

Figura 4.4: Efecto de una lente convergente y una divergente sobre una onda plana normalmente incidente.

La conclusión de que una lente compuesta por superficies esféricas realiza un mapeo de una onda plana incidente en una onda esférica es muy dependiente de la aproximación paraxial ya que en condiciones no paraxiales, aun cuando las superficies de la lente sean perfectamente esféricas, el frente de onda emergente, se aparta de la esfericidad perfecta lo que se denomina aberración esférica. Por lo general, las lentes son a menudo corregidas de aberraciones puliendo sus superficies esféricas para mejorar la esfericidad del frente de onda emergente.

#### 4.6 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMACIÓN FOURIER DE LAS LENTES

Una de la propiedades más remarcables y útil de una lente es su capacidad para realizar transformadas bidimensionales de Fourier. La operación de transformación Fourier, es una de las propiedades generalmente asociadas a un analizador de espectros, compacto, complejo y extensivo y ahora veremos que esta complicada operación se puede llevar a cabo con extrema simplicidad en un sistema coherente.

En todos los casos supondremos iluminación monocromática y que se desea calcular la distribución de amplitud en el plano focal posterior de la lente. Para ello vamos a considerar tres configuraciones en las que el objeto a ser transformado. El objeto se coloca inmediatamente delante de la lente, el objeto se coloca a una distancia  $d_0$  delante de la lente y el objeto se coloca detrás de la lente a una distancia  $d$  del plano focal.

a) Objeto colocado contra la lente

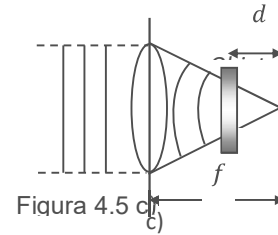
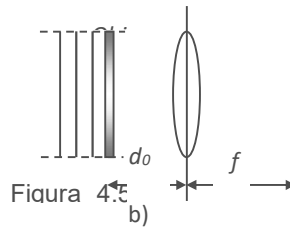
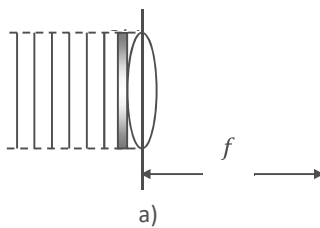


Figura 4.5: a) objeto inmediatamente delante de la lente. b) objeto a una distancia  $d_0$  delante de la lente y c) objeto se detrás de la lente a una distancia  $d$  del plano focal

Supongamos que se coloca un objeto de fase con amplitud de transmitancia  $t_0(x, y)$  inmediatamente delante de una lente de distancia focal  $f$  como se muestra en la figura 4.5 a). Supondremos que el objeto se ilumina uniformemente con una onda monocromática plana en incidencia normal de amplitud  $A$ , con lo cual la perturbación incidente de la lente será:

$$U_l = At_0(x, y) \quad (4.11)$$

Para tener en cuenta el tamaño finito de la apertura de la lente le asociamos a la lente una función pupila  $P(x, y)$  definida por:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dentro de la apertura} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto la distribución de amplitud detrás de la lente se puede evaluar usando la ecuación 4.10

$$U'_l(x, y) = U_l(x, y)P(x, y)e^{\left[-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right]} \quad (4.12)$$

Donde, dado que el retardo de fase constante asociado a la transformación de la lente no afecta significativamente el resultado se omitió su contribución. Para encontrar la distribución  $U_f(x, y)$  de la amplitud del campo a través del plano focal de la lente, aplicaremos la fórmula de difracción de Fresnel, reemplazando  $z$  por  $f$ .

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ U'_l(x, y) e^{i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \right] e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)} dx dy \quad (4.13)$$

donde se ha eliminado el factor de fase constante. Reemplazando en esta expresión la ecuación anterior tenemos que, los factores de fase cuadrática se cancelan dando:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} A t_0(x, y) P(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)} dx dy \quad (4.14)$$

O sea que la distribución de amplitud es proporcional a la transformada de Fourier de la porción de campo incidente subtendido por la apertura de la lente. Cuando la extensión física del objeto es del tamaño de la abertura, la función pupila se puede despreciar dando:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} A t_0(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)} dx dy \quad (4.15)$$

O sea que la amplitud y la fase de la luz en las coordenadas  $(x_f, y_f)$  está influenciada por la amplitud y la fase de las componentes de Fourier en las frecuencias  $(f_x = x_f/\lambda f, f_y = y_f/\lambda f)$ .

