(t)](\varphi(u)) \end{aligned}$$

Une fonction de traduction similaire peut être employée pour transformer les termes représentés dans la syntaxe du ρ_λ -calcul en des termes représentés dans la syntaxe du λ -calcul :

$$\begin{aligned} \delta(x) &\rightsquigarrow x, \text{ si } x \text{ est une variable} \\ \delta(\{t\}) &\rightsquigarrow \delta(t) \\ \delta(x \rightarrow t) &\rightsquigarrow \lambda x.\delta(t) \\ \delta([t](u)) &\rightsquigarrow \delta(t) \ \delta(u) \end{aligned}$$

Les réductions dans le λ -calcul et dans le ρ_λ -calcul sont équivalentes modulo les notations pour l'application et l'abstraction et la gestion des ensembles :

Proposition 5.2 *Etant donnés deux λ -termes t et t' . Si $t \longrightarrow_\beta t'$ alors $\varphi(t) \xrightarrow{*}_{\rho_\lambda} \{\varphi(t')\}$.*

Etant donnés deux ρ_λ -termes u et u' . Si $u \longrightarrow_{\rho_\lambda} u'$ alors $\delta(u) \xrightarrow{}_\beta \delta(u')$.*

Preuve : Nous utilisons une induction structurelle sur le terme t :

- Si t est une variable x , alors $t' = x$ et $\varphi(t) = \varphi(t') = x$.
- Si $t = \lambda x.u$ alors $t' = \lambda x.u'$ avec $u \longrightarrow_\beta u'$ et nous avons $\varphi(t) = x \rightarrow \varphi(u)$. Par induction, nous avons $\varphi(u) \xrightarrow{*}_{\rho_\lambda} \{\varphi(u')\}$, et donc

$$\varphi(t) = x \rightarrow \varphi(u) \xrightarrow{*}_{\rho_\lambda} x \rightarrow \{\varphi(u')\} \longrightarrow_{Switch_\lambda} \{x \rightarrow \varphi(u')\} = \{\varphi(t')\}$$

- Si $t = (u \ v)$ alors nous avons soit $t' = (u' \ v)$ avec $u \longrightarrow_\beta u'$, soit $t' = (u \ v')$ avec $v \longrightarrow_\beta v'$, soit $t = \lambda x.u \ v$ et $t' = \langle x/v \rangle u$.

Dans le premier cas, en appliquant l'induction nous obtenons

$$\varphi(t) = [\varphi(u)](\varphi(v)) \xrightarrow{*}_{\rho_\lambda} [\{\varphi(u')\}](\varphi(v)) \longrightarrow_{Distrib_\lambda} \{[\varphi(u')](\varphi(v))\} = \{\varphi(t')\}.$$

Le deuxième cas est similaire :

$$\varphi(t) = [\varphi(u)](\varphi(v)) \xrightarrow{*}_{\rho_\lambda} [\{\varphi(u)\}](\varphi(v')) \longrightarrow_{Distrib_\lambda} \{[\varphi(u)](\varphi(v'))\} = \{\varphi(t')\}.$$

Dans le troisième cas $\varphi(t) = [x \rightarrow \varphi(u)](\varphi(v))$ et

$$\varphi(t) = [x \rightarrow \varphi(u)](\varphi(v)) \longrightarrow_{Fire_\lambda} \{\langle x/\varphi(v) \rangle \varphi(u)\} = \varphi(\langle x/v \rangle u) = \varphi(t').$$

Puisque l'application de la substitution est similaire dans le λ -calcul et le ρ -calcul, nous obtenons, en utilisant la définition de la fonction φ , $\varphi(\langle x/v \rangle u) = \langle x/\varphi(v) \rangle \varphi(u)$ et donc, la propriété est vérifiée.

Puisque dans le ρ_λ -calcul nous n'avons que des singletons et la transformation δ seulement enlève les symboles d'ensemble, alors l'application d'une des règles d'évaluation $Distrib_\lambda$, $Batch_\lambda$, $Switch_\lambda$ et $Flat_\lambda$ correspond à l'identité dans le λ -calcul.

- Si $t = \{[u]\}(v)$ alors nous avons $t \longrightarrow_{Distrib_\lambda} \{[u](v)\}$. Comme $\delta(\{[u]\}(v)) = \delta(u) \ \delta(v)$ et $\delta(\{[u](v)\}) = \delta(u) \ \delta(v)$, la propriété est vérifiée.
- Si $t = [x \rightarrow u](v)$ alors $t \longrightarrow_{Fire_\lambda} \{\langle x/v \rangle u\}$. Nous avons

$$\delta(t) = \lambda x.\delta(u) \ \delta(v) \longrightarrow_\beta \langle x/\delta(v) \rangle \delta(u) = \delta(\langle x/v \rangle u) = \delta(t').$$

Les autres cas sont très similaires au premier cas ou à leurs correspondants de la première partie. \square

Exemple 5.1 *Nous considérons les trois combinateurs $I = \lambda x.x$, $K = \lambda xy.x$ et $S = \lambda xyz.xz(yz)$ et leur représentation dans le ρ -calcul :*

- $I_\rho = x \rightarrow x$,
- $K_\rho = x \rightarrow (y \rightarrow x)$,
- $S_\rho = x \rightarrow (y \rightarrow (z \rightarrow [[x](z)]([y](z)))).$

et nous vérifions qu'à l'égalité $SKK = I$ correspond une ρ_λ -réduction $[[S_\rho](K_\rho)](K_\rho) \xrightarrow{}_{\rho_\lambda} \{I_\rho\}$:*

$$\begin{aligned}
[[S_\rho](K_\rho)](K_\rho) &= [[x \rightarrow (y \rightarrow (z \rightarrow [[x](z)]([y](z))))](x \rightarrow (y \rightarrow x))(x \rightarrow (y \rightarrow x)) \longrightarrow_{\rho_\lambda} \\
&\quad [\{y \rightarrow (z \rightarrow [[x \rightarrow (y \rightarrow x)](z)]([y](z))))\}(x \rightarrow (y \rightarrow x)) \longrightarrow_{\rho_\lambda} \\
&\quad \{\{y \rightarrow (z \rightarrow [[x \rightarrow (y \rightarrow x)](z)]([y](z))))\}(x \rightarrow (y \rightarrow x))\} \longrightarrow_{\rho_\lambda} \\
&\quad \{\{y \rightarrow (z \rightarrow [\{y \rightarrow z\}](y))\}(x \rightarrow (y \rightarrow x))\} \longrightarrow_{\rho_\lambda} \\
&\quad \{\{\{y \rightarrow (z \rightarrow [y \rightarrow z](y))\}(x \rightarrow (y \rightarrow x))\}\} \longrightarrow_{\rho_\lambda} \\
&\quad \{\{\{y \rightarrow (z \rightarrow \{z\})\}(x \rightarrow (y \rightarrow x))\}\} \longrightarrow_{\rho_\lambda} \\
&\quad \{\{\{\{y \rightarrow (z \rightarrow z)\}(x \rightarrow (y \rightarrow x))\}\}\} \longrightarrow_{\rho_\lambda} \\
&\quad \{\{\{\{z \rightarrow z\}\}\}\} \longrightarrow_{\rho_\lambda} \\
&\quad \{z \rightarrow z\} = \{I_\rho\}
\end{aligned}$$

5.1.2 Expression du λ -calcul avec symboles de fonctions

Dans la section précédente nous avons considéré la syntaxe du λ -calcul pur mais si nous voulons analyser le cas du λ -calcul appliqué alors, les constantes doivent être considérées. Nous allons analyser par la suite le cas plus général où les symboles de fonctions sont non seulement des constantes mais aussi des symboles de fonctions d'une arité non-nulle. Nous obtenons ainsi un ensemble de termes $\rho_\lambda^a(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ défini par la syntaxe :

$$\rho_\lambda^a\text{-termes} \quad t \quad ::= \quad x \mid \{t\} \mid f(t, \dots, t) \mid t \mid x \rightarrow t$$

ou $x \in \mathcal{X}$ et $f \in \mathcal{F}$.

Nous considérons cette fois-ci une instance du ρ -calcul, appelé ρ_λ^a -calcul, ne contenant pas les règles d'évaluation *Congruence* et *Congruence_fail*. Ainsi, les règles d'évaluation du ρ_λ^a -calcul sont celles de la Figure 5.1 et la règle d'évaluation *OpOnSet* spécialisée pour des singletons :

$$OpOnSet_\lambda \quad f(v_1, \dots, \{u\}, \dots, v_n) \implies \{f(v_1, \dots, u, \dots, v_n)\}$$

Puisque nous avons précisé explicitement que les règles *Congruence* et *Congruence_fail* ne sont pas utilisées dans le ρ_λ^a -calcul alors nous obtenons le même résultat de confluence que dans le cas du ρ_λ -calcul.

Proposition 5.3 *Le ρ_λ^a -calcul est confluent.*

Les fonctions de translation sont complétées pour prendre en compte la syntaxe du ρ_λ^a -calcul et nous ajoutons donc les règles de transformation suivantes :

$$\varphi(f(u_1, \dots, u_n)) \rightsquigarrow f(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))$$

et

$$\delta(f(u_1, \dots, u_n)) \rightsquigarrow f(\delta(u_1), \dots, \delta(u_n))$$

Les réductions dans le λ -calcul appliqué et dans le ρ_λ^a -calcul sont équivalentes modulo la syntaxe des deux calculs :

Proposition 5.4 *Etant donnés deux λ -termes t et t' . Si $t \longrightarrow_\beta t'$ alors $\varphi(t) \xrightarrow{*}_{\rho_\lambda^a} \{\varphi(t')\}$.*

Etant donnés deux ρ_λ -termes u et u' . Si $u \longrightarrow_{\rho_\lambda} u'$ alors $\delta(u) \xrightarrow{}_\beta \delta(u')$.*

Preuve : Nous utilisons une induction structurale sur le terme t . Les cas où t est une variable, une abstraction ou une application sont traités de la même manière que pour le ρ_λ -calcul. Nous devons donc analyser le cas d'un terme fonctionnel :

- Si $t = f(u_1, \dots, u_n)$ alors nous avons $t' = f(u_1, \dots, u'_k, \dots, u_n)$ avec $u_k \longrightarrow_{\beta} u'_k$ et $\varphi(t) = f(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k), \dots, \varphi(u_n))$. Par induction, $\varphi(u_k) \xrightarrow{\rho_{\lambda}^a} \{\varphi(u'_k)\}$, et donc, nous obtenons la réduction $\varphi(t) \xrightarrow{\rho_{\lambda}^a} f(\varphi(u_1), \dots, \{\varphi(u'_k)\}, \dots, \varphi(u_n)) \longrightarrow_{OpOnSet_{\lambda}} \{f(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u'_k), \dots, \varphi(u_n))\}$. Comme $\varphi(t') = f(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u'_k), \dots, \varphi(u_n))$ alors la propriété est vérifiée.

Le cas de la transformation inverse est similaire. \square

5.2 Expression de la réécriture de termes en ρ -calcul

Nous considérons d'abord le cas des règles de réécriture de la forme $(l \rightarrow r)$ avec $l, r \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ avec une traduction directe dans des ρ -règles de réécriture. Nous ajoutons ensuite des conditions et nous obtenons des règles de réécriture conditionnelles de la forme $(l \rightarrow r \text{ si } c)$. Dans les deux cas nous pouvons construire à partir des dérivations d'un terme t dans un système de réécriture un ρ -terme t_{ρ} avec une ρ -réduction similaire à celle de t dans la réécriture. Afin de construire le ρ -terme approprié, sans connaître *a priori* les dérivations dans la théorie de réécriture, nous utilisons les opérateurs de normalisation du ρ_T^{1st} -calcul.

5.2.1 Expression de la réécriture non-conditionnelle

Dans cette section nous décrivons la correspondance entre les dérivations d'un terme t dans une théorie de réécriture $\mathcal{T}_{\mathcal{R}} = (\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ [Mes92] et les réductions d'un ρ -terme t_{ρ} construit à partir du terme u et de l'ensemble de règles de réécriture \mathcal{R} . Nous considérons que la réécriture est effectuée modulo une théorie vide ($\mathcal{E} = \emptyset$) mais les résultats peuvent être étendus sans difficulté à une théorie équationnelle.

Les membres gauches des règles de réécriture $l \rightarrow r$ du ρ_0 -calcul sont des termes du premier ordre ($l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$) et donc, les règles de \mathcal{R} sont trivialement traduites dans le ρ_0 -calcul.

Nous voulons montrer que pour toute dérivation dans une théorie de réécriture, une réduction correspondante peut être trouvée dans le ρ_0 -calcul. Si nous considérons qu'un sous-terme w d'un terme t est réduit en w' en appliquant la règle de réécriture $(l \rightarrow r)$ et donc,

$$t_{[w]_p} \longrightarrow_{\mathcal{R}} t_{[w']_p}$$

alors, nous pouvons construire immédiatement le ρ -terme $t_{[[l \rightarrow r](w)]_p}$ avec la réduction :

$$t_{[[l \rightarrow r](w)]_p} \longrightarrow_{\rho} t_{[\{w'\}]_p} \xrightarrow{*}_{\rho} \{t_{[w']_p}\}.$$

La méthode ci-dessus de construction du ρ -terme avec une ρ -réduction similaire à celle du terme t par rapport à la règle $l \rightarrow r$ est très facile mais permet seulement de trouver la correspondance pour un pas de réécriture. Cette représentation est difficilement étendue pour un nombre quelconque de pas de réduction par rapport à un ensemble de règles de réécriture et une méthode systématique pour la construction du ρ -terme correspondant est souhaitable.

Proposition 5.5 *Etant donnés une théorie de réécriture $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ et deux termes clos du premier ordre $t, t' \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ tels que $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}} t'$. Alors, il existe des ρ -termes u_1, \dots, u_n construits en utilisant les règles de réécriture de \mathcal{R} et les termes intermédiaires utilisés dans la dérivation $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}} t'$ tels que nous ayons $[u_n](\dots[u_1](t)\dots) \xrightarrow{*}_{\rho_0} \{t'\}$.*

Preuve : Nous utilisons une induction sur la longueur de la dérivation $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}} t'$.

Le cas de base : $t \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}} t$ (dérivation en 0 étapes)

Nous avons immédiatement $[id](t) \xrightarrow{0}_{\rho_0} \{t\}$.

Induction : $t \xrightarrow{n}_{\mathcal{R}} t'$ (dérivation en n étapes)

Nous considérons que la règle de réécriture $l \rightarrow r$ est appliquée à la position p du terme $t'_{[w]_p}$ obtenu après $n - 1$ étapes de réductions :

$$t \xrightarrow{n-1}_{\mathcal{R}} t'_{[w]_p} \longrightarrow_{l \rightarrow r, p} t'_{[\theta r]_p}$$

où θ est la greffe telle que $\theta l = w$.

Par induction il existe des ρ -termes u_1, \dots, u_{n-1} tels que $[u_{n-1}](\dots [u_1](t) \dots) \xrightarrow{*}_{\rho_0} \{t'_{[w]_p}\}$.

Nous considérons le ρ -terme $u_n = t'_{[l \rightarrow r]_p}$ et nous obtenons la réduction :

$$\begin{aligned} [u_n](\dots [u_1](t) \dots) &\xrightarrow{*}_{\rho_0} [t'_{[l \rightarrow r]_p}](\{t'_{[w]_p}\}) \longrightarrow_{Batch} \{[t'_{[l \rightarrow r]_p}](t'_{[w]_p})\} \xrightarrow{*}_{Congruence} \\ &\{\{t'_{[l \rightarrow r](w)]_p}\}\} \longrightarrow_{Fire} \{\{t'_{[\theta' r]_p}\}\} \xrightarrow{*}_{OpOnSet} \{\{\{t'_{[\theta' r]_p}\}\}\} \xrightarrow{*}_{Flat} \{t'_{[\theta' r]_p}\} \end{aligned}$$

où la substitution θ' est telle que $\{\theta'\} = \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? w)$.

Puisque $\theta = \theta'$ et que dans ce cas la substitution et la greffe sont identiques (r ne contient pas de règle de réécriture), nous obtenons $t'_{[\theta' r]_p} = t'_{[\theta r]_p}$. \square

Jusqu'à maintenant nous avons utilisé la règle d'évaluation *Congruence* pour obtenir la ρ -réduction

$$[t^n_{[l_n \rightarrow r_n]_{p_n}}](\dots [t^2_{[l_2 \rightarrow r_2]_{p_2}}]([t^1_{[l_1 \rightarrow r_1]_{p_1}}](t)) \dots) \xrightarrow{*}_{\rho} \{t'\}$$

correspondant à une dérivation

$$t = t^1_{[w_1]_{p_1}} \longrightarrow_{l_1 \rightarrow r_1, p_1} t^2_{[w_2]_{p_2}} \longrightarrow_{l_2 \rightarrow r_2, p_2} \dots t^{n-1}_{[w_{n-1}]_{p_{n-1}}} \longrightarrow_{l_n \rightarrow r_n, p_n} t^n_{[w_n]_{p_n}} = t'$$

Dans la Section 2.6 nous avons montré que à toute ρ -réduction d'un terme u impliquant l'utilisation de la règle d'évaluation *Congruence* nous pouvons faire correspondre la réduction d'un terme u' , construit à partir du terme u , telle que la règle d'évaluation *Fire* est utilisée à la place de la règle d'évaluation *Congruence*. En appliquant cette méthode, la dérivation ci-dessus s'exprime par :

$$[t^n_{[l_n]_{p_n}} \rightarrow t^n_{[r_n]_{p_n}}](\dots ([t^1_{[l_1]_{p_1}} \rightarrow t^1_{[r_1]_{p_1}}](t)) \dots) \xrightarrow{*}_{\rho} \{t'\}$$

mais dans ce cas les réductions sont effectuées en utilisant la règle d'évaluation *Fire* au lieu de la règle *Congruence*.

Nous pouvons remarquer que les termes u_i de la Proposition 5.5 sont similaires aux termes de preuve utilisés en logique de réécriture (Section 1.2.3). En effet, les ρ -termes sont une généralisation des termes de preuve de la logique de réécriture. Considérons la fonction suivante de transformation de termes de preuve en des ρ -termes :

$$\begin{aligned} \varphi(f(\pi_1, \dots, \pi_n)) &\rightsquigarrow f(\varphi(\pi_1), \dots, \varphi(\pi_n)) \\ \varphi(\ell(\pi_1, \dots, \pi_n)) &\rightsquigarrow l(\varphi(\pi_1), \dots, \varphi(\pi_n)); l(x_1, \dots, x_n) \rightarrow r(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad \text{si } [\ell(x_1, \dots, x_n)]l(x_1, \dots, x_n) \rightarrow r(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R} \\ \varphi(\pi_1; \pi_2) &\rightsquigarrow \varphi(\pi_1); \varphi(\pi_2) \end{aligned}$$

où le ρ -opérateur “;” décrit dans la Section 4.2 représente l'application successive de deux ρ -termes. Une simple vérification permet de s'assurer que pour un séquent $\pi : t \rightarrow t'$ obtenu dans une théorie de réécriture nous obtenons une ρ -réduction :

$$[\varphi(\pi)](t) \xrightarrow{*}_{\rho} \{t'\}$$

Ceci nous permet d'obtenir une seconde preuve de la Proposition 5.5 en passant par les termes de preuve de la logique de réécriture. Nous pouvons donc construire de plusieurs manières un ρ -terme décrivant la réduction d'un terme clos du premier ordre par rapport à un ensemble de règles de réécriture.

Recherche de dérivation

Ce que nous obtenons ici est un encodage en ρ -calcul d'une dérivation de la réécriture. Il est souvent plus intéressant de *trouver* une telle dérivation. Nous nous intéressons donc maintenant à l'élaboration d'une méthode permettant la construction du ρ -terme ayant la même réduction qu'un terme t par rapport à un ensemble de règles de réécriture mais sans connaître les pas intermédiaires de la dérivation de t .

Dans le Chapitre 4 nous avons introduit le ρ_T^{1st} -calcul et des opérateurs permettant la définitions des stratégies de normalisation de type *innermost* et *outermost*². Nous allons utiliser ces stratégies pour obtenir une représentation concise des réductions par rapport à un ensemble de règles de réécriture, qui est considéré comme un paramètre de la stratégie.

Proposition 5.6 *Etant donnés une théorie de réécriture $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ et deux termes clos du premier ordre $t, t' \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ tels que t est normalisé en $t\downarrow$ par rapport à l'ensemble de règles \mathcal{R} . Alors, $[im(\mathcal{R})](t)$ est ρ -réduit en un ensemble contenant le terme $t\downarrow$.*

Preuve : Par induction sur le nombre d'étapes de dérivation du terme t . Pour le cas de base il suffit de remarquer que si $t = t\downarrow$ alors $[im(\mathcal{R})](t) \xrightarrow{*}_{\rho_0} \{t\}$. Les autres cas sont obtenus en utilisant la construction du ρ -terme $im(\mathcal{R})$. \square

On doit noter que pour une dérivation de type *innermost* par rapport à l'ensemble de règles de réécriture \mathcal{R} , $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}} t'$, le ρ -terme $[im(\mathcal{R})](t)$ est réduit en un ρ -terme avec un sous-terme $[im(\mathcal{R})](t')$.

Exemple 5.2 *Etant donné un ensemble de règles de réécriture $\mathcal{R} = \{(x = x) \rightarrow True, b \rightarrow a\}$. En utilisant les règles de \mathcal{R} , le terme $a = b$ est réduit en $True$ et en partant de cette réduction, nous pouvons construire des ρ -termes comme, par exemple,*

$$[(x = x) \rightarrow True](a = [b \rightarrow a](b))$$

ou

$$[(x = x) \rightarrow True]([a = (b \rightarrow a)](a = b))$$

ou

$$[(x = x) \rightarrow True]([(a = b) \rightarrow (b = b)](a = b))$$

qui sont réduits en $\{True\}$ dans le ρ_0 -calcul. En utilisant l'opérateur de normalisation im nous pouvons définir le terme

$$[im(\{(x = x) \rightarrow True, b \rightarrow a\})](a = b)$$

qui est réduit en $\{True\}$ dans le ρ_T^{1st} -calcul.

²les deux opérateurs *im* et *om* sont définis dans la Section 4.6

Puisque dans ce cas nous pouvons obtenir des ensembles vides dus à un échec de filtrage ou des ensembles ayant plus d'un élément si l'approche est étendue pour un filtrage non-unitaire, des stratégies d'évaluation spécifiques, comme celles présentées dans le Chapitre 3, doivent être utilisées afin d'obtenir la confluence des réductions de tout ρ -terme.

5.2.2 Expression de la réécriture conditionnelle

Dans la section précédente nous avons montré que toute dérivation d'un terme par rapport à un ensemble de règles de réécriture peut être décrite par une réduction dans le ρ -calcul. Maintenant, nous analysons la possibilité d'étendre ce résultat dans le cas de la réécriture conditionnelle.

Nous pouvons utiliser la même approche que pour la représentation des dérivations dans la réécriture non-conditionnelle mais les ρ -termes employés afin de décrire une réduction utilisant des règles conditionnelles deviennent très compliqués. Alternativement, une représentation concise de la normalisation des conditions peut être obtenue en utilisant les opérateurs de normalisation *im* et *om* présentés dans la Section 4.6 et déjà utilisés dans la section précédente.

Nous rappelons que les règles de réécriture conditionnelles définies dans la Section 1.2 sont de la forme $(l \rightarrow r \text{ si } c)$ avec les termes du premier ordre $l, r, c \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ tels que $\text{Var}(r) \cup \text{Var}(c) \subseteq \text{Var}(l)$. Etant donné un ensemble \mathcal{R} de règles de réécriture conditionnelles, l'application d'une règle $(l \rightarrow r \text{ si } c)$ à un terme t consiste à trouver une substitution σ telle que $\sigma l = t$, vérifier la validité de σc et remplacer t par σr .

Dans le cas d'un système de réécriture conditionnel normal [DO90], la vérification de la validité de la condition est un processus de normalisation et la difficulté principale dans la représentation d'un tel système réside dans le fait que la relation de réduction est récursivement appliquée afin d'évaluer les conditions d'une règle de réécriture conditionnelle.

Nous considérons les termes c et u et une greffe θ tels que θc est normalisé par rapport à un ensemble \mathcal{R} de règles de réécriture en u . Si c est une condition booléenne et l'ensemble \mathcal{R} est complètement défini sur les booléens ([BR95]) alors le terme u doit être une des constantes *True* ou *False*. Nous supposons qu'il existe un ρ -terme c_ρ construit à partir de c et tel que θc_ρ est ρ -réduit en $\{u\}$. La règle de réécriture conditionnelle $(l \rightarrow r \text{ si } c)$ est alors représentée par le ρ -terme :

$$l \rightarrow [\{True \rightarrow r, False \rightarrow \emptyset\}](c_\rho)$$

ou par le ρ -terme suivant qui est plus simple, mais peut-être moins suggestif :

$$l \rightarrow [True \rightarrow r](c_\rho).$$

L'utilisation de la règle d'évaluation *Fire* pour l'application des deux termes précédents à un terme t mène aux termes $\{[\{True \rightarrow \theta r, False \rightarrow \emptyset\}](\theta c_\rho)\}$ et respectivement $\{[True \rightarrow \theta r](\theta c_\rho)\}$ où θ représente la greffe obtenue en filtrant les termes l et t . Dans le cas où θc_ρ est ρ -réduit en $\{False\}$, dans le deuxième terme le filtrage échoue et le résultat de l'application est, comme dans le premier cas, l'ensemble vide. Quand θc_ρ est réduit en $\{True\}$ le résultat de la réduction est clairement θr dans les deux cas.

En utilisant la représentation ci-dessus, nous étendons la Proposition 5.5 et nous montrons que toute dérivation dans une théorie de réécriture conditionnelle est représentable par un ρ -terme approprié :

Proposition 5.7 *Etant donnés une théorie de réécriture conditionnelle $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ et deux termes clos du premier ordre $t, t' \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ tels que $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}} t'$. Alors, il existe des ρ -termes u_1, \dots, u_n construits*

en utilisant les règles de réécriture de \mathcal{R} et les termes intermédiaires utilisés dans la dérivation $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}} t'$ tels que nous ayons $[u_n](\dots [u_1](t)\dots) \xrightarrow{*}_{\rho_\emptyset} \{t'\}$.

Preuve : Nous procédons comme pour la Proposition 5.5 et nous utilisons une induction sur la longueur de la dérivation $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}} t'$.

Le cas de base : si $t \xrightarrow{0}_{\mathcal{R}} t$

Dans ce cas nous avons immédiatement $[id](t) \xrightarrow{0}_{\rho_\emptyset} \{t\}$.

Induction : $t \xrightarrow{n}_{\mathcal{R}} t'$

Nous considérons une règle de réécriture de la forme $(l \rightarrow r \text{ si } c)$ appliquée à la position p du terme $t'_{[w]_p}$ obtenu après m ($m < n$) étapes de réductions et ainsi :

$$t \xrightarrow{m}_{\mathcal{R}} t'_{[w]_p} \longrightarrow_{(l \rightarrow r \text{ si } c), p} t'_{[\theta r]_p}$$

où θ est la greffe telle que $\theta l = w$ et $\theta c \xrightarrow{k}_{\mathcal{R}} \text{True}$.

Par induction il existe des ρ -termes t_ρ, c_ρ tels que $t_\rho \xrightarrow{*}_{\rho_\emptyset} \{t'_{[w]_p}\}$ et $\theta c_\rho \xrightarrow{*}_\rho \{\text{True}\}$.

Nous considérons le ρ -terme $v = t'_{[l \rightarrow [\text{True} \rightarrow r](c_\rho)]_p}$ et nous obtenons la réduction suivante :

$$\begin{aligned} [v](t_\rho) &\xrightarrow{*}_\rho [t'_{[l \rightarrow [\text{True} \rightarrow r](c_\rho)]_p}(\{t'_{[w]_p}\}) \\ &\longrightarrow_{\text{Batch}} \{\{t'_{[l \rightarrow [\text{True} \rightarrow r](c_\rho)]_p}(t'_{[w]_p})\}\} \\ &\xrightarrow{*}_{\text{Congruence}} \{\{t'_{[l \rightarrow [\text{True} \rightarrow r](c_\rho)](w)]_p}\}\} \\ &\longrightarrow_{\text{Fire}} \{\{t'_{[\{\theta[\text{True} \rightarrow r](c_\rho)]_p}\}\} = \{\{t'_{[\{\text{True} \rightarrow \theta r](\theta c_\rho)]_p}\}\}\} \\ &\xrightarrow{*}_{\text{OpOnSet}} \{\{\{t'_{[\text{True} \rightarrow \theta r](\theta c_\rho)]_p}\}\}\} \\ &\xrightarrow{*}_\rho \{\{\{t'_{[\text{True} \rightarrow \theta r](\{\text{True}\})_p}\}\}\} \\ &\longrightarrow_{\text{Batch}} \{\{\{t'_{[\{\text{True} \rightarrow \theta r](\text{True})_p]\}\}\}\} \\ &\xrightarrow{*}_{\text{OpOnSet}} \{\{\{\{t'_{[\text{True} \rightarrow \theta r](\text{True})_p]\}\}\}\} \\ &\longrightarrow_{\text{Fire}} \{\{\{\{t'_{[\theta r]_p}\}\}\}\} \\ &\xrightarrow{*}_{\text{OpOnSet}} \{\{\{\{\{t'_{[\theta r]_p}\}\}\}\}\} \\ &\xrightarrow{*}_{\text{Flat}} \{t'_{[\theta r]_p}\} \end{aligned}$$

□

Recherche de dérivation

Nous pouvons donc construire un terme t_ρ qui est ρ -réduit en $\{t'\}$ si le terme t est réduit en t' en utilisant un ensemble \mathcal{R} de règles de réécriture conditionnelles. Néanmoins, la construction du terme t_ρ dépend fortement non seulement du terme t mais aussi de tous les termes intermédiaires obtenus dans la dérivation $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}} t'$ et, comme pour la réécriture non-conditionnelle, nous voulons définir un ρ -terme permettant de trouver une telle dérivation.

Afin de construire le terme t_ρ en partant seulement du terme t et des règles de réécriture de \mathcal{R} , nous utilisons les opérateurs de normalisation *im* et *om*. Par exemple, nous pouvons définir :

$$c_\rho \triangleq [\text{im}(\mathcal{R})](c).$$

Exemple 5.3 Supposons que l'ensemble de règles de réécriture décrivant l'ordre sur les entiers est noté par $\mathcal{R}_<$. Nous considérons la règle de réécriture $(f(x) \rightarrow g(x) \text{ si } x \geq 1)$ qui appliquée au terme $f(2)$ mène à $g(2)$ puisque x est instancié à 2 et la condition $(2 \geq 1)$ est réduite en *True* en utilisant la règle $(2 \geq 1) \rightarrow \text{True}$.

Si nous considérons que la condition est normalisée par rapport à l'ensemble de règles de réécriture $\mathcal{R}_<$ alors nous obtenons la réduction suivante dans le ρ -calcul :

$$\begin{aligned}
& [f(x) \rightarrow [True \rightarrow g(x)]([im(\mathcal{R}_<)](x \geq 1))](f(2)) \\
\longrightarrow_{Fire} & \{[True \rightarrow g(2)]([im(\mathcal{R}_<)](2 \geq 1))\} \\
\overset{*}{\longrightarrow}_{\rho} & \{[True \rightarrow g(2)](\{True\})\} \\
\longrightarrow_{Batch} & \{\{[True \rightarrow g(2)](True)\}\} \\
\longrightarrow_{Fire} & \{\{\{g(2)\}\}\} \\
\overset{*}{\longrightarrow}_{Flat} & \{g(2)\}
\end{aligned}$$

Les conditions des règles de réécriture peuvent être normalisées par rapport à un ensemble de règles de réécriture conditionnelles, y compris la règle courante, et donc la définition des ρ -règles de réécriture représentant cette normalisation est intrinsèquement récursive et ne peut pas être réalisée en utilisant seulement l'opérateur im .

Nous utilisons l'opérateur de point fixe Θ décrit dans la Section 4.5 pour représenter l'application du même ensemble de règles de réécriture pour la normalisation de toutes les conditions.

Etant donné un ensemble de règles de réécriture $\mathcal{R} = \mathcal{R}_n \cup \mathcal{R}_c$ où \mathcal{R}_n et \mathcal{R}_c représentent le sous-ensemble de règles de réécriture non-conditionnelles et respectivement le sous-ensemble de règles de réécriture conditionnelles de la forme $(l \rightarrow r \text{ si } c)$. Nous définissons le terme :

$$R \triangleq f \rightarrow (y \rightarrow [im(\{l_i \rightarrow [True \rightarrow r_i]([f](c_i)) \mid i = 1 \dots m\} \cup \mathcal{R}_n)](y))$$

où $\mathcal{R}_c = \{l_i \rightarrow r_i \text{ si } c_i \mid i = 1 \dots m\}$, $\mathcal{R}_n = \{l'_i \rightarrow r'_i \mid i = 1 \dots n\}$ et respectivement

$$IM(R) \triangleq [\Theta](R).$$

Ainsi, pour décrire la normalisation du terme t par rapport aux règles de réécriture de \mathcal{R} nous utilisons le ρ -terme $[IM(R)](t)$.

Nous obtenons donc un résultat similaire à la Proposition 5.7 mais avec une méthode de construction du ρ -terme correspondant basée seulement sur le terme initial et sur l'ensemble de règles de réécriture.

