Trabajo Práctico Nº 4

Introducción a la Transformada de Fourier

FUNCIONES ESPECIALES

$$rect(x)=\begin{cases}0 & |x|>\frac{1}{2}\\ 1/2 & |x|=\frac{1}{2}\\ 1 & |x|<\frac{1}{2}\end{cases}\qquad comb(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)\qquad \Lambda(x)=\begin{cases}0 & |x|\geq 1\\ 1-|x| & |x|<1\end{cases}\qquad step(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1/2 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{sen(\pi x)}{\pi x}$$

DISTRIBUCIÓN DELTA DIRAC: $\delta(x)=\begin{cases}0 & si\ x\neq 0\\ \infty & si\ x=0\end{cases}$ $\quad y \quad$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx=1$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixk}\,dk$$

PROPIEDADES:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\,f(x)\,dx=f(x_0)$

2. Para $f(x)$ continua en $x=x_0$ y $a<b$: $\int_{a}^{b}\delta(x-x_0)\,f(x)\,dx=\begin{cases}f(x_0) & a<x_0<b\\ 0 & c.o.c\end{cases}$

3. $\delta(ax-x_0)=\frac{1}{|a|}\delta\left(x-\frac{x_0}{a}\right)$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER:

1. Linealidad: $\Im\{ag(x)+bh(x)\}=a\Im\{g(x)\}+b\Im\{h(x)\}=aG(k)+bH(k)$

Donde:

$$\Im\{g(x)\}=G(k)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-ikx}dx$$

$$\Im\{h(x)\}=H(k)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{-ikx}dx$$

2. Similaridad: Si $\Im\{g(x)\}=G(k)$ entonces $\Im\{g(ax)\}=\frac{1}{|a|}G\left(\frac{k}{a}\right)$

3. Corrimiento: Si $\Im\{g(x)\}=G(k)$ entonces $\Im\{g(x-a)\}=e^{-ika}G(k)$

4. Teorema de la Convolución:

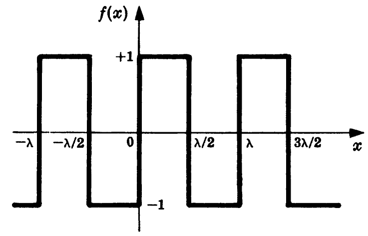
Si $\Im\{g(x)\}=G(k)$ y $\Im\{h(x)\}=H(k)$, entonces

i) $\Im\{g\otimes h\}=\Im\left\{\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)h(x-\xi)d\xi\right\}=G(k)H(k)$

ii) $\Im\{g\cdot h\}=G(k)\otimes H(k)$

Dra. Andrea Monaldi

1. Sea la función períodica:



$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\lambda/2\\ -1 & \lambda/2<x<\lambda\end{cases}$$

   a) Utilizando un software (Scilab, Python, etc.) o una planilla de cálculo genere la función f(x) y grafíquela.
   b) Calcule su representación en Serie de Fourier.
   c) Grafique los tres primeros términos que conforman la serie de Fourier.
   d) Realiza la suma gráfica de las contribuciones de la serie de Fourier. Para ello considere la primera suma parcial y su gráfica correspondiente, luego la segunda suma parcial y su gráfica correspondiente, y así sucesivamente. Observe y discuta cómo se modifica la gráfica conforme incorpora armónicos.

2. Calcule la representación en Serie de Fourier de:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n\lambda)$$

Con λ el período

(Sugerencia: utilice la forma compleja de la serie: $f(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}C_m e^{i\frac{2\pi}{\lambda}mx}$, con

$$C_m=\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2}f(x)e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}mx}dx \qquad m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

3. Muestre que:

   a) $comb\left(\dfrac{x-x_0}{b}\right)=|b|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-x_0-nb\right)$

   b) $XYcomb(Xf_x)comb(Yf_y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f_x-\dfrac{n}{X},f_y-\dfrac{m}{Y}\right)$

4. Calcule la Transformada de Fourier de las siguientes funciones y esquematice el resultado:

   a) I) Función *Delta Dirac* $\delta(x-x_0)$ ¿Qué pasa cuando x_0 es cero? (Grafique)

   II) $f(x)=\delta\left(x-\dfrac{a}{2}\right)+\delta\left(x+\dfrac{a}{2}\right)$ El modelo matemático de una doble rendija muy estrecha e infinitamente larja está dado por esta función. Como se estudiará luego, en la difracción de Fraunhofer (o campo lejano) el campo a una distancia z (lejana) del objeto difractante, está vinculado con el campo justo detrás del mismo mediante una transformada de Fourier evaluada en determinadas frecuencias. Realice una interpretación de los resultados teóricos de la experiencia de Young en términos de la transformada de Fourier.

   b) Pulso rectangular $rect(x,y)$

   c) $g\ (x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}rect(x-2n)$ Grafique tanto la función g(x) como su transformada

   d) $comb\left(\dfrac{x}{X}\right)comb\left(\dfrac{y}{Y}\right)$

   e) $\cos(k_0x-\varepsilon)$. Grafique para los casos particulares en los que $\varepsilon=0$ y $\varepsilon=\dfrac{\pi}{2}$.

   f) $e^{-\alpha x^2}$ con $\alpha>0$

5. La función Delta de Dirac es el operador unitario para la convolución de la misma manera que el cero lo es para la operación suma y el uno para la multiplicación.
   A) Utilizando la definición de convolución, calcule la función convolución: $p(x) = g(x) \otimes comb\left(\frac{x}{X}\right)$. Utilice $g(x) = rect\left(2\frac{x}{X}\right)$. Esquematice el resultado
   B) Calcule y esquematice la transformada de Fourier $P(f_X)$ de $p(x)$ aplicando el Teorema de la Convolución
6. Considere una lente delgada con una apertura circular de radio R. El perfil de fase de la lente está dado por:
$$\phi(x,y) = -\frac{k}{2f}(x^2+y^2)$$
   Donde k es el número de onda y f es la distancia focal de la lente. Suponiendo que la función de transmisión de la lente es, entonces:
$$t(x,y) = E_0 e^{i\phi(x,y)}$$
   Calcule su transformada de Fourier.

7. Una señal $E(t) = E_0\cos(\omega_0 t)$ se modula en amplitud por un pulso gaussiano $g(t) = e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$. Encuentra el espectro en el dominio de frecuencia de la señal modulada $E_m(t) = E(t)g(t)$
8. Realice las siguientes convoluciones analítica y gráficamente:
   a) $f(x) = rect(x) * rect(x)$
   b) $f(x) = step(x) * rect(x)$
   c) $f(x) = step(x) * step(x)$

9. Pruebe las siguientes relaciones:
   a) Si $g_R(r) = \delta(r - r_0)$ entonces:
   $\mathrm{B}\{g_R(r)\} = 2\pi r_0 J_0(2\pi r_0 \rho)$
   b) Si $g_R(r) = 1 \text{ con } a \le r \le 1$ y cero en cualquier otro caso, entonces:
   $$\mathrm{B}\{g_R(r)\} = \frac{J_1(2\pi\rho) - aJ_1(2\pi a\rho)}{\rho}$$