Trabajo Práctico Nº 3

Introducción a la Transformada de Fourier

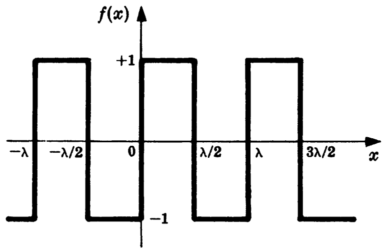
FUNCIONES ESPECIALES

$$step(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1/2 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}\qquad rect(x)=\begin{cases}0 & |x|>\frac{1}{2}\\ 1/2 & |x|=\frac{1}{2}\\ 1 & |x|<\frac{1}{2}\end{cases}\qquad \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}\qquad comb(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$$

$$\Lambda(x)=\begin{cases}0 & |x|\geq 1\\ 1-|x| & |x|<1\end{cases}\qquad \sin c(x)=\frac{sen(\pi x)}{\pi x}$$

1. Sea la función períodica:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\lambda/2\\ -1 & \lambda/2<x<\lambda\end{cases}$$



   a) En una planilla de cálculo genera la función f(x) y grafícala.
   b) Calcular la representación en Serie de Fourier de la función.
   c) Grafique cada uno de los tres primeros términos que conforman la serie de Fourier correspondiente a esta función.
   d) Realiza la suma gráfica de las contribuciones de la serie de Fourier. Para ello considera la primera suma parcial y su gráfica correspondiente, luego la segunda suma parcial y su gráfica correspondiente, la tercera suma parcial y su gráfica correspondiente, etc.
   e) Realice la suma de las 8 primeras contribuciones

2. Calcule la representación en Serie de Fourier de:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n\lambda)$$

(Sugerencia: utilice la forma compleja de la serie)

3. Encuentre las zonas en el plano xy en las cuales las siguientes funciones toman valores no nulos. Grafique:
   a) $f(x,y)=rect(5x-0.5y)rect(0.25y)$
   b) $g(x,y)=rect(5x-0.5y+2)rect(0.25y)+rect(5x-0.5y-2)rect(0.25y)$

4. Probar las siguientes propiedades de la función delta :
   a) $\delta\left(\frac{x-x_0}{b}\right)=|b|\delta(x-x_0)$
   b) $\delta(ax-x_0)=\frac{1}{|a|}\delta\left(x-\frac{x_0}{a}\right)$
   c) $comb\left(\frac{x-x_0}{b}\right)=|b|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0-nb)$
   d) $XYcomb(Xf_x)comb(Yf_y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f_x-\frac{n}{X},f_y-\frac{m}{Y}\right)$

5. Probar la linealidad de la Transformada de Fourier:

$$\Im\{ag(x)+bh(x)\}=a\Im\{g(x)\}+b\Im\{h(x)\}=aG(k)+bH(k)$$

Donde

$$\Im\{g(x)\} = G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx}dx$$

$$\Im\{h(x)\} = H(k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ikx}dx$$

6. Demostrar el Teorema de la similaridad:

   Si $\Im\{g(x)\} = G(k)$ entonces $\Im\{g(ax)\} = \frac{1}{|a|}G\left(\frac{k}{a}\right)$ ¿Es la Transformada de Fourier invariante ante cambios de escala? ¿Y su módulo?

7. Demostrar el Teorema de Corrimiento:

Si $\Im\{g(x)\} = G(k)$ entonces $\Im\{g(x-a)\} = e^{-ika}G(k)$. ¿Es la Transformada de Fourier invariante ante traslaciones? ¿Y su módulo?

8. Demostrar el Teorema de la Convolución:

   Si $\Im\{g(x)\} = G(k)$ y $\Im\{h(x)\} = H(k)$, entonces

   $$\Im\{g \otimes h\} = \Im\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)h(x-\xi)d\xi\right\} = G(k)H(k)$$

   Demostrar $\Im\{g \cdot h\} = G(k) \otimes H(k)$

9. Calcule la Transformada de Fourier de las siguientes funciones y grafique su amplitud y fase:

   a) Función *Delta Dirac* $\delta(x-x_0)$ ¿Qué pasa cuando x_0 es cero? El resultado es una propiedad general entre variables conjugadas de Fourier y representa el análogo del principio de incertidumbre en cuántica.

   b) $\cos(k_0 x - \varepsilon)$. Grafique para los casos particulares en los que $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

   c) Pulso rectangular $rect(x)$

   d) $g_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect(x-2n)$

   e) $g_2(x,y) = rect(x,y)$

   f) Calcular la transformada de Fourier de la función $comb\left(\frac{x}{X}\right)comb\left(\frac{y}{Y}\right)$

   g) La función $p(x,y) = g(x,y) \otimes comb\left(\frac{x}{X}\right)comb\left(\frac{y}{Y}\right)$ define una función períodica de período *X* en la dirección x, e *Y* en la dirección y. Demuestre que su Transformada de Fourier de esta función puede escribirse:

   $$P(f_X, f_Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{X}, \frac{m}{Y}\right)\delta\left(f_X - \frac{n}{X}, f_Y - \frac{m}{Y}\right)$$

10. La función Delta de Dirac es el operador unitario para la convolución de la misma manera que el cero lo es para la operación suma y el uno para la multiplicación.

    A) Utilizando la definición de convolución, calcule la función $p(x,y) = g(x,y) \otimes comb\left(\frac{x}{X}\right)comb\left(\frac{y}{Y}\right)$. Considere: $g(x,y) = rect\left(2\frac{x}{X}\right)rect\left(2\frac{y}{Y}\right)$.

    Esquematice el resultado

    B) De acuerdo con el resultado encontrado en los incisos f y h del ejercicio anterior, esquematice $P(f_X, f_Y)$

11. Realizar las siguientes convoluciones (Utilice la definición de convolución):
   a) $f(x) = rect(x) * rect(x)$
   b) $f(x) = step(x) * rect(x)$
12. Pruebe las siguientes relaciones:
   a) Si $g_R(r) = \delta(r - r_0)$ entonces:
   $$\mathrm{B}\{g_R(r)\} = 2\pi r_0 J_0(2\pi r_0 \rho)$$
   b) Si $g_R(r) = 1 \text{ con } a \le r \le 1$ y cero en cualquier otro caso, entonces:
   $$\mathrm{B}\{g_R(r)\} = \frac{J_1(2\pi\rho) - aJ_1(2\pi a\rho)}{\rho}$$
14. Estudie y demuestre el teorema de muestreo.