

# **OPTICA I**

**UNA INTRODUCCIÓN A LA METROLOGÍA ÓPTICA**

**INFORME AÑO SABÁTICO**

Dra. Gladis Graciela Romero

## ÍNDICE

EL TEXTO Y EL CONTEXTO .....	5
INTRODUCCIÓN.....	7
I.1 UN POCO DE HISTORIA.....	7
I.2 MOVIMIENTO ONDULATORIO – REPASANDO.....	9
I.3 NOTACIÓN COMPLEJA – AMPLITUD COMPLEJA.....	13
I.4 OBTENCIÓN EXPERIMENTAL DE UNA Onda PLANA .....	16
I.5 EJERCITACIÓN.....	16
CAPITULO 1 – INTERFERENCIA E INTERFEROMETRÍA CLÁSICA.....	20
1.1 INTERFERENCIA .....	20
1.2 INTERFERÓMETROS.....	21
1.2.1 EXPERIMENTO DE YOUNG .....	22
1.2.2 INTERFERÓMETRO DE MICHELSON.....	24
1.3 COHERENCIA .....	27
1.3.1 COHERENCIA TEMPORAL.....	27
1.3.2 COHERENCIA ESPACIAL .....	32
1.4 INTERFEROMETRÍA.....	33
1.4.1 APLICACIONES CON EL INTERFERÓMETRO DE MICHELSON .....	33
1.4.2 APLICACIÓN CON EL INTERFERÓMETRO DE MACH-ZEHENDER.....	37
1.5 EXPERIMENTACIÓN. INTERFEROMETRÍA – INTERFERÓMETRO DE MICHELSON .....	39
1.6 EJERCITACIÓN. INTERFERENCIA Y COHERENCIA.....	41
CAPITULO 2: ANÁLISIS DE FOURIER- ÓPTICA DE FOURIER .....	49
2.1 SERIES DE FOURIER – CONDICIONES DE EXISTENCIA .....	50
2.2 ANÁLISIS DE FOURIER EN DOS DIMENSIONES.....	55
2.3 LA TRANFORMADA DE FOURIER COMO UNA DESCOMPOSICION.....	57
2.4 TEOREMAS DE LA TRANFORMADA DE FOURIER. ....	58
2.5 FUNCIONES DE VARIABLES SEPARABLES. ....	59
2.6 FUNCIONES CON SIMETRÍA CIRCULAR: TRANSFORMADA DE FOURIER-BESSEL.....	60
2.7 FUNCIONES ESPECIALES. ....	61
2.8 FRECUENCIA ESPACIAL LOCAL Y LOCALIZACIÓN DE FRECUENCIAS ESPACIALES .....	63
2.9 SISTEMAS LINEALES.....	65
2.9.1 LINEALIDAD Y LA INTEGRAL DE SUPERPOSICIÓN.....	65
2.9.2 INVARIANCIA DE LOS SITEMAS LINEALES: FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.....	66
2.10 TEORIA DEL TEOREMA DEL MUESTREO .....	67
2.10.1 TEOREMA DEL MUESTREO DE WHITTAKER -SAHANON .....	68
2.11 APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER. MÉTODO PARA DESENVOLVER FASE.....	70
2.12 EJERCITACIÓN.....	72
CAPITULO III: DIFRACCIÓN CLÁSICA – NOCIONES TEORÍA ESCALAR DE LA DIFRACCIÓN .....	75
3.1 INTRODUCCIÓN.....	75
3.2 DIFRACCIÓN POR UN BORDE.....	75
3.3 DIFRACCIÓN POR UNA RENDIJA .....	76
3.4 DIFRACCIÓN POR UNA RED LINEAL .....	77

3.5 DIFRACCIÓN POR UNA RED SINUSOIDAL.....	79
3.6 ESPECTRO DE FRECUENCIAS ESPACIALES .....	79
3.7 OPTICA DE FOURIER .....	81
3.8 DIFRACCIÓN DE ABERTURA CIRCULAR – CRITERIO DE RESOLUCIÓN DE RAYLEIGH.....	82
3.9 TEORIA ESCALAR DE LA DIFRACCÓN .....	85
3.9.1 TEOREMA INTEGRAL DE HELMHOLTZ - KIRCHHOF .....	86
3.9.2 FORMULACIÓN DE KIRCHHOF PARA LA DIFRACCION POR UNA PANTALLA .....	89
3.9.3 FORMULACION DE RAYLEIGH-SOMMERFELD PARA LA DIFRACCION POR UNA PATAFFLA PLANA.....	91
3.10 PRINCIPIO DE BABINET .....	93
3.11 ESPECTRO ANGULAR. ....	93
3.12. DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y FRAUNHOFER- APROXIMACIÓN DE FRESNEL .....	96
3.12.1 Aproximación de Fresnel .....	96
3.12.2 Aproximación de Fraunhofer.....	98
3.13 VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DEL PRINCIPIO DE BABINET.....	98
3.14 EJERCITACIÓN.....	99
CAPITULO IV: FILTRADO ÓPTICO Y FORMACIÓN DE IMÁGENES .....	104
4.1 INTRODUCCIÓN.....	104
4.2 LENTE DELGADA COMO UNA TRANSFORMACION DE FASE.....	104
4.3 LA FUNCIÓN ESPESOR $\Delta(x, y)$ .....	105
4.4 LA APROXIMACIÓN PARAXIAL.....	105
4.5 LA TRANSFORMACIÓN DE FASE Y SU SIGNIFICADO FÍSICO .....	106
4.6 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMACIÓN FOURIER DE LAS LENTES .....	107
4.7 FORMACIÓN DE IMAGEN: ILUMINACIÓN MONOCROMÁTICA.....	110
4.8 RESPUESTA IMPULSIVA DE UNA LENTE POSITIVA .....	110
4.9 ELIMINACION DE LOS FACTORES DE FASE CUADRÁTICA .....	111
4.10 LA RELACION ENTRE LA IMAGEN Y EL OBEJTO .....	112
4.12 TRATAMIENTO GENERALIZADO DE LOS SITEMAS FORMADORES DE IMAGENES.....	114
4.12.1 EFECTOS DE DIFRACCION EN LA IAMGEN.....	114
4.12.2 ILUMINACIÓN POLICROMATICA: CASO COHERENTE E INCOHERENTE .....	116
4.13 FILTRADO ÓPTICO EXPERIMENTO DE ABBE-PORTER.....	118
4.14 MICROSCOPIO DE CONTRASTE DE FASE DE ZERNIKE. ....	121
4.15 EXPERIMENTACIÓN ARMADO DE UN COPUTADOR ÓPTICO .....	123
4.16 EJERCITACIÓN.....	124
CAPITULO V: INTRODUCCIÓN A LA METROLOGÍA ÓPTICA.....	128
5.1 HOLOGRAFÍA CONVENCIONAL .....	128
5.1.1 PROCESO DE REGISTRO .....	128
5.1.2 PROCESO DE REGISTRO .....	129
5.1.3 PROCESO DE RECONSTRUCCION DEL FRENTE DE ONDA ORIGINAL .....	130
5.1.4 FORMACIÓN DE IMÁGENES EN LA RECONSTRUCCIÓN DEL FRENTE DE ONDA .....	131
5.1.5 ASPECTOS PRÁCTICOS .....	132
5.2 INTERFEROMETRÍA HOLOGRÁFICA .....	134
INTERFEROMETRÍA HOLOGRÁFICA A TIEMPO REAL.....	134

INTERFEROMETRÍA HOLOGRÁFICA DE DOBLE EXPOSICIÓN .....	135
5.3 MEDIDA DE DESPLAZMAIENTOS – EL VECTOR SENSIBILIDAD .....	135
5.4 APLICACIONES PRÁCTICAS.....	137
5.4.1 UN DISPOSITIVO HOLOGRÁFICO SENCILLO PARA VISUALIZACIÓN DE FLUJOS.....	137
5.4.2 ESTUDIO DE UN FLUIDO EN CONVECCION NATURAL.....	140
5.5 EL FENÓMENO SPECKLE .....	143
5.5.1 ESTADÍSTICA DE PRIMER ORDEN.....	145
5.5.2 ESTADÍSTICA DE SEGUNDO ORDEN .....	147
5.6 METROLOGÍA SPECKLE .....	149
5.6.1 EXPERIENCIA DE BURCH-TOKARSKY .....	150
5.6.2 EXPERINECIA DE BURCH-TOKARSKY – VERSIÓN DIGITAL.....	152
5.6.3 INTERFEROMETRÍA SPECKLE DIGITAL.....	155
5.6.4 FUENTES DE ERRORES .....	159
5.7 APLICACIONES DE INTERFEROMETRÍA SPECKLE DIGITAL .....	162
5.7.1 DETERMINACIÓN DE CURVAS DE CONCENTRACIÓN .....	163
5.7.2 ANALISIS DE VIBRACIONES .....	165

## EL TEXTO Y EL CONTEXTO

Este texto ha sido pensado como una forma de condensar mi experiencia en el dictado de la asignatura Óptica I para la carrera de Licenciatura en Física.

La carrera, Licenciatura en Física en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta es una carrea que nació por allá de los inicios los 80's. La misma surgió como una necesidad de ampliar los campos de investigación y desarrollo en la región y formar profesionales que pudieran desenvolverse en áreas relacionadas principalmente con las líneas de investigación existentes por entonces.

En los primeros años, el interés del alumnado se orientó a las cuestiones relacionadas con las energías renovables en particular la Solar y su uso en sistemas pasivos para su aprovechamiento en nuevas tecnologías. Con el transcurso del tiempo surgieron nuevas líneas de investigación íntimamente relacionadas con los objetivos del INENCO-CONICET (Instituto de Energías No Convencionales) como las del Grupo de Óptica Láser (GOL) surgido en 1990 y liderado por el Profesor Emérito, Elvio Alanís y otras como la Física Teórica y la Enseñanza de la Física.

La historia condensada en el párrafo anterior parece ser una necesidad para hacer hincapié en el hecho que, más allá de los intereses particulares de cada uno de los miembros del actual Departamento de Física, mayoritariamente miembros del INENCO, la Licenciatura en Física tiene un rol fundamental en la Física Aplicada y en particular la rama de la Óptica ha adquirido un papel muy importante en la formación de licenciados. Se puede asegurar que a lo largo de los últimos 30 años se han formado numerosos licenciados en Física y de otras áreas; muchos de los cuales han obtenido ya el grado de doctor y se desempeñan en distintos centros de investigación tanto de Argentina como del exterior.

La inclusión de la asignatura Óptica I en el currículo de la carrera ha requerido de la formación de docentes que pudieran continuar su enseñanza a lo largo de los años y tomar el legado para fortalecerlo y actualizarlo en forma continua. Esta asignatura es de carácter fuertemente experimental y contribuye al aprendizaje de los fundamentos para abordar la Metrología Óptica. Su estudio requiere del uso de diferentes libros y publicaciones científicas lo que demanda de los docentes habilidad para seleccionar contenidos y fuentes. En ese sentido, mi intención principal al escribir este texto es simplemente dar un panorama general de los contenidos nucleares, basándome en mi experiencia de 12 años en el dictado de la asignatura. Pero también permitir que el alumnado disponga de un texto guía en el aprendizaje, que los oriente pero que a su vez los estimule a la lectura de publicaciones científicas actualizadas ya que la Óptica está en constante evolución en resonancia con sus numerosas aplicaciones en diversos campos de la ciencia y la tecnología.

En este texto se incluyen actividades de resolución de problemas y prácticas de laboratorio propuestas a lo largo de los años por la Dra. Andrea Carolina Monaldi, quien me acompañó en el dictado de la materia desde el año 2009, como Graduada Adscripta y Auxiliar Docente. También se incluyen módulos de programación como apoyo a la experimentación para la realización de simulaciones y programas para procesamiento de la Información Óptica, diseñados a partir del software diseñado por el CU Gustavo Jonathan Curkovic, integrante del grupo, ambos son investigadores que se desempeñan en los laboratorios de Metrología Óptica, Óptica Biológica y Caracterización de Partículas. Esto por supuesto es una clara conjunción de Capital Humano e infraestructura ideal para desarrollar el dictado de la asignatura.

El libro ha sido estructurado siguiendo el programa vigente de la asignatura, aprobado por RESD-EXA Nº: 527/2017.

En el capítulo Introductorio, se realiza una revisión de los conceptos aprendidos en las asignaturas previas; Introducción a la Física (Óptica Geométrica), Física II (Óptica Ondulatoria), Electromagnetismo, Física Moderna (interacción de la luz con la materia). Los mismos han sido seleccionados procurando refrescar los conceptos que se suponen aprendidos y son necesarios para el abordaje de la Metrología Óptica, por lo que se procura su desarrollo adaptándolos a este objetivo. Se propone una práctica experimental para que los estudiantes sean capaces de generar un haz plano de sección transversal acorde al objeto a iluminar a partir de un láser. Se incluyen una serie de

ejercicios de lápiz y papel que requieren de la aplicación de muchos de estos conceptos, pero sobre todo que permite adquirir la habilidad de entender el concepto de onda de luz y su interacción con el medio.

El capítulo 1 ha sido dedicado al estudio exhaustivo de la Interferometría Clásica. Se repasan las bases aprendidas en cursos introductorios y se profundiza en la cuestión de la coherencia temporal y espacial y sobre los tipos de interferómetros. Se describen en detalle experiencias de aplicación en las que se utilizan un interferómetro de Michelson para la determinación del coeficiente fricción cinético entre superficies y el interferómetro de Mach Zehender para la determinación experimental del coeficiente de difusión en soluciones salinas. Para este tema la experimentación es de suma importancia por lo que se incluyen una serie de experimentos utilizando un interferómetro comercial que puede funcionar en configuración de Michelson, Twiman Green y Fabry - Perot. También se incluyen datos de un experimento real para la medición del grado de coherencia de fuentes de luz y por supuesto ejercitación práctica.

El capítulo 2, se ha dedicado al estudio de las herramientas matemáticas necesarias para abordar la Óptica de Fourier. En él se repasan los conceptos de series y transformadas de Fourier en una y dos dimensiones. Se aborda también su extensión a las transformadas de Fourier-Bessel para problemas con simetría circular, como los típicos que aparecen en los sistemas formadores de imágenes. Se abordan los conceptos de sistemas lineales y su importancia para la manipulación de la información óptica. Se aborda en detalle el teorema del muestreo de Whitaker-Shannon de importancia para la manipulación de la información óptica como superposición de ondas elementales y su registro. Finalmente se incluye una aplicación concreta de uso del método de Fourier para desenvolver fases. El capítulo finaliza con una gama de ejercicios que permiten aprender a utilizar las herramientas y funciones especiales que simplifican el cálculo y la manipulación de la información óptica.

El Capítulo 3 ha sido dedicado a otro de los grandes temas nucleares para entender la formación de imágenes y el tratamiento óptico de señales. Se aborda la difracción clásica a partir del principio de Huygens y su cálculo para diferentes tipos de aperturas difractantes, introduciendo el concepto de transmitancia. De esta manera se llega a hacer una introducción a la óptica de Fourier, completándose su estudio con la teoría escalar de la difracción. Se hace especial hincapié en el espectro óptico y se estudia su propagación aportando de esta manera una nueva herramienta para el estudio de la propagación de las señales ópticas en el espacio de frecuencias. Se abordan aplicaciones de especial importancia como el criterio de resolución de Raleigh y en detalle las aproximaciones de Fresnel y Fahunhoffer y una aplicación al principio de Babinet. Se plantea un nuevo experimento consistente justamente en la verificación experimental de este principio, además la ejercitación de lápiz y papel del cálculo de patrones de difracción.

En el capítulo 4, se abordan el Filtrado Óptico y la Formación de imágenes. El componente más importante de un sistema formador de imágenes y de procesamiento de la información óptica son las lentes. Se realiza una discusión sobre las propiedades de las lentes sin recurrir a los principios básicos de la óptica geométrica. Se adopta un punto de vista alternativo que no se basa directamente en ellos y se estudian diferentes casos de sistemas formadores de imagen. Nuestra discusión se limita principalmente a los casos con iluminación monocromática y se hace alguna generalización al caso de iluminación no monocromática. Se presentan el filtrado óptico y el diseño de computadores ópticos para la manipulación de imágenes en el plano de frecuencias. Finalmente se aborda la técnica de contraste de fase en microscopía.

Finalmente, en el capítulo 5, se abordan las técnicas más importantes en el campo de la metrología óptica. Las técnicas Holográficas y de Speckle, que si bien tuvieron sus inicios en los años 60 son de gran actualidad hoy apoyadas por el incesante desarrollo tecnológico para el registro y la manipulación de la información óptica. Se abordan ambas técnicas desde su concepto hasta las interferometría Holográfica y Speckle, como técnicas de campo completo muy aplicadas en ensayos no destructivos, en general con precisiones sub micrométricas, para mediciones de desplazamientos, deformaciones, vibraciones, tensiones, fracturas, campos de temperatura y/o concentración, variaciones de índice de refracción, etc. Para ambas técnicas se abordan aplicaciones concretas con resultados y detalles experimentales que facilitarían su aplicación. Se incluyen también experimento para filtrado óptico digital y de la experiencia de Burch-Tokasky.

## INTRODUCCIÓN

### I.1 UN POCO DE HISTORIA

La óptica es la rama de la física que estudia la luz y los fenómenos relacionados con ella, y su estudio comienza cuando el hombre intenta explicarse el fenómeno de la visión.

Los primeros reportes sobre una definición del concepto de la luz y la visión datan del siglo 450 a. C. El filósofo Lepucio (460-370 a. C.) propone que los *cuerpos son focos que desprenden imágenes y estas son captadas e interpretadas por el alma*. En esta idea subyace el fenómeno de la visión y una definición de luz propuesta por este filósofo y compartida por Pitágoras de Samos (580-495 a.C.) es que la luz era “algo” que fluye y es captado por nuestros ojos, excitando el sentido de la vista; a esta interpretación se le denominó “teoría de la emisión” o “teoría de la intromisión”. Posteriormente al parecer, Platón (427-347 a.C.) complica la teoría de Pitágoras, suponiendo una acción entre algo que emana de tres puntos: los ojos, el objeto que ve y aquello que produce la iluminación. Esta idea sobre la luz y la visión permanece casi inalterable por muchos años como parece haber escrito en su obra “Libro de Óptica de Alhacén”, Ajasen Basora (965-1039) matemático, físico y astrónomo árabe; la luz era un proyectil que provenía del Sol, rebotaba en los objetos y de éstos al ojo. Hasta que mucho más tarde, finales del siglo XVI y principios del siglo XVII, se sabe que René Descartes (1596-1650) sostenía que la luz se comportaba como un proyectil que se propulsaba a velocidad infinita. Por entonces ya se conocía la ley de Snell (también llamada ley de Snell-Descartes) es una fórmula utilizada para calcular el ángulo de refracción de la luz al atravesar la superficie de separación entre dos medios de propagación de la luz (o cualquier onda electromagnética) con índice de refracción distinto. El nombre proviene de su descubridor, el matemático holandés Willebrord Snell van Royen (1580-1626). En cualquier caso, fue creencia general que la luz estaba formada por partículas, las cuales se movían en línea recta a gran velocidad, hipótesis que muchos siglos después fue la que más convenció a Isaac Newton (1643-1727). Fenómenos como la reflexión, la refracción y las sombras de los cuerpos, se podían esperar de torrentes de partículas. Isaac Newton demostró que la refracción estaba provocada por el cambio de velocidad de la luz al cambiar de medio y trató de explicarlo diciendo que las partículas aumentaban su velocidad al aumentar la densidad del medio. La comunidad científica, consciente del prestigio de Newton, aceptó su teoría corpuscular. Newton en su obra sobre la luz y la óptica, publicada en 1704, pudo explicar utilizando el modelo corpuscular, los conceptos de intensidad de una fuente, la ley de la reflexión y aunque, fue necesario darles formas especiales a sus partículas, también pudo explicar la ley de refracción, pero aun así en su modelo perduraba el problema de que, en un medio diferente del vacío, las partículas deben ser más veloces. Paralelamente, en 1668, Christian Huygens propuso que la luz era un fenómeno ondulatorio que se transmitía a través de un medio llamado éter. Precisamente definió a la luz “como un movimiento ondulatorio semejante a la propagación del sonido, de tipo mecánico, que necesita un medio material para propagarse”. Simultáneamente, el danés Bartholinus en 1669 descubre el fenómeno de la birrefringencia del espato de Islandia y que no pudo ser explicado por la teoría corpuscular.

Debido a la aplastante autoridad científica de Newton, la teoría Huygens quedó olvidada por casi 100 años; hasta que, en la primera mitad del siglo XIX, Thomas Young es capaz de explicar el fenómeno de interferencia suponiendo que la luz fuese en realidad una onda. Otros estudios de la misma época explicaron fenómenos como la difracción y la polarización. Surge de esta manera la teoría ondulatoria y la podemos resumir diciendo que por un lado, Young demostró experimentalmente el hecho paradójico que se daba en la teoría corpuscular de que la suma de dos fuentes luminosas puede producir menos luminosidad que por separado. Por otro lado, Augustin-Jean Fresnel, con experimentos de luz polarizada demostró que las ondas de luz deberían ser transversales. En 1818, éste físico e ingeniero francés escribió una memoria sobre la difracción de la luz, por la que en 1819 recibiría el premio de la Academia Francesa de Ciencias de París. Con esta obra, Fresnel se convierte en involuntario protagonista de la enconada polémica científica entre los partidarios de la teoría corpuscular de la luz (capitaneados por Siméon Denis Poisson) y los partidarios de la teoría ondulatoria (defendida por el propio Fresnel). La disputa se saldó a favor de estos últimos, gracias a un sencillo experimento de resultado sorprendente que había sido propuesto por Poisson precisamente para desacreditar a Fresnel, y que sirvió para todo lo contrario. Este experimento, materializado por François Arago (presidente del jurado que tenía que entregar el premio), fue conocido posteriormente como "punto de Arago". Una fuente de luz puntual, proyecta la sombra de un círculo opaco sobre una pantalla. En el centro de la

sombra aparece un punto brillante debido a la difracción, contradiciendo las predicciones de la óptica geométrica. Finalmente, J. C. Maxwell (1831-1879) define que la luz consiste en una perturbación electromagnética que se propaga en el éter; tanto las ondas eléctricas como ondas luminosas son fenómenos idénticos. De esta manera deja sentada las bases o da inicio a lo que podríamos llamar modelo electromagnético, el que junto con una gran diversidad de aportes de otros científicos (Gauss, Ampere, Faraday y Lens) relacionados con investigaciones de los campos eléctricos y magnéticos confluyen en las conocidas Ecuaciones de Maxwell. Destacándose el aporte de Heinrich Hertz (1888) quien comprobó que las ondas hertzianas de origen electromagnético tienen las mismas propiedades que las ondas luminosas.

A pesar de tamaña polémica sobre la naturaleza de la luz, un chorro de partículas o una rápida ondulación de materia etérea se estaba de acuerdo en que su velocidad de propagación era excesivamente grande y muchos científicos trabajaron en tratar de medirla. En este sentido podemos destacar los aportes de Olaf Römer (1670) con la medición de la velocidad de la luz mediante observaciones astronómicas. Hippolyte Fizeau (1849) mediante un experimento con rueda dentada y, por último, León Foucault (1819 – 1868) midió que la velocidad de propagación de la luz a través del agua.

En 1887 Albert Abraham Michelson, quien en 1907 se convirtiera en el primer polaco que obtuvo el premio Nobel de Física, por sus trabajos sobre la luz, y Edward Morley llevaron a cabo el uno de los experimentos uno de los más importantes y famosos de la historia de la física. El experimento Michelson y Morley, está considerado como la primera prueba contra la teoría del éter. El resultado del experimento constituiría posteriormente la base experimental de la teoría de la relatividad especial de Einstein.

Más cercanos en la línea de tiempo, corresponde mencionar a aquellos científicos que contribuyeron a las tecnologías de luz, como Albert Einstein (1879-1955), Arno Allan Penzias (1933, 87 años), ganó en 1978 el Premio Nobel de Física, junto con Robert Woodrow Wilson, por su descubrimiento en 1964 de la radiación cósmica de fondo de microondas. Charles Kuen Kao (1933-1948) ingeniero eléctrico profesor e investigador chino, pionero en el desarrollo y uso de la fibra óptica en telecomunicaciones.

Como toda investigación histórica, el uso de numerosas fuentes puede llevar a ciertas inconsistencias en la línea de tiempo de los sucesos y de los autores, pero una cosa es segura, la naturaleza de la luz es dual y ambos modelos se contradicen, pero son necesarios para describir la amplia gama de fenómenos relacionados con ella. El modelo corpuscular dio lugar al auge de la rama de la óptica conocida como *Óptica Cuántica*, en la que se estudia la interacción de la luz con la materia y la luz se comporta como un chorro de partículas llamada fotones. Por otro lado, para explicar una amplia gama de fenómenos de interferencia y difracción, se requiere del *modelo ondulatorio* que se basa en la teoría del Electromagnetismo Clásico.

Para aquellos que busquen más información o profundidad en las cuestiones históricas se recomienda leer el capítulo I de la referencia [I.1]. Se trata de un extenso sobre la óptica en la antigüedad orientado a las cuestiones de las lentes, los espejos y la ciencia oftálmica. Es interesante el amplio conjunto de referencia que Jay M Enoch, actualmente Profesor Emérito y director del Centro de Estudios Visuales de la Universidad de California en Berkelly, incluye para que, según su propio decir, “el lector curioso pueda completar sus cuestiones”. También en la referencia [I.2] en su primer capítulo se encuentra una extensa revisión histórica con ilustraciones de muchos de los personajes que aquí se mencionan.

Muchos son los hitos importantes en la historia de la ciencia de la luz, pero detrás de todos ellos encontramos el nombre de varones. Sin embargo, es absurdo pensar que la otra mitad de la humanidad ha estado ausente en el devenir de los descubrimientos científicos. A lo largo de la Historia de la Ciencia ha habido mujeres valientes y brillantes que, pese a la prohibición explícita y negación continuada de su vocación, han sabido abrirse camino y nos han iluminado con sus descubrimientos sobre la Luz [I.3]. Es momento ahora de iluminarlas a ellas, dice Belén Cavanilla, directora de Smartlighting (A Journal of Lighting Technologies) en oportunidad de una conferencia en el marco del año internacional de la luz en 2015. He aquí un resumen a modo de reconocimiento.

Gracias a la erudición de Madame de Châtelet, Matemática y Física francesa (1706-1749) y a su traducción de los “Principia Mathematica” y de Optics permitió que el continente europeo accediera al newtonianismo. Martha Coston (1826-1904) fue la primera en diseñar y fabricar un sistema de comunicación basado en bengalas luminosas para los barcos contribuyendo a salvar muchas vidas. Henrietta Swan Leavitt (1868-1921), astrónoma estadounidense, descubrió el camino para conocer el tamaño de nuestra galaxia y la escala del universo. Hedwig Kohn (1887-1964), física alemana, realizó un minucioso trabajo en espectrometría y pirometría, hoy considerados estándares de iluminación. Katherine Burr Blodgett (1898-1979) inventó los cristales antirreflejantes, mientras que Yvette Cauchois (1908-1999), física francesa, creó un espectrógrafo de rayos X que permitió descubrir nuevos elementos del sistema periódico. Maria Goppert Mayer (1906-1972), fue una física teórica estadounidense de origen alemán, ganadora del Premio Nobel de Física en 1963 por proponer el modelo de capas nuclear. Dio nombre a la unidad de sección de absorción de dos fotones. Marie Luise Spaeth inventó el láser sintonizable de colorante y desarrolló los telémetros láser. Rosalind Franklin (1920-1958) obtuvo la famosa Fotografía 51, que probó experimentalmente la estructura helicoidal del ADN mediante difracción de rayos X. Martha Jane Berghin Thomas (1926-2006) mejoró las fuentes de iluminación, sobre todo los tubos fluorescentes. Jean Macpherson Bennet fue la primera mujer en ocupar la presidencia de la “Optical Society of America”. Por último, Jocelyn Bell Burnell (1943, 77 años) descubrió los “faros” del universo, los pulsares.

Antes de iniciar el estudio de las diferentes técnicas de metrología óptica se hace necesario realizar una revisión de algunos términos básicos y definiciones. La metrología óptica es la rama de la óptica que tiene como propósito efectuar medidas de muy alta precisión usando ondas de la luz como escala, por lo tanto, debemos desarrollar una descripción matemática de ondas y propagación de ondas, introduciendo importantes términos como longitud de onda, fase, frentes de fase, rayos, etc. de una manera muy simple y sin entrar en la complicada teoría electromagnética. El estudio más profundo y detallado los fenómenos de interferencia y difracción se hace una necesidad y los abordaremos utilizando nuevas herramientas matemáticas. También se hace necesario introducir algunas herramientas relacionadas con el registro y el procesamiento de la información óptica, las que serán abordados de manera práctica y se deja para la asignatura Optativa Óptica II, su tratamiento riguroso.

## I.2 MOVIMIENTO ONDULATORIO – REPASANDO.

Como sabemos, una onda armónica que se propaga en la dirección  $z$  puede ser descripta por la función

$$\Psi(z, t) = U \cos \left[ 2\pi \left( \frac{z}{\lambda} - vt \right) + \delta \right] \quad (I.1)$$

Donde:

$U$ : Amplitud

$\lambda$ : es la longitud de onda

$v$ : es la frecuencia (número de ondas por unidad de tiempo)

$k = 2\pi/\lambda$  el número de onda

La relación entre la frecuencia y la longitud de onda viene dada por  $\lambda v = c$ , donde  $c$  es la velocidad de propagación de la onda.

La función de onda armónica  $\Psi(z, t)$  y se puede esquematizar como [I.4]:

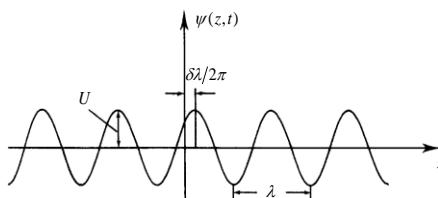


Figura I.1: Representación gráfica de una onda armónica unidimensional

Si  $\Psi(z, t)$  representa el campo en una onda electromagnética,  $v = c = 3 \times 10^8$  m/s.

El cociente entre la velocidad  $c$  de una onda electromagnética en el vacío y la velocidad de propagación en un medio se conoce como el índice de refracción absoluto  $n$  de ese medio

$$n = c/v \quad (I.2)$$

Del amplio espectro de las ondas electromagnéticas, estaremos relacionados con la pequeña región denominada, espectro de la luz visible para el cual  $\lambda$  se encuentra en rango de los 400 a 700 nm, lo que se corresponde, según la relación I.2 con un rango de frecuencias de  $(4.3\text{--}7.5) \times 10^{14}$  Hz.

Como se vio en Electromagnetismo, a partir de las ecuaciones de Maxwell se obtiene la ecuación de ondas, siendo para una onda que se propaga en el vacío:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (I.3)$$

donde,  $\vec{E}$  es el vector campo eléctrico y  $\Delta^2$  el operador de Laplace. El campo eléctrico es una cantidad vectorial, lo que significa que puede vibrar en cualquier dirección perpendicular a la dirección de propagación. Sin embargo, en muchas aplicaciones las ondas vibran solo en un plano, p.e el plano- $x, y$ . Este tipo de luz se denomina luz polarizada linealmente. En este caso alcanza con considerar solo la ecuación de onda escalar:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (I.4)$$

Las ondas electromagnéticas no son bidimensionales como en la figura I.1, sino que son tridimensionales. El ejemplo más simple de tales ondas se da en la Figura I.2 a) donde se dibuja una onda plana que se propaga en la dirección del vector  $\vec{k}$ , cuyo módulo es  $2\pi/\lambda$ . Los puntos de igual fase se encuentran en planos paralelos que son perpendiculares a la dirección de propagación. Dichos planos se denominan planos de fase o frentes de fase. En la figura, solo se dibuja parte del número infinito de planos de fase. Idealmente, también deberían tener una extensión infinita.

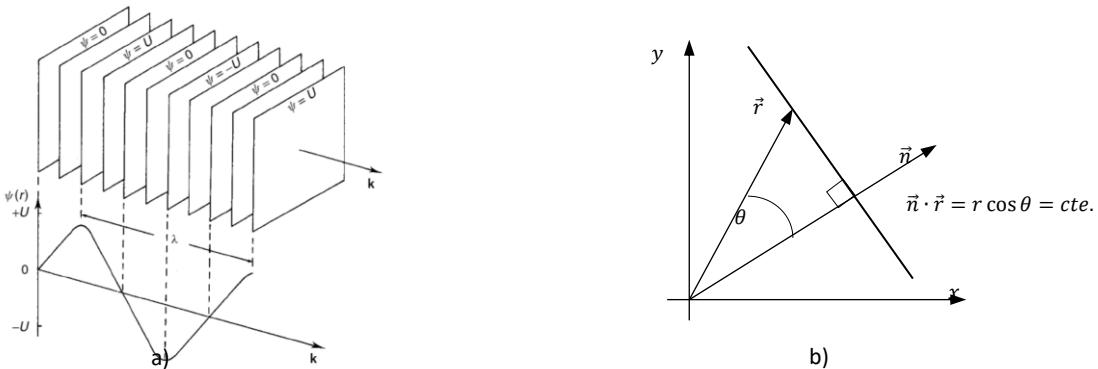


Figura I.2: a) Representación gráfica de una onda plana. b) Representación gráfica de  $\vec{n} \cdot \vec{r} = cte$

La ecuación (I.1) describe una onda plana que se propaga en la dirección  $z$ . ( $z = \text{constante da la misma fase para todo } x, y$ , es decir, planos que son normales a la dirección  $z$ ). En el caso general donde una onda plana se propaga en la dirección de un vector unitario  $\vec{n}$ , la expresión que describe el campo eléctrico en un punto arbitrario dado por el vector posición  $\vec{r} = (x, y, z)$  viene dada por

$$E(x, y, z, t) = U \cos[k \vec{n} \cdot \vec{r} - 2\pi v t + \delta] \quad (I.5)$$

y el producto escalar en la fase, que cumple la condición  $\vec{n} \cdot \vec{r} = \text{constante}$  describe un plano perpendicular a  $\vec{n}$  como se muestra en el caso bidimensional en la Figura I.2.b). También en el caso tridimensional se puede demostrar fácilmente que esto es correcto.

Un concepto geométrico muy útil para describir la propagación de la luz, es el de “rayos de luz” líneas dirigidas que, en todas partes, son perpendiculares a los planos de fase [I.5]. Esto se ilustra en la Figura I.3, donde se dibuja la sección transversal de un frente de onda bastante complicado y donde se dibujan algunos de los rayos de luz perpendiculares al frente de onda.

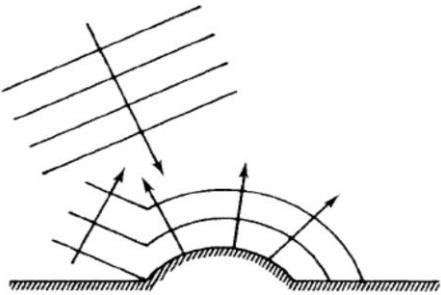


Figura I.3: Representación gráfica de rayos de luz.

En su interacción con la materia la *radiación electromagnética* puede reflejarse, dispersarse o ser absorbida. En nuestro caso, dado que estamos interesados en experimentos donde se utiliza radiación electromagnética en el rango del visible, sólo consideramos los procesos relacionados con la interacción de la luz con la materia, como se esquematiza en la figura I.4.

La reflexión de la luz: cuando la luz atraviesa una superficie que separa dos medios de diferente índice de refracción, obedece las leyes de Snell y las ecuaciones de Fresnel. Por lo tanto la luz reflejada depende tanto de los índices de refracción,  $n_1$  y  $n_2$  como de los ángulos de incidencia  $\varphi_1$  y de refracción  $\varphi_2$ :

$$n_1 \operatorname{sen} \varphi_1 = n_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \quad (\text{Snell})$$

$$R = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)} + \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}^2(\varphi_1 + \varphi_2)} \right] \quad (\text{Fresnel})$$

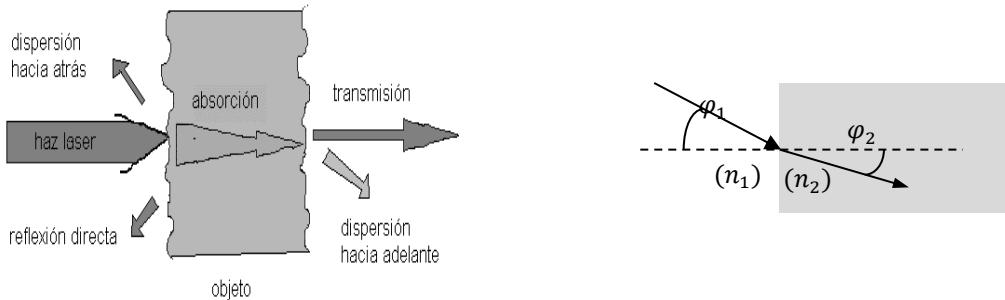


Figura I.4. Izquierda: Formas de interacción de la luz con la materia. Derecha: Esquema para la ley de Snell.

La dispersión de la luz: La dispersión por su parte puede ser elástica o inelástica. Elástica significa que los fotones dispersados no ganan ni pierden energía en el proceso. Los tipos de dispersión elástica son de Rayleigh y de Mie. En la dispersión de Rayleigh el campo electromagnético de la luz incidente induce polarización de las moléculas, las que “reirradian” la luz. Ésta aparece cuando el tamaño de las partículas dispersoras, presentes en el medio, son del orden o más pequeñas que la longitud de onda de la luz. Un esquema del proceso se muestra en la figura I.5 a). La sección eficaz para este tipo de proceso es del orden de  $10^{-26} \text{ cm}^2$  y proporcional a  $\lambda^{-4}$  [I.6, I.7] que significa que aumenta cuando disminuye la longitud de onda. Un ejemplo práctico de este fenómeno se presenta cuando la luz del sol es dispersada en las moléculas de aire. Las longitudes de onda más cortas son más dispersadas que las rojas, lo que hace que el cielo se vea azulado.

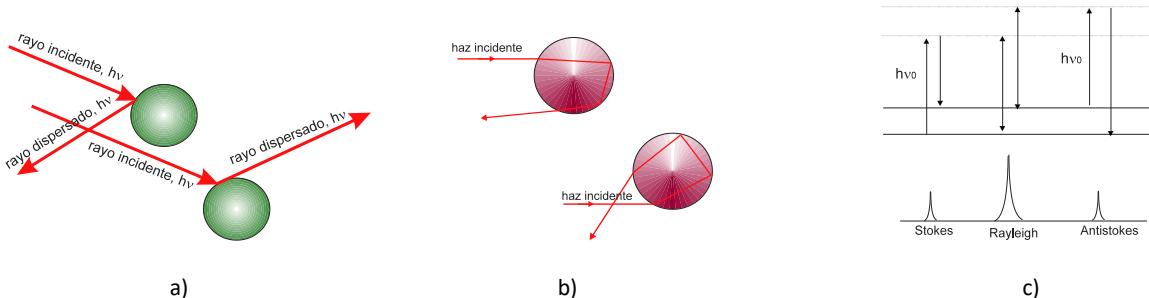


Figura I.5: a) Esquema dispersión de Rayleigh en partículas. b) Esquema dispersión de Mie. c) Corrimientos Raman de la luz dispersada.

Si las partículas son grandes comparadas con la longitud de onda de la luz, se tendrá dispersión de Mie. En este caso un rayo penetra las paredes de las partículas y se refleja una o varias veces en las paredes internas antes de salir, como se muestra en la figura I.5 b). Ejemplos de este proceso son la mala visibilidad en la neblina y el arco iris en las nubes. En este último caso, la luz del sol se dispersa en las gotas de agua de las nubes. Como la luz solar está compuesta por un espectro continuo de longitudes de onda, las gotas de agua dispersan las diferentes longitudes de onda con diferentes ángulos, dando como resultado el arco iris. La sección eficaz para la dispersión de Mie depende fuertemente del tamaño y del índice de refracción de las partículas y del medio en el que se encuentran. Varía entre alrededor de  $10^{-26}$  a  $10^{-8} \text{ cm}^2$ .

El efecto de dispersión inelástica de la luz se manifiesta en las dispersiones de Raman y Brillouin. Raman es un caso especial de la dispersión de Rayleigh. La diferencia radica en que cuando la molécula re irradia la luz, los electrones excitados pasan a otros niveles de energía distintos de donde se encontraban antes de la dispersión. La figura I.5 c) muestra un diagrama de este proceso. Este efecto da como resultado longitudes de onda, corridas una cierta cantidad, por encima o por debajo de las longitudes de onda de la luz incidente, específicas para cada banda. La sección eficaz para la dispersión Raman es de alrededor de  $10^{-29} \text{ cm}^2$ .

