

Trabajo Práctico N°4: Teoría escalar de la difracción

Calderon Angel Guillermo

November 4, 2024

1 Repaso

Cuando un haz de luz incide sobre un objeto que obstruye la propagación, por ejemplo una rendija, el campo electromagnético de la onda después de haber pasado el obstáculo se modifica. Este cambio en la amplitud compleja del campo está dado por una función llamada **transmitancia** T .

$$u_f = T(x)u_i \quad (1)$$

Si se quiere calcular el patrón de difracción sobre una pantalla ubicada a una cierta distancia del obstáculo, hay que realizar la transformada de Fourier de la amplitud compleja U_f que representa el campo inmediatamente después de atravesar el objeto.

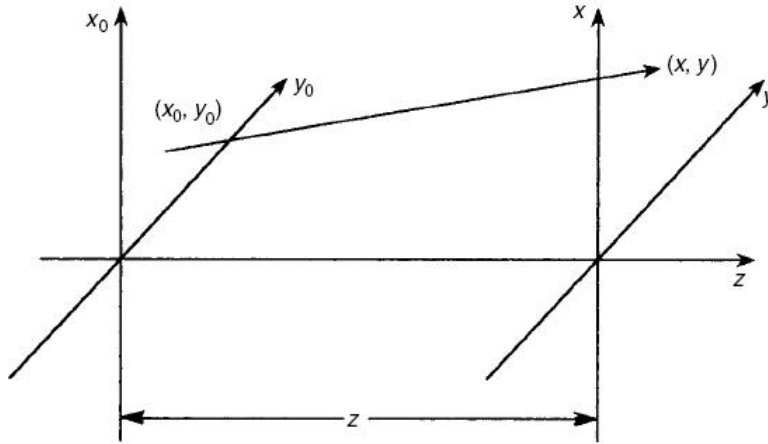


Figure 1: Punto fuente y punto campo

Si la longitud de separación entre la pantalla y el obstáculo (o bien rendija) cumple con la aproximación de Fraunhofer:

$$z \gg \frac{kx_{max}^2}{2} \quad (2)$$

Donde x_{max} es el máximo valor de la abertura. ¿ k representa la fase, es decir $k = 2\pi f_x$? o ¿ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$?

Esta aproximación me permite expresar a la transformada del campo saliente $u_f(x_0, y_0)$ (supongamos que estamos situados en el plano x_0y_0) como:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \Gamma\{u_f(x_0, y_0)\}|_{f_x=\frac{x}{\lambda z}} \quad (3)$$

La transformada debe cumplir con la condición $f_x = \frac{x}{\lambda z}$ e $f_y = \frac{y}{\lambda z}$. ¿De donde sale esta condición? Recordemos que la transformada en dos dimensiones es:

$$\Gamma\{u_f(x_0, y_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_f(x_0, y_0) e^{i2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)} dx_0 dy_0 |_{f_x=\frac{x}{\lambda z}, f_y=\frac{y}{\lambda z}} \quad (4)$$

La transformada estará en el plano xy .

Sabemos que el campo de entrada de una onda plana se lo puede expresar en términos una amplitud compleja:

$$u_i(x_0, y_0) = u_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (5)$$

Un caso particular es cuando la onda incide normalmente sobre el plano $x_0 y_0$. Esto hace que la función quede en términos de la variable z . Es decir:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = (k_1 \vec{i} + k_2 \vec{j} + k_3 \vec{k}) \cdot (x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z \vec{k})$$

Pongo el versor \vec{k} para que no se confunda con el número de onda \vec{k} . Luego, como la onda incide normalmente sobre el plano $x_0 y_0$, el vector onda sólo posee componente z nomás.

$$\vec{k} = k_3 \vec{k}$$

Luego, realizo el producto escalar y queda sólo la componente z .

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_3 z$$

Que en definitiva queda:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kz \quad (6)$$

Como la ubicación del objeto (o rendija) la podemos ubicar en $z = 0$, la exponencial es igual a 1. Luego, queda.

$$u_i(x_0, y_0) = u_0$$

Si tomo como amplitud de la onda igual a uno, el campo de entrada se reduce a:

$$u_i(x_0, y_0) = 1 \quad (7)$$

Por lo tanto, el campo $u_f(x_0, y_0)$ detrás de la red es igual a la transmitancia $f(x_0, y_0)$.

$$u_f(x_0, y_0) = t(x_0, y_0) \quad (8)$$

Sustituyendo esto en la expresión (4) de la transformada de Fourier del campo de salida se tiene que, la transformación sólo se aplicará a la función transmitancia $f(x_0, y_0)$. Entonces:

$$\Gamma\{u_f(x_0, y_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x_0, y_0) e^{i2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)} dx_0 dy_0 \Big|_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}} \quad (9)$$

Y finalmente el campo que llega a la pantalla puede ser escrito como:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x_0, y_0) e^{i2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)} dx_0 dy_0 \Big|_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}} \quad (10)$$

Y el patrón que el ojo humano ve es el módulo al cuadrado de esta amplitud compleja $U(x, y)$.

$$I(x) = |U(x, y)|^2 \quad (11)$$

2 Punto 3

Considere un haz de luz monocromático que incide normalmente sobre el plano $x_0 y_0$ donde yace una rendija rectangular simple y de longitud infinita. Si la longitud de onda de la luz es λ y el ancho de la rendija es $a = 5\lambda$, entonces:

2.1 Inciso a)

Calcule y grafique el patrón de intensidad como una función del ángulo θ , considerando la pantalla de observación ubicada en el plano xy lejos de la apertura (difracción de Fraunhofer).