Proposition 5.8 *Etant donnés une théorie de réécriture conditionnelle $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ et deux termes clos du premier ordre $t, t \downarrow \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ tels que t est normalisé en $t \downarrow$ par rapport à l'ensemble de règles \mathcal{R} . Alors, $[IM(\mathcal{R})](t)$ est ρ -réduit en un ensemble contenant le terme $t \downarrow$.*

Exemple 5.4 *Nous considérons un ensemble de règles de réécriture \mathcal{R} contenant la règle de réécriture $(x = x) \rightarrow True$ et les règles de réécriture conditionnelles $(f(x) \rightarrow g(x) \text{ si } h(x) = b)$ et $(h(x) \rightarrow b \text{ si } x = a)$. Le terme $f(a)$ est réduit en $g(a)$ en utilisant les règles de réécriture de \mathcal{R} et nous analysons la réduction correspondante dans le ρ_T^{1st} -calcul.*

En utilisant la méthode présentée ci-dessus nous obtenons le terme

$$\begin{aligned}
R \triangleq f \rightarrow (y \rightarrow [im(\{f(x) \rightarrow [True \rightarrow g(x)]([f](h(x) = b)), \\
& h(x) \rightarrow [True \rightarrow b]([f](x = a)), \\
& (x = x) \rightarrow True \\
& \})](y))
\end{aligned}$$

Nous montrons les étapes principales de la réduction du terme $[IM(R)](f(a))$. Nous obtenons immédiatement la réduction

$$[IM(R)](f(a)) \triangleq [[\Theta](R)](f(a)) \xrightarrow{*}_{\rho} [[R]([\Theta](R))](f(a)) \triangleq [[R](IM(R))](f(a))$$

et le résultat final est le même que celui obtenu pour le terme

$$[im(\{f(x) \rightarrow [True \rightarrow g(x)]([IM(R)](h(x) = b)), \\ h(x) \rightarrow [True \rightarrow b]([IM(R)](x = a)), \\ (x = x) \rightarrow True \\ \})](f(a)))$$

et donc pour

$$[f(x) \rightarrow [True \rightarrow g(x)]([IM(R)](h(x) = b))](f(a)) \xrightarrow{*}_\rho \{[True \rightarrow g(a)]([IM(R)](h(a) = b))\}$$

Pour le terme $[IM(R)](h(a) = b)$ nous procédons comme précédemment et donc, nous sommes amenés à réduire le terme

$$[im(\{f(x) \rightarrow [True \rightarrow g(x)]([IM(R)](h(x) = b)), \\ h(x) \rightarrow [True \rightarrow b]([IM(R)](x = a)), \\ (x = x) \rightarrow True \\ \})](h(a) = b)$$

avec la réduction intermédiaire

$$[h(x) \rightarrow [True \rightarrow b]([IM(R)](x = a))](h(a)) \xrightarrow{*}_\rho \{[True \rightarrow b]([IM(R)](a = a))\}$$

Puisque nous obtenons facilement $[IM(R)](a = a) \xrightarrow{*}_\rho \{True\}$ alors le terme précédent est réduit en $\{[True \rightarrow b]([True])\} \xrightarrow{*}_\rho \{b\}$ et nous avons

$$[IM(R)](h(a) = b) \xrightarrow{*}_\rho [im(\dots)](\{b\} = b) \xrightarrow{*}_\rho \{True\}$$

Nous revenons à la réduction du terme initial et nous obtenons

$$\{[True \rightarrow g(a)]([IM(R)](h(a) = b))\} \xrightarrow{*}_\rho \{[True \rightarrow g(a)](\{True\})\} \xrightarrow{*}_\rho \{g(a)\}$$

Nous avons ainsi obtenu le même résultat que dans la réécriture conditionnelle.

En utilisant les méthodes de représentation des dérivations de la réécriture conditionnelle par des ρ -termes appropriés nous allons présenter dans la section suivante un encodage des règles de réécriture utilisées dans ELAN, un langage basé sur les règles de réécriture conditionnelles avec affectations locales.

5.3 Réécriture d'ordre supérieur

Dans le Chapitre 1 nous avons présenté brièvement la réécriture du premier ordre et nous avons vu que son pouvoir d'expression ne permet pas de décrire facilement la fonctionnalité. Le λ -calcul est le système de réécriture d'ordre supérieur permettant la représentation de toute fonction calculable. Mais l'encodage n'est pas toujours trivial et intuitif et les entiers de Church en sont un exemple. Dans ce codage tout entier naturel n est codé par un λ -terme $\lambda fx.f(f \dots (fx) \dots)$ avec n occurrences de f et le symbole $+$ est décrit par le λ -terme $\lambda np.(\lambda fx.mf(nfx))$. Si nous utilisons la représentation algébrique des expressions de l'arithmétique donnée dans la Section 1.1.1 l'entier n est représenté par $succ(\dots(succ(0))\dots)$ et le comportement du symbole $+$ est décrit par les règles de réécriture $0 + a \rightarrow a$ et $succ(a) + b \rightarrow succ(b) + a$.

Il est évident que du point de vue de la simplicité et de la lisibilité la deuxième approche est plus attractive et on veut donc bénéficier des avantages des deux méthodes. C'est ce qui motive

les systèmes de réécriture d'ordre supérieur qui combinent le mécanisme d'abstraction du λ -calcul et la représentation des types abstraits avec la syntaxe des systèmes de réécriture du premier ordre. Ces systèmes sont définis soit en étendant le λ -calcul avec des symboles fonctionnels, soit en ajoutant aux systèmes de réécriture du premier ordre un abstracteur et un mécanisme similaire à la β -réduction du λ -calcul.

Extensions algébriques du λ -calcul

L'extension du λ -calcul avec des règles de réécriture du premier ordre a été initiée par Breazu-Tannen ([BT88]) pour l'étude de la confluence et ensuite analysée en parallèle par Breazu-Tannen et Gallier ([GBT89]) et Okada ([Oka89b]) pour la normalisation.

Les termes d'un λ -calcul étendu sont les termes du λ -calcul auxquels on ajoute les termes du premier ordre construits à partir d'une signature. On considère la relation de réduction définie par le mélange de la β -réduction et de la relation de réduction induite par les règles de réécriture. Les signatures des deux composants sont apparemment disjoints mais en fait ils partagent l'opérateur d'application qui est explicite en λ -calcul mais implicite en réécriture.

Par exemple, l'extension du λ -calcul avec le système de réécriture de l'arithmétique se définit par [Pag97] :

termes $t ::= x \mid \lambda x.t \mid t \ t \mid 0 \mid succ(t) \mid t + t \mid t \times t$

règles $0 + a \rightarrow a \quad succ(a) + b \rightarrow succ(b) + a \quad 0 \times a \rightarrow 0 \quad succ(a) \times b \rightarrow b + (a \times b)$
 $(\lambda x.t) u \rightarrow \langle x/u \rangle t$

Dans le ρ -calcul la notion d'application devient explicite et les règles de réécriture deviennent des abstractions. En effet, les abstractions du ρ -calcul peuvent être plus élaborées que les règles de réécriture du premier ordre des extensions algébriques.

Dans les sections précédentes nous avons montré qu'aux réductions dans la réécriture du premier ordre et dans le λ -calcul correspondent les réductions de certains ρ -termes appropriés. Nous pouvons procéder de la même manière dans le cas des extensions algébriques du λ -calcul et construire des ρ -termes avec des réductions correspondantes. Puisque l'application est explicite en ρ -calcul, les termes ainsi construits contiendront les règles du premier ordre utilisées dans la réduction.

Systèmes de réécriture avec abstracteur

En partant des travaux réalisés par Aczel [Acz78], Klop a introduit les CRSs (Combinatory Rewrite Systems) généralisant les systèmes de réécriture du premier ordre et les systèmes de réécriture avec des variables liées comme le λ -calcul. Après le résultat sur la décidabilité de l'unification d'ordre supérieur avec motifs [Mil91], Nipkov introduit les HRSs (Higher-order Rewrite Systems) [Nip91] utilisés principalement pour étudier les propriétés des systèmes tels que λ Prolog et Isabelle. D'autres systèmes ont été proposés et sans être exhaustifs, on peut mentionner les HOTRSs de Wolfram [Wol93] et les ERSs de Khasidashvili [Kha90]. Pour une comparaison de différents formalismes le lecteur peut se référer à la thèse de van Raamsdonk ([vR96]) et pour une comparaison des CRSs et HRSs on peut citer les travaux de van Oostrom et van Raamsdonk [vOvR93].

Les systèmes de réécriture d'ordre supérieur ainsi que le ρ -calcul combinent la réécriture du premier ordre et le λ -calcul mais dans les systèmes de réécriture d'ordre supérieur ceci est réalisé

en introduisant un abstracteur dans les règles de réécriture tandis que dans le ρ -calcul les règles deviennent des abstractions au niveau objet du calcul.

L'application d'une règle de réécriture implique un mécanisme de filtrage d'ordre supérieur qui est généralement restreint au filtrage d'ordre supérieur avec motifs.

Puisque la théorie de filtrage est un paramètre du ρ -calcul nous pensons que les réductions dans un système de réécriture d'ordre supérieur peuvent être représentées dans le ρ_T -calcul où T est la théorie de filtrage d'ordre supérieur avec motifs. La construction des ρ -termes décrivant ces réductions est faite en fonction de la syntaxe de chaque formalisme.

5.4 Une sémantique d'ELAN en ρ -calcul

ELAN peut être vu comme un cadre logique dont le noyau est la logique de réécriture étendue avec la notion fondamentale de stratégies. L'enrichissement des règles de réécriture avec des constructions pour tenir compte des stratégies rend plus complexe la sémantique opérationnelle du langage [BKMM99]. Dans cette section nous donnons une sémantique aux règles et stratégies d'ELAN en utilisant le ρ -calcul.

Sémantique d'une règle ELAN conditionnelle avec affectations locales

Une règle de la forme $l \rightarrow r$, sans aucune condition et aucune affectation locale, est représentée directement par la même ρ -règle de réécriture et une règle de réécriture conditionnelle est représentée par un ρ -terme construit en utilisant la méthode proposée dans la Section 5.2.2. Les règles ELAN avec des affectations locales mais sans conditions de la forme

$$[\ell] \quad l(x) \Rightarrow \begin{array}{l} r(x, y) \\ \text{where } y := (S)u \end{array}$$

peuvent être représentées facilement par le ρ -terme

$$l(x) \rightarrow r(x, [S_\rho](u))$$

ou le ρ -terme

$$l(x) \rightarrow [y \rightarrow r(x, y)]([S_\rho](u))$$

avec S_ρ le ρ -terme correspondant à la stratégie S dans le ρ -calcul.

La première représentation remplace syntaxiquement toute variable du membre droit de la règle définie dans une affectation locale avec le terme qui instancie la variable respective. Dans la deuxième représentation chaque variable définie dans une affectation locale est liée dans une ρ -règle de réécriture qui est appliquée au terme correspondant.

Exemple 5.5 La règle ELAN

```
[deriveSum] p_1 + p_2 => p_1' + p_2'
                      where p_1' := (derive)p_1
                      where p_2' := (derive)p_2

end
```

peut être représentée par un des deux termes suivants

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &\rightarrow [derive_\rho](p_1) + [derive_\rho](p_2), \\ p_1 + p_2 &\rightarrow [p_1' \rightarrow [p_2' \rightarrow p_1' + p_2']([derive_\rho](p_2))]([derive_\rho](p_1)) \end{aligned}$$

où $derive_\rho$ est le ρ -terme correspondant à la stratégie `derive`.

On peut noter l'utilité des variables libres dans les règles de réécriture. La dernière représentation d'une règle ELAN avec des affectations locales ne serait pas possible si on ne permettait pas que la variable p'_1 soit libre dans la ρ -règle $p'_2 \rightarrow p'_1 + p'_2$.

Si nous considérons des règles ELAN plus générales contenant des affectations locales aussi bien que des conditions sur les variables locales, la combinaison des méthodes utilisées pour les règles purement conditionnelles et pour les règles contenant que des affectations locales doit être faite soigneusement. Si nous avons utilisé une représentation similaire à la première approche de représentation d'une règle avec affectations locales nous aurions obtenu certains résultats incorrects comme dans l'Exemple 5.6.

Exemple 5.6 *Nous considérons la description d'un automate par un ensemble de règles de réécriture décrivant chacune la transition d'un état à un autre. L'exécution potentielle d'une double transition d'un état initial à un état final en passant par un état intermédiaire non-final, peut être décrite par la règle ELAN suivante :*

```
[double] x => next(y)
           where y := (dk(s1 => s2, s1 => s3)) x
           if not final(y)
end
```

Le terme `next(y)` représente l'état obtenu en effectuant une transition à partir de y et ce comportement peut être facilement implanté en ELAN par un ensemble de règles non-nommées. Nous notons par \mathcal{R}_f l'ensemble de règles de réécriture décrivant les états finaux et nous supposons que $s2$ est un état final mais $s3$ ne l'est pas.

En utilisant la première approche de représentation d'une règle avec affectations locales et la méthode de codage pour les règles conditionnelles présentée dans la Section 5.2.2 nous obtenons le ρ -terme correspondant à la règle ELAN précédente :

$$x \rightarrow [True \rightarrow next(\{[s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3](x)\})]([im(\mathcal{R}_f)](not\ final(\{[s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3](x)\})))$$

Ce terme appliqué au terme $s1$ mène à la réduction suivante :

$$\begin{aligned} & [x \rightarrow [True \rightarrow next(\{[s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3](x)\})]([im(\mathcal{R}_f)](not\ final(\{[s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3](x)\})))](s1) \\ & \xrightarrow{Fire} \{[True \rightarrow next(\{[s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3](s1)\})]([im(\mathcal{R}_f)](not\ final(\{[s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3](s1)\})))\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[True \rightarrow next(\{s2, s3\})]([im(\mathcal{R}_f)](not\ final(\{s2, s3\})))\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[True \rightarrow \{next(s2), next(s3)\}]([im(\mathcal{R}_f)](\{not\ final(s2), not\ final(s3)\}))\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[True \rightarrow \{next(s2), next(s3)\}](\{False, True\})\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[True \rightarrow \{next(s2), next(s3)\}](False), [True \rightarrow \{next(s2), next(s3)\}](True)\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{\emptyset, [True \rightarrow \{next(s2), next(s3)\}](True)\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{\emptyset, \{next(s2), next(s3)\}\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{next(s2), next(s3)\} \end{aligned}$$

tandis qu'en ELAN nous obtenons le seul résultat `next(s3)` qui serait représenté par le ρ -terme : $\{next(s3)\}$.

Le problème dans l'Exemple 5.6 est la double évaluation du terme $\{[s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3](s1)\}$ remplaçant la variable locale y : une fois dans la condition et une fois dans le membre droit de la règle de réécriture. Si ce terme est évalué en un ensemble ayant plus d'un élément et un de ses éléments satisfait la condition de la règle alors, cet ensemble remplace les variables correspondantes dans le membre droit de la règle tandis que seulement les éléments satisfaisant la condition devraient être considérés. Par conséquent, nous avons besoin d'un mécanisme permettant d'évaluer une seule fois chaque terme instanciant une variable locale.

Nous utilisons une représentation combinant la deuxième approche de représentation d'une règle avec affectations locales et la méthode utilisée pour les règles de réécriture conditionnelles. Sans perdre la généralité, nous pouvons considérer qu'une règle ELAN conditionnelle avec des affectations locales a la forme suivante :

```
[label]    l  $\implies$  r[x]q
           where x := (s)t
           if C[x]p

end
```

Nous obtenons alors la représentation de la règle précédente par le ρ -terme

$$l \rightarrow [x \rightarrow [\{True \rightarrow r_{[x]_q}, False \rightarrow \emptyset\}](im(\mathcal{R}))(C_{[x]_p})]([s](t))$$

ou même plus simple :

$$l \rightarrow [x \rightarrow [True \rightarrow r_{[x]_q}](im(\mathcal{R}))(C_{[x]_p})]([s](t))$$

où \mathcal{R} représente l'ensemble de règles de réécriture par rapport auquel les conditions sont normalisées.

Les affectations généralisées sont traitées exactement de la même manière mais les motifs des affectations généralisées sont utilisés à la place des variables locales.

Afin de simplifier la présentation nous avons supposé que les règles de l'ensemble \mathcal{R} sont des règles de réécriture de la forme $l \rightarrow r$ et donc l'opérateur im est suffisant pour définir la normalisation par rapport à un tel ensemble. Si nous considérons des règles non-nommées conditionnelles alors l'opérateur IM doit être employé.

La manière dont la transformation est appliquée à une règle de réécriture ELAN et la réduction correspondante sont illustrées en reprenant l'Exemple 5.6 avec la bonne représentation.

Exemple 5.7 La règle de réécriture ELAN de l'Exemple 5.6 est représentée par le ρ -terme

$$x \rightarrow [y \rightarrow [True \rightarrow next(y)](im(\mathcal{R}_f))(not\ final(y))](\{s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3\}(x))$$

lequel, appliqué au terme $s1$ mène à la réduction suivante :

$$\begin{aligned} & [x \rightarrow [y \rightarrow [True \rightarrow next(y)](im(\mathcal{R}_f))(not\ final(y))](\{s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3\}(x))(s1) \\ & \xrightarrow{Fire} \{[y \rightarrow [True \rightarrow next(y)](im(\mathcal{R}_f))(not\ final(y))](\{s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3\}(s1))\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[y \rightarrow [True \rightarrow next(y)](im(\mathcal{R}_f))(not\ final(y))](\{s2, s3\})\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[y \rightarrow [True \rightarrow next(y)](im(\mathcal{R}_f))(not\ final(y))](s2), \\ & \quad [y \rightarrow [True \rightarrow next(y)](im(\mathcal{R}_f))(not\ final(y))](s3)\} \\ & \xrightarrow{*}_{Fire} \{\{[True \rightarrow next(s2)](im(\mathcal{R}_f))(not\ final(s2))\}, \\ & \quad \{[True \rightarrow next(s3)](im(\mathcal{R}_f))(not\ final(s3))\}\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{[True \rightarrow next(s2)](False), [True \rightarrow next(s3)](True)\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{\emptyset, \{next(s3)\}\} \\ & \xrightarrow{*}_{\rho} \{next(s3)\} \end{aligned}$$

qui est la représentation du résultat obtenue en ELAN.

Le même résultat que dans l'Exemple 5.6 est obtenu si la règle d'évaluation *Fire* est appliquée avant la distribution de l'ensemble $\{s2, s3\}$. Mais les stratégies confluentes présentées dans le Chapitre 3 interdisent une telle réduction et donc, dans ce cas le résultat correct est obtenu.

Sémantique d'une règle ELAN factorisée

La factorisation des règles de réécriture ELAN est un moyen de définir plusieurs réductions possibles pour un même terme de départ. Nous pouvons toujours transformer une règle factorisée en plusieurs règles avec le membre gauche initial et avec les membres droits correspondant aux choix de la factorisation. Il est donc naturel de représenter les règles de réécriture ELAN factorisées dans le ρ -calcul en utilisant les ensembles.

Nous considérons la règle ELAN factorisée suivante :

```
[label]    l  $\Longrightarrow$  r[x]q
           choose
           try
             if C1
             where x := (s1)t1
           try
             if C2
             where x := (s2)t2
           end
end
```

et nous obtenons la représentation de la règle par le ρ -terme

$$l \rightarrow \{ [True \rightarrow [x \rightarrow r_{[x]_q}]]([s1](t_1))([im(\mathcal{R})](C_1)), \\ [True \rightarrow [x \rightarrow r_{[x]_q}]]([s2](t_2))([im(\mathcal{R})](C_2))] \}$$

On peut évidemment avoir des règles ELAN plus compliquées comportant des conditions et des affectations locales extérieures à la factorisation mais une approche similaire est utilisée dans ces cas.

En fait, le mécanisme d'évaluation ELAN est plus complexe que représenté jusqu'ici. L'évaluation d'une affectation locale de la forme **where** $v := (S) \quad t$ implique la normalisation du terme t par rapport à l'ensemble de règles non-nommées \mathcal{R} avant l'application de la stratégie S . En plus, le membre droit calculé par l'application d'une règle ELAN est normalisé par rapport à \mathcal{R} avant d'être retourné.

Par conséquent, la règle ELAN de l'Exemple 5.6 devrait être représentée par le ρ -terme

$$x \rightarrow [im(\mathcal{R}_f)]([y \rightarrow [True \rightarrow next(y)]([im(\mathcal{R}_f)](nf(y)))]([\{s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3\}][im(\mathcal{R}_f)](x)))]$$

où \mathcal{R} représente l'ensemble de règles de réécriture non-nommées définies dans le programme ELAN contenant la règle respective.

Stratégies générales dans les affectations locales

Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré dans les affectations locales que des stratégies n'utilisant pas la règle de réécriture respective. La représentation d'une règle ELAN avec des appels locaux à des stratégies définies en utilisant cette règle doit être paramétrée par la définition des stratégies respectives. Par exemple, une règle avec affectations locales de la forme

```
[label]    l  $\Longrightarrow$  r
           where x := (s)t
```

est représentée par le ρ -terme

$$label(f) \triangleq l \rightarrow [x \rightarrow r]([f](s)](t))$$

où la variable libre f sera instanciée par l'ensemble de stratégies du programme contenant la règle étiquetée par *label*.

Sémantique des stratégies et d'un programme ELAN

Les stratégies élémentaires d'ELAN présentées dans la Section 1.2.5 ont, dans la plupart des cas, une représentation directe dans le ρ -calcul. Les stratégies identité (**id**) et échec (**fail**) et l'opérateur de concaténation (**;**) sont représentées dans le ρ -calcul par les opérateurs *id*, *fail* et **;** respectivement, définis dans la Section 4.2. La stratégie **dk**(S_1, \dots, S_n) est représentée dans le ρ -calcul par l'ensemble $\{S_1, \dots, S_n\}$, la stratégie **first**(S_1, \dots, S_n) par le ρ -terme *first*(S_1, \dots, S_n) défini dans la Section 4.3 et de façon similaire, le ρ -opérateur *dc* est utilisé pour les stratégies ELAN **dc**. La construction d'itération **repeat*** est représentées facilement en utilisant le ρ -opérateur *repeat**.

Exemple 5.8 La stratégie de l'Exemple 1.9 est représentée immédiatement par le ρ -terme

$$attStrat_\rho \rightarrow repeat* (\{initiate_\rho, \dots, intruder_\rho\}); attackFound_\rho$$

où nous supposons que *initiate* $_\rho$, *intruder* $_\rho$, *attackFound* $_\rho$ sont les représentations des stratégies ELAN correspondantes dans le ρ -calcul.

Pour la définition des stratégies définies par l'utilisateur dans un programme ELAN nous utilisons une approche basée sur l'opérateur de point fixe et similaire à celle utilisée dans le cas des règles conditionnelles dans la Section 5.2.2. Si nous considérons un programme ELAN contenant les stratégies S_1, \dots, S_n et les règles nommées avec les étiquettes alors le ρ -terme représentant le programme est :

$$P \triangleq [\Theta](S)$$

où

$$S \triangleq f \rightarrow (y \rightarrow [\{S_i \rightarrow Body_i \mid i = 1 \dots n\}](y))$$

et *Body_i* représentent les membres droits des stratégies avec chaque stratégie S_i remplacée par $[f](S_i)$, chaque étiquette de règle remplacée par la ρ -représentation de la règle et chaque opérateur de stratégie ELAN remplacé par son correspondant dans le ρ -calcul.

Pour résumer, nous présentons la transformation d'un programme ELAN en un ρ -terme :

Définition 5.2 Nous considérons un programme ELAN sans importations.

1. La signature du ρ -calcul est obtenue en utilisant les symboles définis dans les parties **operators** et **stratop** du programme ELAN.
2. En partant des règles non-nommées de la forme :

$$\begin{array}{l} \boxed{\quad} \quad l_i(\bar{x}) \Longrightarrow r_i(\bar{x}, \bar{y}) \\ \quad \quad \quad \textbf{where (sort)} \ u_i(\bar{y}) := ()t_i(\bar{x}) \\ \quad \quad \quad \textbf{if } c_i(\bar{x}, \bar{y}) \\ \textbf{end} \end{array}$$

nous construisons le terme :

$$\begin{aligned} R_{nn} \triangleq f \rightarrow (z \rightarrow [im(\{l_i(\bar{x}) \rightarrow [u_i(\bar{y}) \rightarrow \\ \quad \quad \quad [True \rightarrow r_i(\bar{x}, \bar{y})][f](c_i(\bar{x}, \bar{y})) \\ \quad \quad \quad](t_i(\bar{x})) \\ \quad \quad \quad | i = 1 \dots n\}) \\ \quad \quad \quad](z) \\ \quad \quad \quad) \end{aligned}$$

La normalisation innermost par rapport à l'ensemble de règles non-nommées est représentée par le terme :

$$IM_{nn} \triangleq [\Theta](R_{nn})$$

L'encodage est étendu d'une manière incrémentale à des règles contenant plusieurs conditions et affectations locales. L'encodage peut être simplifié si le programme ne contient pas des règles conditionnelles non-nommées ; dans ce cas le terme IM_{nn} dévient :

$$IM_{nn} \triangleq im(\{l_i(\bar{x}) \rightarrow [u_i(\bar{y}) \rightarrow r_i(\bar{x}, \bar{y})](t_i(\bar{x})) \mid i = 1 \dots n\})$$

où les règles avec affectations locales peuvent être simplifiées en des règles élémentaires.

3. Pour chaque règle nommée de la forme :

```
[label]    l( $\bar{x}$ )  $\Longrightarrow$  r( $\bar{x}, \bar{y}$ )
                                where (sort) u( $\bar{y}$ ) := (s)t( $\bar{x}$ )
                                if c( $\bar{x}, \bar{y}$ )
end
```

nous construisons le terme :

$$\begin{aligned} label(f) \triangleq & f \rightarrow (l(\bar{x}) \rightarrow [IM_{nn}]([u(\bar{y}) \rightarrow \\ & \quad [True \rightarrow r(\bar{x}, \bar{y})](IM_{nn}(c(\bar{x}, \bar{y}))) \\ & \quad]([f](s))([IM_{nn}](t(\bar{x})))))) \\ &) \end{aligned}$$

4. Les règles ELAN factorisées sont représentées de la même manière ; la partie factorisée dans la règle ELAN est encodée par un ensemble dans le ρ -terme correspondant.
5. Pour chaque stratégie de la forme :

```
||    S  $\Longrightarrow$  Body
end
```

nous construisons le terme :

$$S \rightarrow BodyRho(f)$$

où $BodyRho$ représente le membre droit $Body$ de la stratégie avec chaque symbole de stratégie S_i remplacée par $[f](S_i)$, chaque étiquette de règle $label$ remplacée par la ρ -représentation $label(f)$ de la règle et chaque opérateur de stratégie ELAN remplacé par son correspondant dans le ρ -calcul.

Le programme ELAN définissant les stratégies S_1, \dots, S_n est représenté par le ρ -terme :

$$P \triangleq [\Theta](S)$$

où

$$S \triangleq f \rightarrow (z \rightarrow [\{S_i \rightarrow BodyRho_i(f) \mid i = 1 \dots n\}](z))$$

et $BodyRho_i(f)$ représente l'encodage de la stratégie S_i .

L'application d'une stratégie \mathcal{S} d'un programme ELAN \mathcal{P} à un terme t est représentée par le ρ -terme $[[P](s)](t)$ où P est le ρ -terme représentant le programme \mathcal{P} et s est le nom de la stratégie \mathcal{S} . Si l'exécution du programme \mathcal{P} pour évaluer le terme t par rapport à la stratégie \mathcal{S} mène aux résultats u_1, \dots, u_n alors le ρ -terme $[[P](s)](t)$ est réduit en l'ensemble de termes $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Dans l'Exemple 5.9 nous présentons un module ELAN et les ρ -interprétations de toutes les règles et stratégies de réécriture et donc, du programme ELAN.

Exemple 5.9 Le module `automate` décrit un automate avec les états `s1,s2,s3,s4,s5` et avec des transitions non-déterministes décrites par un ensemble de règles nommées contenant les règles étiquetées avec `r12,r13,r25,r32,r34,r41`. L'opérateur `next` définit l'état suivant d'une manière déterministe et son comportement est décrit par un ensemble de règles non-nommées. Les états peuvent être "finaux" (`final`) ou "fermés" (`closed`). Les transitions doubles avec un état intermédiaire non-final et non-fermé sont décrites par les règles `double_f` et respectivement `double_c`.

```

module automate
import global bool;end
sort state ;end
operators global
  s1 : state; s2 : state; s3 : state; s4 : state; s5 : state;
  next(@) : (state) state;
  final(@) : (state) bool;
  closed(@) : (state) bool;
end
stratop global
  follow      : <state -> state>   bs;
  gen_double   : <state -> state>   bs;
  cond_double  : <state -> state>   bs;
end

rules for bool
global
  [] final(s_1) => false      end
  [] final(s_2) => true       end
  [] final(s_3) => false      end
  [] final(s_4) => false      end
  [] final(s_5) => true       end

  [] closed(s_1) => false     end
  [] closed(s_2) => false     end
  [] closed(s_3) => true      end
  [] closed(s_4) => true      end
  [] closed(s_5) => true      end
end

rules for state
  x,y : state;
global
  [] next(s1) => s3           end
  [] next(s2) => s5           end
  [] next(s3) => s2           end
  [] next(s4) => s1           end
  [] next(s5) => s5           end

  [r12] s1 => s2              end

```

```

[r13]  s1 => s3          end
[r25]  s2 => s5          end
[r32]  s3 => s2          end
[r34]  s3 => s4          end
[r41]  s4 => s1          end

[double_f]  x => next(y)
              where y := (follow) x
              if not final(y)          end
[double_c]  x => next(y)
              where y := (follow) x
              if not closed(y)         end
end

strategies for state
implicit
[]follow      => dk(r12,r13,r25,r32,r34,r41)      end
[]gen_double   => follow;follow                    end
[]cond_double  => dk(double_f,double_c)            end
end end

```

Nous notons par B l'ensemble de règles non-nommées définies dans les modules importés `bool` et décrivant les opérations sur les booléens.

L'ensemble de règles non-nommées du module `automate` est représenté par le ρ -terme

$$R \triangleq \{next(s1) \rightarrow s3, \dots, next(s5) \rightarrow s5, \\ final(s1) \rightarrow false, \dots, final(s5) \rightarrow true, \\ closed(s1) \rightarrow false, \dots, closed(s5) \rightarrow true\}$$

et nous notons $RC = R \cup B$.

Les règles étiquetées avec `double_f` et `double_c` sont représentées par les ρ -règles

$$double_f(f) \triangleq x \rightarrow [im(RC)]([y \rightarrow [True \rightarrow next(y)][im(RC)](not\ final(y))]) \\ ([f](follow))[im(RC)](x))$$

et respectivement

$$double_c(f) \triangleq x \rightarrow [im(RC)]([y \rightarrow [True \rightarrow next(y)][im(RC)](not\ closed(y))]) \\ ([f](follow))[im(RC)](x))$$

Les stratégies du module `automate` sont représentées par les ρ -termes

$$follow \triangleq follow \rightarrow \{s1 \rightarrow s2, s1 \rightarrow s3, s2 \rightarrow s5, s3 \rightarrow s2, s3 \rightarrow s4, s4 \rightarrow s1\} \\ gen_double(f) \triangleq gen_double \rightarrow [f](follow); [f](follow) \\ cond_double(f) \triangleq cond_double \rightarrow \{double_f(f), double_c(f)\}$$

et nous obtenons le terme représentant le programme ELAN `automate` :

$$automate \triangleq [\Theta](S)$$

où

$$S \triangleq f \rightarrow (y \rightarrow [f, gen_double(f), cond_double(f)](y))$$

L'exécution du programme `automate` pour évaluer le terme `s1` avec la stratégie `cond_double` correspond à la réduction du terme

$$[[\text{automate}](\text{cond_double})](s1)$$

En ELAN, nous obtenons pour une telle exécution les résultats 2 et 5 et la réduction du ρ -terme correspondant mène à l'ensemble $\{2, 5\}$.

Dans l'Exemple 5.9 nous avons présenté un module ELAN relativement simple mais, en suivant la même méthodologie, des règles et stratégies plus compliquées peuvent être traitées.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini une traduction des λ -termes en des ρ -termes et nous avons montré que les réductions des termes correspondants dans les deux calculs sont équivalentes. Nous avons aussi présenté deux méthodes de construction d'un ρ -terme avec une réduction similaire à la réduction d'un terme par rapport à un système de réécriture. La première approche est basée sur les termes de preuves de la logique de réécriture tandis que la deuxième utilise les opérateurs du ρ^{1st} -calcul afin d'obtenir un codage plus concis.

Nous avons utilisé cet encodage comme point de départ pour représenter les règles et stratégies du langage ELAN en ρ -calcul. Nous avons représenté les constructions d'ELAN par des ρ -termes et nous avons ainsi obtenu une sémantique complète du langage.

Chapitre 6

Le ρ -calcul typé

Nous avons présenté jusqu'à maintenant le ρ -calcul dans un cadre non-typé et nous avons analysé ses propriétés et notamment la propriété de confluence. Une deuxième propriété que l'on souhaite avoir pour le calcul est la terminaison, caractéristique qui nous permettrait de conclure immédiatement de l'unicité des formes normales.

En partant de la non-terminaison du λ -calcul et de la relation forte entre ce calcul et le ρ -calcul, nous pouvons trouver immédiatement des réductions non-terminantes dans le ρ -calcul. Afin d'obtenir un calcul sans réduction infinie, nous procédons comme d'habitude et nous imposons des restrictions sur la formation des ρ -termes en introduisant une information de type pour chaque terme.

La définition d'un système de types dans le cas du ρ -calcul général s'avère une tâche plus difficile que dans le cas du λ -calcul en raison de l'utilisation des ensembles pour représenter le non-déterminisme et spécialement de la possibilité d'avoir des ensembles dans le membre gauche des règles de réécriture. Nous allons donc nous concentrer d'abord sur le typage du ρ_0 -calcul et proposer une approche similaire à celle utilisée dans le λ -calcul typé. Nous obtenons ainsi un système de types qui nous permet de prouver que la réduction de tout terme *bien typé* est finie et préserve le type du terme initial.

Les mêmes propriétés peuvent être obtenues pour le ρ_0^+ -calcul (voir Section 3.4.2) permettant des règles de réécriture avec un ensemble dans le membre gauche. Le système de types nécessite dans ce cas l'utilisation de la notion de *variable présente* introduite dans la Section 3.4.1 et nous présentons brièvement à la fin de ce chapitre une description du ρ_0^+ -calcul typé.

Les notations et les définitions classiques de ce chapitre sont inspirées de celles utilisées pour le λ -calcul typé dans [Hin97] et [HS86].

6.1 La syntaxe du ρ_0 -calcul typé

Considérons un ensemble \mathcal{K} de *types atomiques* K_1, K_2, \dots et l'ensemble des *types* inductivement défini par :

- tout *type atomique* est un *type*,
- si A et B sont des *types* alors $A \multimap B$ est un *type*.

La flèche des définitions de type associe à droite. Donc, un type de la forme $A_1 \multimap A_2 \multimap \dots \multimap A_n$ est une abréviation pour $A_1 \multimap (A_2 \multimap (\dots \multimap A_n) \dots)$.

Les *types atomiques* sont utilisés généralement pour désigner un ensemble particulier comme, par exemple, les naturels ou les booléens. Un *type composé* de la forme $A \multimap B$ est utilisé pour

désigner l'ensemble des ρ -termes qui peuvent être appliqués à des ρ -termes de type A donnant comme résultat des ρ -termes de type B . En effet, nous appelons également *stratégie* un ρ -terme de type composé.

