Tag 7

16

Erinnerung: $\text{Basis}^{\text{Exponent}}$

a)

$a^3 * a^4$

Gleiche Basis, die Potenzen werden addiert.

$= a^{3+4} = a^7$

b)

$a^5 + a^2$ lässt sich nicht weiter vereinfachen. (Höchstens ein a^2 ausklammern, aber das vereinfacht den Term nicht.)

c)

$(a^3)^4$

Bei Auswertung von links nach rechts (durch Klammern erzwungen) zweier Exponenten können diese multipliziert werden. Nicht Verwechseln mit a^{3^4}. Potenzen werden allgemein von rechts nach links ausgewertet, also zuerst 3^4. $a^{3^4} = a^{(3^4)} = a^{81}$

$= a^3 * 4 = a^{12}$

d)

$(b^7 + b^7) = 2b^7$

e)

$(4a)^3$

Ist die Basis ein Produkt kann der exponent auf jeden Factor einzelnt angewendet werden.

$= 4^3 a^3 = 64a^3$

f)

$(3 + a)^2 = 9 + 6a + a^2 = a^2 + 6a + 9$

g)

Erinnerung $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$\frac{a^2 * b^{-1}}{a^3 * b^2} = \frac{a^2 * b^{-1}}{1} * \frac{1}{a^3 * b^2} = a^2 * b^{-1} * a^{-3} * b^{-2} = a^{-1} * b^{-3} = \frac{1}{ab^3}$

h)

Erinnerung $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt{a}a = a^{\frac{1}{2}} * a^1 = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3} = \sqrt{a}^3$

i)

$(\frac{1}{a^2})^2 = \frac{1^2}{(a^2)^2} = \frac{1}{a^{2*2}} = \frac{1}{a^4} = a^{-4}$

j)

$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-\frac{1}{3}}$

k)

$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a} * \sqrt[3]{a} * \sqrt[12]{a}}$

Nur der Nenner:

$\sqrt[4]{a} * \sqrt[3]{a} * \sqrt[12]{a} = a^{\frac{1}{4}} * a^{\frac{1}{3}} * a^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}}$

Nur der Exponent:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Nun der Zähler:

$\sqrt[3]{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{2 * \frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Nenner und Zähler sind gleich. Daher sit die Lösung 1.

l)

$\sqrt{(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a^2}})^6} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}^6}{\sqrt[6]{a^2}^6}} = \sqrt{\frac{(a^2)^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2) * (a^2)}{a^2}} = \sqrt{a^2} = a$ Der letzte Schritt gilt so, auch ohne Betragsstriche, weil die Aufgabenstellung $a > 0$ voraussetzt.

17

a)

$\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}} = \frac{(3*5)^{-4}x^{-8}y^{12}}{(5^2)^{-2}x^{-6}y^{12}} = \frac{3^{-4} * 5^{-4} x^{-2}}{5^{-4}} = 3^{-4}x^{-2} = 81^{-1}x^{-2} = \frac{1}{81x^2}$

b)

$$\frac{(8x^3y^{-3})^{-2}}{(12x^{-2}y^{-4})^{-3}}$$

$$= \frac{8^{-2}x^{-6}y^6}{12^{-3}x^6y^{12}}$$

$$= \frac{8^{-2}x^{-6}y^6}{12^{-2}12^{-1}x^6y^6y^6}$$

$$= \frac{2^{-2}y^6}{3^{-2}12^{-1}x^{6+6}y^6y^6}$$

$$= \frac{12*3^2}{2^2x^12y^6}$$

$$= \frac{3*3^2}{x^{12}y^6}$$

$$= \frac{27}{x^{12}y^6}$$

c)

$$(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) * (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$$

$$= \sqrt[3]{a^2} * \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab} * \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b^2} * \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} * \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{ab} * \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2} * \sqrt[3]{b}$$

$$= a - \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2} + b$$

$$a + b$$

d)

$$(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}) * (\sqrt{a+b} + \sqrt{b})$$