Entonces tenemos dos planos que están separados a una distancia tal que cumpla con la condición de Fraunhofer:

$$s \quad (12)$$

Entonces, vamos a parametrizar la región de la rendija por medio de la función *rect*. (TERMINAR)

3 Punto 7

Un ejemplo elemental e importante de difracción ocurre cuando una onda plana monocromática de luz incide sobre una red de amplitud sinusoidal. La red tiene una **amplitud de transmitancia** que puede expresarse como:

$$t(x, y) = [\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x)] \text{rect}(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) \quad (13)$$

Donde f_0 es el recíproco del período de las franjas de la red (es decir, la frecuencia espacial de la red. Mejor aún, la distancia entre franjas que conforma la red). Como la función \cos depende de la variable x , la separación entre franjas de la red estará dado por

$$\Delta x = \frac{1}{f_0}$$

Las funciones rectángulo dan cuenta del tamaño finito de la red. Y m representa la **modulación** que determina la amplitud de las franjas: $0 < m \leq 1$

Entonces, este obstáculo se trata de una red cosenoidal **acotada** por una rendija rectangular. Gráficamente sería:

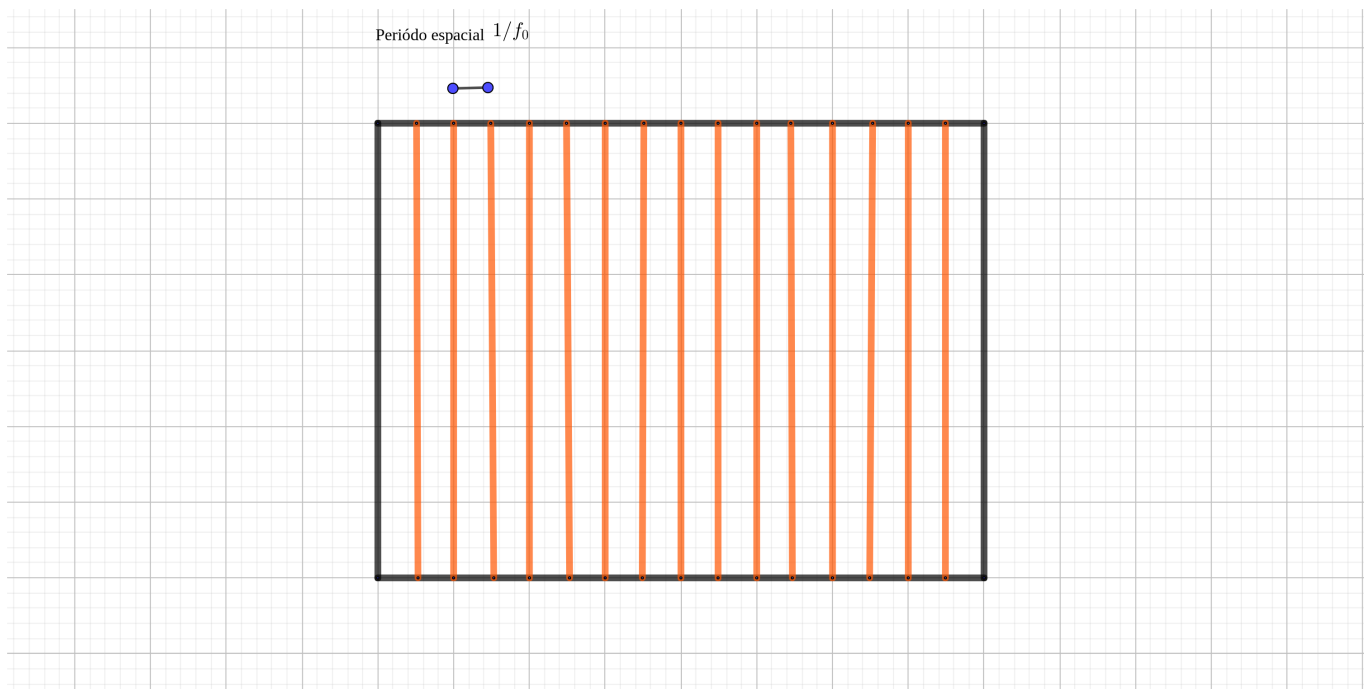


Figure 2: Se la conoce como **red de amplitud**

3.1 Inciso b)

Muestre que si una onda plana monocromática que viaja en la dirección z incide sobre esta red, la amplitud compleja de la luz que abandona la red (justo detrás de la red) puede expresarse como la suma de tres ondas planas.