La dispersión de Brillouin aparece cuando la luz láser sufre corrimientos en fase por la interacción con ondas sonoras (fonones), que se mueven a lo largo de un cristal. Las dimensiones de los corrimientos en fase dependerán de las frecuencias de resonancia del sistema y por lo tanto del tamaño y características del objeto y del fonón.

La absorción de la luz: El proceso de absorción es una de las partes más complejas de la interacción de la luz con la materia. Los diferentes átomos y moléculas en la materia tienen un posible rango de niveles de energía con los que pueden ser excitados. Después de un cierto tiempo de relajación, que depende del tipo de átomo o molécula, pierden energía ya sea produciendo calor, contribuyendo a alguna reacción fotoquímica o re irradiando fotones en cualquier dirección, efecto denominado fluorescencia. Estos fotones re irradiados, pueden tener la misma longitud de onda que la de la luz incidente pero también otra, dependiendo de la probabilidad de ocupación de los diferentes niveles de energía.

Todos estos procesos se manifiestan en cambios que sufre una onda de luz tanto en la amplitud como en la fase. Como profundizaremos más adelante, estos cambios, en mayor o menor medida permiten clasificar a los objetos de acuerdo a su preponderancia. Por ejemplo, decimos que un objeto es un “objeto de fase” si la luz que pasa a través de él, sólo se ve afectada en su fase. Esto no es estrictamente cierto ya que todos los medios materiales son absorbentes en mayor o menor medida. Sin embargo, si los objetos son transparentes se puede despreciar la absorción y en ese caso sólo interesa el efecto en la fase. En el otro extremo tenemos los denominados “objetos de amplitud” y por contraposición el efecto preponderante es la absorción y en ese caso supondremos que sólo se ve afectada la amplitud de la onda de luz. Generalmente se trata de objetos de espesores muy pequeños para poder despreciar los cambios en la fase. Finalmente se puede mencionar que existe una gran variación de objetos que introducen cambios tanto en la fase como en la amplitud de la onda de luz que se propaga a través de ellos, y en los cuales pueden ocurrir uno o varios de los procesos arriba mencionados.

Ahora bien, una onda de luz que se propaga en el vacío, no cambia su amplitud, pero sí su fase. Para entender esta idea, por simplicidad consideremos la onda dada por la ecuación I.1, la fase de la misma, en dos puntos  $z_1$  y  $z_2$  a lo largo de la dirección de propagación viene dada por:  $\phi_1 = 2\pi\left(\frac{z_1}{\lambda} - vt\right) + \delta$  y  $\phi_2 = 2\pi\left(\frac{z_2}{\lambda} - vt\right) + \delta$  respectivamente y la diferencia de fases entre estos dos puntos será:

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = k(z_1 - z_2) \quad (\text{I.6})$$

o sea, la diferencia de fase entre dos puntos a lo largo de la dirección de propagación de una onda plana es igual a la diferencia de camino geométrico multiplicada por el número de onda. Esto es generalmente cierto para todo rayo de luz. Por lo tanto, debemos recordar siempre que, aunque la luz no interactúe con la materia, su fase se ve afectada por el simple hecho de propagarse.

Ahora bien, cuando la onda se propaga en un medio diferente del vacío, se debe multiplicar por el índice de refracción del medio ya que se debe reemplazar la diferencia de camino geométrico por la diferencia de camino óptico. Podemos decir que el camino óptico se define como el camino geométrico que recorre la onda multiplicada por el índice de refracción. A los fines de simplificar la notación definimos:

$$l.c.g = \text{longitud de camino geométrico}$$

$$l.c.o = \text{longitud de camino óptico}$$

por lo tanto:

$$l.c.o = n l.c.g \quad (\text{I.7})$$

donde  $n$  es el índice de refracción del medio. Luego, la diferencia de fase entre los puntos  $z_1$  y  $z_2$  en la dirección de propagación de la onda resulta,

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = kn(z_1 - z_2) \quad (\text{I.8})$$

Para una onda propagándose en el vacío esta ecuación se reduce a la I.6 ya que  $n = 1$ .

Como dijimos, en el estudio de la óptica estamos interesados en el registro de la información óptica, que está íntimamente relacionado con el registro de la luz. Esto, nos enfrenta con una importante dificultad ya que no existe ningún sensor capaz de registrar la amplitud de campo eléctrico o magnético. Los detectores tales como, el ojo, los fotodioides, los tubos fotomultiplicadores, los films fotográficos, etc. son capaces de registrar la intensidad de la perturbación óptica. Como sabemos del electromagnetismo, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico y viene dada por:

$$I = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \epsilon_0 c \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E^2 dt \quad (\text{I.9})$$

Para el caso de la onda plana de la ecuación I.5 la intensidad es:

$$I = \epsilon_0 c U^2 \langle \cos[k\vec{n} \cdot \vec{r} - 2\pi v t + \delta]^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c U^2 \quad (\text{I.10})$$

donde puede verse que la constante de proporcionalidad entre la intensidad y el cuadrado de la amplitud depende de la velocidad de propagación de la luz y la permitividad eléctrica del medio.

### I.3 NOTACIÓN COMPLEJA – AMPLITUD COMPLEJA

En Metroología Óptica, y en otras ramas de la óptica, generalmente lo que nos interesa estudiar es la distribución espacial de la perturbación óptica. En esta sección introduciremos la herramienta matemática que nos permitirá independizarnos de la cuestión temporal sin que por ello se pierda la propiedad de viajar de las ondas. Por una cuestión de simplicidad y sin pérdida de generalidad se utilizará para el desarrollo una onda plana como la dada por la ecuación I.5,

$$\Psi(x, y, z, t) = U \cos[k\vec{n} \cdot \vec{r} - 2\pi v t + \delta]$$

Utilizando la ecuación de Euler, esta ecuación puede ser rescrita según:

$$\Psi(x, y, z, t) = U \operatorname{Re}\{e^{i(\phi-\omega t)}\} \quad (\text{I.11})$$

donde,  $\phi = k\vec{n} \cdot \vec{r} + \delta$ , es la dependencia espacial y  $\operatorname{Re}$  significa la parte real. Esto generalmente es omitido en el tratamiento ondulatorio ya que se asume que el campo es una cantidad real. Como se desprende de la ecuación I.11, una de las ventajas de usar esta notación compleja es que en esta expresión se pueden factorizar las partes espaciales y temporales. Por lo que:

$$\Psi(x, y, z, t) = U e^{i\phi} e^{-i\omega t} \quad (\text{I.12})$$

Puesto que la dependencia temporal es bien conocida para cada componente de frecuencia, la podemos omitir y sólo considerar la amplitud compleja espacial, que denotamos como *amplitud compleja* y viene dada por:

$$u(x, y, z) = U e^{i\phi} \quad (\text{I.13})$$

Si bien hemos usado una onda plana para exemplificar la deducción de la amplitud compleja, esta expresión es general ya que tanto la amplitud  $U$  como la componente de fase espacial pueden variar y será aplicable para representar cualquier onda.

En notación compleja la intensidad se calcula simplemente tomando el cuadrado del módulo de la amplitud compleja.

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |u|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c u u^* = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c U^2 \quad (\text{I.14})$$

donde el símbolo \* significa complejo conjugado. En muchos casos prácticos donde no interesa el valor absoluto de la intensidad el factor  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 c$  se puede despreciar. Esto significa que la intensidad es simplemente el cuadrado de la amplitud.

En el campo de la óptica, estamos interesados en conocer la distribución de amplitud y de fase de la onda en algún plano determinado en el espacio. A continuación, veamos algunos ejemplos de cálculo.

Por ejemplo, consideremos una onda plana que se propaga como se muestra en la Figura I.6 a) y en el esquema simplificado de la Figura I.6 b). Se trata de una onda plana que incide sobre un plano paralelo al plano  $x, y$  (azul en la figura) y a una distancia  $z$  de éste y que se propaga en la dirección del vector unitario  $\vec{n}$ . El vector unitario yace en el plano  $x, z$ , llamado plano de incidencia, formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$ . Como se puede verificar del gráfico, las componentes de los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{n}$  son:

$$\vec{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

Reemplazando en la ecuación I.13, la amplitud compleja resulta:

$$u(x, y, z) = U e^{ik\vec{n} \cdot \vec{r} + \delta} = U e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta) + \delta} \quad (\text{I.15})$$

La expresión de la ecuación I.14 permite escribir la distribución espacial en cualquier plano paralelo al plano  $x, y$ , en particular en este plano, o sea para  $z = 0$ , y la amplitud compleja resulta:

$$u(x, y, 0) = U e^{ik(x \sin \theta)}$$

donde hemos puesto  $\delta = 0$ .

Otra aplicación interesante es encontrar la distribución de amplitud compleja en un plano paralelo al plano donde se ubica una fuente puntual que emite una onda esférica. En una onda esférica tanto la amplitud como la fase varían espacialmente y es fácil darse cuenta que la amplitud compleja vendrá dada por una expresión tal como:

$$u(x, y, z) = \frac{U}{r} e^{ikr} \quad (\text{I.16})$$

donde  $r$ , es la distancia radial desde la fuente puntual. De la expresión I.15 se deduce que la fase es constante a una distancia  $r$ , o sea, los frentes de onda son superficies esféricas centradas en la fuente. La  $r$  en el denominador de la ecuación I.15 expresa el hecho de que la amplitud disminuye con la inversa de la distancia a la fuente. En la Figura I.7 se muestra una representación esquemática de una fuente puntual, es un corte de los planos de fase constante. Se debe interpretar que, si observamos lejos de la fuente los frentes de onda, en una región limitada del espacio se asemejan a planos. Esta es la razón por la que generalmente consideramos que los rayos de luz de fuentes distantes como las estrellas sean rayos paralelos.

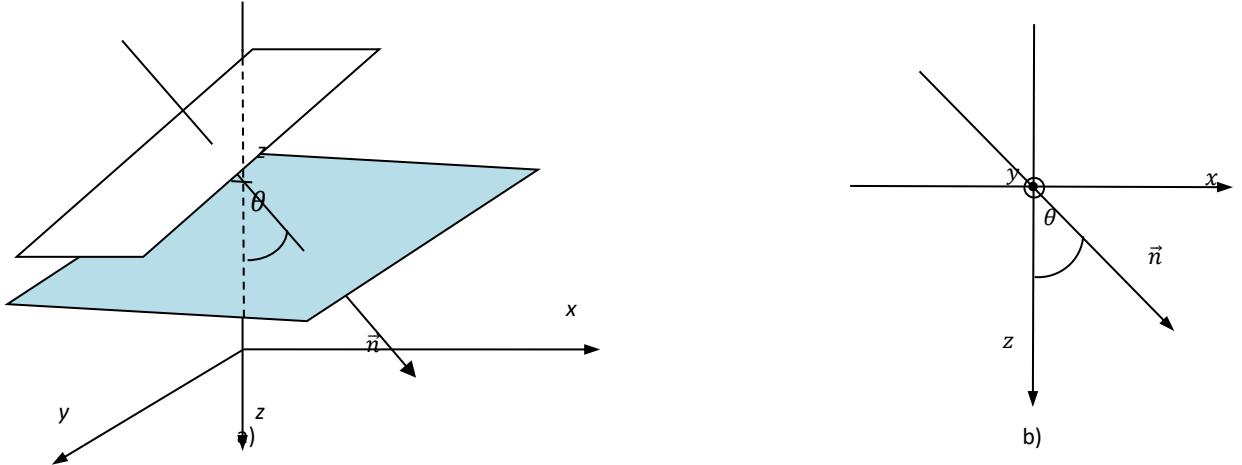


Figura I.6: a) Onda plana en incidencia oblicua. b) Esquema simplificado.



Figura I.7: Esquema de frentes de onda de una onda puntual.

Ahora volvamos a nuestro objetivo de encontrar la distribución de amplitud compleja en un plano a una distancia  $r$  de una fuente puntual. Para ello, consideraremos una fuente puntual ubicada en un punto del plano- $x_0, y_0$  como se muestra en la Figura I.8. La amplitud del campo en un plano paralelo al plano- $x_0, y_0$  ubicado a una distancia  $z$  de éste vendrá dada por la ecuación I.15 con:

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (\text{I.17})$$

donde  $x, y$  son las coordenadas del plano iluminado.

La expresión I.17 es algo complicada por lo que deberemos hacer algunas aproximaciones. La primera es que reemplazaremos  $r$  por  $z$  en el denominador de la ecuación I.16. lamentablemente no podemos hacer esta misma aproximación en la fase, porque en el exponente  $r$  está multiplicado por  $k$  que es un número grande y por consiguiente el error resultante sería muy grande. Una forma conveniente para hacer aproximaciones en la fase, es aplicar el desarrollo binomial de la raíz reescribiendo a  $r$  de la siguiente forma:

$$r = z \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2}{z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{z^2}}$$

Asumiendo que  $z \gg (x - x_0)^2$  y que  $(y - y_0)^2$ , y approximando sólo a los dos primeros términos del desarrollo la aproximación resulta:

$$r \cong z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - x_0}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - y_0}{z} \right)^2 \right] \quad (\text{I.18})$$

Luego la amplitud compleja en el plano- $x, y$  debida a una fuente puntual colocada en el punto  $(x_0, y_0)$  del plano- $x_0, y_0$  vendrá dada por:

$$u(x, y, z) = \frac{U}{z} e^{ikz} e^{i\left(\frac{kz}{2}\right)[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} \quad (I.19)$$

Este resultado se conoce como la aproximación de Fresnel.

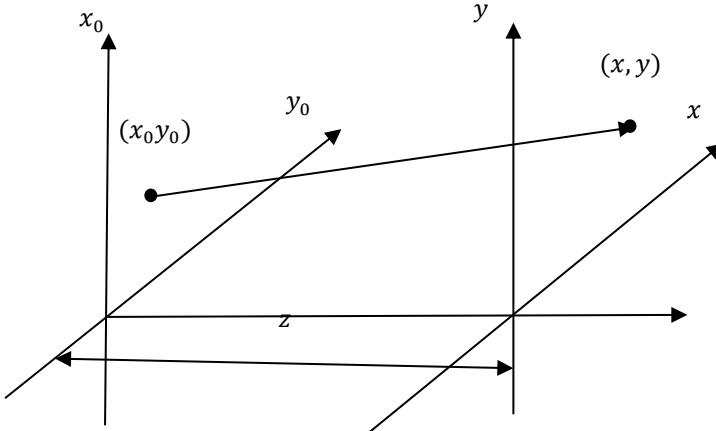


Figura I.8: Esquema cálculo distribución de amplitud en plano paralelo a plano que contiene una fuente puntual.

#### I.4 OBTENCIÓN EXPERIMENTAL DE UNA ONDA PLANA

En las aplicaciones que se desarrollaran en este curso, generalmente es conveniente iluminar con onda plana, ya que como se verá más adelante, los cálculos, se simplifican notablemente. La fuente de luz es un láser y aunque se puede considerar que en las distancias típicas de los experimentos emite una onda plana, su sección transversal es muy pequeña (del orden un par de milímetros) y es necesario agrandarla de acuerdo al tamaño de los objetos que se desean iluminar con ella.

A continuación, se describe una forma de agrandar la sección transversal utilizando un arreglo experimental como el que se muestra en la Figura I.9.

Para incrementar la sección trasversal del láser, se lo hace pasar por una lente,  $L_1$ , de distancia focal muy corta  $f_1$ , generalmente un objetivo de microscopio. De esta manera ahora se tiene una onda esférica proveniente del punto focal de  $f_1$ . Luego se coloca una segunda lente,  $L_2$ , de gran diámetro y distancia focal larga  $f_2$ , de manera que el punto focal anterior de la lente  $L_2$  coincida con el punto focal posterior de la lente  $L_1$ . Esto es en configuración confocal. Finalmente, de esta segunda lente emerge un haz plano con el diámetro requerido.

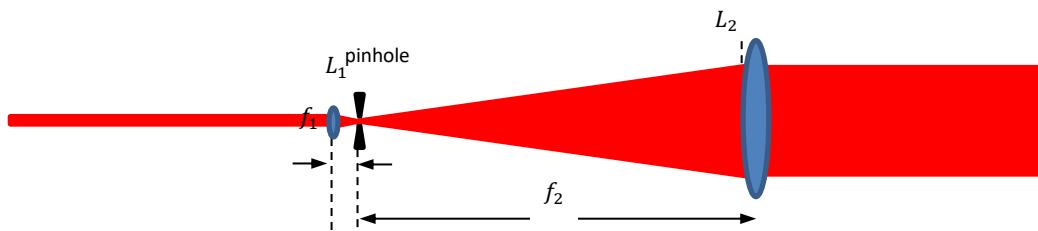


Figura I.9: Arreglo experimental para obtener una onda plana.

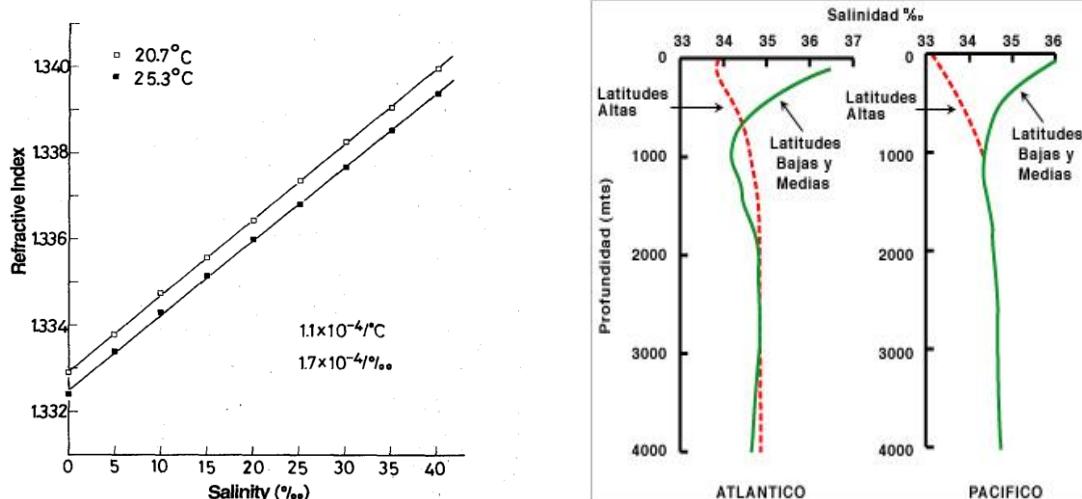
Generalmente se suele agregar un elemento óptico denominado pinhole, que consistente en un pequeño agujero, de diámetro entre 4 y 12  $\mu\text{m}$ , dependiendo de la distancia focal de  $f_1$ , en la posición del punto focal posterior de la lente  $L_1$ . Este elemento bloquea los rayos de luz que no caen en el punto focal y que provienen de polvo o rayaduras en los elementos ópticos por los que atraviesa el haz o se refleja antes de llegar a  $L_1$ . Retomaremos esta idea en el capítulo IV cuando tratemos el tema de filtrado óptico.

#### I.5 EJERCITACIÓN

1- En la Figura de la izquierda, se muestra la relación entre Salinidad e Índice de refracción a una longitud de onda de 589.3 nm, para soluciones de cloruro de sodio en agua destilada a distintas concentraciones, desde 0 a 40 por mil a intervalos de 5 por mil a dos temperaturas diferentes (Figura extraída de la referencia [I.8]). Se advierte una relación lineal entre ambas variables en los rangos estudiados.

La figura de la derecha, en tanto, muestra la variación de la salinidad con la profundidad para los océanos Atlántico y Pacífico. El promedio de salinidad en el océano es de 34.7‰ y el rango de variación va aproximadamente de 33‰ a 37‰. Las variaciones generales de la salinidad están zonificadas del Ecuador a los polos (Figura extraída de Curso Geografía del Mar Pontificia Universidad Católica de Chile).

A partir de los gráficos provistos, estime la longitud de camino óptico que recorre una onda de 589.3 nm en el océano Pacífico a latitudes bajas y medias, entre la superficie y 250 m de profundidad. A los fines prácticos, suponga una temperatura constante del agua para ese rango de profundidades, e igual a 20.7°C. Realice las aproximaciones que considere necesarias.



2 Una onda plana armónica tiene un campo eléctrico dado por:

$$E(x, t) = E_0 \exp \left[ 10^{15} \pi \left( t - \frac{x}{0.65c} \right) \right]$$

mientras viaja en el interior de una pieza de vidrio. Encontrar:

- i) la frecuencia de la luz
- ii) La velocidad de propagación
- iii) la longitud de onda. ¿Se encuentra ésta dentro del espectro visible?
- iv) el índice de refracción del vidrio
- v) La longitud de onda con la cual esta onda se propaga en vacío

3- ¿Cuántas ondas de luz amarilla ( $\lambda = 550 \text{ nm}$ ) llenarán el espacio igual al espesor de una hoja de papel (0.1 mm)? ¿Cuánto se extenderán el mismo número de microondas ( $f = 1010 \text{ Hz}$  y  $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )?

4- Sea  $E(\vec{r}, t) = U e^{i(\phi(\vec{r}) - \omega t)}$  una solución de la ecuación de onda.

Muestre que la amplitud compleja,  $u(\vec{r}) = U e^{i\phi(\vec{r})}$  satisface la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)u(\vec{r}) = 0$$

5- Escriba una ecuación que describa una onda plana en tres dimensiones de longitud de onda  $\lambda$  y velocidad  $v$  propagándose en las siguientes direcciones:

- i) eje  $+z$
  - ii) a lo largo de la línea  $x = y, z = 0$
  - iii) perpendicular al plano  $x + y + z = \text{constante}$
- 6- Muestre que la longitud de camino óptico, definido como la suma de los productos de las distancias  $x_i$  que recorre la luz en medios de índice de refracción respectivos  $n_i$  con  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $\text{l.c.o} = \sum_i n_i x_i$ , es equivalente a la longitud del camino que recorrería la luz en el mismo tiempo si se propagara en el vacío.
- 7- La luz de una lámpara de sodio ( $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$ ) pasa a través de un recipiente de glicerina ( $n = 1.47$ ) de  $20\text{m}$  de largo en un tiempo  $t_1$ . Le toma un tiempo  $t_2$  atravesar el mismo recipiente cuando se lo llena con disulfuro de carbono ( $n = 1.63$ ), determine la diferencia  $t_1 - t_2$ .
- 8- Suponga una onda plana que se propaga en dirección  $x$  desde un punto  $A$  hasta otro punto  $B$ . Si se introduce en su camino una placa de vidrio ( $n = 1.5$ ) de espesor  $l = 1\text{mm}$
- a) ¿Cuál es la longitud de la onda dentro de la placa de vidrio?
  - b) ¿Cuál es la longitud de camino óptico que recorre la onda hasta B?

## REFERENCIAS

- [I.1] María Luisa Calvo Padilla. Óptica Avanzada. Ariel S. A. 1<sup>a</sup> Ed. 2002
- [I.2] Hecht Eugene. Optics. Addison Wesley Publishing Company, 4<sup>a</sup> Ed.
- [I.3] <https://smart-lighting.es/reconocimiento-al-importante-papel-de-las-mujeres-en-las-ciencias-de-la-optica/>
- [I.4] Kjell J. Gåsvik. Optical Metrology. John Wiley & Sons. Ltd. 3<sup>a</sup> Ed. 2002.
- [I.5] Millan M. S, Perez E. Óptica Geométrica. Ariel S. A. 1<sup>a</sup> Ed. 2002
- [I.6] Anders Bergkvist, Biospeckle-based study of the line profile of light scattered in strawberries, Master Thesis, Lund Reports on Atomic Physics, 1997.
- [I.7] Svanberg S. Atomic and molecular spectroscopy. Springer-Verlag 1992
- [I.8] Minato H. et al IEEE Transactions of Instrumentation and Measurement, Vol 38 No 2, pp 608. 1989

## CAPITULO 1 – INTERFERENCIA E INTERFEROMETRÍA CLÁSICA

### 1.1 INTERFERENCIA

La superposición de do o más ondas en el espacio se denomina interferencia. Si cada onda individual representada por  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  es solución de la ecuación de onda (ec. I.4), entonces la superposición:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_1^N \vec{E}_i(\vec{r}, t); \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (1.1)$$

es también solución. Esto se debe a que la ecuación de ondas es una ecuación diferencial lineal.

A continuación, vamos a considerar la interferencia de dos ondas monocromáticas de igual frecuencia y longitud de onda. Las ondas deben tener el mismo estado de polarización de tal manera que pueda utilizarse el formalismo escalar, mencionado anteriormente. Sean:

$$u_1(x, y, z) = U_1 e^{i\phi_1} \quad u_2(x, y, z) = U_2 e^{i\phi_2} \quad (1.2)$$

las amplitudes complejas de las ondas que interfieren. La amplitud compleja resultante es la suma de las amplitudes individuales:

$$u = u_1 + u_2 \quad (1.3)$$

De acuerdo con la ecuación (I.14) la intensidad resultante será:

$$I(x, y, z) = |u_1 + u_2|^2 = (u_1 + u_2)(u_1 + u_2)^* = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi \quad (1.4)$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  son las intensidades de las ondas individuales y  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$  es la diferencia de fase de las ondas que se superponen.

Por lo tanto, decimos que la intensidad resultante es la suma de las intensidades individuales más un término que depende de la diferencia de fase entre ambas ondas que se denomina *término de interferencia* dado por el último término de la expresión final de la ecuación (1.4). De la ecuación de interferencia, se ve que la intensidad varía cosinusoidalmente con la diferencia de fase entre las ondas. Como se puede observar en la Figura 1.1. Estas alternancias entre brillante y oscuro de la intensidad reciben el nombre de FRANJAS DE INTERFERENCIA.

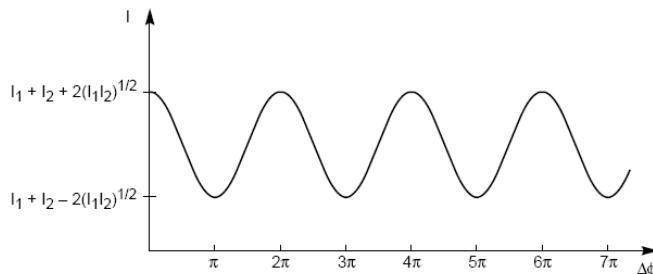


Figura 1.1: Distribución de intensidad Ec. 1.4.

Analizando el término de interferencia podemos concluir que la intensidad o irradiancia será máxima en todos aquellos puntos del espacio donde:

$$\Delta\phi = 2n\pi, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (1.5)$$

Esto denomina interferencia constructiva. Por otro lado, la intensidad alcanza su mínimo en los puntos donde:

$$\Delta\phi = (2n + 1)\pi, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

Y se denomina interferencia destructiva.

La irradiancia en cualquier plano puede ser registrada simplemente exponiendo a la luz, una lámina de film fotográfico. También puede ser visualizada en una pantalla difusa (vidrio despolido).

En ambos casos se observa un patrón consistente en franjas alternadamente brillantes y oscuras. Este patrón de franjas permite la medida de la distribución espacial de la diferencia de fase de las dos ondas. La teoría escalar aplicada puede también ser usada para ondas con diferentes direcciones de polarización, si se consideran las componentes del campo eléctrico.

Un ejemplo de interferencia importante es el que se obtiene de dos ondas esféricas que emanan de las fuentes  $S_1$  y  $S_2$ . Suponiendo que  $S_1$  y  $S_2$  emiten en fase  $\Delta\phi = cte$ , la irradiancia en cualquier punto P del espacio vendrá dado por la ecuación

$$I(x, y, z) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi \quad (1.7)$$

Con la diferencia de fase

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = k(r_1 - r_2) \quad (1.8)$$

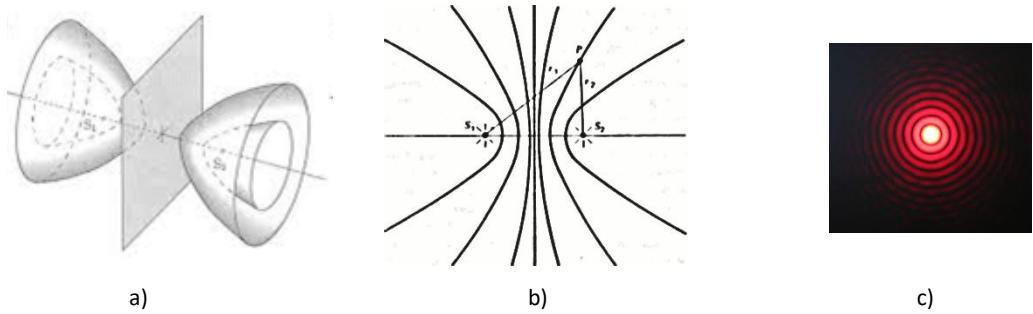


Figura 1.2: Esquema interferencia de ondas esféricas.

El lugar de los puntos que forman una superficie de máxima irradiancia se determinan haciendo  $\Delta\phi = 2n\pi$  y se obtiene:

$$r_1 - r_2 = \frac{2n\pi}{k} = N\lambda \quad (1.9)$$

donde se cambió  $n$  por  $N$  que se denomina orden de interferencia. Esta es la ecuación de una familia de hiperboloides de revolución alrededor del eje que une las fuentes, Figura 1.2 a). Las franjas de irradiación máxima o brillantes se corresponderán con  $N$  entero 1, 2, 3...en la ecuación 1.9 y las de irradiación mínima o franjas oscuras con  $N = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

El patrón de franjas de interferencia que observaríamos, dependerá de la posición de la pantalla que utilicemos para recoger la distribución de intensidades. Por ejemplo, si observamos la interferencia en el plano indicado en Figura 1.2 a) la iluminación será uniforme ya que para cualquier punto sobre este plano la diferencia  $r_1 - r_2 = 0$  y la interferencia es un máximo. Si observáramos la interferencia en un plano que contiene a las fuentes, el patrón de interferencia sería como se esquematiza en la Figura 1.2 b). Por el contrario, si recogiéramos la distribución de interferencia en una pantalla perpendicular a la línea que une las fuentes el patrón de interferencia consistiría de circunferencias equidistantes.

Dos ondas de luz capaces de interferir una con otras, se dice que son coherentes. Debido a los requerimientos de coherencia, como se verá más adelante, la mayoría de los experimentos de interferencia requieren el uso de dos imágenes de la misma fuente puntual física. Estas imágenes son producidas por un instrumento denominado interferómetro.

## 1.2 INTERFERÓMETROS

El fenómeno de interferencia se observa con interferómetros. Para que dos ondas interfieran es necesario que provengan de la misma fuente. La forma física para obtener dos ondas provenientes de la misma fuente es a través de lo que se conoce como interferómetro. En la figura 1.3 se muestra un esquema de tipo “caja negra” de un interferómetro como los que utilizaremos en los experimentos de metroología óptica que abordaremos en el curso [1.1]. La luz proveniente de una fuente debe ser dividida en dos partes, para ello se utiliza algún elemento o mecanismo dependiendo del tipo de interferómetro, divisor de haz en la figura, a partir del cual cada una de las nuevas ondas viaja por distintos caminos y para producir interferencia se requiere volver a recombinarlas. La introducción de una diferencia de fase en uno de los brazos del interferómetro es justamente lo que se desea medir con la técnica de interferometría. Finalmente, se requiere de un sensor de luz para observar o registrar la interferencia. Cabe aclarar que el concepto de “caja negra” se refiere a que el elemento o mecanismo de división y recombinación dependerá del experimento y/o el elemento óptico que se utilice en el armado del dispositivo óptico. Esto por supuesto estará fuertemente condicionado por lo que se dese medir.

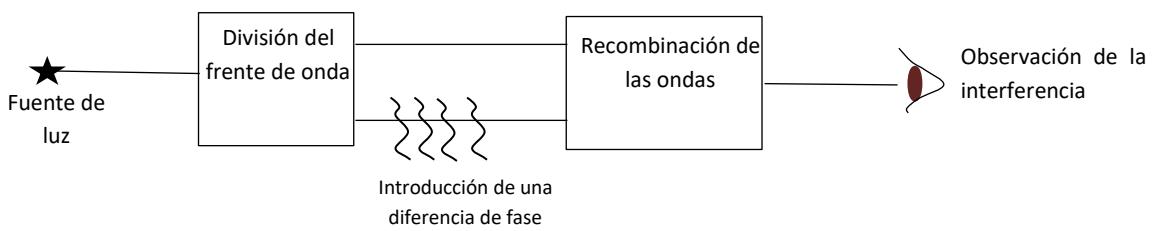


Figura 1.3: Esquema general de interferómetro.

De acuerdo al mecanismo o dispositivo que se utilice para dividir el frente de onda los interferómetros se clasifican en dos tipos básicos:

- de división del frente de onda y
- de división de amplitud.

#### 1.2.1 EXPERIMENTO DE YOUNG

El ejemplo clásico de un interferómetro de división del frente de onda es el conocido Interferómetro de Young o simplemente Experimento de Young [1.2]. Un esquema del mismo se muestra en las Figuras 1.4 a) y b).

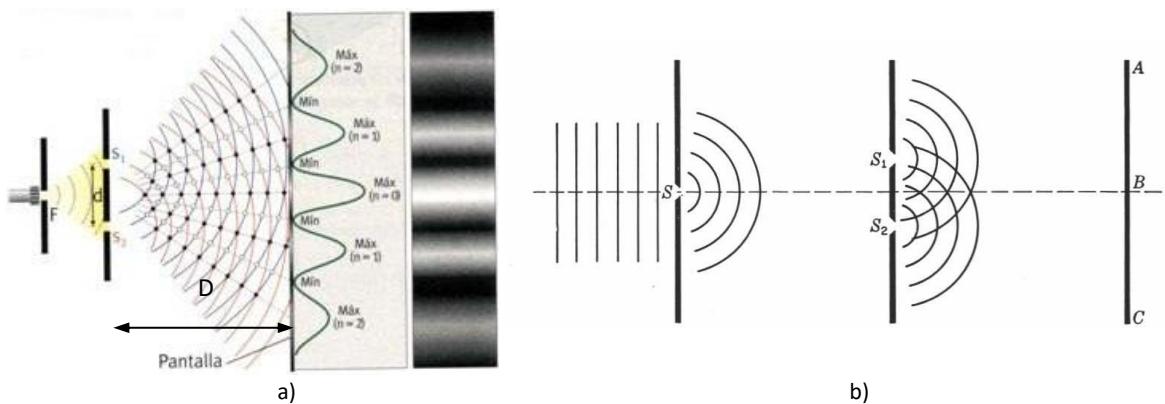


Figura 1.4: Esquema de arreglos ópticos para el Experimento de Young o de la doble rendija.

Si realizamos una comparación con el esquema de la figura 1.3 vemos que en la Figura 1.4 a) la fuente de luz F, es una lámpara y una pantalla con un pequeño orificio (“pinhole”). La combinación lámpara-pantalla permite asegurar que la fuente se asemeje lo más posible a una fuente puntual. Generalmente se usa esta combinación cuando la fuente que se utiliza es extensa más adelante justificaremos con más detalle esta necesidad. En el esquema b) de esta misma figura, una pantalla con un pequeño orificio se ilumina con una onda plana y similarmente al caso a), se obtiene de esta manera la fuente puntual S. Dos maneras de generar una fuente puntual muy usadas. El caso b) es aplicable a usar un láser como fuente de luz, ya que como dijimos, bajo ciertas condiciones podemos suponer que emite un haz de luz plano.

Continuando con la comparación, la división del frente de onda se produce en la pantalla con dos orificios muy pequeños y separados una distancia  $d$ . Como se muestra en el esquema, un frente de onda que llega a la pantalla se divide pasando una porción por cada orificio y el resto es bloqueado. Por el principio de Huygens, las dos porciones que pasan se suponen fuentes puntuales (ondas secundarias de Huygens), y a partir de allí las ondas se recombinan naturalmente en el espacio, y recogemos el patrón de interferencia en una pantalla colocada a una distancia  $D$  de las fuentes. A la derecha de la pantalla, en el esquema a) se muestran, una fotografía del patrón de interferencia y el correspondiente perfil de intensidades de la distribución de luz recogida en la misma. Si se reemplazan los orificios por ranuras en lugar de frentes de ondas esféricas, se tendrán frentes de onda cilíndricos, igualmente representados en dos dimensiones, en ambos esquemas. En lo que sigue nos referiremos a ranuras para ser consistentes con la obra de Young.

A continuación, nos referiremos al esquema b) de la Figura 1.4, pero las deducciones son igualmente válidas para cualquier configuración de un experimento de Young. Si, las circunferencias representan crestas de ondas, la intersección de dos de ellas en algún punto arbitrario del espacio, representa la superposición de dos ondas con la misma fase o con diferencia de fase igual a un múltiplo de  $2\pi$  radianes (ec. 1.5). Esto es, interferencia constructiva. Una inspección detallada de la distribución de intensidades en la pantalla nos revela que, entre las franjas brillantes a mitad de camino, se tienen franjas oscuras. Esto significa que, en los puntos del espacio correspondiente a estas franjas, las ondas interfieren destructivamente.

Veamos ahora cómo cuantificar la distribución de intensidades de luz recogida en la pantalla. Para ello consideremos ahora el esquema de la figura 1.5 y procuremos encontrar una ecuación para la intensidad en cualquier punto  $P$  de coordenadas  $(x, y, D)$  sobre la pantalla.

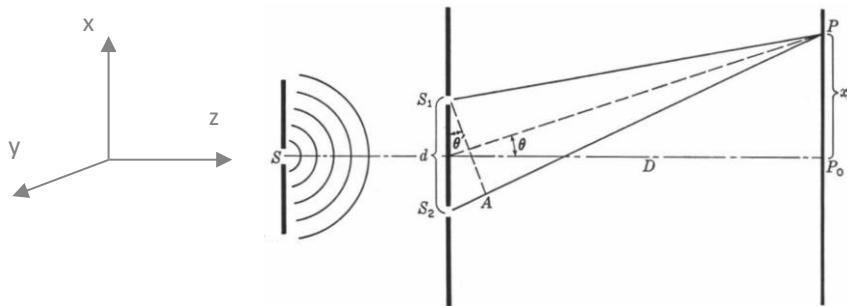


Figura 1.5: Diferencia de camino óptico el Experimento de Young.

Al punto  $P$ , llegan dos ondas provenientes de casa una de las fuentes  $S_1$  y  $S_2$  habiendo recorrido diferentes distancias  $\overline{S_1P}$  y  $\overline{S_2P}$ . Por lo tanto, recordando lo visto en el capítulo introductorio (ec. 1.8), las ondas llegan e interfieren con una diferencia de fase que viene dada por:

$$\Delta\phi(x, y, D) = k d. c. o = \frac{2\pi}{\lambda}(\overline{S_2P} - \overline{S_1P}) \quad (1.9)$$

donde, la  $d. c. o = d. c. g$  ya que estamos suponiendo propagación en vacío, o sea  $n = 1$ . También, asumiremos que las ondas parten de  $S_1$  y  $S_2$  con la misma fase ya que se supone que están equidistantes de  $S$  y que tienen la misma intensidad  $I_0$  pues teóricamente las ranuras tienen el mismo ancho y están muy juntas. En estas condiciones, la intensidad en el punto  $P$  según la ec. 1.4 será:

$$I(x, y, D) = 4I_0 \cos^2 \left[ \frac{\Delta\phi(x, y, D)}{2} \right] \quad (1.10)$$

esta expresión se obtiene de reemplazar  $I_0$  en la ec. 1.7 y utilizar la relación trigonométrica,  $\cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ , adelante compruébelo por favor.

En la Figura 1.6 se muestra el gráfico de la ec. 1.10. Como se puede observar, la intensidad máxima del patrón de interferencia es  $4I_0$ , cuatro veces la intensidad de cada una de las fuentes!!!! y la mínima es cero. Esto no significa, por supuesto, que estemos generando más energía que la que nos proveen las fuentes, simplemente la energía original se redistribuye en el espacio.

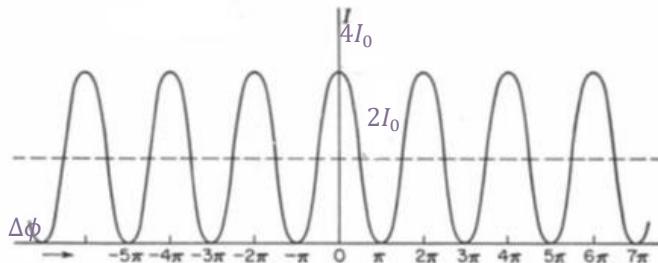


Figura 1.6: Perfil de intensidades patrón de interferencia Experimento de Young.