Dritte Binomische Formel

$$= (\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{b})^2$$

$$= a + b - b$$

$$= a$$

e)

$$(1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3}) * (1 - \sqrt{x})$$

$$= 1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3}$$

$$-(1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3}) * \sqrt{x}$$

$$= 1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3}$$

$$-\sqrt{x} - \sqrt{x^2} - \sqrt{x^3} - \sqrt{x^4}$$

$$= 1 - \sqrt{x^4}$$

$$= 1 - x^2$$

18

a)

$$\frac{\text{verfügbare Masse}}{\text{Masse einer Sonne}} = \frac{10^{80}}{10^{57}} = 10^{80-57} = 10^{23} = \text{einhunderttrilliarden}$$

b)

$$\frac{800MW}{8*100W+1{,}3kW+400W}$$

$$= \frac{800*10^6W}{8*10^2W+1{,}3*10^3W+4*10^2W}$$

$$= \frac{800*10^6W}{8*10^2W+13*10^2W+4*10^2W}$$

$$= \frac{800*10^6W}{(8+13+4)*10^2W}$$

$$= \frac{800*10^6W}{25*10^2W}$$

$$= \frac{32*10^6W}{10^2W}$$

$$= 32 * 10^4$$

$$= 320000$$

c)

Experiment 1

$$\frac{14mm}{2ns} = \frac{14*10^{-3}m}{2*10^{-9}s} = 7 * 10^6 \frac{m}{s}$$

$$= 7 * 10^6 \frac{m}{s} * \frac{1km}{1000m} * \frac{60s}{1min} * \frac{60min}{1h}$$

$$= 7 * 10^6 \frac{m}{s} * \frac{1km}{1000m} * \frac{60s}{1} * \frac{60}{1h}$$

$$= 7 * 10^6 \frac{m}{s} * \frac{1}{1000} * \frac{3600}{1} \frac{km*s}{m*h}$$

$$= 7 * 10^6 \frac{m}{s} * \frac{3600}{1000} \frac{km*s}{m*h}$$

$$= 7 * 10^6 \frac{m}{s} * 3,6 \frac{km*s}{m*h}$$

$$= 7 * 10^5 * 36 \frac{km}{h}$$

$$= 252 * 10^5 \frac{km}{h}$$

Experiment 2

$\frac{6mm}{3ps} = \frac{6*10^{-3}m}{3*10^{-12}s} = 2*10^9\frac{m}{s}$

$= 2*10^9\frac{m}{s}*3,6\frac{km*s}{m*h}$

$= 2*10^8*36\frac{km}{h}$

$= 72*10^8\frac{km}{h}$

Bei Experiment 1 ist die Geschwindigkeit geringer

19

a)

$\sqrt[3]{4}*\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^2*2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

b)

$\sqrt[6]{81}*\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^4*3^2} = 3$

c)

$\sqrt[13]{1,3^9}*\sqrt[13]{1,3^4} = \sqrt[13]{1,3^{13}} = 1,3$

d)

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{9^3}}$

$= ((9^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$= (9^3)^{\frac{1}{2}*\frac{1}{3}}$

$= (9^3)^{\frac{1}{3}*\frac{1}{2}}$

$= ((9^3)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$= 9^{\frac{1}{2}}$

$= 3$

e)

$\frac{\sqrt[10]{5120}}{\sqrt[10]{5}}$

$= \sqrt[10]{\frac{5*1024}{5}}$

$= \sqrt[10]{1024}$

$= 2$

f)

$\sqrt[8]{\sqrt[3]{4^{-8}}}$

$= \sqrt[3]{\sqrt[8]{(4^{-1})^8}}$

$= \sqrt[3]{4^{-1}}$

$= (\sqrt[3]{4})^{-1}$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

20

a)

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = (x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{4}*\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$

b)

$\sqrt[3]{5} * \sqrt[3]{\frac{x}{5}}$

Gleiche Potenzen (Wurzel ist auch eine Potenz), die Basen werden multipliziert.

$= \sqrt[3]{5 * \frac{x}{5}}$

$= \sqrt[3]{x}$

c)

$\sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{x^{21}a+x^{21}b}}{\sqrt[3]{a+b}}}$

$= \sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{x^{21}*(a+b)}}{\sqrt[3]{a+b}}}$

Regel Exponent auf ein Produkt verteilen

$= \sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{x^{21}}*\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[3]{a+b}}}$

kürzen

$= \sqrt[7]{\sqrt[3]{x^{21}}}$

$= x$

21

Es wird so erweitert, dass im Nenner die dritte Binomische Formel angewedet werden kann.

a)

$\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

$= \frac{(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})*(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})*(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$= \frac{a\sqrt{b}*\sqrt{a}-b\sqrt{a}*\sqrt{a}+a\sqrt{b}*\sqrt{b}-b\sqrt{a}*\sqrt{b}}{a-b}$