¿Cuál es el ángulo de cada una de estas ondas respecto al eje z ?

DEM: Primero ubicamos la red en el sistema de coordenadas $x_0 y_0 z$. Dijimos que si una onda plana incide normalmente sobre una red en dirección z sobre el plano $x_0 y_0$ ubicado en $z = 0$, y además, tomamos la amplitud del campo de la onda incidente $u_i(x_0, y_0)$ igual a 1, el campo $u_f(x_0, y_0)$ justo detrás de la red es precisamente igual a la amplitud e transmitancia $t(x_0, y_0)$.

$$u_f(x_0, y_0) = t(x_0, y_0)$$

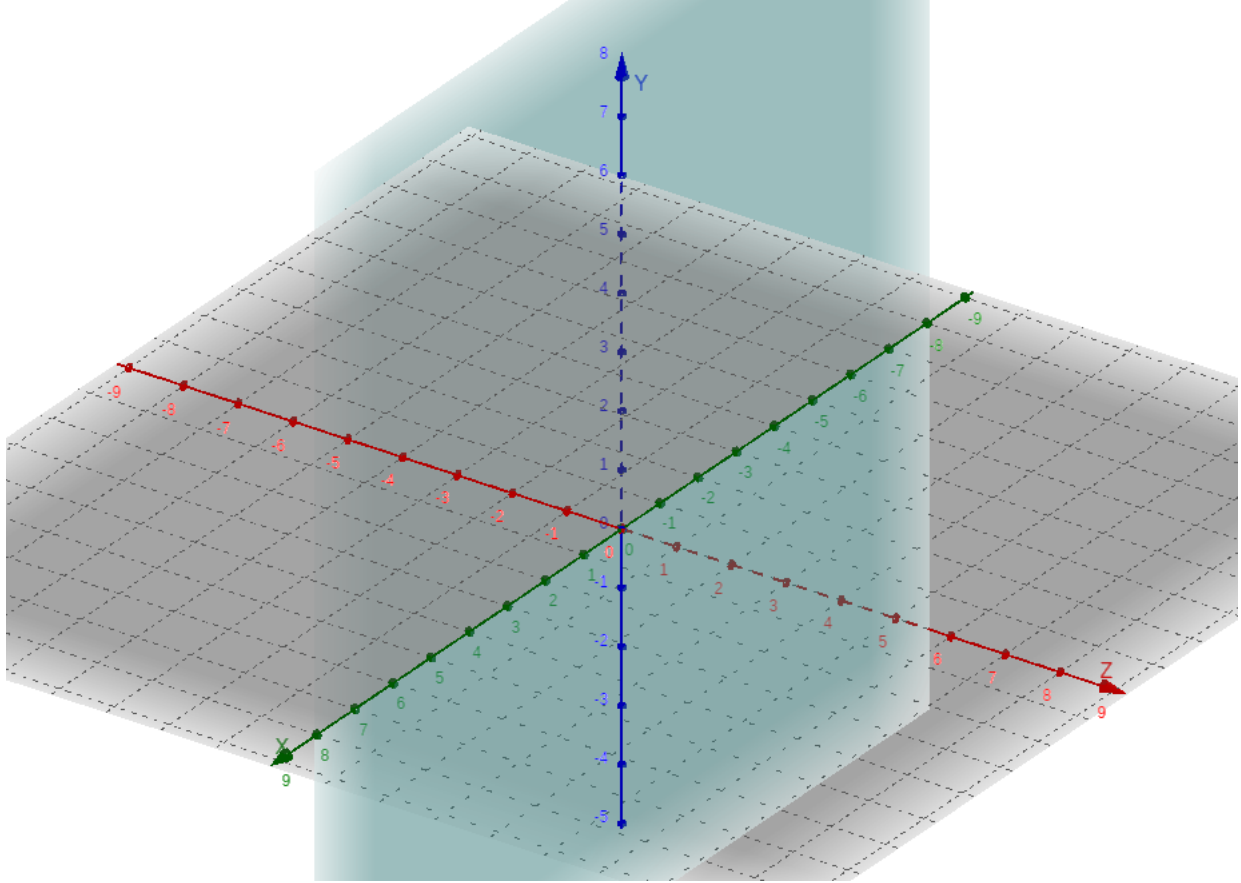


Figure 3: Sistema de referencia

Sustituyendo t se tiene:

$$u_f(x_o, y_0) = [\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x)] \text{rect}(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) \quad (14)$$

Expreso a la función \cos en término de exponenciales.

$$\cos(2\pi f_0 x) = \frac{e^{i2\pi f_0 x} + e^{-i2\pi f_0 x}}{2}$$

Luego sustituyo en la ecuación 14).

$$u_f(x_o, y_0) = [\frac{1}{2} + \frac{m}{2} (\frac{e^{i2\pi f_0 x} + e^{-i2\pi f_0 x}}{2})] \text{rect}(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$$

$$u_f(x_o, y_0) = \frac{1}{2} \text{rect}(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) [1 + \frac{m}{2} e^{i2\pi f_0 x} + \frac{m}{2} e^{-i2\pi f_0 x}]$$

Obviando la función rectángulo, podemos ver que el campo después de atravesar la red es la suma de tres ondas planas. ¿Porque decimos que son tres ondas planas? porque el primer término lo podemos interpretar como una onda con amplitud igual a 1 que se propaga en dirección z . Los otros dos términos son ondas planas que también se propagan en la dirección z pero sufren una desviación en la dirección del eje x .

