Esercitazione 4: Bernoulli, Binomiale e Normale

Angela Andreella

03/11/2020

Esercizio 1: Distribuzione Binomiale

Prendiamo l'esercizio a pag.208. Sia una X una variabile aleatoria binomiale con parametri $n = 5$ e $\theta = 0.25$.

1. Scrivere la distribuzione di probabilità
2. Rappresentare questa distribuzione di probabilità graficamente
3. Calcolare media e varianza
4. Qual è la probabilità di vedere 3 o meno successi?
5. Qual è la probabilità di vedere più di 3 successi?
6. Calcolare la distribuzione cumulata

Soluzione

1. Per prima cosa descriviamo la distribuzione binomiale. Questa distribuzione descrive la probabilità di una serie di success in n prove indipendenti. Con θ indichiamo la probabilità di successo, e con n appunto il numero totale di prove. La distribuzione di probabilità è la seguente:

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} \cdot \theta^x \cdot (1-\theta)^{n-x} = \binom{5}{x} \cdot 0.25^x \cdot (1-0.25)^{5-x}$$

Sappiamo anche che $E(X) = n\theta$ e $Var(X) = n\theta(1-\theta)$.

Poichè $n = 5$, ovvero abbiamo 5 prove, il numero di successi può essere 0, 1, 2, 3, 4 o 5. Quindi la distribuzione completa di probabilità è:

$$\Pr(X = x) = \binom{5}{x} \cdot 0.25^x \cdot (1-0.25)^{5-x} = \begin{cases} \binom{5}{0} \cdot 0.25^0 \cdot (1-0.25)^{5-0} = 0.2373046875 & \text{if } x = 0 \\ \binom{5}{1} \cdot 0.25^1 \cdot (1-0.25)^{5-1} = 0.3955078125 & \text{if } x = 1 \\ \binom{5}{2} \cdot 0.25^2 \cdot (1-0.25)^{5-2} = 0.2636718750 & \text{if } x = 2 \\ \binom{5}{3} \cdot 0.25^3 \cdot (1-0.25)^{5-3} = 0.0878906250 & \text{if } x = 3 \\ \binom{5}{4} \cdot 0.25^4 \cdot (1-0.25)^{5-4} = 0.0146484375 & \text{if } x = 4 \\ \binom{5}{5} \cdot 0.25^5 \cdot (1-0.25)^{5-5} = 0.0009765625 & \text{if } x = 5 \end{cases}$$

N.B= Controllate sempre che la somma sia 1! Ovvero $\sum_{x \in \{0,\dots,5\}} \Pr(X = x) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) + \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) = 1$.

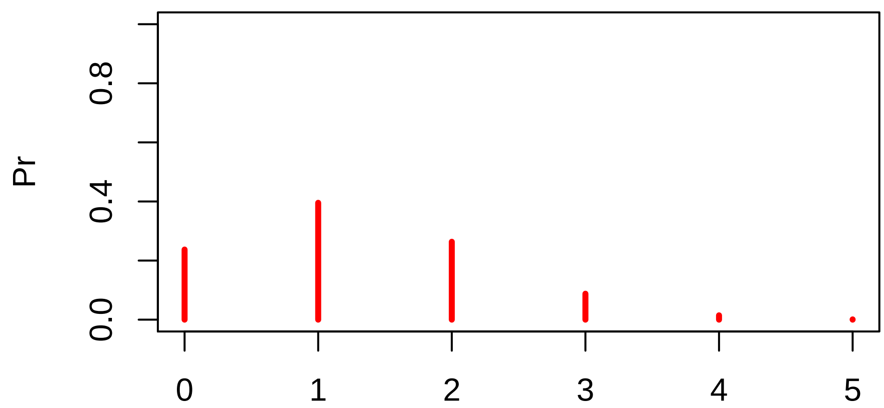
In R è molto semplice:

```r
dbinom(0:5,size = 5,prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.2373046875 0.3955078125 0.2636718750 0.0878906250 0.0146484375
## [6] 0.0009765625
```

