Épreuve de Mathématique Cycle Ingénieur 2015

Concours EAMAC 2015	Cycle Ingénieur	Mathématiques

Exercice 1

1. (a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^4$ muni de l'addition et la multiplication externe est un espace vectoriel réel.

(b) Désigner au moins deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

2. L'ensemble des nombres complexes est-il un espace vectoriel réel ? si oui, quels sont les vecteurs

Exercice 2

1. On donne le système $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$
   a) Étudier la compatibilité de ce système
   b) Le résoudre au cas où le système est compatible
2. Utiliser la méthode de cramer pour résoudre le système suivant : $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

Exercice 3

1.
   a) Vérifier que les fonctions $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = \arctan(x)$ admettent les mêmes dérivées sur l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 1\}$
   b) Établir la relation qui existe entre ces fonctions.
2. Calculer les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x \to 0} (sin\, x)^x$
   b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2\cos x}$
   c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\ln x}$

Corrigés…

Exercice 4

1) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2\,dx$ b) $\int 2^x3^{2x}5^{3x}dx$ c) $\int(\tan x+cotg\,x)^2\,dx$

d) $\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$

2) Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y^2=x^3$ compris entre $x=0$ et $x=1$; $y\geq 0$

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2016

Concours EAMAC 2016	Cycle Ingénieur	Mathématiques

Exercice S-MI2-1 : (6 points)

Soit k appartenant à IR et $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ appartenant à M_3 (IR)

1. Déterminer les valeurs de k pour les quelles A_k est inversible.

2. Déterminer le polynôme caractéristique de A_k et en déduire que A_k est diagonalisable.

3. Quel est le polynôme minimal de A_k ?

4. Montrer pour tout entier naturel non nul n, on a $A_k^n = a_n A_k + b_n I_3$.

Calculer $a_n$et b_n en fonction de n et donner une expression de A_k^n en fonction de n.

Exercice S-MI2-2 : (4 *points*)

Soit n un entier naturel et $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}

2. Calculer I_n

3. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$

EXERCICE S- MI2-3 : (5 points)

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt \; ; \quad J_n = \int_0^{\pi} (\sin t)^n dt \; ; \qquad K_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \; .$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$J_n = K_n = 2I_n$$

2. Calculer I_0, I_1 et I_2

3. En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre I_{n+2} et I_n pour tout n ∈N

1. Montrer que la suite des intégrales (I_n)$n\in N$ est une suite décroissante à termes positifs.

Exercice S-MI2-4 : (5 points)

On définit pour n entier naturel non nul le polynôme à coefficients réels P_n par :

$$P_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \frac{X(X+1)(X+2)}{3!} + \cdots + \frac{X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1)}{n!}$$

1) Déterminer explicitement les polynômes P_1, P_2 , P_3

2) Montrer que P_n est un polynôme de degré n.

3) Soit λ_n le coefficient dominant de P_n . Démontrer que $\lambda_n = \frac{1}{n!}$

4) Démontrer la formule $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j = 0$

En déduire que pour tout entier k, tel que $1 \leq k \leq n$, on a $P_n(-k) = 0$

4) Factoriser P_n

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2017

Concours EAMAC 2017	Cycle Ingénieur	Mathématiques

Exercices S-MI3-1 : (5 points)

On considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = 1 \\ x + y + mz + t = 1 \\ x + y + z + mt = 1 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de m le système (S) est-il de cramer ? Compatible ?
2. Lorsqu'il est de cramer, résoudre le système (S)

Exercice S-MI3-2 : (5points)

On considère la fonction numérique f telle que : $f(x) = (x^2 - 1)Arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right)$

Et on appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition D de f?
2. Exprimer sur $D/\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$
3. Montrer que : $\forall x \epsilon R; 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g
4. Dresser le tableau de variation de f

Exercice S-MI3-3 : (5points)

Pour $\alpha, \beta \in R$, on souhaite déterminer la nature de $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$

1. On suppose que $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudier est convergente.
2. On suppose que $\alpha = 1$. Calculer pour $X > e$, $\int_e^X \frac{1}{x(ln\, x)^\beta} dx.$ En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $\frac{1}{X}$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice S-MI3-4 : (5points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Diagonaliser la matrice A et calculer A^n pour tout $n \epsilon N$

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2017ex

Concours EAMAC 2017ex	Cycle Ingénieur	Mathématiques

Exercice S-MI6-1 : (5points)

Soit a un nombre réel. On définit la fonction f_a d'une variable réelle t telle que

$$f_a(t) = \frac{1}{a^2 - 2a\cos t + 1}$$

1) Montrer que f_a est définie pour tout t réel si et seulement si $|a| \neq 1$
2) On suppose que $a \neq 0$ et $|a| \neq 1$. Calculer $f_{\frac{1}{a}}$ en fonction de f_a
3) On suppose $a = \frac{1}{2}$ étudier $f_{\frac{1}{2}}$
4) On suppose $|a| \neq 1$ Calculer $F_a(x) = \int_0^x f_a(t)dt$

Exercice S-MI6-2 : (4points)

On donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

a) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$
b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2+n^2}{n\,!}$

Exercice S-MI6-3 : (5points)