Analicemos esto: La dirección de propagación de estas dos ondas será.

$$\vec{k} = k1\vec{i} + k3k\vec{k}$$

Es decir,

$$\vec{k} = k \sin(\phi) \vec{i} + k \cos(\phi) \vec{k}$$

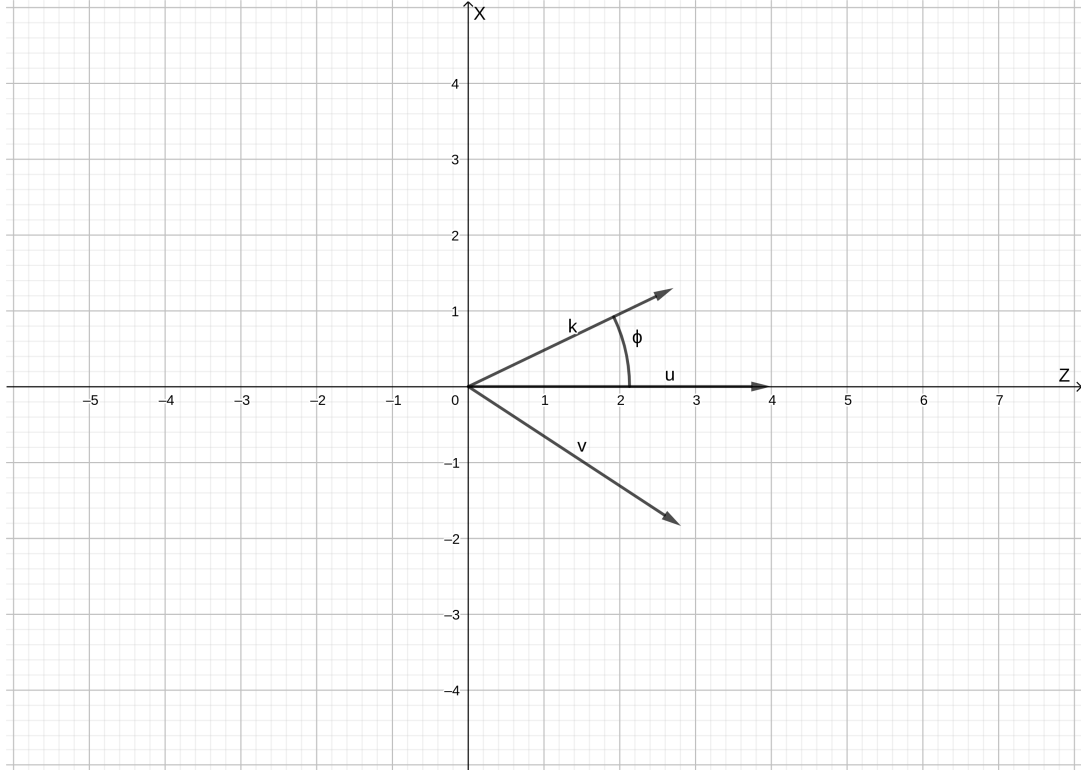


Figure 4: Tres ondas planas después de la red

al hacer el producto escalar con $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ teniendo en cuenta que la red esta ubicada sobre el plano en $z = 0$, sólo queda la componente x .

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k \sin(\phi) x$$

Entonces suponemos que el segundo y tercer termino representa dos ondas planas de la forma:

$$u_1 = A e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} = A e^{k \sin(\phi) x}$$

$$u_2 = A e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} = A e^{k \sin(\theta) x}$$

Luego, podemos igualarlo a los terminos $\frac{m}{2} e^{i2\pi f_0 x}$ y $\frac{m}{2} e^{-i2\pi f_0 x}$

Los exponentes de las exponenciales serán iguales:

$$k \sin(\phi) x = 2\pi f_0 x$$

Teniendo en cuenta que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ aqui despejo el angulo ϕ .

$$\sin(\phi) = \lambda f_0 \quad (15)$$

Esto quiere decir que la desviación de la onda va a estar en función de la longitud de onda de la fuente y del periodo espacial de las franjas de la red. Es decir, cuanto más juntas estén las franjas una de otras más desviado va a salir mi supuesta onda plana.

3.2 inciso c)

Determine la distancia a partir de la cual es válida la aproximación de Fraunhofer y calcule la difracción de campo lejano. Suponga luz monocromática de $632,8 \text{ nm}$ (láser de He-Ne), y ancho de rendijas $a = b = 1 \text{ mm}$.