Una forma de evaluar la calidad de un patrón de interferencia, como veremos más adelante es lo que se conoce como contraste. Sin ahondar en detalle diremos que Michelson definió lo que se conoce como visibilidad para dar una medida de la calidad del patrón de interferencia de la siguiente forma:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (1.11)$$

donde,  $0 \leq V \leq 1$ . Luego, para el caso de un interferómetro de Young, si las rendijas son “idénticas”, la visibilidad será 1, como puede calcularse de la ecuación 1.11. Sin embargo, esta condición depende de la tecnología para la fabricación de las pantallas con las rendijas y no es fácil de lograr. Generalmente, la visibilidad de los patrones de interferencia experimentales no es máxima pero como veremos en el laboratorio es posible utilizar este interferómetro en diferentes mediciones, tales como: longitud de onda de una fuente, ancho de las rendijas, separación de las mismas, etc. Dejamos esto para la sección Interferometría.

Apenas Young, mostrara a la comunidad científica la interferencia en su experimento de la doble rendija, encontró una objeción respecto del origen del fenómeno. La misma, tuvo que ver con la duda de si el patrón de intensidades podría ser el resultado de “alguna modificación rara” que sufre la luz al pasar por las rendijas y no de una verdadera interferencia. O sea, la teoría ondulatoria volvía a ser cuestionada. Sin embargo, pocos años después Fresnel, al realizar muchos experimentos de interferencia con dos haces de luz, “echó luz” sobre la controversia demostrando que sin lugar a dudas se trata de un fenómeno, aunque como veremos en el capítulo 3, también se acopla al mismo el fenómeno de difracción. De allí surgieron otras configuraciones de interferómetros de división del frente de onda, en particular el conocido como el biprisma de Fresnel, cuyo esquema se muestra en la Figura 1.7 (izquierda). En esta figura también se incluyen otras. Se recomienda analizarlos y tratar de identificar los elementos de acuerdo a la Figura 1.3. Notar que, en estos interferómetros, una o las dos fuentes cuyas ondas interfieren son virtuales. Los lectores más curiosos, pueden encontrar más detalles en la referencia [1.2].

#### 1.2.2 INTERFERÓMETRO DE MICHELSON

A continuación, centraremos nuestra atención en los interferómetros por división de amplitud. Así como el experimento de Young resulta ser el notable representante de los interferómetros por división del frente de onda, la “estrella” de los interferómetros por división de amplitud, es sin dudas el interferómetro de Michelson. La notoriedad de estos dos interferómetros radica en que con ellos es posible medir una propiedad importante de las ondas capaces de producir patrones de interferencia estables, *la coherencia*. Pero de esto nos ocuparemos con más detalle en la próxima sección.

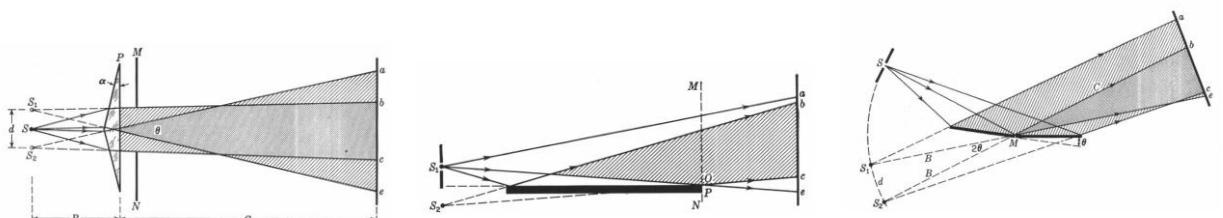


Figura 1.7: Interferómetros de división del frente de onda. Izquierda: Biprisma de Fresnel, centro: Espejo de Lloyd, derecha: espejos de Fresnel.

Una fotografía de un interferómetro de Michelson comercial, como los que usaremos en la práctica de laboratorio se muestra a la izquierda en la Figura 1.8. A la derecha de esta misma figura se muestra el esquema simplificado para entender su funcionamiento.

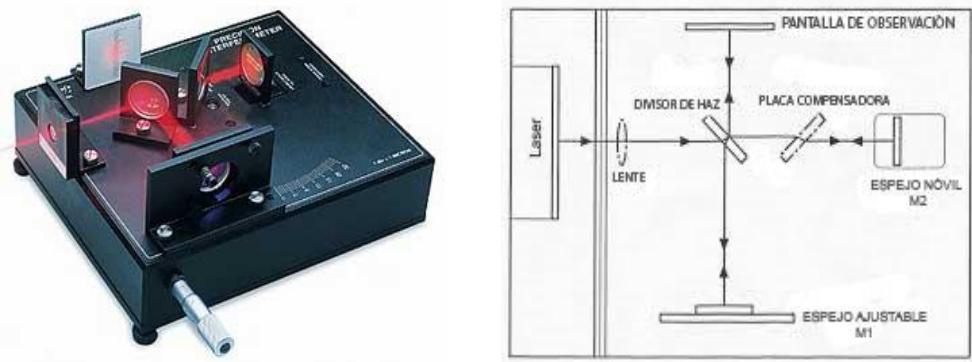
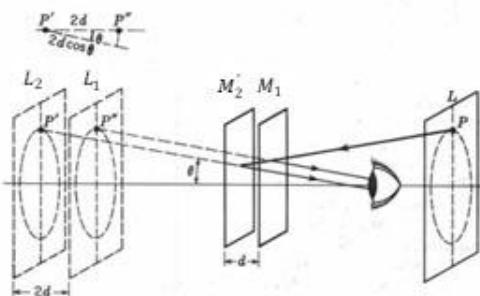


Figura 1.8: Interferómetro de Michelson.

Un haz de luz, en este caso láser, incide en el divisor de haz. Este tiene la propiedad de reflejar el 50% de la luz incidente y transmitir el otro 50%. El haz incidente es dividido de esta manera en dos haces, uno de los cuales es transmitido hacia el espejo móvil  $M_2$  y el otro reflejado hacia el espejo ajustable  $M_1$ . Ambos espejos reflejan la luz hacia el divisor de haz donde se recombinan nuevamente. La luz proveniente de  $M_1$  es transmitida a través del divisor de haz hacia la pantalla de observación mientras que, la proveniente del espejo móvil  $M_2$ , es reflejada hacia ella. Entre el divisor de haz y el espejo  $M_2$ , se coloca una placa compensadora. Esta placa, construida con el mismo material que el divisor de haz, tiene la función de compensar las diferencias de camino óptico adicionales, que sufre el haz que se refleja en  $M_1$  al atravesar el divisor de haz. Como los haces provienen de la misma fuente (Láser), sus fases están correlacionadas. Al insertar la lente entre el láser y el divisor de haz, el haz se expande, se tiene ahora una fuente extensa que denotaremos por  $L$  y en la pantalla de observación se observará un patrón de franjas brillantes y oscuras. Como los dos haces de luz que interfieren fueron obtenidos del mismo haz, inicialmente estarán en fase y sus fases relativas en cualquier punto de la pantalla de observación, dependerá de la diferencia de los caminos ópticos recorridos por ellos antes de alcanzarla. La geometría de las franjas en el patrón de interferencia dependerá de la configuración de los espejos. Si los espejos se ajustan de tal manera que son perpendiculares entre sí, el patrón de franjas resultante consistirá de un conjunto de franjas circulares brillantes y oscuras concéntricas. Este tipo de franjas, reciben el nombre de *franjas de igual inclinación*, por la razón que se explica a continuación.

Consideremos el esquema de la Figura 1.9. Mirando el espejo  $M_1$  a través del divisor de haz, se observarán el espejo  $M_1$  y paralela a éste, una imagen virtual  $M'_2$  del espejo  $M_2$ , formada por la reflexión en el divisor de haz. La separación  $d$ , entre ellos está directamente relacionada con la diferencia de las distancias a las que cada uno de los espejos se



ubica respecto del divisor de haz. A estas distancias las denominaremos brazos del interferómetro. Si recordamos las propiedades de los espejos, y analizamos las reflexiones en cada uno de ellos, vemos que cada uno de estos forman dos imágenes virtuales de la fuente, denotadas por  $L_1$  y  $L_2$ , como si la luz proviniera de una fuente colocada detrás del observador y estas imágenes estarán separadas una distancia  $2d$ .

Figura 1.9: Configuración de franjas de igual inclinación en el interferómetro de Michelson.

Cuando  $d$  es exactamente un número entero de  $\lambda/2$ ,  $2d = \lambda$  por lo tanto, todos los rayos que se reflejen normal a los espejos estarán en fase. Los rayos que se reflejen con cualquier otra inclinación, sin embargo, en general no lo estarán. Consideremos los rayos que llegan al ojo provenientes de los punto  $P'$  y  $P''$ , como se muestra arriba a la izquierda en la Figura 1.9, la *d. c. o* entre ellos será  $2dcos\theta$ . Es fácil darse cuenta que el ángulo  $\theta$  es necesariamente el mismo para los pares de rayos que cumplan esta condición y como  $M_1$  es paralelo a  $M'_2$ , los rayos mismos son paralelos. Luego, cuando el ojo se enfoca recibiendo rayos paralelos, estos se reforzarán produciendo máxima interferencia si se cumple que:

$$2dcos\theta = m\lambda \quad (1.12)$$

Puesto que para cada  $m$ ,  $\lambda$ , y  $d$  dados, el ángulo  $\theta$  es constante, las franjas brillantes o máximos de interferencia estarán sobre circunferencias concéntricas y perpendiculares a la línea horizontal trazada entre el ojo y los espejos. Esta es la razón por la que a este tipo de franjas se las denomina de franjas de igual inclinación. La distribución de intensidad de una franja brillante vendrá dada por la Ecuación 1.4 con  $I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}$ , siendo  $I_0$  la intensidad de la fuente y  $\Delta\phi = 4\pi dcose\theta/\lambda$ .

En contraste con el otro tipo de franjas que pueden obtenerse con un Michelson, las franjas de igual inclinación permanecen visibles para grandes diferencias de caminos ópticos, volveremos sobre esto cuando discutamos el tema de coherencia y su uso en interferometría.

Si los espejos del interferómetro no se colocaran perpendiculares entre sí, entonces el espejo  $M_1$  y la imagen virtual del espejo 2,  $M'_2$ , no serán paralelos. Las franjas de interferencia serán visibles con luz monocromática para diferencias de camino óptico de unos pocos milímetros. En este caso, el espacio entre  $M_1$  y  $M'_2$  forman lo que se conoce como cuña. Como se puede observar en la Figura 1.10, los dos rayos que llegan al ojo, proveniente del punto  $P$  de la fuente, no son paralelos y parecen provenir del punto  $P'$  cercano a los espejos.

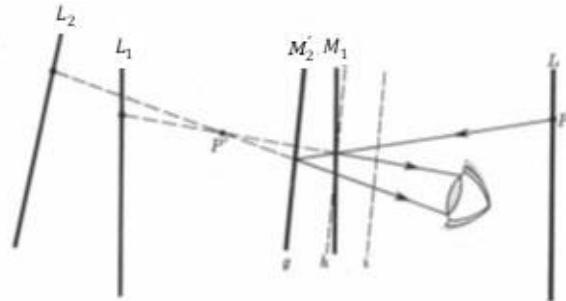
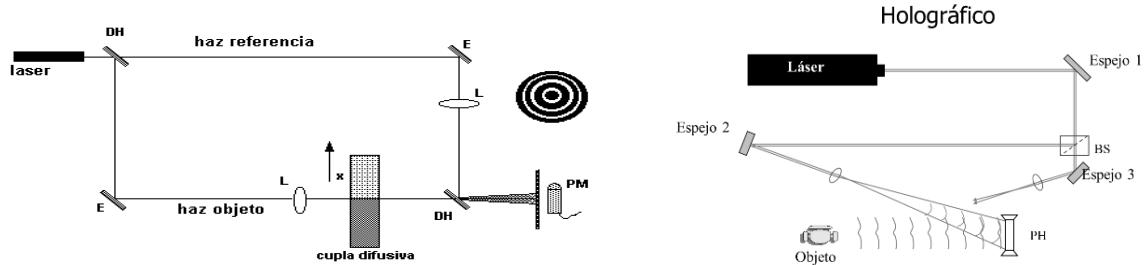


Figura 1.10: Configuración de franjas de igual espesor en el interferómetro de Michelson.

Para varias posiciones del punto  $P$  sobre la fuente extensa, la diferencia de camino óptico entre los rayos permanece constante aunque el punto  $P'$  cambia su posición relativa a los espejos. Si el ángulo entre  $M_1$  y  $M'_2$  no es muy pequeño, se podrán observar franjas de interferencia si el ojo se enfoca ya sea sobre  $M_1$  o muy cerca de él. Estas franjas se denominan franjas localizadas y son prácticamente rectas ya que las variaciones de camino óptico a lo largo del campo de visión, se deben principalmente a la diferencia de espesor de "la película de aire" entre los espejos. Las franjas en este caso no son estrictamente rectas, como en el caso de las cuñas, porque cuando la separación  $d$  entre los espejos es grande, existe una diferencia de camino óptico adicional debido al ángulo. En la Figura 1.10 también se indican los planos  $i$  y  $j$ , en línea de puntos, indicando diferentes posiciones del espejo  $M'_2$ . Las franjas serán perfectamente rectas cuando este espejo intersecta a  $M_1$ .

En el campo de la metrología óptica, los interferómetros basados en la división de amplitud son los más utilizados. A modo de ejemplo se muestran a continuación alguno de ellos.



Existen otros tipos de interferómetros y en la bibliografía se pueden encontrar tanto los comerciales como los que se arman para cada aplicación particular. En el caso de nuestro interferómetro de Michelson, que se muestra en la Figura 1.8, puede además ser configurado para operar como interferómetro Twyman-Green, muy utilizado para el testeo de calidad de componentes ópticos y en modo Fabry-Perot. Un esquema del funcionamiento de ambos se muestra en la Figura 1.12.

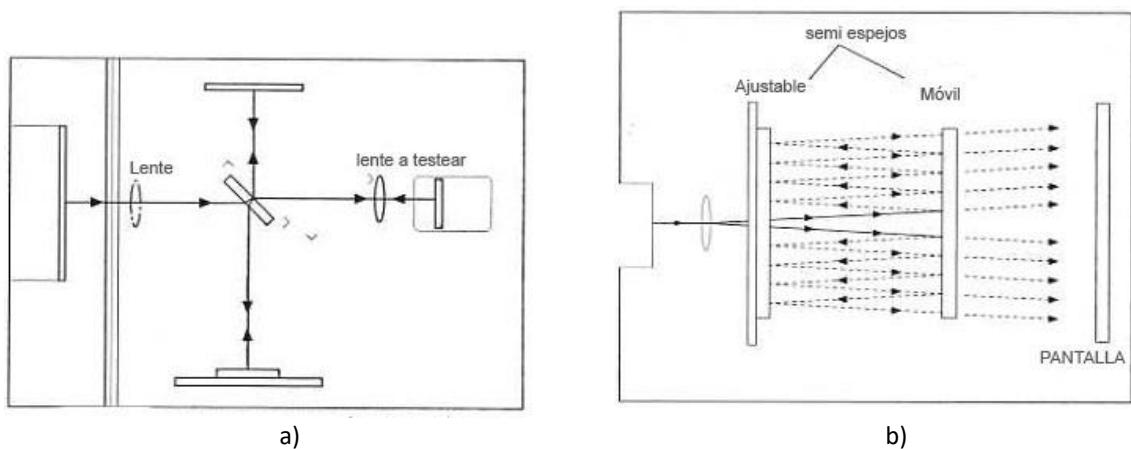


Figura 1.12. a) Interferómetro de Twyman-Green. b) Interferómetro Fabry-Perot.

### 1.3 COHERENCIA

En general la intensidad resultante de dos fuentes, por ejemplo, dos bombitas eléctricas es aditiva. En vez de franjas oscuras y brillantes se obtiene una distribución uniforme de brillo de acuerdo a la suma de las intensidades. Para obtener interferencia las ondas individuales deben correlacionarse de una manera especial. Esta propiedad de correlacionarse se denomina coherencia.

Podemos definir entonces, a la coherencia como la habilidad de la luz para interferir. La coherencia tiene dos aspectos importantes a considerar:

- Coherencia TEMPORAL: Describe la correlación de una onda consigo misma en diferentes instantes y la
- Coherencia ESPACIAL: Muestra la correlación mutua de diferentes partes de un mismo frente de onda.

La primera se mide utilizando un interferómetro de Michelson, mientras que para la segunda se utiliza un interferómetro de Young. Describiremos a continuación cada uno de estos aspectos de la coherencia empezando por la coherencia temporal.

#### 1.3.1 COHERENCIA TEMPORAL

La detección de la luz, esto es su intensidad, es un proceso de promediado temporal y espacial. En la obtención de la ecuación de interferencia 1.4, no hemos realizado promediado puesto que supusimos que la diferencia de fase permanece constante en el tiempo. Esto es, asumimos que las amplitudes complejas  $u_1$  y  $u_2$  tienen la misma y única frecuencia. Idealmente, una onda de una sola frecuencia implica longitud infinita, pero matemáticamente una onda de longitud infinita no existe. Aún una onda sinusoidal pura de longitud finita tendrá un ancho de frecuencia de acuerdo al teorema de Fourier, como repasaremos en el capítulo 2. Por lo tanto, fuentes que emitan luz de una sola frecuencia no existen. Ahondaremos sobre esto en el capítulo siguiente.

Una forma de representar a la luz emitida por fuentes reales, consiste en graficarla como un tren de ondas sinusoidales de longitud finita con diferencias de fase distribuidas aleatoriamente entre los trenes individuales. Supongamos que una fuente de luz de esta naturaleza, se utiliza en un experimento de interferencia. Por ejemplo, en un interferómetro de Michelson, Figura 1.13 I). Como vimos, la luz es dividida en el divisor de haz en dos ondas parciales de igual amplitud y luego son recombinadas para interferir luego de haber recorrido diferentes caminos.

En la Figura 1.13 II), se muestran a modo de ejemplo dos trenes de ondas sucesivos de las ondas parciales. Los mismos tienen la misma amplitud y longitud  $L_c$  con una diferencia de fase abrupta. El esquema superior a), muestra la situación en la que las ondas parciales recorren igual *l.c.o.* A pesar de que la fase de la onda original fluctúa aleatoriamente, la diferencia de fase entre las ondas parciales 1 y 2 permanece constante en el tiempo. La intensidad resultante por lo tanto vendrá dada por la Ecuación 1.4. En el círculo de la derecha en la Figura 1.13 se muestra, a modo de ejemplo como se vería la distribución de intensidad a la salida del interferómetro, diremos que la visibilidad o contraste es máxima.

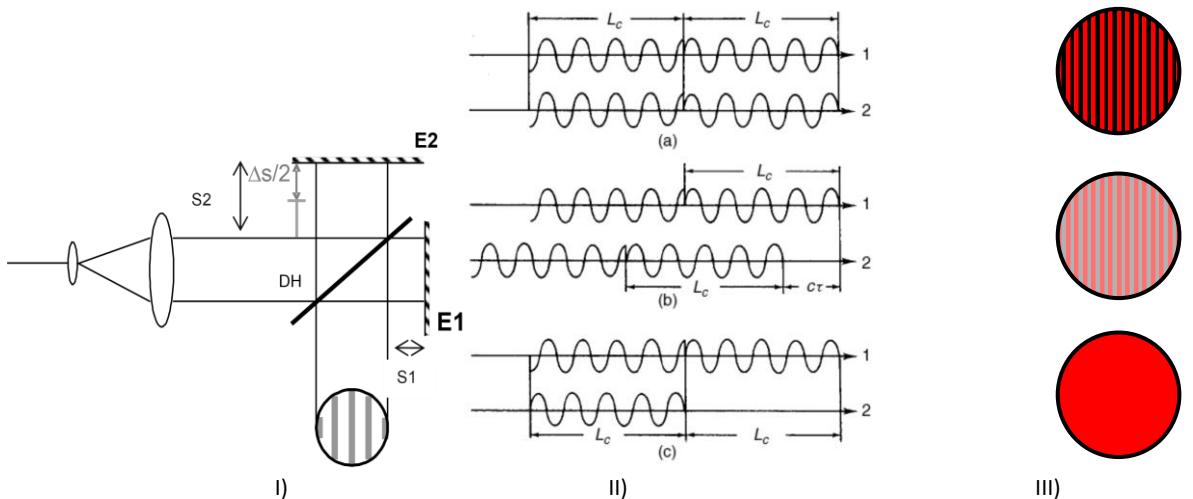


Figura 1.13: Esquema de las ondas parciales para describir la coherencia temporal

En el otro extremo, en el esquema c) de esta misma figura, se muestra la situación en la que, la onda parcial 2 ha recorrido una trayectoria de longitud de  $L_c$  más larga que la onda parcial 1. La cabeza de los trenes de ondas en la onda parcial 2 coincide entonces con la cola de los trenes de ondas correspondientes en la onda parcial 1. La intensidad instantánea resultante sigue siendo representada por la Ecuación 1.4 pero ahora, la diferencia de fase fluctúa aleatoriamente a medida que los trenes van pasando y como resultado  $\cos\Delta\phi$  varía aleatoriamente entre 1 y -1. Promediando sobre varios trenes de onda,  $\cos\Delta\phi$  se anula y la intensidad resultante será,  $I = I_1 + I_2$ . A la salida del interferómetro se observará un campo uniformemente iluminado.

La situación en el esquema c) de la Figura 1.13 II) muestra una situación intermedia donde la onda parcial 2 ha recorrido una longitud de trayectoria  $l$  más larga que la onda parcial 1, siendo  $0 < l < L_c$ . Promediando sobre muchos trenes de ondas, la diferencia de fase ahora varía aleatoriamente en un período de tiempo proporcional a  $\tau = l/c$  y permanece constante en un período de tiempo proporcional a  $\tau_c - \tau$  donde  $\tau_c = L_c/c$ , siendo  $\tau_c$  y  $L_c$  el tiempo de coherencia y la longitud de coherencia respectivamente de la fuente de luz utilizada. En el caso que nos ocupa, el resultado es que, todavía podemos observar un patrón de interferencia de acuerdo con la Ecuación

1.4, pero con un contraste reducido. Para tener en cuenta esta pérdida de contraste, la ecuación 1.4 se puede escribir como:

$$I(x, y, z) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(t)| \cos \Delta\phi \quad (1.13)$$

Para ver claramente que  $|\gamma(t)|$  está relacionada con el contraste del patrón de interferencia, retomemos la definición de contraste o visibilidad de la Ecuación 1.11. Puesto que  $\cos \Delta\phi$  varía entre 1 y -1 tendremos:

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(t)|$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(t)|$$

reemplazando en la Ecuación 1.11, resulta:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(t)|}{I_1 + I_2} \quad (1.14)$$

Para dos ondas de igual intensidad,

$$V = |\gamma(t)| \quad (1.15)$$

lo que muestra que en este caso  $\gamma(t)$  es exactamente igual a la visibilidad.  $\gamma(t)$  se denomina *grado de coherencia compleja* o *grado de coherencia temporal* y mide la habilidad de dos campos de ondas para interferir. A partir de las discusiones previas se tiene que:

$$|\gamma(t)| = 1 \quad (1.16 \text{ a})$$

$$|\gamma(t)| = 0 \quad (1.16 \text{ b})$$

$$0 \leq |\gamma(t)| \leq 1 \quad (1.16 \text{ c})$$

Donde, las Ecuaciones 1.16 a y b representan los casos límites de coherencia completa e incoherencia respectivamente y la desigualdad dada por la Ecuación 1.16 c representa coherencia parcial.

De especial interés es conocer el valor de  $\tau_c$ , es decir, el tiempo para el cual la diferencia de longitud de trayectoria entre las ondas parciales hace que  $|\gamma(t)| = 0$ . Por supuesto que esto dependerá de la naturaleza de la fuente de luz.

Sin entrar en detalle en el funcionamiento de un láser, lo que se supone es tema visto en la asignatura Física Moderna I, a continuación, trataremos de deducir la longitud de coherencia de un láser, ya que será el tipo de fuente que usaremos en las técnicas de Metrología Óptica.

Como se sabe, aunque la luz láser tiene una longitud de onda (o frecuencia) bien definida, tiene una cierta distribución de frecuencia, y si se realiza un análisis espectral de la luz, resulta que consta de una o más distintas frecuencias llamadas modos de resonador, separadas por una frecuencia diferencia igual a

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} \quad (1.17)$$

donde  $L$  es la distancia entre los espejos de la cavidad resonante del láser. Denominada longitud del resonador. A modo de ejemplo, en la Figura 1.14 se esquematiza, la distribución espectral de la luz de un láser de He-Ne multimodo.

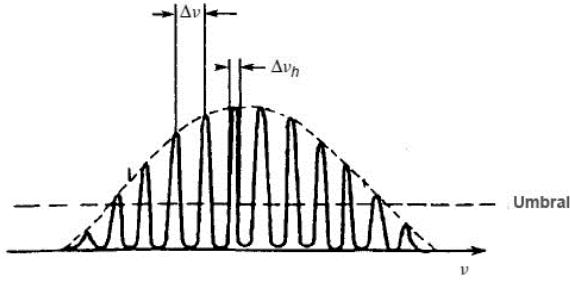


Figura 1.14: Distribución de frecuencias de un láser de He-Ne.  $\Delta\nu$ : espaciado de los modos resonantes y  $\Delta\nu_h$ : ancho de línea de los modos resonantes.

Ahora, supongamos que utilizamos un láser de dos modos resonantes como fuente de luz en un interferómetro de Michelson. Entonces tenemos dos campos de ondas  $u_1$  y  $u_2$  de frecuencias,

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} \quad (1.18 \text{ a})$$

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \nu_1 + \Delta\nu \quad (1.18 \text{ b})$$

$u_1$  interferirá consigo mismo y no con  $u_2$  y viceversa. La intensidad total a la salida del interferómetro será:

$$I(l) = 2I \left( 1 + \cos \frac{2\pi\nu_1 l}{c} \right) + 2I \left( 1 + \cos \frac{2\pi\nu_2 l}{c} \right) \quad (1.19)$$

donde,  $l$  es la diferencia de recorrido de las ondas y además hemos supuesto que  $u_1$  y  $u_2$  tienen la misma intensidad  $I$ . Operando y utilizando relaciones trigonométricas la ecuación 1.19 se puede reescribir como:

$$I(l) = 4I \left[ 1 + \cos \frac{2\pi l}{c} \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{2} \cos \frac{2\pi l}{c} \frac{(\nu_1 - \nu_2)}{2} \right] \quad (1.20)$$

En esta última expresión podemos ver que el término de interferencia, es el mismo que se obtendría con una fuente de luz de frecuencia  $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$  pero modulado por el factor:

$$\cos \frac{2\pi l}{c} \Delta\nu \quad (1.21)$$

En la Figura 1. 15 a) y b)., se representan a modo de ejemplo las ondas correspondientes a cada frecuencia y la intensidad total en función de  $l$ .

Retomando la ecuación 1.21 vemos que el contraste o la visibilidad del patrón de interferencia será máximo cada vez que:

$$\frac{\pi l}{c} \Delta\nu = n\pi \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

con lo cual, si reemplazamos la ec. 1.17, se obtiene que

$$l = 2nL$$

La visibilidad y por ende el grado de coherencia temporal es:

$$|\gamma(\tau)| = \left| \cos \frac{\pi \Delta\nu}{2c} l \right| = \left| \cos \frac{\pi}{2L} l \right| \quad (1.22)$$

El valor de  $l$  para el cual, la función visibilidad tiene su primer mínimo, se denomina longitud de coherencia, como se ilustra en la Figura 1. 15 c).

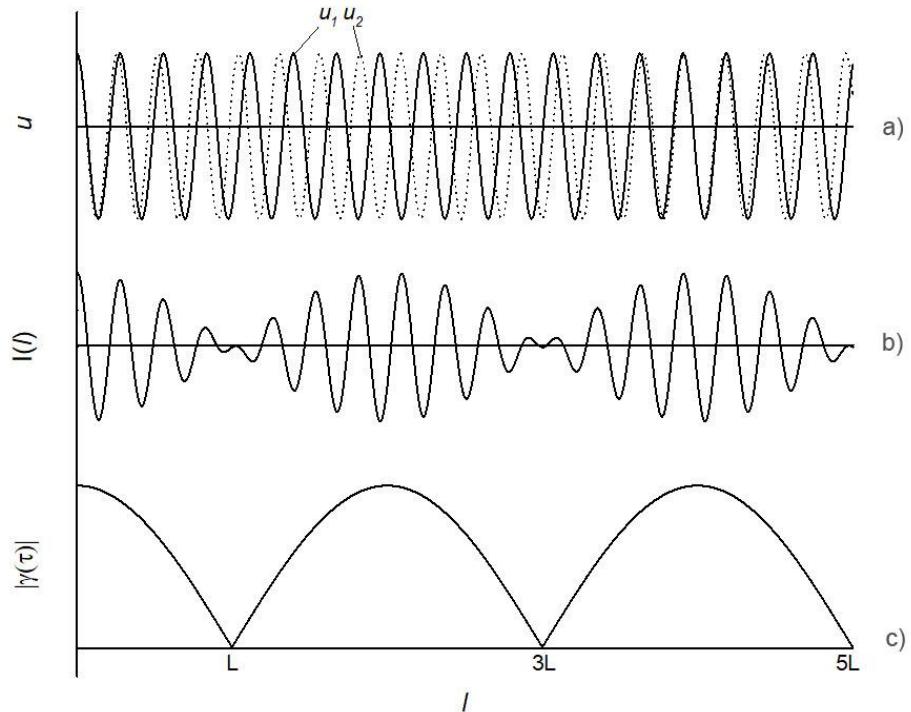


Figura 1.15: a) Amplitudes complejas  $u_1$  y  $u_2$ . b) Distribución de intensidad resultante. c) Grado de coherencia temporal (función de visibilidad) resultante para dos modos resonantes de un láser.

Si se hubieran tenido en cuenta más de dos modos de resonancia, el resultado habría sido esencialmente el mismo; es decir, las mismas ubicaciones de los mínimos, pero con una función de visibilidad que varía de forma más pronunciada. De esto concluimos que cuando se usa un láser en interferometría, la diferencia de  $l.c.o$  debe ser casi cero o un número entero del doble de la longitud del resonador.

Conocida la longitud de coherencia podemos calcular el tiempo de coherencia como  $\tau_c = L_c/c$  y para nuestro láser bimodal, a partir de la ecuación 1.17 resulta ser:

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (1.23)$$

Donde,  $\Delta\nu$  es la diferencia entre las dos frecuencias componentes. Esta relación es aplicable a cualquier tipo de fuente con distribución de frecuencias de ancho  $\Delta\nu$ . De la ecuación 1.23, es fácil ver que fuentes reales de ancho de banda en frecuencias finito, emiten trenes de onda de longitud finita. Esto se puede verificar, considerando la relación  $c = \lambda\nu$ , y expresando  $\Delta\nu$  en términos de longitudes de onda. Operando correctamente se obtendrá,

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\lambda_c}{\lambda^2} \quad (1.24)$$

donde, hemos puesto  $\lambda$  como la longitud de onda promedio del intervalo.

Como vimos en el capítulo introductorio, el espectro de la luz visible tiene un ancho espectral aproximadamente de  $\Delta\nu = 3 \times 10^{14} \text{ Hz}$  por lo que el tiempo de coherencia para una fuente de luz blanca, es alrededor de  $3 \times 10^{-15} \text{ s}$  lo que se corresponde con una longitud de coherencia de alrededor de  $1 \mu\text{m}$ . Esta es la razón por lo que los experimentos de interferencia con luz blanca son difíciles de llevar a cabo y se pueden observar sólo unas dos o tres franjas de interferencia. Este obstáculo se puede saltar si se utilizan filtros de colores, se mejora la interferencia a costa de una perdida de intensidad. Las lámparas de descarga comunes, tienen un ancho espectral correspondiente a una

longitud de coherencia de aproximadamente  $1\mu\text{m}$  y las lámparas de isotopos de baja presión tienen longitudes de coherencia de varios milímetros. Los láseres tienen longitudes de coherencia que van desde unos pocos milímetros como un láser de diodo multimodo, a cientos de metros como es el caso de un láser monomodo de Nd:YAG, estabilizado. Para el caso de los láseres de He-Ne como los que trabajamos en el laboratorio, la longitud de coherencia es del orden de los centímetros.

### 1.3.2 COHERENCIA ESPACIAL

En resumen, hasta ahora hemos discutido sobre la coherencia de dos ondas en un mismo lugar del espacio, esto es coherencia temporal o longitudinal. Veremos ahora cómo podemos medir la coherencia de un frente de onda en dos puntos del espacio. La coherencia espacial o transversal, describe la correlación mutua de diferentes partes de un mismo frente de onda. Esta propiedad se mide con un interferómetro de Young.

En la Figura 1.16 se muestra el esquema de un experimento de la doble rendija de Young. La fuente utilizada en el experimento es una fuente extensa de altura  $h$ . Una abertura con dos agujeros transparentes, separados una distancia  $a$ , se monta entre la fuente y la pantalla. Bajo ciertas condiciones, que veremos ahora, la interferencia será visible en la pantalla.

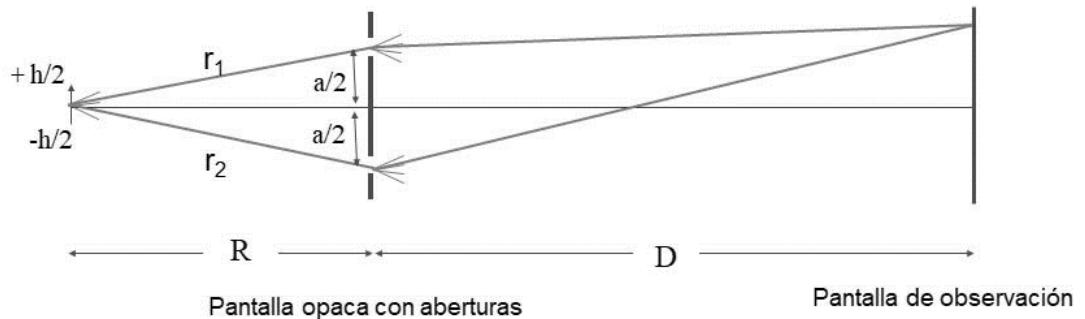


Figura 1.16: Experimento de Young para medir coherencia espacial

Las franjas resultan de la luz que viaja a la pantalla siguiendo diferentes trayectorias vía el agujero superior o el inferior. Las ondas emitidas por diferentes puntos de la fuente extendida, se superponen sobre la pantalla. Puede suceder que un determinado punto de la fuente genere un máximo de interferencia en cierto punto de la pantalla, mientras que otro punto de la fuente genera un mínimo en el mismo punto de la pantalla. Esto se debe a que los caminos ópticos son diferentes para rayos que salen de diferentes puntos de la fuente. En general, las contribuciones de todos los puntos fuente se compensan y el contraste se anula. Esta compensación será evitada si se cumple la siguiente condición para cada punto de la fuente de luz:

$$r_2 - r_1 < \lambda/2 \quad (1.25)$$

Esta condición será satisfecha para todos los rayos provenientes de los diferentes puntos de la fuente siempre y cuando la satisfagan los provenientes de los puntos extremos. Escribiendo a  $r_1$  y  $r_2$  en términos del tamaño de la fuente, de la distancia entre los orificios y de la distancia entre la fuente y los orificios, de la Figura 1.16 se tiene que:

$$r_2 - r_1 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{a+h}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(\frac{a-h}{2}\right)^2}$$

Como  $a \ll R$  y  $h \ll R$ , aplicando el desarrollo del binomio y operando se puede demostrar que:

$$r_2 - r_1 \cong \frac{ah}{2R} \quad (1.26)$$

Combinando las ecuaciones 1.25 y 1.26 se obtiene que, la interferencia se desvanece si la distancia entre los agujeros  $a$ , excede un límite crítico dado por:

$$a_k = \frac{\lambda R}{h} \quad (1.26)$$

$a_k$  se conoce como distancia de coherencia. En contraste a la coherencia temporal, la coherencia espacial depende no solo de las propiedades de la fuente de luz, sino también de la geometría del interferómetro. Si la distancia entre los orificios se incrementa o si la distancia entre la fuente y la apertura decrece, la ecuación 1.25 es violada y la figura de interferencia se desvanece.

De la misma manera que el grado de coherencia temporal  $\gamma(\tau)$  es una medida del contraste de las franjas en función de la diferencia de tiempo  $\tau$ , el grado de coherencia espacial, que se lo denota por  $\gamma_{12}$ , es una medida del contraste de las franjas en el patrón de interferencia en la pantalla de un experimento de Young, como función de la distancia entre los orificios.

Un experimentador que utilice técnicas de Metrología Óptica como la holografía, el moiré, speckle y fotoelasticidad no debe preocuparse mucho por los detalles de la teoría de la coherencia. Tanto en la teoría como en los experimentos se suele asumir que el grado de coherencia es uno o cero. Sin embargo, uno debe estar familiarizado con hechos fundamentales como:

- 1- La luz de dos fuentes independientes no interfiere.
- 2- La coherencia espacial y temporal de la luz de una fuente térmica extensa se aumenta diafragmándola o usando filtros de color.
- 3- La función de visibilidad de un láser multimodo exhibe máximos en un múltiplo entero del doble de la longitud de la cavidad.

#### 1.4 INTERFEROMETRÍA

Como su nombre lo indica, significa medir usando interferencia. Básicamente consiste en medir variaciones del índice de refracción del sistema a medir relacionadas con movimientos, deformaciones, propiedades macro y/o microscópicas. En esta sección vamos a describir la manera en que la interferometría clásica se utiliza en Metrología Óptica para la medición. Desarrollaremos la matemática necesaria para relacionar las propiedades del sistema a medir con variaciones de índice de refracción en los distintos tipos de casos e interferómetros que se utilice. Se incluyen técnicas que han sido desarrollados y puestas a punto en el laboratorio del GOL.

##### 1.4.1 APLICACIONES CON EL INTERFERÓMETRO DE MICHELSON

Comencemos con el más simple y antiguo de los interferómetros, el interferómetro de Young. Retomando la ec. 1.9, la diferencia de fase entre dos rayos emitidos por la fuente  $S$  y que pasan por los orificios  $S_1$  y  $S_2$ , en el punto  $P$  de la pantalla vendrá dada por:

$$\Delta\phi(x, y, D) = k d. c. o = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{S_2 B} = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \theta \approx \frac{2\pi}{\lambda} d \theta \cong \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{L} x \quad (1.27)$$

como por construcción  $L \gg d$ , se approximó  $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$  y  $x$  es la posición de  $P$  sobre la pantalla

Claramente, la condición de interferencia en un punto arbitrario de la pantalla depende de la geometría del interferómetro, de la longitud de onda de la luz utilizada y del material que llena el espacio entre la pantalla con los orificios y la pantalla de observación. La ec. 1.27 supone que este espacio está lleno de aire o que está vacío, pero si se tuviera un material de índice de refracción  $n$ , la condición de interferencia cambiaría, imagine que utiliza el interferómetro en aire y obtiene una fotografía del patrón de interferencia y luego repite la experiencia pero sumergido en agua y también registra fotográficamente la distribución de intensidades, cómo cambiará el patrón de interferencia?

En la resolución de ejercicios se proponen diferentes tipos de mediciones usando este interferómetro, sin embargo, parece ser muy obvio que podría resultar muy útil para caracterizar, pantallas con orificios o ranuras pudiendo

medirse la separación  $d$  y contrastar con la información que proveen los comerciantes o caracterizar una estructura periódica microscópica. También se puede con mucha precisión medir la longitud de onda de la fuente, aunque esto supondría el conocimiento de  $d$  y  $L$ , las que probablemente serían las mayores contribuyentes a la determinación de la incertezza de la medición. Si bien son varias las opciones que se pueden presentar, este interferómetro no es muy utilizado en metrología óptica a excepción de su gran valor en la medida de la coherencia espacial de las fuentes de luz. No obstante, su invaluable importancia desde un punto de vista histórico y didáctico hace que su estudio sea incluido siempre en los textos donde se trate la interferencia.

El interferómetro de Michelson ha tenido y tiene en la actualidad mucho protagonismo desde el primer experimento con resultado negativo, que permitiera desterrar la existencia del éter, pasando por innumerables aplicaciones en medicina hasta que actualmente se utiliza en la detección de ondas gravitacionales. A continuación, describiremos con un poco más de detalle alguna de ellas.

En el interferómetro de Michelson, de la Figura 1.17 la diferencia de camino óptico entre los brazos del interferómetro está relacionado con un desplazamiento del espejo móvil, como se muestra en la figura, lo que significa una diferencia de fase:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2x \quad (1.18)$$

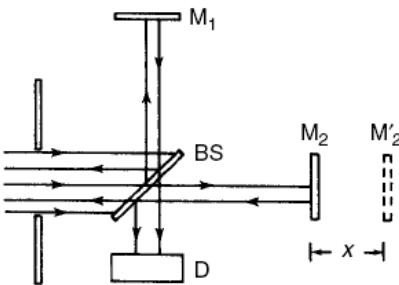


Figura 1.17: Interferometría con Interferómetro de Michelson

O sea, cada vez que el espejo se desplaza una cantidad  $x$ , la *d.c.o* se duplica porque el haz en este brazo del interferómetro va y vuelve. Luego el instrumento podría ser utilizado por ejemplo para medir longitudes de onda de diferentes fuentes, midiendo la diferencia de fase de la ecuación 1.18, al contar franjas de interferencia en la pantalla. Otra aplicación muy utilizada es la indicada en la sección de Coherencia, en la que se correlaciona el desplazamiento del espejo con la visibilidad de las franjas.