Définition 6.1 *Pour un type A , une variable typée est notée $x : A$ et on dit que la variable x a le type A . Un contexte est un ensemble de variables typées. Les affectations de type $x : A$ d'un contexte s'appellent également des définitions de type de variable.*

Définition 6.2 *Etant donné un ensemble de variables \mathcal{X} et un ensemble de symboles $\mathcal{F} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{F}_i$, si nous notons par K tout type atomique, alors la syntaxe du ρ_0 -calcul simplement typé est définie récursivement par la grammaire suivante :*

$$\begin{array}{lll}
 \textbf{Types} & T & ::= K \mid T \multimap T \\
 \\
 \textbf{Contextes} & E & ::= x : T \mid E \cdot \dots \cdot E \\
 \\
 \textbf{Termes} & t & ::= x \mid f(t, \dots, t) \mid \{t, \dots, t\} \mid u_{[E]} \rightarrow t \mid t
 \end{array}$$

où $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ et $f \in \mathcal{F}$.

Les contextes $E_1 \cdot \dots \cdot E_n$ avec $n = 0$ sont représentés par \emptyset . Un contexte E restreint à l'ensemble des variables d'un terme t est noté $E|_t$. Le contexte E d'une règle de réécriture $l_{[E]} \rightarrow r$ est appelé le contexte local de la règle.

Si A_1, \dots, A_n, A sont des types, nous notons $\mathcal{F}_{A_1 \times \dots \times A_n \multimap A}$ l'ensemble des symboles de fonctions prenant n arguments de type A_i et donnant comme résultat un terme de type A . Quand un symbole de fonction f appartient à un ensemble $\mathcal{F}_{A_1 \times \dots \times A_n \multimap A}$ nous disons que le symbole f a le profil $A_1 \times \dots \times A_n \multimap A$. Nous surchargeons les symboles de fonctions et nous considérons pour tout symbole $f \in \mathcal{F}$ que si $f \in \mathcal{F}_{A_1 \times \dots \times A_n \multimap A}$ et $f \in \mathcal{F}_{B_1 \times \dots \times B_n \multimap B}$ alors nous avons également les appartenances $f \in \mathcal{F}_{(A_1 \multimap B_1) \times \dots \times (A_n \multimap B_n) \multimap (A \multimap B)}$ et $f \in \mathcal{F}_{(B_1 \multimap A_1) \times \dots \times (B_n \multimap A_n) \multimap (B \multimap A)}$. En plus, si nous considérons qu'un symbole f a un des profils $(A_1 \multimap B_1) \times \dots \times (A_n \multimap B_n) \multimap (A \multimap B)$ ou $(B_1 \multimap A_1) \times \dots \times (B_n \multimap A_n) \multimap (B \multimap A)$ alors $f \in \mathcal{F}_{A_1 \times \dots \times A_n \multimap A}$ et $f \in \mathcal{F}_{B_1 \times \dots \times B_n \multimap B}$. Afin d'éliminer les ambiguïtés éventuelles, chaque symbole de fonction peut être annoté avec son profil mais, lorsqu'il peut être déduit du contexte, cette annotation est omise. La raison de cette surcharge deviendra claire en analysant la règle d'évaluation *Congruence* présentée dans la Figure 6.4 où les symboles de fonctions ayant le même nom doivent avoir différents profils afin d'obtenir des termes bien typés ayant le même type dans les deux membres de la règle.

Définition 6.3 *L'ensemble des variables libres d'un terme t du ρ_0 -calcul typé, noté $FV(t)$, est défini inductivement par :*

1. si $t = x$ alors $FV(t) = \{x\}$,
2. si $t = \{u_1, \dots, u_n\}$ alors $FV(t) = \bigcup_{i=1}^n FV(u_i)$,
3. si $t = f(u_1, \dots, u_n)$ alors $FV(t) = \bigcup_{i=1}^n FV(u_i)$,
4. si $t = [u](v)$ alors $FV(t) = FV(u) \cup FV(v)$,
5. si $t = u_{[E]} \rightarrow v$ alors $FV(t) = FV(v) \setminus FV(u)$.

Le contexte local d'une règle de réécriture n'est en effet pas significatif pour la définition de l'ensemble des variables libres d'un terme bien typé et nous obtenons donc une description très similaire à la Définition 2.2 utilisée dans le cas non-typé. Les variables *liées* sont définies exactement de la même façon que dans le cas non-typé.

Définition 6.4 Nous disons qu'un contexte est consistant s'il ne contient pas deux définitions de type différentes pour la même variable.

6.2 Les règles de typage du ρ_0 -calcul

En s'inspirant des règles de typage utilisées dans le λ -calcul, nous définissons les règles de typage pour les ρ -abstractions (les règles de réécriture) et les applications et nous ajoutons des règles de typage pour les ensembles. Nous commentons ensuite notre choix pour la règle permettant de typer les règles de réécriture et nous présentons d'autres approches possibles.

6.2.1 Présentation des règles de typage

Les règles de typage du ρ_0 -calcul sont présentées dans la Figure 6.1 où tous les contextes sont supposés être consistants et nous notons par ST_ρ le système de types ainsi obtenu.

<i>Var</i>	$E \vdash x : A$	<i>si</i> $x : A \subseteq E$
<i>Rule</i>	$\frac{E \vdash l : A \quad E _l \cdot F \vdash r : B}{F \vdash (l _{E _l} \rightarrow r) : A \rightarrow B}$	
<i>App</i>	$\frac{E \vdash u : A \rightarrow B \quad E \vdash v : A}{E \vdash [u](v) : B}$	
<i>Op</i>	$\frac{E \vdash t_1 : A_1 \dots E \vdash t_n : A_n}{E \vdash f(t_1, \dots, t_n) : A}$	<i>si</i> $f \in \mathcal{F}_{A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A}$
<i>Set</i>	$\frac{E \vdash t_1 : A \dots E \vdash t_n : A}{E \vdash \{t_1, \dots, t_n\} : A}$	
<i>Empty</i>	$E \vdash \emptyset : A$	<i>pour tout type</i> A

FIG. 6.1: Les règles de typage du ρ_0 -calcul

Définition 6.5 Etant donné une formule $E \vdash t : A$ déduite en utilisant les règles de typage du ρ_0 -calcul et un contexte E' tel que $E \subseteq E'$, on dit que le terme t est typable (ou bien typé) de type A dans le contexte E' . On dit que le terme t est typable dans le contexte E' s'il existe un type A tel que t a le type A dans le contexte E' . Un terme t est typable s'il existe un contexte dans lequel il est typable.

Remarque 6.1 Etant donné deux contextes E, E' tels que $E' \subseteq E$. Si $E' \vdash t : A$ alors $E \vdash t : A$.

En analysant la règle de typage *Op* on peut noter que le type d'un terme avec un symbole de tête fonctionnel dépend du profil du symbole et des types de ses arguments. On doit préciser que la règle de typage *Op* est valable aussi pour les constantes et donc, si $a \in \mathcal{F}_A$ alors $\emptyset \vdash a : A$.

La règle de typage *Set* indique qu'un ensemble de termes est bien typé si tous ses éléments ont le même type et la règle de typage *Empty* précise que l'ensemble vide peut avoir un type quelconque.

6.2.2 Discussion sur le typage d'une règle de réécriture

L'ensemble de variables liées d'une λ -abstraction $\lambda x.t$ contient seulement la variable x . Il suffit donc d'éliminer la variable typée $x : A$ du contexte permettant de typer le terme t afin d'obtenir le contexte utilisé pour typer l'abstraction $\lambda x : A.t$. Le membre gauche d'une ρ -règle de réécriture peut être plus élaboré qu'une simple variable et donc, nous ne pouvons pas utiliser directement l'approche du λ -calcul typé.

Quand nous déterminons le type d'une règle de réécriture $l \rightarrow r$ en utilisant la règle de typage *Rule*, nous considérons le fait que les variables libres du membre droit de la règle de réécriture sont liées par les variables libres de son membre gauche.

Les variables libres du membre droit d'une règle de réécriture sont liées dans la règle de réécriture par les variables libres du membre gauche de la règle ayant le même nom. En raison de ce rapport fort entre les variables de même nom des deux membres d'une règle de réécriture $l \rightarrow r$, le même contexte $(E|_l)$ doit préciser les types de ces variables. De plus, puisque dans le ρ_0 -calcul le membre gauche d'une règle de réécriture $l \rightarrow t$ est toujours un terme du premier ordre, les variables du terme l sont exactement les variables libres de l et donc, les variables liées de la règle de réécriture. Ainsi, le contexte nous permettant de typer une règle de réécriture $l \rightarrow t$ ne doit pas forcément inclure ces variables typées (i.e. $E|_l$) mais doit indiquer précisément les types des variables libres de r qui ne sont pas libres dans l (i.e. F).

On doit noter que l'ensemble des variables libres du membre gauche d'une règle de réécriture $l \rightarrow r$ n'est pas nécessairement identique à l'ensemble des variables typées du contexte nous permettant de typer le terme l . Ce contexte peut éventuellement contenir des variables n'appartenant pas à l mais libres dans r et qui doivent donc appartenir au contexte permettant de typer la règle de réécriture $l \rightarrow r$. Dans la règle de typage *Rule*, la restriction du contexte E à l'ensemble des variables de l évite l'élimination des variables qui ne sont pas libres dans le terme l et donc, pas liées dans la règle $l \rightarrow r$, du contexte utilisé pour typer cette règle de réécriture.

Supposons, par exemple, que dans la règle de typage *Rule* le contexte $E|_l$ soit remplacé par E obtenant ainsi la règle de typage suivante :

$$\text{Rule}' \quad \frac{E \vdash l : A \quad E \cdot F \vdash r : B}{F \vdash (l|_E \rightarrow r) : A \multimap B}$$

En utilisant une telle règle de typage nous pourrions inférer $\emptyset \vdash x_{[x:A.y:A]} \rightarrow y : A \multimap A$ et si $a \in \mathcal{F}_A$ nous obtenons $\emptyset \vdash [x_{[x:A.y:A]} \rightarrow y](a) : A$. Cette dernière application se réduit, comme dans le ρ -calcul non-typé, en $\{y\}$ et puisque nous ne pouvons pas inférer $\emptyset \vdash \{y\} : A$, le type n'est pas préservé par la réduction.

Ce problème peut être résolu en gardant toutes les variables typées du contexte permettant de typer le membre droit d'une règle de réécriture dans le contexte utilisé pour typer la règle. Ce comportement est obtenu en utilisant une règle de typage *Rule''* qui n'élimine pas les variables typées du membre gauche du contexte de la règle de réécriture :

$$\text{Rule}'' \quad \frac{E \vdash l : A \quad F \vdash r : B}{F \vdash (l|_E \rightarrow r) : A \multimap B}$$

Les types des variables du membre gauche d'une règle de réécriture doivent être utilisées pour typer le membre droit de la règle et donc, dans le cas de la règle de typage *Rule''* nous devons imposer une condition explicite de consistance pour le contexte $E \cdot F$. Si cette condition n'est pas satisfaite nous pouvons obtenir des variables liées dans le membre droit d'une règle de réécriture qui n'ont pas le même type que les variables correspondantes (i.e. avec le même nom) du membre gauche de la règle de réécriture respective.

Exemple 6.1 Si nous considérons $x : A \vdash x : A$ et $x : B \vdash x : B$ alors, en utilisant la règle de typage *Rule''*, nous pouvons inférer $x : B \vdash x_{[x:A]} \rightarrow x : A \rightarrow B$. Il est clair que nous ne voulons pas que le terme $x_{[x:A]} \rightarrow x$ soit de type $A \rightarrow B$ mais de type $A \rightarrow A$ quel que soit le contexte utilisé.

D'autre part, la consistance du contexte $E \cdot F$ est une condition trop restrictive qui ne nous permettrait pas de typer tous les ρ -termes qui sont bien typés selon les règles de typage présentées dans la Figure 6.1.

Exemple 6.2 Considérons un symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_{B \rightarrow A}$. En utilisant la règle de typage *Rule''* nous obtenons $x : A \vdash x_{[x:A]} \rightarrow x : A \rightarrow A$ mais, bien que nous ayons $x : B \vdash f(x) : A$, le terme $[x_{[x:A]} \rightarrow x](f(x))$ ne peut pas être typé dans le contexte $x : B$ car le contexte $x : A \cdot x : B$ est inconsistent. Néanmoins, le terme $[y_{[y:A]} \rightarrow y](f(x))$ est bien typé dans le contexte $x : B$.

En généralisant l'Exemple 6.2 nous pouvons dire que tout terme typé en utilisant les règles de typage dans la Figure 6.1 peut être typé, modulo l' α -conversion, en utilisant une approche basée sur la règle de typage *Rule''*.

En plus, puisque selon la règle de typage *Rule''*, le contexte d'une règle de réécriture contient les variables typées de son membre gauche, nous ne devons pas enregistrer ces variables et donc, nous n'avons plus besoin d'utiliser un contexte local pour les règles de réécriture.

Bien que la règle de typage *Rule* initiale soit légèrement plus difficile à manipuler, nous avons donc préféré cette approche qui n'impose aucune restriction sur les termes qui peuvent être bien typés.

6.3 Substitutions typées

Nous devons définir maintenant les *substitutions typées* et la façon dont elles s'appliquent à un ρ -terme typé.

Si A_1, \dots, A_n sont des types, une substitution typée a la forme $\sigma = \langle x_1 : A_1/t_1, \dots, x_n : A_n/t_n \rangle$ avec $x_i \in \mathcal{X}$ et t_i des ρ -termes typés, $i = 1, \dots, n$. Le domaine de la substitution σ est défini comme d'habitude mais en utilisant une notation empruntée aux contextes : $\text{Dom}(\sigma) = x_1 : A_1 \cdot \dots \cdot x_n : A_n$.

Définition 6.6 Nous disons qu'une substitution typée $\sigma = \langle x_1 : A_1/t_1, \dots, x_n : A_n/t_n \rangle$ est bien typée dans un contexte E , et nous le notons par $E \vdash \sigma$, si pour toutes les variables typées $x_i : A_i \in \text{Dom}(\sigma)$ nous avons $E \vdash t_i : A_i$.

L'application d'une substitution bien typée à un terme typé est définie similairement au cas non-typé (voir Définition 2.4) mais en imposant la condition que le domaine de la substitution et du contexte du terme doivent être consistants. Dans ce cas, le terme résultant de l'application d'une substitution à un terme a le même type que ce dernier terme :

Lemme 6.1 Etant donnés un terme t , une substitution typée σ et le contexte E tels que $E \vdash \sigma$ et $\text{Dom}(\sigma) \cdot E \vdash t : B$, avec $\text{Dom}(\sigma) \cdot E$ consistant, alors $E \vdash \sigma t : B$.

Preuve : Nous nous limitons à seulement une variable dans le domaine de la substitution, c'est-à-dire $\sigma = \langle x : A/u \rangle$. Nous avons $E \vdash \sigma$ et par conséquent $E \vdash u : A$. Nous devons prouver que si $x : A \cdot E \vdash t : B$ alors $x : A \cdot E \vdash \langle x : A/u \rangle t : B$. Le cas général où nous avons plus d'une variable typée dans le domaine de la substitution est traité de la même manière.

Nous procédons par induction sur la structure du terme t .

Le cas de base : $t = y$, avec $y \in \mathcal{X}$.

Si $y \neq x$ alors $\langle x : A/u \rangle y = y$ et ainsi, $E \vdash y : B$.

Si $y = x$, puisque $x : A \cdot E$ est consistant et $x : B \subseteq E$ alors $B = A$. Nous avons $\langle x : A/u \rangle y = \langle x : A/u \rangle x = u$ et $E \vdash u : A$ ou d'une manière équivalente $E \vdash u : B$.

Induction : t n'est pas une variable.

- $t = f(t_1, \dots, t_n)$ avec $f \in \mathcal{F}_{B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B}$.

Puisque $x : A \cdot E \vdash t : B$ alors, par la règle de typage *Op* nous avons $x : A \cdot E \vdash t_i : B_i$, $i = 1, \dots, n$. Par induction $E \vdash \langle x : A/u \rangle t_i : B_i$, $i = 1, \dots, n$ et en utilisant la règle de typage *Op* nous obtenons

$$E \vdash f(\langle x : A/u \rangle t_1, \dots, \langle x : A/u \rangle t_n) : B.$$

- $t = \{t_1, \dots, t_n\}$.

Puisque $x : A \cdot E \vdash t : B$ alors, par la règle de typage *Set* nous avons $x : A \cdot E \vdash t_i : B$, $i = 1, \dots, n$. Par induction $E \vdash \langle x : A/u \rangle t_i : B$, $i = 1, \dots, n$ et en utilisant la règle de typage *Set* nous obtenons

$$E \vdash \{\langle x : A/u \rangle t_1, \dots, \langle x : A/u \rangle t_n\} : B.$$

- $t = [u](v)$.

Puisque $x : A \cdot E \vdash t : B$ alors, par la règle de typage *App*, $x : A \cdot E \vdash u : C \rightarrow B$ et $x : A \cdot E \vdash v : C$. Par induction, nous avons $E \vdash \langle x : A/u \rangle u : C \rightarrow B$ et $E \vdash \langle x : A/u \rangle v : C$ et en utilisant la règle de typage *App* nous obtenons

$$E \vdash [\langle x : A/u \rangle u](\langle x : A/u \rangle v) : B.$$

- $t = l_{[F|I]} \rightarrow r$.

Puisque $x : A \cdot E \vdash t : B$ alors, par la règle de typage *Rule*, $F \vdash l : C$ et $E \vdash r : D$ avec $B = C \rightarrow D$.

Nous supposons $x \notin FV(l)$ et $FV(l) \cap FV(u) = \emptyset$ (sinon une α -conversion est effectuée) et dans ce cas $\langle x : A/u \rangle (l_{[F|I]} \rightarrow r) = l_{[F|I]} \rightarrow \langle x : A/u \rangle r$.

Par induction $E \vdash \langle x : A/u \rangle r : D$ et par la règle de typage *Rule* nous obtenons $E \vdash l_{[F|I]} \rightarrow \langle x : A/u \rangle r : C \rightarrow D$ ou d'une manière équivalente $E \vdash l_{[F|I]} \rightarrow \langle x : A/u \rangle r : B$.

□

6.4 Filtrage typé

Nous modifions la Définition 2.5 en introduisant les contextes contenant les variables typées des termes présents dans une équation de filtrage :

Définition 6.7 *Etant donnée une théorie T sur les ρ -termes, une T -équation de filtrage est une formule de la forme $E \vdash t \ll_T^? E' \vdash t'$, où t et t' sont des ρ -termes bien typés dans les contextes E et respectivement E' . Une substitution σ bien typée dans le contexte E' est une solution de l'équation $E \vdash t \ll_T^? E' \vdash t'$ si $T \models \sigma(t) = t'$. Un T -système de filtrage est une conjonction de T -équations de filtrage. Une substitution est une solution d'un T -système de filtrage P si c'est une solution de toutes les T -équations de filtrage. Nous notons par \mathbf{F} un T -système de filtrage sans solution. Un T -système de filtrage est appelé trivial quand toute substitution bien typée est une solution du système.*

Nous définissons $\text{Solution}(\mathcal{S})$ pour un T -système de filtrage \mathcal{S} comme étant la fonction qui retourne l'ensemble de toutes les solutions de \mathcal{S} quand \mathcal{S} n'est pas trivial et $\{\mathbb{ID}\}$, où \mathbb{ID} est la substitution identité, quand \mathcal{S} est trivial.

Selon la définition précédente, si la substitution σ est une solution de l'équation de filtrage $E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t'$ et $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ alors $Dom(\sigma) \subseteq E$.

Par exemple, quand la théorie T est vide, la substitution résultant du filtrage syntaxique entre les termes t et t' , peut toujours être calculée en utilisant l'ensemble de règles *SyntacticMatching* présenté dans la Section 2.5 du Chapitre 2 que nous reprenons ci-dessous :

<i>Decomposition</i>	$(f(t_1, \dots, t_n) \ll_{\emptyset}^? f(t'_1, \dots, t'_n)) \wedge P$	\Leftrightarrow	$\bigwedge_{i=1..n} t_i \ll_{\emptyset}^? t'_i \wedge P$
<i>SymbolClash</i>	$(f(t_1, \dots, t_n) \ll_{\emptyset}^? g(t'_1, \dots, t'_m)) \wedge P$	\Leftrightarrow	F si $f \neq g$
<i>MergingClash</i>	$(x \ll_{\emptyset}^? t) \wedge (x \ll_{\emptyset}^? t') \wedge P$	\Leftrightarrow	F si $t \neq t'$
<i>SymbolVariableClash</i>	$(f(t_1, \dots, t_n) \ll_{\emptyset}^? x) \wedge P$	\Leftrightarrow	F si $x \in \mathcal{X}$

FIG. 6.2: *SyntacticMatching* - Règles pour le filtrage syntaxique

Le résultat de la Proposition 2.1 peut être étendu pour une équation de filtrage avec les termes bien typés :

Proposition 6.1 *La forme normale de tout problème de filtrage $t \ll_{\emptyset}^? t'$ calculée par les règles *SyntacticMatching* existe et est unique. Après avoir enlevé de la forme normale toute équation dupliquée, si le système résultant est :*

1. **F**, alors il n'y a pas de filtre de t à t' et $Solution(E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t') = \emptyset$,
2. de la forme $\bigwedge_{i \in I} x_i \ll_{\emptyset}^? t'_i$ avec $I \neq \emptyset$, alors la substitution $\sigma = \langle x_i/t'_i \rangle_{i \in I}$ est l'unique filtre de t à t' . Si $E \vdash x_i : A_i$ et $E' \vdash t'_i : A_i$ alors $Solution(E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t') = \{\langle x_i : A_i/t'_i \rangle_{i \in I}\}$. Si pour un certain $i \in I$ nous avons $E \vdash x_i : A_i$ et $E' \vdash t'_i : B_i$ avec $A_i \neq B_i$ alors nous obtenons $Solution(E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t') = \emptyset$,
3. vide, alors t et t' sont identiques et $Solution(E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t') = \{\mathbb{ID}\}$.

On doit noter que nous n'enlevons pas les équations triviales $x \ll_{\emptyset}^? x$ de la forme normale d'un système de filtrage mais nous vérifions l'égalité des types de la variable x des deux côtés dans les contextes correspondants. Une équation de filtrage triviale mais avec les variables typées différemment mène à un échec de filtrage comme par exemple dans l'équation de filtrage $Solution(x : A \vdash x \ll_{\emptyset}^? x : B \vdash x) = \emptyset$.

Puisque dans l'ensemble de règles de filtrage *SyntacticMatching* la consistance entre les types des membres des équations de filtrage n'est pas vérifiée, les équations triviales ne sont pas enlevées et nous pouvons ainsi obtenir une solution $Solution(E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t') = \{\langle x : A/x, \dots \rangle\}$.

Nous pouvons, naturellement, intégrer les contraintes de type dans les règles de filtrage en utilisant l'ensemble des règles dans la Figure 6.3.

La règle de typage *VariableClash* vérifie juste que les types des deux membres d'une équation de filtrage avec une variable à gauche sont identiques et la Proposition 6.1 peut être reformulée en :

Proposition 6.2 *La forme normale de tout problème de filtrage $E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t'$ calculée par les règles *SyntacticMatchingType* existe et est unique. Après avoir enlevé de la forme normale toute équation dupliquée et toute équation triviale de la forme $E \vdash x \ll_{\emptyset}^? E' \vdash x$, si le système résultant est :*

<i>Decomposition</i>	$(E \vdash f(t_1, \dots, t_n) \ll_{\emptyset}^? E' \vdash f(t'_1, \dots, t'_n)) \wedge P \mapsto$
	$\bigwedge_{i=1 \dots n} E \vdash t_i \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t'_i \wedge P$
<i>SymbolClash</i>	$(E \vdash f(t_1, \dots, t_n) \ll_{\emptyset}^? E' \vdash g(t'_1, \dots, t'_m)) \wedge P \mapsto \mathbf{F}$
	si $f \neq g$
<i>MergingClash</i>	$(E \vdash x \ll_{\emptyset}^? F \vdash t) \wedge (E \vdash x \ll_{\emptyset}^? F' \vdash t') \wedge P \mapsto \mathbf{F}$
	si $t \neq t'$
<i>SymbolVariableClash</i>	$(E \vdash f(t_1, \dots, t_n) \ll_{\emptyset}^? E' \vdash x) \wedge P \mapsto \mathbf{F}$
	si $x \in \mathcal{X}$
<i>VariableClash</i>	$(E \vdash x \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t) \wedge P \mapsto \mathbf{F}$
	si $E \vdash x : A$ et $E' \vdash t : B$ et $A \neq B$

FIG. 6.3: *SyntacticMatchingType* - Règles pour le filtrage syntaxique typé

1. \mathbf{F} , alors il n'y a pas de filtre de t à t' et $\text{Solution}(E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t') = \emptyset$,
2. de la forme $\bigwedge_{i \in I} E \vdash x_i \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t'_i$ avec $I \neq \emptyset$ et $E \vdash x_i : A_i$, alors la substitution $\sigma = \langle x_i : A_i/t'_i \rangle_{i \in I}$ est l'unique filtre des termes t à t' bien typés dans les contextes E et respectivement E' et $\text{Solution}(E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t') = \{\langle x_i : A_i/t'_i \rangle_{i \in I}\}$.
3. vide, alors t et t' sont identiques et $\text{Solution}(E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t') = \{\text{ID}\}$.

Si l'ensemble de règles de filtrage *SyntacticMatchingType* est utilisé alors la forme normale d'un problème de filtrage ne peut pas contenir d'équation de la forme $E \vdash x \ll_{\emptyset}^? E' \vdash x$ avec la variable x typée différemment dans les contextes E et E' et ainsi, nous pouvons enlever les équations de cette forme afin d'obtenir la substitution résultat.

L'avantage de maintenir séparées les contraintes de type et les règles de filtrage comme dans la méthode utilisant les règles *SyntacticMatching* nous permet d'utiliser le même ensemble de règles de filtrage dans les approches typées et non-typées.

Quand les contextes E, E' des termes t, t' sont clairs, nous les omettons et nous abrégeons la fonction $\text{Solution}(E \vdash t \ll_{\emptyset}^? E' \vdash t')$ par $\text{Solution}(t \ll_{\emptyset}^? t')$.

6.5 Les règles d'évaluation du ρ_{\emptyset} -calcul typé

Les règles d'évaluation du ρ_{\emptyset} -calcul non-typé présentées dans le Chapitre 3 sont enrichies avec l'information de type et nous obtenons l'ensemble de règles d'évaluation dans la Figure 6.4. Les règles qui sont modifiées sont celles qui décrivent l'évaluation des règles de réécriture : *Fire* et *Switch_R*.

Les règles d'évaluation du ρ -calcul typé général sont obtenues de la même manière à partir des règles d'évaluation du ρ -calcul non-typé mais la règle *Switch_L* décrivant le comportement des règles de réécriture avec un ensemble dans le membre gauche nécessite une analyse plus approfondie et nous allons proposer dans la Section 6.8 une approche possible et un système de types approprié.

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'interprétation des symboles de fonctions est surchargée et un symbole de fonction peut avoir plusieurs profils. Si dans le membre gauche de la règle d'évaluation *Congruence* le premier f a le profil $(A_1 \multimap B_1) \times \dots \times (A_n \multimap B_n) \multimap (A \multimap B)$ et le deuxième f le profil $A_1 \times \dots \times A_n \multimap A$ alors le symbole f du membre droit de la règle d'évaluation a le profil $B_1 \times \dots \times B_n \multimap B$. Les arguments d'un terme construit en utilisant le

<i>Fire</i>	$[l_{[E]} \rightarrow r](t)$	$\Longrightarrow \{\sigma r\}$ si le contexte est F avec $\sigma \in \text{Solution}(E \vdash l \ll_{\emptyset}^? F \vdash t)$
<i>Congruence</i>	$[f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n))$	$\Longrightarrow \{f([u_1](v_1), \dots, [u_n](v_n))\}$
<i>Congruence_fail</i>	$[f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m))$	$\Longrightarrow \emptyset$
<i>Distrib</i>	$[\{u_1, \dots, u_n\}](v)$	$\Longrightarrow \{[u_1](v), \dots, [u_n](v)\}$
<i>Batch</i>	$[v](\{u_1, \dots, u_n\})$	$\Longrightarrow \{[v](u_1), \dots, [v](u_n)\}$
<i>Switch_R</i>	$u_{[E]} \rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$	$\Longrightarrow \{u_{[E]} \rightarrow v_n, \dots, u_{[E]} \rightarrow v_n\}$
<i>OpOnSet</i>	$f(v_1, \dots, \{u_1, \dots, u_m\}, \dots, v_n)$ $\{f(v_1, \dots, u_1, \dots, v_n), \dots, f(v_1, \dots, u_m, \dots, v_n)\}$	\Longrightarrow
<i>Flat</i>	$\{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\}$	$\Longrightarrow \{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\}$

FIG. 6.4: Les règles d'évaluation du ρ_0 -calcul typé

premier f sont des règles de réécriture (ou d'autres termes de type composé) qui sont appliquées aux arguments d'un terme construit en utilisant le deuxième f et la surcharge du symbole f est évidemment nécessaire afin de typer correctement ces applications.

Les réductions utilisant les règles d'évaluation *Congruence* peuvent être simulées par des réductions utilisant la règle d'évaluation *Fire* et nous avons montré dans le Chapitre 2 (page 48) que le terme $[f(u_1, \dots, u_n)](t)$ est évalué, en utilisant les règles *Congruence* et *Congruence_fail*, au même terme que le terme $[f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f([u_1](x_1), \dots, [u_n](x_n))](t)$ en utilisant la règle *Fire*. Par conséquent, les règles *Congruence* représentent une forme d'expansion η du ρ -calcul qui serait définie par :

$$Eta \quad f(t_1, \dots, t_n) \Longrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f([t_1](x_1), \dots, [t_n](x_n))$$

qui, appliquée dans le cas particulier d'une constante a , mène à

$$a \Longrightarrow x \rightarrow [a](x).$$

Pour des raisons de simplicité nous avons omis le contexte local de la règle de réécriture du membre droit de la règle *Eta* mais il est clair que si le symbole f du membre gauche de la règle *Eta* a le profil $(A_1 \multimap B_1) \times \dots \times (A_n \multimap B_n) \multimap (A \multimap B)$ alors ce contexte est $x_1 : A_1 \dots x_n : A_n$.

Il y a principalement deux propriétés que nous voulons prouver pour le ρ_0 -calcul typé. D'abord, nous montrons que les réductions du ρ_0 -calcul préservent le type, propriété habituellement appelée *préservation du type* (*subject reduction*). Deuxièmement, nous prouvons que dans le ρ_0 -calcul typé il n'y a pas de réduction infinie.

Par rapport aux preuves de terminaison pour des calculs similaires, comme le λ -calcul, nous devons prouver que la manipulation du non-déterminisme représenté par des ensembles de termes

est faite correctement. Dans le ρ -calcul nous avons des singletons correspondant à un résultat déterministe, comme dans le λ -calcul, mais nous traitons aussi explicitement les échecs possibles représentés par \emptyset et les résultats non-déterministes représentés par des ensembles ayant plus d'un élément.

Comme nous l'avons vu, sans typer le ρ -calcul ne termine pas :

Exemple 6.3 *Le terme $\omega_\rho\omega_\rho = [x \rightarrow x](x \rightarrow x)$ est évalué comme décrit ci-dessous*

$$\begin{aligned}
& [x \rightarrow x](x \rightarrow x) \\
\longrightarrow_{Fire} & \{ \langle x / (x \rightarrow x) \rangle x \} \equiv \{ [x \rightarrow x](x \rightarrow x) \} \\
\longrightarrow_{Fire} & \{ \{ [x \rightarrow x](x \rightarrow x) \} \} \\
\longrightarrow_{Flat} & \{ [x \rightarrow x](x \rightarrow x) \} \\
\longrightarrow & \dots
\end{aligned}$$

Dans le ρ_\emptyset -calcul typé le ρ -terme correspondant $[x_{[x:A]} \rightarrow x](x_{[x:A]} \rightarrow x)$ n'est pas bien typé, indépendamment du type de la variable x des membres gauches des règles de réécriture. Ceci découle de la règle de typage *App* qui nécessite d'une part un type $B \multimap C$ pour le premier x de l'application et d'autre part un type B pour le deuxième x afin d'obtenir le type du terme x. Mais le même contexte (consistant) est utilisé pour typer les deux variables et donc nous ne pouvons pas avoir deux définitions de type différentes pour la même variable.

6.6 La préservation du type

Nous montrons maintenant que le système de types que nous avons proposé dans la Section 6.2 est cohérent par rapport aux règles d'évaluation du ρ_\emptyset -calcul dans le sens où le type d'un terme est le même que le type de tout terme obtenu en le réduisant.

Théorème 6.1 *Pour tous ρ -termes a et a' , si $a \longrightarrow_\rho a'$ et $E \vdash a : A$, alors $E \vdash a' : A$.*

Preuve : Nous examinons les règles d'évaluation du ρ_\emptyset -calcul typé une par une et nous prouvons que le membre gauche et le membre droit de chaque règle ont le même type dans un contexte donné. Pour chaque règle d'évaluation de la forme $lhs \Longrightarrow rhs$ nous montrons donc que si $E \vdash lhs : A$ alors $E \vdash rhs : A$.

– la règle *Fire*

$$\begin{aligned}
Fire \quad [l_{[E]} \rightarrow r](t) & \Longrightarrow \{ \sigma r \} \\
& \text{si le contexte est } E \\
& \text{avec } \sigma \in \mathcal{Solution}(E' \vdash l \ll_\emptyset^? E \vdash t)
\end{aligned}$$

Considérons A tel que $E \vdash [l_{[F|l]} \rightarrow r](t) : A$. En utilisant la règle de typage *App* nous inférons $E \vdash t : B$ et $E \vdash (l_{[F|l]} \rightarrow r) : B \multimap A$. Par la règle de typage *Rule* nous avons $F|_l \vdash l : B$ et $F|_l \cdot E \vdash r : A$ avec $F|_l \cdot E$ consistant.

Si σ est la solution de l'équation de filtrage $(F|_l \vdash l \ll_\emptyset^? E \vdash t)$ alors, conformément à la définition du filtrage typé, $E \vdash \sigma$ et $Dom(\sigma) = F|_l$. Puisque $F|_l \cdot E$ est consistant alors $Dom(\sigma) \cdot E$ est consistant et en utilisant le Lemme 6.1 nous obtenons $E \vdash \sigma r : A$. Par la règle de typage *Set* nous avons

$$E \vdash \{ \sigma r \} : A.$$

Si le filtrage $(F|_l \vdash l \ll_\emptyset^? E \vdash t)$ échoue alors le membre droit \emptyset satisfait la propriété par la règle de typage *Empty*.

