

Tag 7

16

Erinnerung: Basis^{Exponent}

a)

$$a^3 * a^4$$

Gleiche Basis, die Potenzen werden addiert.

$$= a^{3+4} = a^7$$

b)

$a^5 + a^2$ lässt sich nicht weiter vereinfachen. (Höchstens ein a^2 ausklammern, aber das vereinfacht den Term nicht.)

c)

$$(a^3)^4$$

Bei Auswertung von links nach rechts (durch Klammern erzwungen) zweier Exponenten können diese multipliziert werden. Nicht Verwechseln mit a^{3^4} . Potenzen werden allgemein von rechts nach links ausgewertet, also zuerst 3^4 . $a^{3^4} = a^{(3^4)} = a^{81}$

$$= a^3 * 4 = a^{12}$$

d)

$$(b^7 + b^7) = 2b^7$$

e)

$$(4a)^3$$

Ist die Basis ein Produkt kann der exponent auf jeden Factor einzeln angewendet werden.

$$= 4^3 a^3 = 64a^3$$

f)

$$(3 + a)^2 = 9 + 6a + a^2 = a^2 + 6a + 9$$

g)

Erinnerung $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$$\frac{a^2 * b^{-1}}{a^3 * b^2} = \frac{a^2 * b^{-1}}{1} * \frac{1}{a^3 * b^2} = a^2 * b^{-1} * a^{-3} * b^{-2} = a^{-1} * b^{-3} = \frac{1}{ab^3}$$

h)

Erinnerung $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$$\sqrt{a}a = a^{\frac{1}{2}} * a^1 = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3} = \sqrt{a}^3$$

i)

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = \frac{1^2}{(a^2)^2} = \frac{1}{a^{2*2}} = \frac{1}{a^4} = a^{-4}$$

j)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-\frac{1}{3}}$$

k)

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a} * \sqrt[3]{a} * \sqrt[12]{a}}$$

Nur der Nenner:

$$\sqrt[4]{a} * \sqrt[3]{a} * \sqrt[12]{a} = a^{\frac{1}{4}} * a^{\frac{1}{3}} * a^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}}$$

Nur der Exponent:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Nun der Zähler:

$$\sqrt[3]{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{2 * \frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Nenner und Zähler sind gleich. Daher ist die Lösung 1.

l)

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a^2}}\right)^6} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}^6}{\sqrt[6]{a^2}^6}} = \sqrt{\frac{(a^2)^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2) * (a^2)}{a^2}} = \sqrt{a^2} = a$$

Der letzte Schritt gilt so, auch ohne Betragsstriche, weil die Aufgabenstellung $a > 0$ voraussetzt.

17

a)

$$\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}} = \frac{(3*5)^{-4}x^{-8}y^{12}}{(5^2)^{-2}x^{-6}y^{12}} = \frac{3^{-4}*5^{-4}x^{-2}}{5^{-4}} = 3^{-4}x^{-2} = 81^{-1}x^{-2} = \frac{1}{81x^2}$$

b)

$$\begin{aligned}& \frac{(8x^3y^{-3})^{-2}}{(12x^{-2}y^{-4})^{-3}} \\&= \frac{8^{-2}x^{-6}y^6}{12^{-3}x^6y^{12}} \\&= \frac{8^{-2}x^{-6}y^6}{12^{-2}12^{-1}x^6y^6y^6} \\&= \frac{2^{-2}y^6}{3^{-2}12^{-1}x^{6+6}y^6y^6} \\&= \frac{12 \cdot 3^2}{2^2 x^{12} y^6} \\&= \frac{3 \cdot 3^2}{x^{12} y^6} \\&= \frac{27}{x^{12} y^6}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}& (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) * (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \\&= \sqrt[3]{a^2} * \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab} * \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b^2} * \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} * \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{ab} * \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2} * \sqrt[3]{b} \\&= a - \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2} + b \\&a + b\end{aligned}$$

d)

$$(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}) * (\sqrt{a+b} + \sqrt{b})$$

Dritte Binomische Formel

$$\begin{aligned}&= (\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{b})^2 \\&= a + b - b \\&= a\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}& (1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3}) * (1 - \sqrt{x}) \\&= 1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3} \\&\quad - (1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3}) * \sqrt{x} \\&= 1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{x} - \sqrt{x^2} - \sqrt{x^3} - \sqrt{x^4} \\
& = 1 - \sqrt{x^4} \\
& = 1 - x^2
\end{aligned}$$