Obviamente, la *d.c.o* entre los brazos del interferómetro se puede lograr dejando fijo el espejo  $M_2$ , o sea manteniendo fija la diferencia de camino geométrico e introduciendo una diferencia de fase relacionada con variaciones de índice de refracción de un objeto colocado en este brazo, al que se lo suele llamar, brazo objeto. La ecuación 1.18 sigue siendo válida aunque ahora  $x$  sería el espesor del objeto de fase colocado. Ejemplos concretos son la medición de la variación del índice de refracción del aire con la presión o índice de una placa de vidrio. En la sección experimentación se puede ver con más detalle la forma de llevar a cabo estos experimentos.

Una aplicación muy interesante del uso de un interferómetro de Michelson en el campo de la medicina, es la llamada tomografía por interferometría de baja coherencia, OCT en inglés Optical Coherence Tomography. La OCT aprovecha la baja coherencia temporal de una fuente de luz de banda ancha y permite obtener imágenes *in vivo*, no invasivas y de alta resolución de estructuras microscópicas en tejidos que dispersan la luz hasta profundidades de aproximadamente 2 mm, según el tipo de tejido.

Un sistema OCT de dominio de Fourier estándar se puede describir mediante el esquema generalizado que se muestra en la Figura 1.18. Aunque los mecanismos operativos de los sistemas OCT de dominio de tiempo (TD-OCT) y OCT de dominio de Fourier (FD-OCT) difieren según las diferentes fuentes de banda ancha el principio básico. La luz de la fuente de banda ancha se divide en dos brazos del interferómetro de Michelson utilizando un divisor de haz o un acoplador de fibra óptica 50/50. La luz que incide en el tejido sufre una retro dispersión parcial debido a la presencia de sitios de reflexión discretos y continuos a diferentes profundidades dentro del tejido. A la salida del interferómetro, la luz retro dispersada del tejido se recombina con la luz del brazo de referencia y la señal de interferencia registrada en el extremo de detección se utiliza para extraer información estructural axial del tejido. El haz que incide en el tejido se escanea lateralmente y se recolecta una serie de escaneos y luego se los usa para obtener la imagen de la sección transversal del tejido. A modo de ejemplo a la izquierda de la Figura 1.18 se muestra una imagen una de retina donde se pueden determinar espesores de las diferentes capas constituyentes. Claramente se pueden observar las diferentes capas de la retina como. La capa límite interna (ILM), capa de fibras nerviosas (NFL), la capa de células ganglionares (GCL), etc. Los curiosos pueden obtener más información en la referencia [1.3]

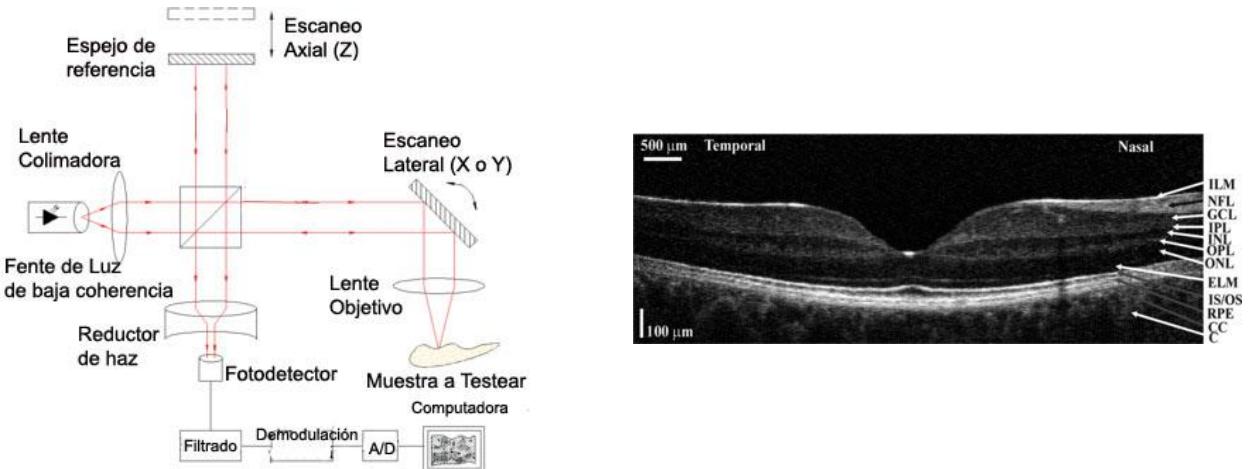


Figura 1.18: Esquema de un OCT (izq.). Imagen de retina obtenida por OCT (der.).

La aplicación más reciente del interferómetro de Michelson la podemos encontrar en el campo de la Astrofísica, en la detección de ondas gravitacionales [1.4]. Dicho de manera muy simple, para “ver” ondas gravitacionales tendríamos que ser capaces de medir el cambio de distancias entre dos objetos cuando la onda gravitacional pasa, pero esta distancia es tan pequeña que es equivalente a ver el grosor de un cabello humano a la distancia entre la Tierra y la estrella más cercana. Los físicos debatieron largamente sobre la posibilidad real y práctica de detectar estos fenómenos, pues durante varios años sólo se tenían algunas mediciones indirectas de su existencia. Debido a su geometría, el interferómetro de Michelson, resulta un instrumento ideal para medir distancias y cambios de distancia muy pequeños. Desde 1962, según lo propusieron los rusos Mikhail Gertsenshtein y Vladislav Pustovoit. se comienza consolidar la idea de utilizar el mismo dispositivo que Michelson había inventado para detectar el éter, para observar ondas gravitacionales. Por supuesto, nos encontramos a unos cien años de distancia tecnológica, sofisticación teórica y ante un requisito de sensibilidad mucho mayor. En este caso, una onda gravitacional debe acortar momentáneamente uno de los brazos del interferómetro y alargar el otro y, posteriormente, invertirse el efecto. En la inversión del efecto las franjas de interferencia del aparato deben moverse hacia atrás y hacia delante a la misma frecuencia a través de la pantalla. El mínimo cambio en la longitud de una de las longitudes del rayo de luz afectaría el patrón de interferencia, de forma similar al caso del éter, pero en esa ocasión debido a la deformación espaciotemporal originada por la onda gravitacional. Si una de las longitudes cambia lo suficiente para que el impacto de una cresta se vuelva valle, la superposición se volverá una cancelación de una franja; las bandas oscuras se volverán brillantes y viceversa, y parecerá que el patrón de interferencia se mueve hacia los lados a través de la pantalla. Sin embargo, como las ondas gravitacionales son tan débiles, la sensibilidad del interferómetro usado en este experimento debía ser un billón de veces mayor que la del utilizado por Michelson y Morley. En la Figura 1.19 se muestra un esquema de un interferómetro utilizado con este fin. Como puede verse, los elementos constituyentes son masas muy bien calibradas y se requieren de detectores muy especiales. Cabe destacar que los brazos deben ser de cientos de metros, y cuanto más largos más sensible. A continuación, a modo informativo podemos mencionar

que los interferómetros de LIGO (Laser Interferometer Gravitational Laboratory) en Luisiana y Washington están separados 3000 km y tiene brazos de unos 4 k, que se combinan reflejando la luz para recorrer distancias de hasta 100 km. Por otro lado, en Casina vecino a Pisa, funciona VIRGO un interferómetro de brazos perpendiculares de unos 3 km de largo. GEO600, es un laboratorio alemán-británico que consta de dos brazos de 600m. Finalmente podemos mencionar que LISA (Laser Interferometer Space Antenna), es un proyecto llevado a cabo por la NASA que pretendía en este 2020, poner en el espacio un interferómetro láser que orbitaría a una distancia de 1 UA del Sol. La idea es que la longitud de los brazos del interferómetro sea gigantesca en comparación con los actuales y que no sufra las perturbaciones terrestres.

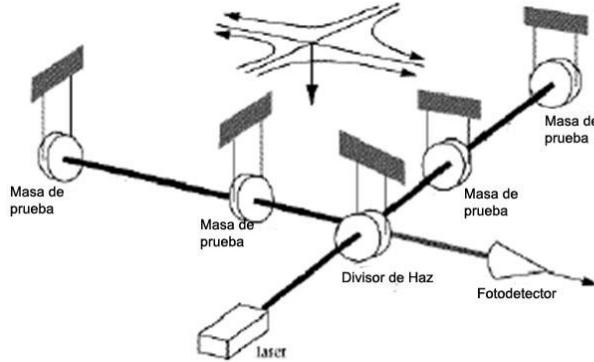


Figura 1.19: Esquema de un interferómetro para detectar ondas gravitacionales

Finalmente, y no por eso menos importante, a continuación, comentaremos sobre el que hacia el interior del grupo hemos dado en llamar el “interferómetro de lata”. Este dispositivo ha sido desarrollado por miembros del GOL con fines didácticos. El mismo tiene como principal característica el hecho de ser de bajo costo y de no requerir de cuidados extremos en la manipulación de los elementos ópticos, como en el caso de los interferómetros comerciales que hemos descripto más arriba. Los espejos de nuestro interferómetro de Michelson consisten en láminas de aluminio pulido de alta reflectancia, de allí su mote. A continuación, veremos cómo se puede utilizar este dispositivo para medir fuerza de fricción estática entre diferentes superficies [1.5]. En la figura 1.20 se muestra un esquema del arreglo experimental. La fuente de luz es un láser de He-Ne y se configura el interferómetro para obtener dos imágenes reales de la fuente puntual en la superficie de los espejos. Este diseño tiene dos cuestiones interesantes que deben ser resaltadas. Por un lado, es fácil de alinear en comparación con los interferómetros comerciales, por ende, no requiere que la montura del espejo ajustable sea de alta precisión. Por otra parte, como sólo se utiliza una pequeña porción del espejo, el tamaño de la imagen de la fuente puntual, no se necesita de espejos de primera superficie de alta calidad.

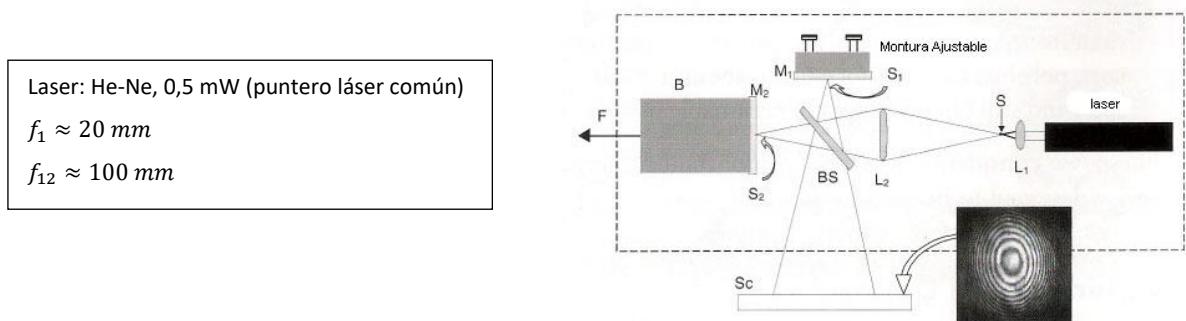


Figura 1.20: Esquema de un interferómetro para medir micro desplazamientos

Como se puede observar en la Figura, el espejo móvil se pega a un cuerpo que se apoya sobre una superficie, entre los que se desea medir la fuerza de fricción. En este caso hemos usado un bloque de madera apoyado sobre una superficie también de madera. Ambos pueden ser cambiados por otros elementos según se deseé. A la salida del láser se coloca una lente de distancia focal corta de manera de tener una fuente puntual y el haz expandido se enfoca en los espejos mediante otra lente distancia focal larga.

Los elementos deben disponerse de manera de lograr dos imágenes reales de la fuente puntual y a la salida del interferómetro se tendrá un patrón de interferencia de franjas circulares, como vimos cuando analizamos la interferencia de dos fuentes puntuales. Si las distancias de los espejos al divisor de haz son,  $d_1$  y  $d_2$  la separación entre las fuentes puntuales será  $2d = (d_1 - d_2)$  y estarán alineadas una delante de la otra en el eje óptico de salida del interferómetro. En el inserto de la Figura 1.20, se muestra una fotografía del patrón de interferencia real. Como vimos, la ec. 1.8 nos dice que, en el centro del patrón de interferencia,  $2d = N\lambda$ . Si el espejo  $M_2$ , se mueve a lo largo del eje óptico, la franja central cambiará alternativamente de brillante a oscura, cada vez que la distancia  $d$  cambie en una  $\lambda$ . De esta manera, contando las franjas que aparecen (o desaparecen) en el centro del patrón de interferencia, se puede medir con gran precisión (fracción de  $\lambda$ ) el desplazamiento del espejo.

En esta aplicación particular, se utiliza este hecho para medir los micro desplazamientos entre el bloque y la superficie sobre la que se apoya, antes de que se alcanza la fuerza de fricción estática máxima. Se aplica al bloque una fuerza eterna  $F$ , mediante una cuerda que pasa por una polea unida a un contendor en el que se dejan caer gotas de agua para hacerla aumentar en forma continua y controlada. A medida que se agrega el agua en el contendor se cuentan las franjas de interferencia que aparecen y desaparecen en el centro del patrón. Como se explicó, si  $m$  franjas aparecen el centro del diagrama de interferencia, el bloque se desplaza una cantidad

$$\Delta d = m \frac{\lambda}{2} \quad (1.19)$$

En la Figura 1.21, se muestra el desplazamiento del bloque en función de la fuerza externa aplicada en un experimento típico. También se muestra en el eje derecho el número de franjas contadas. La linealidad se mantiene hasta que se cuenta la última franja antes que el bloque comienza a deslizar.

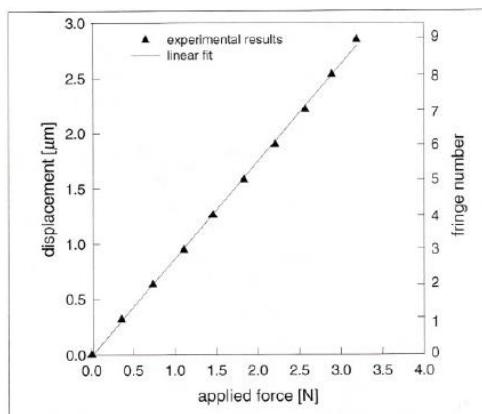


Figura 1.21: Desplazamiento del bloque en función de la fuerza externa aplicada.

Es muy interesante y didáctico ver que la deformación que sufre el bloque es reversible, en el sentido que cuando la carga se reduce gradualmente las franjas empiezan a desaparecer, si antes aparecían (y viceversa) y se puede contar el mismo número  $m$  cuando la carga, esto es la fuerza externa  $F$  se hace cero.

#### 1.4.2 APPLICACIÓN CON EL INTERFERÓMETRO DE MACH-ZEHENDER

Además del interferómetro de Michelson, en Metrología Óptica es muy utilizado el interferómetro de Mach Zehender, cuyo esquema se mostró en la Figura 1.11 a). Por su configuración es simple de montar y tiene la ventaja de que los brazos objeto y referencia recorren diferentes caminos y es muy utilizado para testear objetos transparentes. Como se ha dicho, los objetos de fase se caracterizan por modificar la fase de la luz que los atraviesa de acuerdo a las variaciones de su índice de refracción. A modo de ejemplo de aplicación de su uso a continuación, se detalla un experimento de interferometría clásica desarrollado con el objeto estudiar el proceso de difusión en líquidos para determinar el coeficiente de difusión [1.6].

Los métodos de medición del coeficiente de difusión en líquidos, cuando el sistema se encuentra en un estado no estacionario en general consisten en encontrar experimentalmente la distribución espacial de concentración

$C(x, y, z, t)$  en un determinado instante de tiempo. Luego, comparando ésta con el valor teórico obtenido de la solución de la ecuación de Fick y las condiciones iniciales adecuadas de obtiene el coeficiente de difusión  $D$  [1.7, 1.8]. En este experimento, se utilizará la interferencia para medir las variaciones de índice de refracción relacionadas con  $C(x, y, z, t)$  al poner en contacto dos sustancias transparentes de diferente concentración.

La sustancia a la que se necesita medir el coeficiente de difusión, se coloca en el fondo de una celda primática y sobre ella, se coloca agua destilada (índice de refracción  $n_a$ ) formando un escalón de concentración, denominado usualmente como “cupla difusiva”. Detalles de las dimensiones y metodología de llenado, se pueden leer en la referencia [1.6]. La celda, montada en un micro-traladador, se coloca en el brazo objeto de un interferómetro de Mach-Zehender y un delgado haz de luz láser de 10 mW, atraviesa la celda en la dirección perpendicular al gradiente de concentración (dirección  $x$ ). Al cabo de un tiempo  $t$  de iniciado el proceso de difusión, la celda se desplaza desde la región de concentración  $C = 0$  (agua destilada) a la de concentración  $C_0$  registrándose las variaciones de fase a la salida del interferómetro. El interferómetro se configura para que el patrón de interferencia consista de un patrón de franjas circulares mediante sendas lentes colocadas en los brazos del interferómetro. La lente en el brazo objeto tiene la función de mejorar la resolución ya que, al enfocar el haz en el plano medio de la celda, afina el diámetro del haz. Las variaciones de intensidad en el centro del patrón de interferencia estarán relacionadas con las variaciones de fase. Estas variaciones de intensidad se registran con un fotomultiplicador, colocado en el centro del patrón. A modo de ejemplo, en la figura 1.22 a) se muestra una señal típica donde se ve que, las franjas de interferencia se amontonan en la región de la interface (punto medio de la celda) donde el gradiente de concentración es más grande.

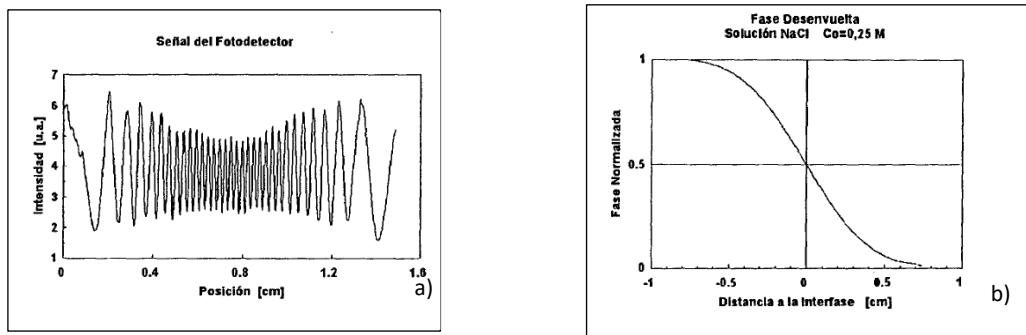


Figura 1.22: a) Señal típica de las variantes de intensidad. b) Variaciones de fase en el interior de la celda

Una variación de fase  $\Delta\varphi(x, t)$ , es proporcional a la variación de índice de refracción  $n(x, t) - n_a$  y por ende a la variación de concentración  $C(x, t)$ . Si suponemos que existe una relación lineal entre ambas magnitudes se tiene:

$$\Delta\varphi(x, t) = \frac{2\pi}{\lambda} d[n(x, t) - n_a] = \frac{2\pi d}{\lambda} \mathbb{A} C(x, t) \quad (1.20)$$

donde,  $d$  es el espesor de la celda,  $\lambda$  la longitud de onda del láser y  $\mathbb{A}$  es una constante.

A partir de la ecuación 1.20, una forma de determinar la fase consiste en asignar un orden de interferencia  $N(x)$  a cada máximo de la función de intensidad, con lo cual la distribución de índice de refracción en el interior de la celda vendrá dado por:

$$\Delta n(x) = N(x) \frac{\lambda}{d} \quad (1.20)$$

Donde  $N = 0$  en la región de solvente puro y aumenta monótonamente hacia la región de concentración  $C_0$  y se ha eliminado la dependencia con el tiempo ya que es una constante en cada experimento, y se toma de acuerdo a las condiciones que el modelo teórico impone, como por ejemplo que el tiempo desde el inicio del proceso de difusión sea inferior al que se requiere para que las variaciones de concentración lleguen a los extremos de la celda y en este caso también la altura de la celda es un limitante. Dado que la cantidad de franjas de interferencia es grande su conteo se hace tedioso, afortunadamente, es posible aplicar el conocido método de la Transformada de Fourier, que explicaremos en detalle en el próximo capítulo, para la evaluación automática de las franjas de interferencia. El

método permite obtener la variación de fase  $\Delta\varphi(x)$  en función de la posición en el interior de la celda. El método arroja una curva como la mostrada en la Figura 1.22 b). La determinación del coeficiente de difusión se realiza comparando esta distribución de fase con la curva teórica, resultado de aplicar la Ley de Fick al modelo de cupla infinita, en el tiempo  $t$ , transcurrido desde iniciado el proceso. Para ello, como la curva teórica depende de  $D$  se parte de un valor arbitrario del mismo y se lo modifica hasta que las curvas coinciden dentro de un cierto rango de error preestablecido. En el próximo capítulo, retomaremos este experimento, para ejemplificar el método de la Transformada Fourier para obtención de la fase desenvolta de la Figura 1.22 b).

## 1.5 EXPERIMENTACIÓN. INTERFEROMETRÍA – INTERFERÓMETRO DE MICHELSON

### Objetivos:

1. Caracterización del interferómetro
2. Determinación de la longitud de onda del láser a utilizar
3. Estudio del índice de refracción de un gas.
4. Visualización de la variación de visibilidad de las franjas de interferencia obtenidas cuando la fuente utilizada es una lámpara de sodio.

### Método Experimental

- Montaje del interferómetro y su respectiva alineación óptica
- Medición de la longitud de onda del láser
- Medición del índice de refracción del aire en función de la presión.
- Estimación la longitud de coherencia de una lámpara de sodio

### Montaje del interferómetro

- Alinee el láser y la base del interferómetro, para que el rayo pase por el centro del sistema.
- Coloque cada elemento óptico, divisor del haz, espejos según el lugar que corresponda en la base del interferómetro y ajuste los elementos para que la reflexión del láser entre por la apertura de salida del mismo láser.
- Coloque el espejo fijo, el divisor del haz en 45º, verifique que la reflexión esté cerca del centro del espejo fijo.
- Se deben observar dos conjuntos de tres puntos sobre la pantalla, cada uno debe tener un punto brillante y dos más opacos (satélites). Ajuste los tornillos del espejo fijo hasta que los dos conjuntos estén superpuestos.
- Coloque un lente de 18 mm de distancia focal entre el láser y el divisor del haz. En este momento debería poder observar el patrón de interferencia.
- Es recomendable no colocar durante todo el experimento el elemento compensador ya que éste no permite colocar la base para el estudio de índices de refracción (rotacional pointer).

A continuación, se muestra una imagen del interferómetro y de la forma en que se deben posicionar cada uno de sus elementos.

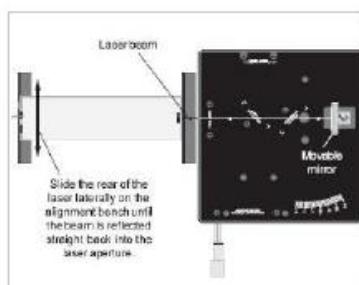


Figure Aligning the Laser

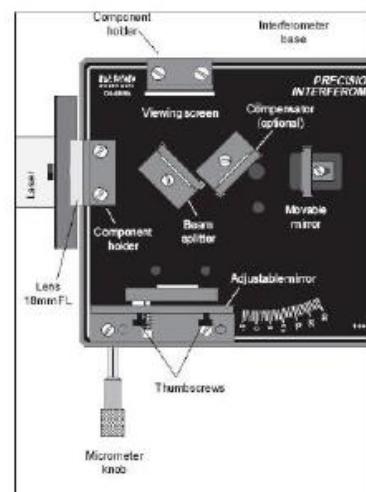


Figure Michelson Mode Setup

### Calibración del equipo

El equipo viene calibrado de fábrica, esta calibración se refiere a la relación existente entre el desplazamiento del tornillo micrométrico y el desplazamiento del espejo móvil. Para el interferómetro utilizado en el laboratorio esta relación es llamada K y tiene un valor de 1, es decir que, por cada micrómetro de recorrido del tornillo, se desplazará un micrómetro el espejo móvil.

### Medición de la longitud de onda del láser.

Para medir la longitud de onda del láser, el micrómetro se posicionará en una lectura de aproximadamente  $50 \mu\text{m}$  para asegurar que el movimiento se realiza en una región donde el desplazamiento es lineal. Luego, se seguirá moviendo lentamente al micrómetro en el mismo sentido mientras se cuentan los máximos (al menos 20). La distancia recorrida por el espejo móvil será igual a la diferencia entre la lectura inicial y final del micrómetro. La longitud de onda se calculará mediante la ecuación que relacione el desplazamiento del espejo, la variación de longitud de camino óptico y la longitud de onda del láser empleado. Estas mediciones se repetirán entre 7 y 10 veces y se analizarán los errores de medición.

### Variación del índice de refracción del aire con la presión

Como analizó previamente, en el interferómetro de Michelson los cambios de fase se introducen usualmente a través de la variación del camino óptico de uno de los haces. Esto también puede lograrse modificando el índice de refracción del medio que atraviesa alguno de los haces. Esta metodología se utilizará para medir la variación del índice de refracción del aire con la presión.

Para realizar este experimento, en la base del interferómetro se debe colocar la platina de rotación entre el divisor de haz y el espejo móvil, como se muestra en la siguiente Figura. Posicionar la celda de vacío sobre la platina de rotación de forma que las placas de vidrio sean perpendiculares al haz láser. La sujeción de la celda en la platina es magnética. Conectar la celda a la bomba de vacío. Posiblemente se necesite alinear de nuevo el espejo fijo de modo que las franjas de interferencia sean visibles en la pantalla de observación. También es probable que las franjas de interferencia se vean distorsionadas debido a las irregularidades en las placas de vidrio que forman la celda de vacío. Para realizar la medición proceda de acuerdo a los lineamientos discutidos previamente. Calcular y graficar la variación del índice de refracción del aire con la presión, teniendo en cuenta los errores introducidos en las mediciones.

### Visibilidad de las franjas de interferencia obtenidas usando una lámpara de sodio

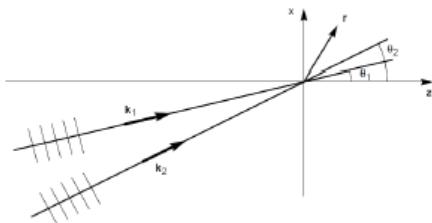
Para la estimación de la longitud de coherencia de la luz de Sodio simplemente reemplace el láser por la fuente de sodio, retire la platina de rotación y agregue la placa compensadora. Mientras desplaza el espejo móvil observe el contraste de las franjas de interferencia. Describa el fenómeno observado y extraiga conclusiones sobre la longitud de coherencia temporal de la luz de sodio.

#### 1.6 EJERCITACIÓN. INTERFERENCIA Y COHERENCIA

##### Parte 1: interferencia

###### Ejercicio 1

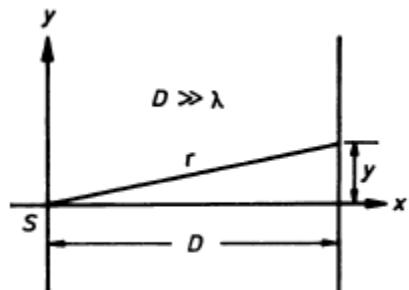
Interferencia entre dos ondas planas Suponga dos ondas planas de igual intensidad, polarización y frecuencia. Los vectores  $k$  de ambas ondas están contenidos en el plano  $x - z$  como se muestra en la figura.



- Encuentre la intensidad resultante en el plano  $z = 0$ .
- Esquematice las franjas de interferencia
- Encuentre la distancia entre dos franjas brillantes (o período espacial de la distribución de intensidad).
- Si  $\theta_1 = -\theta_2$  ¿Cuál es el período espacial de la distribución de intensidad? ¿Qué sucede con el mismo cuando  $\theta_1$  aumenta?

###### Ejercicio 2

Interferencia entre una onda plana y una onda esférica Una fuente puntual  $S$  localizada en el origen de un sistema coordenado emite ondas sinusoidales esféricas. Además, existe otra onda plana que se propaga a lo largo del eje  $x$ . Ambas ondas inciden sobre una pantalla plana perpendicular al eje  $x$  y a una distancia  $D$  del origen como se muestra en la figura.



- Calcular la intensidad resultante en la pantalla para valores de  $z$  e  $y$  pequeños comparados con  $D$ .
- Esquematice el patrón de interferencia.
- Analice qué sucede con el espaciado entre dos franjas brillantes a medida que nos alejamos de  $y = 0$  y  $z = 0$ .

###### Ejercicio 3

Interferencia entre dos ondas esféricas Analice la interferencia de dos fuentes puntuales en los siguientes planos de observación:

- Plano perpendicular a la línea que pasa por las dos fuentes.
- Plano paralelo a la línea que pasa por las dos fuentes. Calcule el período espacial de la distribución de intensidad

Interferómetros de División de Frente de Onda

INTERFERÓMETROS DE DIVISIÓN DEL FRENTE DE ONDA.

###### Ejercicio 4

Escribir una expresión para la distribución de irradiancia sobre el plano de observación en un experimento de Young y graficarla como función de la distancia a la bisectriz entre las fuentes.

###### Ejercicio 5

La luz blanca que incide en dos rendijas largas y estrechas emerge y puede observarse en una pantalla distante. Si la luz roja ( $\lambda_0 = 780 \text{ nm}$ ) en la franja de primer orden se superpone al violeta en la franja de segundo orden ¿Cuál es la longitud de onda de ésta?

#### Ejercicio 6

En un experimento de Young de doble rendija se ilumina con luz de  $500 \text{ nm}$ . Cuando se coloca una película delgada de material transparente detrás de una de las rendijas, la franja de orden cero se mueve a la posición ocupada previamente por la franja brillante de orden 4. Si el índice de refracción de la película es  $n = 1.2$ , calcule el espesor de la misma.

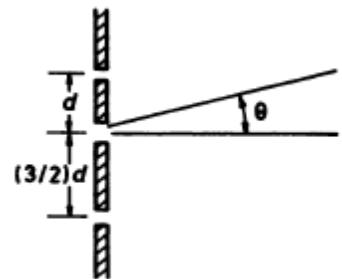
#### Ejercicio 7

Una cámara de vidrio de  $25 \text{ mm}$  de largo se llena con aire en frente de una de las rendijas en un experimento de Young. El aire se remueve y se reemplaza por un gas. Comparando los dos patrones de interferencia, se encuentra que cuando la cámara está llena de gas, 21 bandas brillantes han sido desplazadas hacia el lado con la celda. Si  $\lambda = 656.2816 \text{ nm}$  y  $n$  para el aire a esa longitud de onda es 1.000276, ¿Cuál es el índice de refracción del gas?

#### Ejercicio 8

Considere el patrón de interferencia de 3 rendijas iguales, como las que se ilustran en la figura:

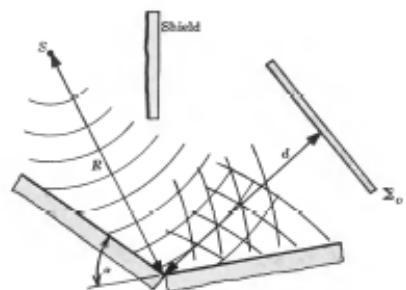
- ¿A qué valor de  $\theta$  se encuentra el primer máximo, o máximo de orden 1? (Nota: esto sucede cuando las ondas que emergen de las tres rendijas están en fase)
- Denotemos al valor encontrado en el inciso anterior  $\theta_1$ . Sea la intensidad en la dirección del orden cero  $I(0)$ . ¿Cuál es la intensidad (en unidades de  $I(0)$ ) en la dirección  $\theta_1/2$ ?



#### Ejercicio 9

Muestre que el espejo doble de Fresnel (dos espejos planos e inclinados uno respecto del otro un pequeño ángulo) se comporta como un interferómetro de Young y que la separación entre las franjas es:

$$\Delta y = \frac{(R + d)\lambda_0}{2Ra}$$

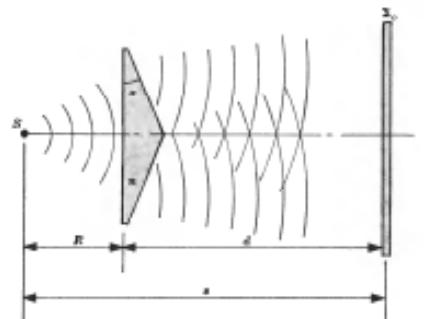


#### Ejercicio 10

- Describe cómo el Biprisma de Fresnel puede interpretarse como un interferómetro de división de frente de onda.

i) determinar el ángulo de desviación mínimo  $\delta$  para un rayo de luz que proviene desde la izquierda desde una fuente puntual ubicada a una distancia  $R$  del prisma.

ii) Determinar la separación  $y$  entre las franjas.

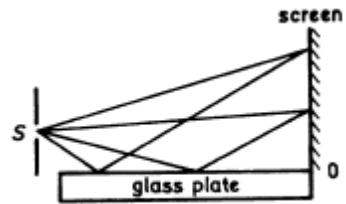


- Cuando el biprisma es iluminado por un haz láser colimado que incide normalmente sobre el mismo, la distancia de separación entre franjas no cambia al aumentar la distancia a la fuente.
- Obtener la separación de las franjas de interferencias en términos del ángulo de desviación de un rayo incidente.

ii) Para un prisma de vidrio y luz amarilla, se observa que la separación entre las franjas es de  $100 \mu\text{m}$ , estimar en grados el valor del ángulo  $\alpha$  del prisma.

#### Ejercicio 11

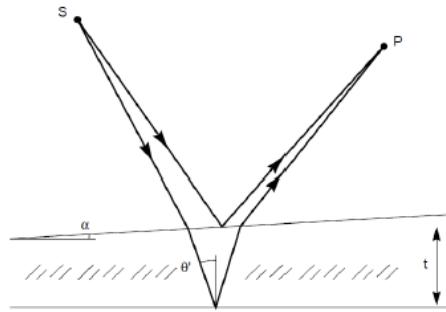
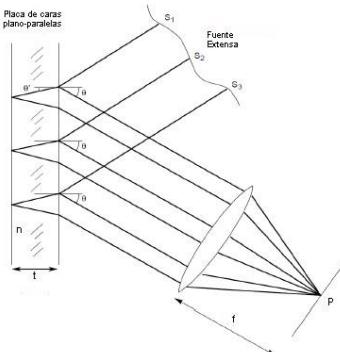
Un espejo de Lloyd puede usarse para obtener franjas de interferencia en una pantalla a partir de una sola fuente. Dibuje el sistema equivalente de dos fuentes coherentes. La franja central (en el punto cero) es oscura. ¿Qué significa esto?



#### INTERFERÓMETROS DE DIVISIÓN DE AMPLITUD

#### Ejercicio 12

Para las situaciones de la figura, muestre que la *d.c.o* (diferencia de camino óptico), entre los dos primeros rayos reflejados de la fuente  $S_1$  es:  $d.c.o = 2nt \cos\theta'$



Ejercicio 12: a) Franjas de igual inclinación. b) Franjas de igual espesor

#### Ejercicio 13

Dos vidrios planos que se tocan en uno de sus bordes, se separan por medio de un cabello por el otro extremo, ver Figura. Se hace incidir normalmente luz de  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  y se observan 9 franjas. ¿Cuál es el espesor del cabello?

#### Ejercicio 14

Cuando una placa de vidrio con índice de refracción  $n = 1.517$  se coloca en uno de los brazos de un interferómetro de Michelson, se desplazan 18,5 *franjas*. ¿Cuál es el espesor del vidrio si  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ ?

#### Ejercicio 15

Estudie la configuración del interferómetro de Michelson para obtener:

a) Franjas de igual inclinación

b) Franjas de igual espesor

#### Ejercicio 16

Un interferómetro de Michelson se ajusta para que el patrón de franjas resultante sean círculos concéntricos cuando se lo ilumina con una fuente extensa de luz de  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

a) ¿Qué tan lejos debe desplazarse el espejo móvil para que emergan 1000 *franjas* desde el centro?

b) Si la franja central es brillante, calcule el radio angular (en radianes) del primer anillo oscuro en términos de la diferencia de camino óptico entre los dos brazos del interferómetro y la longitud de onda  $\lambda$ . (suponga ángulos  $\theta$  pequeño)

#### Ejercicio 17

Una lente positiva de radio de curvatura 20 cm, descansa sobre una superficie óptica plana y se ilumina a incidencia normal la superficie con luz de sodio  $D$  ( $\lambda = 589.29 \text{ nm}$ ). El espesor de aire entre ambas superficies, se llena con tetracloruro de carbono ( $n = 1.461$ ). ¿Cuál es el radio de la franja oscura número 23 antes de introducir el líquido? ¿Y después?

#### Ejercicio 18

Un vidrio de ventana de 5mm de espesor y 2cm de diámetro se dice que tiene una superficie plana dentro de  $\frac{1}{4}$  de onda de una luz verde de mercurio ( $\lambda = 546 \text{ nm}$ ) y el par de superficies paralelas dentro de los 5 segundos de arco ( $1 \text{ arc sec} = 4.85 \times 10 - 6 \text{ rad}$ ). ¿Cómo puede usted medir estas propiedades para verificar las especificaciones del fabricante? Suponga que el índice de refracción del vidrio es  $n = 1.5$ .

### Parte 2: Coherencia

#### Ejercicio 1

Demostrar que la ecuación de interferencia

$$I(x, y, z) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\Delta\phi(x, y, z)$$

para un plano perpendicular a la dirección  $z$ , puede ser reescrita como:

$$I(x, y) = 2I_0(x, y) [1 + \gamma(x, y) \cos\Delta\phi(x, y, z)]$$

Donde

$$I_0 = \frac{I_1(x, y) + I_2(x, y)}{2}$$

es la intensidad promedio y

$$\gamma(x, y) = \frac{2[I_1(x, y)I_2(x, y)]^{1/2}}{I_1(x, y) + I_2(x, y)}$$

es la visibilidad o contraste de las franjas de interferencia

#### Ejercicio 2

Matemáticamente, la expresión de la intensidad que resulta de la superposición de dos ondas en el espacio está dada por:

$$I(x, y, z) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(t)| \cos\Delta\phi \quad (1)$$

En una planilla de cálculo grafique esta función para un rango de  $\Delta\phi$  tal que  $0 < \Delta\phi < 4\pi$ , utilizando el grado de coherencia como parámetro, para los casos:  $|\gamma(t)| = 0$ ,  $|\gamma(t)| = 0.25$ ,  $|\gamma(t)| = 0.5$  y  $|\gamma(t)| = 1$ . Suponga por simplicidad  $I_1 = I_2 = 1$ .

#### Problema 3

Teniendo en cuenta la definición de visibilidad:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2)$$

Demostrar que esta cantidad nos da una medida del grado de coherencia de la fuente luminosa.

#### Ejercicio 4

Derive una expresión para la longitud de coherencia de una onda en términos de su ancho de línea  $\Delta\lambda_0$  correspondiente a un ancho de banda  $\Delta\nu$ .

#### Ejercicio 5

Considere un fotón en la región visible del espectro, emitido durante una transición atómica de unos  $10^{-8}$  s.

a) ¿Cuán largo es el paquete de ondas?

b) Si la longitud media del paquete es  $\bar{\lambda} = 500 \text{ nm}$ . Estime el ancho de línea del paquete ¿Qué puede decirse acerca de su monocromaticidad?

#### Ejercicio 6

Imagine que cortamos un haz láser continuo (suponiendo que sea monocromático  $\lambda_0 = 632.8 \text{ nm}$ ) en pulsos de  $0.1 \text{ ns}$  usando algún tipo de obturador. Calcule el ancho de línea resultante  $\Delta\lambda$ , el ancho de banda y la longitud de coherencia.

#### Ejercicio 7

Determine el ancho de banda de la luz blanca. Compute la longitud de coherencia asociada y el tiempo de coherencia.

#### Ejercicio 8

Una lámpara de isótopo de  $Hg198$  a baja presión ( $\lambda_{aire} = 546.078 \text{ nm}$ ) tiene un ancho de banda de  $\Delta\nu = 1000 \text{ MHz}$ . Calcule la longitud de coherencia y el tiempo de coherencia de la luz, así como la estabilidad de frecuencia.

#### Ejercicio 9

Un interferómetro de Michelson es iluminado con luz roja de cadmio de una longitud de onda media de  $643.847 \text{ nm}$  y un ancho de línea de  $0.0013 \text{ nm}$ . Inicialmente la diferencia de *l. c. o* entre los dos brazos es cero. Luego, uno de los espejos es movido lentamente hasta que las franjas desaparecen.