- la règle *Congruence*

$$\text{Congruence} \quad [f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n)) \implies \{f([u_1](v_1), \dots, [u_n](v_n))\}$$

Considérons A tel que $E \vdash [f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n)) : A$. En utilisant la règle de typage *App* nous inférons $E \vdash f(u_1, \dots, u_n) : B \multimap A$ et $E \vdash f(v_1, \dots, v_n) : B$. Nous supposons les profils suivants pour le symbole de fonction $f : A_1 \times \dots \times A_n \multimap A$, $B_1 \times \dots \times B_n \multimap B$ et $(A_1 \multimap B_1) \times \dots \times (A_n \multimap B_n) \multimap (A \multimap B)$. Par la règle de typage *Op* appliquée deux fois nous avons : $E \vdash u_i : B_i \multimap A_i$, $E \vdash v_i : B_i$. Nous appliquons n fois la règle de typage *App* et nous obtenons $E \vdash [u_i](v_i) : A_i$, $i = 1, \dots, n$ et par la règle de typage *Op* nous avons $E \vdash f([u_1](v_1), \dots, [u_n](v_n)) : A$. Finalement, nous appliquons la règle de typage *Set* et nous obtenons :

$$E \vdash \{f([u_1](v_1), \dots, [u_n](v_n))\} : A.$$

- la règle *Congruence_fail*

$$\text{Congruence_fail} \quad [f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m)) \implies \emptyset$$

L'application de la règle de typage *Empty* prouve immédiatement la propriété.

- la règle *Distrib*

$$\text{Distrib} \quad [\{u_1, \dots, u_n\}](v) \implies \{[u_1](v), \dots, [u_n](v)\}$$

Considérons A tel que $E \vdash [\{u_1, \dots, u_n\}](t) : A$. En utilisant la règle de typage *App* nous inférons $E \vdash \{u_1, \dots, u_n\} : B \multimap A$ et $E \vdash t : B$. Par la règle de typage *Set* nous avons $E \vdash u_i : B \multimap A$, $i = 1, \dots, n$ et en appliquant la règle de typage *App* avec $E \vdash t : B$ nous obtenons $E \vdash [u_i](t) : A$, $i = 1, \dots, n$. Finalement, la règle de typage *Set* mène à :

$$E \vdash \{[u_1](t), \dots, [u_n](t)\} : A.$$

- la règle *Batch*

$$\text{Batch} \quad [v](\{u_1, \dots, u_n\}) \implies \{[v](u_1), \dots, [v](u_n)\}$$

Considérons A tel que $E \vdash [u](\{t_1, \dots, t_n\}) : A$. En utilisant la règle de typage *App* nous inférons $E \vdash u : B \multimap A$, $E \vdash \{t_1, \dots, t_n\} : B$. Par la règle de typage *Set* nous avons $E \vdash t_i : B$, $i = 1, \dots, n$ et en appliquant la règle de typage *App* n fois nous obtenons $E \vdash [u](t_i) : A$, $i = 1, \dots, n$. Finalement, la règle de typage *Set* mène à :

$$E \vdash \{[u_1](t), \dots, [u_n](t)\} : A.$$

- la règle *Switch_R*

$$\text{Switch}_R \quad u_{[F|u]} \rightarrow \{v_1, \dots, v_n\} \implies \{u_{[F|u]} \rightarrow v_1, \dots, u_{[F|u]} \rightarrow v_n\}$$

Considérons A tel que $E \vdash u_{[F|u]} \rightarrow \{v_1, \dots, v_n\} : A$. En utilisant la règle de typage *Rule* nous inférons $A = B \multimap C$ et $F \vdash u : B$, $F|u \cdot E \vdash \{v_1, \dots, v_n\} : C$. Par la règle de typage *Set* nous avons $F|u \cdot E \vdash v_i : C$, $i = 1, \dots, n$ et par la règle de typage *Rule* appliquée n fois nous obtenons $E \vdash u_{[F|u]} \rightarrow v_i : B \multimap C$, $i = 1, \dots, n$. Finalement, la règle de typage *Set* mène à :

$$E \vdash \{u_{[F|u]} \rightarrow v_1, \dots, u_{[F|u]} \rightarrow v_n\} : A.$$

– la règle *OpOnSet*

$$\text{OpOnSet} \quad f(v_1, \dots, \{u_1, \dots, u_m\}, \dots, v_n) \implies \{f(v_1, \dots, u_1, \dots, v_n), \dots, f(v_1, \dots, u_m, \dots, v_n)\}$$

Considérons A tel que $f \in \mathcal{F}_{A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A}$ et $E \vdash f(v_1, \dots, \{u_1, \dots, u_m\}, \dots, v_n) : A$. En utilisant la règle de typage *Op* nous inférons $E \vdash v_i : A_i$, $i = 1, \dots, n$, $i \neq k$, et $E \vdash \{u_1, \dots, u_m\} : A_k$. Par la règle de typage *Set* nous avons $E \vdash u_j : A_k$, $j = 1, \dots, m$ et par la règle de typage *Op* appliquée pour $j = 1, \dots, m$ nous obtenons $E \vdash f(v_1, \dots, u_j, \dots, v_n) : A$. Finalement, la règle de typage *Set* mène à :
 $E \vdash \{f(v_1, \dots, u_1, \dots, v_n), \dots, f(v_1, \dots, u_m, \dots, v_n)\} : A$.

– la règle *Flat*

$$\text{Flat} \quad \{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\} \implies \{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\}$$

Considérons A tel que $E \vdash \{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\} : A$. En utilisant la règle de typage *Set* nous inférons $E \vdash u_j : A$, $j = 1, \dots, m$ et $E \vdash \{v_1, \dots, v_n\} : A$. Par la règle de typage *Set* nous avons $E \vdash u_j : A$, $j = 1, \dots, m$ et $E \vdash \{v_1, \dots, v_n\} : A$. La même règle *Set* mène à $E \vdash v_i : A$, $i = 1, \dots, n$ et finalement, par la règle de typage *Set* nous avons :

$$E \vdash \{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\} : A.$$

□

Comme nous l'avons précisé dans la Section 6.5, les réductions utilisant les règles d'évaluation *Congruence* peuvent être simulées par des réductions utilisant la règle d'évaluation *Fire* et nous pouvons obtenir une équivalence similaire au niveau des types. Considérons un symbole f tel que $f \in \mathcal{F}_{(A_1 \rightarrow B_1) \times \dots \times (A_n \rightarrow B_n) \rightarrow (A \rightarrow B)}$ et donc $f \in \mathcal{F}_{A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A}$ et $f \in \mathcal{F}_{B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B}$.

Alors nous pouvons typer le terme $f(t_1, \dots, t_n)$ dans le contexte E :

$$\frac{E \vdash t_1 : A_1 \rightarrow B_1 \dots E \vdash t_n : A_n \rightarrow B_n}{E \vdash f(t_1, \dots, t_n) : A \rightarrow B} \text{Op}$$

Si nous considérons le terme équivalent $f(x_1, \dots, x_n)_{[E]} \rightarrow f([t_1](x_1), \dots, [t_n](x_n))$ avec le contexte $E' = x_1 : A_1 \dots x_n : A_n$, tel que E' , E sont disjoints alors nous obtenons

$$\frac{E' \cdot E \vdash t_i : A_i \rightarrow B_i \quad E' \cdot E \vdash x_i : A_i}{E' \cdot E \vdash [t_i](x_i) : B_i} \text{App} \quad \frac{E' \vdash x_1 : A_1 \dots E' \vdash x_n : A_n}{E' \vdash f(x_1, \dots, x_n) : A} \text{Op}$$

$$\frac{E' \cdot E \vdash [t_i](x_i) : B_i}{E' \cdot E \vdash f([t_1](x_1), \dots, [t_n](x_n)) : B} \text{Op}$$

et par la règle de typage *Rule*

$$\frac{E' \vdash f(x_1, \dots, x_n) : A \quad E' \cdot E \vdash f([t_1](x_1), \dots, [t_n](x_n)) : B}{E \vdash f(x_1, \dots, x_n)_{[E]} \rightarrow f([t_1](x_1), \dots, [t_n](x_n)) : A \rightarrow B}$$

En utilisant les déductions précédentes nous pouvons conclure que si $t_i : A_i \rightarrow B_i$, $i = 1, \dots, n$ alors

$$E \vdash f(x_1, \dots, x_n)_{[x_1:A_1 \dots x_n:A_n]} \rightarrow f([t_1](x_1), \dots, [t_n](x_n)) : A \rightarrow B$$

Nous avons ainsi induit le même type pour un terme $f(t_1, \dots, t_n)$ et pour le terme étendu correspondant $f(x_1, \dots, x_n)_{[x_1:A_1 \dots x_n:A_n]} \rightarrow f([t_1](x_1), \dots, [t_n](x_n))$ dans le même contexte E . On doit noter que dans le deuxième terme nous devons définir explicitement dans le contexte local de la règle de réécriture les types des variables liées de la règle.

Ceci prouve que notre choix pour le système de types est approprié puisque il est consistant avec l'expansion implicite du ρ -calcul.

6.7 La normalisation forte du ρ_0 -calcul

Nous nous concentrons maintenant sur la preuve de la normalisation forte du ρ_0 -calcul typé. Cette propriété garantit l'existence d'une forme normale pour tout ρ -terme bien typé et donc, assure que les réductions dans le ρ_0 -calcul sont finies. Quand le ρ_0 -calcul est confluent (cf. Section 3.3) nous pourrions conclure en l'unicité du résultat pour la réduction de tout ρ -terme bien typé.

Définition 6.8 *Un ρ -terme t typé ou non-typé est fortement normalisant (strongly normalizing ou SN) par rapport à une relation de réduction si toute réduction commençant par t est finie. Un ρ -terme est faiblement normalisant si au moins une réduction issue de t est finie.*

Il n'est pas surprenant qu'en raison du rapport fort entre le ρ -calcul et le λ -calcul, notre preuve de la normalisation forte du ρ_0 -calcul soit inspirée de la preuve de la normalisation forte du λ -calcul.

Il y a plusieurs approches pour prouver la normalisation forte du λ -calcul. Une méthode s'appelle *internalization* et a été employée la première fois par Gandy [Gan80]. Une autre est celle appelée habituellement la méthode des *candidats de réductibilité* et basée sur les notions introduites par Tait [Tai67]. Cette dernière approche a été généralisée dans [Gir72] et [JO97].

Nous utilisons par la suite les notations, les définitions et l'approche de [HS86] qui est une variation de la méthode de Tait. Par rapport à cette méthode, dans notre approche nous devons manipuler correctement les termes du premier ordre et les termes ensemble.

Lorsque le contexte E dans lequel nous typons les termes est clair, nous l'omettons et dans ce cas-ci nous abrégons $E \vdash t : A$ par $t : A$.

Définition 6.9 *Nous définissons la calculabilité forte (strong computability ou SC) d'un terme t par induction sur le nombre de flèches de type " \rightarrow " dans le type de t :*

- a. *un terme de type atomique est SC s'il est SN,*
- b. *un terme t tel que $E \vdash t : A \rightarrow B$ est SC si, pour tout terme SC u tel que $E \vdash u : A$, le terme $[t](u)$ avec $E \vdash [t](u) : B$ est SC.*

La définition est étendue pour les substitutions typées et nous disons qu'une substitution de la forme $\langle x_1 : A_1/u_1, \dots, x_n : A_n/u_n \rangle$ est SC si tous les termes u_i sont SC.

Remarque 6.2 *En partant en particulier des définitions données ci-dessus nous pouvons remarquer que :*

1. *Tout type A est de la forme $A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow K$, avec K un type atomique.*
2. *Etant donné un type $A = A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow K$; $(t : A)$ est SC ssi pour tous termes typés SC, $t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n$, le terme $[\dots [[t](t_1)](t_2) \dots](t_n) : K$ est SC (par la Définition 6.9(b)). $[\dots [[t](t_1)](t_2) \dots](t_n) : K$ est SC ssi il est SN (par la Définition 6.9(a)).*
3. *Si $(t : A)$ est SC (SN), alors tout terme qui diffère de t seulement au niveau des noms des variables liées est SC (SN).*
4. *Si $t : A \rightarrow B$ est SC et $u : A$ est SC, alors $[t](u) : B$ est SC (par la Définition 6.9(b)).*
5. *Si $t : A$ est SN, alors tout sous-terme de $t : A$ est SN, puisque toute réduction infinie d'un sous-terme de t mène à une réduction infinie de t .*

En utilisant ces remarques nous prouvons d'abord quelques lemmes préliminaires et ensuite nous concluons par la proposition énonçant la normalisation forte du ρ_0 -calcul typé.

La preuve de normalisation est faite en deux étapes. D'abord nous montrons que tout terme typable qui est SC est SN. Ensuite nous prouvons que tous les termes typables sont SC et nous concluons que tous les termes typables sont SN.

Lemme 6.2 (tout terme SC est SN)

Pour tout type A nous avons les propriétés suivantes :

- Etant donné un atome t et les termes u_1, \dots, u_n . Si u_1, \dots, u_n sont SN alors le terme $[\dots [[t](u_1)](u_2) \dots](u_n) : A$ est SC.
- Tout terme SC de type A est SN.

Preuve : Nous procédons par induction sur le nombre de flèches de type “ \rightarrow ” dans le type A :

Le cas de base : A est un type atomique.

- Puisque t est un atome et donc une variable, toute réduction de $[\dots [[t](u_1)](u_2) \dots](u_n)$ est une réduction d’un u_i . Puisque u_1, \dots, u_n sont SN, alors $[\dots [[t](u_1)](u_2) \dots](u_n)$ est SN. Ainsi, par la Définition 6.9 (a), le terme $[\dots [[t](u_1)](u_2) \dots](u_n)$ est SC.
- Par la Définition 6.9 (a).

Induction : $A = B \rightarrow C$

- Nous considérons un terme SC v de type B . Par l’hypothèse d’induction (b), $(v : B)$ est SN. Par l’hypothèse d’induction (a), le terme $[\dots [[t](u_1)](u_2) \dots](u_n)(v) : C$ est SC. Ainsi, par la Définition 6.9 (b), $[\dots [[t](u_1)](u_2) \dots](u_n) : A$ est SC.
- Nous considérons un terme SC u de type A et une variable x de type B qui n’apparaît pas (libre ou liée) dans $(u : A)$. Par l’hypothèse d’induction (a) et en considérant $n = 0$, x est SC. Selon la Remarque 6.2(4), $[u](x) : C$ est SC et par l’hypothèse d’induction (b), $[u](x) : C$ est SN. Conformément à la Remarque 6.2(5), $(u : a)$ est SN.

□

Nous prouvons maintenant que tous les termes typables sont SC. Pour ceci nous avons besoin des lemmes montrant la stabilité des propriétés SN et SC pour les termes du premier ordre et pour les termes ensemble. Puisque dans le λ -calcul nous n’avons pas de tels termes, ce genre de propriété n’est pas nécessaire pour la preuve de normalisation du λ -calcul.

Lemme 6.3 Etant donné un ensemble de termes SN t_i , $i = 1, \dots, n$, le terme $t = \{t_1, \dots, t_n\}$ est SN.

Preuve : Pour simplifier nous considérons que $i = 1$ et donc $t = \{t_1\}$. Nous notons par $\{u\}^k$ le terme $\{\dots \{u\} \dots\}$ avec k symboles d’ensemble imbriqués.

Nous utilisons une induction sur le nombre maximum d’étapes de réduction du terme t_1 .

Le cas de base : Le terme t_1 est complètement normalisé. Si $t_1 = \{u_1\}^0$ alors $t = \{u_1\}$ est en forme normale. Si $t_1 = \{u_1\}^1$ alors la seule réduction possible de t est $\{t\} = \{\{u_1\}\} \rightarrow_{Flat} \{u_1\}$ et puisque $\{u_1\}$ est en forme normale alors $\{t\}$ est SN.

Induction : t_1 se normalise en maximum $n > 0$ étapes en \bar{t}_1 .

Nous considérons que le terme t_1 est de la forme $\{u_1\}^k$ avec u_1 SN. Nous avons deux réductions possibles :

$$\{t_1\} = \{\{u_1\}^k\} \rightarrow_{\rho} \{\{u'_1\}^k\}$$

avec $u_1 \rightarrow_{\rho} u'_1$ et $\{u'_1\}^k$ SN et normalisant en $(n - 1)$ étapes ou $k \geq 1$ et

$$\{t_1\} = \{\{u_1\}^k\} \rightarrow_{Flat} \{\{u_1\}^{k-1}\}.$$

Si $k \geq 2$ alors $\{u_1\}^{k-1}$ est SN et normalisant en $(n - 1)$ étapes. Si $k = 1$ alors la seule réduction possible est

$$\{t_1\} = \{\{u_1\}\} \rightarrow_{Flat} \{u_1\} \rightarrow_{\rho} \{u'_1\}$$

avec $u_1 \longrightarrow_\rho u'_1$ et u'_1 SN et normalisant en $(n - 1)$ étapes.

Par induction, $\{\{u'_1\}^k\}$ et $\{\{u_1\}^{k-1}\}$ sont SN et par conséquent, $\{\{u_1\}^k\}$ est SN. \square

Lemme 6.4 *Etant donnés un contexte E et un ensemble de termes u_i tels que $E \vdash u_i : A$, $i = 1, \dots, n$. Si les termes u_i sont SC alors le terme $\{u_1, \dots, u_n\}$ est SC.*

Preuve : Tous les termes utilisés dans la preuve sont typés dans le contexte E qui est omis quand les types des termes sont donnés.

Si le type A est atomique alors, par la Définition 6.9, $u_i : A$ sont SN et ainsi $\{u_1, \dots, u_n\} : A$ est SN par le Lemme 6.3. Puisque $\{u_1, \dots, u_n\} : A$ est de type atomique et SN alors, par la Définition 6.9, il est SC.

Si le type A est de la forme $A_1 \multimap \dots A_m \multimap K$ avec K atomique alors par la Remarque 6.2(2) nous devons montrer que pour tous les termes SC t_j tels que $E \vdash t_j : A_j$ nous avons le terme $[\dots [\{u_1, \dots, u_n\}(t_1)](t_2) \dots](t_m) : K$ qui est SN.

Puisque $t_j : A_j$ sont SC alors, par la Remarque 6.2(4), les termes $[\dots [u_i(t_1)](t_2) \dots](t_m) : K$ sont SC et puisqu'ils sont de type atomique alors ils sont SN. Par conséquent, nous déduisons par le Lemme 6.3 que le terme $\{[\dots [u_1(t_1)](t_2) \dots](t_m), \dots, [\dots [u_n(t_1)](t_2) \dots](t_m)\}$ est SN.

Puisque u_i, t_j sont SC alors, par le Lemme 6.2, u_i, t_j sont SN pour $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. Par conséquent, si le terme $[\dots [\{u_1, \dots, u_n\}(t_1)](t_2) \dots](t_m)$ n'était pas SN alors une réduction infinie n'est pas due seulement à ses sous-termes et aurait la forme :

$$\begin{aligned} & [\dots [\{u_1, \dots, u_n\}(t_1)](t_2) \dots](t_m) \\ & \xrightarrow{*}_\rho [\dots [\{u'_1, \dots, u'_n\}(t'_1)](t'_2) \dots](t'_m) \\ & \xrightarrow{\text{Distrib}} \{[\dots [u'_1(t'_1)](t'_2) \dots](t'_m), \dots, [\dots [u'_n(t'_1)](t'_2) \dots](t'_m)\} \\ & \xrightarrow{*}_\rho \dots \end{aligned}$$

Puisque nous avons la réduction

$$\begin{aligned} & \{[\dots [u_1(t_1)](t_2) \dots](t_m), \dots, [\dots [u_n(t_1)](t_2) \dots](t_m)\} \\ & \xrightarrow{*}_\rho \{[\dots [u'_1(t'_1)](t'_2) \dots](t'_m), \dots, [\dots [u'_n(t'_1)](t'_2) \dots](t'_m)\} \end{aligned}$$

alors le terme $\{[\dots [u_1(t_1)](t_2) \dots](t_m), \dots, [\dots [u_n(t_1)](t_2) \dots](t_m)\}$ n'est pas SN, ce qui contredit le résultat obtenu ci-dessus.

Par conséquent, $[\dots [\{u_1, \dots, u_n\}(t_1)](t_2) \dots](t_m)$ est SN et selon la Remarque 6.2(2), nous obtenons que $\{u_1, \dots, u_n\}$ est SC. \square

Lemme 6.5 *Etant donné un ensemble de termes SN $t_i, i = 1, \dots, n$, le terme $t = f(t_1, \dots, t_n)$ est SN.*

Preuve : La preuve est très similaire à celle du Lemme 6.3. \square

Lemme 6.6 *Etant donnés un contexte E , les termes u_i tels que $E \vdash u_i : A_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et un symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_{A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A}$, alors le terme $f(u_1, \dots, u_n)$ est SC ssi les termes u_i sont SC.*

Preuve : Tous les termes utilisés dans la preuve sont typés dans le contexte E qui est omis par la suite.

Les symboles $f \in \mathcal{F}$ sont symboles du premier ordre et ne peuvent pas mener à des termes de la forme $f(u_1, \dots, u_n)$ avec un type *plus grand* que le type de leurs arguments. Ici, *plus grand* est utilisé dans le sens d'un nombre *plus grand* de symboles “ \multimap ” dans le type.

Nous procédons par induction sur le nombre de flèches de type “ \multimap ” dans les types A_i :

Le cas de base : $A_i, i = 1, \dots, n$ et A sont des types atomiques.

Si les types A_i sont atomiques et les u_i sont SC alors les u_i sont SN par le Lemme 6.2 et ainsi $f(u_1, \dots, u_n) : A$ est SN par le Lemme 6.5. Puisque $f(u_1, \dots, u_n) : A$ est de type atomique et SN alors il est SC.

Si $f(u_1, \dots, u_n) : A$ est SC alors, par le Lemme 6.2, il est SN et ainsi tous ses sous-termes u_i sont SN. Puisque A_i sont des types atomiques alors u_i sont SC.

Induction : A_i de la forme $B_i \multimap C_i$, $i = 1, \dots, n$ et A de la forme $B \multimap C$.

Puisque $f \in \mathcal{F}_{(B_1 \multimap C_1) \times \dots \times (B_n \multimap C_n) \multimap (B \multimap C)}$ nous pouvons considérer que nous avons également $f \in \mathcal{F}_{B_1 \times \dots \times B_n \multimap B}$ et $f \in \mathcal{F}_{C_1 \times \dots \times C_n \multimap C}$.

(\Leftarrow) si $u_i : A_i$, $i = 1, \dots, n$ sont SC alors $f(u_1, \dots, u_n) : A$ est SC

Afin de prouver que $f(u_1, \dots, u_n)$ est SC, conformément à la Remarque 6.2(2), nous devons montrer que pour tout terme SC $t : B$ nous avons $[f(u_1, \dots, u_n)](t) : C$ qui est SN.

Pour tous les termes t tels que $[f(u_1, \dots, u_n)](t)$ est réduit dans une étape à \emptyset la propriété est évidente. Le seul terme t qui ne mène pas à un tel résultat doit être de la forme $f(t_1, \dots, t_n)$.

Puisque $t : B$ est SC alors, par hypothèse d'induction, $t_i : B_i$ sont SC. Ainsi, par la Remarque 6.2(4), $[u_i](t_i) : C_i$ sont SC et donc SN. Par conséquent, par le Lemme 6.5, $f([u_1](t_1), \dots, [u_n](t_n))$ est SN. De plus, par le Lemme 6.2, les termes u_i et t_i , $i = 1, \dots, n$ sont SN.

Supposons que $[f(u_1, \dots, u_n)](t) : C$ n'est pas SN. Puisque les termes u_i , t_i , $i = 1, \dots, n$ sont SN alors, une réduction infinie aurait la forme :

$$\begin{aligned} & [f(u_1, \dots, u_n)](f(t_1, \dots, t_n)) \\ & \xrightarrow{\ast}_{\rho} [f(u'_1, \dots, u'_n)](f(t'_1, \dots, t'_n)) \\ & \xrightarrow{\text{Congruence}} f([u'_1](t'_1), \dots, [u'_n](t'_n)) \\ & \xrightarrow{\ast}_{\rho} \dots \end{aligned}$$

Puisque nous avons la réduction

$$f([u_1](t_1), \dots, [u_n](t_n)) \longrightarrow_{\rho} f([u'_1](t'_1), \dots, [u'_n](t'_n))$$

alors $f([u_1](t_1), \dots, [u_n](t_n))$ n'est pas SN et nous obtenons donc une contradiction.

Par conséquent, $[f(u_1, \dots, u_n)](t)$ est SN et selon la Remarque 6.2(2), $f(u_1, \dots, u_n)$ est SC.

(\Rightarrow) si $f(u_1, \dots, u_n) : A$ est SC alors $u_i : A_i$, $i = 1, \dots, n$ sont SC

Afin de prouver que u_i , $i = 1, \dots, n$ sont SC, par la Remarque 6.2(2), nous devons montrer que pour tous les termes SC t_i nous avons $[u_i](t_i) : C_i$ qui est SN.

Par hypothèse d'induction, $f(t_1, \dots, t_n) : B$ est SC si $t_i : B_i$ sont SC. Nous avons par la Remarque 6.2(4) que $[f(u_1, \dots, u_n)](f(t_1, \dots, t_n)) : C$ est SC et donc SN.

Si nous supposons qu'un des $[u_i](t_i)$ n'est pas SN alors nous obtenons que le terme $f([u_1](t_1), \dots, [u_n](t_n))$ n'est pas SN. Puisque nous avons la réduction

$$\begin{aligned} & [f(u_1, \dots, u_n)](f(t_1, \dots, t_n)) \\ & \xrightarrow{\text{Congruence}} f([u_1](t_1), \dots, [u_n](t_n)) \end{aligned}$$

alors $[f(u_1, \dots, u_n)](f(t_1, \dots, t_n))$ n'est pas SN et nous obtenons donc une contradiction.

Par conséquent, $[u_i](t_i)$, $i = 1, \dots, n$ sont SN et d'après la Remarque 6.2(2), u_i , $i = 1, \dots, n$ sont SC.

□

Lemme 6.7 *Etant donné les contextes E et F et les termes l, r et t tels que $F|_l \cdot E \vdash r : B$, $F \vdash l : A$ et $E \vdash t : A$, nous considérons la substitution typée σ telle que $\{\sigma\} = \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t)$. Si les termes σr et l, t sont SC, alors le terme $[l_{[F|_l]} \rightarrow r](t)$ est SC.*

Preuve : Conformément à l'algorithme de filtrage, nous avons $E \vdash \sigma$. Puisque $\text{Dom}(\sigma) = F|_l$ alors, par le Lemme 6.1, $E \vdash \sigma r : B$ et puisque σr est SC alors, par le Lemme 6.4, $\{\sigma r\} : B$ est SC.

Nous considérons $B = B_1 \multimap \dots B_l \multimap K$, avec K atomique. Nous considérons les termes SC $v_1 : B_1, \dots, v_l : B_l$. Selon la Remarque 6.2(2),

$$[\dots [[\sigma r](v_1)](v_2) \dots](v_l) : K, \quad (6.1)$$

est SN et

$$[\dots [[\{\sigma r\}](v_1)](v_2) \dots](v_l) : K \quad (6.2)$$

est SN.

Nous avons $E \vdash [l_{[F|_l]} \rightarrow r](t) : B$ et nous devons montrer que

$$[\dots [[[l_{[F|_l]} \rightarrow r](t)](v_1)](v_2) \dots](v_l) : K \quad (6.3)$$

est SN et par la Remarque 6.2(2), nous pouvons conclure la preuve du lemme.

Puisque (6.1) est SN, d'après la Remarque 6.2(5), tous ses sous-termes sont SN. Ainsi, les termes σr et v_1, v_2, \dots, v_l sont SN. Puisque l et t sont SC alors, par le Lemme 6.2, l et t sont SN. Nous avons immédiatement que r est SN.

Par conséquent, une réduction infinie de (6.3) ne peut pas consister entièrement en contractions dans l, r, t, v_1, \dots, v_l et une telle réduction doit avoir la forme :

$$\begin{aligned} [\dots [[[l_{[F|_l]} \rightarrow r](t)](v_1)](v_2) \dots](v_l) &\xrightarrow{*}_{\rho} [\dots [[[l_{[F|_l]} \rightarrow r'](t')](v'_1)](v'_2) \dots](v'_l) \\ &\xrightarrow{\text{Fire}} [\dots [[\{\sigma' r'\}](v'_1)](v'_2) \dots](v'_l) \\ &\xrightarrow{*}_{\rho} \dots \end{aligned}$$

où $r \xrightarrow{*}_{\rho} r'$, $t \xrightarrow{*}_{\rho} t'$, $v_k \xrightarrow{*}_{\rho} v'_k$ et le filtrage $l \ll_{\emptyset}^? t'$ n'échoue pas et a la solution σ' .

Puisque $l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ et que nous utilisons le filtrage syntaxique alors, pour tous les termes l , t et t' tels que $t \xrightarrow{\rho} t'$ et $\text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t) = \{\mu\}$ avec $\mu = \langle x_1/t_1, \dots, x_n/t_n \rangle$, si $l \ll_{\emptyset}^? t'$ n'échoue pas, alors nous avons $\text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t') = \{\mu'\}$ avec $\mu' = \langle x_1/t'_1, \dots, x_n/t'_n \rangle$ et $t_i \xrightarrow{\rho} t'_i$, $i = 1, \dots, n$.

Selon cette dernière remarque, si $\sigma = \langle x_1/u_1, \dots, x_n/u_n \rangle$ alors $\sigma' = \langle x_1/u'_1, \dots, x_n/u'_n \rangle$ avec $u_i \xrightarrow{\rho} u'_i$ et par le Lemme 3.11 nous obtenons $\sigma r \xrightarrow{\rho} \sigma' r'$.

Ainsi, nous pouvons construire une réduction infinie à partir de (6.2) :

$$\begin{aligned} [\dots [[\{\sigma r\}](v_1)](v_2) \dots](v_l) &\xrightarrow{*}_{\rho} [\dots [[\{\sigma' r'\}](v'_1)](v'_2) \dots](v'_l) \\ &\xrightarrow{*}_{\rho} \dots \end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que (6.2) est SN et par conséquent, (6.3) doit être SN.

□

Lemme 6.8 *(tout terme typable est SC)*

Pour tout ρ -terme typé t tel que $E \vdash t : B$ nous avons :

- t est SC,*
- Pour toutes les substitutions SC σ_j , $j = 1, \dots, m$ telles que $E' \vdash \sigma_j$, le terme $t^* = \sigma_1 \dots \sigma_m t$ avec $E' \vdash t^* : B$ est SC, où $E = \text{Dom}(\sigma_1) \dots \text{Dom}(\sigma_m) \cdot E'$.*

Preuve : Le point (a) est un cas spécial de (b) quand $\sigma_i, i = 1, \dots, n$ est la substitution identité.

Nous prouvons (b) par induction structurelle sur t .

1. t est une variable $x_i^j \in \text{Dom}(\sigma_j)$, et $\sigma_j = \langle x_1^j/u_1^j, \dots, x_n^j/u_n^j \rangle$.

Dans ce cas t^* est u_i^j et donc, est SC.

2. t est une variable distincte de $x \in \bigcup \text{Dom}(\sigma_j)$.

Dans ce cas t^* est t et donc, il est SC par le Lemme 6.2 avec $n = 0$.

3. $t = f(t_1, \dots, t_k)$.

Dans ce cas $t^* = f(t_1^*, \dots, t_k^*)$. Par hypothèse d'induction, t_1^*, \dots, t_k^* sont SC, et ainsi, d'après le Lemme 6.6, t^* est SC.

4. $t = \{t_1, \dots, t_k\}$.

Dans ce cas $t^* = \{t_1^*, \dots, t_k^*\}$. Par hypothèse d'induction, t_1^*, \dots, t_k^* sont SC, et ainsi, d'après le Lemme 6.4, t^* est SC.

5. $t = [t_1](t_2)$.

Dans ce cas $t^* = [t_1^*](t_2^*)$. Par hypothèse d'induction, t_1^*, t_2^* sont SC, et ainsi, conformément à la Remarque 6.2(4), t^* est SC.

6. $t : B = t_1[F|_{t_1}] \rightarrow t_2$.

Nous avons $F \vdash t_1 : A$ et $F|_{t_1} \cdot E \vdash t_2 : C$ et $B = A \multimap C$.

Dans ce cas $t^* = t_1^* \rightarrow t_2^*$ si nous négligeons les changements de noms des variables liées. Conformément à la définition de l'application de substitution, $t_1^* = t_1$.

Nous devons montrer que pour tous les termes SC u tels que $E' \vdash u : A$, le terme $[t^*](u)$ est SC ou d'une manière équivalente que $[t_1 \rightarrow t_2^*](u)$ est SC.

Si le filtrage $(t_1 \ll_{\emptyset}^? u)$ échoue alors le résultat est \emptyset et la propriété est évidemment vraie.

On doit noter que si $l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ et si le filtrage syntaxique est considéré alors, par le Lemme 6.6, pour tous termes SC l et t et la substitution $\{\mu\} = \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t)$ nous obtenons que μ est SC.

Nous considérons $\{\mu\} = \text{Solution}(t_1 \ll_{\emptyset}^? u)$ et conformément à l'algorithme de filtrage, $E' \vdash \mu$ et puisque $t_1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ et u sont SC alors μ est SC. Par le Lemme 6.1, $F|_{t_1} \cdot E' \vdash t_2^* : C$ et puisque $\text{Dom}(\mu) = F|_{t_1}$ alors $E' \vdash \mu t_2^* : C$. Par l'hypothèse d'induction (b) en utilisant la substitution $\mu\sigma_1 \dots \sigma_m$ nous obtenons que μt_2^* est SC et ainsi, par le Lemme 6.7, $[t^*](u)$ est SC.

□

Théorème 6.2 *Le ρ_{\emptyset} -calcul est fortement normalisable.*

Preuve : Le résultat est obtenu immédiatement par les Lemmes 6.8 et 6.2. □

6.8 Le typage des ρ -termes non-restreints

Nous avons proposé dans les sections précédentes un système de types pour les termes de $\varrho_{\emptyset}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et nous allons étendre ce système pour le cas général de termes de $\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$. Nous considérons le calcul $(\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \emptyset, \mathcal{S})$, appelé aussi ρ_{\emptyset}^+ -calcul, généralisant le ρ_{\emptyset} -calcul avec une stratégie \mathcal{S} arbitraire.