18

a)

$$\frac{\text{verfügbare Masse}}{\text{Masse einer Sonne}} = \frac{10^{80}}{10^{57}} = 10^{80-57} = 10^{23} = \text{einhunderttrilliarden}$$

b)

$$\begin{aligned}
& \frac{800MW}{8*100W+1,3kW+400W} \\
& = \frac{800*10^6W}{8*10^2W+1,3*10^3W+4*10^2W} \\
& = \frac{800*10^6W}{8*10^2W+13*10^2W+4*10^2W} \\
& = \frac{800*10^6W}{(8+13+4)*10^2W} \\
& = \frac{800*10^6W}{25*10^2W} \\
& = \frac{32*10^6W}{10^2W} \\
& = 32 * 10^4 \\
& = 320000
\end{aligned}$$

c)

Experiment 1

$$\begin{aligned}
& \frac{14mm}{2ns} = \frac{14*10^{-3}m}{2*10^{-9}s} = 7 * 10^6 \frac{m}{s} \\
& = 7 * 10^6 \frac{m}{s} * \frac{1km}{1000m} * \frac{60s}{1min} * \frac{60min}{1h} \\
& = 7 * 10^6 \frac{m}{s} * \frac{1km}{1000m} * \frac{60s}{1} * \frac{60}{1h} \\
& = 7 * 10^6 \frac{m}{s} * \frac{1}{1000} * \frac{3600}{1} \frac{km*s}{m*h} \\
& = 7 * 10^6 \frac{m}{s} * \frac{3600}{1000} \frac{km*s}{m*h} \\
& = 7 * 10^6 \frac{m}{s} * 3,6 \frac{km*s}{m*h} \\
& = 7 * 10^5 * 36 \frac{km}{h} \\
& = 252 * 10^5 \frac{km}{h}
\end{aligned}$$

Experiment 2

$$\begin{aligned}\frac{6mm}{3ps} &= \frac{6 \cdot 10^{-3}m}{3 \cdot 10^{-12}s} = 2 \cdot 10^9 \frac{m}{s} \\&= 2 \cdot 10^9 \frac{m}{s} \cdot 3,6 \frac{km \cdot s}{m \cdot h} \\&= 2 \cdot 10^8 \cdot 36 \frac{km}{h} \\&= 72 \cdot 10^8 \frac{km}{h}\end{aligned}$$

Bei Experiment 1 ist die Geschwindigkeit geringer

19

a)

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^2} \cdot 2 = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

b)

$$\sqrt[6]{81} \cdot \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^4} \cdot 3^2 = 3$$

c)

$$\sqrt[13]{1,3^9} \cdot \sqrt[13]{1,3^4} = \sqrt[13]{1,3^{13}} = 1,3$$

d)

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{\sqrt[2]{9^3}} \\&= ((9^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \\&= (9^3)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\&= (9^3)^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} \\&= ((9^3)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \\&= 9^{\frac{1}{2}} \\&= 3\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt[10]{5120}}{\sqrt[10]{5}} \\&= \sqrt[10]{\frac{5 \cdot 1024}{5}}\end{aligned}$$

$$= \sqrt[10]{1024}$$

$$= 2$$

f)

$$\sqrt[8]{\sqrt[3]{4^{-8}}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt[8]{(4^{-1})^8}}$$

$$= \sqrt[3]{4^{-1}}$$

$$= (\sqrt[3]{4})^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

20

a)

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = (x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{4} * \frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$$

b)

$$\sqrt[3]{5} * \sqrt[3]{\frac{x}{5}}$$

Gleiche Potenzen (Wurzel ist auch eine Potenz), die Basen werden multipliziert.

$$= \sqrt[3]{5 * \frac{x}{5}}$$

$$= \sqrt[3]{x}$$

c)

$$\sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{x^{21}a+x^{21}b}}{\sqrt[3]{a+b}}}$$

$$= \sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{x^{21}*(a+b)}}{\sqrt[3]{a+b}}}$$

Regel Exponent auf ein Produkt verteilen

$$= \sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{x^{21}} * \sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[3]{a+b}}}$$

kürzen

$$= \sqrt[7]{\sqrt[3]{x^{21}}}$$

$$= x$$

21

Es wird so erweitert, dass im Nenner die dritte Binomische Formel angewendet werden kann.