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre $n > 0$, non nulle. Si A est nilpotente, on appelle indice de nilpotence de A l'entier $k = inf\{r \epsilon \mathbb{N}^* | A^r = 0\}$

1) Montrer que $k < n$
2) Montrer que A est nilpotente si et seulement si $A^n = 0$
3) On suppose dans cette question que $A = (a_{ij})_{1<i,j<n}$ est triangulaire supérieure stricte : c'est dire que $a_{ij} = O\ si\ i > j$. Montrer que A est nilpotente
4) On donne la matrice d'ordre 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Trouver une matrice nilpotente B telle que $A = B + I$ ou I est une matrice identité d'ordre 3

Calculer B^m $pour\ m\ entier\ , m > 0\ et\ en\ déduire\ A^m$

Exercice S-MI6-4 : (6points)

Soit f un endomorphisme de IR^4 $et\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Sa matrice dans la base canonique de IR^4

1. Calculer A^2 en fonction de A. En déduire pour tout $n \geq 1$ une expression de A^n en fonction de A. Trouver le polynôme minimal
2. Calculer $dim(kert\ f)$ et en déduire que A est diagonalisable. Trouver le polynôme caractéristique de A
3. Trouver une base B' de vecteurs propres de f

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2018

Concours EAMAC 2018	**Cycle Ingénieur**	**Mathématiques**

Exercice S-MI1.1 (5 points) :

Soit (p, q) appartenant à C^2. On note x_1, x_2, x_3 les zéros de $X^3 + pX + q$ dans C de sorte que $X^3 + pX + q = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$

On note : $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ et $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

On note, pour tout k appartenant à IN : $S_k = {x_1}^k + {x_2}^k + {x_3}^k$

1) Montrer que $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = p$ et $\sigma_3 = -q$.

2) a) Calculer S_0, S_1, S_2 en fonction de p et q.

b) Établir que, pour tout k appartenant à IN, $S_{k+3} + pS_{k+1} + qS_k = 0$

c) En déduire S_3 et S_4 en fonction de p et q.

3) Calculer $A = {x_1}^3x_2 + {x_1}^3x_3 + {x_2}^3x_1 + {x_2}^3x_3 + {x_3}^3x_1 + {x_3}^3x_2$ en fonction de p et q.

Exercice S-MI1.2 (5 points) :

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ appartenant à M_2 (IR),

$\phi : M_2$ (IR) $\rightarrow M_2$ (IR), définie par $\phi(M) = AMB$.

a. Vérifier que ϕ est linéaire.

b. Montrer que ϕ est bijective et déterminer ϕ^{-1}.

c. Montrer que $B = (I_2, A, B, AB)$ est une base de M2 (IR), déterminer les matrices de ϕ et ϕ^{-1} dans B.

Exercice S-MI1.3 (5 points) :

Soit a un nombre réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C¹.

1. Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f'(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Que peut-on dire de l'hypothèse $\lim\limits_{-\infty} f'(x) = -\infty$?

On suppose à présent que pour tout $x \in [a, +\infty[$, f(x) est strictement positif.

3. Soit g: $[a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C¹ telle que :

$\lim\limits_{+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \ et \ que \ \int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Montrer que $\lim\limits_{+\infty} \frac{\int_a^{+\infty} g(x)dx}{\int_a^{+\infty} f(x)dx} = 0$.

Exercice S-MI1.4 (5 points) :

Soit α un nombre réel qui n'est pas entier et soit *f* une fonction de 2π -périodique, définie sur $\mathbb{R}$, et telle que $f(t) = sin\alpha t$ pour $-\pi \leq t \leq \pi$

1. Déterminer la série de Fourier de la fonction *f*. La fonction *f* est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

2. On considère à présent la fonction *g*, 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que

$g(t) = cos\alpha t$ pour $-\pi \leq t \leq \pi$

Déterminer la série de Fourier de la fonction g. La fonction g est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

3. À partir des séries de Fourier de *f* et de *g*, expliciter la série de Fourier complexe de la fonction *h*, 2π-période, définie sur $\mathbb{R}$, par

$h(t) = e^{i\alpha t}$ pour $-\pi \leq t \leq \pi$

1. En déduire l'égalité : $\frac{\pi^2}{sin^2\pi\alpha} = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(\alpha-n)^2}$

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2019

Concours EAMAC 2019	Cycle Ingénieur	Mathématiques

Exercice 1 : (5points)

Soit $*$ la loi de composition sur $\mathbb{R}$ définie par $x * y = x + y - xy$

1. Montrer que la loi $*$ est commutative et associative
2. Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on précisera.
3. Montrer que tout élément de $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ *admet pour inverse* $x/(x-1)$.
4. L'ensemble $(\mathbb{R}, *, e)$ est-il un Groupe ?
5. L'ensemble $(\mathbb{R}\backslash\{1\}, *, e)$ est- il un Groupe ?