La syntaxe du ρ_0^+ -calcul typé

Nous obtenons donc une nouvelle syntaxe pour le ρ_0^+ -calcul typé généralisant celle du ρ_0 -calcul typé présentée dans la Section 6.1 :

Définition 6.10 *Etant donné un ensemble de variables \mathcal{X} et un ensemble de symboles $\mathcal{F} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{F}_i$. Si nous notons K tout type atomique, alors la syntaxe du calcul $(\rho(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \emptyset, \mathcal{S})$ simplement typé est définie récursivement par la grammaire suivante :*

Types	$T \quad ::= \quad K \mid T \multimap T$
Contextes	$E \quad ::= \quad x : T \mid E \dots E$
Termes	$t \quad ::= \quad x \mid f(t, \dots, t) \mid \{t, \dots, t\} \mid t_{[E]} \rightarrow t \mid t$

où $x \in \mathcal{X}$ et $f \in \mathcal{F}$.

La seule différence par rapport à la Définition 6.2 est l'élimination de la condition que le membre gauche des règles de réécriture est un terme du premier ordre et nous analysons l'influence de cette nouvelle syntaxe sur les règles de typage et d'évaluation du calcul.

Discussion sur les règles du ρ_0^+ -calcul

Puisque nous considérons tous les termes de $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et donc les règles de réécriture ayant un ensemble dans le membre gauche, nous devons introduire et analyser le comportement de la règle d'évaluation $Switch_L$ qui devient dans un cadre typé :

$$Switch_L \quad \{u_1, \dots, u_n\}_{[E]} \rightarrow v \implies \{u_1_{[E]} \rightarrow v, \dots, u_n_{[E]} \rightarrow v\}$$

Les autres règles d'évaluation sont celles présentées dans la Figure 6.4 et puisque nous souhaitons avoir un calcul confluente, nous considérons une des stratégies d'évaluation confluentes proposées dans le Chapitre 3. La règle d'évaluation $Fire$ est donc appliquée pour une application de la forme $[l \rightarrow r](t)$ seulement si l est un terme du premier ordre et ainsi, le même mécanisme de filtrage que dans le ρ_0 -calcul peut être utilisé.

Nous analysons maintenant la possibilité d'employer le même ensemble de règles de typage que pour le ρ_0 -calcul.

Nous devons mentionner d'abord que dans la règle de typage $Rule$ il est essentiel que seule la restriction $E|_l$ du contexte E de l soit éliminée du contexte F de r afin d'obtenir le contexte pour la règle de réécriture $l \rightarrow r$. Néanmoins, le contexte local de cette règle de réécriture peut être $E|_l$, comme imposé par la règle de typage $Rule$, mais il peut être un tout autre contexte incluant ce contexte, comme dans la nouvelle règle de typage

$$Rule_s \quad \frac{E \vdash l : A \quad E|_l \cdot F \vdash r : B}{F \vdash (l_{[E]} \rightarrow r) : A \multimap B}$$

Les mêmes résultats sur la préservation du type et sur la normalisation forte du calcul sont obtenus si cette dernière règle de typage est utilisée à la place de la règle de typage $Rule$.

Malheureusement, si nous utilisons une approche basée sur la règle de typage $Rule$ il est clair que la règle d'évaluation $Switch_L$ ne préserve pas le type.

Considérons, par exemple, le terme $\{x, y\}_{[x:A.y:A]} \rightarrow x$ qui a le type $A \multimap A$ dans le contexte vide conformément à la règle de typage $Rule$. Ce terme est réduit par la règle d'évaluation

$Switch_L$ en $\{x_{[x:A \cdot y:A]} \rightarrow x, y_{[x:A \cdot y:A]} \rightarrow x\}$ et aucune des deux règles de réécriture dans l'ensemble ne peut être typée par la règle $Rule$ en raison du contexte $x : A \cdot y : A$ qui devrait contenir seulement la variable x et respectivement y .

L'utilisation de la règle de typage $Rule_s$ nous permet d'éliminer cette restriction et dans ce cas nous pouvons typer la règle de réécriture $x_{[x:A \cdot y:A]} \rightarrow x$ dans le contexte vide. Mais le membre gauche de la deuxième règle de réécriture de l'ensemble précédent est la variable y et donc le contexte nous permettant de typer cette règle est obtenu en enlevant la variable y du contexte utilisé pour typer le membre droit x . Ainsi, nous pouvons typer la règle de réécriture $y_{[x:A \cdot y:A]} \rightarrow x$ dans tout contexte contenant $x : A$ mais pas dans le contexte vide et donc même en utilisant la règle de typage $Rule_s$ le type n'est pas préservé.

Les règles de typage du ρ_\emptyset^+ -calcul

La non-préservation du type dans une approche utilisant les règles présentées dans la section précédente est due à la non-préservation des variables libres par la réduction. La solution naturelle est l'utilisation de la notion de variables présentes introduite dans la Définition 3.13.

Nous modifions ainsi la règle de typage $Rule$ et nous introduisons la règle :

$$Rule_{pv} \quad \frac{E \vdash l : A \quad E|_{PV(l)} \cdot F \vdash r : B}{F \vdash (l_{[E]} \rightarrow r) : A \multimap B}$$

Cette fois-ci nous n'avons pas imposé la restriction $E|_{PV(l)}$ du contexte E dans la règle de réécriture et ceci nous permet l'utilisation de la règle d'évaluation $Switch_L$ distribuant le même contexte local dans toutes les règles de réécriture.

Nous considérons ainsi l'ensemble de règles de typage de la Figure 6.1 où la règle $Rule$ est remplacée par la règle $Rule_{pv}$ et nous notons par ST_ρ^+ le système de types ainsi obtenu. Nous montrons qu'en utilisant la même notion de terme *bien typé* que pour le ρ_\emptyset -calcul (Définition 6.5), le type est préservé par toutes les règles d'évaluation du calcul $(\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \emptyset, \mathcal{S})$.

La préservation du type

Si nous reprenons l'exemple de la règle de réécriture $\{x, y\}_{[x:A \cdot y:A]} \rightarrow x$ nous pouvons remarquer que ce ρ -terme n'est pas bien typé dans le contexte vide puisque $x : A \cdot y : A|_{PV(\{x, y\})} = \emptyset$. Ainsi, le contexte F de la règle de typage $Rule_{pv}$ est instancié en $x : A$ qui est donc le contexte nous permettant d'inférer le type $A \multimap A$ pour la règle de réécriture $\{x, y\}_{[x:A \cdot y:A]} \rightarrow x$. Comme nous l'avons déjà précisé, ce dernier contexte nous permet aussi d'obtenir le type $A \multimap A$ pour les deux règles de réécriture $x_{[x:A \cdot y:A]} \rightarrow x$ et $y_{[x:A \cdot y:A]} \rightarrow x$ et donc, le type est préservé en utilisant la règle de typage $Rule_{pv}$.

Théorème 6.3 *Dans le système de types ST_ρ^+ , pour tous ρ -termes a et a' de $\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$, si $a \longrightarrow_\rho a'$ et $E \vdash a : A$, alors $E \vdash a' : A$.*

Preuve : Nous procédons de la même manière que dans le cas du ρ_\emptyset -calcul et nous prouvons que le membre gauche et le membre droit de chaque règle d'évaluation ont le même type dans un contexte donné.

Pour toutes les règles d'évaluation sauf $Switch_L$ le résultat est obtenu exactement comme dans le Théorème 6.1.

Pour la règle d'évaluation $Switch_L$ nous procédons similairement en utilisant la définition des variables présentes.

$$Switch_L \quad \{u_1, \dots, u_n\}_{[E]} \rightarrow v \implies \{u_1[E] \rightarrow v, \dots, u_n[E] \rightarrow v\}$$

Nous notons $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ et nous considérons le type A tel que $F \vdash u_{[E]} \rightarrow v : A$. En utilisant la règle de typage $Rule_{pv}$ nous inférons $A = B \multimap C$ et $E|_{PV(u)} \cdot F \vdash v : C$, $E \vdash u : B$.

Par la règle de typage Set nous avons $E \vdash u_i : B$, $i = 1, \dots, n$ et par la règle de typage $Rule_{pv}$ appliquée n fois nous obtenons $F_i \vdash u_{i[E]} \rightarrow v : B \multimap C$, $i = 1, \dots, n$, avec $E|_{PV(u)} \cdot F = E|_{PV(u_i)} \cdot F_i$.

Conformément à la Définition 3.13 nous avons $PV(\{u_1, \dots, u_n\}) \subseteq PV(u_i)$ et donc, nous obtenons $E|_{PV(u)} \subseteq E|_{PV(u_i)}$ et $F_i \subseteq F$. Conformément à la Définition 6.5 nous avons $F \vdash u_{i[E]} \rightarrow v : B \multimap C$, $i = 1, \dots, n$.

Finalement, la règle de typage Set mène à :

$$F \vdash \{u_1[E] \rightarrow v, \dots, u_n[E] \rightarrow v\} : A.$$

□

Nous pouvons imposer la restriction aux variables présentes pour le contexte local dans la règle de typage $Rule_{pv}$ qui deviendrait :

$$Rule'_{pv} \quad \frac{E \vdash l : A \quad E|_{PV(l)} \cdot F \vdash r : B}{F \vdash (l_{[E|_{PV(l)]}} \rightarrow r) : A \multimap B}$$

Comme nous l'avons expliqué au début de cette section une telle règle de typage n'est pas suffisante pour assurer la préservation du type dans le cas de la règle d'évaluation $Switch_L$ mais nous pourrions introduire une nouvelle règle

$$Switch'_L \quad \{u_1, \dots, u_n\}_{[E]} \rightarrow v \implies \{u_1[E|_{PV(u_1)}] \rightarrow v, \dots, u_n[E|_{PV(u_n)}] \rightarrow v\}$$

Cette règle d'évaluation est plus complexe que la règle $Switch_L$ et donc plus difficile à implanter mais peut être employée si nous souhaitons avoir une information plus précise sur les variables utilisées dans le contexte local des règles de réécriture.

La normalisation forte du calcul $(\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \emptyset, \mathcal{S})$ typé avec \mathcal{S} représentant une des stratégies confluentes est montrée exactement de la même façon que pour le ρ_\emptyset -calcul et nous obtenons ainsi plusieurs instances du calcul $(\varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \emptyset, \mathcal{S})$ garantissant la terminaison et l'unicité des formes normales.

Conclusion

Nous avons proposé un système de types pour le ρ_\emptyset -calcul en précisant la syntaxe, les règles de typage et les règles d'évaluation.

Nous avons adapté la syntaxe du ρ -calcul non-typé en ajoutant les types et les contextes ainsi qu'en introduisant les règles de réécriture avec contexte local. Ce contexte correspond à l'information de type donnée dans une λ -abstraction et il est employé pour déterminer le contexte global permettant de typer la règle de réécriture l'utilisant. Les règles d'évaluation du calcul non-typé sont modifiées afin de prendre en compte la nouvelle syntaxe et particulièrement le contexte local des règles de réécriture. En se limitant à des ensembles ayant tous les éléments d'un même type et avec un bon choix pour les règles de typage, le ρ_\emptyset -calcul typé est terminant et préserve le type.

Ces résultats ont été présentés à WRLA2000 [CK00].

Chapitre 7

Le calcul de réécriture avec substitutions explicites - le $\rho\sigma$ -calcul

Dans le ρ -calcul tel que nous l'avons présenté jusqu'ici l'application des substitutions n'était pas une partie du calcul mais était décrite à son méta-niveau. Afin de rendre explicite l'application de substitution, nous utilisons une approche similaire aux différentes versions de λ -calcul avec substitutions explicites [HL89, ACCL90] et nous définissons une version explicite du ρ -calcul, appelée le $\rho\sigma$ -calcul.

Nous étendons la syntaxe du ρ -calcul en introduisant les définitions des substitutions et un opérateur d'application de substitution. Nous nous limitons dans cette présentation à une version avec substitutions explicites du $\rho\sigma$ -calcul où les membres gauches des règles de réécriture sont des termes du premier ordre. Les règles d'évaluation du $\rho\sigma$ -calcul ne sont pas modifiées mais des nouvelles règles sont introduites pour décrire le comportement des substitutions. Le calcul de substitution et la preuve de confluence du $\rho\sigma$ -calcul sont basés sur les approches utilisées dans [CHL96] et [Pag97].

7.1 La syntaxe

La présentation du $\rho\sigma$ -calcul est basée sur une notation de de Bruijn ([dB72]) où les noms des variables sont remplacés par des entiers représentant le “degré” d'abstraction de la variable. Ainsi, l' α -conversion utilisée dans le ρ -calcul pour éviter la capture des variables n'est plus nécessaire, le renommage étant décrit par des incréments et des décréments des entiers représentant les variables.

Nous notons par $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble de termes construits en utilisant une signature \mathcal{F} et l'ensemble d'entiers naturels non nuls \mathbb{N}^* de la même manière que les termes de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathcal{X})$ sont construits en utilisant les variables d'un ensemble \mathcal{X} .

Définition 7.1 *Etant donné un ensemble de variables $\mathcal{X} = \mathcal{X}_t \cup \mathcal{X}_s$ et un ensemble de symboles $\mathcal{F} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{F}_i$ tel que pour tout m , \mathcal{F}_m est le sous-ensemble de symboles d'arité m . L'ensemble de termes et substitutions du $\rho\sigma$ -calcul, noté $\mathcal{Q}^\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{X})$, est le plus petit ensemble tel que :*

- les variables de \mathcal{X}_t sont des ρ -termes (méta-variables de termes),
- n ($n \in \mathbb{N}^*$) est un terme (indice de de Bruijn),
- si t_1, \dots, t_m sont des termes alors $\{t_1, \dots, t_m\}$ est un terme,
- si t_1, \dots, t_m sont des termes et $f \in \mathcal{F}_m$ alors $f(t_1, \dots, t_m)$ est un terme,

- si t et u sont des termes alors $[t](u)$ est un terme,
- si $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathbb{N}^*)$ et u sont des termes alors $t \rightarrow_n u$ est un terme où n est l'indice maximal dans t ,
- si t est un terme et s est une substitution alors $t\langle s \rangle$ est un terme (application de substitution),

et

- les variables de \mathcal{X}_s sont des ρ -termes (méta-variables de substitutions),
- \mathbb{ID} est une substitution (identité),
- \uparrow est une substitution (shift),
- si s est une substitution $\uparrow(s)$ est une substitution (lift),
- si t est un terme et s est une substitution alors $(t.s)$ est une substitution,
- si s_1 et s_2 sont des substitutions alors $(s_1 \circ s_2)$ est une substitution.

La syntaxe du $\rho\sigma$ -calcul est donc définie récursivement par la grammaire suivante :

Termes $t \quad ::= \quad x_t \mid n \mid f(t, \dots, t) \mid \{t, \dots, t\} \mid u \rightarrow_m t \mid t \mid t\langle s \rangle$

Substitutions $s \quad ::= \quad x_s \mid \mathbb{ID} \mid \uparrow \mid \uparrow(s) \mid t.s \mid s \circ s$

où $x_t \in \mathcal{X}_t$, $x_s \in \mathcal{X}_s$, $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathbb{N}^*)$, m est l'indice maximal dans u et $f \in \mathcal{F}$.

Nous abrégeons par \uparrow^n la composition de n symboles \uparrow (i.e. $\uparrow \circ \dots \circ \uparrow$) et par $\uparrow^n(s)$ l'application n fois de \uparrow (i.e. $\uparrow(\dots(\uparrow(s)\dots))$).

La transformation d'un terme avec des noms de variables du ρ -calcul dans un terme du $\rho\sigma$ -calcul utilisant des indices entiers est similaire à la transformation d'un λ -terme en un λ_{DB} -terme. A cause de la possibilité d'avoir plusieurs variables liées dans une règle de réécriture par rapport à une seule dans une λ -abstraction, la transformation d'une règle de réécriture est légèrement plus élaborée que la transformation de l'abstraction du λ -calcul.

Définition 7.2 Nous considérons une liste de variables $x_1 \dots x_n$ appelé référentiel. Etant donné un référentiel \mathcal{R} , nous définissons récursivement la traduction d'un ρ -terme t , noté $tr(t, \mathcal{R})$:

1. $tr(x, \mathcal{R}) = j$, où j représente la première position de x dans \mathcal{R} ,
2. $tr(f(t_1, \dots, t_n), \mathcal{R}) = f(tr(t_1, \mathcal{R}), \dots, tr(t_n, \mathcal{R}))$,
3. $tr([a](b), \mathcal{R}) = [tr(a, \mathcal{R})](tr(b, \mathcal{R}))$,
4. $tr(l \rightarrow r, \mathcal{R}) = tr(l, Var(l). \mathcal{R}) \rightarrow_{\|Var(l)\|} tr(r, Var(l). \mathcal{R})$,

avec $Var(l)$ représentant la liste des variables libres du terme l (i.e. l'ensemble $\mathcal{V}ar(l)$ transformé en liste) et $\|Var(l)\|$ sa longueur.

Il est évident qu'en fonction de l'ordre des variables libres du membre gauche d'une règle de réécriture on peut obtenir plusieurs représentations de la règle de réécriture.

Exemple 7.1 Si nous considérons le ρ -terme $[f(x, y) \rightarrow g(x, y, z)](f(a, b))$, sa transformation dans le référentiel $z.Nil$ est $[f(1, 2) \rightarrow_2 g(1, 2, 3)](f(a, b))$ ou bien $[f(2, 1) \rightarrow_2 g(2, 1, 3)](f(a, b))$.

7.2 Le filtrage

Nous considérons un algorithme de filtrage qui retourne un résultat de la forme $t_1 \dots t_n.\mathbb{I}\mathbb{D}$ avec t_1, \dots, t_n des termes de $\varrho^\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{X})$.

Une approche possible consiste à transformer les termes $l, t \in \varrho^\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ d'un problème de filtrage ($l \ll_\emptyset^? t$) en $l^x, t^x \in \varrho(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ en remplaçant les indices $1, \dots, n$ par les variables x_1, \dots, x_n et résoudre le problème de filtrage ($l^x \ll_\emptyset^? t^x$). Si l'ensemble de règles *SyntacticMatching* de la Section 2.5 appliqué pour ce dernier problème de filtrage mène à un résultat $\langle x_1/t_1^x, \dots, x_n/t_n^x \rangle$ (où nous considérons $t_i^x = x_i$ pour les variables n'apparaissant pas dans la solution) alors le problème ($l \ll_\emptyset^? t$) initial a comme solution la substitution $t_1 \dots t_n.\mathbb{I}\mathbb{D}$ où t_i représente le terme t_i^x avec les variables x_1, \dots, x_n remplacées par les indices $1, \dots, n$. Comme dans le cas non-explicite nous définissons la fonction *Solution*($l \ll_\emptyset^? t$) qui retourne l'ensemble de toutes les solutions de ($l \ll_\emptyset^? t$) et donc l'ensemble vide quand l'algorithme de filtrage échoue.

Nous pouvons adapter l'algorithme de filtrage présenté dans la Section 2.5 afin de manipuler des termes utilisant des entiers à la place des variables comme montré dans la Figure 7.1.

<i>Decomposition</i>	$(f(t_1, \dots, t_n) \ll_\emptyset^? f(t'_1, \dots, t'_n)) \wedge P$	\mapsto	$\bigwedge_{i=1 \dots n} t_i \ll_\emptyset^? t'_i \wedge P$
<i>SymbolClash</i>	$(f(t_1, \dots, t_n) \ll_\emptyset^? g(t'_1, \dots, t'_m)) \wedge P$	\mapsto	F si $f \neq g$
<i>MergingClash</i>	$(m \ll_\emptyset^? t) \wedge (m \ll_\emptyset^? t') \wedge P$	\mapsto	F si $t \neq t', m \in \mathbb{N}^*$
<i>SymbolVariableClash</i>	$(f(t_1, \dots, t_n) \ll_\emptyset^? m) \wedge P$	\mapsto	F si $m \in \mathbb{N}^*$

FIG. 7.1: *SyntacticMatchingSigma* - Règles pour le filtrage syntaxique

Le résultat de la Proposition 2.1 peut être étendu pour une équation de filtrage avec les termes de $\varrho^\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{X})$:

Proposition 7.1 *La forme normale de tout problème de filtrage $t \ll_\emptyset^? t'$ calculée par les règles *SyntacticMatchingSigma* existe et est unique. Après avoir enlevé de la forme normale toute équation dupliquée, si le système résultant est :*

1. **F**, alors il n'y a pas de filtre de t à t' et $\text{Solution}(t \ll_\emptyset^? t') = \emptyset$,
2. de la forme $1 \ll_\emptyset^? t_1 \wedge \dots \wedge n \ll_\emptyset^? t_n$ alors la substitution $\sigma = t_1 \dots t_n.\mathbb{I}\mathbb{D}$ est l'unique filtre de t à t' et $\text{Solution}(t \ll_\emptyset^? t') = \{\sigma\}$

Nous pouvons noter que nous n'enlevons pas les équations triviales $n \ll_\emptyset^? n$ de la forme normale d'un système de filtrage. De plus, si le système ne contient aucune équation ($n = 0$) alors la substitution obtenue est $\mathbb{I}\mathbb{D}$.

7.3 Les règles d'évaluation

Les règles d'évaluation de base du $\rho\sigma$ -calcul présentées dans la Figure 7.2 sont celles du ρ_0 -calcul et nous introduisons les règles d'évaluation dans la Figure 7.3 décrivant l'application de substitution. Ce sous-système est appelé le σ_ρ -calcul ou le σ -calcul.

La règle *Fire* est celle qui déclenche l'application de la substitution obtenue en filtrant le membre gauche de la règle de réécriture et l'argument de l'application au membre droit de la

<i>Fire</i>	$[l \rightarrow_n r](t)$	$\Longrightarrow \{r\langle\sigma\rangle\}$ avec $\sigma \in \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t)$
<i>Congruence</i>	$[f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n))$	$\Longrightarrow \{f([u_1](v_1), \dots, [u_n](v_n))\}$
<i>Congruence_fail</i>	$[f(u_1, \dots, u_n)](g(v_1, \dots, v_m))$	$\Longrightarrow \emptyset$
<i>Distrib</i>	$[\{u_1, \dots, u_n\}](v)$	$\Longrightarrow \{[u_1](v), \dots, [u_n](v)\}$
<i>Batch</i>	$[v](\{u_1, \dots, u_n\})$	$\Longrightarrow \{[v](u_1), \dots, [v](u_n)\}$
<i>Switch_R</i>	$u \rightarrow_n \{v_1, \dots, v_m\}$	$\Longrightarrow \{u \rightarrow_n v_1, \dots, u \rightarrow_n v_m\}$
<i>OpOnSet</i>	$f(v_1, \dots, \{u_1, \dots, u_m\}, \dots, v_n) \Longrightarrow$ $\{f(v_1, \dots, u_1, \dots, v_n), \dots, f(v_1, \dots, u_m, \dots, v_n)\}$	
<i>Flat</i>	$\{u_1, \dots, \{v_1, \dots, v_n\}, \dots, u_m\}$	$\Longrightarrow \{u_1, \dots, v_1, \dots, v_n, \dots, u_m\}$

FIG. 7.2: Les règles d'évaluation de base du $\rho\sigma$ -calcul

règle de réécriture. Le σ_ρ -calcul décrit explicitement l'application de cette substitution. Les autres règles d'évaluation de base ont exactement la même fonctionnalité que dans le $\rho\emptyset$ -calcul.

Les règles d'évaluation du σ_ρ -calcul sont similaires à celles du σ_{\uparrow} -calcul de substitution du $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul (voir Section 1.3.5). Par rapport à ce dernier calcul nous adaptons les règles *lambda* et *app* pour la syntaxe du $\rho\sigma$ -calcul et nous ajoutons les règles *set* et *op*.

Nous pouvons aussi voir les règles d'évaluation mentionnées précédemment comme des cas particuliers de la règle f_{\uparrow} du Γ_{\uparrow} -calcul ([Pag98]). Dans ce calcul, à chaque symbole d'arité n est associée une liste de n entiers appelés l'*arité de liaison* du symbole. Intuitivement, l'arité de liaison d'un opérateur représente le nombre d'indices de de Bruijn liés dans chacun de ses arguments. Pour une discussion plus détaillée sur l'arité de liaison on peut se référer à [Pag98].

Dans le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul, si nous considérons le terme λt nous pouvons dire que l'opérateur λ lie l'indice 1 dans le terme t et donc, a l'arité de liaison (1). Le symbole unaire λ du $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul est remplacé dans le $\rho\sigma$ -calcul par le symbole binaire \rightarrow_n dont l'arité de liaison est (n, n) . Tout opérateur fonctionnel a une arité de liaison $(0, \dots, 0)$.

Définition 7.3 *Etant donné un ensemble de symboles de fonctions \mathcal{F} , un ensemble de variables \mathcal{X} , nous appelons $\rho\sigma$ -calcul un calcul défini par :*

- l'ensemble de termes $\varrho^\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{X})$,
- la théorie \emptyset (filtrage syntaxique),
- les règles d'évaluation de base de la Figure 7.2,
- les règles d'évaluation pour l'application de substitution de la Figure 7.3,
- une stratégie d'évaluation \mathcal{S} qui guide l'application des règles d'évaluation.

<i>lam</i>	$(u \rightarrow_n v)\langle s \rangle$	$\Rightarrow u\langle \uparrow^n (s) \rangle \rightarrow_n v\langle \uparrow^n (s) \rangle$
<i>app</i>	$[u](v)\langle s \rangle$	$\Rightarrow [u\langle s \rangle](v\langle s \rangle)$
<i>clos</i>	$u\langle s \rangle\langle t \rangle$	$\Rightarrow u\langle s \circ t \rangle$
<i>vs1</i>	$n\langle \uparrow \rangle$	$\Rightarrow (n+1)$
<i>vs2</i>	$n\langle \uparrow \circ s \rangle$	$\Rightarrow (n+1)\langle s \rangle$
<i>fv</i>	$1\langle u.s \rangle$	$\Rightarrow u$
<i>fv1</i>	$1\langle \uparrow (s) \rangle$	$\Rightarrow 1$
<i>fv2</i>	$1\langle \uparrow (s) \circ t \rangle$	$\Rightarrow 1\langle t \rangle$
<i>rv</i>	$(n+1)\langle u.s \rangle$	$\Rightarrow n\langle s \rangle$
<i>rv1</i>	$(n+1)\langle \uparrow (s) \rangle$	$\Rightarrow n\langle s \circ \uparrow \rangle$
<i>rv2</i>	$(n+1)\langle \uparrow (s) \circ t \rangle$	$\Rightarrow n\langle s \circ (\uparrow \circ t) \rangle$
<i>id</i>	$u\langle \mathbb{I}\mathbb{D} \rangle$	$\Rightarrow u$
<i>set</i>	$\bigcup_{i=1}^n \{u_i\}\langle s \rangle$	$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n \{u_i\langle s \rangle\}$
<i>ass</i>	$(s \circ t) \circ v$	$\Rightarrow s \circ (t \circ v)$
<i>map</i>	$(u.s) \circ t$	$\Rightarrow u\langle t \rangle.(s \circ t)$
<i>sc</i>	$\uparrow \circ (u.s)$	$\Rightarrow s$
<i>sl1</i>	$\uparrow \circ \uparrow (s)$	$\Rightarrow s \circ \uparrow$
<i>sl2</i>	$\uparrow \circ \uparrow (s) \circ t$	$\Rightarrow s \circ (\uparrow \circ t)$
<i>l1</i>	$\uparrow (s) \circ \uparrow (t)$	$\Rightarrow \uparrow (s \circ t)$
<i>l2</i>	$\uparrow (s) \circ (\uparrow (t) \circ v)$	$\Rightarrow \uparrow (s \circ t) \circ v$
<i>le</i>	$\uparrow (s) \circ (u.t)$	$\Rightarrow u.(s \circ t)$
<i>il</i>	$\mathbb{I}\mathbb{D} \circ s$	$\Rightarrow s$
<i>ir</i>	$s \circ \mathbb{I}\mathbb{D}$	$\Rightarrow s$
<i>li</i>	$\uparrow (\mathbb{I}\mathbb{D})$	$\Rightarrow \mathbb{I}\mathbb{D}$
<i>op</i>	$f(u_1, \dots, u_n)\langle s \rangle$	$\Rightarrow f(u_1\langle s \rangle, \dots, u_n\langle s \rangle)$

FIG. 7.3: Les règles d'évaluation du σ_ρ -calcul

7.4 Propriétés du $\rho\sigma$ -calcul

Dans cette section nous analysons quelques propriétés du $\rho\sigma$ -calcul et de ses sous-calculs et nous montrons en particulier que le $\rho\sigma$ -calcul est confluent dans les mêmes conditions que le $\rho\theta$ -calcul.

Toutes les définitions de termes ρ -préfiltrables et ρ -calculables de la Section 3.3.2 peuvent être utilisées dans un contexte explicite en considérant des indices de de Bruijn à la place des variables. Les mêmes remarques que dans le cas non-explicite peuvent être faites pour les termes contenant des indices de de Bruijn et des applications de substitution.

Remarque 7.1 *Si $l \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\mathbb{N}^*)$ subsume faiblement t , alors pour toute position non-fonctionnelle (i.e. la position d'un indice, d'une application, d'une abstraction, d'un ensemble ou d'une application de substitution) dans t la position correspondante dans l , si elle existe, est une position variable, c'est-à-dire la position d'un indice. Ainsi, si la position de tête de t n'est pas une position fonctionnelle alors l est un indice.*

Remarque 7.2 Si les termes l et t sont ρ -préfiltrables, le filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ peut échouer seulement à cause des symboles fonctionnels différents à la même position des termes l et t .

L'application de la règle d'évaluation *Fire* est guidée par une stratégie *ConfStrat* décrite dans la Section 3.3.3 qui peut être exprimée explicitement en transformant la règle *Fire* en la règle conditionnelle *Fire_c* déjà utilisée pour prouver la confluence du ρ_0 -calcul :

$$\begin{aligned} \text{Fire}_c \quad [l \rightarrow_n r](t) &\Longrightarrow \{r\langle\sigma\rangle\} \\ &\text{si } l, t \text{ sont } \rho\text{-calculables} \\ &\text{avec } \sigma \in \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t) \end{aligned}$$

Nous considérons que les relations \rightarrow_F , $\rightarrow_{F\parallel}$ et \rightarrow_S de même que leurs fermetures sont définies exactement de la même façon que dans le ρ_0 -calcul (Section 3.3) mais en utilisant la règle *Fire_c* ci-dessus.

Définition 7.4 Nous considérons la relation sur $\varrho^\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ appelée σ_ρ induite par les règles d'évaluation dans la Figure 7.3.

Les relations suivantes sont induites par la relation σ_ρ :

- \rightarrow_σ est la fermeture compatible de la relation σ_ρ ,
- $\xrightarrow{*}_\sigma$ est la fermeture réflexive, transitive de \rightarrow_σ .

Nous notons par $\rightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ la relation $(\xrightarrow{*}_\sigma \rightarrow_S \xrightarrow{*}_\sigma)$. Nous notons par $\rightarrow_{\sigma^* F\parallel \sigma^*}$ la relation $(\xrightarrow{*}_\sigma \rightarrow_{F\parallel} \xrightarrow{*}_\sigma)$ et par $\rightarrow_{\sigma^* F \sigma^*}$ la relation $(\xrightarrow{*}_\sigma \rightarrow_F \xrightarrow{*}_\sigma)$.

Nous analysons d'abord les propriétés des relations induites par σ_ρ et ensuite nous nous concentrons sur la confluence du $\rho\sigma$ -calcul.

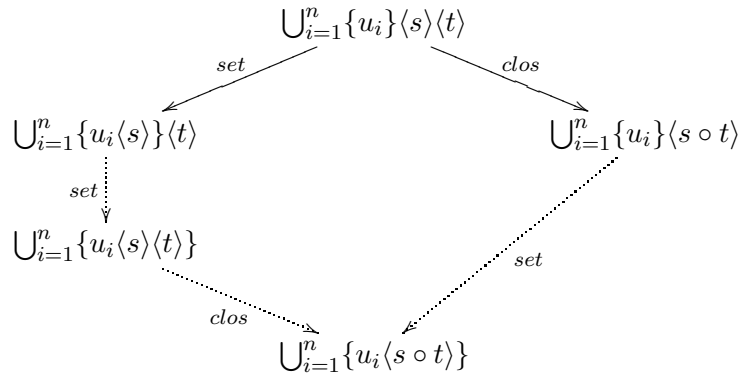
7.4.1 Propriétés de la relation σ_ρ

La relation engendrée par les règles décrivant l'application de substitution est confluente et terminante :

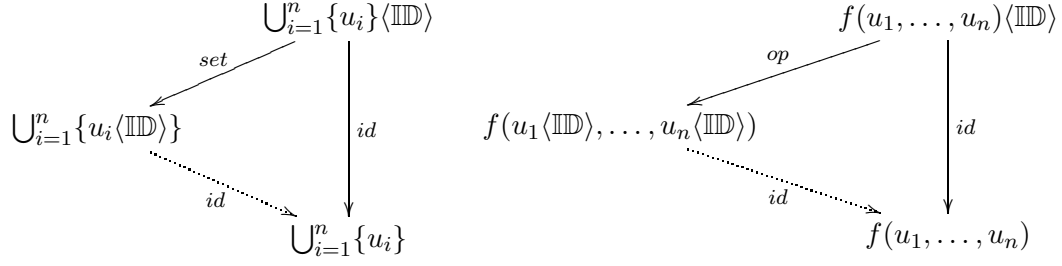
Lemme 7.1 \rightarrow_σ est localement confluente.

Preuve : Dans [CHL96] il est montré que le système σ_\uparrow (σ_ρ sans les règles *lam*, *op* et *set*) est localement confluente. Nous prouvons que les paires critiques induites par les nouvelles règles d'évaluation sont convergentes.