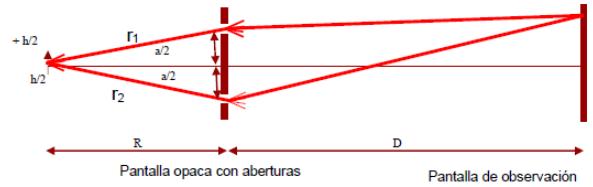
a) ¿Cuánto debe moverse el espejo para que esto suceda?

b) ¿A cuántas longitudes de onda corresponde este movimiento?

c) Repita los incisos a) y b) si la fuente de cadmio es reemplazada por un láser de He-Ne ( $\lambda_0 = 632.8 \text{ nm}$ ) con una estabilidad de frecuencia de 2 partes por  $10^{10}$ .

#### Ejercicio 10

En el experimento de Young, las franjas de interferencia se observan en la pantalla de observación si se cumple que, para cada punto de la fuente de luz extensa,  $r_2 - r_1 < \lambda/2$ . Demuestre que para que ello ocurra la distancia de separación entre las dos rendijas debe valer como máximo  $a_k = \lambda R/h$ , con  $a_k$  la distancia de coherencia.



Suponga una fuente de longitud de onda  $\lambda = 632.8\text{nm}$  ubicada a  $1\text{m}$  de la pantalla con la doble rendija. Si la fuente tiene una dimensión  $h = 10\text{cm}$  ¿Cuál es la máxima separación posible entre las rendijas para que sea posible visualizar franjas de interferencia? Repita el cálculo, si ahora diafragmamos la fuente de modo que  $h = 0.5\text{cm}$ .

### Ejercicio 11

Suponga que el Sol es cuadrado y que su distribución de intensidad es constante. Si éste subtende un ángulo de  $0.53^\circ$  en la superficie de la Tierra:

- Encuentre el grado espacial de coherencia  $|\gamma_{12}|$  y en términos de la separación espacial  $D$ ,  $\Delta\alpha$  y  $\lambda$
- Encuentre la longitud de coherencia espacial  $D_c$  y el área de coherencia  $\pi \left(\frac{D_c}{2}\right)^2$ ; es decir el área circular dentro de la cual uno puede introducir un conjunto de aperturas y obtener franjas de interferencia. Use  $\lambda_0 = 500\text{nm}$
- Suponga que usamos la luz reflejada del sol desde una ventana de área  $1\text{m} \times 1\text{m}$  a una distancia de  $1\text{km}$  de la fuente de luz. Encuentre la longitud de coherencia espacial y el área de coherencia en este caso.

### Ejercicio 12

Considere una fuente con una función de distribución espectral Gaussiana:  $P(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-v_0}{\sigma}\right)^2\right\}$ .  $P(v)$

puede expresarse en términos de su valor *FWHM* (Full Width Half Maximum). Sea este valor  $\Delta v$ .

- Encuentre el grado de coherencia temporal complejo.
- Encuentre la intensidad que resulta de la interferencia de dos haces que surgen de la misma fuente en un interferómetro de división de amplitud (por ejemplo: Michelson). ¿Qué ocurre con la visibilidad de las franjas?
- El tiempo de coherencia está definido por:  $\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(t)|^2 dt$ . Encuentre el tiempo de coherencia para la fuente con una distribución espectral Gaussiana y su longitud de coherencia correspondiente.

### Ejercicio 13 (Procesamiento de datos; se requiere computadora)

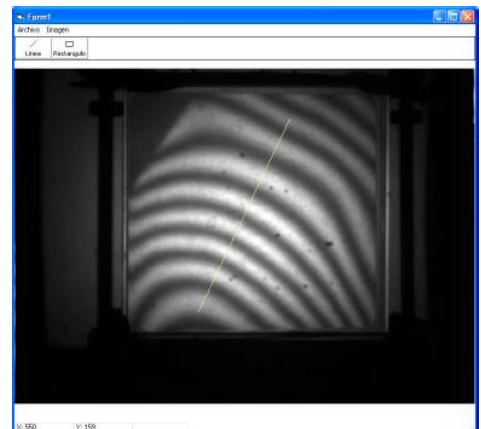
Un tratamiento matemático alternativo para describir el comportamiento interferométrico de un haz de luz parcialmente coherente, es definir las ondas que llegan al *DH* de un interferómetro de Michelson como oscilaciones amortiguadas en amplitud, con la amplitud de tipo  $A_i(t) = A_i \exp[-t/2\Delta t_c]$ , con  $\Delta t_c$  el tiempo de vida medio del estado excitado de cada átomo. Puede demostrarse que, operando convenientemente, la función visibilidad obtenida con este tratamiento resulta:

$$V(\Delta s) \propto \exp\left[-\frac{\Delta s}{l_c}\right] \quad (3)$$

Con  $l_c = c\Delta t_c$  y  $\Delta s$  el incremento de camino de una onda respecto de la otra. Notar que, en este caso, la longitud de coherencia de la fuente puede encontrarse cuando la diferencia de caminos entre las dos ondas que recorren los brazos del interferómetro sea tal que haga que la visibilidad caiga desde su máximo valor posible a  $1/e$  (Demuestre esto).

En la figura se muestra el diagrama de interferencia que surge cuando en un interferómetro de Michelson se ilumina con una lámpara de vapor de Mercurio, filtrando la línea verde [1.10]. En este caso los brazos del interferómetro se ajustaron con sus longitudes “lo más iguales posibles” de modo que a simple vista las franjas tengan el mayor contraste posible, lo que determina una visibilidad  $V$  muy cercana a 1.

A continuación, se desplaza sucesivamente uno de los espejos y se capturan y almacenan imágenes cada  $25$  o  $50 \mu m$ . Conforme esto ocurre, se observa una disminución progresiva de la función visibilidad: el contraste de las franjas disminuye, siendo “ $I_{\max}$  cada vez menos máximo e  $I_{\min}$  cada vez menos mínimo”. Notar que, cada vez que el espejo se desplaza una distancia  $d$ , la d.c.o entre los dos rayos cambia en  $\Delta s = 2d$ .



Para que el fenómeno sea visible el desplazamiento  $d$  de los espejos tiene que cumplir  $2d \leq l_c$ . Por ello, el proceso continúa hasta que las franjas desaparecen, lo cual nos dice que la luz ha perdido coherencia.

La visibilidad para cada imagen se calcula trazando una línea sobre la imagen (como se muestra en la figura) y buscando el nivel de gris máximo absoluto y el nivel de gris mínimo absoluto sobre la línea. Luego estos valores se reemplazan en la ecuación (2). La visibilidad se calcula sobre la misma línea para cada uno de los interferogramas tomados, y estos datos son almacenados en un archivo.

A los fines de minimizar errores producto de zonas de iluminación de fondo no uniforme, Ejercicios de desenfoque, y posibles ruidos debido a partículas de polvo adheridas a los espejos o al objetivo de la CCD, el procedimiento descrito en la sección anterior se repite para diversas líneas que barren distintas zonas de las imágenes almacenadas. Por último, los datos obtenidos son promediados, y posteriormente normalizados.

Consigna: Tres archivos en planilla de cálculo con los datos de visibilidad para la línea verde de mercurio, la línea roja de una lámpara de cadmio y luz de sodio, que se proveerá, encuentran en la carpeta de Actividades que acompaña a este texto.

El archivo es una matriz de varias columnas: una con los valores de  $\Delta s$  en unidades de  $\mu m$  y las otras con la visibilidad  $V$  de las imágenes para “esas” líneas. Grafique la visibilidad como función de  $\Delta s$  y luego ajuste los datos a la exponencial teórica de la ecuación (3), para obtener la longitud de coherencia para la líneas verde de mercurio, roja de cadmio y la línea de sodio.

## REFERENCIAS

- [1.1] Kjell J. Gåsvik. Optical Metrology. John Wiley & Sons. Ltd. 3<sup>a</sup> Ed. 2002.
- [1.2] Jenkins Francis A., White Harvey E. Fundamentals of Optics. Mac Grow Hill Book Company. 3<sup>a</sup> Ed. 1957
- [1.3] Podoleanu A Gh . J Microsc. 247(3): 209–219. doi:10.1111/j.1365-2818.2012.03619.x. 2012
- [1.4] Hernández Cornejo Nalliely. El interferómetro de Michelson: entre el éter y las ondas gravitacionales. Metatheoria, 9(1): 29-49. ISSN 1853-2322 e ISSN 1853-2330. 2018.
- [1.5] Alanís Elvio, Romero Graciela, Martínez Carlos, Álvarez Liliana y Salazar Germán. An Inexpensive Interferometric Setup for Measuring Microscopic Displacements. The Physic Teacher, 42, 223-225, DOI 10.1119/1.1696590. 2004.
- [1.6] Alanís Elvio, Romero Graciela, Martínez Carlos. Análisis de Fourier de la intensidad en la determinación interferométrica de curvas de concentración. ANALES AFA. Vol. 9, 63-67. 1997
- [1.7] Crank, J. In the “Mathematic of Diffusion”. Oxford University Press. 1964
- [1.8] Jost, W. In the “Diffusion in solid, liquid and gases”. Academic Press-Inc. Publishers. New York. 1965
- [1.9] Manual del Interferómetro PASCO.
- [1.10] Andrea Monaldi, Informe BIEA 2019, material no publicado que se encuentra en la carpeta de material bibliográfico adjunta el texto. 2009

## CAPITULO 2: ANÁLISIS DE FOURIER- ÓPTICA DE FOURIER

Se ha encontrado experimentalmente [2.1] que muchos fenómenos físicos comparten la propiedad básica de que su respuesta a varios estímulos que actúan simultáneamente es idénticamente igual a la suma de las respuestas que cada estímulo componente produciría individualmente. Estos fenómenos se denominan lineales; y la propiedad que comparten se llama linealidad. Las redes eléctricas compuestas por resistencias, condensadores e inductores suelen ser lineales en una amplia gama de entradas. Además, como veremos en el Capítulo 4, la ecuación de onda que describe la propagación de luz a través de la mayoría de los medios nos lleva naturalmente a considerar las operaciones de imágenes ópticas como **mapeos lineales** de distribuciones de luz de "objetos" en distribuciones de luz de "imágenes".

La propiedad única de la linealidad conduce a una gran simplificación en la descripción matemática de tales fenómenos y representa el fundamento de una estructura matemática a la que nos referiremos aquí como teoría de sistemas lineales. La gran ventaja que ofrece la linealidad es la capacidad de expresar la respuesta (ya sea voltaje, corriente, amplitud de luz o intensidad de luz) a un estímulo complicado en términos de las respuestas a ciertos estímulos "elementales". Así, si un estímulo se descompone en una combinación lineal de estímulos elementales, cada uno de los cuales produce una respuesta conocida de forma conveniente, entonces, en virtud de linealidad, la respuesta total se puede encontrar como una combinación lineal correspondiente de las respuestas a los estímulos elementales.

Desde finales de la década de 1930, la importante rama de la física conocida como óptica ha desarrollado gradualmente vínculos cada vez más estrechos con las ciencias de la comunicación y la información de la ingeniería eléctrica. La tendencia es comprensible, ya que tanto los sistemas de comunicación como los de imágenes están diseñados para recopilar o transmitir información. En el primer caso, la información es generalmente de naturaleza temporal (por ejemplo, una forma de onda de voltaje o corriente modulada), mientras que en el último caso es de naturaleza espacial (por ejemplo, una distribución de amplitud o intensidad de luz en el espacio), pero de un resumido punto de vista, esta diferencia es bastante superficial.

Nuestro propósito aquí se limita a familiarizar al lector en el análisis de funciones de dos variables independientes. No se pretende alcanzar un gran rigor matemático, sino que se adoptará un enfoque operativo. Se procurará refrescar los conceptos aprendidos en Análisis Matemático III y adquirir la destreza para aplicarlos en el estudio de la Óptica. Vamos a centrar nuestra atención en el análisis de **funciones de dos variables independientes**. veremos las herramientas matemáticas que nos serán útiles para describir fenómenos de Difracción y Formación de Imágenes y discutiremos algunas de las descomposiciones matemáticas que serán frecuentemente empleadas en su análisis

Las técnicas que discutiremos fueron desarrolladas por Jean Baptiste Joseph Barón de Fourier (1768-1830). Originalmente Fourier las aplicó al estudio de problemas de flujo de calor. Anecdóticamente, se sabe que su primera publicación fue rechazada porque Lagrange, quien no creía que las series propuestas por Fourier convergerían [2.2]. En el siglo XVIII, los matemáticos no veían una función como una serie infinita de términos y el enfoque presentado por Fourier requería una modificación importante de sus pensamientos. Fourier no descubrió ninguno de los principales resultados de la teoría que lleva su nombre. Dirichlet fue uno de los principales contribuyentes al desarrollo de la teoría, estableciendo algunos de los criterios de convergencia para la serie. La teoría de Fourier establece que una serie de Fourier, que es una suma de funciones sinusoidales, se puede usar para describir cualquier función periódica y la transformada de Fourier, una transformación integral, se puede usar para describir funciones no periódicas. Nuestras discusiones sobre las ondas de luz de los capítulos anteriores, se han limitado a luz monocromática y principalmente frentes de onda plana. Aprenderemos en capítulos posteriores que la teoría de Fourier, desarrollada para manejar múltiples frecuencias, puede usarse para describir un frente de onda arbitrario en términos de combinaciones de ondas planas. Las técnicas matemáticas para manejar múltiples frecuencias y frentes de onda arbitrarios, basadas en la teoría de Fourier, forman las bases del enfoque moderno de la óptica física. La teoría de Fourier permite la representación de una función en términos de su frecuencia o características temporales y permite moverse fácilmente entre las dos representaciones. La capacidad de pasar de una

representación temporal a una frecuencia y viceversa, proporcionada por la teoría de Fourier, permite desarrollar la teoría de la óptica utilizando frecuencias únicas y sencillas.

## 2.1 SERIES DE FOURIER – CONDICIONES DE EXISTENCIA

El **Teorema de Fourier**, como fuera establecido y probado por Dirichlet, es:

Si una función  $f(t)$  es periódica y tiene un numero finito de discontinuidades ordinarias en el intervalo correspondiente a un período, entonces puede ser representada por una serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(l\omega t) + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin(l\omega t) \quad (2.1)$$

Los requerimientos a la función  $f(t)$  son satisfechos por cualquier función que represente un fenómeno físico. La función es periódica de periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . En la serie de la ecuación 2.1  $a_0$  se denomina término DC porque está asociado con la frecuencia cero,  $l = 0$  y se puede demostrar, multiplicando ambos miembros de la ecuación 2.1 por  $dt$  e integrando sobre un período, que esta constante resulta:

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t) dt \quad (2.2 \text{ a})$$

Mediante operaciones simples se puede demostrar que los términos de cosenos y senos resultan:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (2.2 \text{ b})$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (2.2 \text{ c})$$

Las ecuaciones 2.2 b y c se denominan fórmulas de Euler, como reconocimiento a sus trabajos relacionados con el desarrollo de las series.

Las series de senos y cosenos pueden ser usadas individualmente para representar cierta clase de funciones, si la función es par,  $f(t) = f(-t)$ , entonces puede ser representada por la serie de cosenos y si es impar,  $f(t) = -f(-t)$ , sólo con la serie de senos. Si  $f(t)$  no es ni par ni impar entonces ambas series se requieren para representarla.

La representación de Fourier de la ecuación 2.1 es adecuada para analizar funciones reales, pero para extender nuestro estudio a las transformadas de Fourier debemos expresarla en términos de series exponenciales. Para ello, usando las identidades trigonométricas deducidas a partir de la fórmula de Euler se puede reformular la ec. 2.1 obteniéndose,

$$f(t) = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \alpha_l e^{il\omega t} \quad (2.3)$$

donde,

$$\alpha_l = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t) e^{-il\omega t} dt \quad (2.4)$$

y reemplazando  $t$  por  $-t$  en esta última expresión podremos encontrar ciertas propiedades generales de los  $\alpha_l$ , las que se pueden resumir en:

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \alpha_{-l} & f(t) &\text{ par} \\ \alpha_l &= -\alpha_{-l} & f(t) &\text{ impar} \\ \alpha_l &\neq \alpha_{-l} & f(t) &\text{ ni par ni impar} \\ \alpha_l &\text{ complejos} & f(t) &\text{ ni par ni impar} \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo de aplicación de cómo aplicar la serie de Fourier a la onda cuadrada que se muestra en la figura de la derecha y que viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{k} \leq t \leq \frac{T}{k} \\ 0, & 0 \leq t \leq T - \frac{T}{k} \end{cases} \quad (2.5)$$

Donde  $k$  es una constante.

Calculando los  $\alpha_l$  según la ecuación 2.4, se obtiene:

$$a_l = -\frac{1}{2\pi li} \left\{ \exp \left[ -il \left( \frac{2\pi}{k} \right) \right] - \exp \left[ -il \left( \frac{2\pi}{k} \right) \right] \right\} = \frac{2 \operatorname{sen}(2\pi l/k)}{k \cdot 2\pi l/k} \quad (2.6)$$

Y

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/k}^{T/k} dt = \frac{1}{T} \left( \frac{T}{k} + \frac{T}{k} \right) = \frac{2}{k}$$

Como ejemplo tomemos  $k = 4$  la serie de Fourier vendrá dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2} + 2 \left( \cos \frac{\omega t}{\pi} - \cos \frac{3\omega t}{3\pi} + \cos \frac{5\omega t}{5\pi} \dots \right)$$

Donde se han combinado los exponentes positivos y negativos de la ecuación 2.3 para expresar la serie en términos de funciones cosenos. Esto no debe sorprendernos ya que como dijimos, las funciones pares como la onda cuadrada se expresan en términos de coseno.

En la Figura 2.1 se representa la serie de Fourier para  $l = 1, 3, 5$  y  $7$  cada término adicional agrega un término impar a los estimados previamente. Cuantos más términos agreguemos, la serie se hará una mejor representación de la onda cuadrada que intentamos representar. Según pruebas realizadas, con uno

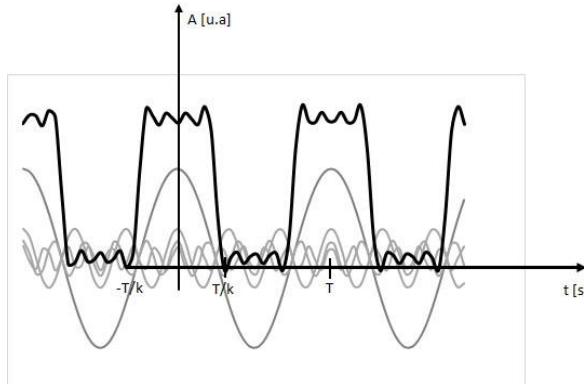


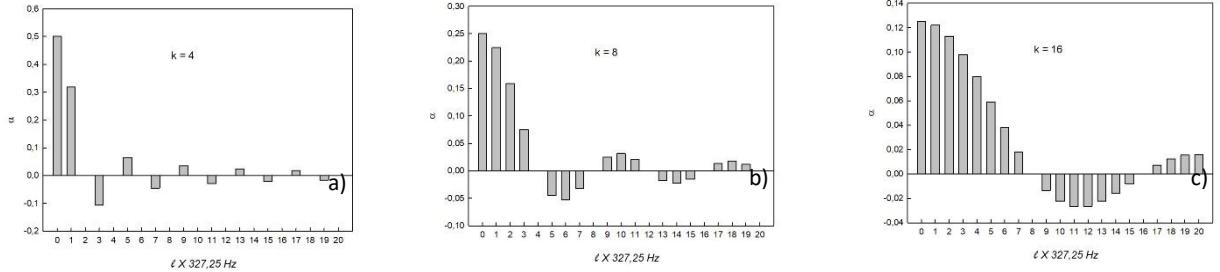
Figura 2.1: Aproximación por serie de Fourier de una onda cuadrada, con los armónicos fundamental, tercero quinto y séptimo

Un aumento de  $k$  es equivalente aumentar el período de la onda cuadrada. Si pensamos a cada parte positiva de la onda cuadrada como un pulso, entonces la amplitud del pulso disminuye a medida que  $k$  aumenta, y el tiempo entre pulsos aumenta. Podemos calcular fácilmente los coeficientes de los armónicos para tres ejemplos de ondas cuadradas con  $k = 4, 8$  y  $16$ . Los resultados del cálculo se muestran en la Tabla 2.1. Una forma conveniente de mostrar estos resultados es trazar el tamaño de los coeficientes  $\alpha_l$  en función de  $\omega l$ . Esta gráfica se llama espectro de frecuencias y se muestra en la Figura 2.2. Cada espectro muestra los coeficientes, es decir, las amplitudes, de cada una de las ondas armónicas en la serie de Fourier de una onda cuadrada con diferentes valores de  $k$ .

TABLA 2.1: Coeficientes de Fourier de una onda cuadrada. Sólo los 8 primeros.

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$
4	0.5	0.318	0	-0.106	0	0.064	0	-0.045	0
8	0.25	0.225	0.159	0.075	0	-0.045	-0.053	-0.032	0
16	0.125	0.122	0.113	0.098	0.080	0.059	0.038	0.018	0

Figura 2.2: Espectro de Frecuencias, onda cuadrada para a) T/2, b) T/4 y c) T/8



Estos espectros son simétricos respecto son simétricos alrededor de cero porque  $f(t)$  es simétrica. En los gráficos, solo mostramos los valores positivos de  $l$ . A medida que disminuimos el ancho del pulso cuadrado, es decir, aumentamos el valor de  $k$ , aparentemente las gráficas de los espectros tenderían a una curva suave de los  $\alpha_l$  en función  $\omega l$ . Al examinar el intervalo entre la frecuencia cero y la frecuencia de la primera aparición de un coeficiente cero, encontramos que el número de coeficientes contenidos en este intervalo aumenta a medida que disminuye la amplitud del pulso. Si medimos la posición del primer coeficiente cero en términos del armónico  $l$  asociado con el cero, vemos que la frecuencia  $\omega l$  a la que ocurre el cero aumenta a medida que disminuye el ancho del pulso. Encontraremos que esta relación recíproca entre frecuencia y tiempo es una propiedad fundamental de las series y transformaciones de Fourier.

En nuestro estudio de las series de Fourier hemos establecido que  $f(t)$  debía ser periódica, veamos de qué manera se puede extender esta teoría para aplicarla a funciones no periódicas. Podemos aplicar el desarrollo de Fourier a funciones no periódicas reconociendo que una función no periódica es en realidad una función periódica cuyo período es infinito. Permitir que el período de una función periódica se aproxime a infinito es una extrapolación del procedimiento utilizado para generar la Figura 2.2 c), es decir,  $k$  aumenta hasta que el ancho del pulso es una fracción infinitesimal del período  $T$ . Dado que  $\omega = \pi/T$ , tenemos que  $\omega \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow \infty$  y en el límite cuando la frecuencia fundamental se acerca a cero, la suma sobre los armónicos discretos de la frecuencia fundamental se convierte en una integral definida sobre una distribución continua de frecuencias.

Definiendo a  $\Delta\omega$  como la frecuencia fundamental, podemos reescribir la ecuación 2.3 en términos de la ecuación 2.4 como sigue:

$$f(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \left\{ \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(t) e^{-il\Delta\omega t} dt \right\} e^{il\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (2.7)$$

Si  $\Delta\omega \rightarrow 0$  los armónicos que componen la distribución se acercan infinitamente entre sí y, en el límite, reemplazamos el conjunto discreto de armónicos con una función continua,

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} (l\Delta\omega) = \omega$$

También tomando el límite, el período se approxima a infinito.

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} (T) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left( \pm \frac{\pi}{\Delta\omega} \right) = \pm\infty$$

Reemplazando en la ecuación 2.7 y tomando límite se obtiene:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \quad (2.8)$$

Definimos a la función  $F(\omega)$  como la transformada de Fourier de  $f(t)$ :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega t} d\tau \quad (2.9)$$

Como la transformación de una representación temporal a una en frecuencia dada por la ecuación 2.9, no destruye ninguna información la transformación inversa puede obtenerse simplemente sustituyendo 2.9 en 2.8.

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.10)$$

$f(t)$  y  $F(\omega)$  se denotan como pares de transformadas de Fourier. La función no periódica  $f(t)$  está representada por un número infinito de funciones sinusoidales con frecuencias angulares infinitamente próximas entre sí.  $F(\omega)$  mide la densidad espectral, es decir, la contribución fraccional de la frecuencia  $\omega$  a la representación de la función. El valor absoluto de  $F(\omega)$  se llama espectro de la función  $f(t)$ .

Hasta ahora hemos escrito las relaciones 2.9 y la 2.10 en términos de tiempo y frecuencia, pero podríamos reemplazar el tiempo por una variable espacial por ejemplo  $x$ . La variable transformada o conjugada debe ser recíproca, esto es, cuando la variable es distancia la variable conjugada o recíproca es  $1/distancia$ . Las variables conjugadas de las variables espaciales se denominan *frecuencias espaciales* y en óptica, es el módulo del vector de onda  $k$ . Otro ejemplo de variables conjugadas son las redes periódicas y las redes recíprocas que son miembros del par de transformada de Fourier tridimensionales usadas en cristalográfia.

Hay condiciones de validez, denominadas condiciones de Dirichlet que se imponen a  $f(t)$  para asegurar la existencia de  $F(\omega)$  dichas condiciones establecen que  $f(t)$  debe ser:

- 1- Univaluada
- 2- Tener un numero finito de máximos y mínimos en un intervalo finito.
- 3- Tener un número finito de discontinuidades finitas, pero no infinitas en un intervalo finito.
- 4- Tener un espectro finito de frecuencias.

El enfoque que hemos utilizado para obtener la transformada de Fourier no sería satisfactorio desde un punto de vista puramente matemático. Sería más correcto considerar la serie de Fourier como un caso especial de la transformada de Fourier. En este caso, las condiciones válidas para la serie se derivan naturalmente de una exposición de las condiciones para la transformada. Estas condiciones las cumplen todas las funciones que representan fenómenos físicos, pero no así las funciones útiles como las constantes y las funciones periódicas. Las técnicas que implican el uso de límites permiten incluir estas funciones útiles. Estas complicaciones también pueden sortearse cuando se utiliza la teoría de las funciones generalizadas.

No es obvio como implementar los pares de transformadas dadas por las ecuaciones 2.9 y 2.10. Si expresamos la transformada en término de la parte real e imaginaria, se tiene:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega t) d\tau - i \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega t) d\tau \quad (2.11)$$

Si  $f(\tau)$  es una función real entonces su transformada de Fourier se obtiene calculando las transformadas coseno y seno, las que vienen dadas por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau \quad (2.12)$$

Y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega \tau) d\tau \quad (2.13)$$

respectivamente. Si además la función, que no solo es una función de variable real, sino que también es par, sólo se deberá calcular la transformada coseno. Si la función  $f(\tau)$  es compleja, se puede expresar como  $f(\tau) = \eta(\tau) + i\xi(\tau)$  y la transformada de Fourier será:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau - i \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau \right] \quad (2.14)$$

lo que demuestra que para calcular la transformada de Fourier de una función, en general debemos calcular las transformadas seno y coseno de las parte real e imaginaria de la función  $F(\tau)$ .

El cálculo de la transformada de Fourier se puede realizar en forma automática en forma digital, siguiendo el algoritmo denominado FFT (Fast Fourier Transform) que desarrollaron Cooley y J.W. Tukey en 1965. En la actualidad existen 24 subrutinas basadas en este algoritmo en diversos paquetes de software.

En general la transformada de Fourier es una función compleja que viene dada por:  $F(\omega) = f(\omega)e^{-i\phi(\omega)}$  y para reasentarla gráficamente se muestran el espectro de amplitudes  $f(\omega)$  y el de fases  $\phi(\omega)$ . Si la función original  $f(\tau)$  es real y par entonces el espectro de fases es constante y se la ignora. A continuación, veamos algunos ejemplos de cálculo de transformadas de Fourier.

Empecemos calculando la transformada Fourier de un pulso rectangular al que definimos de la siguiente manera,

$$f(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.15)$$

En lo que sigue, algunas funciones especiales de uso frecuente óptica, serán designadas con un nombre particular, y las definiremos a medida que avancemos en el tema y las utilicemos. Para el caso del pulso rectangular de la ec. 2.14, simplemente le llamamos función rectángulo y la designamos con  $\text{rect}(t)$ .

Volviendo al ejemplo de la onda cuadrada de la ec. 2.5, la función  $\text{rect}(t)$  es un caso particular de la misma con  $k \rightarrow \infty$ . Para calcular la transformada de Fourier, usaremos la transformada coseno, ec. 2.12, la que se reduce a:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \cos(\omega t) dt = \frac{\operatorname{seno}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} \quad (2.16)$$

Esta última ecuación se puede interpretar como que  $\cos(\omega t)$  es una función de peso, a la que denominamos núcleo de la transformada. La forma y la duración de la función de ponderación determina el promedio temporal de  $f(t)$  dado por la ec. 2.16. En la Figura 2.3 se representa a la función de peso coseno como una superficie bidimensional en el espacio  $\omega - t$  [2.3].

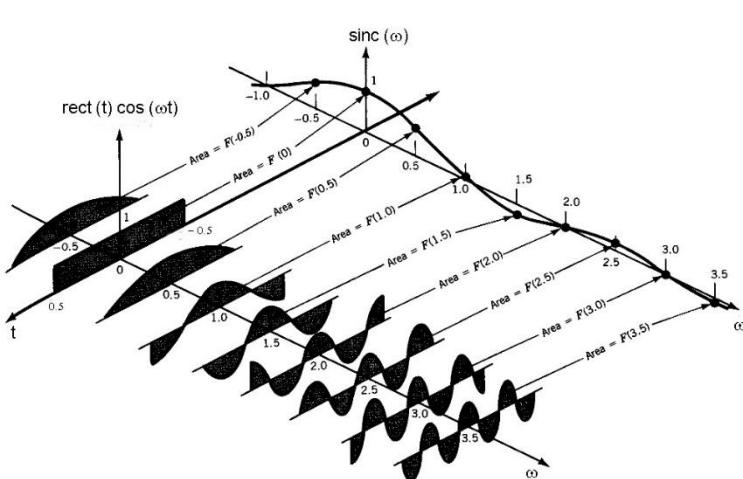


Figura 2.3: Construcción geométrica de la Transformada Integral de Fourier de un pulso rectangular.

Como puede observarse en esta representación, la función  $\text{rect}(t)$  “rebana” a la función de peso en dirección perpendicular al eje  $\omega$ . La extensión de la función de peso viene determinada por  $\text{rect}(t)$ . El valor  $F(\omega)$  para cada frecuencia es entonces, el área bajo la función  $\cos(\omega t)$ . Algunos puntos representativos se muestran en gráfica de la Figura 2.3, a la izquierda.

La transformada de Fourier del pulso rectangular, es el espectro continuo que se muestra en la Figura 2. 4, y viene dado por la función

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (2.17)$$

Donde  $x$  puede representar a  $\omega$  o a  $k$ .

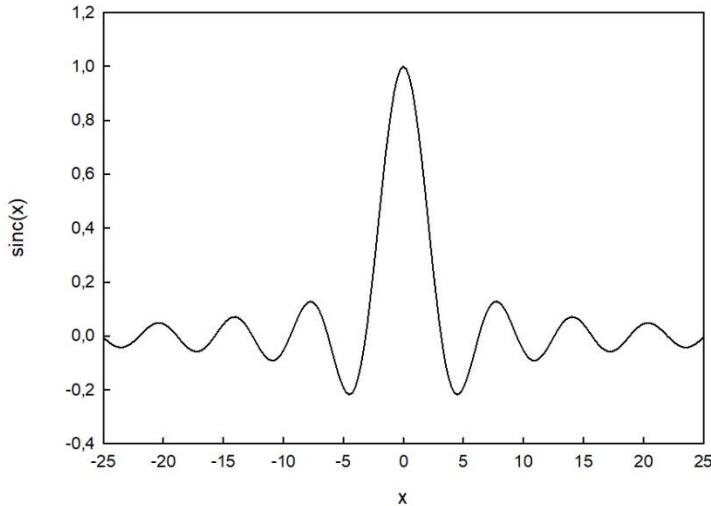


Figura 2.4: Función Seno Cardinal.

Esta función es muy usada, en especial en óptica. por lo que recibe su propio nombre, función  $\text{sinc}(x)$  o Seno Cardinal, y la misma se anula cada vez que  $x = n\pi$ . En  $x = 0$  su valor es indeterminado, pero usando la regla de L'Hopital se encuentra que su valor es 1. Algunos textos, definen a la función  $\text{sinc}$  como:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (2.18)$$

esto, tiene la ventaja de que los ceros se dan para valores enteros de  $x$ .

Comparando la gráfica de la Figura 2.5, con la envolvente de los coeficientes de la serie de Fourier de la Figura 2.2 c), vemos que son equivalentes y también que si comparamos los coeficientes de la serie de Fourier dados por la ecuación 2.6 con la ecuación 2.18, vemos que 2.6 es una representación discreta de 2.18.

## 2.2 ANÁLISIS DE FOURIER EN DOS DIMENSIONES.

La información óptica, nuestro objeto de estudio, en general, puede ser descripta matemáticamente por funciones de dos variables. Por lo que en esta sección vamos a extender nuestro estudio al análisis de funciones de dos variables independientes. No se pretende hacer uso de un gran rigor matemático, sino más bien, una revisión del enfoque característico de la mayoría de los tratamientos de los diferentes temas relacionados con el procesamiento de la información óptica.

La transformada de Fourier [2.1], o alternativamente el espectro de Fourier, de una función  $g$  de dos variables independiente  $x$  e  $y$  se define:

$$\mathcal{F}\{g\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (2.19)$$

Así definida la transformada de Fourier es en sí misma, una función de valor complejo de dos variables independientes,  $f_x$  y  $f_y$  a las que generalmente denominaremos como **frecuencias**. Del mismo modo, la transformada de Fourier inversa  $G(f_x, f_y)$  será representada por  $\mathcal{F}^{-1}\{g\}$  y viene definida por:

$$\mathcal{F}^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y \quad (2.20)$$

Se debe notar que, como operaciones matemáticas, la transformada y la transformada inversa son muy similares y sólo difieren en el signo del exponente en el integrando. La transformada inversa de Fourier suele denominarse como la representación integral de Fourier de la función  $g(x, y)$ .

Antes de discutir las propiedades de la transformada bidimensional de Fourier y su inversa, al igual que en la sección anterior primero debemos decidir cuándo (2.19) y (2.20) son de hecho significativas. Para ciertas funciones, estas integrales pueden no existir en el sentido matemático habitual y, por lo tanto, esta discusión estaría incompleta sin al menos una breve mención de las "condiciones de existencia". Si bien es posible una variedad de conjuntos de condiciones suficientes para la existencia de (2.19), quizás el conjunto más común sea el siguiente:

- 1-  $g$  es absolutamente integrable en el plano infinito  $x - y$
- 2-  $g$  debe tener un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en cualquier rectángulo finito.
- 3-  $g$  no debe tener infinitas discontinuidades

En general, cualquiera de estas condiciones de existencia puede debilitarse al precio de fortalecer una o ambas condiciones complementarias, pero tales consideraciones nos llevan bastante lejos de nuestros propósitos aquí. Como ha señalado Bracewell [2.4], "la posibilidad física es una condición suficientemente válida para la existencia de una transformación". Sin embargo, a menudo es conveniente en el análisis de sistemas, representar formas de onda físicas verdaderas mediante funciones matemáticas idealizadas, y para tales funciones se pueden violar una o más de las condiciones de existencia anteriores. Por ejemplo, es común representar un pulso de tiempo fuerte y estrecho mediante la llamada función delta de Dirac a menudo representada por:

$$\delta(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} N e^{(-N^2 \pi t^2)} \quad (2.21)$$

donde la operación de límite proporciona una construcción mental conveniente, pero no debe tomarse literalmente. De manera similar, una fuente puntual idealizada de la luz a menudo se representa por el equivalente bidimensional,

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 e^{[-N^2 \pi (x^2 + y^2)]} \quad (2.22)$$

tales "funciones", toman el valor 1 en el origen y 0 en otro lado, tienen infinitas discontinuidades y por lo tanto, no satisfacen la condición de existencia número 3. Se encuentran otras funciones como la función constante  $f(x, y) = 1$  y la función  $f(x, y) = \cos(2\pi f_x x)$  ambas fallan en satisfacer la condición de existencia 1.

Si la mayoría de las funciones de interés deben incluirse en el marco del análisis de Fourier, se requiere cierta generalización de la definición (2.19). Afortunadamente, a menudo es posible encontrar una transformación significativa de funciones que no satisfacen estrictamente las condiciones de existencia, siempre que esas funciones puedan definirse como el límite de una secuencia de funciones que son transformables. Al transformar cada función miembro de la secuencia de definición, se genera una secuencia correspondiente de transformadas, y llamamos al límite de esta nueva secuencia la transformada de Fourier generalizada de la función original. Las transformaciones generalizadas se pueden manipular de la misma manera que las transformaciones convencionales y la distinción entre los dos casos generalmente puede ignorarse.

Para ilustrar el cálculo de una transformada generalizada, considere la función delta de Dirac, que viola la condición de existencia 3. Hay que tener en cuenta que cada función miembro de la secuencia de definición (2.22) satisface los requisitos de existencia y que cada uno, de hecho, tiene una transformada de Fourier dada por:

$$\mathcal{F}\{N^2 e^{[-N^2 \pi (x^2 + y^2)]}\} = e^{\left[ -\frac{\pi(f_x^2 + f_y^2)}{N^2} \right]} \quad (2.23)$$

Luego, la transformada generalizada de  $\delta(x, y)$  vendrá dada por:

$$\mathcal{F}\{\delta(x, y)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\left[-\frac{\pi(f_x^2 + f_y^2)}{N^2}\right]} = 1 \quad (2.24)$$

por lo tanto, el espectro de Fourier de la función delta bidimensional se extiende uniformemente sobre todo el dominio.

### 2.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER COMO UNA DESCOMPOSICIÓN.

Como mencionamos al inicio de este capítulo, cuando se trata de sistemas lineales, a menudo es útil descomponer una entrada complicada en un cierto número de entradas más simples, para calcular la respuesta del sistema a cada una de estas funciones "elementales" y superponer las respuestas para encontrar la respuesta total. El análisis de Fourier proporciona los medios básicos para realizar tal descomposición, consideremos la relación de transformación inversa de la ecuación 2.20, que permite expresar a la función  $g(x, y)$  en términos de su espectro de frecuencias. Podemos considerar a esta expresión como una descomposición de la función  $g(x, y)$  en una combinación lineal (en este caso una integral) de funciones elementales, cada una con una forma específica  $e^{i2\pi(f_x x + f_y y)}$ . A partir de esto, queda claro que el número complejo  $G(f_x, f_y)$  es simplemente un factor de ponderación que debe ser aplicado a la función elemental de frecuencia  $(f_x, f_y)$  para sintetizar la función  $g(x, y)$ .

Las funciones elementales, tienen varias propiedades interesantes. Por ejemplo, para cualquier par de frecuencias  $(f_x, f_y)$  la función elemental correspondiente tiene una fase que es cero o un múltiplo entero de  $2\pi \text{ rad}$  a lo largo de las rectas descritas por la ecuación:

$$y = -\frac{f_x}{f_y}x + \frac{n}{f_y} \quad (2.25)$$

donde  $n$  es un entero. Como se desprende de la gráfica de esta familia de rectas, Fig. 2-5, las funciones elementales se pueden visualizar como una familia de rectas "dirigidas" en el plano  $(x, y)$  formando un ángulo

$$\theta = \operatorname{actg}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) \quad (2.26)$$

con el eje  $x$ .

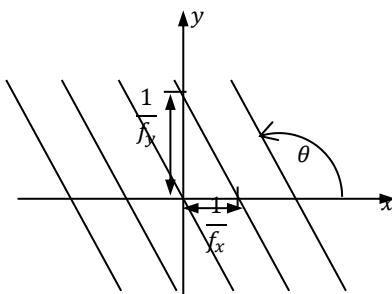


Figura 2.5: Rectas de fase cero para la función  $e^{i2\pi(f_x x + f_y y)}$ .

El período espacial, o sea, la distancia entre líneas de fase cero, viene dada por:

$$L = \frac{1}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2}}$$

Resumiendo, podemos decir que la transformada de Fourier inversa proporciona un medio para descomponer funciones matemáticas. El espectro de Fourier  $G$  de una función  $g$  es simplemente una descripción de los factores de ponderación que deben aplicarse a cada función elemental para sintetizar la  $g$  deseada. La ventaja real de utilizar esta descomposición se verá más adelante cuando veamos los sistemas lineales invariantes.