Exercice 2 : (5points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z) = (x, -3y + 4z, -2y + 3z)$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire que f est bijective.
4. Calculer fof.
5. En déduire l'expression de f^{-1}

Exercice 3 : (5points)

Étudier la convergence et calculer la somme des séries dont les termes généraux sont définis par :

1) $U_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (n \geq 1)$
2) $V_n = \frac{n+4}{n(n^2-4)} \quad (n \geq 3)$
3) $W_n = \frac{n^3}{n!} \quad (n \geq 1)$

Exercice 4

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-k & -1 \\ 2-k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ Où k est un réel.}$$

1) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.
2) Pour k=2, calculer l'exponentielle de la matrice A et A^n où $n \geq 1$ est un entier naturel.

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2022

Concours EAMAC 2022	Cycle Ingénieur et EAC	Mathématiques

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \epsilon\ M_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P(x)$ de A.
2. Calculer $P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3)$.
3. En déduire si A est diagonalisable
4. On note $t_n = tr(A^n)$ ou tr désigne la trace. Exprimer t_n en fonction de $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$.
5. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n Z^n$.

Exercice 2

Soit z le nombre complexe défini par : $z = \frac{1}{2}\big(\sin\theta + i(1-\cos\theta)\big)$ ou θ est un réel de $[-\pi;\ \pi]$

1. Déterminer en fonction de θ le module et un argument de z.
2. Déterminer en fonction de θ le module et un argument de $z - i$.
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère le point M d'affixe

$z - i$. Déterminer la nature géométrique de l'ensemble décrit par le point M lorsque θ varie entre $]0; \pi[$.

Exercice 3

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Exercice 4

Soit $f(x,y) = 7xy + 4(x^3 - y^3) + x - y$

1. Étudier les extrema locaux de f
2. Quelle est l'image par f de R^2

ÉPREUVE DE PHYSIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2015

Concours EAMAC 2015	Cycle Ingénieur	Épreuve de Physique

EXERCICE I : Électromagnétisme (5 pts)

Soit une onde électromagnétique plane et progressive, de pulsation ω se propageant dans l'air qu'on assimilera au vide. Le champ magnétique $\vec{B}$ est défini par ses composantes, par rapport à un repère orthonormé Oxyz :

$$B_x = 0, B_y(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx)\,, B_Z = 0$$

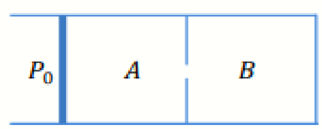
1. À l'aide des équations de Maxwell, calculer les composantes du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de B_0.

2. Calculer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$

3. Quelle est la puissance moyenne ⟨P⟩ rayonnée à travers une surface (S) perpendiculaire à la direction de propagation.

EXERCICE II : Thermodynamique (Détente irréversible d'un gaz parfait) (5 pts)

Soit le dispositif de la figure ci-contre. Les parois et le piston sont adiabatiques. La paroi interne est fixe et diatherme (elle permet les échanges thermique). Elle est percée d'un trou et fermé par une fenêtre amovible.



La pression extérieure est $P_0 = 1\ bar$. Initialement le volume A est rempli d'un gaz parfait ($P_0 = 1\ bar, T_0 = 300k, n = 1mol$) et le volume B est vide.

Le rapport des capacités thermiques du gaz vaut 1,4.

1. On ouvre la fenêtre. Décrire qualitativement ce qui se passe suivant la taille de l'enceinte B. En déduire sans toutefois la calculer, l'existence d'un volume critique $V_c\ de\ B$

2. On suppose que $V_B < V_C$

a. On appelle V_1 le volume occupé par le gaz. Déterminer le travail reçu par le gaz.

b. Déterminer l'état final du gaz (P_1, V_1, T_1) en fonction de $(P_0, V_A\ et\ V_B)$

c. Calculer l'entropie créée. Conclure. Quelle est la cause de la création d'entropie ? (1 pt)

d. Déterminer V_C . Effectuer l'application numérique. (0,5 pt)

3. Reprendre la question 2. dans le cas $V_B > V_C$

EXERCICE III : Mécanique du point : Satellite terrestre (4,5 pts)

Dans ce problème les satellites ou engins spatiaux artificiels sont assimilés à des points matériels de masse m, et les influences perturbatrices dues aux mouvements de la Terre, supposée sphérique et homogène, à son atmosphère et aux champs de gravitation des autres composants du système solaire (soleil, planètes, …) sont négligées.

On désigne par R le rayon de la terre et par g_0 le module du vecteur du champ de pesanteur au niveau du sol. On donne : $g_0 = \ 6400\ km$; $g_0 = 10ms^{-2}$; 2

1. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle E_1 dont dérive la force $\vec{F}$ attractive exercée par la Terre sur un engin spatial lorsqu'il se trouve à la distance r du centre de la Terre. On admet que E_1 tend vers 0 quand r tend vers l'infini.

2. Si on lançait un tel engin depuis la Terre, en lui communiquant à partir du sol une vitesse initiale V_i ascendante et verticale, de façon qu'il atteigne avec une vitesse nulle un point ., d'altitude h, quelle devrait alors être la relation entre cette altitude h et le module V_i de la vitesse de lancement ?