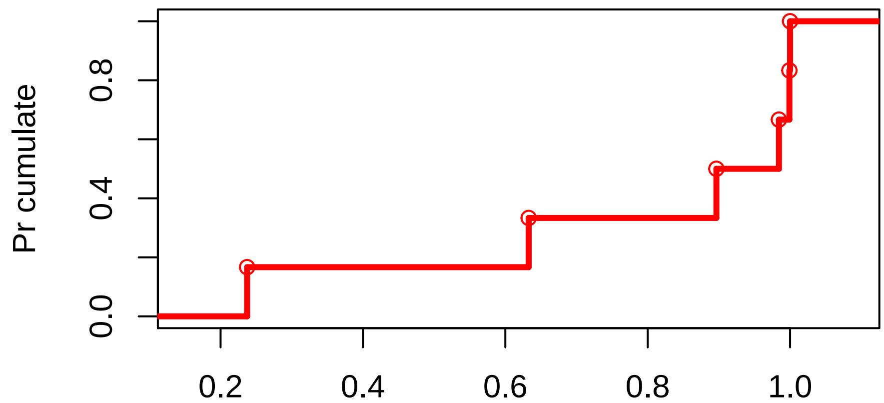
2. Per rappresentare questa distribuzione di probabilità graficamente possiamo utilizzare il barplot

```r
plot(0:5, dbinom(0:5, size=5, prob=.25),type='h',
     col = "red", ylab = "Pr", xlab = "", ylim = c(0,1),lwd=3)
```



oppure il grafico delle probabilità cumulate

```r
plot.stepfun(cumsum(dbinom(0:5, size=5, prob=.25)),
             ylab = "Pr cumulate", xlab = "", main = "", col = "red", lwd = 3)
```



3. La media è semplicemente $E(X) = n\theta = 5 \cdot 0.25 = 1.25$, la varianza invece $Var(X) = n\theta(1-\theta) = 5 \cdot 0.25 \cdot (1 - 0.25) = 0.9375$

4. La probabilità di avere 3 o meno successi si descrive con:

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq 3) &= \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) \\ &= 0.2373046875 + 0.3955078125 + 0.2636718750 + 0.0878906250 = 0.984375\end{aligned}$$

In R:

```
pbinom(3, size = 5, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.984375
```

5. La probabilità di avere più di 3 si descrive con:

$$\begin{aligned}\Pr(X > 3) &= \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) \\ &= 0.0146484375 + 0.0009765625 = 0.015625\end{aligned}$$

in R:

```
pbinom(3, size = 5, prob = 0.25, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.015625
```

oppure possiamo calcolarlo usando il risultato del punto precedente:

$$
\begin{aligned}
\Pr(X > 3) &= 1 - \Pr(X \geq 3) = 1 - \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) \\
&= 1 - 0.2373046875 + 0.3955078125 + 0.2636718750 + 0.0878906250 \\
&= 1 - 0.984375 = 0.015625
\end{aligned}
$$

in R:

```r
1-pbinom(3, size = 5, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.015625
```

6. Ricordiamo la formula della distribuzione cumulata:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{i=0}^{5} \Pr(X = i)$$

dunque:

$$
F(x) = \begin{cases}
\binom{5}{0} \cdot 0.25^0 \cdot (1-0.25)^{5-0} = 0.2373046875 & \text{if } x = 0 \\
\binom{5}{0} \cdot 0.25^0 \cdot (1-0.25)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot 0.25^1 \cdot (1-0.25)^{5-1} = 0.6328125 & \text{if } x = 1 \\
\binom{5}{0} \cdot 0.25^0 \cdot (1-0.25)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot 0.25^1 \cdot (1-0.25)^{5-1} & \\
+\binom{5}{2} \cdot 0.25^2 \cdot (1-0.25)^{5-2} = 0.8964844 & \text{if } x = 2 \\
\binom{5}{0} \cdot 0.25^0 \cdot (1-0.25)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot 0.25^1 \cdot (1-0.25)^{5-1} & \\
+\binom{5}{2} \cdot 0.25^2 \cdot (1-0.25)^{5-2} + \binom{5}{3} \cdot 0.25^3 \cdot (1-0.25)^{5-3} = 0.9843750 & \text{if } x = 3 \\
\binom{5}{0} \cdot 0.25^0 \cdot (1-0.25)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot 0.25^1 \cdot (1-0.25)^{5-1} & \\
+\binom{5}{2} \cdot 0.25^2 \cdot (1-0.25)^{5-2} + \binom{5}{3} \cdot 0.25^3 \cdot (1-0.25)^{5-3} & \\
+\binom{5}{4} \cdot 0.25^4 \cdot (1-0.25)^{5-4} = 0.9990234 & \text{if } x = 4 \\
\binom{5}{0} \cdot 0.25^0 \cdot (1-0.25)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot 0.25^1 \cdot (1-0.25)^{5-1} & \\
+\binom{5}{2} \cdot 0.25^2 \cdot (1-0.25)^{5-2} + \binom{5}{3} \cdot 0.25^3 \cdot (1-0.25)^{5-3} & \\
+\binom{5}{4} \cdot 0.25^4 \cdot (1-0.25)^{5-4} + \binom{5}{5} \cdot 0.25^5 \cdot (1-0.25)^{5-5} = 1.0000000 & \text{if } x = 5
\end{cases}
$$

