Tag 10

In [1]:
```
from math import pi, sin, cos, tan, asin, acos, atan, sqrt, degrees as deg, radi
```

Sinussatz:

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

bzw. Nenner und Zähler vertauscht.

Cosinussatz:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

bzw. $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ab\cos(\beta)$

https://www.wolframalpha.com/input?i=solve+a%5E2+%3D+b%5E2%2Bc%5E2+-2*a*b*cos%28alpha%29+for+b

41

a)

$b = 161m, c = 117m, \gamma = 28,1^\circ$

Zwei Seiten und gegenüberliegenden Winkel -> Sinussatz

$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} | * b$

$\Leftrightarrow \sin(\beta) = \frac{b\sin(\gamma)}{c} | \sin^{-1}(.)$

$\Leftrightarrow \beta = \sin^{-1}(\frac{b\sin(\gamma)}{c})$

In [2]:
```
b = 161
c = 117
gamma = 28.1

beta = deg(asin(b*sin(rad(gamma))/c))
beta
```

Out[2]:
```
40.40185487354103
```

In [3]:
```
alpha = 180 - beta - gamma
alpha
```

Out[3]:
```
111.49814512645898
```

Sinussatz für a

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} | * \sin(\alpha)$

$$\Leftrightarrow a = \frac{b\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

In [4]:
```
a = b * sin(rad(alpha)) / sin(rad(beta))
a
```

Out[4]: `231.11995246911482`

$\beta \approx 40.40^\circ, \alpha \approx 111.50^\circ, a \approx 231.12m$

b)

$a = 301mm, b = 402mm, c = 439mm$

Drei Seiten -> Kosinussatz

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)| - a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow c^2 - a^2 - b^2 = -2ab\cos(\gamma)|/(-2ab)$

$\Leftrightarrow \frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab} = \cos(\gamma)|\arccos(.)$

$\Leftrightarrow \arccos(\frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab}) = \gamma$

In [5]:
```
a = 301
b = 402
c = 439

gamma = deg(acos((c**2 - a**2 - b**2)/(-2*a*b)))
gamma
```

Out[5]: `75.77102628576468`

In [6]:
```
beta = deg(acos((b**2 - a**2 - c**2)/(-2*a*c)))
beta
```

Out[6]: `62.576231955043994`

In [7]:
```
alpha = deg(acos((a**2 - b**2 - c**2)/(-2*b*c)))
alpha
```

Out[7]: `41.65274175919133`

$\alpha \approx 41.65^\circ, \beta \approx 62,58^\circ, \gamma \approx 75,77^\circ$

42

Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge 1.

$1^2 = h^2 + (\frac{1}{2})^2| - (\frac{1}{2})^2$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} = h^2|\sqrt{.}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{4}} = h$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = h$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = h$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{\sin(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot(60^\circ) = \frac{1}{\tan(60^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

43

Schnittfläche aus einer Kante und der Raumdiagonale. Dies ist ein Rechteck mit kantenlänge 1 und $\sqrt{2}$.

In [8]:
```
deg(atan(sqrt(2)))
```

Out[8]: 54.735610317245346

44

Winkel zwischen den beiden verschieden langen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks. Die eine Seite hat die Länge 1, die anderen die Höhe des Dreiecks. Aus Aufgabe 42 ist die Höhe bekannt. Nun der Kosinussatz:

$$\cos^{-1}(\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 1}{-2 * \frac{\sqrt{3}}{2} * 1})$$

$$= \cos^{-1}(\frac{-1}{-2 * \frac{\sqrt{3}}{2} * 1})$$

$$= \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

In [9]:
```
deg(acos(1/sqrt(3)))
```

Out[9]: 54.735610317245346

45

Gleichschenkliges Dreieck mit $10cm$ länge der gleichlangen Seite. Der eingeschlossene Winkel ist $\frac{360^\circ}{8}$. Kosinussatz:

$$r = \sqrt{(10cm)^2 + (10cm)^2 - 2 * (10cm) * (10cm) * \cos(\frac{360^\circ}{8})}$$

In [10]:
```
sqrt(10**2 + 10**2 - 2 * 10 * 10 * cos(rad(360/8)))
```

Out[10]:
```
7.653668647301795
```

46

Ein Dreieck mit Seitenlänge eins und die anderen beiden haben die Länge der halben Raumdiagonalen.