## 2.4 TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

La definición básica de la transformada de Fourier conduce a una rica estructura matemática asociada con la operación de transformación. Ahora consideramos algunas de las propiedades matemáticas básicas de la transformada, propiedades que encontrarán un amplio uso en temas posteriores. Estas propiedades se presentan como teoremas matemáticos, seguidos por breves descripciones de su significado físico. Para las demostraciones se recomienda ver el Apéndice A de la referencia [2.1].

**1. Teorema de Linealidad:**  $\mathcal{F}\{\alpha g + \beta h\} = \alpha\mathcal{F}\{g\} + \beta\mathcal{F}\{h\}$  es decir, la transformada de una suma ponderada de dos (o más) funciones es simplemente la suma igualmente ponderada de sus transformaciones individuales.

**2. Teorema de Similaridad:** Si  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$  entonces,

$$\mathcal{F}\{g(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right) \quad (2.27)$$

O sea que un “estiramiento” de las coordenadas en el dominio especial, resulta en una contracción de las coordenadas en el dominio de frecuencias más un cambio global la amplitud del espectro.

**3. Teorema del corrimiento:** Si  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$  entonces,

$$\mathcal{F}\{g(x - a, y - b)\} = G(f_x, f_y)e^{-i2\pi(ax+by)} \quad (2.28)$$

o sea, una traslación en el dominio espacial introduce un corrimiento lineal de fase en el dominio de frecuencias.

**4. Teorema de Rayleigh o Teorema de Parseval:** Si  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$  entonces,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |G(f_x, f_y)|^2 df_x df_y \quad (2.29)$$

La integral del lado izquierdo de este teorema se puede interpretar como la energía contenida en la forma de onda  $g(x, y)$ . Esto, a su vez, nos lleva a la idea de que la cantidad  $|G(f_x, f_y)|^2$  se puede interpretar como una densidad de energía en el dominio de la frecuencia.

**5. Teorema de la Convolución:** Si  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$  y  $\mathcal{F}\{h(x, y)\} = H(f_x, f_y)$  entonces,

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta)h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta\right\} = G(f_x, f_y)H(f_x, f_y) \quad (2.30)$$

La convolución de dos funciones en el dominio del espacio (una operación que surgirá con frecuencia en la teoría de sistemas lineales) es enteramente equivalente a la operación más simple de multiplicar sus transformadas individuales y la transformación inversa.

**6. Teorema de la Autocorrelación:** Si  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$  entonces,

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta)h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta\right\} = G(f_x, f_y)H(f_x, f_y) \quad (2.31)$$

La convolución de dos funciones en el dominio del espacio (una operación que surgirá con frecuencia en la teoría de sistemas lineales) es enteramente equivalente a la operación más simple de multiplicar sus transformadas individuales y la transformación inversa.

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta)g^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta\right\} = |G(f_x, f_y)|^2 \quad (2.32)$$

Similarmente,

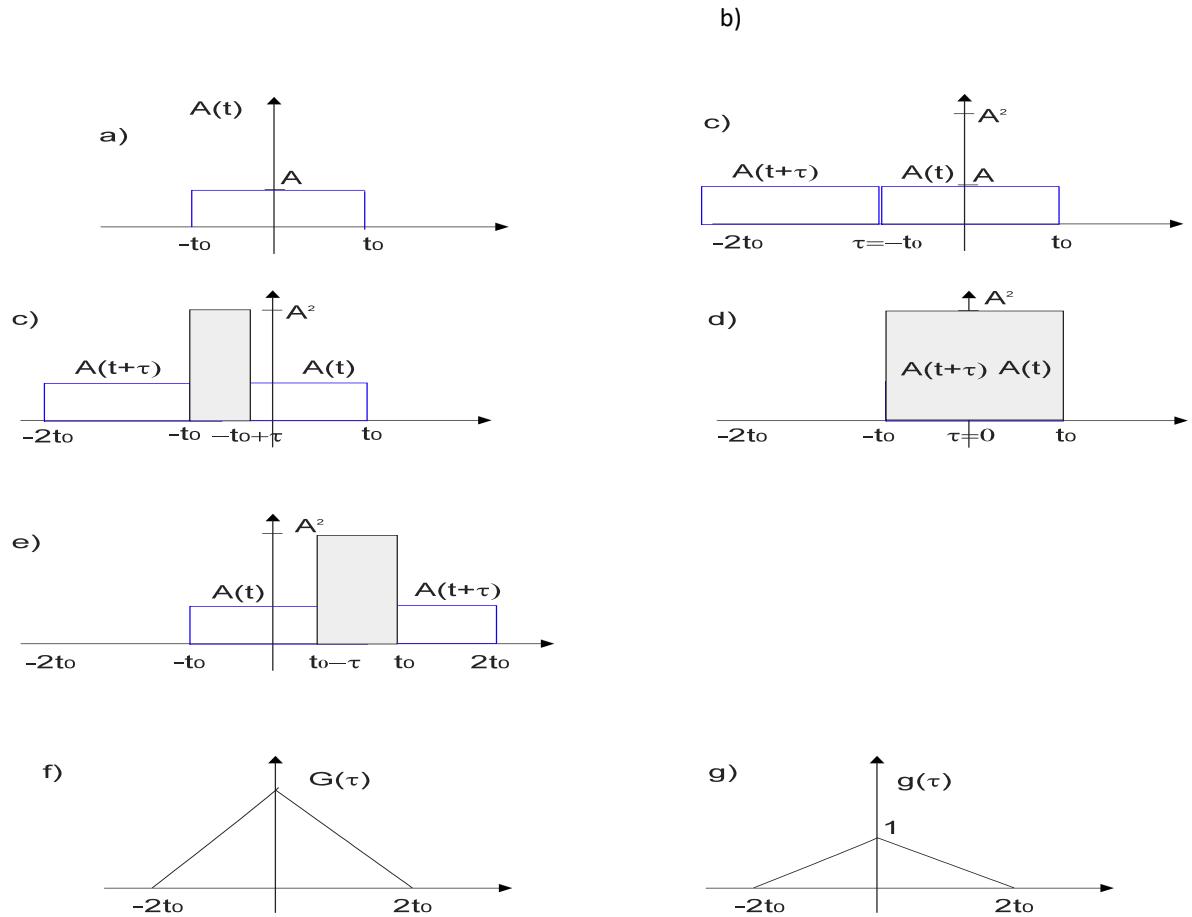
$$\mathcal{F}\{|g(x, y)|^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta)G^*(\xi - f_x, \eta - f_y) d\xi d\eta \quad (2.33)$$

Este teorema puede considerarse como un caso especial del teorema de convolución en el que se convoluciona  $g(x, y)$  con  $g^*(-x, -y)$ .

*Intuición de física de la auto correlación sea:*

$$A(t) = \begin{cases} A & -t_0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases}$$

En la siguiente gráfica se puede ver el significado físico de lo que significa hacer la autocorrelación:



**7. Teorema Integral de Fourier:** En cada punto de continuidad de  $g(x, y)$ ,

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{g(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(x, y)\} = g(x, y) \quad (2.34)$$

En cada punto de discontinuidad de  $g$ , las dos transformadas sucesivas producen el promedio angular de los valores de  $g$  en una pequeña vecindad de ese punto. Es decir, la transformación sucesiva y la transformación inversa de una función produce esa función nuevamente, excepto en los puntos de discontinuidad.

Los teoremas de transformación anteriores tienen mucho más que un interés teórico. Se utilizarán con frecuencia, ya que proporcionan las herramientas básicas para la manipulación de transformadas de Fourier y pueden ahorrar enormes cantidades de trabajo en la solución de problemas de análisis de Fourier.

## 2.5 FUNCIONES DE VARIABLES SEPARABLES.

Una función de dos variables independientes se llama separable con respecto a un sistema de coordenadas específico si se puede escribir como un producto de dos funciones, cada una de las cuales depende de una sola de las variables independientes. Por tanto, la función  $g$  es separable en coordenadas rectangulares  $(x, y)$  si

$$g(x, y) = g_X(x)g_Y(y) \quad (2.35)$$

mientras que es separable en coordenadas polares  $(r, \theta)$  si:

$$g(r, \theta) = g_R(r)g_\theta(\theta) \quad (2.36)$$

Las funciones separables son a menudo más convenientes de tratar que las funciones más generales, ya que la separabilidad a menudo permite que las manipulaciones bidimensionales complicadas se reduzcan a manipulaciones unidimensionales más simples. Por ejemplo, una función separable en coordenadas rectangulares tiene la propiedad particularmente simple de que su transformada de Fourier bidimensional se puede encontrar como un producto de transformadas de Fourier unidimensionales, como lo demuestra la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g(x, y)\} &= \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_X(x) e^{-i2\pi(f_x x)} dx \int_{-\infty}^{\infty} g_Y(y) e^{-i2\pi(f_y y)} dy = \mathcal{F}\{g_X(x)\}\mathcal{F}\{g_Y(y)\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Así, la transformada de  $g$  es en sí misma separable en un producto de dos factores, uno en función de  $f_x$  solamente y el segundo en función de  $f_y$  solamente, y el proceso de transformación bidimensional se simplifica a una sucesión de manipulaciones unidimensionales más familiares. Las funciones separables en coordenadas polares no se manejan tan fácilmente como las separables en coordenadas rectangulares, pero en general es posible demostrar que las manipulaciones bidimensionales se pueden realizar mediante una serie de manipulaciones unidimensionales.

## 2.6 FUNCIONES CON SIMETRÍA CIRCULAR: TRANSFORMADA DE FOURIER-BESSEL.

La clase más simple de funciones separables en coordenadas polares está compuesta por aquellas que poseen simetría circular. Se dice que la función  $g$  es circularmente simétrica si se puede escribir solo como una función de  $r$ , es decir,

$$g(r, \theta) = g_R(r) \quad (2.38)$$

Estas funciones juegan un papel importante en los problemas de interés aquí, ya que la mayoría de los sistemas ópticos tienen precisamente este tipo de simetría. Por consiguiente, dedicamos especial atención al problema de la transformada de Fourier una función circularmente simétrica.

La transformada de Fourier de  $g$  en un sistema de coordenadas rectangulares está dada por:

$$G(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (2.39)$$

Para aprovechar al máximo la simetría circular de  $g$ , hacemos una transformación a coordenadas polares en los planos  $(x, y)$  y  $(f_x, f_y)$  mediante las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} & x &= r \cos \theta \\ \theta &= \arctg \left( \frac{y}{x} \right) & y &= r \sin \theta \\ \rho &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2} & f_x &= \rho \cos \phi \\ \phi &= \arctg \left( \frac{f_x}{f_y} \right) & f_y &= \rho \sin \phi \end{aligned} \quad (2.40)$$

En principio consideraremos la transformación tanto en radio como ángulo, así que la transformada en coordenadas polares será  $\mathcal{F}\{g\} = G_o(\rho, \phi)$ . Aplicando las transformaciones 2.40,

$$G_o(\rho, \phi) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r g_R(r) e^{[-i2\pi r\rho(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)]} dr \quad (2.41)$$

O equivalentemente,

$$G_o(\rho, \phi) = \int_0^{\infty} r g_R(r) dr \int_0^{2\pi} e^{[-i2\pi r\rho\cos(\theta-\phi)]} d\theta \quad (2.42)$$

La segunda integral se puede resolver haciendo uso de la identidad de la Función Bessel:

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{[-ia\rho\cos(\theta-\phi)]} d\theta \quad (2.43)$$

donde, como se vio en Análisis Matemático III,  $J_0$  es la función de Bessel de orden cero y de primera especie y  $a = 2\pi r\rho$ . Sustituyendo 2.43 en 2.42, se obtiene:

$$G_o(\rho, \phi) = G_o(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} r g_R(r) J_0(2\pi r\rho) dr \quad (2.44)$$

esto nos dice que, la transformada de Fourier de una función circularmente simétrica es en sí misma circularmente simétrica y se puede encontrar realizando la manipulación unidimensional de (2.44). Esta forma particular de la transformada de Fourier ocurre con la frecuencia suficiente para justificar una designación especial; En consecuencia, se le conoce como la transformada de Fourier-Bessel, o alternativamente como la transformada de Hankel de orden cero.

Por medio de argumentos idénticos a los utilizados anteriormente, la transformada de Fourier inversa de un espectro circularmente simétrico  $G_o(\rho)$  se puede expresar como:

$$g_R(r) = \int_0^{\infty} G_o(\rho) J_0(2\pi r\rho) d\rho \quad (2.45)$$

Por lo tanto, para funciones circularmente simétricas no hay diferencia entre la transformación y la operación de transformación inversa. Usando la notación  $\mathcal{B}\{\cdot\}$  para representar la operación de la transformada de Fourier-Bessel, por el teorema de la integral de Fourier que en cada valor de  $r$  donde  $g_R(r)$  es continua se tiene:

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}\{g_R(r)\} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{B}\{g_R(r)\} = \mathcal{B}\mathcal{B}\{g_R(r)\} = g_R(r) \quad (2.46)$$

Además, por el teorema de similaridad se puede demostrar que:

$$\mathcal{B}\{g_R(r)\} = \frac{1}{a^2} G_o\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad (2.47)$$

Cuando se usa la expresión (2.44) para la transformada de Fourier-Bessel, se debe recordar que no es más que un caso especial de la transformada de Fourier bidimensional y, por lo tanto, cualquier propiedad familiar de la transformada de Fourier tiene una contraparte equivalente en la terminología de las transformadas de Fourier-Bessel.

## 2.7 FUNCIONES ESPECIALES.

Varias funciones matemáticas encontrarán un uso tan extenso tanto en Óptica I como en la optativa Óptica II que se puede ahorrar tiempo y esfuerzo considerable si les asigna notaciones especiales propias. En consecuencia, adoptamos las siguientes definiciones de algunas funciones de uso frecuente:

Función Rectángulo

$$rect(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función Seno Cardinal

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

Función Signo

$$\text{sng}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Función Triángulo

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Función Peine

$$\text{comb}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

Función Círculo

$$\text{circle}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Las primeras cinco de estas funciones, representadas en la figura 2.6, son todas funciones de una sola variable independiente; sin embargo, se pueden formar una variedad de funciones separables en dos dimensiones por medio de productos de estas funciones. La función del círculo es, por supuesto, única para el caso de variables bidimensionales.

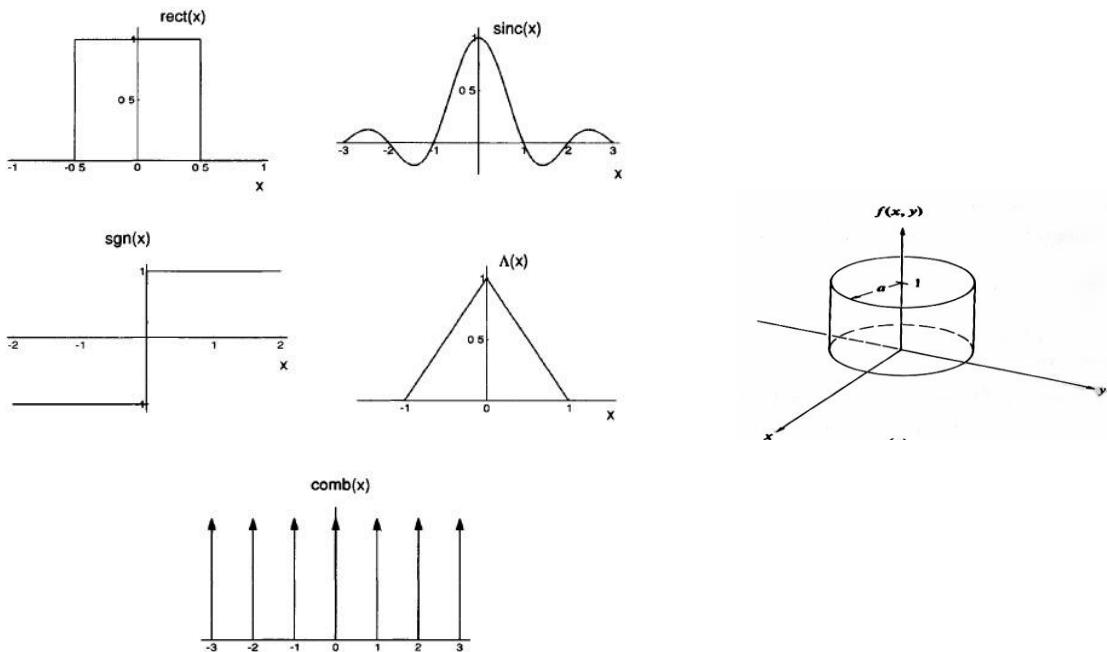


Figura 2.6: Funciones Especiales

Finalmente, concluimos nuestro estudio del análisis de Fourier presentando algunos pares de transformadas bidimensionales específicos. En la tabla 2.2 se muestran una serie de transformadas de funciones separables en coordenadas rectangulares. Por simplicidad, las funciones se presentan con constantes de escala arbitrarias. Dado que las transformaciones de tales funciones se pueden encontrar directamente a partir de productos de transformaciones unidimensionales familiares, las pruebas de estas relaciones se dejan para la ejercitación.

Por otro lado, con algunas excepciones (por ejemplo,  $e^{-\pi(f_x x + f_y y)}$ , que es separable en coordenadas rectangulares y circularmente simétrica), las transformaciones de la mayoría de las funciones circularmente simétricas no se pueden encontrar fácilmente a partir del conocimiento de las transformadas unidimensionales. A modo de ejemplo, veamos el caso de la función simetría circular más utilizada como la función circulo. En coordenadas polares:

TABLA 2.1: Transformada de Fourier de funciones especiales bidimensionales

FUNCIÓN	TRANSFORMADA
$e^{-\pi(x^2+y^2)}$	$ex^{-\pi(f_x^2+f_y^2)}$
$rec(x)rec(y)$	$sinc(f_x)sinc(f_y)$
$\Lambda(x)\Lambda(y)$	$sinc^2(f_x)sinc^2(f_y)$
$\delta(x,y)$	1
$e^{i\pi(x+y)}$	$\delta(f_x - 1/2, f_y - 1/2)$
$sgn(x)sgn(y)$	$\frac{1}{i\pi f_x} \frac{1}{i\pi f_y}$
$comb(x)comb(y)$	$comb(f_x)comb(f_y)$
$circ(r) = \begin{cases} 1 & r < 1 \\ 0,5 & r = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$	

Usando la expresión de la transformada de Fourier-Bessel (2.44), la transformada de la función del círculo se puede escribir

$$\mathcal{B}\{circ(r)\} = 2\pi \int_0^1 r J_0(2\pi r\rho) dr$$

Haciendo el cambio de variables  $r' = 2\pi r\rho$  y la identidad

$$\int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi = x J_1(x)$$

reescribimos a la transformada como:

$$\mathcal{B}\{circ(r)\} = \frac{1}{2\pi\rho^2} \int_0^1 r' J_0(r') dr' = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho} \quad (2.48)$$

donde  $J_1$  es una función de Bessel del primer tipo de orden 1. En la figura 2.7 se ilustra la función círculo y su transformada. Tenga en cuenta que la transformada es circularmente simétrica, como se esperaba, y consta de un

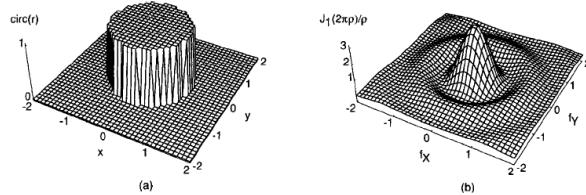


Figura 2.7: Función círculo y su transformada

## 2.8 FRECUENCIA ESPACIAL LOCAL Y LOCALIZACIÓN DE FRECUENCIAS ESPACIALES

Cada componente de Fourier de una función es una exponencial compleja de una frecuencia espacial única. Como tal, cada componente de frecuencia se extiende por todo el dominio  $(x, y)$ . Por lo tanto, no es posible asociar una lóbulo central y una serie de anillos concéntricos de amplitud decreciente. Su valor en el origen es  $\pi$ . Como curiosidad, observamos que los ceros de esta transformada no están igualmente espaciados en el radio. ubicación espacial con una frecuencia espacial particular. No obstante, sabemos que, en la práctica, ciertas partes de una imagen podrían contener líneas de cuadrícula paralelas con un cierto espacio fijo, y estamos tentados a decir que la frecuencia o frecuencias particulares representadas por estas líneas de cuadrícula se localizan en ciertas regiones espaciales de la imagen. En esta sección presentamos la idea de frecuencias espaciales locales y su relación con los componentes de Fourier. Para el propósito de esta discusión, consideraremos el caso general de funciones con valores complejos, que luego veremos que representan las distribuciones de amplitud y fase de ondas ópticas

monocromáticas. Por ahora, son solo funciones complejas. Cualquiera de estas funciones se puede representar en la forma

$$g(x, y) = a(x, y)e^{i\phi(x, y)} \quad (2.49)$$

donde  $a(x, y)$  es una distribución de amplitud real y no negativa, mientras que  $\phi(x, y)$  es una distribución de fase real. Para esta discusión asumimos que la distribución de amplitud  $a(x, y)$  es una función de  $(x, y)$ , que varía lentamente de modo que podemos concentrarnos en el comportamiento de la función de fase  $\phi(x, y)$ .

Definimos la frecuencia espacial local de la función  $g$  como un par de frecuencias  $(f_{lx}, f_{ly})$  dadas por:

$$f_{lx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \quad f_{ly} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \quad (2.50)$$

tanto  $f_{lx}$  como  $f_{ly}$  se definen como cero en regiones donde la función  $g(x, y)$  se anula.

Veamos el resultado de aplicar estas definiciones a la función compleja particular que representa una fase lineal exponencial de frecuencias  $(f_x, f_y)$  que viene dada por:

$$g(x, y) = e^{[i2\pi(f_x x + f_y y)]}$$

operando se obtiene:

$$f_{lx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial [2\pi(f_x x + f_y y)]}{\partial x} = f_x \quad f_{ly} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial [2\pi(f_x x + f_y y)]}{\partial y} = f_y$$

Por lo tanto, vemos que, para el caso de una sola componente de Fourier, las frecuencias locales de hecho se reducen a las frecuencias de esa componente, y esas frecuencias son constantes en todo el plano  $(x, y)$ .

A continuación, consideraremos una versión limitada en el espacio limitado de una función exponencial de fase cuadrática a la que llamamos una “función chirp” finita.

$$g(x, y) = e^{[i\pi\beta(x^2 + y^2)]} \text{rect}\left(\frac{x}{2L_X}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{2L_Y}\right) \quad (2.50)$$

Aplicando las definiciones de frecuencias locales, encontramos que pueden expresarse como:

$$f_{lx} = \beta x \text{rect}\left(\frac{x}{2L_X}\right) \quad f_{ly} = \beta y \text{rect}\left(\frac{y}{2L_Y}\right) \quad (2.51)$$

Vemos que en este caso las frecuencias espaciales locales dependen de la ubicación en el plano  $(x, y)$ ; dentro de un rectángulo de dimensiones  $2L_X \times 2L_Y$ ,  $f_{lx}$  varía linealmente con la coordenada  $x$  mientras que  $f_{ly}$  varía linealmente con la coordenada  $y$ . Por tanto, para esta función (y para la mayoría de las demás) existe una dependencia de la frecuencia espacial local de la posición en el plano  $(x, y)$ .

Dado que las frecuencias espaciales locales están limitadas a cubrir un rectángulo de dimensiones  $2L_X$  y  $2L_Y$ , sería tentador concluir que el espectro de Fourier de  $g(x, y)$  también está limitado a la misma región rectangular. De hecho, esto es aproximadamente cierto, pero no exactamente así. La transformada de Fourier de esta función viene dada por la expresión

$$G(f_x, f_y) = \int_{-L_X}^{L_X} \int_{-L_Y}^{L_Y} e^{i\pi\beta(x^2 + y^2)} e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (2.52)$$

Esta expresión es separable en coordenadas rectangulares, por lo que es suficiente para encontrar el espectro

$$G_X(f_x) = \int_{-L_X}^{L_X} e^{i\pi\beta x^2} e^{-i2\pi f_x x} dx$$

completando cuadrados en el exponente y haciendo el cambio de variable  $t = \sqrt{2\beta} \left( x - \frac{f_x}{\beta} \right)$  se obtiene:

$$G_X(f_x) = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} e^{-i\pi \frac{f_x^2}{\beta}} \int_{-\sqrt{2\beta} \left( L_X - \frac{f_x}{\beta} \right)}^{\sqrt{2\beta} \left( L_X + \frac{f_x}{\beta} \right)} e^{\frac{\pi t^2}{2}} dt$$

esta integral se puede expresar en términos de funciones tabuladas, las integrales de Fresnel, que se definen por

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad (2.53)$$

El espectro  $G_X$  puede ser expresada como:

$$G_X(f_x) = \frac{e^{-i\pi \frac{f_x^2}{\beta}}}{\sqrt{2\beta}} \left\{ C\left[\sqrt{2\beta} \left( L_X - \frac{f_x}{\beta} \right)\right] - C\left[\sqrt{2\beta} \left( -L_X - \frac{f_x}{\beta} \right)\right] + iS\left[\sqrt{2\beta} \left( L_X - \frac{f_x}{\beta} \right)\right] - iS\left[\sqrt{2\beta} \left( -L_X - \frac{f_x}{\beta} \right)\right] \right\}$$

La expresión de  $G_Y$  es, por supuesto, idéntica, excepto que el subíndice  $Y$  reemplaza al subíndice  $X$ . En la Figura 2.8 se muestra un gráfico de  $|G_X(f_x)|$  vs  $f_x$  para el caso particular de  $L_X = 10$  y  $\beta = 1$ . Como puede verse, el espectro es casi plano en la región  $(-L_X, L_X)$  y prácticamente cero fuera de esta región.

## 2.9 SISTEMAS LINEALES

Un sistema se define como un *mapeo* de un conjunto de funciones de entrada en un conjunto de funciones de salida. Para el caso de las redes eléctricas, las entradas y las salidas son funciones reales (corrientes y voltajes) de una variable unidimensional independiente (tiempo) mientras que, para el caso de los sistemas formadores de imágenes las entradas y las salidas pueden ser funciones de variable real (intensidad) o funciones de variables complejas (campo de amplitud) o una función bidimensional de variable independiente (espacio).

Si la atención se limita a sistemas deterministas (no aleatorios), entonces una entrada especificada debe mapear a una salida única. Sin embargo, no es necesario que cada salida corresponda a una entrada única, ya que, como veremos, una variedad de funciones de entrada no puede producir ninguna salida. Por lo tanto, restringimos la atención desde el principio a los sistemas caracterizados por *mapeos de muchos a uno*.

Como seguramente vieron en otras asignaturas como Mecánica Cuántica por ejemplo, una representación conveniente de un sistema es un operador matemático,  $\mathcal{S}\{\cdot\}$ , que imaginamos que opera en funciones de entrada para producir funciones de salida. Así, si la función  $g_1(x_1, y_1)$  representa la entrada a un sistema, y  $g_2(x_2, y_2)$  representa la salida correspondiente, entonces, por la definición de  $\mathcal{S}\{\cdot\}$ , las dos funciones están relacionadas mediante:

$$g_2(x_2, y_2) = \mathcal{S}\{g_1(x_1, y_1)\} \quad (2.54)$$

A continuación, veamos alguna propiedades más detalladas del operador  $\mathcal{S}\{\cdot\}$ , para tratar de establecer propiedades del sistema general más específicas que las expresadas por la Ec. (2.54). Analizaremos principalmente, aunque no exclusivamente, a la clase restringida de sistemas que se denominan *sistemas lineales*: Nos interesan este tipo de sistemas por el hecho de que la linealidad produce representaciones simples y físicamente significativas de tales sistemas; también investigaremos relaciones útiles entre distintas funciones de entrada y salida.

### 2.9.1 LINEALIDAD Y LA INTEGRAL DE SUPERPOSICIÓN

Se dice que un sistema es lineal si se cumple la siguiente propiedad de superposición para todas las funciones de entrada  $p$  y  $q$  y todas las constantes complejas  $a$  y  $b$ :

$$\mathcal{S}\{a p(x_1, y_1) + b q(x_1, y_1)\} = a\mathcal{S}\{p(x_1, y_1)\} + b\mathcal{S}\{q(x_1, y_1)\} \quad (2.55)$$

Como se mencionó anteriormente, la gran ventaja que ofrece la linealidad es la capacidad de expresar la respuesta de un sistema a una entrada arbitraria en términos de las respuestas a ciertas funciones "elementales" en las que se descomponga la entrada. Por tanto, es muy importante encontrar un mecanismo sencillo y conveniente de descomponer la entrada. Una descomposición adecuada es la que nos ofrece la propiedad de tamizado de la función  $\delta$ , la que establece que,

$$g_1(x_1, y_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta \quad (2.56)$$

A esta ecuación debemos entenderla como que expresa a la función  $g_1$  como una combinación lineal de funciones  $\delta$  desplazadas y con distintos pesos; las funciones elementales de esta descomposición serán justamente estas funciones  $\delta$ .

la respuesta del sistema a la entrada  $g_1$  se obtiene reemplazando la ec. (2.56) en (2.54) y resulta:

$$g_2(x_2, y_2) = \mathcal{S}\left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta \right\} \quad (2.56)$$

luego considerando a  $g_1(\xi, \eta)$  como un simple factor de peso de las funciones elementales y aplicando la propiedad de linealidad se puede escribir como:

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) \mathcal{S}\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta\} \quad (2.57)$$

Finalmente, definiendo  $h(x_2, y_2; \xi, \eta)$  como la respuesta del sistema en el punto  $(x_2, y_2)$  del espacio de salida a la función  $\delta$  en la coordenada  $(\xi, \eta)$  del espacio de entrada. La función  $h$  se denomina respuesta impulsiva (o en óptica, función de dispersión puntual) del sistema. La entrada y la salida del sistema ahora se pueden relacionar mediante la ecuación simple:

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2, y_2; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.58)$$

Esta expresión fundamental, que se conoce como integral de superposición, demuestra el hecho muy importante de que un sistema lineal se caracteriza completamente por la respuesta a impulsos unitarios.

Para el caso de un sistema lineal formador de imágenes, este resultado tiene una interpretación física interesante, el efecto de los elementos formadores de imágenes (lentes, máscaras, etc) pueden describirse completamente especificando las imágenes de las fuentes puntuales localizadas en todo el objeto.

### 2.9.2 INVARIANCIA DE LOS SISTEMAS LINEALES: FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Una subclase de sistemas lineales, son los llamados sistemas lineales invariantes. Una red eléctrica es invariante temporal si su respuesta impulsiva  $h(t, \tau)$  (esto es, la respuesta en el tiempo  $t$  a una excitación impulsiva unitaria aplicada en el instante  $\tau$ ) sólo depende de la diferencia temporal  $(t - \tau)$ . Las redes eléctricas compuestas por resistores, capacitores e inductores, son invariantes temporales (o equivalentemente isoplanas) puesto que sus características no cambian con el tiempo.

De manera similar, un sistema formador de imágenes es espacialmente invariante si la respuesta impulsiva  $h(x_2, y_2; \xi, \eta)$  depende solo de las distancias  $(x - \xi)$  e  $(y - \eta)$ . Para este tipo de sistemas se puede escribir entonces:

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = h(x - \xi, y - \eta) \quad (2.59)$$

En la práctica los sistemas formadores de imagen son rara vez isoplanáticos sobre el campo objeto completo, pero usualmente es posible dividir al campo en regiones pequeñas (parches isoplanáticos) a lo largo de los cuales el sistema es aproximadamente espacialmente invariante.

Para un sistema invariante la integral de superposición se convierte en:

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) d\xi d\eta \quad (2.60)$$

donde reconocemos una integral de convolución doble de la función objeto con la respuesta impulsiva del sistema. Como esto será muy usado entonces usaremos una notación sintética escribiendo:

$$g_2 = g_1 \otimes h$$

donde  $\otimes$  simboliza la convolución bidimensional.

La simplicidad de los sistemas se hace evidente cuando la relación de convolución se hace simple después de transformaciones de Fourier. Transformando ambos lados de la ecuación anterior e invocando el teorema de convolución, los espectros de la entrada  $G_1(f_x, f_y)$  y de salida  $G_2(f_x, f_y)$  están relacionados por

$$G_2(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) G_1(f_x, f_y) \quad (2.61)$$

donde  $H$  es la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva del sistema que vendrá dada por:

$$H(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) e^{-i2\pi(f_x \xi + f_y \eta)} d\xi d\eta \quad (2.62)$$

se denomina función de modulación de transferencia (TMF, en inglés Transfer Modulation Function) del sistema, e indica los efectos del sistema en el dominio de frecuencias.

Observe que la operación de convolución relativamente complicada de la ec. (2.60), requerida para encontrar la salida del sistema se reemplaza en (2.61) por la secuencia a menudo más simple de la transformación de Fourier, la multiplicación de transformadas y la transformación de Fourier inversa. Esto es muy importante a la hora de realizar simulaciones numéricas de convoluciones.

Desde otro punto de vista, podemos considerar que las relaciones (2.61) y (2.62) indican que, para un sistema invariante lineal, la entrada se puede descomponer en funciones elementales que son más convenientes que las funciones  $\delta$  de la eq. (2.56). Estas funciones elementales alternativas son, por supuesto, las funciones exponenciales complejas de la representación integral de Fourier. Al transformar  $g_1$ , simplemente estamos descomponiendo la entrada en funciones exponenciales complejas de varias frecuencias espaciales  $(f_x, f_y)$ . La multiplicación del espectro de entrada  $G_1$  por la función de transferencia  $H$  tiene en cuenta los efectos del sistema en cada función elemental. Se debe tener en cuenta que estos efectos se limitan a un cambio de amplitud y un cambio de fase, como lo demuestra el hecho de que simplemente multiplicamos el espectro de entrada por un número complejo  $H(f_x, f_y)$  en cada par  $(f_x, f_y)$ . La transformación inversa del espectro de salida  $G_2$  sintetiza la salida  $g_2$  sumando las funciones elementales modificadas.

El término matemático función propia se utiliza para una función que conserva su forma original (hasta una constante multiplicativa compleja) después de pasar por un sistema. Así vemos que las funciones exponenciales complejas son las funciones propias de los sistemas lineales invariantes. La ponderación aplicada por el sistema a una entrada de función propia se denomina el valor propio correspondiente a esa entrada. Por tanto, la función de transferencia describe el continuo de valores propios del sistema.

Finalmente, se debe enfatizar fuertemente que las simplificaciones proporcionadas por la teoría de la función de transferencia solo son aplicables para sistemas lineales invariantes.

## 2.10 TEORIA DEL TEOREMA DEL MUESTREO

Finalmente, y para completar nuestro estudio de las herramientas de la Transformada de Fourier necesarias para abordar lo que sigue del curso abordaremos ahora el estudio del Teorema del muestreo. Esto tiene su fundamento en el hecho de que a menudo es conveniente, tanto para el procesamiento de datos como para fines de análisis matemático, representar una función  $g(x, y)$  mediante una matriz de sus valores muestreados tomados en un

conjunto discreto de puntos en el plano  $(x, y)$ . Intuitivamente, está claro que, si estas muestras se toman lo suficientemente cerca unas de otras, los datos muestreados son una representación precisa de la función original, en el sentido de que  $g$  puede reconstruirse con una precisión considerable mediante una simple interpolación. Es un hecho menos obvio que para una clase particular de funciones (conocidas como funciones de banda limitada) la reconstrucción se puede lograr exactamente, siempre que el intervalo entre muestras no sea mayor que cierto límite. Este resultado fue señalado originalmente por Whittaker y más tarde fue popularizado por Shannon en sus estudios de teoría de la información.

El teorema de muestreo se aplica a la clase de funciones de banda limitada, con lo que nos referimos a funciones con transformadas de Fourier que son distintas de cero en solo una región finita  $R$  del espacio de frecuencias. Consideraremos primero una forma de este teorema que es directamente análoga al teorema unidimensional utilizado por Shannon. Más adelante indicamos muy brevemente las mejoras del teorema que se pueden realizar en algunos casos bidimensionales.

### 2.10.1 TEOREMA DEL MUESTREO DE WHITTAKER -SAHANON

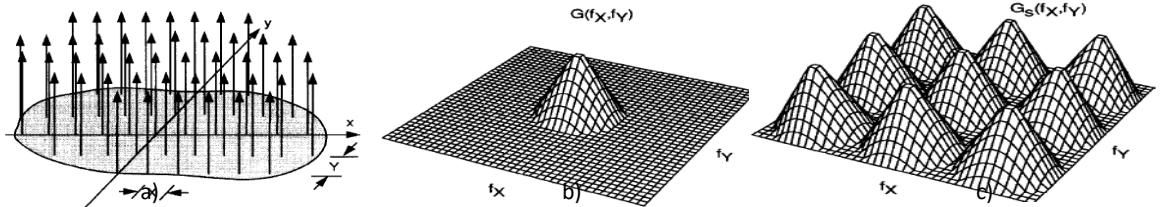
Para derivar la versión más simple del teorema del muestreo, consideraremos una red rectangular de muestras de la función  $g(x, y)$ , definida como:

$$g_s(x, y) = \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right) \quad (2.63)$$

La función muestreada  $g_s(x, y)$  consiste entonces un arreglo de funciones  $\delta$ , espaciados a intervalos  $X$  en la dirección  $x$  e  $Y$  en la dirección  $y$  como se muestra en la Figura 2.6 a). El área debajo de cada función  $\delta$  es proporcional al valor de la función  $g$  en ese punto particular en la red de muestreo rectangular. Como implica el teorema de convolución, el espectro  $G_s$  de  $g_s$ , se puede encontrar convolucionando la transformada de  $\text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)$  con la transformada de  $g$ , o sea:

$$G_s(f_x, f_y) = \mathcal{F} \left\{ \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right) \right\} \otimes G(f_x, f_y) \quad (2.64)$$

Figura 2.6 a) muestreo de la función. b) Espectro de la función original y c) Espectro de la función muestreada, sólo



se muestran tres de los infinitos períodos

De la tabla 2.1 y del teorema de similaridad, resulta que:

$$\mathcal{F} \left\{ \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right) \right\} = XY \text{comb}(Xf_x) \text{comb}(Yf_y)$$

Y por otro lado, se tiene que el segundo miembro la esta última expresión se puede escribir como:

$$XY \text{comb}(Xf_x) \text{comb}(Yf_y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left( f_x - \frac{n}{X}, f_y - \frac{m}{Y} \right)$$

se recomienda enfáticamente realizar la demostración. Luego se tiene,

$$G_s(f_x, f_y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G \left( f_x - \frac{n}{X}, f_y - \frac{m}{Y} \right) \quad (2.65)$$

o sea, el espectro de la función muestreada se obtiene replicando el espectro de la función original en cada punto  $(\frac{n}{X}, \frac{m}{Y})$  del plano  $f_x - f_y$ , como se muestra en la Fig. 2.6.

De todo este análisis, se puede concluir que para reconstruir los datos originales a partir de una muestra, es necesario tomar las muestras con una frecuencia de muestreo tal que el período espacial o separación entre los datos, sea lo suficientemente pequeño como para que se separen las regiones espectrales. Como supusimos que la función  $g$  es de banda limitada, su espectro  $G$  es distinto de cero en solo una región finita  $R$  del espacio de frecuencias. Como se desprende de la Ec. (2.65), la región sobre la cual el espectro de la función muestreada es diferente de cero se puede encontrar construyendo la región  $R$  alrededor de cada punto  $(\frac{n}{X}, \frac{m}{Y})$  en el plano de frecuencia. Ahora es claro que si  $X$  e  $Y$  son lo suficientemente pequeños (es decir, las muestras están lo suficientemente cerca entre sí), entonces las distancias  $\frac{1}{X}$  y  $\frac{1}{Y}$  de las diversas "islas espectrales" serán lo suficientemente grandes como para asegurar que las regiones adyacentes no se superpongan (ver Fig. 2.6c). Por lo tanto, la recuperación del espectro original  $G$  de  $G_S$  se puede lograr exactamente pasando la función muestreada  $g$ , a través de un filtro invariante lineal que deja pasar el término  $(n = 0, m = 0)$  de la Ec. (2.65) sin distorsión, mientras que excluye perfectamente todos los demás términos. Por tanto, en la salida de este filtro encontramos una réplica exacta de los datos originales  $g(x, y)$ .

Luego, para recuperar con éxito los datos originales, es necesario tomar muestras lo suficientemente cerca para permitir la separación de las diversas regiones espectrales de  $G_S$ . Para determinar la separación máxima posible entre muestras, consideremos que  $2B_X$  y  $2B_Y$  son respectivamente, los anchos en el espacio de frecuencias en las direcciones  $f_X$  y  $f_Y$ , del rectángulo más pequeño que encierra completamente la región  $R$ . Dado que los diversos términos en el espectro (2.65) de los datos muestreados están separados por distancias  $\frac{1}{X}$  y  $\frac{1}{Y}$  en las direcciones  $f_X$  y  $f_Y$ , respectivamente, la separación de las regiones espectrales está asegurada si se cumple que:

$$X \leq \frac{1}{2B_X} \quad \text{e} \quad Y \leq \frac{1}{2B_Y} \quad (2.65)$$

En conclusión, el máximo espaciado de la red de muestreo, para una recuperación exacta de la función original será:  $(2B_X)^{-1}$  y  $(2B_Y)^{-1}$ .