In R:

```r
cumsum(dbinom(0:5, size=5, prob=.25))
```

```
## [1] 0.2373047 0.6328125 0.8964844 0.9843750 0.9990234 1.0000000
```

Esercizio 2: Distribuzione Binomiale

Si supponga che il 38% degli studenti di Psicologia abbia un titolo di studio linguistico. Considerando un campione casuale di 18 studenti determinare:

1. La probabilità che al massimo 4 studenti abbiano un titolo di studio linguistico;
2. La probabilità che abbiano un titolo di studio linguistico un numero di studenti tra 6 e 9;
3. La media e la varianza della distribuzione

Soluzione

Identifichiamo con la variabile aleatoria $X = \{\text{numero di studenti con titolo di studio linguistico}\}$. Abbiamo due possibilità che lo studente abbia il titolo di studio linguistico o no. Visto che abbiamo 18 studenti, possiamo utilizzare la distribuzione binomiale per descrivere X, con $n = 18$ prove indipendenti (studenti del campione casuale) e $\theta = 0.38$, identificando come successo l'avere il titolo di studio linguistico.

1. La probabilità che al massimo 4 studenti abbiano un titolo di studio linguistico può essere descritta come $\Pr(X \leq 4)$, dunque:

$$
\begin{aligned}
\Pr(X \leq 4) &= \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) + \Pr(X = 4) \\
&= \binom{18}{0} \cdot 0.38^0 \cdot (1 - 0.38)^{18-0} \\
&+ \binom{18}{1} \cdot 0.38^1 \cdot (1 - 0.38)^{18-1} \\
&+ \binom{18}{2} \cdot 0.38^2 \cdot (1 - 0.38)^{18-2} \\
&+ \binom{18}{3} \cdot 0.38^3 \cdot (1 - 0.38)^{18-3} \\
&+ \binom{18}{4} \cdot 0.38^4 \cdot (1 - 0.38)^{18-4} \\
&= 0.00018 + 0.00202 + 0.01053 + 0.03443 + 0.07913 \\
&= 0.12629
\end{aligned}
$$

In R:

```r
pbinom(4, size = 18, prob = 0.38)
```

```
## [1] 0.1262953
```

2. La probabilità che abbiano un titolo di studio linguistico un numero di studenti tra 6 e 9 può essere scritta come $\Pr(6 \leq X \leq 9)$, dunque:

$$
\begin{aligned}
\Pr(6 \leq X \leq 9) &= \Pr(X = 6) + \Pr(X = 7) + \Pr(X = 8) + \Pr(X = 9) = \\
&= \binom{18}{6} \cdot 0.38^6 \cdot (1 - 0.38)^{18-6} \\
&+ \binom{18}{7} \cdot 0.38^7 \cdot (1 - 0.38)^{18-7} \\
&+ \binom{18}{8} \cdot 0.38^8 \cdot (1 - 0.38)^{18-8} \\
&+ \binom{18}{9} \cdot 0.38^9 \cdot (1 - 0.38)^{18-9} \\
&= 0.18033 + 0.18947 + 0.15968 + 0.10874 = 0.63822
\end{aligned}
$$

In R:

```
pbinom(9, size = 18, prob = 0.38) - pbinom(5, size = 18, prob = 0.38)
```

```
## [1] 0.6382239
```

oppure

```
dbinom(9, size = 18, prob = 0.38) + dbinom(8, size = 18, prob = 0.38)
```

```
## [1] 0.2684181
```

```
+ dbinom(7, size = 18, prob = 0.38) + dbinom(6, size = 18, prob = 0.38)
```

```
## [1] 0.3698058
```

3. La media è uguale a $E(X) = n\theta = 18 \cdot 0.38 = 6.84$, e la varianza $Var(X) = n\theta(1-\theta) = 18 \cdot 0.38 \cdot (1 - 0.38) = 4.2408$.

In R:

```
n = 18
theta = 0.38
media = n* theta
varianza = n * theta * (1-theta)
print(c(media, varianza))
```

```
## [1] 6.8400 4.2408
```

Esercizio 3: Distribuzione Binomiale

La probabilità che una persona sia soddisfatta di un certo prodotto acquistato è pari a 0.9. Si intervistano a caso 3 persone e si chiede loro cosa ne pensano del prodotto acquistato.

Calcolare la probabilità che: 1. Nessuno sia soddisfatto; 2. Tutte e tre le persone siano soddisfatte; 3. In media quante persone sono soddisfatte?

Soluzione

Possiamo notare che la variabile aleatoria $X = \{\text{numero di persone soddisfatte}\}$ può essere descritta tramite una distribuzione binomiale, dove il successo è l'evento persona soddisfatta, il numero totale di prove è $n = 3$, e la probabilità di successo è pari a $\theta = 0.9$.

