TP N°4 Introducción a la transformada de Fourier

Angel Calderon

11 de octubre de 2024

Índice

1. Definición de Convolución

La convolución en óptica es una herramienta esencial para modelar cómo los sistemas ópticos transforman la luz y las imágenes, así como para realizar análisis en el procesamiento de señales. Por ejemplo,

1. Holografía e Interferometría: En estos campos, la convolución permite interpretar cómo las ondas de luz se combinan para formar patrones de interferencia o imágenes holográficas.
2. Microscopía de Fluorescencia: La convolución de la señal de la muestra con la PSF del microscopio ayuda a describir la resolución y calidad de la imagen capturada.

La convolución de dos funciones $h(x)$ y $g(x)$ están definidas como:

$$f(x) = (h * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\, g(x-\xi) d\xi \tag{1}$$

1.1. Funciones Especiales

$$rect(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

2. Ejercicio 8

a) La convolucíon de $rect(\xi)$ consigo misma implica encontrar el área de superposición entre la función $rect(\xi)$ y su versión desplazada $rect(x-\xi)$

$$f(x) = rect(x) * rect(x) = \int_{-\infty}^{\infty} rexct(\xi)\, rect(x-\xi) d\xi \tag{3}$$

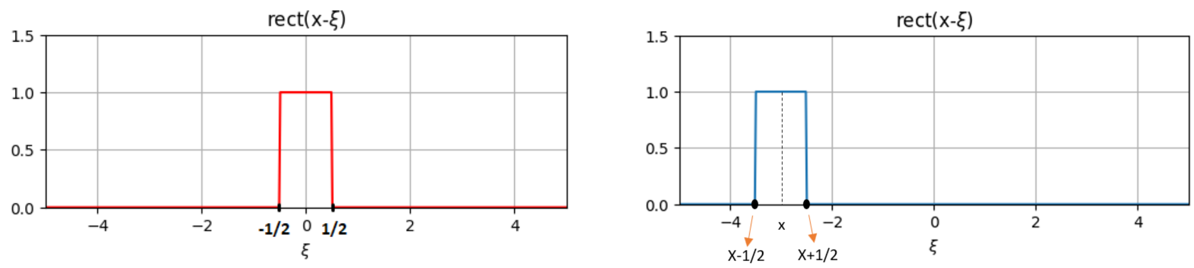

Figura 1

Primero vamos a encontrar la región donde el producto de las funciones no se anula.

$$rect(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |\xi| > \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$$

$$rect(x-\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x-\xi| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |x-\xi| > \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x-\frac{1}{2} \leq \xi \leq x+\frac{1}{2}$$

Nos interesa el caso donde haya intersección, producto no nulo. Vamos a dividir el análisis en dos partes.

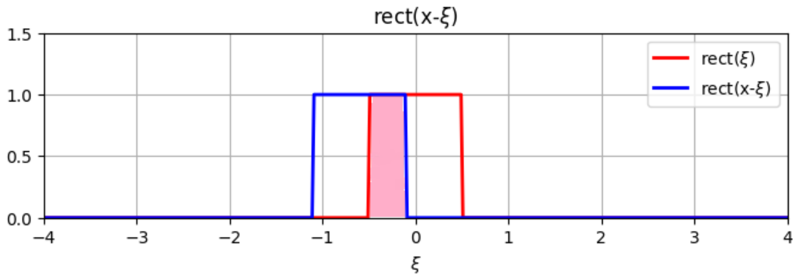

Figura 2

i) $-1 \leq x \leq 0$

En esta parte se integra desde lado izquierdo de $rect(\xi)$ que es $\xi = 1/2$ hasta el lado derecho de $rect(x-\xi)$ que es $\xi = x + 1/2$

$$\int_{1/2}^{x+1/2} 1 \cdot 1 d\xi = x + 1 \tag{4}$$

ii) $0 \leq x \leq 1$

En esta parte se integra desde lado izquierdo de $rect(x-\xi)$ que es $\xi = x-1/2$ hasta el lado derecho de $rect(\xi)$ que es $\xi = 1/2$

$$\int_{x-1/2}^{1/2} 1 \cdot 1 d\xi = -x + 1 \tag{5}$$

Luego, la convolución queda:

$$f(x) = h * g = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{6}$$

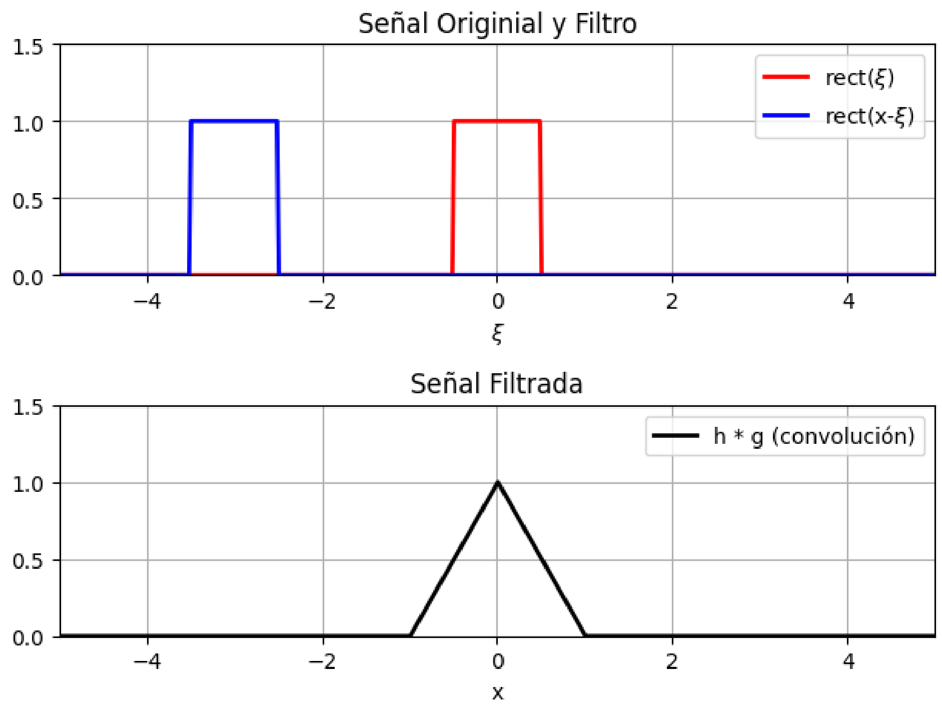

Figura 3

3. Ejercicio 7

Una señal $E(t) = E_0 \cos(w_0 t)$ se modula en amplitud por un pulso gaussiano $g(t) = e^{t^2/\tau^2}$. Encuentra el espectro en el dominio de frecuencia de la señal modulada $E_m(t) = E(t) \cdot g(t)$

Básicamente, hay que calcular la transformada de Fourier del producto $E(t) \cdot g(t)$. Usando las propiedades de la transformada de Fourier F.