Esercitazione 3: Basi di Probabilità, Indipendenza, condizionamento e Bayes

Angela Andreella

03/11/2020

Esercizio 1

Riprendiamo l'esercizio 14.2.2.0.2 Esercizio della dispensa.

- Verificare le proprietà sopra enunciate nei tre casi presi in esame (moneta, dadi, terapia) -Definire una variabile aleatoria (Spazio Campionario e distribuzione di probabilità) e verificarne le proprietà.

Soluzione

Per prima cosa facciamo un riassunto delle proprietà della probabilità:

1. Il valore della probabilità di un evento assume valori tra 0 e 1: $0 \leq \Pr(X) \leq 1$;
2. La somma delle probabilità considerando tutti gli eventi dello spazio campionario Ω è pari a 1: $\sum_{x \in \Omega} \Pr(X = x) = 1$;
3. Considerando due eventi dello spazio campionario, la probabilità che si verifichi un evento o l'altro è pari alla somma delle due singole probabilità: Per esempio avendo i due eventi x_1 e x_2 nello spazio campionario Ω, $\Pr(\cup_{i=1}^{2} Pr(X = x_i) = \sum_{i=1}^{2} \Pr(X = x_i) = \Pr(X = x_1) + \Pr(X = x_2)$

Dunque nel caso della moneta:

1. Abbiamo due eventi (Testa e Croce), dove le probabilità associate sono uguali a 0.5, valore compreso tra 0 e 1;

2. Ponendo $Testa = x_1 = 1$ e $Croce = x_2 = 0$, vediamo che $\Pr(X = 1) + \Pr(X = 0) = 0.5 + 0.5 = 1$;

3. Le probabilità che si verifichi testa o croce è pari a $\Pr(\cup_{i=1}^{2} Pr(X = x_i) = \sum_{i=1}^{2} \Pr(X = x_i) = \Pr(X = x_1) + \Pr(X = x_2) = 0.5 + 0.5 = 1$. Non possono avverarsi contemporaneamante (mutuamente esclusivi ed esausitivi), e se ci pensiamo senza tante formule la proabilità che si verifichi o testa o croce è pari a 1, cioè probabilità massima, certezza :)

Nel caso del dado:

1. Abbiamo 6 eventi (Esce 1, 2, 3, 4, 5 e 6), ogni evento ha probabilità 1/6 di avverarsi, valore compreso tra 0 e 1;

2. Ponendo ""Esce 1" $= x_1 = 1$, "Esce 2" $= x_2 = 2$, "Esce 3" $= x_3 = 3$, "Esce 4" $= x_4 = 4$, "Esce 5" $= x_5 = 5$, "Esce 6" $= x_6 = 6$, vediamo che $\Pr(X = x_1) + \Pr(X = x_2) + \Pr(X = x_3) + \Pr(X = x_4) + \Pr(X = x_5) + \Pr(X = x_6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1$;

3. Prendendo per esempio i primi tre eventi x_1, x_2, x_3. La probabilità che si verifichi uno dei tre è pari a $\Pr(\cup_{i=1}^{3} Pr(X = x_i) = \sum_{i=1}^{3} \Pr(X = x_i) = \Pr(X = x_1)+\Pr(X = x_2)+\Pr(X = x_3) = 1/6+1/6+1/6 = 3/6$

Nel caso della terapia:

1. Abbiamo 2 eventi (Esito Positivo e Negativo), dove il primo ha probabilità 0.9 di avverarsi e il secondo 0.1, entrambi sono valori compresi tra 0 e 1;
2. Ponendo Positivo $= x_1 = 1$ e Negativo $= x_2 = 0$, vediamo che $\Pr(X = x_1)+\Pr(X = x_2) = 0.9+0.1 = 1$;
3. La probabilità che il Test sia Positivo o Negativo anche qui come per la moneta avendo due eventi solamente nello spazio campionario questa probabilità è pari a 1: $\Pr(\cup_{i=1}^{2} Pr(X = x_i) = \sum_{i=1}^{2} \Pr(X = x_i) = \Pr(X = x_1) + \Pr(X = x_2) = 0.9 + 0.1 = 1$.

Esercizio 2

Riprendiamo l'esercizio 14.2.2.0.2 Esercizio della dispensa.

Definire una variabile aleatoria (Spazio Campionario e distribuzione di probabilità) e verificarne le proprietà.