1. Dunque, la probabilità che nessuno sia soddisfatto è pari a $\Pr(X = 0)$:

$$\Pr(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0.9^0 \cdot (1 - 0.9)^{3-0} = 0.001$$

In R:

```
dbinom(0, size = 3, prob = 0.9)
```

```
## [1] 0.001
```

2. La probabilità che tutti e tre siano soddisfatti invece è pari a $\Pr(X = 3)$:

$$\Pr(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0.9^3 \cdot (1 - 0.9)^{3-3} = 0.729$$

In R:

```
dbinom(3, size = 3, prob = 0.9)
```

```
## [1] 0.729
```

3. Per sapere in media quante persone sono soddisfatte calcoliamo la media :) ovvero:

$$E(X) = n \cdot \theta = 3 \cdot 0.9 = 2.7$$

In R:

```
n = 3
theta = 0.9
n* theta
```

```
## [1] 2.7
```

Esercizio 4: Standardizzazione

Si conoscono due dati di una distribuzione: $x_1 = 130$ e $x_2 = 138$, e i rispettivi punti Z $Z_1 = -0.9375$, $Z_2 = 0.3125$. Calcolare la media e la varianza della distribuzione.

Soluzione

Per prima cosa facciamo un piccolo ripasso dei punti Z. I punti Z vengono calcolati in modo da avere una variabile con media 0 e varianza 1:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

dove μ è la media della popolazione, e σ la deviazione standard. Il punto Z indica quante deviazioni standard ci sono fra un determinato valore X e la media. Inoltre valori negativi indicano punteggi X inferiori alla media e valori positivi, punteggi sopra la media. Grazie ai punti Z possiamo confrontare fra loro punteggi X provenienti da distribuzioni di frequenza diverse.

Torniamo all'esercizio. Per calcolare la media e la varianza, usiamo la formula del punto Z:

$$Z_1 = \frac{130 - \mu}{\sigma} = -0.9375$$
$$Z_2 = \frac{138 - \mu}{\sigma} = 0.3125$$

dunque

$$130 + 0.9375\sigma = \mu$$
$$138 = 0.3125\sigma + 130 + 0.9375\sigma \rightarrow \sigma = \frac{8}{(0.3125 + 0.9375)} = 6.4$$

Abbiamo $\sigma = 6.4$, dunque la varianza è pari a $\sigma^2 = 6.4^2 = 40.96$, e la media $\mu = 130 + 0.9375\sigma = 130 + 0.9375 \cdot 6.4 = 136$.

Esercizio 5: Standardizzazione

Avendo una distribuzione di dati con media $\mu = 235$ e deviazione standard $\sigma = 49.5$, calcolare i punti Z dei seguenti valori e commentarli:

1. $x_1 = 385$;
2. $x_2 = 254$;
3. $x_3 = 198$;
4. $x_4 = 334$.

Soluzione

Utilizziamo di nuovo la formula per calcolare i punti Z:

$$Z_1 = \frac{385 - 235}{49.5} = 3.03$$
$$Z_2 = \frac{254 - 235}{49.5} = 0.38$$
$$Z_3 = \frac{198 - 235}{49.5} = -0.75$$
$$Z_4 = \frac{334 - 235}{49.5} = 2$$

Dunque il punteggio $x_1 = 385$ dista 3.03 deviazioni standard dalla media 235, x_2 invece dista 0.38 deviazioni standard dalla media e x_4 due volte. Questi tre punteggi risultano superiori della media, mentre x_3 inferiore e distante 0.75 deviazioni standard dalla media.

Esercizio 6: Distribuzione Normale

Supponiamo che la lunghezza del petalo di una specie di pianta sia distribuita normalmente con media 3.2 cm e deviazione standard 1.8 cm. Calcolare la probabilità che 1. ci sia un petalo maggiore di $4.5cm$; 2. ci sia un petalo minore uguale di $1.78cm$; 3. ci sia un petalo tra $2.9cm$ e $3.6cm$; 4. Rappresentare graficamente queste probabilità.