Application numérique : h = 600 km. (1 pt)

3. Quelle valeur numérique minimale V_2 devrait avoir la vitesse initiale pour que l'engin s'éloigne indéfiniment ? (0,5 pt)

4. Une fois atteinte cette altitude h de la question N°2 ci-dessus, quelle devrait être la vitesse V_i qu'il faudrait communiquer à cet engin à partir du point M pour qu'il devienne un satellite circulaire d'altitude $R + \ h$? Préciser la direction et le module de $\overrightarrow{V_1}$

Quelles seraient dans ces conditions :

(a) la valeur numérique de V_1?

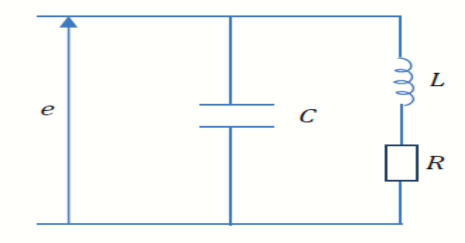
(b) la période T_1 de révolution de ce satellite ?

(c) la valeur numérique du module L_1de son moment cinétique par rapport à O et son énergie mécanique E_2 dans le cas particulier où m est de 1 tonne ? (1 pt)

Corrigés…

EXERCICE IV: Circuit R, L, C (5,5 pts)

Soit le circuit suivant où e est une tension sinusoïdale de pulsation ω. On étudie la variation de l'impédance réelle du circuit.



1. Exprimer l'impédance complexe du circuit.

2. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $, Q = \frac{L\omega_0}{R}$ $et\ x = \frac{\omega_0}{\omega}$

Donner l'expression de l'impédance en fonction de $x, Q\ et\ R$

3. Établir l'existence d'un extremum du module de l'impédance pour certaines valeurs de Q qu'on précisera.

4. Donner l'expression de la pulsation correspondante à l'extremum.

5. En étudiant le limites du module de l'impédance, en déduire qu'il s'agit d'un maximum.

ÉPREUVE DE PHYSIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2016

Concours EAMAC 2016	Cycle Ingénieur	Épreuve de Physique

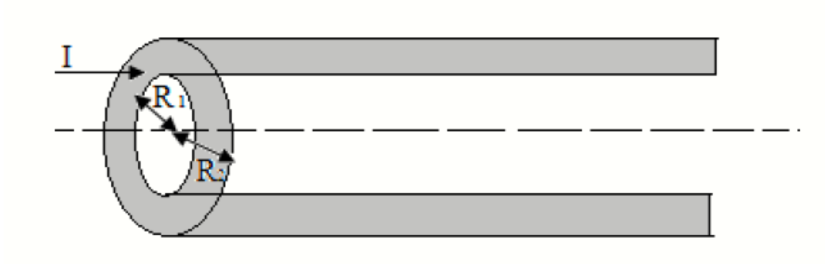
Exercice 5-PI4-1 (5points)

Un conducteur cylindrique creux de rayons R_1 et R_2 de la figure ci-dessous est parcouru par un courant I tel que le vecteur densité de courant $\vec{J}$ soit uniforme sur toute sa section et soit parallele à l'axe du cylindre.

1- Donner la relation entre j et I.

2- Préciser l'orientation du vecteur $\vec{B}(M)$ en un point M de l'espace, qu'il soit extérieur ou intérieur au cylindre.

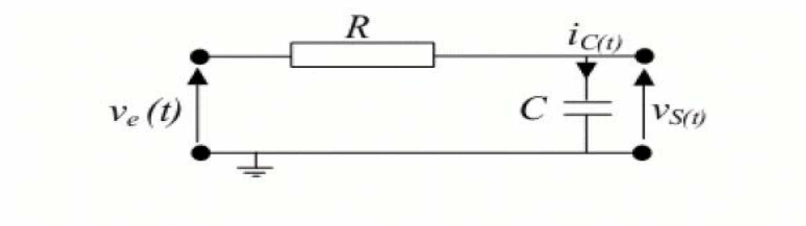
3- En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique en tout point M de l'espace.



Exercice S-PI4-2 (6 pts)

Les circuits passifs qui utilisent des condensateurs et des inductances, lorsqu'ils sont destinés à des signaux (tensions) alternatifs, présentent des caractéristiques qui dépendent de la fréquence des signaux d'entrée. En cela, ils forment naturellement des « filtres » qui atténuent ou pas, ou « coupent » ou pas, certaines plages de fréquence. Ils ont ainsi un rôle de discrimination en fonction de la fréquence, ce qui correspond bien à une sorte de filtrage. Cette fonction est très importante en électronique et donc assez présente dans les sujets de problèmes.

Pour comprendre la notion de « filtre » prenons comme exemple simple un « filtre passe bas passif » représenter sur la figure ci-après :



Quelle équation relie la tension vs(t) et le courant $ic(t)$?

2) Si on suppose que $V_s = V_{smax}.\cos(\omega t)$ quelle sera l'expression littérale de i_C ?

3) Que représente la valeur ω ? Par quoi est-elle fixée ?

4) A quoi est équivalent le circuit si ω est très petit, c'est à dire dans un domaine de « basses fréquences » ?

5) A quoi est équivalent le circuit si ω est très grand, c'est à dire dans un domaine de « hautes fréquences » ? Justifier alors l'appellation « passe bas ».