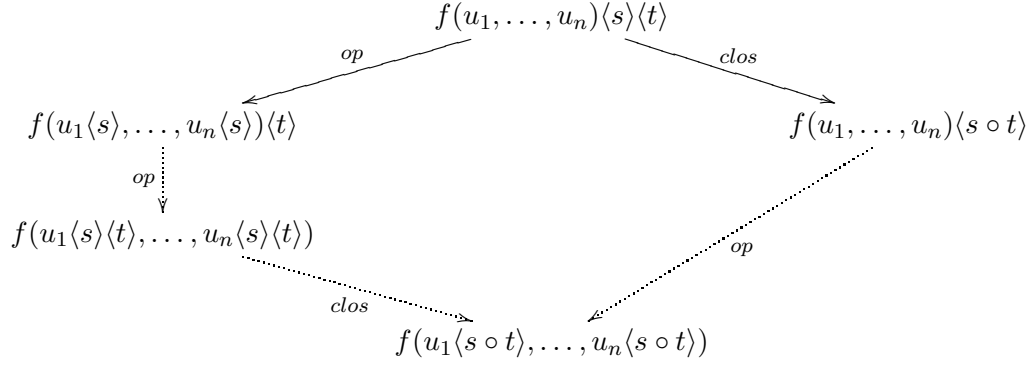
La règle *set* a des paires critiques seulement avec les règles *clos* et *id*. La réduction suivante est obtenue pour la paire critique entre *set* et *clos* :



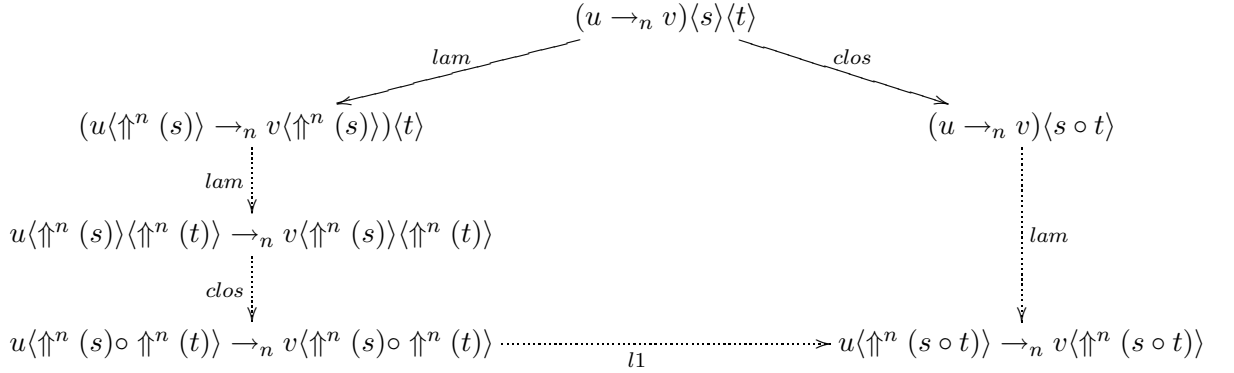
Pour les règles *set* et *id* et respectivement *op* et *id* nous obtenons :



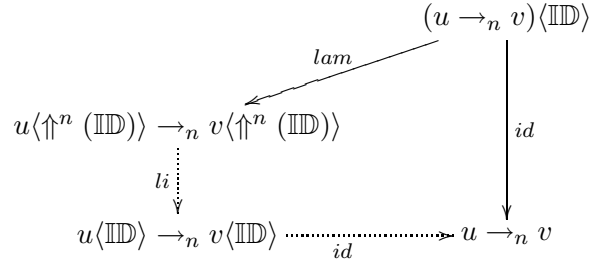
Pour les règles *op* et *clos* nous avons :



La réduction suivante est obtenue pour la paire critique entre *lam* et *clos* :



Pour les règles *lam* et *id* nous avons :



□

Lemme 7.2 \rightarrow_σ est terminante.

Preuve : En partant de la preuve proposée dans [CHL96] et [Pag98] pour σ_\uparrow et Γ_\uparrow respectivement nous utilisons un ordre lexicographique sur les deux interprétations polynômiales ci-dessous et nous pouvons montrer que :

- P_1 est décroissant sur toutes les règles et strictement décroissant sur lam ,
- P_2 est strictement décroissant sur toutes les règles sauf lam .

$P_1(n) = 2^n$	$P_2(n) = 1$
$P_1([u](v)) = P_1(u) * D_1(v) + P_1(v) * D_1(u)$	$P_2([u](v)) = P_2(u) * D_2(v) + P_2(v) * D_2(u)$ $+ D_2(u) * D_2(v)$
$P_1(u \rightarrow_n v) = P_1(u) * D_1(v) + P_1(v) * D_1(u)$ $+ 2 * D_2(u) * D_2(v)$	$P_2(u \rightarrow_n v) = 2 * (P_2(u) * D_2(v) + P_2(v) * D_2(u))$
$P_1(u\langle s \rangle) = P_1(u) * P_1(s)$	$P_2(u\langle s \rangle) = P_2(u) * (P_2(s) + 1)$
$P_1(\mathbb{ID}) = 2$	$P_2(\mathbb{ID}) = 1$
$P_1(\{u_1, \dots, u_n\}) = P_1(u_1) + \dots + P_1(u_n) + 2$	$P_2(\{u_1, \dots, u_n\}) = P_1(u_1) + \dots + P_1(u_n) + 1$
$P_1(\uparrow) = 2$	$P_2(\uparrow) = 1$
$P_1(\uparrow(s)) = P_1(s)$	$P_2(\uparrow(s)) = 4 * P_2(s)$
$P_1(u.s) = P_1(u) + P_1(s)$	$P_2(u.s) = P_1(u) + P_1(s) + 1$
$P_1(s \circ t) = P_1(s) * P_1(t)$	$P_2(s \circ t) = P_2(s) * (P_2(t) + 1)$
$P_1(f(u_1, \dots, u_n)) =$ $P_1(u_1) * D_1(u_2) * \dots * D_1(u_n) + \dots + P_1(u_n) * D_1(u_1) * \dots * D_1(u_{n-1}) + D_1(u_1) * \dots * D_1(u_n)$	
$P_2(f(u_1, \dots, u_n)) =$ $P_2(u_1) * D_2(u_2) * \dots * D_2(u_n) + \dots + P_2(u_n) * D_2(u_1) * \dots * D_2(u_{n-1}) + D_2(u_1) * \dots * D_2(u_n)$	
$P_1(f) = 2$	$P_2(f) = 1$
$D_1(\{u_1, \dots, u_n\}) = D_1(u_1) + \dots + D_1(u_n) + 1$	$D_2(\{u_1, \dots, u_n\}) = D_2(u_1) + \dots + D_2(u_n) + 1$
$D_1(u) = 1$	$D_2(u) = 1$

□

Puisque \rightarrow_σ est confluente et terminante nous pouvons énoncer un lemme sur les formes normales des termes réduits par cette relation.

Lemme 7.3 *Etant donnée une substitution s en σ_ρ -forme normale. Alors, s a nécessairement une des formes suivantes :*

- $s = \mathbb{ID}$,
- $s = t.s'$, avec t, s' en σ_ρ -forme normale,
- $s = \uparrow^n$,
- $s = \uparrow(s') \circ \uparrow^n$, avec s' en σ_ρ -forme normale et $n \geq 0$.

Etant donné un terme t en σ_ρ -forme normale. Alors, t a nécessairement une des formes suivantes :

- $t = n$,
- $t = \{t_1, \dots, t_n\}$, avec t_1, \dots, t_n en σ_ρ -forme normale,
- $t = f(t_1, \dots, t_n)$, avec t_1, \dots, t_n en σ_ρ -forme normale,
- $t = [u](v)$, avec u, v en σ_ρ -forme normale,
- $t = u \rightarrow v$, avec u, v en σ_ρ -forme normale.

Preuve : Nous procédons par induction sur la structure des substitutions. Le seul cas qui n'est pas immédiat est $s = s_1 \circ s_2$. Nous avons les possibilités suivantes :

1. $s_1 = \mathbb{I}\mathbb{D}$ n'est pas possible, autrement s serait un radical pour *il*.
2. $s_1 = t.s'$ n'est pas possible, autrement s serait un radical pour *map*.
3. $s_1 = \uparrow^n$. Dans ce cas $n = 1$, autrement s serait un radical pour *ass*. s_2 ne peut pas être $\mathbb{I}\mathbb{D}$ (autrement s serait un radical pour *ir*), s_2 ne peut pas être $t.s'$ (autrement s serait un radical pour *sc*), s_2 ne peut pas être $\uparrow (s') \circ \uparrow^n$ (autrement s serait un radical pour *sl2*). Ainsi, s_2 doit être \uparrow^p et donc, $s = \uparrow^{p+1}$.
4. $s_1 = \uparrow (s') \circ \uparrow^n$, avec $n = 0$, c'est-à-dire $s = \uparrow (s')$. s_2 ne peut pas être $\mathbb{I}\mathbb{D}$ (autrement s serait un radical pour *ir*), s_2 ne peut pas être $t.s'$ (autrement s serait un radical pour *le*), s_2 ne peut pas être $\uparrow (s') \circ \uparrow^n$ (autrement s serait un radical pour *l2*). Ainsi, s_2 doit être \uparrow^p et donc, $s = \uparrow (s') \circ \uparrow^p$.

Pour la deuxième partie de la preuve nous procédons similairement, par induction sur la structure des termes. Nous avons les possibilités suivantes pour un terme t :

1. $t = n\langle s \rangle$. Pour toute substitution s , le terme t contient un radical.
2. $t = \{t_1, \dots, t_n\}$, $t = f(t_1, \dots, t_n)$, $t = [u](v)$, $t = u \rightarrow v$ sont facilement prouvés par induction.
3. $t = u\langle s \rangle$. Ce cas ne peut pas apparaître puisque $u\langle s \rangle$ ne doit pas contenir de radical pour *set*, *op*, *app* ou *lam*.

□

Ainsi, les termes en σ_ρ -forme normale ne peuvent contenir aucune substitution et donc un terme $t\langle s \rangle$ mène à une forme normale ne contenant pas de substitution.

7.4.2 La confluence du $\rho\sigma$ -calcul

Nous devons remarquer que les substitutions que nous manipulons dans le $\rho\sigma$ -calcul sont obtenues exclusivement par la résolution d'un problème de filtrage déclenché par l'application de la règle d'évaluation *Fire_c*. Puisque tout problème de filtrage est de la forme $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ avec l, t ρ -calculables alors toute substitution obtenue comme solution d'un tel filtrage ne contient que des termes satisfaisant les mêmes conditions que t .

Nous allons considérer par la suite uniquement des substitutions de cette forme, c'est-à-dire qui ne contiennent aucun ensemble vide ou ayant plus d'un élément et qui contiennent que des applications de la forme $[u \rightarrow w](v)$ où u subsume v .

Lemme 7.4 *Etant donnés les ρ -termes l, t, t' tels que $t \longrightarrow_{\sigma} t'$. Alors,*

- si l, t sont ρ -préfiltrables alors l, t' sont ρ -préfiltrables,
- si t est ρ -safe alors t' est ρ -safe,
- si l, t sont ρ -calculables alors l, t' sont ρ -calculables.

Preuve : Si le terme $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ alors $t = t'$ et le lemme est clairement vrai. Nous considérons par la suite que $t \notin \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

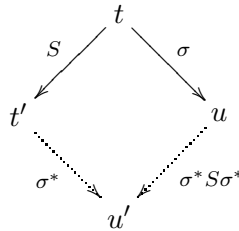
Puisque l, t sont ρ -préfiltrables alors le terme l subsume faiblement le terme t et donc toute position fonctionnelle du terme l est une position fonctionnelle du terme t ou n'est pas une position du terme t . Ainsi, pour toute position d'une application de substitution dans t , la position correspondante dans l , si elle existe, est la position d'un indice. Les applications de substitution dans t sont éventuellement réduites par \longrightarrow_{σ} mais les positions correspondantes dans l sont des positions variables et donc, l, t' sont ρ -préfiltrables.

En regardant les règles d'évaluation de la Figure 7.3, nous pouvons noter qu'un ensemble vide ou ayant plus d'un élément peut être engendré dans le terme t' seulement si un tel ensemble existe dans le terme t . Puisque t est ρ -safe ceci n'est pas possible et donc t' est ρ -safe.

Ainsi, les propriétés de termes ρ -préfiltrables et ρ -safes sont préservées par la relation \longrightarrow_{σ} et donc, la propriété de termes ρ -calculables est préservée par la relation \longrightarrow_{σ} . \square

La confluence du $\rho\sigma$ -calcul est obtenue en montrant que les conditions pour le lemme de Yokouchi sont satisfaites par les relations $\longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*}$ et $\longrightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$. Nous montrons d'abord que la relation $\longrightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ est confluente et terminante, ensuite nous prouvons la confluence forte de la relation $\longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*}$ et finalement nous montrons que le diagramme de Yokouchi est satisfait par les deux relations.

Lemme 7.5 Si $t \longrightarrow_{\sigma} t'$ et $t \longrightarrow_S u$, alors il existe u' tel que $t' \xrightarrow{*}_{\sigma} u'$ et $u \longrightarrow_{\sigma^* S \sigma^*} u'$.



Preuve : Puisque les σ_{ρ} -radicaux ne peuvent pas apparaître dans un *Set*-radical nous devons seulement analyser les cas générés par une σ_{ρ} -réduction. Nous montrons seulement le cas de la règle *Distrib*, toutes les autres preuves sont faites d'une manière similaire.

$$\begin{array}{ccc}
 [\{u_1, \dots, u_n\}](v)\langle s \rangle & \xrightarrow{\text{app}} & [\{u_1, \dots, u_n\}\langle s \rangle](v\langle s \rangle) \\
 \text{Distrib} \downarrow & & \downarrow \text{set} \\
 \{[u_1](v), \dots, [u_n](v)\}\langle s \rangle & & [\{u_1\langle s \rangle, \dots, u_n\langle s \rangle\}](v\langle s \rangle) \\
 \downarrow \text{set} & & \downarrow \text{Distrib} \\
 \{[u_1](v)\langle s \rangle, \dots, [u_n](v)\langle s \rangle\} & \xrightarrow{\text{app}} & [\{u_1\langle s \rangle](v\langle s \rangle), \dots, [u_n\langle s \rangle](v\langle s \rangle)]
 \end{array}$$

Nous utilisons les règles d'inférence *Distrib* (relation \longrightarrow_S) et *app*, *set* (relation \longrightarrow_{σ}). \square

Lemme 7.6 La relation $\longrightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ est confluente et terminante.

Preuve : La relation \longrightarrow_S est confluente par le Lemme 3.4. La terminaison de la relation \longrightarrow_S a été montré dans le Lemme 3.3 en utilisant une méthode basée sur des interprétations polynômiales. Nous pouvons aussi utiliser les interprétations polynômiales suivantes afin d'obtenir la même propriété.

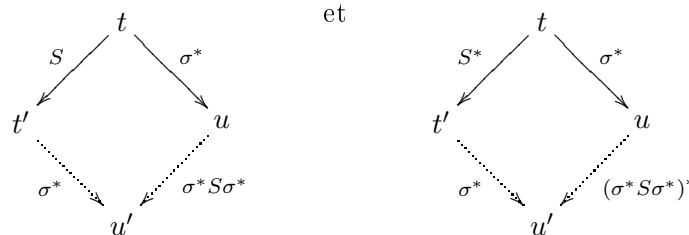
$$\begin{aligned}
P_1([u](v)) &= P_1(u) * D_1(v) + P_1(v) * D_1(u) \\
P_1(u \rightarrow_n v) &= P_1(u) * D_1(v) + P_1(v) * D_1(u) + 2 * D_2(u) * D_2(v) \\
P_1(\{u_1, \dots, u_n\}) &= P_1(u_1) + \dots + P_1(u_n) + 2 \\
P_1(f(u_1, \dots, u_n)) &= P_1(u_1) * D_1(u_2) * \dots * D_1(u_n) + \dots + P_1(u_n) * D_1(u_1) * \dots * D_1(u_{n-1}) + \\
&\quad D_1(u_1) * \dots * D_1(u_n) \\
P_1(f) &= 2 \\
D_1(\{u_1, \dots, u_n\}) &= D_1(u_1) + \dots + D_1(u_n) + 1 \\
D_1(u) &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2([u](v)) &= P_2(u) * D_2(v) + P_2(v) * D_2(u) + D_2(u) * D_2(v) \\
P_2(u \rightarrow_n v) &= 2 * (P_2(u) * D_2(v) + P_2(v) * D_2(u)) \\
P_2(\{u_1, \dots, u_n\}) &= P_1(u_1) + \dots + P_1(u_n) + 1 \\
P_2(f(u_1, \dots, u_n)) &= P_2(u_1) * D_2(u_2) * \dots * D_2(u_n) + \dots + P_2(u_n) * D_2(u_1) * \dots * D_2(u_{n-1}) + \\
&\quad D_2(u_1) * \dots * D_2(u_n) \\
P_2(f) &= 1 \\
D_2(\{u_1, \dots, u_n\}) &= D_2(u_1) + \dots + D_2(u_n) + 1 \\
D_2(u) &= 1
\end{aligned}$$

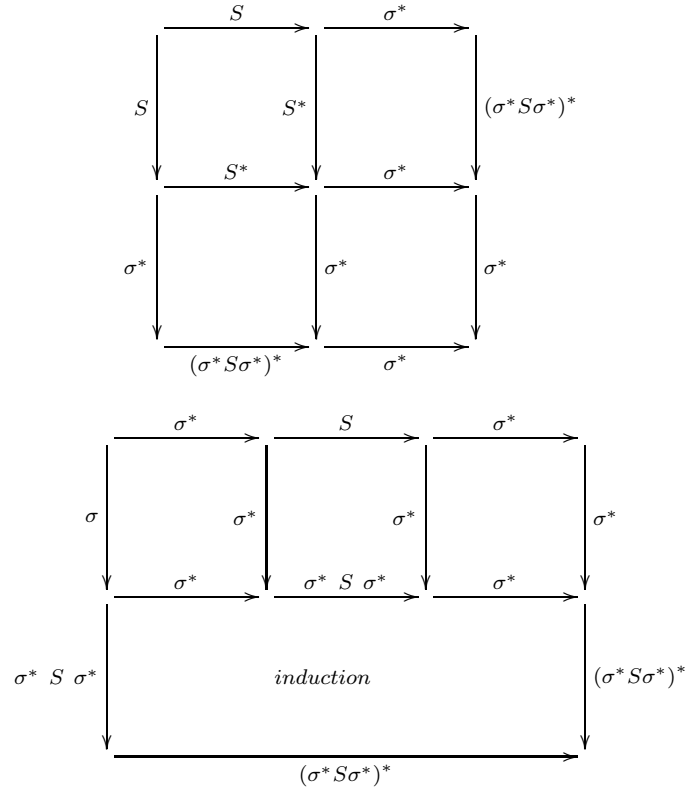
La relation \rightarrow_σ est confluente et terminante par le Lemme 7.1 et le Lemme 7.2.

Afin de prouver la terminaison de la relation $\rightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ nous utilisons la même méthode que dans le Lemme 7.2. Puisque les interprétations polynômiales présentées ci-dessus pour les règles de \rightarrow_S sont incluses dans celles du Lemme 7.2 pour les règles de \rightarrow_σ , ces dernières peuvent être utilisées pour montrer la terminaison de la relation globale $\rightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$.

En partant de la cohérence entre les deux relations montrée dans le Lemme 7.5 et de la terminaison de \rightarrow_S et \rightarrow_σ nous obtenons immédiatement par induction sur le nombre de réductions :



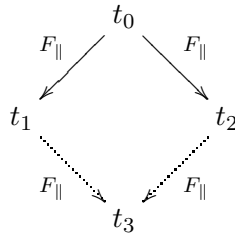
En utilisant ce dernier diagramme et la confluence des deux relations nous obtenons la confluence de $\rightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ par induction sur le nombre de réductions \rightarrow_σ :



□

Nous procédons d'une manière similaire afin de prouver la confluence forte de la relation $\longrightarrow_{\sigma^* F_{||} \sigma^*}$. Nous montrons d'abord que la relation $\longrightarrow_{F_{||}}$ est fortement confluente et ensuite nous prouvons qu'un diagramme de cohérence similaire à celui du Lemme 7.5 est obtenu pour les relations $\longrightarrow_{F_{||}}$ et \longrightarrow_{σ} .

Lemme 7.7 *La relation $\longrightarrow_{F_{||}}$ est fortement confluente :*



Preuve : Les règles *Fire*, *Congruence* et *Congruence_fail* sont linéaires à gauche et sans paires critiques ([Hue80]). □

Nous analysons maintenant la correspondance entre les solutions des problèmes de filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ et $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ où $t \xrightarrow{\sigma}^* t'$. Nous obtenons un résultat similaire à ceux obtenus dans le ρ_{\emptyset} -calcul pour la relation $\longrightarrow_{F_{||}}$, dans le Lemme 3.10, ou pour la relation \xrightarrow{S}^* , dans le Lemme 3.14.

Lemme 7.8 *Etant donnés les $\rho\sigma$ -termes l, t et t' et une substitution s tels que l, t sont des termes ρ -préfiltrables et $t \langle s \rangle \xrightarrow{\sigma}^* t'$. Alors, nous avons :*

- Si $u_1 \dots u_n \cdot \mathbb{I}\mathbb{D}$ est la solution de $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ et $v_1 \dots v_n \cdot \mathbb{I}\mathbb{D}$ est la solution de $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ (avec n l'indice maximal de l), alors $u_i \langle s \rangle \xrightarrow{\sigma}^* v_i$.*

b. Si $\text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t) = \emptyset$, alors $\text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t') = \emptyset$.

Preuve : Si $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ alors, $t' = t$ est le lemme est trivialement vrai. Pour le cas où $t \notin \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ nous procédons par induction sur la structure du $\rho\sigma$ -terme t .

Le cas de base : $t = n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque l, t sont ρ -préfiltrables alors l subsume faiblement t et conformément à la Remarque 7.1, nous pouvons considérer $l = 1$.

a. $t = n$, avec $t \in \mathbb{N}^*$

Nous obtenons $(l \ll_{\emptyset}^? t) = (1 \ll_{\emptyset}^? n)$ avec la solution $n.\mathbb{I}\mathbb{D}$ et $(l \ll_{\emptyset}^? t') = (1 \ll_{\emptyset}^? t')$ avec la solution $t'.\mathbb{I}\mathbb{D}$. Puisque $n\langle s \rangle \xrightarrow{*}_{\sigma} t'$ alors la propriété est vérifiée.

b. Puisque l est un indice $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ ne peut pas échouer.

Induction :

Conformément à la Remarque 7.1 le seul cas où $l \neq 1$ est obtenu pour $t = f(t_1, \dots, t_n)$. Les cas où $l = 1$ sont immédiats.

a. Si $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ n'échoue pas alors le terme l doit être de la forme $l = f(l_1, \dots, l_n)$.

Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$ alors $t\langle s \rangle = f(t_1, \dots, t_n)\langle s \rangle \xrightarrow{*}_{\sigma} f(t_1\langle s \rangle, \dots, t_n\langle s \rangle)$ et $t' = f(t'_1, \dots, t'_n)$ avec $t_i\langle s \rangle \xrightarrow{*}_{\sigma} t'_i$ et puisque les termes l, t sont ρ -préfiltrables alors l_i, t_i sont ρ -préfiltrables. L'équation $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ est transformé en $(\bigwedge_{i=1, \dots, n} l_i \ll_{\emptyset}^? t_i)$ avec la solution $u_1 \dots u_n.\mathbb{I}\mathbb{D}$. Par hypothèse d'induction, si la solution de $(l_i \ll_{\emptyset}^? t_i)$ est la substitution $u_1 \dots u_m.\mathbb{I}\mathbb{D}$ alors la solution de $(l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i)$ est la substitution $v_1 \dots v_m.\mathbb{I}\mathbb{D}$ avec $u_k\langle s \rangle \xrightarrow{*}_{\sigma} v_k$, $k = 1 \dots m$. L'équation $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ est transformée en $(\bigwedge_{i=1, \dots, n} l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i)$ avec la solution $v_1 \dots v_n.\mathbb{I}\mathbb{D}$ et par la linéarité de l les solutions des $(l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i)$ sont disjoints et donc, la propriété est vérifiée.

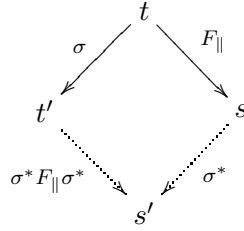
b. Conformément à la Remarque 7.2, l'échec peut être obtenu seulement en appliquant la règle de filtrage *SymbolClash* à la position de tête ou à des positions plus profondes.

Nous pouvons avoir $l = f(l_1, \dots, l_n)$ et soit $t = f(t_1, \dots, t_n)$ et $t' = f(t_1, \dots, t_n)\langle s \rangle$, soit $t = g(t_1, \dots, t_m)$ et $t' = g(t'_1, \dots, t'_m)$ avec $f \neq g$ et $t_i\langle s \rangle \xrightarrow{*}_{\sigma} t'_i$. Dans les deux cas $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ échoue aussi. Si $l = f(l_1, \dots, l_n)$, $t = f(t_1, \dots, t_n)$ et $t' = f(t'_1, \dots, t'_n)$ avec $t_i\langle s \rangle \xrightarrow{*}_{\sigma} t'_i$ alors, la règle de filtrage *SymbolClash* appliquée pour un problème $(l_i \ll_{\emptyset}^? t_i)$ mène à un échec de filtrage et par induction $(l_i \ll_{\emptyset}^? t'_i)$ échoue et ainsi, $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ échoue.

□

Nous devons noter que le filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ peut échouer même si le filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ n'échoue pas et donc, dans le premier point du Lemme 7.8 nous supposons que t' est suffisamment σ_{ρ} -réduit pour garantir que le filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? t')$ n'échoue pas. Nous pouvons par exemple considérer le terme t' tel que toutes les applications de substitution ont été propagées par les règles d'évaluation du σ_{ρ} -calcul (Figure 7.3) jusqu'aux positions des indices du terme initial t .

Lemme 7.9 *Etant donnés les $\rho\sigma$ -termes t, t', u, u' tels que $t \xrightarrow{*}_{\sigma} t'$ et $t \xrightarrow{*}_{F_{\parallel}} u$, alors il existe un $\rho\sigma$ -terme u' tel que $t' \xrightarrow{*}_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*} u'$ et $u \xrightarrow{*}_{\sigma} u'$.*



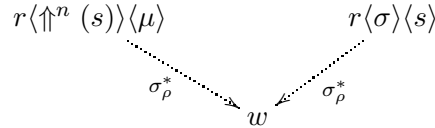
Preuve : Puisque les radicaux \longrightarrow_σ ne peuvent pas apparaître dans un radical $\longrightarrow_{F_||}$ nous devons seulement analyser les cas générés par une σ_ρ -réduction.

Nous devons mentionner d'abord que si nous considérons deux entiers (indices de de Bruijn) m, n tels que $m \leq n$, alors $m \langle \uparrow^n (s) \rangle = m$ et ceci est montré par la dérivation suivante :

$$\begin{aligned}
 m \langle \uparrow^n (s) \rangle &\xrightarrow{rvl1} (m-1) \langle \uparrow^{n-1} (s) \circ \uparrow \rangle \\
 &\dots \\
 &\xrightarrow{rvl1} 1 \langle \uparrow^{n-m+1} (s) \circ \uparrow^{m-1} \rangle \\
 &\xrightarrow{fvl2} 1 \langle \uparrow^{m-1} \rangle \\
 &\xrightarrow{vs1} m
 \end{aligned}$$

Il est facile de prouver par induction que pour tout terme t en σ_ρ -forme normale qui contient seulement des indices inférieurs ou égal à n nous avons $t \langle \uparrow^n (s) \rangle \xrightarrow{*}_\sigma t$.

Nous considérons les $\rho\sigma$ -termes l, t, r et t' et une substitution s tels que l, t sont ρ -préfiltrables et $t \langle s \rangle \xrightarrow{*}_\sigma t'$ et nous montrons que si $\{\sigma\} = \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t)$ et $\{\mu\} = \text{Solution}(l \ll_{\emptyset}^? t')$, alors il existe un $\rho\sigma$ -terme w tel que :



Si nous considérons $\sigma = \{u_1 \dots u_n. \mathbb{ID}\}$ et $\mu = \{v_1 \dots v_n. \mathbb{ID}\}$, nous avons les réductions suivantes :

$$\begin{aligned}
 r \langle \uparrow^n (s) \rangle \langle \mu \rangle &\longrightarrow \{r \langle \uparrow^n (s) \rangle \langle v_1 \dots v_n. \mathbb{ID} \rangle\} \\
 &\xrightarrow{clos} \{r \langle \uparrow^n (s) \circ v_1 \dots v_n. \mathbb{ID} \rangle\} \\
 &\xrightarrow{le} \{r \langle v_1. \uparrow^{n-1} (s) \circ v_2 \dots v_n. \mathbb{ID} \rangle\} \\
 &\dots \\
 &\xrightarrow{le} \{r \langle v_1 \dots v_{n-1}. \uparrow (s) \circ v_n. \mathbb{ID} \rangle\} \\
 &\xrightarrow{le} \{r \langle v_1 \dots v_n. s \rangle\} \\
 r \langle \sigma \rangle \langle s \rangle &\longrightarrow \{r \langle u_1 \dots u_n. \mathbb{ID} \rangle \langle s \rangle\} \\
 &\xrightarrow{set} \{r \langle u_1 \dots u_n. \mathbb{ID} \rangle \langle s \rangle\} \\
 &\xrightarrow{clos} \{r \langle u_1 \dots u_n. \mathbb{ID} \circ s \rangle\} \\
 &\xrightarrow{map} \{r \langle u_1 \langle s \rangle. u_2 \dots u_n. \mathbb{ID} \circ s \rangle\} \\
 &\dots \\
 &\xrightarrow{map} \{r \langle u_1 \langle s \rangle. \dots u_n \langle s \rangle. s \rangle\}
 \end{aligned}$$

et puisque $u_i \langle s \rangle \xrightarrow{*}_\sigma v_i$ (Lemme 7.8) nous obtenons le résultat souhaité.

Par conséquent, si nous considérons les mêmes notations que précédemment et si $r \longrightarrow_{F_||} r'$ alors nous montrons immédiatement qu'il existe un $\rho\sigma$ -terme w tel que :

$$\begin{array}{ccc}
([l \rightarrow_n r](t))\langle s \rangle & \xrightarrow{\sigma} & [(l \rightarrow_n r)\langle s \rangle](t\langle s \rangle) \\
F_{\parallel} \downarrow & & \downarrow \sigma \\
\{r'\langle \sigma \rangle\}\langle s \rangle & & [l\langle \uparrow^n(s) \rangle \rightarrow_n r\langle \uparrow^n(s) \rangle](t\langle s \rangle) \\
\downarrow \sigma & & \downarrow \sigma^* \\
\{r'\langle \sigma \rangle\}\langle s \rangle & & [l \rightarrow_n r\langle \uparrow^n(s) \rangle](t') \\
\downarrow \sigma^* & & \downarrow F_{\parallel} \\
w & \xleftarrow{\sigma^*} & \{r'\langle \uparrow^n(s) \rangle\langle \mu \rangle\}
\end{array}$$

Si le filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? t)$ échoue alors le filtrage $(l \ll_{\emptyset}^? t\langle s \rangle)$ échoue et le lemme est clairement vrai.

Pour les règles *Congruence* et *Congruence_fail* les diagrammes sont similaires et nous le montrons seulement pour le premier cas :

$$\begin{array}{ccc}
([f(u_1, \dots, u_n)](f(v_1, \dots, v_n)))\langle s \rangle & \xrightarrow{\sigma} & [f(u_1, \dots, u_n)\langle s \rangle](f(v_1, \dots, v_n)\langle s \rangle) \\
F_{\parallel} \downarrow & & \downarrow \sigma^* \\
\{f([u_1](v_1), \dots, [u_n](v_n))\}\langle s \rangle & & [f(u_1\langle s \rangle, \dots, u_n\langle s \rangle)](f(v_1\langle s \rangle, \dots, v_n\langle s \rangle)) \\
& \searrow \sigma^* & \downarrow F_{\parallel} \\
& & \{f([u_1\langle s \rangle](v_1\langle s \rangle), \dots, [u_n\langle s \rangle](v_n\langle s \rangle))\}
\end{array}$$

□

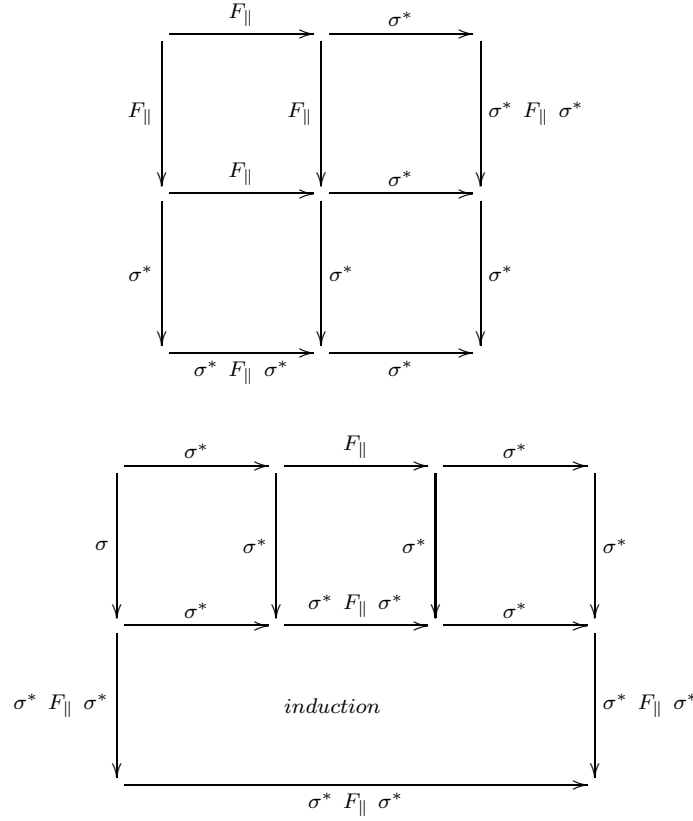
Lemme 7.10 *La relation $\longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*}$ est fortement confluente :*

$$\begin{array}{ccc}
& t_0 & \\
\sigma^* F_{\parallel} \sigma^* \swarrow & & \searrow \sigma^* F_{\parallel} \sigma^* \\
t_1 & & t_2 \\
\sigma^* F_{\parallel} \sigma^* \searrow & & \swarrow \sigma^* F_{\parallel} \sigma^* \\
& t_3 &
\end{array}$$

Preuve : En utilisant la cohérence de $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ avec \longrightarrow_{σ} (Lemme 7.9) et la terminaison de \longrightarrow_{σ} (Lemme 7.2) nous obtenons facilement par induction sur la réduction \longrightarrow_{σ} :

$$\begin{array}{ccc}
& t & \\
\sigma^* \swarrow & & \searrow F_{\parallel} \\
t' & & s \\
\sigma^* F_{\parallel} \sigma^* \searrow & & \swarrow \sigma^* \\
& s' &
\end{array}$$

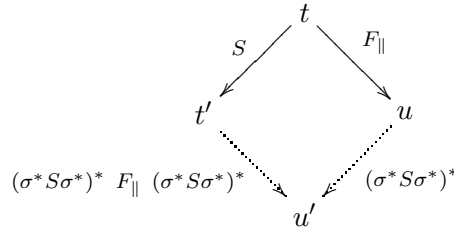
En utilisant ce dernier résultat et la confluence des deux relations $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ et \longrightarrow_{σ} , nous obtenons la confluence de $\longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*}$ par induction sur le nombre de réductions \longrightarrow_{σ} :



□

Nous avons prouvé la confluence de la relation $\longrightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ et la confluence forte de la relation $\longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*}$. Il nous reste donc à montrer la cohérence entre ces deux relations. Pour cela nous avons besoin d'un résultat de cohérence entre les relations $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ et \longrightarrow_S modulo la relation \longrightarrow_{σ} similaire à celui obtenu dans le Lemme 3.20 pour le ρ_0 -calcul. La preuve de ce dernier lemme aussi bien que celles des lemmes auxiliaires utilisés sont facilement adaptées pour le cas de substitutions explicites.