Soluzione

Pe calcolare le probabilità richieste dobbiamo calcolare il valore standardizzato Z per ogni lughezza richiesta all'interno della probabilità. Questo è necessario per poi utilizzare le tavole della normale standard. Indichiamo con $X = \{\text{lunghezza del petalo}\}$ variabile aleatoria che si distribuisce secondo una normale con $\mu = 3.2cm$ e deviazione standard $1.8cm$, dunque:

1. La probabilità che ci sia un petalo maggiore di 4.5 cm, è pari a

$$\Pr(X > 4.5)$$

per calcolare questa probabilità dovremmo utilizzare integrali etc, ma avendo le nostre belle tavole standardizzate, possiamo calcolarla trasformando il valore 4.5 in modo che sia un punto z:

$$\begin{aligned}\Pr(X > 4.5) &= \Pr(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{x-\mu}{\sigma}) \\ &= \Pr(Z > \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Pr(Z > \frac{4.5-3.2}{1.8}) \\ &= \Pr(Z > 0.722)\end{aligned}$$

La tavola della normale standard ci restituisce il valore di z avendo il valore della probabilità $\Pr(Z \leq z)$ e viceversa. Sappiamo che $\Pr(Z > z) = 1 - \Pr(Z \leq z)$, dunque:

$$\Pr(Z > 0.722) = 1 - \Pr(Z \leq 0.722) = 1 - 0.76424 = 0.23576$$

In R:

```
pnorm(4.5, mean = 3.2, sd = 1.8,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2350789
```

con lower.tail indichiamo di considerare $\Pr(X > x)$. Oppure

```
1-pnorm(4.5, mean = 3.2, sd = 1.8)
```

```
## [1] 0.2350789
```

Possiamo anche considerare direttamente la normale standard, ponendo invece di 4.5 il suo punto z pari a 0.722. In questo caso la media e la deviazione standard non vengono specificate poichè di default R considera la media 0 e la varianza 1 (ovvero la normale standard).

```
pnorm(0.722,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2351472
```

```
1-pnorm(0.722)
```

```
## [1] 0.2351472
```

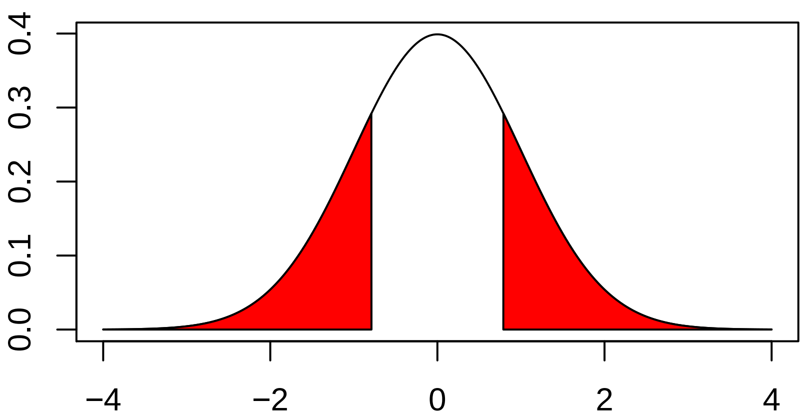
2. Facciamo gli stessi passaggi per calcolare la probabilità che ci sia un petalo minore uguale di 1.78 cm:

$$
\begin{aligned}
\Pr(X \leq 1.78) &= \Pr(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Pr(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) \\
&= \Pr(Z \leq \frac{1.78-3.2}{1.8}) = \Pr(Z \leq -0.7888889)
\end{aligned}
$$

Notiamo che il nostro punto standardizzato è negativo, e normalmente le tavole standardizzate mostrano $\Pr(Z \leq z)$ solo con z che assume valori positivi. Tuttavia la distribuzione normale standard è simmetrica intorno allo 0, dunque:

$$\Pr(Z \leq -0.7888889) = 1 - \Pr(Z \leq 0.7888889) = 0.2150885$$

come si può vedere dal grafico di seguito:



Le due aree rosse sono esattamente uguali, quella a sinistra descrive $\Pr(Z \leq -0.7889)$ e quella a destra $\Pr(Z \geq -0.7889)$, ricordando che l'area sotto la curva è pari a 1.

In R:

```
pnorm(1.78, mean = 3.2, sd = 1.8)
```

```
## [1] 0.2150885
```

oppure usando la normale standard:

```
pnorm(-0.7888889)
```

```
## [1] 0.2150885
```

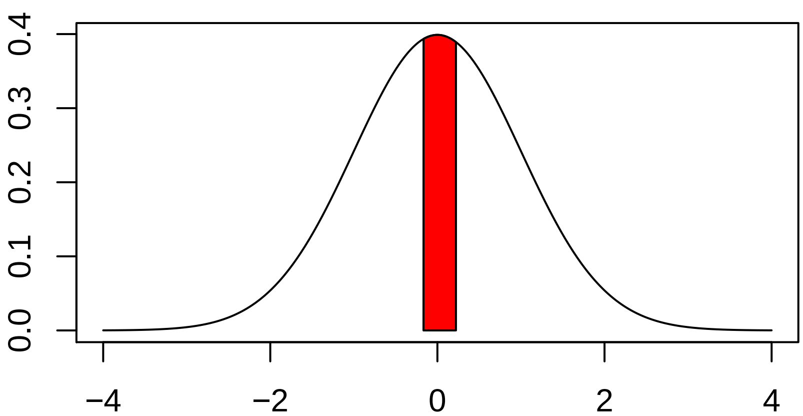
3. La probabilità che ci sia un petalo tra 2.9 cm e 3.6 cm, è pari a

$$
\begin{aligned}
\Pr(2.9 \geq X \leq 3.6) &= \Pr(\frac{2.9-3.2}{1.8} \leq Z \geq \frac{3.6-3.2}{1.8}) \\
&= \Pr(-0.1666667 \leq Z \geq 0.2222222)
\end{aligned}
$$