6) Montrer que l'équation de maille de ce circuit revient à :

$$V_e = RC.\frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t).$$

Remplacer alors V_s par sa forme sinusoïdale $V_s = V_{smax}.\cos(\omega t)$.

7) A quoi est équivalente l'équation ainsi formée si $\omega >> 1/RC$?

8) A quoi est équivalente l'équation ainsi formée si $\omega << 1/RC$?

Exercice S-PI4-3 (5pts)

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement (OPR) de pulsation ω se propage dans le vide dans la direction de l'axe Oz.

1- Déterminer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point de l'espace.

2- La valeur moyenne du vecteur de Poynting.

Exercice S-PI4-4 (5pts)

Soit un point matériel repéré par ces cordonnées cylindriques et z telles que : où a et ω sont des constantes. $\rho = at^2$, $z = at$, $\varphi = \omega t$, ou a et ω sont des constantes.

1-Calculer les composantes cylindriques du vecteur vitesse.

2- En déduire les composantes cylindriques du vecteur accélération.

3- Calculer les modules des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\gamma}$

ÉPREUVE DE PHYSIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2018

Concours EAMAC 2018	Cycle Ingénieur	Épreuve de Physique

Exercice S-PI3.1 (5 points)

Dans le plan (Oxy), le mouvement d'un point P est déterminé par les équations paramétriques : $x = V_0 t\cos(\alpha)\,, y = V_0 t sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$ où V_0 est la vitesse initiale de P et α est l'angle que fait v0 avec l'axe Ox.

1- Quelle est la nature de la trajectoire ? **(1 pt)**

2- Déterminer : **(3,5 pt)**

a) Les accélérations normales et tangentielles.

b) Le rayon de courbure $\rho(t)$ ainsi que le centre de courbure $C(t)$

c) Les expressions des vecteurs unitaires de **Serret-Frenet**.

3- Trouver l'angle entre les vecteurs vitesses et accélérations au point où la trajectoire recoupe l'axe Ox. **(0,5 pt)**

Exercice S-PI3.2 (5 points)

Une mole de gaz parfait (γ=1,4) subit la succession de transformations suivantes :

a) détente isotherme de $P_A = 2\ bar\ et\ T_A = 300\ K$ jusqu'à $P_B = 1\ bar$, en restant en contact avec un thermostat à $T_T = 300\ K$;

b) évolution isobare jusqu'à $V_C = 20{,}5\ L$ toujours en restant en contact avec le thermostat à T_T ;

c) compression adiabatique réversible jusqu'à l'état A.

1. Calculer V_B et représenter ce cycle en diagramme (P, V). S'agit-il d'un cycle moteur ou récepteur ? **(1 pt)**

2.

a) Déterminer la variation d'entropie ΔS_{AB} du gaz entre A et B. **(0,5 pt)**

b) Déterminer l'entropie $S_{éch}$ échangée avec le thermostat. **(0,75 pt)**

c) En déduire l'entropie créée $S_{créée}$. Conclure **(1,25 pt)**

3. Calculer la température en C, le travail W_{BC} et la quantité de chaleur Q_{BC} reçus par le gaz au cours de la transformation BC. Calculer l'entropie échangée avec le thermostat ainsi que la variation d'entropie du gaz entre B et C. **(0,75 pt)**

4. Calculer la valeur numérique de l'entropie créée au cours du cycle. Le cycle proposé est-il réalisable ? **(0,75 pt)**

EXERCICE S-PI3.3 :

On considère une onde électromagnétique plane, progressive, sinusoïdale et monochromatique de pulsation ω , se propageant dans le vide de perméabilité magnétique μ_0. L'espace est rapporté à un repère cartésien Oxyz de base orthonormée. L'onde se propage dans le plan $y0z$ le long d'un axe faisant un angle θ avec la direction $0y$. Le vecteur champ électrique a comme expression : $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\,)\ \overrightarrow{u_x}$

1. Écrire dans la base orthonormée $0xyz$ les composantes ky et kz du vecteur d'onde au point M de coordonnées (x, y, z) tel que et à l'instant t en fonction de son module k et de θ. (1pt)

2. Écrire les équations de Maxwell dans le vide. (1pt)

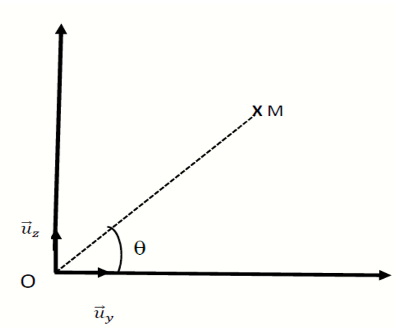
3. Écrire dans la base orthonormée 0xyz les composantes du vecteur champ électrique $\overrightarrow{E}$ au point M à l'instant t. En déduire, à l'aide des équations de Maxwell dans le vide, les composantes du vecteur champ magnétique $\overrightarrow{B}$ de l'onde au point M. (1pt)

4. Représenter les vecteurs $\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}\ et\ \vec{k}$. (1pt)

5. Déterminer en notation réelle les composantes du vecteur de Poynting

$$\vec{S} = \overrightarrow{E}\Lambda\overrightarrow{\frac{\mathrm{B}}{\mu_0}}$$

associé à l'onde électromagnétique en fonction de $E_0,\ \mu_0,\ \vec{k}\ \ et\ \omega$.