Soluzione

Facciamo tre esempi:

1. Si ha un'urna con 9 bigliettini numerati da 1 a 9 e si pesca un bigliettino. Definiamo la nostra variabile aleatoria come $X =$ Valore numerico del bigliettino pescato, lo spazio campionario saranno i numeri dei bigliettini, ovvero $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. La distribuzione di probabilità invece:

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 1/9, & \text{se } x = 1. \\ \vdots \\ 1/9, & \text{se } x = 9. \end{cases}$$

2. Si considera un mazzo di 52 carte da gioco, peschiamo una carta ma teniamo conto solo del seme. Definiamo la variabile aleatoria $X =$ Seme pescato, lo spazio campionario sarà $\Omega = \{$Cuori, Fiori, Picche, Quadri$\}$. La distribuzione di probabilità invece:

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 13/52, & \text{se } x = \text{Cuori.} \\ 13/52, & \text{se } x = \text{Fiori.} \\ 13/52, & \text{se } x = \text{Picche.} \\ 13/52, & \text{se } x = \text{Quadri.} \end{cases}$$

3. Ora consideriamo l'esempio 2 di sopra ma considerando solamente i numeri. La variabile aleatoria è definita come $X =$ Numero pescato, lo spazio campionario sarà $\Omega = \{1, \dots, 13\}$. La distribuzione di probabilità invece:

$$\Pr(X=x)=\begin{cases} 4/52, & \text{se } x=1. \\ 4/52, & \text{se } x=2. \\ \vdots \\ 4/52, & \text{se } x=12. \\ 4/52, & \text{se } x=13. \end{cases}$$

Esercizio 3

Calcolare la probabilità di avere un numero pari nel lancio di un dado non truccato.

Soluzione

Per prima cosa identifichiamo la variabile casuale, ovvero $X = \text{Esito di un lancio di un dado}$. Calcolare la probabilità di avere un numero pari nel lancio di un dado non truccato significa che vogliamo che esca 2, o 4 o 6. Abbiamo già visto che lo spazio campionario è pari a $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, e la probabiltià che esca fuori uno di questi numeri è pari a $1/6$. Dunque:

$$\Pr(X \text{ sia pari}) = \Pr(X \text{ sia 2 o 3 o 4}) = \Pr(\cup_{x_i \in \{2,4,6\}} X = x_i) = \Pr(X=2)+\Pr(X=4)+\Pr(X=6) = 3/6$$

Abbiamo utilizzato la terza proprietà delle probabilità.

Esercizio 4

Calcolare la probabilità che un uovo cada a destra del tavolo sapendo che la probabilità che cada a sinistra è pari a 0.3. L'uovo può cadere solo a destra o a sinistra.

Soluzione

Abbiamo visto che la somma delle probabilità considerando tutti gli eventi possibili è pari a 1. Dunque

$$1 = \Pr(\text{l'uovo cade a sx})+\Pr(\text{l'uovo cade a dx}) = 0.3+\Pr(\text{l'uovo cade a dx}) \rightarrow \Pr(\text{l'uovo cade a dx}) = 1-0.3 = 0.7$$

Questi esercizi si possono svolgere anche senza troppa notazione (perchè relativamente semplici), ma se le cose si complicano è consigliato definire la variabile aleatoria, lo spazio campionario, gli eventi e la distribuzione di probabilità. In questo caso:

$$\text{Variabile aleatoria} : X = \text{Caduta dell'uovo}$$

$$\text{Spazio Campionario} : \Omega = \{Dx, Sx\}$$

$$\text{Distribuzione di prob.} : \Pr(X=x) = \begin{cases} 0.3 & \text{se } x = \text{"}Sx\text{"} \\ 0.7 & \text{se } x = \text{"}Dx\text{"} \end{cases}$$

Esercizio 5

Si lanciano due dadi non truccati. Qual è la probabilità di avere un numero pari nel primo e un numero dispari nel secondo.

Soluzione

Qui dobbiamo ricordarci del concetto di indipendenza tra due variabili aleatorie che descrivono l'esito dei due dadi. Sappiamo che i due dadi non sono dipendenti tra di loro (un dado non vede cosa fa l'altro o non l'influenza in alcun modo :)). Dunque identifichiamo con

$$X = \{\text{Esito primo dado}\}$$
$$Y = \{\text{Esito secondo dado}\}$$

Dunque vogliamo che nel primo dado esca un numero pari che la probabilità è stata calcolata nell' Es. 3: $\Pr(\text{numero pari}) = 3/6$, e nel secondo dado un numero dispari che la probabilità è sempre $3/6$, difatti:

$$\Pr(Y \text{ sia dispari}) = \Pr(X \text{ sia 1 o 3 o 5}) = \Pr(\cup_{x_i \in \{1,3,5\}} X = x_i) = \Pr(X = 1) + \Pr(X = 3) + \Pr(X = 5) = 3/6$$

Calcolare la probabilità che {X pari} e {Y dispari}, significa che vogliamo contemporaneamente questi due eventi, ovvero si considera l'intersezione di questi due eventi (E). Avendo detto che i due eventi {X pari} {Y dispari} sono indipendenti, allora:

$$\Pr(\text{X pari} \cap \text{Y dispari}) = \Pr(\text{X pari}) \Pr(\text{X dispari}) = 3/6 \cdot 3/6 = 9/36 = 0.25$$