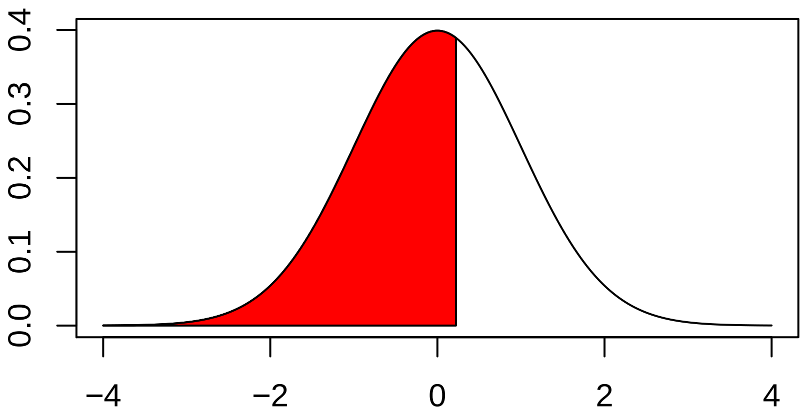
$\Pr(-0.1666667 \leq Z \geq 0.2222222)$ è pari alla differenza:

$$\Pr(Z \leq 0.2222222) - \Pr(Z \leq -0.1666667)$$

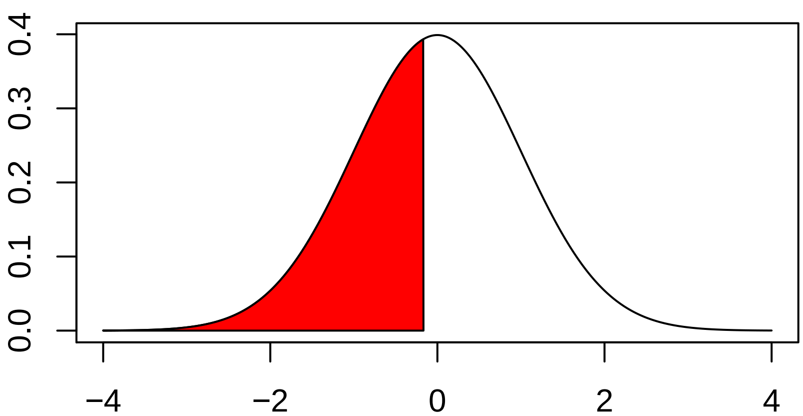
poichè stiamo cercando la seguente probabilità/area:



dunque prima calcoliamo $\Pr(Z \leq 0.2222222)$, ovvero:



e poi togliamo la seguente area $\Pr(Z \leq -0.1666667)$:



Dunque:

$$\Pr(Z \leq 0.2222222) = 0.58706$$

e

$$\Pr(Z \leq -0.1666667) = 1 - \Pr(Z \leq 0.1666667) = 0.4338162$$

dunque

$$\Pr(2.9 \leq X \geq 3.6) = \Pr(-0.1666667 \leq Z \geq 0.2222222) = 0.58706 - 0.4338162 = 0.1541134$$

In R:

```
pnorm(3.6, mean = 3.2, sd = 1.8) - pnorm(2.9, mean = 3.2, sd = 1.8)
```

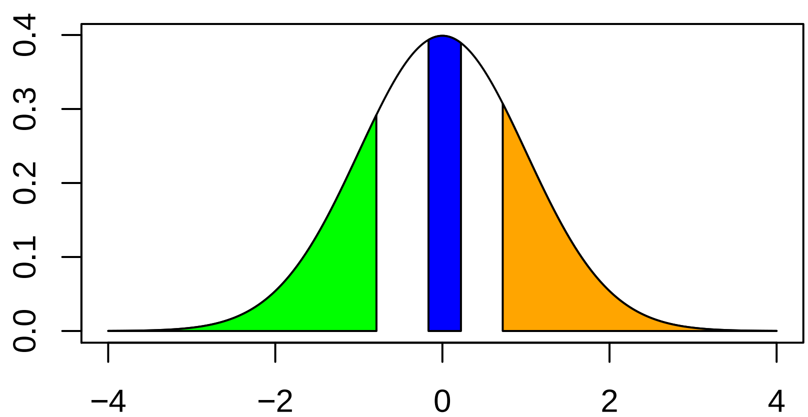
```
## [1] 0.1541134
```

oppure usando la normale standard:

```
pnorm(0.2222222) - pnorm(-0.1666667)
```

```
## [1] 0.1541134
```