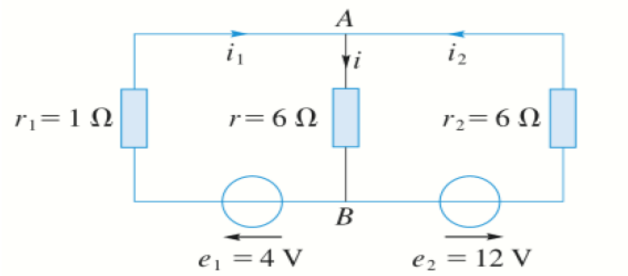
Corrigés…

Exercice S-PI3.4 (5pts)

Déterminer le courant i en utilisant deux des trois lois ci-dessous :

a. les lois de Kirchhoff ;

b. en remplaçant les deux générateurs de Thévenin par les générateurs de Norton équivalents.



ÉPREUVE DE PHYSIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2019

Concours EAMAC 2019	Cycle Ingénieur	Épreuve de Physique

Exercice 1 : (5points)

Soit un mobile M se déplaçant sur une branche hyperbolique dans un repère $R(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

M est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + \frac{a}{x(t)}\vec{\jmath}$, avec a constante positive et $x(t) = at$

1- Déterminer les vecteurs unitaires de Serret-Frenet en fonction des vecteurs $\vec{\imath},\vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$

2- Calculer le rayon de courbure $\rho(t)$ et le centre de courbure C.

3- Tracer l'hodographe

Exercice 2 : (5points)

Une transformation polytropique est une transformation quasi statique vérifiant :

$PV^k = constante$

1- Calculer le travail des forces de pression pour un gaz parfait subissant transformation polytropique entre $(P_0, V_0, T_0)\ et\ (P_1, V_1, T_1)$ en fonction des pressions et volumes ainsi que de k.

2- On note $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ qui est une constante pour un gaz parfait. Trouver une expression de la quantité de chaleur échangée au cours de la transformation précédente de la forme $C(T_1 - T_0)$ où C est une constante à déterminer.

3- Donner une interprétation physique de C.

4- Étudier en les interprétant physiquement les cas suivants : $k = \gamma, k = 0, k \to +\infty$ et $k = 1$.

Exercice 3 : (5points)

Pour dériver le faisceau d'électrons d'un tube cathodique, on utilise deux bobines circulaires plates de rayon R disposées suivant la figure ci-dessous (figure 2 et 3). En supposant que l'induction B créé par les bobines est uniforme dans le carré qui a pour coté le diamètre des bobines et que sa valeur est celle qui existe au point 0 (sur l'axe Ox).

1. Déterminer la trajectoire décrite par l'électron
2. Déterminer l'angle au centre qui intercepte l'arc décrit

3. Déterminer la distance PP' (figure 1) qui sépare le point P du point P' où l'électron sort de la zone d'action de l'induction B
4. Le déplacement subi par le point d'impact des électrons sur l'écran lorsque le courant I parcourt les bobines.

   La distance de l'écran au point P est de 0,2m

On donne : Distances des centres des bobines à l'axe du tube $d = R = 5cm$

Vitesses constantes des électrons $v = 1000km.s^{-1}$

Nombre de spires des bobines $N = 400$

Courant dans les bobines $I = 5mA$

Charge de l'électron $e = 1{,}6.10^{-19}C$

Masse de l'électron $m = 0{,}9.10^{-30}kg$

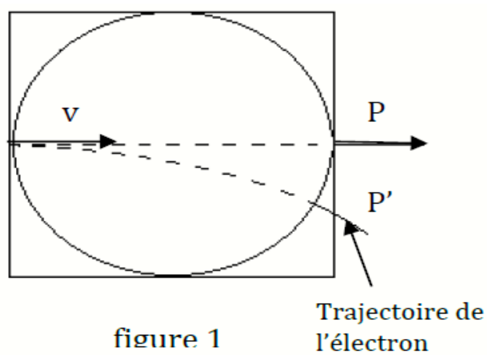


figure 1

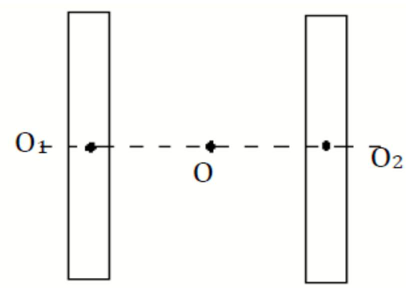


figure 2

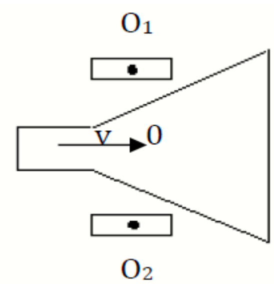


figure 3

Exercice 4

Dans un circuit RC représenté par la figure suivante ; R =2MΩ et C= 5µF

Le condensateur est initialement chargé et possède une tension de 50V entre ces bornes.