Se avessimo tirato i due dadi contemporaneamente e volessimo sapere la probabilità di avere un numero pari e un numero dispari senza contare in quale dato, dovremmo considerare anche il caso $\{X dispari\}$ e $\{Y pari\}$, ovvero:

$$\begin{aligned}
&\Pr(\text{X pari} \cap \text{Y dispari}) \cup \Pr(\text{X dispari} \cap \text{Y pari}) \\
&= \Pr(\text{X pari}) \Pr(\text{X dispari}) + \Pr(\text{X dispari}) \Pr(\text{X pari}) \\
&= 3/6 \cdot 3/6 + 3/6 \cdot 3/6 = 9/36 \cdot 9/36 = 0.25 + 0.25 = 0.5
\end{aligned}$$

La probabilità è maggiore rispetto a quella precedente avendo più possibilità.

Esercizio 6

Supponiamo di avere un' urna contenente 3 palline nere, e 2 rosse. Supponiamo di estrarre due palline senza reimmisione nell' urna, una dopo l' altra. Calcolare le seguenti probabilità:

1. La seconda pallina è rossa;
2. La seconda pallina è nera, e la prima pallina è rossa;
3. Entrambe le palline sono nere.

Soluzione

1. Per prima cosa chiediamoci, quali sono i vari eventi possibili per avere l'evento di interesse {seconda pallina rossa}? Indichiamo con N le palline nere e con R le palline rosse. Poniamo l'indice 1 e 2 per identificare la prima o seconda pescata, per esempio N_1 indica che nella prima pescata ho preso una pallina nera, R_2 nella seconda pescata ho preso una pallina rossa. Dunque l'evento di interesse che indichiamo con E, avviene nei seguenti eventi:

- Estraggo la prima pallina rossa, e la seconda rossa;
- Estraggo la prima pallina nera, e la seconda rossa;

che si possono riscrivere:

- $E_1 = R_1 \cap R_2$;
- $E_2 = N_1 \cap R_2$;

Dunque la nostra probabilità di interesse è $\Pr(E) = \Pr(E_1) \cup \Pr(E_2)$, essendo E_1 ed E_2 indipendenti tra loro (sono due pescate diverse), possiamo scrivere $\Pr(E) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2)$. Dobbiamo calcolare $\Pr(E_1)$ e $\Pr(E_1)$. Per poter fare ciò dobbiamo riprendere il teorema di Bayes, in generale

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

cosa significa? La probabilità'che avvenga l'evento A dato B è pari alla probabilità dell'intersezione degli eventi diviso la probabilità dell'evento B. Questo ci fa pensare alle frequenze condizionate che abbiamo visto nelle scorse esercitazioni, potete vedere in linea di massima $\Pr(B)$ come la frequenza marginale in analisi, e $\Pr(A \cap B)$ come la frequenza congiunta:

$$p_{i|j} = f_{ij}/f_{\cdot j}$$

Riprendendo il nostro esercizio, dobbiamo calcolare $\Pr(R_1 \cap R_2)$, visto che sicuramente la seconda estrazione dipende dalla prima (poichè non rimettiamo dentro la prima pallina nell'urna), allora:

$$\Pr(R_1 \cap R_2) = \Pr(R_2 \mid R_1) \Pr(R_1)$$

Ok, quindi dobbiamo calcolare $\Pr(R_1)$ e $\Pr(R_2 \mid R_1)$. Iniziamo con la prima, ogni pallina ha la stessa possibilità di essere pescata nel primo giro, dunque avendo 5 palline la $\Pr(R_1)$ è pari a $2/5$, avendo 2 palline rosse. Ora calcoliamo $\Pr(R_2 \mid R_1)$. Sappiamo che la prima pallina è rossa, poichè abbiamo condizionato a R_1, dunque dobbiamo togliere una pallina rossa dall'urna immaginaria. Non abbiamo più 5 palline totali ma 4 di cui 1 rossa e 3 nere, quindi $\Pr(R_2 \mid R_1) = 1/4$. Dunque:

$$\Pr(E_1) = \Pr(R_1 \cap R_2) = \Pr(R_1) \Pr(R_2 \mid R_1) = 2/5 \cdot 1/4$$

Usiamo lo stesso metodo per calcolare la probabilità di $E_2 = N_1 \cap R_2$:

$$\Pr(E_2) = \Pr(N_1 \cap R_2) = \Pr(N_1) \Pr(R_2 \mid N_1) = 3/5 \cdot 2/4$$

dunque infine

$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) = 2/5 \cdot 1/4 + 3/5 \cdot 2/4 = 0.4$$

2. Usando la notazione precedente, questo significa calcolare:

$$\Pr(R_1 \cap N_2) = \Pr(R_1)\Pr(N_2 \mid R_1) = 2/5 \cdot 3/4 = 0.3$$

3. Usando la notazione precedente, questo significa calcolare:

$$\Pr(N_1 \cap N_2) = \Pr(N_1)\Pr(N_2 \mid N_1) = 3/5 \cdot 2/4 = 0.3$$

Esercizio 7

Il test del "palloncino" che indica la presenza di alcol nell'organismo, ha esito positivo per il 4% delle persone controllate. L'esperienza ha mostrato che, con questa prova, il 98% delle persone con risultato positivo era effettivamente in stato di ebrezza e che il 98% delle persone con esito negativo non lo era.