4. Per rappresentare graficamente queste probabilità utilizziamo la curva di prima e coloriamo con diversi colori ciascuna probabilità:



dove l'area arancio indica $\Pr(Z \geq 0.722)$, verde $\Pr(Z \leq -0.7888889)$, e blue $\Pr(-0.1666667 \leq Z \geq 0.2222222)$.

Esercizio 7: Distribuzione Normale

La lunghezza di vita di una specie di lucertola è distribuita normalmente con media di 10 anni e deviazione standard di 3 anni.

1. Qual è la probabilità che una lucertola viva più di 14 anni?

2. Quanti anni hanno il 75% delle lucertole? e il 5%?
3. Qual è la probabilità che una lucertola viva più tra 8 e 10 anni?
4. Rappresenta graficamente il valore che include il 30% delle lucertole

Soluzione

Indichiamo con $X = \{\text{lunghezza di vita}\}$ variabile aleatoria distribuita normalmente con media $\mu = 10$ e $\sigma = 3$.

1. La probabilità che una lucertola viva più di 14 anni è pari a

$$\Pr(X \geq 14) = \Pr(Z \geq \frac{14-10}{3}) = \Pr(Z \geq 1.333333) = 1 - \Pr(Z \leq 1.333333) = 1 - 0.90824 = 0.09176$$

In R:

```
pnorm(14, mean = 10, sd = 3, lower.tail = F)
```

```
## [1] 0.09121122
```

oppure

```
pnorm(1.333333, lower.tail = F)
```

```
## [1] 0.09121127
```

2. Chiedere quanti anni hanno il 75% delle lucertole significa calcolare il 75 percentile, ovvero:

$$\Pr(X \leq x) = 0.75 = \Pr(Z \leq \frac{z-10}{3})$$

basta semplicemente vedere il valore z nella tabella corrispondente all probabilità 0.75, ovvero:

$$\frac{z-10}{3} = 0.67 \rightarrow z = 0.67 \cdot 3 + 10 = 12.01 \text{ anni}$$

In R:

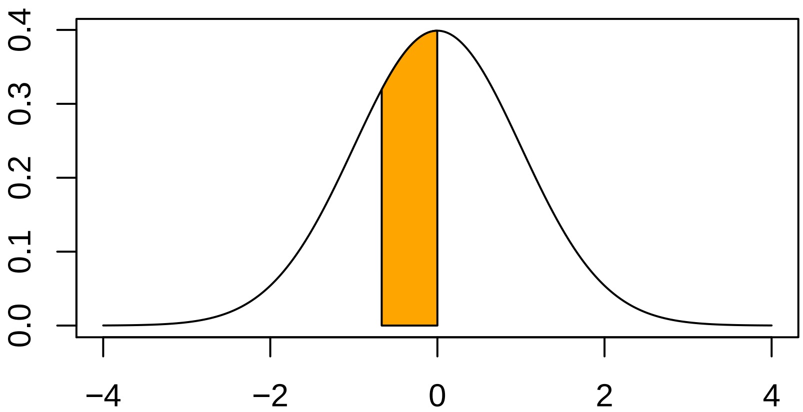
```
qnorm(0.75, mean = 10, sd = 3)
```

```
## [1] 12.02347
```

3. La probabilità che una lucertola viva tra 8 e 10 anni, è pari a:

$$\Pr(8 \leq X \leq 10) = \Pr(\frac{8-10}{3} \leq Z \leq \frac{10-10}{3}) = \Pr(-0.6666667 \leq Z \leq 0)$$

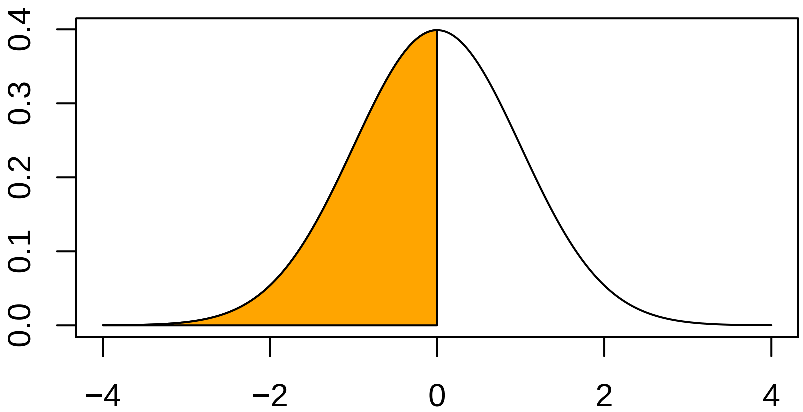
dobbiamo calcolare la seguente area:



Ricordando che:

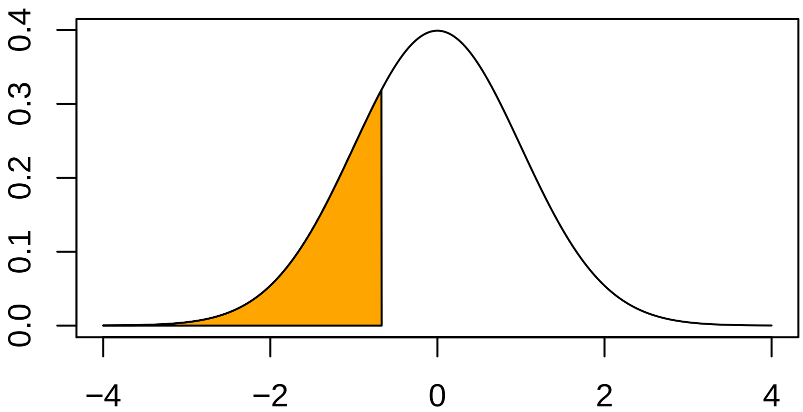
$$\Pr(-0.6666667 \leq Z \leq 0) = \Pr(Z \leq 0) - \Pr(Z \leq -0.6666667)$$

Calcoliamo prima la seguente area:



$$\Pr(Z \leq 0) = 0.5$$

e sottraiamo la seguente area:



$$\Pr(Z \leq -0.6666667) = 1 - \Pr(Z \leq 0.6666667) = 1 - 0.74857 = 0.25143$$

Dunque:

$$\Pr(-0.6666667 \leq Z \leq 0) = \Pr(Z \leq 0) - \Pr(Z \leq -0.6666667) = 0.5 - 0.25143 = 0.24857$$

In R:

```
pnorm(10, mean = 10, sd = 3) - pnorm(8, mean = 10, sd = 3)
```

```
## [1] 0.2475075
```

oppure

```
pnorm(0) - pnorm(-0.6666667)
```

```
## [1] 0.2475075
```

4. Il valore che include il 30% delle lucertole, viene calcolato come nel punto 2:

$$\Pr(X \leq x) = \Pr(Z \leq \frac{z - 10}{3}) = 0.3 \rightarrow z = -0.52 \cdot 3 + 10 = 8.44 \text{anni}$$

La tavola della normale standard considera valori di $\Pr(Z \leq z)$ tra 0.5 a 1, mentre noi cerchiamo 0.3. Tuttavia sappiamo che lo z che include il 30% delle lucertole, è pari al negativo dello z che include il 70% delle lucertole. (Fate un grafico per verificare), dunque consideriamo lo z in negativo della tabella rispetto a $\Pr(Z \leq z) = 0.7$

In R:

```
qnorm(0.3, mean = 10, sd = 3)
```

```
## [1] 8.426798
```

Esercizio 8: Media campionaria

I perimetri toracici della popolazione maschile italiana di età compresa tra 18 e 75 anni, si distribuiscono normalmente con media $\mu = 75cm$ e deviazione standard $\sigma = 19cm$. Determinare la probabilità che il perimetro toracico medio calcolato in un campione casuale di $n = 100$ superi i $79.75cm$.

Soluzione

Ci viene chiesto di calcolare una probabilità considerando come variabile aleatoria il perimetro toracico **medio**. Possiamo risolvere questo esercizio utilizzando il teorema del limite centrale, che ci dice:

Se la popolazione si distribuisce come una normale con media μ e varianza σ^2, allora con n sufficientemente grande, la media campionaria della popolazione si distribuisce anche lei come una normale con media μ e varianza pari a σ^2/n. Dunque nel nostro caso, la media è $75cm$ e la deviazione standard $19/\sqrt{100}$.

Identifichiamo con $\bar{X}$ la distribuzione dei perimetri torarcici maschili, la probabilità richiesta è pari a:

$$\Pr(\bar{X} > 79.75) = \Pr(Z > \frac{(79.75 - 75)}{19/\sqrt{100}}) = \Pr(Z > 2.5) = 1 - \Pr(Z < 2.5) = 1 - 0.99379 = 0.00621$$

In R:

```
pnorm(79.75, mean = 75, sd = 19/sqrt(100), lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.006209665
```

oppure

```
pnorm(2.5, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.006209665
```