Se debe notar que la transformación de Fourier entre el objeto y la distribución de amplitud en el plano focal no es exactamente una Transformada de Fourier debido al factor de fase cuadrática que precede a la integral de la ecuación 4.15. Aunque, la distribución de fase en el plano focal no es la misma en el plano objeto, la relación entre ambas es una simple curvatura de fase. En la mayoría de los casos lo que nos interesa es la distribución de intensidad en el plano focal. La medición de la misma conduce a lo que se conoce como el espectro de potencia del objeto; la distribución de fase no influye en esta medición. Por lo tanto:

$$I_f(x_f, y_f) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \iint_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)} dx dy \right|^2 \quad (4.16)$$

b) Objeto colocado delante la lente

Consideremos la geometría más general de la figura 4.5 b). En la misma se observa que el objeto colocado a una distancia  $d_0$  delante de la lente es iluminado con una onda plana de amplitud  $A$  en incidencia normal. La transmitancia en amplitud del objeto, de nuevo se representará por  $t_0(x, y)$  y sea  $F_0(f_x, f_y)$  representa el espectro de Fourier de la luz transmitida por el objeto y  $F_l(f_x, f_y)$  el espectro de Fourier de la luz incidente en la lente; o sea:

$$F_0(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{A t_0(x, y)\} \quad \forall \quad F_l(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{U_l\}$$

Suponiendo que las aproximaciones de Fresnel son válidas para la propagación en una distancia  $d_0$ , entonces  $F_0$  y  $F_l$  se pueden relacionar mediante la función de peso para un sistema espacialmente invariante (ecuación 3.56) lo que despreciando el retardo de fase constante resulta:

$$F_l(f_x, f_y) = F_0(f_x, f_y) e^{-i\pi\lambda d_0(f_x^2+f_y^2)} \quad (4.17)$$

Por ahora también vamos a despreciar la extensión finita de la apertura de la lente, por lo que haciendo  $P = 1$ , la ecuación 4. 14 resulta:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)}}{i\lambda f} F_l\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right) \quad (4.18)$$

Reemplazando 4.17 en 4.18 tenemos:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}\left(1 - \frac{d_0}{f}\right)(x_f^2 + y_f^2)}}{i\lambda f} F_l\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right)$$

O lo que es lo mismo,

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{A e^{i\frac{k}{2f}\left(1 - \frac{d_0}{f}\right)(x_f^2 + y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f + yy_f)} dx dy \quad (4.19)$$

En conclusión, la amplitud y la fase de la luz en las coordenadas  $(x_f, y_f)$  nuevamente están relacionadas con la amplitud y la fase del espectro del objeto en las frecuencias  $(f_x = x_f/\lambda f, f_y = y_f/\lambda f)$ . En esta última expresión, el factor que precede a la integral, tiene a cero para el caso especial  $d_0 = f$ .

De estos resultados, es evidente que cuando el objeto se coloca en el plano focal anterior  $d$  de una lente, la curvatura de fase desaparece, dejando una transformación de Fourier exacta.

Para obtener este resultado hemos despreciado la extensión finita de la apertura de la lente, para incluirla debemos usar una aproximación de la óptica geométrica. Tal aproximación es válida solo si  $d_0$  es lo suficientemente pequeña de tal manera que el objeto se coloca en la región de Fresnel para la apertura de la lente. Esta condición afortunadamente se satisface en una vasta mayoría de situaciones concretas de interés.

#### c) Objeto colocado delante la lente

Bajo la mismas condiciones de iluminación de los casos anteriores, el objeto de transmitancia  $t_0(x, y)$  se coloca a una distancia  $d$  del plano focal de la lente. De esta manera una onda esférica convergente hacia el plano focal posterior, incide sobre el objeto. En la aproximación de la óptica geométrica, la amplitud de la onda esférica incidente es  $Af/d$ , y la región iluminada del objeto se determina con la intersección del cono de rayos con el plano del objeto.

Considerando que la lente tiene un diámetro  $l$  la región iluminada será  $lf/d$ . La extensión finita de este spot de iluminación se puede representar por medio de una función pupila efectiva  $P[x_o(f/d), y_o(f/d)]$  en el plano del objeto. Usando aproximación paraxial, la amplitud transmitida por el objeto será:

$$U_o(x_o, y_o) = \frac{A e^{i\frac{k}{2d}(x_o^2 + y_o^2)}}{i\lambda f} \frac{f}{d} \iint_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) P[x_o(f/d), y_o(f/d)] e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x_o x_f + y_o y_f)} dx_o dy_o \quad (4.20)$$

por lo tanto, a menos del factor de fase cuadrático, la distribución de amplitud en el plano focal es la transformada de Fourier de la porción del objeto subtendida por la proyección de la apertura de la lente.

El resultado presentado en la ec. 4.19 es esencialmente el mismo resultado obtenido cuando la entrada se colocó directamente contra la lente. Sin embargo, en la presente configuración se ha obtenido una flexibilidad adicional, es decir, la escala de la transformada de Fourier está bajo el control del experimentador. Al aumentar  $d$ , la distancia desde el plano focal, el tamaño de la transformada se hace más grande, al menos hasta que la transparencia esté directamente contra la lente (es decir,  $d = f$ ). Al disminuir  $d$ , la escala de la transformada se hace más pequeña. Esta flexibilidad puede ser de utilidad en aplicaciones de filtrado espacial como veremos enseguida, donde algún ajuste potencial del tamaño de la transformación puede ser de considerable ayuda.