DEM: La luz monocromática luego de atravesar la red de difracción en el plano $x_0 y_0$ llega a una pantalla ubicada a una distancia z sobre un plano xy .

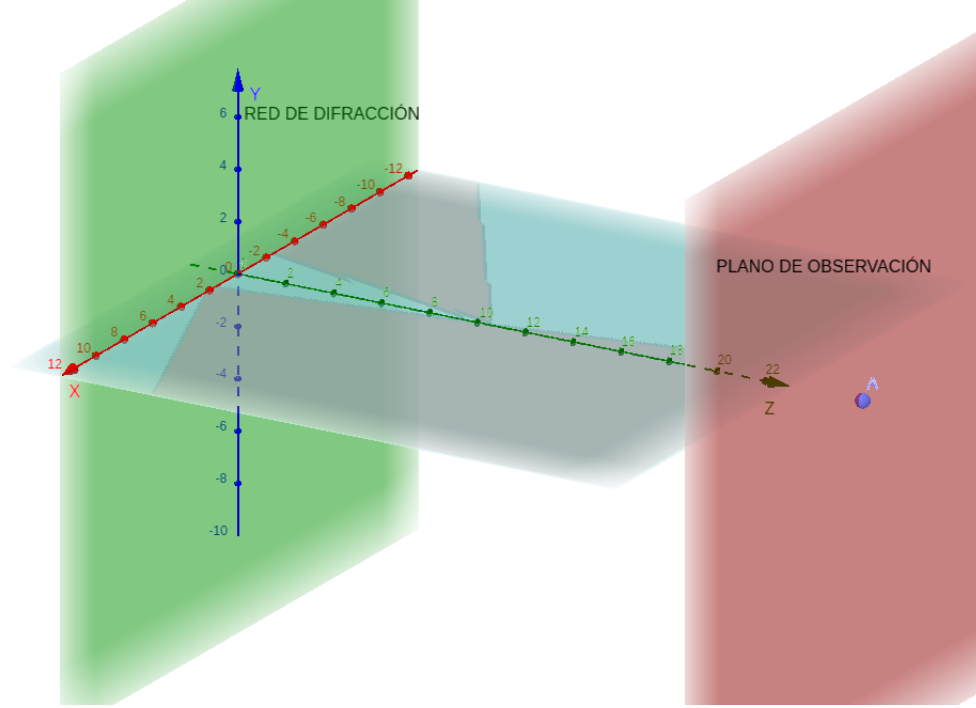


Figure 5: sistemas de referencia

Tenemos que calcular la distancia de separación de estos planos tales que cumplan la condición:

$$z \gg \frac{k(x_m a x^2 + y_m a x^2)}{2} \quad (16)$$

reemplazando los correspondientes valores se obtiene que la distancia minima debe ser:

$$z \simeq 9.3m$$

Ahora vamos a calcular la difracción de campo lejano dada por la ecuación 10).

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x_0, y_0) e^{i2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)} dx_0 dy_0 \Big|_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}} \quad (17)$$

Para ello calculo primero la transformada de Fourier de la función transmitancia.

$$\Gamma\{t(x_0, y_0)\} \Big|_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}}$$

A este calculo lo podemos hacer de dos maneras: Una es calculando todo por definición y otra es aplicando propiedades como convolución.

1)Primera forma: A la función de transmitancia

$$t(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}\right) \left[1 + \frac{m}{2} e^{i2\pi f_0 x} + \frac{m}{2} e^{-i2\pi f_0 x}\right]$$

la podemos separar como el producto de dos funciones independientes, ya que la función rect es una función a variable separable $\text{rect}\left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}\right) = \text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right)$. Luego:

$$t(x_0, y_0) = f(x_0)g(y_0) \quad (18)$$

$$t(x_0, y_0) = \left[\frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right)\right] \left[\text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) \left(1 + \frac{m}{2} e^{i2\pi f_0 x_0} + \frac{m}{2} e^{-i2\pi f_0 x_0}\right)\right]$$

Esta separación nos permite aplicar una de las propiedades de la transformada de Fourier. Si la función es a variable separable, su transformada se aplica a cada función por separado. Entonces:

$$\Gamma(t(x_0, y_0)) = \frac{1}{2} \Gamma(\text{rect}(\frac{y_0}{b})) \Gamma(\text{rect}(\frac{x_0}{a}) (1 + \frac{m}{2} e^{i2\pi f_0 x_0} + \frac{m}{2} e^{-i2\pi f_0 x_0}))$$

Por propiedad de linealidad de integrales.

$$\Gamma(t(x_0, y_0)) = \frac{1}{2} \Gamma(\text{rect}(\frac{y_0}{b})) \left[\Gamma(\text{rect}(\frac{x_0}{a})) + \frac{m}{2} \Gamma(\text{rect}(\frac{x_0}{a}) e^{i2\pi f_0 x_0}) + \frac{m}{2} \Gamma(\text{rect}(\frac{x_0}{a}) e^{-i2\pi f_0 x_0}) \right] \quad (19)$$