Si on ferme l'interrupteur S à l'instant t=0, calculer :

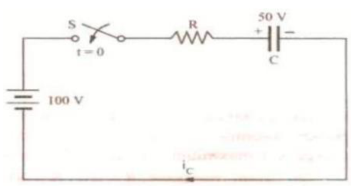
1- La constante de temps pour la charge de condensateur.

2- La tension aux bornes du condensateur après un laps de temps t =5λ.

3- La tension aux bornes de C si on change la polarité du condensateur.

4- Les temps de charge pour que Vc = -10V,

Vc = 0V et Vc = 95V.

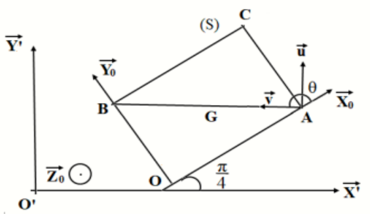


ÉPREUVE DE PHYSIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2021

Concours EAMAC 2021	Cycle Ingénieur et EAC	Épreuve de Physique

Exercice 1

Dans un plan vertical $\left(\overrightarrow{O'X'}, \overrightarrow{O'Y'}\right)$ d'un repère galiléen orthonormé direct $R'_0\left(O'; \overrightarrow{X'}; \overrightarrow{Y'}; \overrightarrow{Z}\right)$, soient deux axes orthogonaux $\overrightarrow{OX_0}$ et $\overrightarrow{OY_0}$ d'un repère orthonormé direct galiléen $R_0\left(O; \overrightarrow{X}; \overrightarrow{Y}; \overrightarrow{Z}\right)$ tels que $\overrightarrow{OX_0}$ fasse un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'horizontal de ce plan Un solide (S) homogène, de centre d'inertie G et de masse m, ayant la forme d'un segment de droite AB de longueur $2a$, est mobile dans ce plan de façon que A (respectivement B) se déplace sans frottement sur $\overrightarrow{OX_0}$ (respectivement sur $\overrightarrow{OY_0}$).



On pose $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OX_0}, \overrightarrow{AB}}\right)$ et on définit le point que C par : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ (ou $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$)

On introduit aussi un autre repère orthonormé direct $R\left(A; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{Z_0}\right)$ lié au solide (S) et obtenu à partir de R_0 par une rotation d'angle $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ autour de l'axe (OZ_0)

1. Déterminer le vecteur rotation instantanée $\Omega(R/R_0)$ de (S) par rapport R_0
2. Déterminer les éléments de réductions du torseur Cinétique, $\Omega\left[\overrightarrow{R_v}, \vec{\sigma}_c(S/R_0)\right]$ en C de (S)
3. Déterminer les éléments de réductions du torseur dynamique $A\left[\overrightarrow{R_a}, \vec{\delta}_c(S/R_0)\right]$ en C de (S)

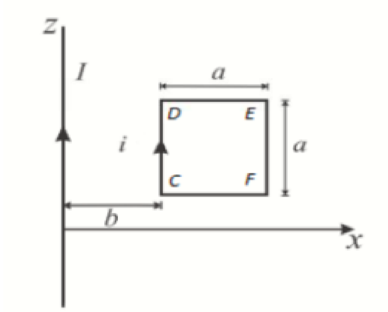
Exercice 2

Un fil infiniment long, d'axe Oz, est parcouru par un courant I. Un circuit carré $CDEF$, de côté a et de coefficient d'auto-inductance L négligeable, est placé dans le plan xOz.

1. Calculer le champ magnétique créé par le fil infini en un point M situé à la distance b du fil.

2. Déterminer par calcul direct la force de Laplace exercée par le fil sur la spire carrée.

3. Déterminer le flux du champ magnétique créé par le fil infini à travers la spire. En déduire une nouvelle détermination de la force de Laplace exercée sur le cadre carré



Exercice 3

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

1. Rappeler l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$et magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$.
2. On suppose que le champ électrique est de la forme : $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u_x}$
3. Quel est l'état de polarisation de cette onde ?
4. Quelle est la structure de cette onde ?
5. Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ associé à $\overrightarrow{E}(M,t)$.
6. Calcule le vecteur de Poynting $\overrightarrow{R}$ de l'onde ainsi que sa valeur moyenne $\langle \overrightarrow{R} \rangle$
7. La puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers une surface $S = 4\,mm^2$ orthogonale à sa direction de propagation est $P = 10\,W$. Calculer les amplitudes E_0 et B_0 des champs électrique et magnétique.

Données utiles :

Permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} F.m^{-1}$

Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$

Célérité de la lumière dans le vide $C = 3.10^8 m/s$

Exercice 4

On considère un gaz diatomique, supposé parfait, contenu dans un cylindre horizontal, fermé par un piston qui se déplace sans frottement. À l'état initial, le gaz a une température $To = 300\,K$, un volume $Vo = 1\,l$, une pression $Po = 105\,pascals$.

1. On fait subir à ce gaz, une compression isotherme, jusqu'à atteindre la pression $P1 = 10Po$. Calculer le volume final et les échanges de travail et de chaleur du gaz avec le milieu extérieur.
2. - On détend le gaz adiabatiquement, de façon réversible, de manière à le ramener à sa pression initiale. Calculer à la fin de cette détente :

   a) le volume final du gaz

   b) l'abaissement de température ΔT

   c) le travail fourni par le gaz et sa variation d'énergie interne.