1. Qual è la probabilità che l'alcool test dia esito positivo per una persona che non ha bevuto?
2. Qual è la probabilità che l'alcol test dia esito negativo per una persona che ha bevuto?

Soluzione

1. Diamo una notazione ai vari eventi P = Test Positivo, N = Test Negativo, $A = \{\text{la persona ha bevuto alcolici}\}$, $NA = \{\text{la persona non ha bevuto alcolici}\}$.

Vogliamo dunque calcolare $\Pr(P \mid NA)$.

Che informazioni ci fornisce il testo? - Esito positivo per il 4% delle persone controllate, ovvero $\Pr(P) = 0.04$.
- Il 98% delle persone con risultato positivo era effettivamente in stato di ebrezza, ovvero $\Pr(A \mid P) = 0.98$
- Il 98% delle persone con esito negativo non lo era, ovvero $\Pr(NA \mid N) = 0.98\%$.

Possiamo ricavarci inoltre queste informazioni:

- $\Pr(N) = 1 - \Pr(P) = 1 - 0.04 = 0.96$;
- $\Pr(NA \mid P) = 0.02$;
- $\Pr(A \mid N) = 0.02$.

Noi dobbiamo calcolare $\Pr(P \mid NA)$, usiamo il teorema di bayes:

$$\Pr(P \mid NA) = \frac{\Pr(P \cap NA)}{\Pr(NA)}$$

Dunque dobbiamo ricavarci $\Pr(P \cap NA)$ e $\Pr(NA)$. Iniziamo con $\Pr(P \cap NA)$. Utilizziamo la regola del prodotto:

$$\Pr(P \cap NA) = \Pr(NA \mid P)\Pr(P) = 0.02 \cdot 0.04$$

Per calcolare $\Pr(NA)$ invece utilizziamo il teorema delle probabilità totali:

$$\Pr(NA) = \Pr(NA \mid P)\Pr(P) + \Pr(NA \mid N)\Pr(N) = 0.02 \cdot 0.04 + 0.98 \cdot 0.96 = 0.9416$$

Dunque la nostra probabilità finale è pari a:

$$\Pr(P \mid NA) = \frac{0.02 \cdot 0.04}{0.9416} = 0.00085$$

2. Vogliamo dunque calcolare $\Pr(N \mid A)$, si svolgono gli stessi passaggi di prima

$$\Pr(N \mid A) = \frac{\Pr(N \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A \mid N)\Pr(N)}{\Pr(A \mid N)\Pr(N) + \Pr(A \mid P)\Pr(P)} = \frac{0.02 \cdot 0.96}{0.02 \cdot 0.96 + 0.98 \cdot 0.04} = 0.33$$

Esercizio 8

Il 30% degli iscritti a un corso di nuoto sono femmine. Inoltre il 5% di questi sono fumatori, mentre tra i maschi il 15% sono fumatrici. Qual è la probabilità che, scegliendo a caso un fumatore, questo sia maschio?

Soluzione

Indichiamo con F l'evento femmina, con M maschio, con Fm fumatori e con NFm non fumatori. Vediamo che informazioni ci fornisce il testo:

- Il 30% degli iscritti a un corso di nuoto sono femmine: $\Pr(F) = 0.3$;
- Il 5% di questi sono fumatori: $\Pr(Fm \mid F) = 0.05$;
- Tra i maschi il 15% sono fumatrici: $\Pr(Fm \mid M) = 0.15$;

Usando le proprietà della probabilità possiamo ricavarci:

- $\Pr(M) = 1 - \Pr(F) = 1 - 0.3 = 0.7$

Vogliamo calcolare la probabilità che, scegliendo a caso un fumatore, questo sia maschio, ovvero $\Pr(M \mid Fm)$. Usiamo il teorema di bayes, e il teorema delle probabilità totali:

$$\Pr(M \mid Fm) = \frac{\Pr(M \cap Fm)}{\Pr(Fm)} = \frac{\Pr(Fm \mid M)\Pr(M)}{\Pr(Fm \mid M)\Pr(M)\Pr(Fm \mid F)\Pr(F)} = \frac{0.15 \cdot 0.7}{0.15 \cdot 0.7 + 0.05 \cdot 0.3} = 0.986$$