Resuelvo cada transformada por separado:

1) Conocemos la transformada de Fourier de la función *rect*.

$$\begin{aligned} \Gamma(\text{rect}(\frac{y_0}{b})) &= b \text{sinc}(f_y b) |_{f_y = \frac{y}{\lambda z}} \\ \Gamma(\text{rect}(\frac{y_0}{b})) &= b \text{sinc}(\frac{yb}{\lambda z}) \end{aligned} \quad (20)$$

2) Calculo la transformada de Fourier del primer término.

$$\begin{aligned} \Gamma(\text{rect}(\frac{x_0}{a})) &= a \text{sinc}(f_x a) |_{f_x = \frac{y}{\lambda z}} \\ \Gamma(\text{rect}(\frac{x_0}{a})) &= a \text{sinc}(\frac{xa}{\lambda z}) \end{aligned} \quad (21)$$

3) Calculo la transformada de Fourier del segundo término.

$$\begin{aligned} \Gamma(\text{rect}(\frac{x_0}{a}) e^{i2\pi f_0 x_0}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\frac{x_0}{a}) e^{i2\pi f_0 x_0} e^{-i2\pi f_x x_0} dx_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\frac{x_0}{a}) e^{-i2\pi (f_x - f_0) x_0} dx_0 \end{aligned}$$

Realizando una sustitución $u = (f_x - f_0)$, se tiene la transformada de una función *rect*. Luego:

$$\Gamma(\text{rect}(\frac{x_0}{a}) e^{i2\pi f_0 x_0}) = a \text{sinc}((\frac{x}{\lambda z} - f_0) a) \quad (22)$$

4) Y por ultimo realizo la transformada del tercer término.

$$\begin{aligned} \Gamma(\text{rect}(\frac{x_0}{a}) e^{-i2\pi f_0 x_0}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\frac{x_0}{a}) e^{-i2\pi f_0 x_0} e^{-i2\pi f_x x_0} dx_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\frac{x_0}{a}) e^{-i2\pi (f_x + f_0) x_0} dx_0 \end{aligned}$$

Realizando una sustitución $u = (f_x + f_0)$, se tiene la transformada de una función *rect*. Luego:

$$\Gamma(\text{rect}(\frac{x_0}{a}) e^{-i2\pi f_0 x_0}) = a \text{sinc}((\frac{x}{\lambda z} + f_0) a) \quad (23)$$

Luego reemplazo las ecuaciones 20, 21, 22 y 23 en la ecuación 19. Y se obtiene:

$$\Gamma(t(x_0, y_0)) = \frac{1}{2} a b \text{sinc}(\frac{yb}{\lambda z}) \left[\text{sinc}(\frac{xa}{\lambda z}) + \frac{m}{2} \text{sinc}((f_x - f_0) a) + \frac{m}{2} \text{sinc}((f_x + f_0) a) \right]$$

$$\mathcal{F}\{U(\xi, \eta)\} = \frac{A}{2} \text{sinc}(2wf_Y) \left\{ \text{sinc}(2wf_X) + \frac{m}{2} \text{sinc}[2w(f_X + f_0)] \right. \\ \left. + \frac{m}{2} \text{sinc}[2w(f_X - f_0)] \right\},$$

Figure 6: Solución del Goodman

Y este resultado se parece al del libro Goodman pág 80. Luego, el patrón de difracción de Franhofer puede ser escrito como:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \frac{1}{2} ab \text{sinc}\left(\frac{yb}{\lambda z}\right) \left[\text{sinc}\left(\frac{xa}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left(\left(\frac{x}{\lambda z} - f_0\right)a\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left(\left(\frac{x}{\lambda z} + f_0\right)a\right) \right] \quad (24)$$

Finalmente, la correspondiente distribución de intensidad se encuentra sacando el cuadrado de la magnitud del campo de Franhofer $U(x, y)$.

$$I(x, y) = \left(\frac{ab}{2\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{yb}{\lambda z}\right) \left[\text{sinc}^2\left(\frac{xa}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left(\left(\frac{x}{\lambda z} - f_0\right)a\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left(\left(\frac{x}{\lambda z} + f_0\right)a\right) \right. \\ \left. + m \text{sinc}\left(\frac{xa}{\lambda z}\right) \left(\text{sinc}\left(\left(\frac{x}{\lambda z} - f_0\right)a\right) + \text{sinc}\left(\left(\frac{x}{\lambda z} + f_0\right)a\right) \right) \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2} \text{sinc}\left(\left(\frac{x}{\lambda z} - f_0\right)a\right) \text{sinc}\left(\left(\frac{x}{\lambda z} + f_0\right)a\right) \right]$$

Notemos que si el numero de franjas va creciendo, estas estan más juntas por lo tanto **aumenta el periodo espacial** f_0 y se cumple:

$$f_0 \gg \frac{1}{a} \quad (25)$$

Y habrá una superposicion despreciable de la tres funciones *sinc*.