Die Länge der Raumdiagonale wird mit zwei rechtwinkligen Dreiecken bestimmt.

$\sqrt{1^2 + 1^2}$ für die Diagonale einer Fläche. Die Raumdiagonale ist die Kante des Dreiecks durch diese Diagonale und einer Kante.

$$\sqrt{(\sqrt{1^2 + 1^2})^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{3}$$

Kosinussatz für den Winkel:

$$\cos^{-1}(\frac{1^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{-2 * \sqrt{3} * \sqrt{3}})$$

$$= \cos^{-1}(\frac{1^2 - (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}{-2 * \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2}})$$

$$= \cos^{-1}(\frac{1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}})$$

$$= \cos^{-1}(\frac{-\frac{2}{4}}{-\frac{3}{2}})$$

$$= \cos^{-1}(\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{2}})$$

$$= \cos^{-1}(\frac{2}{4} * \frac{2}{3})$$

$$= \cos^{-1}(\frac{1}{3})$$

In [11]:
```
deg(acos(1/3))
```

Out[11]:
```
70.52877936550931
```

In [12]:
```
180 - 2* deg(atan(sqrt(2)))
```

Out[12]:
```
70.52877936550931
```

47

Zuerst b)

b)

$w = 2\pi * f = 2\pi * 1450 \frac{1}{1min} * \frac{1min}{60s}$

In [13]:
```
2 * pi * 1450 / 60
```

Out[13]:
```
151.84364492350667
```

Die Winkelgeschwindigkeit ist $w \approx 151.84364492350667 \frac{1}{s}$

a)

Der Radius ist $\frac{2mm}{2} = 1mm$

$w * r = 2\pi * f = 2\pi * 1450 \frac{1}{1min} * \frac{1min}{60s} * 1mm * \frac{1m}{10^3 mm}$

In [14]:
```
2 * pi * 1450 / 60 * 1 / 10**3
```

Out[14]:
```
0.15184364492350666
```

Die Umfangsgeschwindigkeit ist $0.15184364492350666 \frac{m}{s}$

48

a)

$\cos(58^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{8{,}35ms * 340\frac{m}{s}}{2}}$

$\Leftrightarrow \cos(58^\circ) = \frac{l}{8{,}35ms * 340\frac{m}{s} * \frac{1s}{1000ms}}$

$\Leftrightarrow \cos(58^\circ) = \frac{l}{2{,}839m} | * 2.839m$

$\Leftrightarrow \cos(58^\circ) * 2.839m = l$

In [15]:
```
8.35 * 0.34 * cos(rad(58))
```

Out[15]:
```
1.5044407911580686
```

Der Abstand zwischen Sender und Empfänger beträgt 1,5 m.

b)

Genau genommen nicht der Abstand. Der wäre 1.4195 m, denn die Gesammtstrecke wurde für a) schon ausgerechnet und muss nur halbiert werden.

$1.4195^2 = (\frac{l}{2})^2 + a^2$

$1.4195^2 - (\frac{l}{2})^2 = a^2 | \sqrt{.}$

$\sqrt{1.4195^2 - (\frac{\cos(58^\circ) * 2.839m}{2})^2} = a$

In [16]:
```
sqrt((8.35 * 0.34 / 2)**2 - (8.35 * 0.34 * cos(rad(58)) / 2)**2)
```

Out[16]:
```
1.2038042724940468
```

49

Es gilt:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)sin(\beta)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)sin(\beta)$

$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

a)

$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha)$

$= \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)sin(\alpha)$

$= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

b)

$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha)$

$= \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)sin(\alpha)$

$= \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2$

Ersetzen $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2$

$= \cos(\alpha)^2 - (1 - \cos(x)^2)$

$= 2\cos(\alpha)^2 - 1$