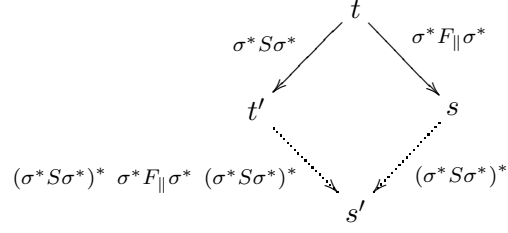
Lemme 7.11 *Etant donnés les $\rho\sigma$ -termes t, t', u, u' tels que $t \longrightarrow_S t'$ et $t \longrightarrow_{F_{\parallel}} u$, alors il existe un $\rho\sigma$ -terme u' tel que $t' \xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*} \xrightarrow{*}_{F_{\parallel}} \xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*} u'$ et $u \xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*} u'$.*



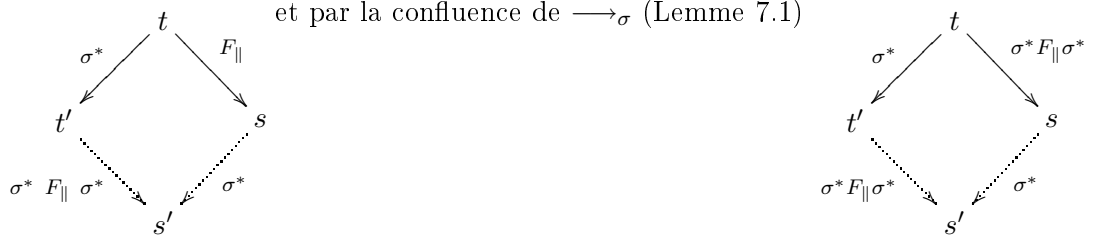
Preuve : La preuve est très similaire à celle du Lemme 3.20 du ρ -calcul mais dans le cas du $\rho\sigma$ -calcul l'application de substitution est décrite par les règles d'évaluation du $\sigma\rho$ -calcul et les réductions correspondantes sont illustrées explicitement dans le diagramme du lemme.

□

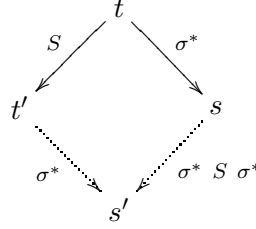
Lemme 7.12 *Les relations $\longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*}$ et $\longrightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ satisfont le diagramme de cohérence suivant :*



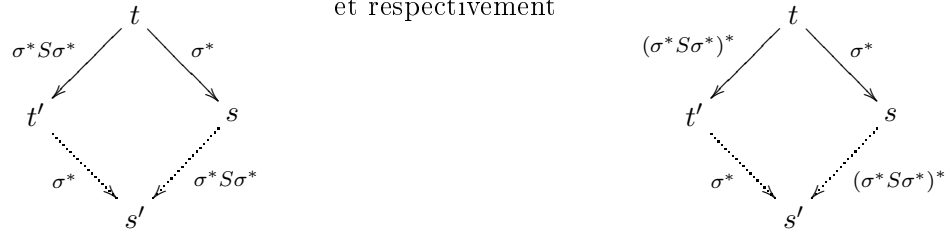
Preuve : En utilisant la cohérence de $\longrightarrow_{F_{\parallel}}$ avec \longrightarrow_{σ} (Lemme 7.9) et la terminaison de \longrightarrow_{σ} (Lemme 7.2) nous obtenons facilement par induction sur la réduction \longrightarrow_{σ} :



De la même manière, en utilisant la cohérence de \longrightarrow_S avec \longrightarrow_{σ} (Lemme 7.5) et la terminaison de \longrightarrow_{σ} nous obtenons :

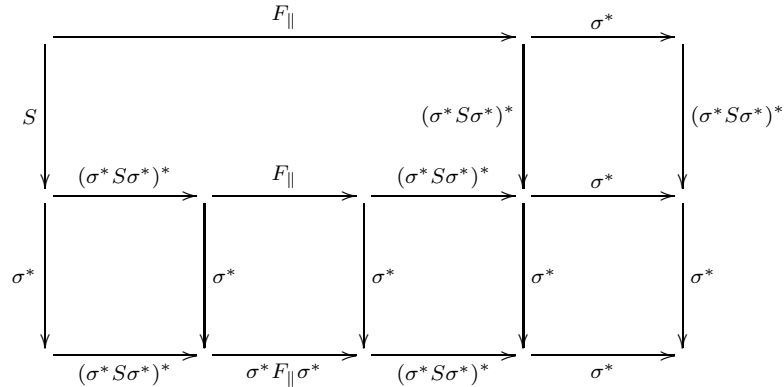


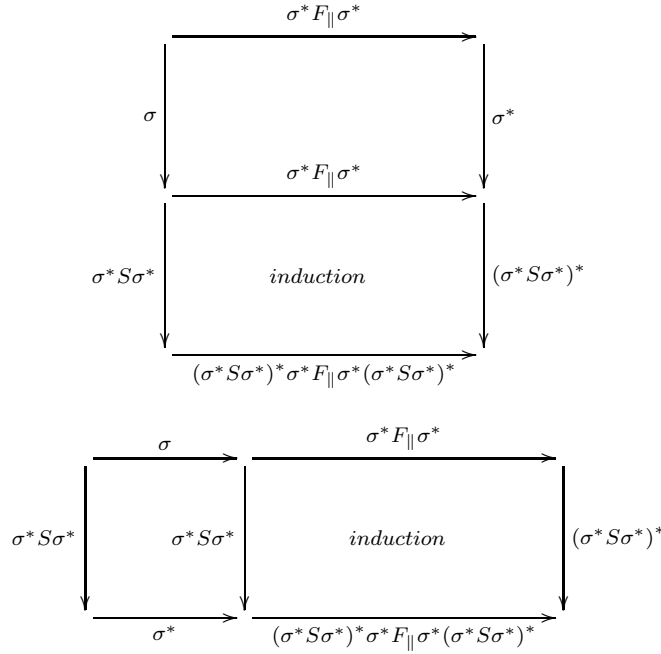
Par la confluence de \longrightarrow_{σ} et la terminaison de $\longrightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ (Lemme 7.6) nous pouvons étendre le diagramme précédent à



et respectivement

En utilisant les diagrammes ci-dessus et le Lemme 7.11 nous obtenons la propriété souhaitée par induction sur le nombre de réductions \longrightarrow_{σ} :





□

Théorème 7.1 *Le $\rho\sigma$ -calcul est confluente.*

Preuve : Nous appliquons le Lemme de Yokouchi (Lemme 1.2) pour les relations $\longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*}$ et $\longrightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ et nous obtenons ainsi la confluence de la relation $\xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*} \longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*} \xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*}$.

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour les deux relations :

- $\longrightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ est confluente et terminante (Lemme 7.6),
- $\longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*}$ est fortement confluente (Lemme 7.7),
- $\longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*}$ et $\longrightarrow_{\sigma^* S \sigma^*}$ vérifient le diagramme de Yokouchi (Lemme 7.12).

Nous procédons de la même manière que dans le Lemme 3.13 et nous obtenons les inclusions $\longrightarrow_F \subseteq \longrightarrow_{F_{\parallel}} \subseteq \xrightarrow{*}_F$, et donc, la relation $(\xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*} \longrightarrow_{\sigma^* F \sigma^*} \xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*})^*$ est la fermeture transitive de la relation $\xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*} \longrightarrow_{\sigma^* F_{\parallel} \sigma^*} \xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*}$.

Ainsi, par le Lemme 3.7 nous obtenons la confluence de $\xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*} \longrightarrow_{\sigma^* F \sigma^*} \xrightarrow{*}_{\sigma^* S \sigma^*}$. □

7.5 Le $\rho\sigma$ -calcul comme calcul de réécriture d'ordre supérieur

Nous avons présenté le $\rho\sigma$ -calcul comme une version explicite du ρ -calcul où l'application de substitution est définie au niveau objet calcul. Nous avons adapté le σ_{\uparrow} -calcul de substitution utilisé dans le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul³ pour la syntaxe du $\rho\sigma$ -calcul et nous avons utilisé une approche similaire à celle proposée dans [CHL96] pour prouver la confluence du calcul ainsi obtenu. Bruno Pagano a introduit dans sa thèse les “*eXplicit Rewrite Systems*” [Pag97], des systèmes de réécriture d'ordre supérieur utilisant le σ_{\uparrow} -calcul comme mécanisme de substitution et a donné des conditions assurant la confluence de tels systèmes. La preuve de confluence d'un XRS revient ainsi à tester que les règles de réécriture vérifient certaines propriétés, parfois simplement structurelles ou locales. Nous avons donc représenté le $\rho\sigma$ -calcul comme un XRS et analysé les conditions de confluence dans ce cas.

³présenté brièvement dans dans la Section 1.3.5

7.5.1 eXplicit Rewrite Systems - XRSs

L'objectif des XRSs est de définir des extensions du $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul permettant d'ajouter de nouveaux lieux et donc, d'associer à certains symboles de la signature des règles de propagation plus générales que celles utilisées dans le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul. Le calcul de substitution pour une signature quelconque est ainsi inspiré du σ_{\uparrow} -calcul.

Définition 7.5 *Etant donnée une signature Γ , l'ensemble de termes Γ_{\uparrow} est définie par :*

$$\begin{array}{ll} \textbf{Termes} & t \quad ::= \quad x_t \mid n \mid f(t, \dots, t) \mid t\langle s \rangle \\[1em] \textbf{Substitutions} & s \quad ::= \quad x_s \mid \mathbb{I}\mathbb{D} \mid \uparrow \mid \uparrow(s) \mid t.s \mid s \circ s \end{array}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{F}$.

Un symbole f de Γ peut être un symbole du premier ordre ou un lieu (symbole d'ordre supérieur) et ceci est décrit au niveau des règles du calcul de substitution. Pour chaque symbole f de Γ d'arité n , on associe un n -uplet d'entiers (p_1, \dots, p_n) appelé l'*arité de liaison* de f et une règle f_{\uparrow} :

$$f(t_1, \dots, t_n)\langle s \rangle \xrightarrow{f_{\uparrow}} f(t_1\langle \uparrow^{p_1}(s) \rangle, \dots, t_n\langle \uparrow^{p_n}(s) \rangle)$$

Un symbole dont l'arité de liaison est de la forme $(0, \dots, 0)$ est un symbole du premier ordre. Un symbole dont l'arité de liaison contient un p_i non-nul est un symbole d'ordre supérieur. On peut remarquer que si on considère un symbole λ d'arité de liaison (1) alors nous obtenons la règle *Lambda* du σ_{\uparrow} -calcul.

Définition 7.6 *Etant donnée une signature Γ , la relation de réduction σ_{Γ} est définie par l'ensemble de règles de réécriture du σ_{\uparrow} -calcul moins celles relatives aux symboles d'application et d'abstraction et par les règles f_{\uparrow} pour tout symbole f de Γ .*

Le système de réécriture défini par les termes de Γ_{\uparrow} et par la relation σ_{Γ} est appelé Γ_{\uparrow} -calcul.

Le Γ_{\uparrow} -calcul décrivant le calcul de substitution est enrichi par un ensemble de règles de réécriture décrivant les calculs effectifs. Ces règles de réécriture sont définies non seulement sur l'algèbre engendrée par Γ mais sur les termes de Γ_{\uparrow} . On obtient ainsi les *systèmes de réécriture avec substitutions explicites*.

Définition 7.7 *Etant donnée une signature Γ et un ensemble de règles de réécriture \mathcal{R} sur Γ_{\uparrow} tel que toute règle vérifie les conditions suivantes :*

- le membre gauche est linéaire,
- les membres gauche et droit sont de la sorte **Terme**,
- le membre gauche est un terme de l'algèbre engendrée par Γ .

Le système de réécriture défini par Γ_{\uparrow} et la relation $\sigma_{\Gamma} \cup \mathcal{R}$ est appelé un système de réécriture avec substitutions explicites et noté $\text{XRS}[\Gamma, \mathcal{R}]$.

Une règle de réécriture du $\text{XRS}[\Gamma, \mathcal{R}]$ est dite du premier ordre si son membre droit est un terme de l'algèbre engendrée par Γ . Les autres règles sont dites des règles d'ordre supérieur. L'ensemble de règles du premier ordre est noté \mathcal{R}^1 et l'ensemble de règles d'ordre supérieur est noté $\mathcal{R}^>$.

Dans [Pag98] et [Pag97], Pagano montre plusieurs théorèmes permettant de prouver la confluence d'un XRS si différentes conditions sont vérifiées par les règles du XRS. L'objectif est d'utiliser des conditions sur \mathcal{R} simple à vérifier, c'est-à-dire qui se ramènent à des propriétés structurelles ou locales. Nous présentons ici un de ces théorèmes.

Théorème 7.2 ([Pag98]) *Etant donnée une signature Γ et les ensembles de règles de réécriture \mathcal{R}^1 et $\mathcal{R}^>$ sur Γ_{\uparrow} tel que :*

- $\mathcal{R}^>$ est orthogonal et orthogonal avec \mathcal{R}^1 ,
- toutes les règles de \mathcal{R}^1 et de $\mathcal{R}^>$ sont linéaires à gauche,
- \mathcal{R}^1 est confluent sur Γ_{\uparrow} .

Le système de réécriture avec substitutions explicites $\text{XRS}[\Gamma, \mathcal{R}^1 \cup \mathcal{R}^>]$ est confluent.

7.5.2 Le $\rho\sigma$ -calcul comme XRS

On peut définir immédiatement un XRS représentant le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul en précisant que le symbole λ a l'arité de liaison (1) et l'ensemble de règles \mathcal{R} contient une seule règle d'ordre supérieur :

$$(\lambda t)u \xrightarrow{\text{Beta}} t\langle u.id \rangle$$

En utilisant les théorèmes de confluence pour les XRSs on peut montrer que le système de réécriture avec substitutions explicites $\text{XRS}[\{\lambda, (..)\}, \text{Beta}]$ (i.e. le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul) est confluent.

Nous voulons donc utiliser une approche similaire et décrire le $\rho\sigma$ -calcul comme un XRS. Il faut donc définir l'arité de liaison de chaque opérateur du $\rho\sigma$ -calcul. En prenant les arités de liaison $(0, \dots, 0)$ pour le symbole d'ensemble $\{\}$ et pour tous les symboles f de la signature du $\rho\sigma$ -calcul, $(0, 0)$ pour l'opérateur d'application $\llbracket () \rrbracket$ et (n, n) pour l'opérateur d'abstraction (\rightarrow_n) nous obtenons les règles *set*, *op*, *app* et *lam* du σ_{ρ} -calcul.

Nous obtenons ainsi le $\text{XRS}[\Gamma_{\rho}, \mathcal{R}_{\rho}]$ où Γ_{ρ} est la signature contenant les symboles d'une signature du premier ordre \mathcal{F} et les opérateurs $\llbracket () \rrbracket$, $\{\}$ et \rightarrow_n et $\mathcal{R}_{\rho} = \mathcal{R}_{\rho}^1 \cup \mathcal{R}_{\rho}^>$ avec l'ensemble \mathcal{R}_{ρ}^1 contenant les règles *Congruence*, *Congruence_fail*, *Batch*, *Switch_R*, *OpOnSet* et *Flat* et l'ensemble $\mathcal{R}_{\rho}^>$ contenant la règle *Fire*.

Ainsi, prouver la confluence du $\rho\sigma$ -calcul revient à prouver la confluence du système de réécriture avec substitutions explicites $\text{XRS}[\Gamma_{\rho}, \mathcal{R}_{\rho}]$ et il suffit donc de montrer que les conditions de confluence imposées pour les règles de \mathcal{R}_{ρ} sont satisfaites.

Ces conditions ne sont pas vérifiées si aucune condition n'est imposée pour la règle *Fire*. Malheureusement les théorèmes de confluence pour les XRSs ne sont pas applicables non plus si nous utilisons la règle conditionnelle *Fire_c* présentée dans la Section 7.4 et imposant une condition de termes ρ -calculables.

Nous pouvons renforcer les conditions de cette règle afin d'utiliser les théorèmes de confluence et en particulier le Théorème 7.2 mais la condition d'orthogonalité est très forte et nécessite une condition dans la règle *Fire* permettant d'éviter les paires critiques entre cette règle et les autres règles du calcul. Ceci implique l'application d'une règle de réécriture $l \rightarrow r$ à un terme t seulement si tous les termes l, r, t ne contiennent pas d'ensemble et de radical, ce qui représente une restriction forte par rapport aux objectifs que nous nous sommes fixé au départ.

Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre une version du $\rho\sigma$ -calcul avec substitutions explicites, le $\rho\sigma$ -calcul.

Nous avons étendu la syntaxe du ρ -calcul en introduisant les définitions des substitutions et un opérateur décrivant leur application. Le calcul de substitution est une extension du σ_{\uparrow} -calcul [CHL96] et il peut être obtenu comme une instance du Γ_{\uparrow} -calcul [Pag97].

Une preuve de la confluence du $\rho\sigma$ -calcul utilisant une stratégie restrictive d'évaluation est obtenue immédiatement si on le considère comme un XRS et qu'on utilise les théorèmes de

confluence de XRSs [Pag98]. Puisque les conditions qu'on doit imposer en utilisant cette méthode sont relativement fortes, nous avons employé une approche inspirée de celle utilisée pour la preuve de confluence du $\lambda\sigma_{\uparrow}$ -calcul, ce qui nous a permis d'obtenir la confluence sous les mêmes conditions que pour le ρ_{\emptyset} -calcul.

Conclusion

Nous nous sommes consacrés au cours de ce travail à l'étude d'un calcul suffisamment puissant pour décrire non seulement la réécriture avec des règles conditionnelles mais aussi leur contrôle. Nous avons ainsi proposé le ρ -calcul qui intègre les propriétés complémentaires de la réécriture du premier ordre et du λ -calcul ainsi que des caractéristiques permettant d'exprimer le non-déterminisme. Ce calcul nous permet la description des langages basés sur la réécriture et nous avons analysé plus en détail la description des règles et stratégies du langage ELAN.

Au cours de la mise en oeuvre du ρ -calcul nous avons été amenés à choisir parmi plusieurs approches possibles pour la représentation des termes, pour les règles d'évaluation, pour le système de types, etc.. Nous avons discuté nos principaux choix et nous avons également présenté des approches différentes à celles choisies.

Le calcul

L'application d'une règle de réécriture n'est pas une opération explicite dans la définition de la relation la réécriture. Si l'ensemble de règles de réécriture est confluent et terminant, l'ordre et la position d'application des règles ne sont pas significatives par rapport au résultat final. Néanmoins, on est souvent amenés à utiliser des systèmes de réécriture où l'ordre et la position d'application sont essentielles soit pour la valeur du résultat obtenu, soit simplement pour l'efficacité de l'exécution. Nous avons donc considéré l'application comme une opération au même niveau du calcul que l'abstraction, c'est-à-dire que les règles de réécriture.

Puisque l'application est un objet du calcul, on peut l'utiliser dans la construction de règles de réécriture obtenant ainsi des règles où les membres gauche et droit peuvent être autre chose que de simples termes du premier ordre. Les applications dans le membre droit d'une règle peuvent être vues comme des opérations locales et en effet ce type de constructions est utilisé pour décrire les règles de réécriture avec affectations locales. Grâce à l'expressivité du filtrage l'utilisation des applications dans le membre droit d'une règle permet aussi la représentation des règles de réécriture conditionnelles. Nous nous sommes concentré dans cette thèse sur l'utilisation des règles de réécriture avec un terme du premier ordre comme membre gauche mais l'étude des règles construites sans aucune restriction fait partie de nos perspectives.

Nous obtenons ainsi un calcul similaire au λ -calcul avec motifs où l'abstraction est faite non seulement par rapport à une variable mais en considérant aussi le contexte de la variable. Ce type d'abstraction nous donne une information purement syntaxique sur le contexte de la variable mais ne peut pas exprimer d'autres propriétés du contexte. Nous avons donc introduit comme paramètre du ρ_T -calcul la théorie T décrivant le comportement des symboles de la signature. Ceci nous permet d'exprimer implicitement des propriétés pour les symboles comme, par exemple, l'associativité et la commutativité de l'opérateur “+” de l'arithmétique.

Le filtrage utilisé pour lier les variables à leurs valeurs actuelles est effectué dans la théorie

T et dans certains cas peut mener à des solutions multiples et donc à des résultats différents. Puisque nous voulons mémoriser tous les résultats possibles d'une application nous avons choisi de représenter l'ensemble des résultats au niveau objet du calcul. Ainsi, un ensemble vide de résultats représente un échec de filtrage et un ensemble ayant plus d'un élément représente les résultats non-déterministes d'une application. Les ensembles vides ainsi que les ensembles ayant plus d'un élément sont strictement propagés dans le sens où une sous-réduction menant à un ensemble vide ou ayant plus d'un élément conduit à un résultat vide ou ayant plus d'un élément pour la réduction principale.

La représentation des résultats au niveau objet du calcul permet la construction des règles de réécriture avec un ensemble comme membre droit et donc, avec un comportement explicitement non-déterministe. Une stratégie qui applique une des règles d'un ensemble de règles de réécriture d'une façon non-déterministe est représentée directement dans le ρ -calcul par l'ensemble contenant les règles respectives.

Nous avons ainsi obtenu un calcul dont les objets sont construits en partant d'une signature et en utilisant le symbole d'abstraction " \rightarrow ", le symbole d'application " $[]()$ " et les ensembles comme moyen d'encapsulation. Le résultat d'une réduction dans le ρ -calcul est soit un ensemble vide représentant l'échec de l'application, soit un singleton représentant un résultat déterministe, soit un ensemble ayant plusieurs éléments représentant un choix non-déterministe de résultats.

L'application d'une règle de réécriture $l \rightarrow r$ à un terme t , écrite $[l \rightarrow r](t)$, consiste à vérifier que le terme l subsume (filtre) le terme t et si c'est le cas, réécrire le terme t en le terme r où les variables sont remplacées par les termes obtenus en filtrant t avec l . Le filtrage entre les termes l et t ainsi que l'application de substitution résultant de ce processus sont des mécanismes décrits au niveau méta du ρ -calcul.

L'algorithme de *filtrage* est donc utilisé pour lier les variables à leurs valeurs actuelles. Au cours de cette thèse nous nous sommes concentré sur les propriétés du ρ_0 -calcul, c'est-à-dire le ρ -calcul avec un filtrage syntaxique. Dans le cas général, le ρ_T -calcul peut utiliser toute théorie et en particulier un filtrage équationnel ou un filtrage d'ordre supérieur avec motifs, mais si dans ces cas le pouvoir d'expression est clairement supérieur au cas syntaxique, il est plus difficile d'étudier les propriétés des calculs obtenus.

Comme dans tous les calculs utilisant des lieux, nous utilisons dans le ρ -calcul la substitution d'ordre supérieur et non le remplacement du premier ordre et donc, nous utilisons l' α -conversion pour éviter la capture des variables.

Substitutions explicites

Nous avons aussi proposé une version du calcul où l'application de substitution est décrite au même niveau que les autres règles d'évaluation du calcul. En s'inspirant des λ -calculs avec substitutions explicites, et du $\lambda\sigma_{\uparrow}$ en particulier, nous avons développé le ρ -calcul avec substitutions explicites, appelé le $\rho\sigma$ -calcul.

Nous avons étendu la syntaxe du ρ -calcul en introduisant les définitions des substitutions et un opérateur d'application de substitution. En utilisant le $\lambda\sigma_{\uparrow}$ comme point de départ, nous avons introduit des nouvelles règles d'évaluation pour décrire le comportement des substitutions.

Confluence

Nous avons étudié la confluence du calcul en se concentrant sur le cas du ρ_0 -calcul et nous avons remarqué immédiatement que cette propriété n'est pas vérifiée, principalement à cause du filtrage limité et de la manipulation des ensembles. La théorie de filtrage syntaxique est

très simple mais dans le même temps n'est pas assez puissante pour permettre suffisamment d'applications de règles de réécriture. Afin de résoudre ce problème nous aurions pu utiliser un filtrage d'ordre supérieur mais nous avons préféré garder le filtrage dans une théorie vide et imposer des stratégies d'évaluation garantissant la confluence.

Une première stratégie confluente consiste à réduire l'application d'une règle de réécriture seulement si le sujet de l'application est un terme clos du premier ordre. Nous évitons ainsi tous les problèmes induits par le filtrage sur des termes contenant des radicaux et par l'utilisation des ensembles. Cette stratégie est naturelle et simple à implanter mais relativement restrictive.

Nous avons donc introduit des conditions plus fines sur l'application d'une règle de réécriture et nous avons montré que ces conditions garantissent la confluence. De plus, les stratégies que nous avons proposées deviennent triviales (c'est-à-dire n'imposent aucune restriction) pour des restrictions du ρ_0 -calcul général à des calculs plus simples comme le λ -calcul.

En ce qui concerne le $\rho\sigma$ -calcul, nous nous sommes limité dans cette thèse à une version avec substitutions explicites du ρ_0 -calcul et, en s'inspirant des approches utilisées dans [CHL96] et [Pag98], nous avons montré que le $\rho\sigma$ -calcul est confluent dans les mêmes conditions que le ρ_0 -calcul.

Typage et terminaison

La seconde propriété nous permettant de conclure à l'unicité des formes normales est la terminaison.

Le ρ -calcul n'est évidemment pas terminant dans le cas non-typé. Afin de récupérer cette propriété nous avons procédé comme d'habitude et nous avons imposé une discipline plus stricte sur la formation des ρ -termes en introduisant une information de type pour chaque terme.

Nous avons présenté un système de types pour le ρ_0 -calcul permettant de typer un ρ -terme ensemble par le type de ses éléments. Nous avons montré que la réduction de tout terme *bien typé* est finie et préserve le type du terme initial.

Extension du calcul

Dans le ρ -calcul nous pouvons décrire explicitement l'application d'une règle de réécriture à une certaine position d'un terme de la même façon que l'application d'une abstraction est explicite dans le λ -calcul. Dans la réécriture cette information d'application n'est pas explicite et nous voulons représenter ce comportement dans le ρ -calcul.

Contrairement à la réécriture où une règle peut être appliquée seulement aux termes subsumés par le membre gauche de la règle, dans le ρ -calcul l'application d'une règle de réécriture peut échouer à cause d'un échec de filtrage. Le test d'un échec d'application s'avère une tâche plus difficile dans le ρ -calcul et nous avons été amenés à introduire un nouvel opérateur permettant de décrire cette propriété. Le calcul obtenu en ajoutant la description de cet opérateur au ρ -calcul est appelé le ρ^{1st} -calcul.

En partant des opérateurs du ρ^{1st} -calcul nous avons défini des opérateurs de parcours de terme et un opérateur permettant la description de l'application répétée d'un ρ -terme à un autre ρ -terme. Ces derniers opérateurs nous permettent, par exemple, de définir des ρ -termes représentant la normalisation *innermost* et *outermost* par rapport à un ensemble de règles de réécriture.

Nous n'avons pas étudié en détail la confluence de ce calcul mais les stratégies d'évaluation utilisées dans le cas de base peuvent être facilement adaptées pour tenir compte des nouveaux opérateurs introduits dans le ρ^{1st} -calcul.

Expressivité du calcul

Le ρ -calcul est conceptuellement simple tout en étant très expressif. Ceci nous a permis de représenter les termes et les réductions du λ -calcul et de la réécriture conditionnelle. Nous avons proposé une traduction entre les λ -termes et les ρ -termes et nous avons montré que les réductions des termes correspondants sont équivalentes modulo la manipulation des ensembles, manipulation qui est triviale dans ce cas.

Nous avons présenté une méthode de construction d'un ρ -terme avec une ρ -réduction similaire à la réduction d'un terme par rapport à un système de réécriture. Un tel terme est construit en utilisant les étapes intermédiaires de la réduction ou autrement dit, les termes de preuve de la logique de réécriture. Puisque toute l'information de réduction est explicite dans les ρ -termes ainsi obtenus, ces termes sont très compliqués et particulièrement dans les cas où des règles de réécriture conditionnelles sont utilisées. Les termes du ρ^{1st} -calcul représentant des stratégies de normalisation nous ont permis d'obtenir un codage naturel et plus concis de la réécriture conditionnelle.

En partant de la représentation des règles de réécriture conditionnelles nous avons montré comment le ρ -calcul peut être employé pour donner une sémantique à l'application des règles du langage ELAN. Puisque les règles de réécriture du ρ -calcul peuvent contenir des applications dans le membre droit, la représentation des règles ELAN avec affectations locales est immédiate, mais la combinaison des méthodes utilisées pour les règles purement conditionnelles et pour les règles contenant que des affectations locales doit être faite soigneusement. La construction de factorisation d'ELAN permettant de définir plusieurs réductions possibles pour un même terme de départ est naturellement représentée en ρ -calcul par une règle de réécriture avec un ensemble représentant les réductions possibles comme membre droit.

Les stratégies ELAN sont, dans la plupart des cas, représentées directement dans le ρ -calcul. En effet, l'expressivité du ρ -calcul nous a permis de représenter explicitement le mécanisme d'évaluation ELAN, basé sur l'utilisation d'une stratégie de normalisation *innermost* pour les règles non-nommées et des stratégies définies pour les règles nommées. Nous pouvons donc représenter un programme ELAN par un ρ -terme approprié ; le ρ -calcul fournit donc une sémantique opérationnelle complète au langage ELAN.

Perspectives

Nous voyons deux directions principales pour continuer ce travail : d'une part l'analyse des *propriétés* du ρ_T -calcul où T est une théorie de filtrage plus élaboré que la théorie syntaxique et d'autre part, l'utilisation et éventuellement l'amélioration de l'*expressivité* du calcul afin de décrire d'autres formalismes et langages.

Propriétés du ρ_T -calcul

Nous avons montré la *confluence* du ρ_0 -calcul ainsi que la *terminaison* du ρ_0 -calcul typé et nous voulons étendre ces propriétés pour d'autres instances du ρ_T -calcul général et principalement pour les cas des théories équationnelles.

La preuve de la confluence du ρ_0 -calcul a été réalisée en séparant les propriétés qui utilisent les caractéristiques du filtrage employé et les propriétés indépendantes de la théorie du filtrage. Les propriétés de la relation *Set* engendrée par les règles d'évaluation décrivant le comportement des ensembles ne sont pas influencées par la théorie de filtrage utilisée mais la confluence de la relation

FireCong décrivant l'application d'une règle de réécriture dépend fortement des caractéristiques du filtrage utilisé. Afin de montrer la confluence du ρ_T -calcul nous devons exhiber les conditions sur la théorie T de filtrage nous permettant de prouver la stabilité du nombre de solutions par rapport à la réduction ainsi que de montrer que les lemmes du cas syntaxique sont valides pour chaque solution. La théorie de filtrage intervient aussi dans la cohérence entre les relations *FireCong* et *Set* et le lemme montrant cette propriété dans le cas syntaxique doit être étendu afin de prendre en compte un filtrage éventuellement non-unitaire.

Nous envisageons une description générique des conditions qui doivent être imposées pour le filtrage dans la théorie T afin d'obtenir la confluence du ρ_T -calcul et ensuite montrer que ces conditions sont satisfaites pour des théories particulières telles que l'associativité et la commutativité.

De la même manière, des conditions génériques pour le filtrage seront utilisées pour la preuve de terminaison du ρ_T -calcul typé. En plus, l'extension dans un cadre typé de l'algorithme de filtrage utilisé dans le cas non-typé doit garantir que les substitutions obtenues sont bien typées. Une autre extension possible du système de types existant est la description du polymorphisme.

Expressivité du ρ_T -calcul

L'analyse de l'*expressivité* du ρ -calcul doit être certainement continuée. Nous avons montré que le ρ -calcul de base est suffisamment puissant pour exprimer explicitement des réductions dans différents formalismes et nous avons introduit de nouveaux opérateurs dans le ρ^{1st} -calcul permettant d'exprimer certaines réductions d'une manière plus concise. Nous voulons, d'une part représenter d'autres formalismes dans le ρ -calcul et d'autre part simplifier la définition des opérateurs du ρ^{1st} -calcul.

On doit ainsi analyser la possibilité d'exprimer les opérateurs définis dans le ρ^{1st} -calcul d'une manière plus simple et éventuellement directe. Un premier challenge sera la représentation d'un opérateur testant l'échec en utilisant seulement les opérateurs du ρ_0 -calcul mais ceci semble une tâche difficile dans un calcul où l'échec est une propriété propagée strictement. Deuxièmement, la plupart des opérateurs du ρ^{1st} -calcul ont été définis en utilisant un opérateur de point fixe inspiré du combinateur de point fixe de Turing du λ -calcul. Cet opérateur n'utilise pas la puissance du filtrage et on peut se demander si une construction plus astucieuse ne peut pas être réalisée en exploitant toutes les caractéristiques du ρ_0 -calcul.

Nous avons montré que le ρ_0 -calcul permet la représentation du λ -calcul et de la réécriture mais aussi des langages basés sur ces formalismes. Le langage ELAN en est un exemple et cette approche peut être appliquée à beaucoup d'autres cadres, y compris des langages basés sur la réécriture comme ASF+SDF [Deu96], CafeOBJ [FN97], Maude [CELM96], ML [Mil84] ou Stratego [Vis99] mais également à des systèmes de production et systèmes de transitions non-déterministes. Les démonstrateurs de théorèmes utilisant la réécriture représentent un autre domaine d'intérêt pour notre approche et plus particulièrement nous envisageons l'utilisation du ρ -calcul pour la représentation des "tactics" et "tacticals" des prouveurs comme par exemple LCF [Pau83, GMW79], HOL [GM93] ou Coq [BBC⁺97].

En partant de la représentation du λ -calcul et de la réécriture du premier ordre nous envisageons d'approfondir la liaison entre le ρ_T -calcul et les systèmes de réécriture d'ordre supérieur. Si la formalisation de la correspondance entre le ρ -calcul et les extensions algébriques du λ -calcul doit être relativement facile, la représentation des réductions d'un système de réécriture avec abstracteur comme les CRSs ou les HRSs semble plus compliquée et nécessite l'utilisation d'un

ρ_T -calcul avec une théorie T d'ordre supérieur.