$$\text{sinc}\left(\frac{xa}{\lambda z}\right) \\ \text{sinc}\left(\left(\frac{xa}{\lambda z} - f_0\right)a\right) \\ \text{sinc}\left(\left(\frac{xa}{\lambda z} + f_0\right)a\right)$$

Es decir, la segunda y tercera funcion estaran lejos del centro y como la funcion *senc* tiende cero a medida que aumenta x, el producto de $\text{sinc}\left(\frac{xa}{\lambda z}\right)$ por $\text{sinc}\left(\left(\frac{xa}{\lambda z} - f_0\right)a\right)$ es cero, algo que tiende a cero por otra cosa, es cero. Lo mismo pasa con $\text{sinc}\left(\frac{xa}{\lambda z}\right)$ por $\text{sinc}\left(\left(\frac{xa}{\lambda z} + f_0\right)a\right)$ y también $\text{sinc}\left(\left(\frac{xa}{\lambda z} - f_0\right)a\right)$ por $\text{sinc}\left(\left(\frac{xa}{\lambda z} + f_0\right)a\right)$

Entonces quedan sólo los términos cuadráticos.

Entonces, la intensidad de drifracción de Fraunhofer es:

$$I(x, y) = \left(\frac{ab}{2\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{yb}{\lambda z}\right) \left[\text{sinc}^2\left(\frac{xa}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left(\left(\frac{x}{\lambda z} - f_0\right)a\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left(\left(\frac{x}{\lambda z} + f_0\right)a\right) \right] \quad (26)$$

3.3 Grafiaca del patron de intensidad I(x,y)

Para ello se utilizó las siguientes medidas:

1. $\lambda = 632.8nm$ Longitud de onda de la fuente.
2. $a = 0.001m$ y $b = 0.001m$ Dimensiones de la apertura.
3. Una red de difraccion cosenoidal con frecuencia espacial de $f_0 = 10000$ que equivale a 10 franjas (cosenoidales) en $1mm$.

4. $m = 1$ moulador de la red.
5. Se ubica la pantalla de observacion a una distnacia z_0 donde la aproximacion de Franhofer es válida:
 $z_0 = 9.3$.
6. Los dos maximos de amplitu 0.002 estan separados del maximo central a una distancia $\lambda z f_0 = 5,8cm$

De acurdo a esto se obtuvo la siguiente gráfica:

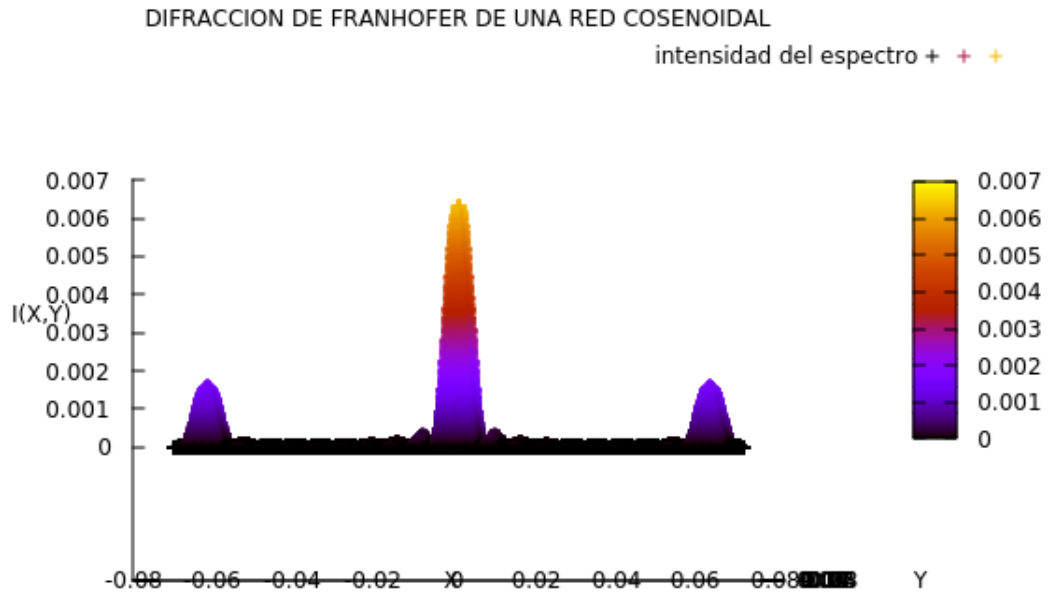


Figure 7: Patron de difraccion de Franhofer vista lateral

DIFRACCION DE FRANHOFFER DE UNA RED COSENOIDAL

intensidad del espectro + + +

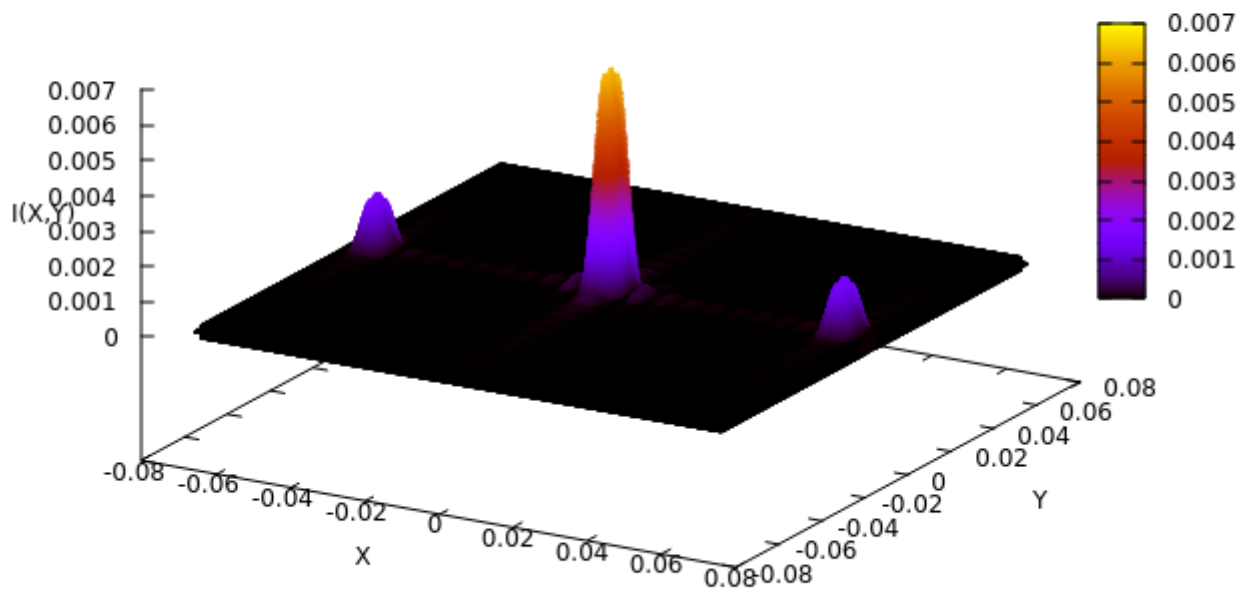


Figure 8: Patron de difraccion de Franhofer vista desde arriba

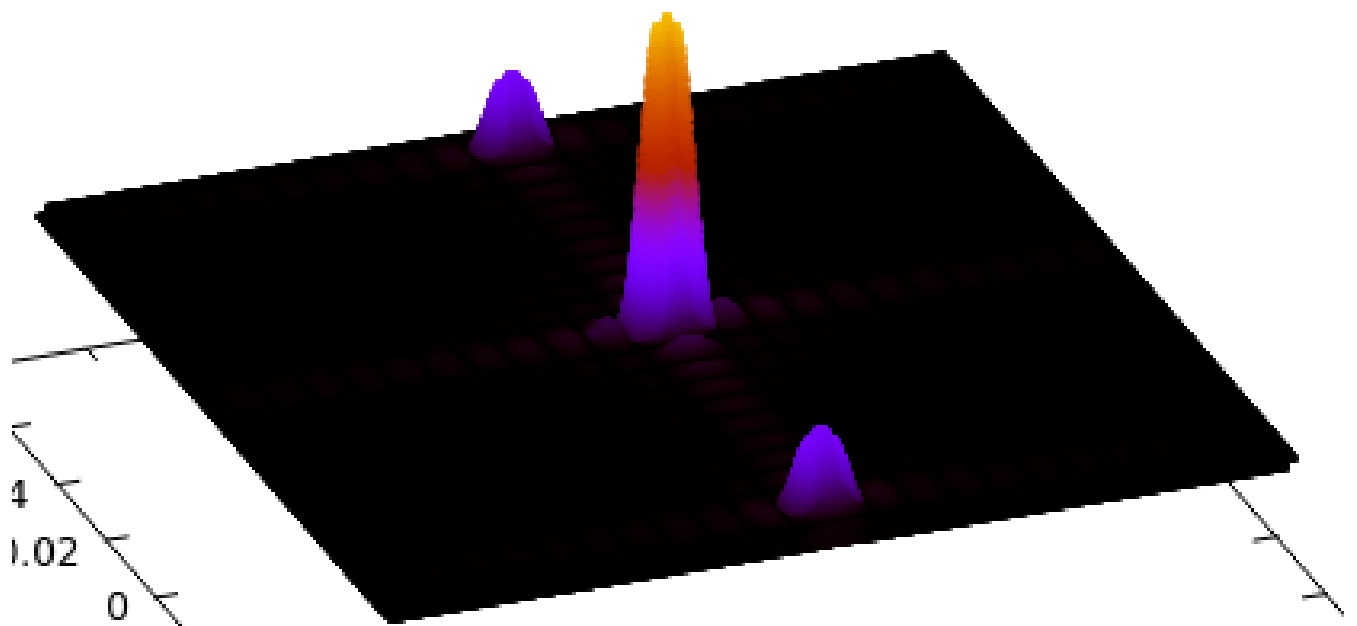


Figure 9: Patron de difraccion de Franhofer de una apertura cosenoidal