Habiendo determinado el máximo espaciado entre las muestras, debemos especificar la función de transferencia exacta del filtro de muestreo.

En la mayoría de los casos existe una gran latitud de posibilidades ya que para muchas formas posibles de la región  $R$  existe una multitud de funciones de transferencia que dejarán pasar el término  $(n = 0, m = 0)$  del espectro  $G$ , y excluirían al resto. Nosotros vamos a decir que si las relaciones para  $X$  e  $Y$  se cumplen entonces existe una sola función de transferencia que producirá el efecto deseado teniendo en cuenta la forma de  $R$

$$H(f_X, f_Y) = \text{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right) \text{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right) \quad (2.66)$$

La recuperación exacta de  $G$  a partir de  $G_S$  se ve al observar que el espectro de la salida de dicho filtro es:

$$G_S(f_x, f_y) \text{rect}\left(\frac{f_x}{2B_X}\right) \text{rect}\left(\frac{f_y}{2B_Y}\right) = G(f_x, f_y)$$

Mientras que, la identidad equivalente en el dominio espacial es:

$$\left[ \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right) g(x, y) \right] \otimes h(x, y) = g(x, y) \quad (2.67)$$

Donde  $h$  es la respuesta impulsiva el filtro y viene dada por:

$$h = \mathcal{F}^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right) \text{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right)\right\} = 4B_X B_Y \text{sinc}(2B_X x) \text{sinc}(2B_Y y)$$

recordando que:

$$\text{comb}(Xf_x)\text{comb}(Yf_y)g(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(nX, mY) \delta(x - nX, y - mY)$$

la ecuación (2.67) resulta:

$$g(x,y) = 4B_X B_Y XY \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(nX, mY) \text{sinc}[2B_X(x - nX)] \text{sinc}[2B_Y(y - mY)]$$

Finalmente, cuando se considera que los intervalos de muestreo  $X$  e  $Y$  tienen sus valores máximos permitidos, la identidad se vuelve

$$g(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2B_X}, \frac{m}{2B_Y}\right) \text{sinc}\left[2B_X\left(x - \frac{n}{2B_X}\right)\right] \text{sinc}\left[2B_Y\left(y - \frac{m}{2B_Y}\right)\right] \quad (2.68)$$

La ecuación (2.68) representa el resultado fundamental del teorema del muestreo Whittaker-Shannon, nos dice que la reconstrucción exacta de una función de banda limitada se puede obtener a partir un conjunto de valores muestreados de la función, con una apropiada red rectangular; y la reconstrucción, se lleva a cabo con una función interpolante consistente de un producto de senos cardinales.

Finalmente cabe mencionar que el resultado no es el único teorema de muestreo posible. En el análisis se hicieron dos elecciones más bien arbitrarias, y elecciones alternativas en estos dos puntos producirían teoremas de muestreo alternativos. La primera elección arbitraria, que apareció al principio del análisis, fue el uso de una red de muestreo rectangular. El segundo, fue la elección de la función de transferencia de filtro particular (2.66). Los teoremas alternativos derivados de la elección de diferentes opciones en estos dos puntos no son menos válidos que la Ec. (2.68); de hecho, en algunos casos los teoremas alternativos son más "eficientes" en el sentido de que se requieren menos muestras por unidad de área para asegurar una recuperación completa.

## 2.11 APPLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER. MÉTODO PARA DESENVOLVER FASE.

El método de la transformada de Fourier para el análisis de patrones de franjas fue originalmente propuesto y demostrado por Takeda et. al. [2.5]. Las técnicas convencionales para extraer la información de fase, consisten en generar un mapa de contorno de franjas de la distribución de fase. En la mayoría de los experimentos de Interferometría, encontramos un patrón de franjas de la forma:

$$g(x,y) = a(x,y) + b(x,y) \cos[\phi(x,y)] \quad (2.69)$$

donde la fase  $\phi(x,y)$  contiene la información deseada mientras que  $a(x,y)$  y  $b(x,y)$  representan variaciones de irradiancia no deseadas que surgen de la reflexión o transmisión no uniforme de luz por el objeto en estudio. La ec. (2.69) da un mapa de contorno de  $\phi(x,y)$  en un intervalo  $2\pi$ . Aunque se tiene un medio directo para mostrar un mapa de contorno de la distribución de la cantidad a medir, estas técnicas tienen los siguientes inconvenientes:

- (1) No se puede determinar el signo de la fase, o sea no se puede distinguir entre depresión y elevación de un mapa de contorno dado.
- (2) La sensibilidad se fija en  $2\pi$  porque las variaciones de fase de menos de  $2\pi$  no generan franjas de contorno.
- (3) La precisión está limitada por las variaciones no deseadas de  $a(x,y)$  y  $b(x,y)$ , particularmente en el caso de franjas de contorno anchas. para resolver estos problemas se han propuesto técnicas de escalonado de fase, pero requieren componentes móviles, como por ejemplo un espejo móvil montado en un traductor, que debe manejarse con gran precisión y estabilidad. La presente técnica permite resolver todos estos problemas mediante un análisis simple del espectro de Fourier de un patrón de franjas sin contorno.

La intensidad medida por un foto-sensor puede ser escrita de la forma:

$$i(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos[\phi(x, y)] \quad (2.70)$$

donde  $a(x, y)$  representa la variaciones de intensidad de fondo,  $b(x, y)$  está relacionado con la variaciones locales de contraste y  $\phi(x, y)$  es la fase de interferencia que debe ser determinada a partir de  $i(x, y)$ . Definiendo la amplitud compleja como:

$$c(x, y) = 0,5b(x, y)e^{[i(\phi(x, y))]} \quad (2.71)$$

la ec. (2.70) se puede reescribir de la forma:

$$i(x, y) = a(x, y) + c(x, y) + c^*(x, y) \quad (2.72)$$

donde,  $c^*(x, y)$  es el conjugado complejo de  $c(x, y)$ . La transformada de Fourier de  $i(x, y)$  puede expresarse como:

$$I(f_x, f_y) = A(f_x, f_y) + C(f_x, f_y) + C^*(f_x, f_y) \quad (2.73)$$

dado que (2.72) es una función real, su Transformada de Fourier tendrá la parte real par y la parte imaginaria impar por lo que el espectro de frecuencias será simétrico respecto del origen. Aplicando un filtro pasa-banda en el espacio de frecuencia es posible modificar el espectro para eliminar  $A(f_x, f_y)$  (que contiene la parte continua y variaciones de muy baja frecuencia y la parte imaginaria. Con lo cual sólo se retiene el término  $C(f_x, f_y)$ .

Luego como el espectro resultante no es simétrico, la transformada inversa será la función compleja  $c(x, y)$ , de donde puede extraerse la fase mediante:

$$\phi(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[c(x, y)]}{\operatorname{Re}[c(x, y)]} \quad (2.72)$$

A modo de ejemplo en la Figura 2.7 se muestra un espectro típico y el filtro aplicado en un experimento típico. El resultado es que sólo nos quedamos con la información en el interior del rectángulo y como el espectro resultante no es simétrico, la transformada inversa será la función compleja  $c(x)$  de donde se extrae la fase.

La fase así obtenida, está indeterminada en un factor  $2\pi$ . El cálculo dado por esta expresión se conoce como la fase módulo  $2\pi$  o simplemente fase envuelta como se muestra en la Figura 2.7 b), para mayor claridad sólo se ha representado una porción de la función completa. Esto es así por las propiedades de la función tangente. La función  $\operatorname{arctg}$  está definida únicamente sobre el rango limitado por los ángulos,  $-\pi/2$  a  $\pi/2$ . Estas discontinuidades pueden corregirse mediante el uso de algoritmos de desenvolvimiento de fase. Existen en la literatura existen numerosos métodos para desenvolver fase y el grado de complejidad de cada uno de ellos dependerá del fenómeno en estudio. El método original consiste en desenvolver primero la fase en una dirección por ejemplo  $x$  y posteriormente proceder de la misma forma en la dirección perpendicular del mapa de fase. Se parte de un valor de fase inicial  $\phi_0(x, y)$  que debe agregarse a la distribución de fase discontinua  $\phi_d(x, y)$  para convertirla en una distribución continua  $\phi_c(x, y)$ :

$$\phi_c(x, y) = \phi_0(x, y) + \phi_d(x, y) \quad (2.73)$$

Dado que la variación de la fase es lenta en comparación con el intervalo de muestreo, el valor absoluto de la diferencia de fase  $|\Delta\phi_d(x, y)| \ll 2\pi$  en los puntos donde la distribución de fase es continua. Pero se vuelve casi  $2\pi$  en los puntos donde se produce el salto de fase  $2\pi$ . Por lo tanto, al establecer un criterio apropiado para la diferencia de fase absoluta, podemos especificar todos los puntos en los que se produce el salto de fase  $2\pi$  y también la dirección de cada salto de fase, positivo o negativo, que se define como correspondiente al signo de  $\Delta\phi_d(x, y)$ .

Aplicando algún algoritmo de desenvolvimiento se obtiene la fase desenvuelta a partir de la cual y de acuerdo al fenómeno bajo estudio se procede a determinar las variaciones de índice de refracción que serán asociadas al mismo.

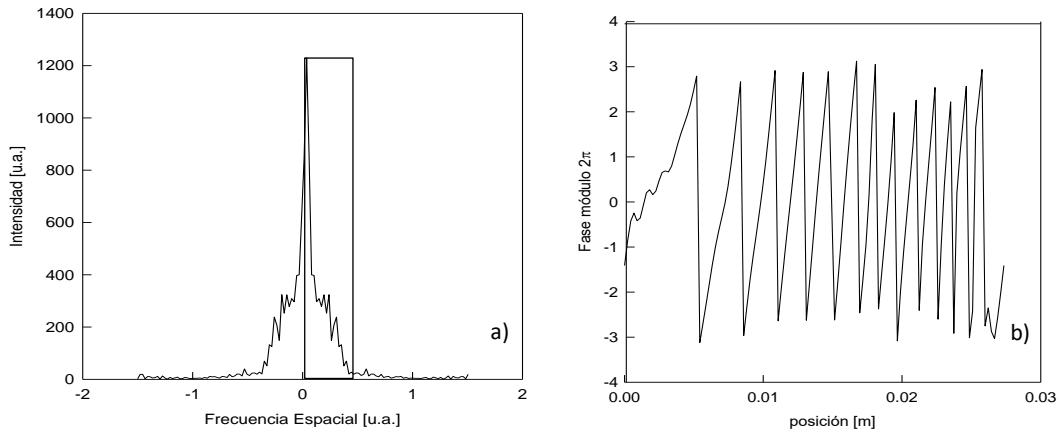


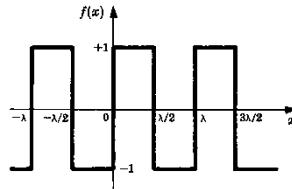
Figura 2.7: a) Espectro de Fourier señal de la Figura 1.22 y el filtro pasabanda. b) Fase módulo  $2\pi$ .

## 2.12 EJERCITACIÓN.

1- Sea la función periódica:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \lambda/2 \\ -1 & \lambda/2 < x < \lambda \end{cases}$$

- a) Utilizando un software (Scilab, Python, etc.) o una planilla de cálculo genere la función  $f(x)$  y grafíquela.
- b) Calcule la representación en Serie de Fourier de la función.
- c) Grafique cada uno de los tres primeros términos que conforman la serie de Fourier correspondiente a esta función.
- d) Realiza la suma gráfica de las contribuciones de la serie de Fourier. Para ello considere la primera suma parcial y su gráfica correspondiente, luego la segunda suma parcial y su gráfica correspondiente, y así sucesivamente. Observe y discuta cómo se modifica la gráfica conforme incorpora armónicos.



2- Calcule la representación en Serie de Fourier de:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\lambda)$$

con  $\lambda$  el período. (Sugerencia: utilice la forma compleja de la serie:  $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{i \frac{2\pi}{\lambda} mx}$ , con

$$C_m = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} mx} dx \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3- Muestre que:

$$\text{a)} \quad \text{comb}\left(\frac{x - x_0}{b}\right) = |b| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0 - nb)$$

$$\text{b)} \quad XY\text{comb}(Xf_x)\text{comb}(Yf_y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_x - \frac{n}{X}, f_y - \frac{m}{Y}\right)$$

4- Calcule la Transformada de Fourier de las siguientes funciones y esquematicice el resultado:

- a) I) Función Delta Dirac  $\delta(x - x_0)$  ¿Qué pasa cuando  $x_0$  es cero? (Grafique)

II)  $f(x) = \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{a}{2}\right)$ . Como se estudiará luego, en la difracción de Fraunhofer (o campo lejano) el campo justo detrás de la rendija está vinculado con el campo a una distancia  $z$  (lejana), mediante una transformada de Fourier evaluada en determinadas frecuencias. Si una doble rendija muy estrecha e infinitamente larga puede representarse matemáticamente mediante la función  $f(x)$ , realice una interpretación de los resultados teóricos de la experiencia de Young en términos de la transformada de Fourier.

b) Pulso rectangular  $\text{rect}(x, y)$

c)  $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}(x - 2n)$  Grafique g y su transformada

d)  $\text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)$

e)  $\cos(k_0 x - \varepsilon)$  . Grafique para los casos particulares en los que  $\varepsilon = 0$  y  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ .

5- La función Delta de Dirac es el operador unitario para la convolución de la misma manera que el cero lo es para la operación suma y el uno para la multiplicación.

A) Utilizando la definición de convolución, calcule la función convolución:

$p(x) = g(x) \otimes \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right)$ . Con  $g(x) = \text{rect}\left(2 \frac{x}{X}\right)$ . Esquematice el resultado.

B) Esquematice  $P(f_x)$  y comprueba los resultados con el Teorema de la Convolución

6- Realice las siguientes convoluciones analíticas y gráficamente:

a)  $f(x) = \text{step}(x) * \text{rect}(x)$

b)  $f(x) = \text{step}(x) * \text{step}(x)$

7- Pruebe las siguientes relaciones:

Si  $g_R(r) = \delta(r - r_0)$  entonces:

$$\mathcal{B}\{g_R(r)\} = 2\pi r_0 J_0(2\pi r_0 \rho)$$

Si  $g_R(r) = 1$  con  $a \leq r \leq 1$  y cero en cualquier otro caso, entonces:

$$\mathcal{B}\{g_R(r)\} = \frac{J_1(2\pi\rho) - aJ_1(2\pi a\rho)}{\rho}$$

## REFERENCIAS

- [2.1] Joseph Goodman. Introduction to Fourier Optics. 2da. Edición. McGraw Hill Companies. 1996
- [2.2] Robert Guenther. Modern Optics. John Wiley and Sons, Inc. 1990
- [2.3] Jack D. Gaskill, Linear Systems, Fourier Transforms and Optics, Wiley, New York. 1978
- [2.4] Ronald N. Bracewell. The Fourier Transform and Its Applications. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, second revised edition, 1965.
- [2.5] Takeda, M., Ina, H., Kobayashi, S. J. Opt. Soc. Am 72, 156-160 (1982)

## CAPITULO III: DIFRACCIÓN CLÁSICA – NOCIONES TEORÍA ESCALAR DE LA DIFRACCIÓN

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Cuando la luz pasa por un borde, se desviará de la propagación rectilínea. Este fenómeno (que es una consecuencia natural de la naturaleza ondulatoria de la luz) se conoce como difracción y juega un papel importante en diversas ramas de la física y la ingeniería en donde se estudia la propagación de las ondas, tales como la formación de imágenes y el tratamiento óptico de señales.

El término difracción ha sido convenientemente definido por Sommerfeld como "cualquier desviación de la trayectoria rectilínea que no puede interpretarse como reflexión o refracción". El primero en reportar este fenómeno fue Grimaldi en una publicación del año 1665. Él observó que cuando iluminada una varilla con una fuente puntual, la sombra de la misma recogida en una pantalla poseía franjas más brillantes en su interior lo que contradecía la propagación rectilínea de la luz postulada por la teoría corpuscular vigente. Una teoría rigurosa de la difracción es bastante complicada, aunque se encuentra muy bien desarrollada y se conoce como la Teoría Escalar de la Difracción, la que se incluye en el Anexo A. Aquí desarrollamos expresiones para el campo difractado basadas en el principio de Huygens de ondas esféricas secundarias [3.1]. Veremos que es una coincidencia muy afortunada que la "apertura difractante" (objeto que bloquea parcialmente la luz) y el campo lejano difractado estén conectados por una relación de Transformada de Fourier. Por eso, la óptica y la ingeniería eléctrica han compartido durante mucho tiempo una fuente común de teoría matemática. Como consecuencia de la difracción, una fuente puntual no se puede representar como un punto. Por lo tanto, se dice que un sistema de imágenes sin aberraciones está limitado por difracción.

### 3.2 DIFRACCIÓN POR UN BORDE

La Figura 3.1 a) muestra una onda plana que es parcialmente bloqueada por una pantalla  $S_1$  antes de incidir sobre una pantalla  $S_2$ . Según la óptica geométrica, la sombra debería formar un borde bien definido en el punto A sobre la pantalla. Sin embargo, si se examina con más detalle la distribución de luz, se descubre que esto no es estrictamente correcto. La distribución de la luz no está muy limitada, sino que forma un "patrón" en una pequeña región alrededor de A, como se observa en la Figura 3.1 b). Esto se debe a una curvatura de la luz alrededor del borde de  $S_1$ . Esta desviación de la luz se llama difracción y el patrón de intensidades que se observa en  $S_2$ , como resultado de la interferencia entre las ondas de luz desviadas, a la que denominaremos con el término "ondas difractadas", se denomina patrón de difracción.

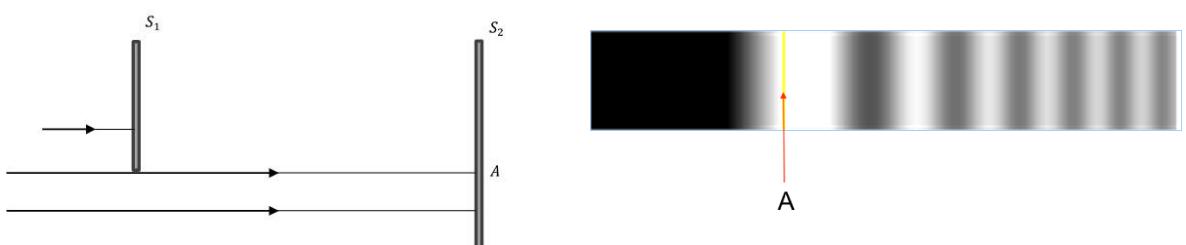


Figura 3.1: a) Esquema de borde iluminado por una onda plana. b) Patrón de difracción del borde

Otro ejemplo de este fenómeno se puede observar enviando luz a través de un pequeño orificio. Si este orificio se hace lo suficientemente pequeño, la luz no se propagará como un rayo estrecho sino como una onda esférica desde el centro del orificio como se muestra en el esquema de la figura 3.2 a). Esta es una evidencia del principio de Huygens que dice que cada punto en un frente de onda puede considerarse como una fuente de ondas esféricas secundarias. Añadiendo estas ondas y calculando la distribución de intensidad sobre un plano dado, se encuentra el patrón de difracción en ese plano, fotografía de la figura 3.2 b). Este simple principio ha demostrado ser muy fructífero y constituye la base de la teoría clásica de la difracción.

Con esta simple suposición, intentaremos calcular el patrón de difracción a partir de una rendija larga y estrecha como la que se esquematiza en la Figura 3.3.

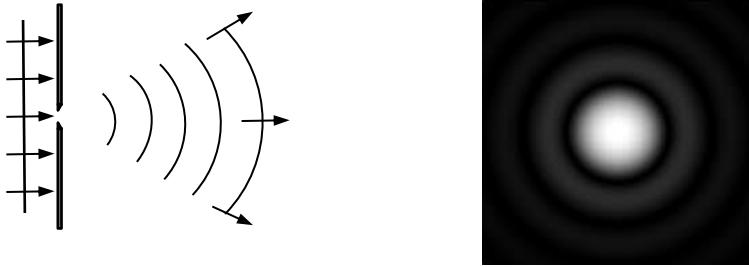


Figura 3.2: a) Esquema de orificio iluminado por una onda plana. b) Patrón de difracción correspondiente.

### 3.3 DIFRACCIÓN POR UNA RENDIJA

El ancho de la rendija  $a$  en la dirección  $x_0$  es mucho menor que la longitud de la misma en la dirección  $y_0$ . Por tanto, consideramos el problema como unidimensional. Desde la izquierda, una onda plana con amplitud unitaria incide normalmente sobre la rendija. Según el principio de Huygens, la contribución  $\Delta u(x)$  al campo en un punto  $x$  desde un punto arbitrario  $x_0$  dentro de la rendija es igual al campo de una onda esférica con su centro en  $x_0$  esto es:

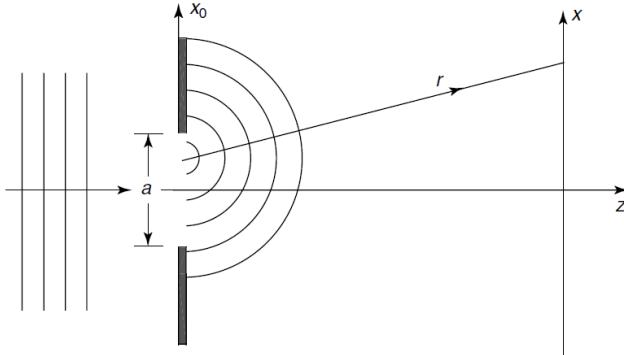


Figura 3.3: Esquema de experimento de difracción por una rendija larga y estrecha.

$$\Delta u(x) = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.1)$$

Para calcular el campo total en el punto  $x$ , tenemos que sumar las ondas de Huygens de todos los puntos dentro de la rendija. Esta suma se convierte en la integral:

$$u(x) = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{e^{ikr}}{r} dx_0 \quad (3.2)$$

Aplicando la aproximación de Fresnel Ec. I.19, la ec. 3.2 resulta:

$$u(x) = \frac{e^{ikz}}{z} \int_{-a/2}^{a/2} e^{i\frac{k}{2z}(x-x_0)^2} dx_0 = \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{k}{2z}x^2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{i\frac{k}{2z}x_0^2} e^{-i\frac{k}{z}xx_0} dx_0 \quad (3.3)$$

Haciendo el plano de observación lejos de la rendija de manera que:

$$z \gg \frac{k}{2} x_{0,max}^2 \quad (3.4)$$

el factor de fase cuadrática dentro de la integral se puede hacer igual a la unidad. Luego obtenemos la simple expresión:

$$u(x) = \frac{K}{z} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\frac{k}{z}xx_0} dx_0 = \frac{K}{-zikx} \left[ e^{-i\frac{k}{z}xx_0} \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{Ka \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{z\lambda} x\right)}{z} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{z\lambda} x\right) \quad (3.5)$$

donde hemos agrupado los factores de fase fuera de la integral en una constante  $K$ . La intensidad se vuelve proporcional a

$$I(x) = |u(x)|^2 = a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{z\lambda}x\right)}{\left(\frac{\pi a}{z\lambda}x\right)^2} \quad (3.6)$$

En la deducción de la ec. 3.5, se hicieron algunas aproximaciones. Estas se denominan en óptica "aproximación de Fraunhofer". Para justificar esta aproximación, el plano de observación debe alejarse del objeto difractante. En frecuencias ópticas, las condiciones requeridas para la validez de la aproximación de Fraunhofer pueden ser severas. Por ejemplo, a una longitud de onda de  $0,6 \mu\text{m}$  (luz roja) y un ancho de apertura de  $2,5 \text{ cm}$  (1 pulgada), la distancia de observación  $z$  debe satisfacer que  $z \gg 1600 \text{ m}$ . Una condición alternativa, menos estricta, conocida como "fórmula del diseñador de antenas", establece que para una apertura de dimensión lineal  $D$ , la aproximación de Fraunhofer será válida siempre que  $z > \frac{2D^2}{\lambda}$ , donde la desigualdad es ahora mayor en lugar de mucho mayor. Sin embargo, para este ejemplo, todavía se requiere que la distancia  $z$  sea superior a 2 metros. No obstante, se cumplen las condiciones requeridas en una serie de problemas importantes. Además, los patrones de difracción de Fraunhofer pueden ser observados a distancias mucho más cercanas de lo que implica la ec. 3.4 siempre que la apertura esté iluminada por una onda esférica que converja hacia el observador, o si una lente positiva está correctamente situada entre el observador y la apertura.

En la Figura 3.4, se muestra el patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija de acuerdo con la ec. 3.6. La distribución constituye un patrón de franjas claras y oscuras. De la ec. 3.6 encontramos que la distancia entre mínimos adyacentes es

$$\Delta x = \frac{\lambda z}{a}$$

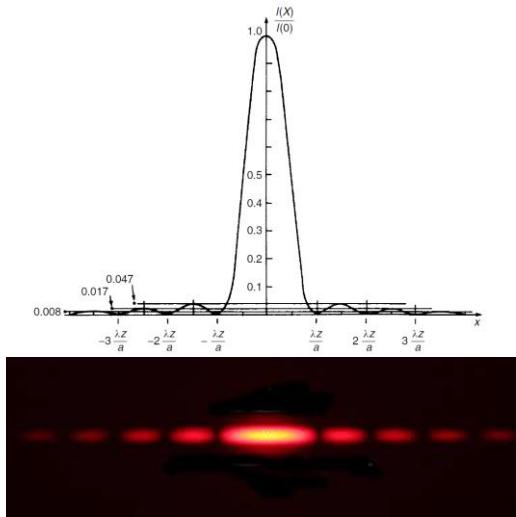


Figura 3.4: Distribución de Intensidad del patrón de difracción de una rendija.

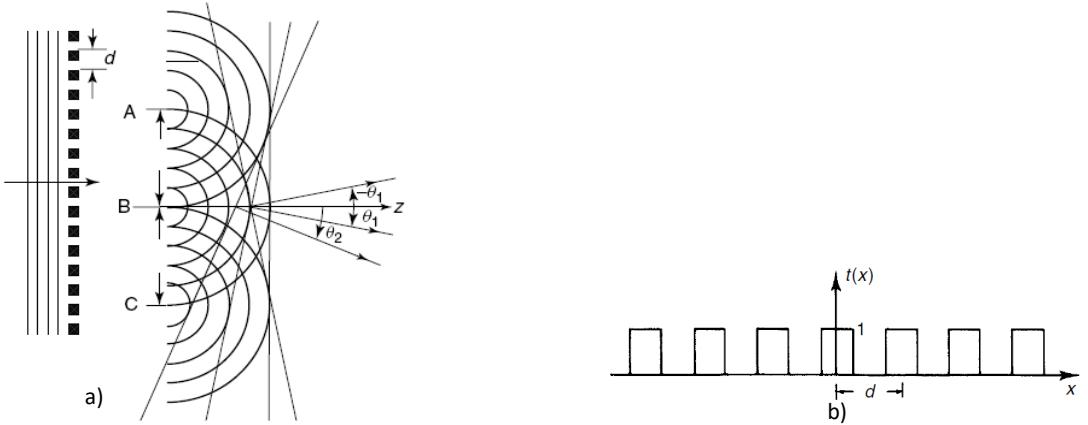
Cabe mencionar que, de acuerdo con la teoría escalar de la difracción, como veremos más adelante, el campo en un punto  $P$  detrás de una pantalla de difracción viene dado por:

$$u(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} u(P_0) \frac{e^{ikr}}{r} \cos \Omega ds \quad (3.7)$$

### 3.4 DIFRACCIÓN POR UNA RED LINEAL

La figura 3.5 a) muestra una onda plana que incide normalmente en una red con un período  $d$ . Las líneas de la red son tan estrechas que podemos considerar la luz de cada abertura como ondas cilíndricas. En la Figura 3.5 a) se han dibujado tres de ellas, A, B y C, cada una con cinco círculos concéntricos separados por  $\lambda$  que representan las ondas cilíndricas. La tangente al círculo número 5 para todas las aberturas representará una onda plana que se propaga en la dirección z. La tangente al círculo 5 desde la apertura A, el círculo 4 desde B y el círculo número 3 desde C representará una onda plana que se propaga en una dirección que forma un ángulo  $\theta_1$  con el eje z. De la figura vemos que

Figura 3.5: a) Esquema de red de difracción para calcular la distribución intensidades en el plano de observación. b) Función de



Transmitancia en amplitud de una red de difracción

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\lambda}{d}$$

La tangente al círculo 5 desde la apertura A, el círculo 3 desde B y el círculo 1 desde C representará una onda plana que se propaga en una dirección que forma un ángulo  $\theta_2$  con el eje z dado por

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{2\lambda}{d}$$

De la misma manera podemos avanzar hasta el número de onda plana n formando un ángulo  $\theta_n$  con el eje z dado por:

$$\operatorname{sen}\theta_n = \frac{n\lambda}{d} \quad (3.8)$$

La ec. 3.8 se llama ecuación de red. También de la misma manera podemos dibujar la tangente al círculo 5 desde la apertura C, el círculo 4 desde B y el círculo 3 desde A y así sucesivamente. Por tanto, n en la ec. 3.8 será un número entero entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . La red de la figura 3.5 se puede representar mediante la función  $t(x)$  como se muestra en la figura 3.6 b). Esta es una función de onda cuadrada que varía discontinuamente entre 0 y 1. Si la onda incidente en la red está representada por  $u_i$ , la onda justo detrás de la rejilla está dada por:

$$u_t = t(x)u_i \quad (3.9)$$

Por lo tanto, detrás del plano de red  $u_t = u_i$  donde  $t(x) = 1$  es decir, la luz se transmite y  $u_t = 0$  donde  $t(x) = 0$ , es decir, la luz está bloqueada.

La función  $t(x)$  se denomina *Amplitud de Transmitancia Compleja* de la red. Hemos visto que tal red difracta las ondas planas en las direcciones dadas por la ec. 3.8. Si rotamos la dirección de propagación  $180^\circ$  para todas estas ondas, no debería ser difícil imaginar que interferirían, formando un patrón de interferencia con una distribución de luz dada por  $t(x)$  en la Figura 3.5 b).

### 3.5 DIFRACCIÓN POR UNA RED SINUSOIDAL

Un ejemplo elemental, pero extremadamente importante ocurre cuando una onda plana de luz monocromática incide sobre una red de amplitud sinusoidal como se muestra en la Figura 3.6. Este tipo de red se puede construir exponiendo una película fotográfica a la luz que proviene de la interferencia entre dos ondas planas, por ejemplo en un interferómetro de Michelson.

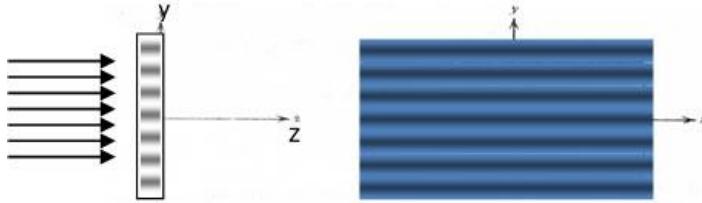


Figura 3.6: Red sinusoidal

Siguiendo el mismo razonamiento que en la sección anterior, podemos ver que una red sinusoidal difracta dos ondas planas que se propagan simétricamente alrededor del eje  $z$  cuando se ilumina con una onda plana. La amplitud de transmitancia compleja para esta red vendrá dada por:

$$t(x, y) = 1 + \cos(2\pi f_y y)$$

donde,  $f_y$  es el recíproco del período de las franjas de la red. En el plano de la red la amplitud compleja de la onda incidente será:

$$u_i(x, y, 0) = 1$$

mientras que a la salida de la red será:

$$u_t(x, y, 0) = [1 + \cos(2\pi f_y y)] u_i(x, y, 0) \quad (3.10)$$

El significado físico de esta amplitud se resalta, si se expresa a la función coseno como suma de funciones exponenciales:

$$u_t(x, y, 0) = \left[1 + \frac{1}{2} e^{i2\pi f_y y} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi f_y y}\right] u_i(x, y, 0) \quad (3.11)$$

Esta expresión indica que la amplitud sinusoidal de la red divide la onda plana incidente en tres ondas planas separadas como se muestra en la Figura 3.7. Dos ondas planas difractadas que se propagan simétricamente alrededor del eje  $z$  y una onda no difractada.

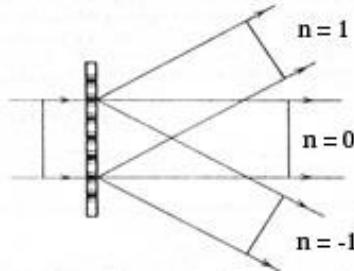


Figura 3.7: Ondas planas difractadas por una red sinusoidal.

Por tanto, la difracción de una red sinusoidal (cosinusoidal) también se describe en la ec. 3.8, pero ahora  $n$  asumirá los valores -1, 0 y 1 únicamente.

### 3.6 ESPECTRO DE FRECUENCIAS ESPACIALES

Supongamos que colocamos una lente positiva detrás de la red en la Figura 3.5 a) como en la Figura 3.8 a). De la óptica geométrica sabemos que una onda plana que se propaga en el plano  $xz$  con dirección de propagación según un ángulo  $\theta$  con respecto al eje óptico (el eje  $z$ ) se enfocará en un punto en el plano focal de la lente en una distancia  $x_f$  desde el eje  $z$  dada por:

$$x_f = f \operatorname{tg} \theta \quad (3.12)$$

Donde  $f$  es la distancia focal de la lente. Asumiendo la aproximación  $\operatorname{sen} \theta \cong \operatorname{tg} \theta$  y considerando la frecuencia de la red definida como la inversa del período  $f_0 = 1/d$ , obtenemos:

$$x_f = f \frac{\lambda f}{d} = n \lambda f f_0 \quad (3.13)$$

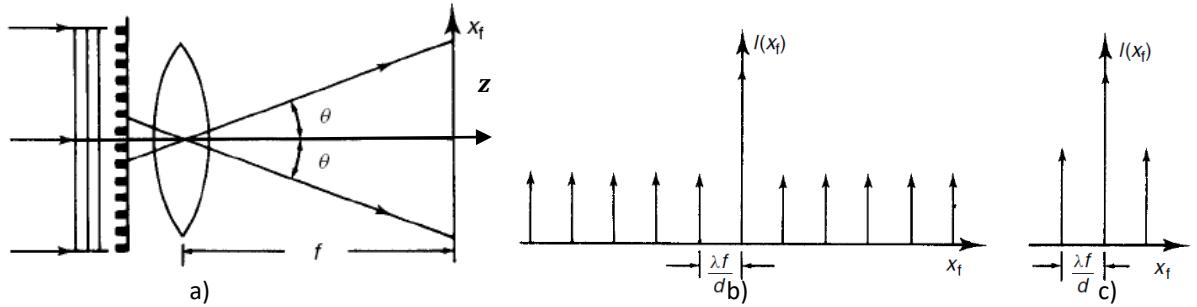


Figura 3.8: a) Esquema para obtener el espectro de la red. b) Distribución de intensidad red cuadrada c) Distribución de intensidad red sinusoidal.

Si representamos la distribución de intensidad en cada punto  $x_f$  mediante una flecha, la distribución de intensidad en el plano focal en la Figura 3.8 a) será como la que se muestra en la Figura 3.8 b). Al intercambiar la red de onda cuadrada con una red sinusoidal, la distribución de intensidad en el plano focal será como la que se muestra en la Figura 3.8 c). Si representamos estas intensidades ahora realizando un cambio de escala del eje de ordenadas desde  $x_f$  de dimensión longitud, [m], a coordenadas de inversa longitud, esto es frecuencia espacial, [m],  $f_x = x_f/\lambda f$  obtenemos una representación directa del contenido de frecuencia o contenido de onda plana de las redes. Vemos que la red sinusoidal contiene las frecuencias  $\pm f_0$  y 0, mientras que la red de onda cuadrada contiene todos los múltiplos enteros positivos y negativos de  $\pm f_0$ . Los diagramas de la Figura 3.9 se denominan espectros de frecuencia espacial.

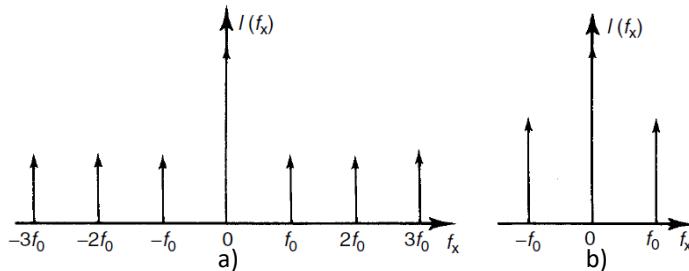


Figura 3.9: Espectros de Frecuencias espaciales a) red lineal o de onda cuadrada; b) res sinusoidal.

Ahora, si colocamos sucesivamente en la configuración de la figura 3.8 a) redes sinusoidales de frecuencias  $f_0$ ,  $2f_0$ ,  $f_3$ , ...,  $nf_0$ , y si pudiéramos sumar todos los espectros resultantes, obtendríamos un espectro como el que se muestra en la Figura 3.9 a). Esto sería una prueba del hecho de que una red de onda cuadrada se puede representar por una suma de redes sinusoidales (cosinusoidales) de frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental  $f_0$ , en otras palabras, una serie de Fourier. Esto se evidencia aún más en la Figura 3.10 e) donde, en la vemos que la aproximación a una red de onda cuadrada ya es bastante buena con sólo los cuatro primeros términos de la serie. Para mejorar la reproducción de los bordes de la red de onda cuadrada, uno tiene que incluir los términos de orden superior de la serie. Los bordes afilados de un objeto, por tanto, se representarán con altas frecuencias espaciales.

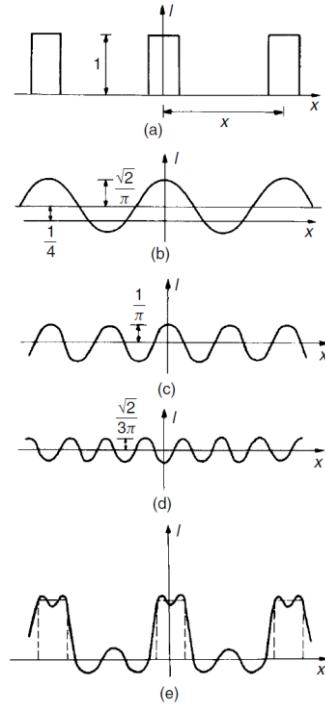


Figura 3.10: Descomposición de Fourier de una red de onda cuadrada. (a) Función de transmitancia de la red; (b) El término constante y el primer armónico de la serie de Fourier; (c) El segundo armónico; (d) El tercer armónico; y (e) La suma de los cuatro primeros términos de la serie.

El método que hemos descripto es la base de lo que en la jerga de la electrónica se conoce como sintetizador de Fourier, podemos decir que el dispositivo óptico de la Figura 3.8 a) es la versión óptica. En el próximo capítulo

### 3.7 OPTICA DE FOURIER

Volvamos a la sección 3.2, donde encontramos una expresión para el campo difractado de una sola rendija de ancho  $a$  en el plano- $x$  a una distancia  $z$ , según la ec. 3.5 el campo difractado  $u(x_F)$  en el plano  $x_F$  viene dado por:

$$u(x_F) = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i2\pi f_x x} dx \quad (3.13)$$

donde  $f_x = x_f/\lambda f$  y se omitió el factor de fase constante. La función de transmitancia de la rendija viene dada por:

$$t(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } |x| < a/2 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases} \quad (3.14)$$

Insertando  $t(x)$  en la integral de la ecuación (3.13) y extendiendo los límites de integración a  $\pm \infty$ , se obtiene:

$$u(x_F) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{-i2\pi f_x x} dx \quad (3.15)$$

Esta es una integral de Fourier y  $u(x_F)$  se denomina la transformada de Fourier de  $t(x)$ . En el caso general donde la función de transmitancia varía tanto en la dirección  $x$  como en la dirección  $y$ , obtenemos:

$$u(x_F, x_F) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (3.16)$$

Utilizando una notación breve esta última ecuación se puede escribir:

$$u(x_F, x_F) = T(x_F, x_F) = \mathcal{F}\{t(x, y)\} \quad (3.17)$$

donde como vimos en la Sección 2,  $\mathcal{F}\{t(x, y)\}$  es la ‘transformada de Fourier de  $t(x, y)$ ’.