   On donne : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$

3. Le gaz est enfin ramené aux conditions initiales (Po, Vo, To) à pression constante. Déterminer au cours de cette transformation :
   a) la variation d'énergie interne.
   b) le travail et la chaleur échangés avec le milieu extérieur.

N.B. : Les expressions littérales seront données, pour toutes les questions, en fonction de $Po, Vo, To, P1 \ et \ \gamma$.

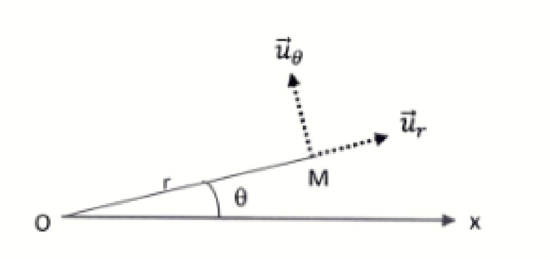
ÉPREUVE DE PHYSIQUE CYCLE INGÉNIEUR 2022

Concours EAMAC 2022	Cycle Ingénieur et EAC	Épreuve de Physique

Exercice 1 :

Le mouvement d'un point matériel M dans un plan est défini par les équations paramétriques suivantes : $r(t) = r_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$; $\theta(t) = \frac{t^2}{\tau^2}$ ou r_0 et τ sont deux constantes positives.

On appellera $\overrightarrow{u_r}$, le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ le vecteur qui lui ai directement perpendiculaire (voir figure) :



1. Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ ainsi que son module.

2. Évaluer l'angle entre le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire en M et le vecteur unitaire radiale. Que peut-on dire de cet angle ?

3- Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(M)$. En déduire ses composantes tangentielle et normale dans la base de Serret-Frenet $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_N}, \vec{b}\right)$.

4- Calculer le rayon de courbure ainsi que le centre de courbure de la trajectoire à l'instant t.

Exercice 2

Un moteur fonctionne en suivant le cycle de transformation réversibles suivant :

- État 1 à l'état 2 : compression adiabatique
- État 2 à l'état 3 : compression isochore
- État 3 à l'état 4 : détente adiabatique
- État 4 à l'état 5 : Refroidissement isochore

On suppose que le cycle est étudié une mole d'air assimilé à un gaz parfait.

1. Tracer le diagramme (P, V) du cycle

2. Déterminer V_1 et V_2 si $V_1 = 7V_2$

3. Calculer P_2 et T_2

4. Calculer les quantités de chaleur échangées au cours de chacune des transformations en fonctions des températures T_1, T_2, T_3, T_4. Commenter et calculer leurs valeurs numériques.

5. Évaluer le travail fourni à l'air au cours du cycle en utilisant le premier principe

6. Déterminer le rendement du cycle

On donne : $\gamma = 1{,}4$; $C_P = 29J.mol^{-1}K^{-1}$; $R = 8{,}32J.mol^{-1}K^{-1}$

	État 1	État 2	État 3	État 4
Pression (Pa)	10^5		62.10^5	$4{,}08.10^5$
Température (K)	300		$2{,}65.10^3$	$1{,}63.10^3$

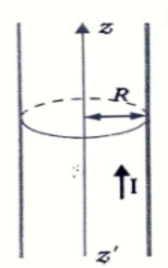
Exercice 3

Un cylindre conducteur de conductivité γ, de rayon R, de longueur h, est considéré comme infiniment long et parcouru par un courant stationnaire uniformément reparti dans la direction de l'axe, d'intensité I.

1- Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

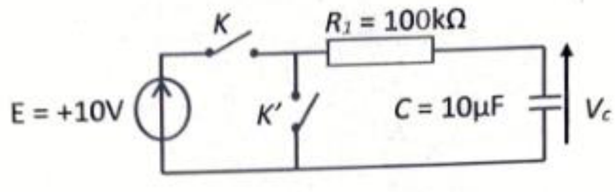
2- Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace.

3- En déduire le vecteur de Poynting en tout point de l'espace et son flux à travers la surface cylindrique du conducteur. Commenter le résultat.



Exercice 4

Le circuit représenté ci-dessous fait apparaître un condensateur C dont la charge est possible à la fermeture de l'interrupteur K. A $t = 0$, on considère le condensateur décharge, on ferme alors K.



1) Sans aucun calcul, préciser quelles sont les valeurs de $V_c(0), V_c(+\infty), i_c(0), i_c(+\infty)$.

2) En utilisant les lois fondamentales des circuits, écrire l'équation différentielle qui en découle sous la forme qui vous semble la plus adaptée au problème ($pour\ t \geq 0$). (1pt)

3) Résoudre cette équation et écrire l'expression de $V_c(t)$et $i_c(t)$. (1pt)

4) Représenter ces deux grandeurs sur un graphique en fonction du temps et retrouver
les résultats de la question 1. Préciser quelle est la valeur de la tension V_c à $t =\ 0{,}1s, t = 1s$
$t = 10s$. Conclure. (1pt)