Nous avons utilisé les ensembles comme moyen de représenter le non-déterminisme et nous avons mentionné que d'autres structures peuvent être utilisées. Par exemple, si nous voulons représenter tous les résultats d'une application et non seulement les résultats différents, alors des multi-ensembles doivent être utilisés et si l'ordre des résultats est significatif alors une structure de liste est plus appropriée. Nous avons donc entamé avec Claude Kirchner et Luigi Liquori l'étude d'une autre description du ρ -calcul ayant comme paramètre non seulement la théorie de filtrage mais aussi la construction utilisée pour structurer les résultats. Nous avons ainsi obtenu un calcul plus flexible et nous avons déjà montré son pouvoir d'expressivité. Plus précisément, nous avons analysé la correspondance entre le ρ -calcul et deux calculs qui ont fortement influencé la recherche dans le domaine des paradigmes orientés objets : le "*Object Calculus*" de Abadi et Cardelli [AC96] et le "*Lambda Calculus of Objects*" de Fisher, Honsell et Mitchell [FHM94]. Nous avons défini les opérateurs des deux calculs en utilisant les opérateurs du ρ -calcul et nous avons montré qu'à toute réduction d'un terme t en t' dans ces calculs il correspond la réduction dans le ρ -calcul de la ρ -translation du terme t en la ρ -translation du terme t' . L'approche que nous avons proposée permet la représentation des objets dans le style des deux calculs mentionnés mais aussi des objets plus élaborés dont le comportement est décrit en utilisant le filtrage. Nous envisageons de continuer ce travail en montrant la confluence des instances du ρ -calcul utilisées pour encoder les formalismes ci-dessus et en proposant un système de types approprié dans ce contexte.

Sur un plan pratique les différentes instances du ρ -calcul doivent être implantées et utilisées comme outils de réécriture. Nous avons réalisé une implantation en ELAN du ρ_θ -calcul et nous avons expérimenté différentes stratégies d'évaluation. Nous voulons continuer dans cette direction et décrire des paradigmes orientés objets en s'appuyant sur l'implantation du ρ_θ -calcul. Dans le cadre de l'étude des paradigmes orientés objets en réécriture, Hubert Dubois a réalisé une version objet du langage ELAN dont la sémantique opérationnelle est fournie par le ρ -calcul.

Bibliographie

- [AC96] M. Abadi and L. Cardelli. *A Theory of Objects*. Springer Verlag, 1996.
- [ACCL90] M. Abadi, L. Cardelli, P.-L. Curien, and J.-J. Lévy. Explicit substitutions. In *Conference Record of the Seventeenth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 31–46, 1990.
- [Acz78] P. Aczel. A general Church-Rosser theorem. Technical report, University of Manchester, July 1978.
- [AK92] M. Adi and C. Kirchner. Associative commutative matching based on the syntacticity of the AC theory. In F. Baader, J. Siekmann, and W. Snyder, editors, *Proceedings 6th International Workshop on Unification, Dagstuhl (Germany)*. Dagstuhl seminar, 1992.
- [ASU72] A. V. Aho, R. Sethi, and J. D. Ullman. Code optimization and finite Church-Rosser systems. In *Proceedings of Courant Computer Science*, pages 89–105. Prentice Hall, 1972.
- [Bar84] H. P. Barendregt. *The Lambda-Calculus, its syntax and semantics*. Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), Amsterdam, 1984. Second edition.
- [BBC⁺97] B. Barras, S. Boutin, C. Cornes, J. Courant, J. Filliatre, E. Giménez, H. Herbelin, G. Huet, C. M. noz, C. Murthy, C. Parent, C. Paulin, A. Saïbi, and B. Werner. The Coq Proof Assistant Reference Manual – Version V6.1. Technical Report 0203, INRIA, August 1997.
- [BCD⁺00] P. Borovanský, H. Cirstea, H. Dubois, C. Kirchner, H. Kirchner, P.-E. Moreau, C. Ringeissen, and M. Vittek. *ELAN V 3.4 User Manual*. LORIA, Nancy (France), fourth edition, January 2000.
- [BCL87] A. Ben Cherifa and P. Lescanne. Termination of rewriting systems by polynomial interpretations and its implementation. *Science of Computer Programming*, 9(2) :137–160, October 1987.
- [Bir35] G. Birkhoff. On the structure of abstract algebras. *Proceedings Cambridge Phil. Soc.*, 31 :433–454, 1935.
- [BKK98] P. Borovanský, C. Kirchner, and H. Kirchner. A functional view of rewriting and strategies for a semantics of ELAN. In M. Sato and Y. Toyama, editors, *The Third Fuji International Symposium on Functional and Logic Programming*, pages 143–167, Kyoto, April 1998. World Scientific. Also report LORIA 98-R-165.
- [BK KM99] P. Borovanský, C. Kirchner, H. Kirchner, and P.-E. Moreau. *ELAN from the rewriting logic point of view*. Research report, LORIA, November 1999.

- [BKKR01] P. Borovanský, C. Kirchner, H. Kirchner, and C. Ringeissen. Rewriting with strategies in ELAN : a functional semantics. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 2001.
- [BN98] F. Baader and T. Nipkow. *Term Rewriting and all That*. Cambridge University Press, 1998.
- [Bor95] P. Borovanský. Implementation of higher-order unification based on calculus of explicit substitutions. In M. Bartošek, J. Staudek, and J. Wiedermann, editors, *Proceedings of the SOFSEM'95 : Theory and Practice of Informatics*, volume 1012 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 363–368. Springer-Verlag, 1995.
- [Bor98] P. Borovanský. *Le contrôle de la réécriture : étude et implantation d'un formalisme de stratégies*. Thèse de Doctorat d'Université, Université Henri Poincaré – Nancy 1, France, October 1998. also TR LORIA 98-T-326.
- [BP85] L. Bachmair and D. Plaisted. Associative path orderings. In *Proceedings 1st Conference on Rewriting Techniques and Applications, Dijon (France)*, volume 202 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1985.
- [BR95] A. Bouhoula and M. Rusinowitch. Implicit induction in conditional theories. *Journal of Automated Reasoning*, 14(2) :189–235, 1995.
- [BT88] V. Breazu-Tannen. Combining algebra and higher-order types. In *Proceedings 3rd IEEE Symposium on Logic in Computer Science, Edinburgh (UK)*, pages 82–90, 1988.
- [Cas98] C. Castro. *Une approche déductive de la résolution de problèmes de satisfaction de contraintes*. Thèse de Doctorat d'Université, Université Henri Poincaré – Nancy 1, France, 1998.
- [CELM96] M. Clavel, S. Eker, P. Lincoln, and J. Meseguer. Principles of Maude. In J. Meseguer, editor, *Proceedings of the first international workshop on rewriting logic*, volume 4, Asilomar (California), September 1996. Electronic Notes in Theoretical Computer Science.
- [CHL96] P.-L. Curien, T. Hardin, and J.-J. Lévy. Confluence properties of weak and strong calculi of explicit substitutions. *Journal of the ACM*, 43(2) :362–397, 1996.
- [Chu41] A. Church. *The Calculi of Lambda Conversion*. Princeton University Press, Princeton, 1941.
- [Cir99] H. Cirstea. Specifying authentication protocols using ELAN. In *Workshop on Modelling and Verification*, Besancon, France, December 1999.
- [CK97] H. Cirstea and C. Kirchner. Theorem proving using computational systems : The case of the B predicate prover. In *Workshop CCL'97*, Schloß Dagstuhl, Germany, September 1997.
- [CK98] H. Cirstea and C. Kirchner. The rewriting calculus as a semantics of ELAN. In J. Hsiang and A. Ohori, editors, *4th Asian Computing Science Conference*, volume 1538 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 8–10, Manila, The Philippines, December 1998. Springer-Verlag.
- [CK99a] H. Cirstea and C. Kirchner. Combining higher-order and first-order computation using ρ -calculus : Towards a semantics of ELAN. In D. Gabbay and M. de Rijke, editors, *Frontiers of Combining Systems 2*, Research Studies, ISBN 0863802524, pages 95–120. Wiley, 1999.

-
- [CK99b] H. Cirstea and C. Kirchner. An introduction to the rewriting calculus. Research Report RR-3818, INRIA, December 1999.
 - [CK00] H. Cirstea and C. Kirchner. The simply typed rewriting calculus. In *Third International Workshop on Rewriting Logic and Application*, Kanazawa (Japan), September 2000.
 - [Col88] L. Colson. Une structure de données pour le λ -calcul typé. Private Communication, 1988.
 - [Dau89] M. Dauchet. Simulation of Turing machines by a left-linear rewrite rule. In N. Dershowitz, editor, *Proceedings 3rd Conference on Rewriting Techniques and Applications, Chapel Hill (N.C., USA)*, volume 355 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 109–120. Springer-Verlag, April 1989.
 - [dB72] N. de Bruijn. Lambda calculus notation with nameless dummies, a tool for automatic formula manipulation, with application to the church-rosser theorem. *Indagationes Mathematicae*, 34(5) :381–392, 1972.
 - [dB78] N. G. de Bruijn. Lambda calculus with namefree formulas involving symbols that represent reference transforming mappings. *Indagationes Mathematicae*, 40 :348–356, 1978.
 - [DDHY92] D. Dill, A. Drexler, A. Hu, and C. Yang. Protocol verification as a hardware design aid. In *IEEE International Conference on Computer Design : VLSI in Computers and Processors*, pages 522–525. IEEE computer society, 1992.
 - [Der82] N. Dershowitz. Orderings for term-rewriting systems. *Theoretical Computer Science*, 17 :279–301, 1982.
 - [Der85] N. Dershowitz. Computing with rewrite systems. *Information and Control*, 65(2/3) :122–157, 1985.
 - [Der87] N. Dershowitz. Termination of rewriting. *Journal of Symbolic Computation*, 3(1 & 2) :69–116, 1987.
 - [Deu96] A. Deursen. An Overview of ASF+SDF. In *Language Prototyping*, pages 1–31. World Scientific, 1996. ISBN 981-02-2732-9.
 - [dG00] P. de Groote. Higher-order linear matching is NP-complete. In L. Bachmair, editor, *Rewriting Techniques and Applications (RTA'00)*, volume 1833 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 127–140, Norwich, U.K., July 2000. Springer-Verlag.
 - [DHK98] G. Dowek, T. Hardin, and C. Kirchner. Theorem proving modulo. Rapport de Recherche 3400, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, April 1998. <ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/RR/RR-3400.ps.gz>.
 - [DHK00] G. Dowek, T. Hardin, and C. Kirchner. Higher-order unification via explicit substitutions. *Information and Computation*, 157(1/2) :183–235, 2000.
 - [DHKP96] G. Dowek, T. Hardin, C. Kirchner, and F. Pfenning. Unification via explicit substitutions : The case of higher-order patterns. In M. Maher, editor, *Proceedings of JICSLP'96*, Bonn (Germany), September 1996. The MIT press.
 - [DJ90] N. Dershowitz and J.-P. Jouannaud. Rewrite Systems. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, chapter 6, pages 244–320. Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1990.

- [DO90] N. Dershowitz and M. Okada. A rationale for conditional equational programming. *Theoretical Computer Science*, 75 :111–138, 1990.
- [Dow92] G. Dowek. Third order matching is decidable. In *Proceedings of LICS'92*, Santa-Cruz (California, USA), June 1992.
- [Eke93] S. Eker. Improving the efficiency of AC matching and unification. Research report 2104, INRIA, Inria Lorraine & Crin, November 1993.
- [FH83] F. Fages and G. Huet. Unification and matching in equational theories. In *Proceedings Fifth Colloquium on Automata, Algebra and Programming, L'Aquila (Italy)*, volume 159 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 205–220. Springer-Verlag, 1983.
- [FHM94] K. Fisher, F. Honsell, and J. C. Mitchell. A Lambda Calculus of Objects and Method Specialization. *Nordic Journal of Computing*, 1(1) :3–37, 1994.
- [Fil78] R. Filman. Personal communication in [Der87], 1978.
- [FN97] K. Futatsugi and A. Nakagawa. An overview of CAFE specification environment – an algebraic approach for creating, verifying, and maintaining formal specifications over networks. In *Proceedings of the 1st IEEE Int. Conference on Formal Engineering Methods*, 1997.
- [Gad96] F. Gadducci. *On the Algebraic Approach to Concurrent Term Rewriting*. PhD thesis, Università di Pisa, January 1996.
- [Gan80] R. Gandy. Proof of strong normalisation. In J. P. Seldin and J. R. Hindley, editors, *Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus, and Formalism*. Academic Press inc., New York (NY, USA), 1980.
- [GBT89] J. Gallier and V. Breazu-Tannen. Polymorphic rewriting conserves algebraic strong normalization and confluence. In *16th Colloquium Automata, Languages and Programming*, volume 372 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 137–150. Springer-Verlag, 1989.
- [GG95] T. Genet and I. Gnaedig. Solving GPO ordering constraints with shared term data structure. Technical Report 95-R-363, CRIN, 1995.
- [Gir72] J.-Y. Girard. *Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur*. PhD thesis, Université Paris VII, June 1972.
- [GKK⁺87] J. A. Goguen, C. Kirchner, H. Kirchner, A. Mègreli, J. Meseguer, and T. Winkler. An introduction to OBJ-3. In J.-P. Jouannaud and S. Kaplan, editors, *Proceedings 1st International Workshop on Conditional Term Rewriting Systems, Orsay (France)*, volume 308 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 258–263. Springer-Verlag, July 1987. Also as internal report CRIN : 88-R-001.
- [GLT89] J.-Y. Girard, Y. Lafont, and P. Taylor. *Proofs and Types*, volume 7 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 1989.
- [GM93] M.-J.-C. Gordon and T.-F. Melham. *Introduction to HOL : a theorem proving environment for higher order logic*. Cambridge University Press, 1993. ISBN 0-521-44189-7.
- [GMW79] M. Gordon, A. Milner, and C. Wadsworth. *Edinburgh LCF : A Mechanized Logic of Computation*, volume 78 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, New York (NY, USA), 1979.

-
- [Hin97] J. R. Hindley. *Basic Simple Type Theory*, volume 42 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University, 1997.
 - [HL78] G. Huet and B. Lang. Proving and applying program transformations expressed with second-order patterns. *Acta Informatica*, 11 :31–55, 1978.
 - [HL79] G. Huet and J.-J. Lévy. Call by need computations in non-ambiguous linear term rewriting systems. Research report 359, INRIA, August 1979.
 - [HL89] T. Hardin and J.-J. Lévy. A confluent calculus of substitutions. In *France-Japan Artificial Intelligence and Computer Science Symposium*, Izu, 1989.
 - [HL91] G. Huet and J.-J. Lévy. Computations in orthogonal rewriting systems. In J.-L. Lassez and G. Plotkin, editors, *Computational Logic*, pages 395–443. The MIT press, 1991.
 - [HO83] C. M. Hoffmann and M. J. O'Donnell. Implementation of an interpreter for abstract equations. *ACM*, 0-89791-125-3/84/001/0111 :111–121, 1983.
 - [HS86] J. R. Hindley and J. P. Seldin. *Introduction to Combinators and Lambda-calculus*. Cambridge University, 1986.
 - [Hue73] G. Huet. A mechanization of type theory. In *Proceeding of the third international joint conference on artificial intelligence*, pages 139–146, 1973.
 - [Hue76] G. Huet. *Résolution d'équations dans les langages d'ordre 1,2, ..., ω* . Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris 7 (France), 1976.
 - [Hue80] G. Huet. Confluent reductions : Abstract properties and applications to term rewriting systems. *Journal of the ACM*, 27(4) :797–821, October 1980. Preliminary version in 18th Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE, 1977.
 - [JK86] J.-P. Jouannaud and H. Kirchner. Completion of a set of rules modulo a set of equations. *SIAM Journal of Computing*, 15(4) :1155–1194, 1986. Preliminary version in Proceedings 11th ACM Symposium on Principles of Programming Languages, Salt Lake City (USA), 1984.
 - [JK91] J.-P. Jouannaud and C. Kirchner. Solving equations in abstract algebras : a rule-based survey of unification. In J.-L. Lassez and G. Plotkin, editors, *Computational Logic. Essays in honor of Alan Robinson*, chapter 8, pages 257–321. The MIT press, Cambridge (MA, USA), 1991.
 - [JLR82] J.-P. Jouannaud, P. Lescanne, and F. Reinig. Recursive decomposition ordering. In D. Bjørner, editor, *Formal Description of Programming Concepts 2*, pages 331–348, Garmisch-Partenkirchen, Germany, 1982. Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland).
 - [JO97] J.-P. Jouannaud and M. Okada. Abstract data type systems. *Theoretical Computer Science*, 173(2) :349–391, 1997.
 - [Kah87] G. Kahn. Natural semantics. Technical Report 601, INRIA Sophia-Antipolis, February 1987.
 - [KB70] D. E. Knuth and P. B. Bendix. Simple word problems in universal algebras. In J. Leech, editor, *Computational Problems in Abstract Algebra*, pages 263–297. Pergamon Press, Oxford, 1970.
 - [Kha90] Z. Khasidashvili. Expression reduction systems. In *Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, volume 36, pages 200–220, 1990.

- [KK99] C. Kirchner and H. Kirchner. Rewriting, solving, proving. A preliminary version of a book available at www.loria.fr/~ckirchne/rsp.ps.gz, 1999.
- [KKR90] C. Kirchner, H. Kirchner, and M. Rusinowitch. Deduction with symbolic constraints. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 4(3) :9–52, 1990. Special issue on Automatic Deduction.
- [KKV93] C. Kirchner, H. Kirchner, and M. Vittek. Implementing computational systems with constraints. In P. Kanellakis, J.-L. Lassez, and V. Saraswat, editors, *Proceedings of the first Workshop on Principles and Practice of Constraint Programming, Providence (R.I., USA)*, pages 166–175. Brown University, 1993.
- [KKV95a] C. Kirchner, H. Kirchner, and M. Vittek. Designing constraint logic programming languages using computational systems. In P. Van Hentenryck and V. Saraswat, editors, *Principles and Practice of Constraint Programming. The Newport Papers.*, chapter 8, pages 131–158. The MIT press, 1995.
- [KKV95b] C. Kirchner, H. Kirchner, and M. Vittek. *ELAN V 1.17 User Manual*. Inria Lorraine & Crin, Nancy (France), first edition, November 1995.
- [KL80] S. Kamin and J.-J. Lévy. Attempts for generalizing the recursive path ordering. Unpublished manuscript, 1980.
- [Klo90] J. W. Klop. Term Rewriting Systems. In S. Abramsky, D. Gabbay, and T. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 1, chapter 6. Oxford University Press, 1990.
- [KLS96] C. Kirchner, C. Lynch, and C. Scharff. A fine-grained concurrent completion procedure. In H. Ganzinger, editor, *Proceedings of RTA '96*, volume 1103 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 3–17. Springer-Verlag, September 1996.
- [KM95] H. Kirchner and P.-E. Moreau. Prototyping completion with constraints using computational systems. In J. Hsiang, editor, *Proceedings 6th Conference on Rewriting Techniques and Applications, Kaiserslautern (Germany)*, volume 914 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 438–443. Springer-Verlag, 1995.
- [KM96] H. Kirchner and P.-E. Moreau. A reflective extension of Elan. In J. Meseguer, editor, *Proceedings of the first international workshop on rewriting logic*, volume 4, Asilomar (California), September 1996. Electronic Notes in Theoretical Computer Science.
- [KR98] C. Kirchner and C. Ringeissen. Rule-Based Constraint Programming. *Fundamenta Informaticae*, 34(3) :225–262, September 1998.
- [Kri90] J.-L. Krivine. *Lambda calculus, types and models*. Masson, 1990.
- [KvOvR93] J. Klop, V. van Oostrom, and F. van Raamsdonk. Combinatory reduction systems : introduction and survey. *Theoretical Computer Science*, 121 :279–308, 1993.
- [Lan75] D. S. Lankford. Canonical inference. Technical report, Louisiana Tech. University, 1975.
- [Lan77] D. S. Lankford. Some approaches to equality for computational logic : A survey and assessment. Memo ATP-36, Automatic Theorem Proving Project, University of Texas, Austin (Texas, USA), 1977.
- [Mau85] M. Mauny. *Compilation des langages fonctionnels dans les combinateurs catégoriques. Application au langage ML*. PhD thesis, Université de PARIS 7, France, 1985.

-
- [Mes89] J. Meseguer. General logics. In H.-D. E. et al., editor, *Logic Colloquium'87*, pages 275–329. Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1989.
 - [Mes92] J. Meseguer. Conditional rewriting logic as a unified model of concurrency. *Theoretical Computer Science*, 96(1) :73–155, 1992.
 - [Mil84] R. Milner. A proposal for standard ML. In *Proceedings ACM Conference on LISP and Functional Programming*, 1984.
 - [Mil91] D. Miller. A logic programming language with lambda-abstraction, function variables, and simple unification. In P. Schroeder-Heister, editor, *Extensions of Logic Programming : International Workshop, Tübingen, Germany, December 1989*, volume 475 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 253–281. Springer-Verlag, 1991.
 - [MK97] P.-E. Moreau and H. Kirchner. Compilation Techniques for Associative-Commutative Normalisation. In A. Sellink, editor, *Second International Workshop on the Theory and Practice of Algebraic Specifications*, Electronic Workshops in Computing, eWiC web site : <http://ewic.springer.co.uk/>, Amsterdam, September 1997. Springer-Verlag. 12 pages. Also report LORIA 97-R-109.
 - [MK98] P.-E. Moreau and H. Kirchner. A compiler for rewrite programs in associative-commutative theories. In *"Principles of Declarative Programming"*, number 1490 in *Lecture Notes in Computer Science*, pages 230–249. Springer-Verlag, September 1998. Report LORIA 98-R-226.
 - [New42] M. H. A. Newman. On theories with a combinatorial definition of equivalence. In *Annals of Math*, volume 43, pages 223–243, 1942.
 - [Nip89] T. Nipkow. Combining matching algorithms : The regular case. In N. Dershowitz, editor, *Proceedings 3rd Conference on Rewriting Techniques and Applications, Chapel Hill (N.C., USA)*, volume 355 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 343–358. Springer-Verlag, April 1989.
 - [Nip91] T. Nipkow. Higher-order critical pairs. In *Proc. 6th IEEE symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 342–349. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, July 1991.
 - [NP98] T. Nipkow and C. Prehofer. Higher-order rewriting and equational reasoning. In W. Bibel and P. Schmitt, editors, *Automated Deduction — A Basis for Applications. Volume I : Foundations*. Kluwer, 1998.
 - [NS78] R. Needham and M. Schroeder. Using encryption for authentication in large networks of computers. *Communications of the ACM*, 21(12) :993–999, 1978.
 - [O'D77] M. J. O'Donnell. *Computing in Systems Described by Equations*, volume 58 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1977.
 - [Oka89a] M. Okada. Strong normalizability for the combined system of the typed λ calculus and an arbitrary convergent term rewrite system. In G. H. Gonnet, editor, *Proceedings of the ACM-SIGSAM 1989 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation : ISSAC '89 / July 17–19, 1989, Portland, Oregon*, pages 357–363, New York, NY 10036, USA, 1989. ACM Press.
 - [Oka89b] M. Okada. Strong normalizability for the combined system of the typed Lambda-calculus and an arbitrary convergent term rewrite system. In *Proceedings of the ACM-SIGSAM 1989 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Portland (Oregon)*, pages 357–363. ACM Press, July 1989. Report CRIN 89-R-220.

- [Pad96] V. Padovani. *Filtrage d'ordre supérieur*. Thèse de Doctorat d'Université, Université Paris VII, 1996.
- [Pag97] B. Pagano. *Des calculs de substitution explicites et de leur application à la compilation des langages fonctionnels*. Thèse de Doctorat d'Université, U. Paris VI, 1997.
- [Pag98] B. Pagano. X.R.S : Explicit Reduction Systems - A First-Order Calculus for Higher-Order Calculi. In C. Kirchner and H. Kirchner, editors, *15th International Conference on Automated Deduction*, LNAI 1421, pages 72–87, Lindau, Germany, July 5–July 10, 1998. Springer-Verlag.
- [Pau83] L. C. Paulson. A higher-order implementation of rewriting. *Science of Computer Programming*, 3 :119–149, 1983.
- [PJ87] S. Peyton-Jones. *The implementation of functional programming languages*. Prentice Hall, Inc., 1987.
- [Pla78] D. Plaisted. A recursively defined ordering for proving termination of term rewriting systems. *Dept. of Computer Science Report 78-943*, 1978.
- [PS81] G. Peterson and M. E. Stickel. Complete sets of reductions for some equational theories. *Journal of the ACM*, 28 :233–264, 1981.
- [Rin96] C. Ringeissen. Combining decision algorithms for matching in the union of disjoint equational theories. *Information and Computation*, 126(2) :144–160, May 1996.
- [Rin97] C. Ringeissen. Prototyping Combination of Unification Algorithms with the ELAN Rule-Based Programming Language. In *Proceedings 8th Conference on Rewriting Techniques and Applications, Sitges (Spain)*, volume 1232 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 323–326. Springer-Verlag, 1997.
- [Río93] A. Ríos. *Contributions à l'étude des λ -calculs avec des substitutions explicites*. Thèse de Doctorat d'Université, U. Paris VII, 1993.
- [Ros73] B. K. Rosen. Tree-manipulating systems and Church-Rosser theorems. *Journal of the ACM*, 20(1) :160–187, 1973.
- [Tai67] W. Tait. Intensional interpretation of functionals of finite type I. *The Journal of Symbolic Logic*, 32, 1967.
- [Tur37] A. M. Turing. The \wp -functions in λ -K-conversion. *The Journal of Symbolic Logic*, 2 :164, 1937.
- [vdBvDK⁺96] M. van den Brand, A. van Deursen, P. Klint, S. Klusener, and E. A. van der Meulen. Industrial applications of asf+sdf. In M. Wirsing and M. Nivat, editors, *AMAST '96*, volume 1101 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 9–18. Springer-Verlag, 1996.
- [VeAB98] E. Visser and Z. el Abidine Benaïssa. A core language for rewriting. In C. Kirchner and H. Kirchner, editors, *Proceedings of the second International Workshop on Rewriting Logic and Applications*, volume 15, <http://www.elsevier.nl/locate/entcs/volume15.html>, Pont-à-Mousson (France), September 1998. Electronic Notes in Theoretical Computer Science.
- [Vis99] E. Visser. Strategic pattern matching. In P. Narendran and M. Rusinowitch, editors, *Rewriting Techniques and Applications (RTA'99)*, volume 1631 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 30–44, Trento, Italy, July 1999. Springer-Verlag.

-
- [Vit94] M. Vittek. *ELAN : Un cadre logique pour le prototypage de langages de programmation avec contraintes*. Thèse de Doctorat d'Université, Université Henri Poincaré – Nancy 1, October 1994.
- [Vit96] M. Vittek. A compiler for nondeterministic term rewriting systems. In H. Ganzinger, editor, *Proceedings of RTA'96*, volume 1103 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 154–168, New Brunswick (New Jersey), July 1996. Springer-Verlag.
- [vO90] V. van Oostrom. Lambda calculus with patterns. Technical report, Vrije Universiteit, Amsterdam, November 1990.
- [vOvR93] V. van Oostrom and F. van Raamsdonk. Comparing combinatory reduction systems and higher-order rewrite systems. In *HOA'93*, volume 816 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 276–304. Springer-Verlag, 1993.
- [vR96] F. van Raamsdonk. *Confluence and Normalization for HigherOrder Rewriting*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1996.
- [Wol93] D. A. Wolfram. *The Clausal Theory of Types*, volume 21 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 1993.
- [Wol99] S. Wolfram. *The Mathematica Book*, chapter Patterns, Transformation Rules and Definitions. Cambridge University Press, 1999. ISBN 0-521-64314-7.
- [YH90] H. Yokouchi and T. Hikita. A rewriting system for categorical combinators with multiple arguments. *SIAM Journal of Computing*, 19(1), February 1990.

Index

- abstraction, 31, 40, 42
- algèbre
 - hétérogène, 11
 - homogène, 9
 - initiale, 10
 - libre, 9
- α -conversion, 32, 43
- application, 31, 40, 42
- arguments, 42
- atomes, 31
- axiome, 13

- β -réduction, 32, 36

- calculabilité forte, 161
- codomaine, 12, 44
- compatible, 14
- confluence
 - forte, 15
 - locale, 15
- constante, 31, 42
- contexte, 150
 - consistant, 150
 - local, 150
- convergence, 15

- domaine, 12, 44

- égalité, 13
- environnements, 35
- équation, 13
- équation de filtrage, 45, 154

- faiblement normalisant, 16, 161
- fermeture compatible, 14
- fermeture par contexte, 14
- fermeture symétrique, 14
- fermeture transitive, 14
- filtre, 45
- forme normale, 15
- fortement normalisant, 16, 161

- greffe, 43, 44

- identité, 35, 107
 - id*, 107

- lift, \uparrow , 36

- normalisant, 16

- ordre, 14
 - de réduction, 18
 - de simplification, 19
 - noéthérien, 14
 - préordre, 14
 - total, 14

- position, 10
 - $\mathcal{Pos}(t)$, 10
 - constante, $\mathcal{CPos}(t)$, 10
 - fonctionnelle, 42
 - non variable, $\mathcal{FPos}(t)$, 10
 - variable, $\mathcal{VPos}(t)$, 10

- précédence, 19
- présentation équationnelle, 13
- profil, 11, 150
- profondeur, 10

- radical, 52
 - β -radical, 32
 - ρ -radical, 40, 52

- réductible, 15
- règle d'évaluation, 41
- règle de réécriture, 17, 42
 - linéaire à gauche, 17
 - quasi-régulière, 97
 - régulière, 17
 - stable, 101
 - strictement linéaire à droite, 96

- relation, 14
 - cohérentes, 17
 - compatible, 14
 - d'équivalence, 14

- de réécriture, 17, 52
- de sous-terme, 10
- faiblement normalisable, 16
- fermeture compatible, 14
- fermeture par contexte, 14
- fermeture symétrique, 14
- fermeture transitive, 14
- fortement normalisable, 16
- normalisable, 16
- remplacement, 14
- renommage, 12
- ρ -calculables, 68
- ρ -préfiltrables, 67
- ρ -safe, 67
- SC, 161
- shift, \uparrow , 36
- signature, 9
 - de la logique de réécriture, 20
- SN, 161
- Solution, 45
- sorte, 11
- sous-terme, 10
 - strict, 10
- stratégie, 23, 24, 150
 - d'évaluation, 41, 51
- strong computability, 161
- strongly normalizing, 16, 161
- substitution, 12, 41, 43, 44
 - \mathbb{ID} , 45, 154
 - bien typée, 153
 - codomaine, 12, 44
 - domaine, 12, 44
 - idempotente, 12
 - renommage, 12
 - typée, 153
- subsume, 12, 45
- subsume faiblement, 66
- syntaxe, 41
- système de calcul, 23, 24
- système de filtrage, 45, 154
 - trivial, 45, 154
- système de réécriture, 17
 - conditionnel naturel, 19
 - conditionnel normal, 20
 - conditionnel standard, 19
 - conditionnels, 19
- terme, 9
 - bien typé, 34, 151, 168
 - clos, 10
 - du premier ordre, 9
 - λ -terme, 31
 - λ_{DB} -terme, 34
 - linéaire, 10
 - ρ -calculables, 68
 - ρ -préfiltrables, 67
 - ρ -safe, 67
 - ρ -terme, 41
 - typable, 151
- terminaison, 15, 17
- théorie équationnelle, 13
- théorie de réécriture, 21
- type, 33, 149
 - atomique, 149
 - composé, 33, 149
 - de base, 33
- valuation, 44
- variable
 - capturée, 32
 - liée, 32, 43, 150
 - libre, 31, 32, 43, 150
 - présente, 96
 - typée, 33, 150
- weakly normalizing, 16

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude d'un calcul permettant de décrire l'application de règles de réécriture conditionnelles et de représenter les résultats obtenus. Nous introduisons le calcul de réécriture, appelé aussi le rho-calcul, qui généralise la réécriture du premier ordre et le lambda-calcul tout en permettant d'exprimer le non-déterminisme. Dans notre approche, l'opérateur d'abstraction ainsi que l'opérateur d'application sont des objets du calcul. Le résultat d'une réduction dans le calcul de réécriture est soit un ensemble vide représentant l'échec de l'application, soit un singleton représentant un résultat déterministe, soit un ensemble ayant plusieurs éléments représentant un choix non-déterministe de résultats.

Au cours de cette thèse nous nous concentrons sur les propriétés du calcul de réécriture utilisant un filtrage syntaxique pour lier les variables à leurs valeurs actuelles. Nous définissons des stratégies d'évaluation garantissant la confluence du calcul et nous montrons que ces stratégies deviennent triviales pour des restrictions du calcul de réécriture général à des calculs plus simples comme le lambda-calcul. Le calcul de réécriture n'est pas terminant dans le cas non-typé mais la terminaison forte est obtenue pour le calcul simplement typé.

Dans le calcul de réécriture étendu par un opérateur permettant de tester l'échec de l'application nous définissons des termes représentant la normalisation *innermost* et *outermost* par rapport à un ensemble de règles de réécriture. En utilisant ces termes, nous obtenons un codage naturel et concis de la réécriture conditionnelle. Enfin, à partir de la représentation des règles de réécriture conditionnelles, nous montrons comment le calcul de réécriture peut être employé pour donner une sémantique au langage ELAN basé sur l'application de règles de réécriture contrôlées par des stratégies.

Mots-clés: calcul de réécriture, réécriture, non-déterminisme, stratégie, filtrage, substitution, lambda-calcul, langage à base de règles.

Abstract

This thesis is devoted to the study of a calculus that describes the application of conditional rewriting rules and the obtained results at the same level of representation. We introduce the rewriting calculus, also called the rho-calculus, which generalizes the first order term rewriting and lambda-calculus, and makes possible the representation of the non-determinism. In our approach the abstraction operator as well as the application operator are objects of calculus. The result of a reduction in the rewriting calculus is either an empty set representing the application failure, or a singleton representing a deterministic result, or a set having several elements representing a not-deterministic choice of results.

In this thesis we concentrate on the properties of the rewriting calculus where a syntactic matching is used in order to bind the variables to their current values. We define evaluation strategies ensuring the confluence of the calculus and we show that these strategies become trivial for restrictions of the general rewriting calculus to simpler calculi like the lambda-calculus. The rewriting calculus is not terminating in the untyped case but the strong normalization is obtained for the simply typed calculus.

In the rewriting calculus extended with an operator allowing to test the application failure we define terms representing *innermost* and *outermost* normalizations with respect to a set of rewriting rules. By using these terms, we obtain a natural and concise description of the conditional rewriting. Finally, starting from the representation of the conditional rewriting rules, we show how the rewriting calculus can be used to give a semantics to ELAN, a language based on the application of rewriting rules controlled by strategies.

Keywords: rewriting calculus, rewriting, non-determinism, strategy, matching, substitution, lambda-calculus, rule based language.