$= \frac{a\sqrt{ab}-ab+ab-b\sqrt{ab}}{a-b}$

$= \frac{a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab}}{a-b}$

$= \frac{(a-b)\sqrt{ab}}{a-b}$

$= \sqrt{ab}$

b)

$\frac{2b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

$= \frac{2b*(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})}{(a+b)-(a-b)}$

$= \frac{2b*(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})}{a+b-a+b}$

$= \frac{2b*(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})}{2b}$

$= \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$

c)

$\frac{b}{a-\sqrt{a^2-b}}$

$= \frac{b*(a+\sqrt{a^2-b})}{a^2-(a^2-b)}$

$= \frac{b*(a+\sqrt{a^2-b})}{a^2-a^2+b}$

$= \frac{b*(a+\sqrt{a^2-b})}{b}$

$$= a + \sqrt{a^2 - b}$$

5.1

1

a)

$x^{-n} * x^0 = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

b)

$x^{n+1} * x^{-(n-1)} = x^{n+1-(n-1)} = x^{n+1-n+1} = x^2$

c)

$x^{-n+1} * y^{-n+1} = (xy)^{-n+1}$

d)

$(x+y)^{n-m} * (x+y)^{n-m} = ((x+y)^{n-m})^2 = (x+y)^{2*(n-m)} = (x+y)^{2n-2m}$

e)

$((-a)^{2n-1})^{-n-1}$

$= (-a)^{(2n-1)*(-n-1)}$

$= (-a)^{-2n^2+n-2n+1}$

$= (-a)^{-2n^2-n+1}$

f)

$(a^{3p})^{4p}$

$= a^{3p*4p}$

$= a^{12p^2}$

g)

$((x-y)^{n+1})^{n+1}$

$= (x-y)^{(n+1)*(n+1)}$

$= (x-y)^{(n+1)^2}$

$= (x-y)^{n^2+2n+1}$

h)

$(3x+y)^2(3x-y)^2$

$= ((3x+y)(3x-y))^2$

$= (9x^2-y^2)^2$

$= (9x^2)^2 - 2 * 9x^2 * y^2 + (y^2)^2$

$= 81x^4 - 18x^2y^2 + y^4$

i)

$\frac{5a^9b^3}{7c^4} * \frac{10c^3}{28a^5b^7}$

$= \frac{5a^4}{7c} * \frac{5}{14b^4}$

$= \frac{25a^4}{98b^4c}$

j)

$$\frac{(7a-7b)^5}{(a-b)}$$

$$=\frac{(7(a-b))^5}{(a-b)}$$

$$=\frac{7^5(a-b)^5}{(a-b)}$$

$$=\frac{7^5(a-b)^4*(a-b)}{(a-b)}$$

$$=7^5(a-b)^4$$

2

a)

$$(\frac{\sqrt{5}}{3})^3$$

$$=\frac{\sqrt{5^3}}{3^3}$$

$$=\frac{\sqrt{5^2*5}}{27}$$

$$=\frac{\sqrt{5^2}\sqrt{5}}{27}$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{27}$$

b)

$$(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})^4$$

$$=\frac{(\sqrt{3})^4}{(\sqrt{5})^4}$$

$$=\frac{3^2}{5^2}$$

$$=\frac{9}{25}$$

c)

$$(\frac{x\sqrt{2}}{y\sqrt{5}})^{-4}$$

$$=(\frac{y\sqrt{5}}{x\sqrt{2}})^4$$

$$=\frac{y^4 5^2}{x^4 2^2}$$

$$= \frac{25y^4}{4x^4}$$

3

a)

$$\frac{3}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{3\sqrt{a}}{a}$$

b)

$$\frac{a}{\sqrt[5]{a}}$$

$$= \frac{a\sqrt[5]{a^4}}{a}$$

$$= \sqrt[5]{a^4}$$

c)

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$= \frac{1*(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

d)

$$\frac{1}{1+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1*(1-\sqrt{a})}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})}$$

$$= \frac{1-\sqrt{a}}{1-a}$$

e)

$$\frac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(5+\sqrt{x})^2}{(5-\sqrt{x})*(5+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{25+10\sqrt{x}+x}{25-x}$$

f)

$$\frac{3+2\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(3+2\sqrt{x})^2}{(3-2\sqrt{x})(3+2\sqrt{x})}$$

$$= \frac{9+12\sqrt{x}+4x}{9-4x}$$