a)

$$\begin{aligned} & \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\ &= \frac{(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}) * (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) * (\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ &= \frac{a\sqrt{b} * \sqrt{a} - b\sqrt{a} * \sqrt{a} + a\sqrt{b} * \sqrt{b} - b\sqrt{a} * \sqrt{b}}{a-b} \\ &= \frac{a\sqrt{ab} - ab + ab - b\sqrt{ab}}{a-b} \\ &= \frac{a\sqrt{ab} - b\sqrt{ab}}{a-b} \\ &= \frac{(a-b)\sqrt{ab}}{a-b} \\ &= \sqrt{ab} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \frac{2b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} \\ &= \frac{2b * (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{(a+b) - (a-b)} \\ &= \frac{2b * (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{a+b-a+b} \\ &= \frac{2b * (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{2b} \\ &= \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & \frac{b}{a-\sqrt{a^2-b}} \\ &= \frac{b * (a + \sqrt{a^2-b})}{a^2 - (a^2-b)} \\ &= \frac{b * (a + \sqrt{a^2-b})}{a^2 - a^2 + b} \\ &= \frac{b * (a + \sqrt{a^2-b})}{b} \end{aligned}$$

$$= a + \sqrt{a^2 - b}$$

5.1

1

a)

$$x^{-n} * x^0 = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

b)

$$x^{n+1} * x^{-(n-1)} = x^{n+1-(n-1)} = x^{n+1-n+1} = x^2$$

c)

$$x^{-n+1} * y^{-n+1} = (xy)^{-n+1}$$

d)

$$(x+y)^{n-m} * (x+y)^{n-m} = ((x+y)^{n-m})^2 = (x+y)^{2*(n-m)} = (x+y)^{2n-2m}$$

e)

$$\begin{aligned} &((-a)^{2n-1})^{-n-1} \\ &= (-a)^{(2n-1)*(-n-1)} \\ &= (-a)^{-2n^2+n-2n+1} \\ &= (-a)^{-2n^2-n+1} \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} &(a^{3p})^{4p} \\ &= a^{3p*4p} \\ &= a^{12p^2} \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} &((x-y)^{n+1})^{n+1} \\ &= (x-y)^{(n+1)*(n+1)} \\ &= (x-y)^{(n+1)^2} \\ &= (x-y)^{n^2+2n+1} \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} &(3x+y)^2(3x-y)^2 \\ &= ((3x+y)(3x-y))^2 \\ &= (9x^2-y^2)^2 \\ &= (9x^2)^2 - 2 * 9x^2 * y^2 + (y^2)^2 \\ &= 81x^4 - 18x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} &\frac{5a^9b^3}{7c^4} * \frac{10c^3}{28a^5b^7} \\ &= \frac{5a^4}{7c} * \frac{5}{14b^4} \\ &= \frac{25a^4}{98b^4c} \end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}& \frac{(7a-7b)^5}{(a-b)} \\&= \frac{(7(a-b))^5}{(a-b)} \\&= \frac{7^5(a-b)^5}{(a-b)} \\&= \frac{7^5(a-b)^4 \cdot (a-b)}{(a-b)} \\&= 7^5(a-b)^4\end{aligned}$$

2

a)

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3 \\&= \frac{\sqrt{5^3}}{3^3} \\&= \frac{\sqrt{5^2 \cdot 5}}{27} \\&= \frac{\sqrt{5^2} \sqrt{5}}{27} \\&= \frac{5\sqrt{5}}{27}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^4 \\&= \frac{(\sqrt{3})^4}{(\sqrt{5})^4} \\&= \frac{3^2}{5^2} \\&= \frac{9}{25}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}& \left(\frac{x\sqrt{2}}{y\sqrt{5}}\right)^{-4} \\&= \left(\frac{y\sqrt{5}}{x\sqrt{2}}\right)^4 \\&= \frac{y^4 5^2}{x^4 2^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{25y^4}{4x^4}$$

3

a)

$$\frac{3}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{3\sqrt{a}}{a}$$

b)

$$\frac{a}{\sqrt[5]{a}}$$

$$= \frac{a\sqrt[5]{a^4}}{a}$$

$$= \sqrt[5]{a^4}$$

c)

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$= \frac{1*(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

d)

$$\frac{1}{1+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1*(1-\sqrt{a})}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})}$$

$$= \frac{1-\sqrt{a}}{1-a}$$

e)

$$\frac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(5+\sqrt{x})^2}{(5-\sqrt{x})*(5+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{25+10\sqrt{x}+x}{25-x}$$

f)

$$\frac{3+2\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(3+2\sqrt{x})^2}{(3-2\sqrt{x})(3+2\sqrt{x})}$$

$$= \frac{9+12\sqrt{x}+4x}{9-4x}$$