En la obtención de la ec. (3.5) supusimos una onda plana de amplitud unitaria incidente en la rendija. Si una onda de luz dada por  $u_i(x, y)$  cae sobre un objeto dado por la función de transmitancia  $t(x, y)$ , el campo justo detrás del objeto es  $u(x, y) = t(x, y) u_i(x, y)$  y el campo en el plano  $x_F$  se convierte en:

$$u(x_F, x_F) = \frac{K}{i\lambda z} \mathcal{F}\{u(x, y)\} \quad (3.18)$$

En la ec. 3.18,  $K$  es un factor de fase puro ( $|K|^2 = 1$ ) que no es importante al calcular la intensidad. Se ha incluido el factor  $(1/i\lambda z)$  para que la Ecuación (3.18) concuerde con la teoría de la difracción de Huygens-Fresnel, como veremos más adelante.

Como se mencionó en la sección 3.2, las aproximaciones que conducen a la ecuación (3.5) y por lo tanto a la ecuación (3.18) se denominan aproximaciones de Fraunhofer. Para cumplir con esto, el plano de observación tiene que estar lejos del objeto. Una forma más práctica de cumplir con este requisito es colocar el plano de observación en el plano focal de una lente como en la Figura 3.8 a). En la ecuación (3.18),  $z$  debe reemplazarse por la distancia focal  $f$ . También debemos mencionar, como veremos en el siguiente capítulo, al colocar el objeto en el plano focal frontal (a la izquierda de la lente) en la Figura 3.8 a), tenemos  $K = 1$  y obtenemos una transformada de Fourier directa.

Es necesario recalcar que la forma en que hemos obtenido la fórmula general de la ecuación (3.18) no es, por supuesto, una prueba estricta de su validez. Sin embargo, la teoría de la difracción rigurosa que utiliza las mismas aproximaciones conduce al mismo resultado. La ecuación (3.18) es una herramienta poderosa para calcular patrones de difracción y análisis de sistemas ópticos. Por ejemplo, el cálculo del espectro de frecuencia de una red sinusoidal dado por:

$$t(x) = 1 + \cos(2\pi f_0 x) \quad (3.19)$$

se hace más sencillo, partiendo de la ecuación (3.15) obtenemos:

$$\begin{aligned} u(x_F) &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 + \cos(2\pi f_0 x)] e^{-i2\pi f_x x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{i2\pi f_0 x} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi f_0 x} \right] e^{-i2\pi f_x x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-i2\pi f_x x} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi(f_x - f_0)x} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi(f_x + f_0)x} \right) dx \\ &= \delta(f_x) + \frac{1}{2} \delta(f_x - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f_x + f_0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

La última igualdad surge de la definición de la función delta. La ecuación (3.20) muestra que el espectro de una red sinusoidal está dado por las tres funciones delta, es decir, tres puntos focales. Estos son el orden cero en  $f_x = 0$  y los dos órdenes laterales en  $f_x(x) = \pm f_0$ .

### 3.8 DIFRACCIÓN DE ABERTURA CIRCULAR – CRITERIO DE RESOLUCIÓN DE RAYLEIGH.

En esta sección veremos la importancia de disponer de la herramienta dada por la Óptica de Fourier para el cálculo de patrones de difracción ya que el cálculo se ve muy simplificado. Consideraremos una abertura circular de diámetro  $l$  cuya función de transmitancia vendrá dada por:

$$t(r) = \text{circ} \left( \frac{r}{l/2} \right) \quad (3.20)$$

Calcularemos el campo difractado [3.2] por esta abertura en un plano a una distancia  $z$  del plano de la misma de acuerdo al esquema de la Figura 3.11,

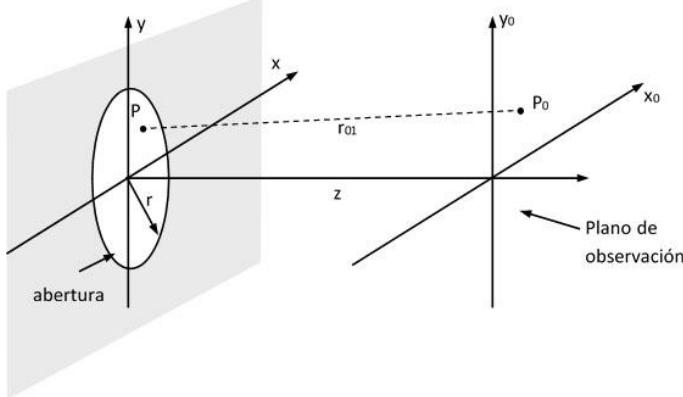


Figura 3.11: Geometría cálculo de difracción abertura circular.

Nuevamente consideraremos que la apertura es iluminada con una onda plana monocromática de tal manera que el campo justo detrás de la misma viene dado por:

$$u(r) = \text{circ} \left( \frac{r}{l/2} \right) \quad (3.21)$$

Como vimos en el capítulo 2, la simetría circular del problema sugiere que la transformada de Fourier de la ecuación 3.18 debe rescribirse como una transformada de Fourier-Bessel, ec. 2.44. De acuerdo con la ecuación 3.18 se puede demostrar que el campo en el plano de observación, distinguido con el subíndice  $o$ , viene dado por:

$$u(r_o) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\left(\frac{i kr_o^2}{2z}\right)} \mathcal{B}\{u(r)\} \quad (3.22)$$

En esta última ecuación la transformada de Fourier-Bessel debe ser evaluada en  $\rho = \frac{r_o}{\lambda z}$ . Operando se tiene:

$$u(r_o) = e^{ikz} e^{\left(\frac{i kr_o^2}{2z}\right)} \frac{kl^2}{i8z} \left[ 2 \frac{J_1(klr_o/2z)}{klr_o/2z} \right] \quad (3.23)$$

y la intensidad resulta:

$$I(r_o) = I_0 \left[ 2 \frac{J_1(klr_o/2z)}{klr_o/2z} \right]^2 \quad \text{con } I_0 \left( \frac{kl^2}{i8z} \right) \quad (3.23)$$

se elige agruparlo de esta forma para que la expresión entre corchete tienda a 1 cuando  $r_o$  tiende a 0. Esta distribución de intensidad se denomina generalmente como *patrón de Airy* y una imagen de la misma se muestra en la Figura 3.12 a). Un perfil transversal de intensidad se muestra en la Figura 3.12 b).

Se define como el *radio del disco de Airy* al radio del primer mínimo de esta función, lo que da:

$$\Delta r_o = 1.22 \frac{\lambda z}{l} \quad (3.24)$$

Como vemos, la intensidad de los máximos decae muy rápidamente. El 84% de la energía central está concentrada en la campana central y el 91% de ella si incluimos los primeros máximos secundarios.

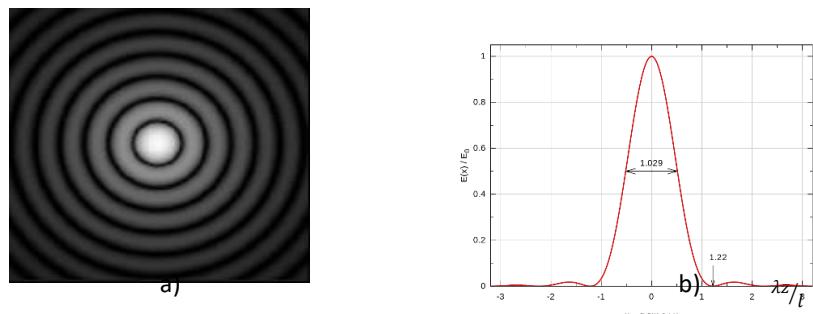


Figura 3.12: a) Patrón de difracción de Fraunhofer de una apertura circular. b) Perfil de intensidad

Una de las aplicaciones más importantes de los resultados obtenidos es el denominado *Criterio de Resolución de Rayleigh*. Esto está ligado a un concepto muy importante como lo es el poder resolvente de una lente. Para ello supongamos que tenemos un telescopio con la que observamos algún sistema de estelar, como por ejemplo Alfa Centauri el sistema estelar más cercano al Sol. Se encuentra a unos 4,36 años luz (41,2 billones de kilómetros) de distancia. Está constituido por tres estrellas: Alfa Centauri A (nombre oficial según la Unión Astronómica Internacional: Rigel Kentaurus), Alfa Centauri B (nombre oficial: Toliman) y Alfa Centauri C (nombre oficial: Próxima Centauri). Alfa Centauri A y Alfa Centauri B, están muy próximas entre sí y Alfa Centauri C (Próxima Centauri), orbita muy lejos alrededor de las dos primeras. En la Figura 3.13 a) se muestra un esquema de la situación de observación de Alfa Centauri A y B. A simple vista, o sea ojo desnudo, este sistema binario se ve como si fuera una sola estrella, se dice que el ojo no resuelve las estrellas. Incluso con un telescopio, que consiste de un objetivo (Ob) que puede ser un espejo cóncavo (telescopio reflector) o una lente (telescopio refractor) y un ocular (Oc). En ambos tipos de telescopios el ocular el que consiste de una lente, o un conjunto de lentes, se utiliza para aumentar el tamaño de la imagen que se forma en el plano focal del objetivo puede suceder que las estrellas aún se sigan viendo como una sola. Esto significa que el telescopio en su conjunto no resuelve al par de estrellas.

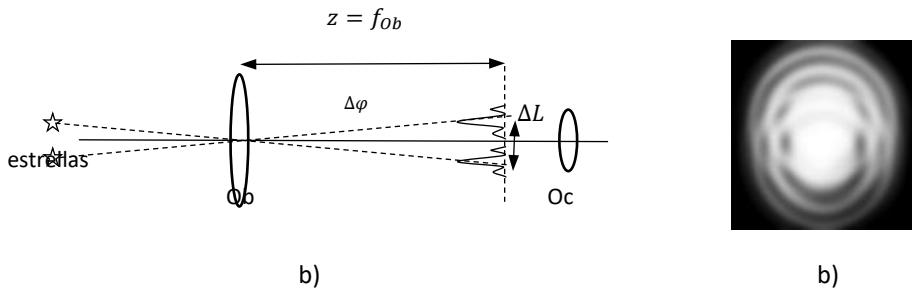


Figura 3.13: a) Esquema observación de estrellas muy próximas entre sí. b) distribución de intensidad en plano focal lente objetivo.

Las fuentes (estrellas) son incoherentes, por lo tanto, la intensidad en el plano focal del objetivo será la suma de las intensidades de cada una de las fuentes. La luz proveniente de cada fuente sufre difracción en la abertura circular que constituye la lente objetivo Ob, en consecuencia producirá un diagrama de Airy. Cuando las estrellas están muy próximas entre sí, se superpondrán dichos los diagramas y no podrán resolverse, una imagen de la intensidad observada se muestra en la Figura 3.13 b). El criterio de *Rayleigh* establece que dos puntos están justamente resueltos, cuando el máximo del diagrama de Airy de uno de ellos, coincide con el mínimo del otro.

Habíamos visto que el primer mínimo venía dado por la ec. 3.24 donde  $z = f_{ob}$  y  $l$  es el diámetro de la lente. Mirando el esquema de la Figura 3.13, se debe cumplir que  $\Delta L_{min} = 1.22 \frac{\lambda f_{ob}}{l}$  o escrito en términos de ángulos y aproximando la tangente por el ángulo,

$$\Delta\varphi_{min} = \frac{1.22\lambda}{l}$$

### 3.9 TEORÍA ESCALAR DE LA DIFRACCIÓN

La teoría escalar es suficientemente rigurosa para explicar la mayor parte de los resultados experimentales macroscópicos. Pese a que se trata de una simplificación que no tiene en cuenta el carácter vectorial de los campos electromagnéticos, la teoría escalar funciona con éxito cuando las aberturas son más grandes que la longitud de onda de la luz y cuando las distancias de observación son suficientemente grandes. En estas condiciones, la polarización del campo electromagnético no es una información relevante y, por lo tanto, se puede prescindir del formalismo vectorial.

Como vimos en la anterior sección, el fenómeno de difracción es esencial para comprender diferentes procesos tales como: Formación de imágenes y tratamiento óptico de señales. El paso inicial hacia la teoría que explica este fenómeno, fue realizado por Huygens en 1678. En forma intuitiva enunció que cada punto de un frente de onda primario es una fuente de ondas secundarias cuya envolvente un instante posterior es el frente de onda primario. Además, las onditas avanzan con una velocidad y frecuencia igual a la de la onda primaria. Este principio por sí solo no alcanza para explicar la difracción. 1818, Fresnel unió las ideas de Huygens junto con el principio de interferencia desarrollado por Young dando lugar a lo que se conoce como el principio de Huygens – Fresnel. El mismo establece que:

*Cada punto sin obturación de un frente de onda, en un instante dado, sirve como fuente onditas esféricas secundarias de la misma frecuencia de la onda primaria. La amplitud del campo óptico en cualquier punto adelante es la superposición de todas estas onditas considerando sus amplitudes y fases relativas.*

Fresnel logra calcular y predecir varias figuras de difracción usando este enunciado y adjuntando algunas hipótesis aparentemente arbitrarias tales como:

- La amplitud de las onditas secundarias difiere de la incidente en un factor  $\lambda^{-1}$ .
- La amplitud se halla también modulada por un factor llamado de oblicuidad (las onditas no emiten hacia atrás).
- Existe un desfasaje de  $90^\circ$  entre la onda incidente y la emisión de la onda secundaria.

Recién en 1882, Kirchhoff demuestra con fundamentos matemáticos que estas hipótesis de Fresnel surgen naturalmente de la aplicación de la teoría ondulatoria de la luz es decir a partir de las ecuaciones de Maxwell, sin embargo, Kirchhoff también hace dos hipótesis que resultan incompatibles. En 1894 Sommerfeld modifica lo planteado por Kirchhoff y logra así evitar la incompatibilidad (Ley de radiación de Sommerfeld), surgiendo de esta manera la llamada Teoría de Rayleigh – Sommerfeld.

Si bien las teorías de Kirchhoff y de Rayleigh – Sommerfeld se mostraron muy precisas en muchos casos, se debe decir que no funcionan en otros. Esto es, porque hacen aproximaciones y simplificaciones importantes. La más importante de ellas es que la luz se trata como un escalar. Supone que el campo eléctrico (es el que importa por ser el campo óptico) tiene una sola componente o, si tuviera dos la otra se trata de igual forma, como un fenómeno escalar. Esta aproximación no tiene en cuenta el hecho de que las distintas componentes del campo eléctrico están acopladas por las ecuaciones de Maxwell y no pueden tratarse en forma independiente. Sin embargo y por fortuna, esta teoría da muy buenos resultados si se cumple que:

- La apertura difractante es grande comparada con la longitud de onda.
- El campo difractado no se observa en puntos demasiado cerca de la apertura. (No se puede estudiar el fenómeno a menos de  $4\lambda$  de la apertura).

Sin embargo, estas condiciones no se cumplen en problemas de gran importancia como la difracción por nanoestructuras o la difracción cónica, en los que es necesario utilizar una teoría vectorial rigurosa para obtener resultados precisos. Esta teoría falla también en sistemas formadores de imagen si se trabaja con ángulos muy grandes como, por ejemplo, dos rayos que forman un ángulo de  $90^\circ$  entre ellos y que inciden sobre una lente como se exemplifica en la Figura 3.14. En estas circunstancias, del lado izquierdo de la lente no hay interferencia ya que los campos  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  son perpendiculares, mientras que del lado derecho si interfieren. La teoría escalar no puede explicar que haya interferencia de un lado de la lente y del otro.

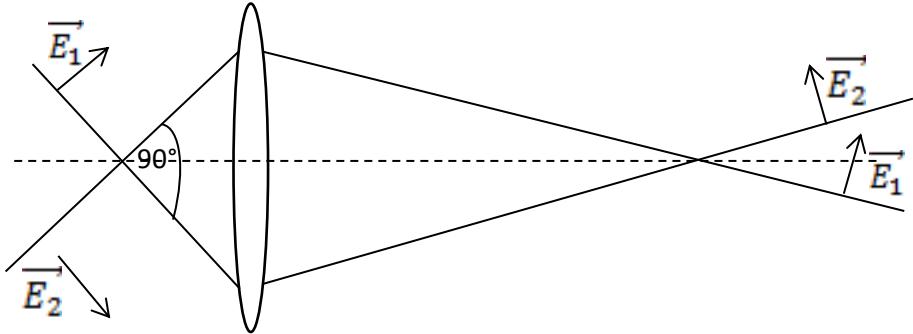


Figura 3.14: Formación de imágenes para ángulos grandes

A continuación, desarrollaremos los fundamentos de la teoría escalar y justificaremos la ec. 3.18.

### 3.9.1 TEOREMA INTEGRAL DE HELMHOLTZ - KIRCHHOF

Como se estudió en Electromagnetismo, las ecuaciones de Maxwell en el sistema *c.g.s* vienen dadas por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Ley de Ampere}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad \text{Ley de Coulomb}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Ley de Gauss campo magnético (ausencia de mono polos magnéticos)}$$

Y tenemos las relaciones:

Donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico,  $\vec{B}$  el campo magnético,  $\vec{D}$  el vector desplazamiento,  $\vec{H}$  el vector intensidad magnética,  $\vec{J}$  el vector densidad de corriente y  $\rho$  la densidad de carga y también tenemos las relaciones:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

donde,  $\sigma$  es la conductividad,  $\mu$  y  $\epsilon$  son las permitividades magnética y eléctrica respectivamente. Si además el medio es lineal, isótropo y homogéneo tenemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Entonces las ecuaciones de Maxwell resultan:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{J} + \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon}$$

De donde, como ya vieron en Electromagnetismo, se puede deducir la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + 4\pi \vec{\nabla} \left( \frac{\rho}{\epsilon} \right)}_{S}$$

donde  $\frac{\mu\varepsilon}{c^2} = \frac{1}{v^2}$ , es la inversa de la velocidad de la luz en el medio y  $S$  describe a las fuentes. Operando de la misma manera se puede obtener una ecuación para el campo magnético  $\vec{B}$ .

En ausencia de fuentes,  $S = 0$  y recordando que vamos a trabajar con campos escalares una solución de la ecuación de onda es:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.25)$$

Como la ecuación de ondas es lineal, y de coeficientes reales la solución que tendrá sentido físico es:

$$E(\vec{r}, t) = \Re e \left( E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) \quad (3.26)$$

Entonces si  $E(\vec{r}, t)$  es la perturbación óptica en  $\vec{r}$  al tiempo  $t$ , asumiendo que es una función escalar, o sea una onda linealmente polarizada y monocromática; y además en ausencia fuentes la ecuación de onda es:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Con  $E(\vec{r}, t) = E(\vec{r})e^{-i\omega t}$ , teniendo en cuenta la dependencia temporal, recordando que  $k = 2\pi \frac{v}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$  y operando vemos que la amplitud compleja (parte espacial) satisface la la ecuación de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2)E = 0 \quad (3.27)$$

Kirchhoff expresa la solución de esta ecuación en un punto  $P_0$  en términos del valor de  $E$  y de su derivada normal sobre una superficie cerrada  $S$  que rodea a ese punto, como se muestra en el esquema de la Figura 3.15. Esta solución ya había sido propuesta por Helmholtz en acústica. Para encontrarla, utiliza el teorema de Green que establece que si,  $U_1$  y  $U_2$  son dos funciones complejas de la posición, escalares con la primera y segunda derivadas univalueadas y continuas dentro de la superficie  $S$  entonces:

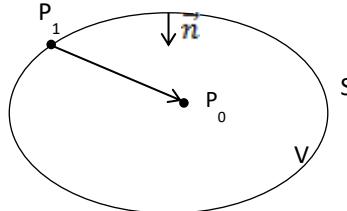


Figura 3.15: Superficie y volumen de integración.

$$\iiint (U_1 \nabla^2 U_2 - U_2 \nabla^2 U_1) dV = \oint (U_1 \vec{\nabla} U_2 - U_2 \vec{\nabla} U_1) \cdot \vec{n} dS \quad (3.28)$$

Es claro que si  $U_1$  y  $U_2$  son soluciones de la ecuación de Helmholtz,

$$\nabla^2 U_1 + k^2 U_1 = 0 \rightarrow U_2 \nabla^2 U_1 + U_2 k^2 U_1 = 0 \quad (3.29-a)$$

$$\nabla^2 U_2 + k^2 U_2 = 0 \rightarrow U_1 \nabla^2 U_2 + U_1 k^2 U_2 = 0 \quad (3.29-b)$$

Restando 3.29-b de 3.29-a se tiene que  $U_1 \nabla^2 U_2 - U_2 \nabla^2 U_1 = 0$ , por lo tanto,

$$\oint (U_1 \vec{\nabla} U_2 - U_2 \vec{\nabla} U_1) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (3.30)$$

Podemos elegir  $U_1 = E$  y  $U_2 = G(P_1, P_0) = \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}}$  con  $r_{10} = [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2]^{1/2}$

La función  $G$  es una onda esférica de amplitud 1 centrada en  $P_1$ . En general en la literatura, se utiliza  $G(P_0, P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$  que es una onda esférica centrada en  $P_0$  que es el punto de observación. Se considera que es más intuitivo al

revés, aunque es necesario entender que esta función no representa una onda real, sino que es una herramienta matemática para resolver el problema.

A continuación si observamos el esquema de la Figura 3.16, vemos que si queremos acercar  $P_1$  a  $P_0$ , aparece una divergencia, entonces lo que se hace es rodear  $P_0$  con una esfera de radio  $\varepsilon$  con el fin de excluirlo de la región encerrada por  $S$ .

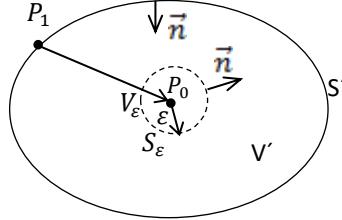


Figura 3.16: Superficie y volumen de integración sin singularidades.

Con esta construcción, los nuevos volumen y superficie de integración son:

$$S = S' + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon$$

$$V = V' + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_\varepsilon$$

$$\text{Entonces, } \oint\!\!\!\oint_S = \oint\!\!\!\oint_{S'} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon}$$

Vamos a calcular la segunda integral teniendo en cuenta que el gradiente se calcula sobre la variable 1, de modo que  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1} \right)$

$$\vec{\nabla}_1 G = \vec{\nabla}_1 \left( \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \right) = - \left( ik - \frac{1}{r_{10}} \right) \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \hat{r}_{10}$$

Luego la integral resulta

$$\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} \left[ -E \left( ik - \frac{1}{r_{10}} \right) \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \hat{r}_{10} - \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \vec{\nabla}_1 E \right] \cdot \vec{n} dS_\varepsilon$$

Recordando que  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial n}$  con lo que la integral resulta:

$$\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \left[ E \left( ik - \frac{1}{r_{10}} \right) - \frac{\partial E}{\partial n} \right] dS_\varepsilon$$

Pero como sobre  $S_\varepsilon$ ,  $r_{10} = \varepsilon$  se tiene:

$$\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} \frac{e^{ikr_{10}}}{\varepsilon} \left[ E \left( ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial E}{\partial n} \right] dS_\varepsilon$$

Dado que  $\varepsilon \rightarrow 0$  y que tanto  $E$  como  $G$  y sus derivadas son continuas,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} f dS_\varepsilon \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(P_0) 4\pi\varepsilon^2$ , por lo que la integral resulta:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ 4\pi\varepsilon e^{ik\varepsilon} E(P_0) - 4\pi e^{ik\varepsilon} E(P_0) - 4\pi\varepsilon e^{ik\varepsilon} \frac{\partial E(P_0)}{\partial n} \right] = -4\pi E(P_0)$$

Retomando la ecuación del teorema de Green, ec. 3.28,

$$E(P_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{e^{ikr_{10}} \partial E}{r_{10}} - E \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \right) \right] dS' \quad (3.31)$$

Este resultado se conoce como *Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhoff*.

### 3.9.2 FORMULACIÓN DE KIRCHHOFF PARA LA DIFRACCION POR UNA PANTALLA

En esta sección aplicaremos el teorema integral al caso de una pantalla plana, infinita y opaca que tiene una abertura difractante. Un esquema de la situación se muestra en la Figura 3.17.

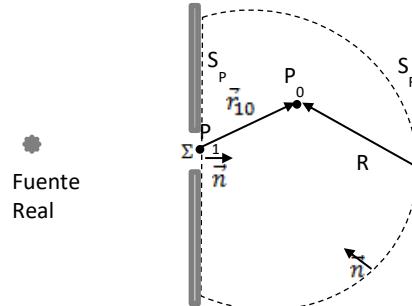


Figura 3.17: Difracción por una pantalla plana de acuerdo a Kirchhoff.

En esta situación, la superficie de integración es,  $S = S_p + \Sigma + S_R$  por lo que la integración sobre la superficie  $S$  estará conformada por:  $\oint_S = \oint_{S_p} + \oint_{\Sigma} + \oint_{S_R}$

Se toma  $S_p$  plana porque en superficie curva se complica mucho la función de Green y la fuente real que ilumina la pantalla se ubica fuera de  $S$ . En esta configuración se hace evidente la practicidad de considerar la normal hacia adentro de la superficie, al revés de Goodman [3.2], para que coincida con los  $z$  positivos sobre la abertura. Además, tomar ondas emergentes de  $P_1$  en vez de  $P_0$  ya que sobre la abertura las ondas coincidirán con las fuentes virtuales del principio de Huygens-Fresnel.

Vamos a calcular la integral de la ecuación 3.31 en la superficie  $S_R$ . Dado que:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \right) = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \right) = -\frac{e^{ikR}}{R} \left( ik - \frac{1}{R} \right) \hat{r}_{10} \cdot \hat{n}$$

se sugiere probarlo, la integral será:

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_R} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial E}{\partial n} - \frac{e^{ikR}}{R} \left( ik + \frac{1}{R} \right) E \hat{r}_{10} \cdot \hat{n} dS_R$$

De acuerdo a las hipótesis iniciales,  $R \gg \lambda \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \gg \frac{1}{R} \Rightarrow k \gg \frac{1}{R}$  y además haciendo tender  $R$  a  $\infty$ , la integral resulta:

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_R} \frac{e^{ikR}}{R} \left( \frac{\partial E}{\partial n} + ikE \hat{r}_{10} \cdot \hat{n}_{10} \right) dS_R$$

Ahora bien, uno estaría tentado a decir que dado que  $G$  y  $E$  decaden cuando  $R \rightarrow \infty$  esta integral  $\rightarrow 0$ . Pero no hay que olvidar que la superficie crece con  $R^2$ . Otro argumento sería que la perturbación viaja a una velocidad finita  $c$ , bastaría con tomar  $R$  lo suficientemente grande como para las ondas aún no hayan llegado, pero estamos trabajando con ondas monocromáticas o sea existen siempre. En la práctica es cierto porque siempre hay alguien que enciende la fuente, es decir estrictamente hablando, aunque usemos un láser, las ondas son quasi-monocromáticas.

Volviendo a nuestra discusión, si describimos a  $dS_R = R d\omega$ , donde  $\omega$  es el ángulo sólido subtendido por  $S_R$  centrado en  $P_0$ , lo que debemos exigir es que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial E}{\partial n} + ikE \hat{r}_{10} \cdot \hat{n}_{10} \right) = 0 \quad (3.31)$$

Esta es la llamada condición de radiación de Sommerfeld y es válida para campos que se atenúen al menos como  $1/R$ .

Dado que la perturbación que ilumina la apertura es una onda esférica o una combinación lineal de ondas esféricas esta condición siempre se cumple. Resolvamos las integrales sobre la pantalla. Para ello Kirchhoff hizo dos suposiciones:

1. Sobre  $\Sigma$  la distribución de  $E$  y su derivada son exactamente iguales a que si no estuviera la pantalla. Válido como una aproximación solo si  $\Sigma \gg \lambda$ .
2. Sobre la superficie  $S_P$  el campo  $E$  y  $\frac{\partial E}{\partial n}$  son idénticamente cero.

Esta aproximación que no es estrictamente cierta ya que siempre hay penumbra en la zona cercana a la abertura. Por otra parte, este requisito lleva a una inconsistencia, lo que abordaremos mas adelante. Las condiciones 1 y 2 se conocen como condiciones de contorno de Kirchhoff

De acuerdo con esto, las integrales sobre  $\Sigma$  y  $S_P$  se reducen solo a la integral sobre  $\Sigma$ .

$$E(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \left[ \frac{\partial E}{\partial n} + \left( ik - \frac{1}{r_{10}} \right) E \hat{n} \cdot \hat{r}_{10} \right] dS$$

Como anteriormente,  $r_{10} \gg \lambda \Rightarrow k \gg \frac{1}{r_{10}}$ , luego:

$$E(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \left[ \frac{\partial E}{\partial n} + ikE \cos(\hat{n} \cdot \hat{r}_{10}) \right] dS \quad (3.32)$$

Esta la ecuación de Kirchhoff para la difracción por una pantalla plana.

Ahora veamos que ocurre cuando iluminamos  $\Sigma$  con una fuente puntual real ubicada en  $P_2$ , como se ilustra en a Figura 3.18.

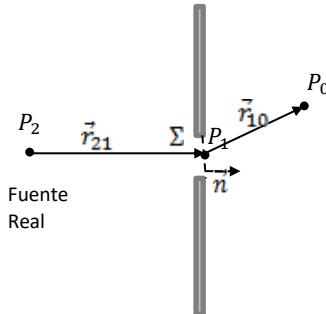


Figura 3.18: Difracción por una pantalla plana iluminada por una esférica.

En esta situación, tenemos:

$$E(P_1) = A \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}}, \vec{\nabla}E = A \left( ik - \frac{1}{r_{21}} \right) \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}} \hat{r}_{21} \text{ y } k \gg \frac{1}{r_{21}}$$

Reemplazando y operando, demostrar que:

$$E(P_0) = -\frac{A}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{21}+r_{10})}}{r_{21}r_{10}} ik [\cos(\hat{n} \cdot \hat{r}_{21}) + \cos(\hat{n} \cdot \hat{r}_{10})] dS$$

La que recordando que  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  puede reescribirse como:

$$E(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \oint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{21}+r_{10})}}{r_{21}r_{10}} \left[ \frac{\cos(\hat{n} \cdot \hat{r}_{21}) + \cos(\hat{n} \cdot \hat{r}_{10})}{2} \right] dS \quad (3.33)$$

Esta es la ecuación que se conoce como fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff y es válida cuando se ilumina la apertura con una fuente puntual. Si la apertura tuviera una cierta transmitancia hay que introducir un factor  $T_{\Sigma}$ , que tenga en cuenta la transmitancia.

A fin de facilitar la interpretación física de esta fórmula la reescribiremos de la forma:

$$E(P_0) = \oint_{\Sigma} E'(P_1) \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} ds \quad (3.34)$$

donde,

$$E'(P_1) = \frac{A}{i\lambda} \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}} \left[ \frac{\cos(\hat{n} \cdot \hat{r}_{21}) + \cos(\hat{n} \cdot \hat{r}_{10})}{2} \right]$$

De esta manera, podemos interpretar al campo en  $P_0$  como el provisto por infinitas fuentes puntuales virtuales ubicadas en distintos  $P_1$  de la apertura. De esta manera, hemos llegado a la formulación que intuitivamente habían hecho Huyguens y Fresnel. Es más, vemos que la onda primaria que llega a  $P_1$ , tiene amplitud y fase dada por  $A \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}}$  pero la onda emergente está desfasada, con un adelanto de  $90^{\circ}$  (factor  $1/i$ ) y está atenuada por el factor de oblicuidad  $[\cos, \cos]$  y por  $1/\lambda$ . Es decir, surgen de manera natural los requerimientos que Fresnel había impuesto de forma arbitraria para ajustar sus medidas.

Obviamente las fuentes virtuales no tienen un significado físico cabe preguntarnos: ¿cómo surge la alteración del campo al pasar por la abertura? Young en 1862 sugirió que el campo observado correspondía a la interacción entre el campo de la onda incidente, directamente transmitido, con la onda difractada en los bordes de la abertura. Estudios posteriores lo confirma.

### 3.9.3 FORMULACION DE RAYLEIGH-SOMMERFELD PARA LA DIFRACCION POR UNA PATALLA PLANA.

Si bien los resultados hallados por Kirchhoff coinciden muy bien con las experiencias, presenta una inconsistencia en una de la hipótesis que utiliza. La misma se origina en el hecho de imponer condiciones simultáneas sobre el campo y sus derivadas. Existe un teorema que dice que, si una función potencial y su derivada normal se anulan simultáneamente a lo largo de un segmento de curva, entonces dicha función debe anularse en todo el plano (Calssical Electrodynamics de Jackson). Evidentemente esto no es lo que sucede por lo tanto alguna hipótesis está mal planteada. Tales inconsistencias fueron solucionadas por Sommerfeld quien eliminó la necesidad de imponer condiciones sobre  $E$  y  $\frac{\partial E}{\partial n}$ , a continuación veamos cómo.

Sommerfeld eligió funciones de Green que fuesen combinaciones lineales de la anteriormente utilizada y tales que o bien  $G$  o  $\frac{\partial G}{\partial n}$  se anulasen sobre  $S_P + \Sigma$ . De esta forma sólo se debe pedir condiciones sobre  $E$  o  $\frac{\partial E}{\partial n}$  separadamente. Sommerfeld Plantea como soluciones  $G$ :

$$G_{\mp} = \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \mp \frac{e^{ikr'_{10}}}{r'_{10}}$$

con  $\vec{r}_{10}$  y  $\vec{r}'_{10}$  tales que  $P'_0$  es la imagen especular de  $P_0$ , como se muestra en el esquema de la Figura 3.19.

Analizaremos cada solución por separado.

$$\vec{\nabla}_1 G_- = -\frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \left( ik - \frac{1}{r_{10}} \right) \hat{r}_{10} + \frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}} \left( ik - \frac{1}{r'_{01}} \right) \hat{r}'_{01}$$

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}_1 G_- = -2 \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \left( ik - \frac{1}{r_{10}} \right) \hat{n} \cdot \hat{r}_{10}$$

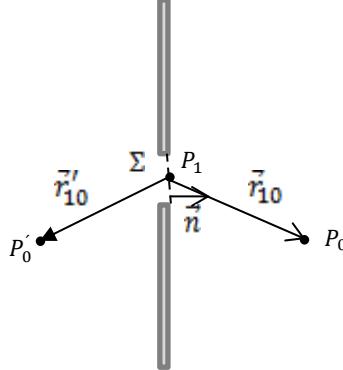


Figura 3.19: Difracción por una pantalla plana formulación de Rayleigh-Sommerfeld.

Donde usamos que  $\forall P_1 \in \Sigma$  y  $S_P \vec{r}_{10} = \vec{r}'_{10}$ . Obviamente en estos puntos  $G_- = 0$ , entonces recordando que

$$E(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma+S_P} \left[ G \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial G}{\partial n} \right]$$

Basta pedir que  $E = 0$  sobre  $S_P$  por lo tanto:

$$E(P_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} E(P_1) \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \left( ik - \frac{1}{r_{10}} \right) \hat{n} \cdot \hat{r}_{10} dS$$

Con  $k \gg \frac{1}{r_{10}}$

$$E(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} E(P_1) \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \cos(\hat{n}, \hat{r}_{10}) dS \quad (3.35)$$

De igual manera si usamos  $G_+$

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}_1 G_+ = \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \left( ik - \frac{1}{r_{10}} \right) (\hat{n} \cdot \hat{r}_{10} - \hat{n} \cdot \hat{r}'_{10}) = 0$$

nuevamente usamos que:

$$\forall P_1 \in \Sigma \text{ y } S_P \vec{r}_{10} = \vec{r}'_{10}$$

Entonces, ahora solo basta pedir que  $\frac{\partial E}{\partial n} = 0$  sobre  $S_P$ . Por lo tanto:

$$E(P_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} E(P_1) \frac{e^{ikr_{10}}}{r_{10}} \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_1 E dS \quad (3.36)$$

Veamos los resultados que se obtienen cuando se ilumina  $\Sigma$  con una fuente puntual, ubicada en  $P_2$ .  $E(P_1) = A \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}}$

Por la formulación de Kirchhoff habíamos obtenido la ec. 3.33, que para  $G_-$  se transforma en:

$$E(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \oint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{21}+r_{10})}}{r_{21}r_{10}} \cos(\hat{n}, \hat{r}_{10}) dS \quad (3.37)$$

Para  $G_+$  la ecuación resulta:

$$E(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \oint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{21}+r_{10})}}{r_{21}r_{10}} \cos(\hat{n}, \hat{r}_{21}) dS \quad (3.38)$$

donde se usó que:

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}_1 E = \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}} \left( ik - \frac{1}{r_{21}} \right) \hat{n} \cdot \hat{r}_{21} = 0$$

Lo que se observa es que las expresiones para el campo en  $P_0$  sólo varían en el factor de oblicuidad y que para el caso de fuente y punto de observación lejanos, estas coinciden. Se puede ver también que si intercambiamos el punto fuente por el punto de observación los resultados no varían, lo que se conoce como Principio de Reciprocidad.

### 3.10 PRINCIPIO DE BBINET

Veamos una aplicación de lo desarrollado en la sección 3.8. Supongamos que queremos calcular el campo en un punto  $P_0$  producido por una pantalla con una abertura de determinada forma  $\Sigma$ . De acuerdo a lo visto,

$$E(P_0) = \iint_{\Sigma} E(P_1) \frac{e^{ikr_{10}}}{i\lambda r_{10}} \cos(\hat{n}, \hat{r}_{10}) dS = \iint_{\Sigma} E(P_1) f(r_{10}) dS \quad (3.39)$$

donde  $f(r_{10}) = \frac{e^{ikr_{10}}}{i\lambda r_{10}} \cos(\hat{n}, \hat{r}_{10})$ . Al campo lo podemos escribir como:  $E(P_1) = E(P_1)[1 - C(P_1)] + E(P_1)C(P_1)$ , donde  $C(P_1)$  es una función que se anula en algunos puntos y vale uno en otros. Reemplazando en 3.39 se tiene:

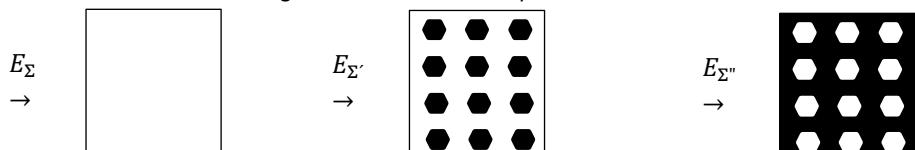
$$E(P_0) = \iint_{\Sigma} E(P_1)[1 - C(P_1)] f(r_{10}) dS + \iint_{\Sigma} E(P_1)C(P_1) f(r_{10}) dS \quad (3.40)$$

Teniendo en cuenta que  $C(P_1)$ , es un factor de forma, siempre podemos tenerlo en cuenta en vez de en el integrando, cambiando los límites de integración y de esta manera obtener:

$$E(P_0) = \iint_{\Sigma} E(P_1)C(P_1) f(r_{10}) dS = \iint_{\Sigma'} E(P_1)C(P_1) f(r_{10}) dS + \iint_{\Sigma''} E(P_1)C(P_1) f(r_{10}) dS$$

Por su definición,  $[1 - C(P_1)]$  y  $C(P_1)$  son funciones complementarias por lo tanto,  $\Sigma'$  y  $\Sigma''$  son aberturas complementarias. Esto significa que la distribución de campo que produce una pantalla  $\Sigma$  será igual a la suma de los campos producidos por  $\Sigma'$  y  $\Sigma''$ . Esto es,  $E_{\Sigma} = E_{\Sigma'} + E_{\Sigma''}$  como se ilustra en el esquema de la Figura 3.20.

Figura 3.20: Pantallas complementarias



De lo descrito se puede deducir que si una de las pantallas es opaca, por ejemplo  $\Sigma'$ , entonces  $\Sigma''$  será totalmente transparente y producirá igual campo que  $\Sigma$ . Por otro lado, el principio de Babinet vale punto a punto por lo que si para un cierto punto  $P_0$ , logramos hacer que  $E_{\Sigma}(P_0) = 0$  entonces  $E_{\Sigma'}(P_0) = -E_{\Sigma''}(P_0)$ . Es decir, el campo producido por  $\Sigma'$  será igual al producido por  $\Sigma''$  pero desfasado en  $\pi$ , lo que significa que la intensidad en  $P_0$  será la misma en ambos casos puesto que:

$$I(P_0) = |E(P_0)|^2$$

En la sección de 3.11 se propone un experimento para verificar este principio.

### 3.11 ESPECTRO ANGULAR.

También es posible formular la teoría de la difracción escalar en un marco que se asemeja mucho a La teoría de los sistemas lineales, invariantes. Si la distribución compleja del campo de una perturbación monocromática es analizada por Fourier en cualquier plano, las diversas componentes de Fourier espaciales pueden identificarse como

ondas planas que se desplazan en diferentes direcciones desde ese plano. La amplitud del campo en cualquier otro punto (o en cualquier otro plano paralelo) se puede calcular sumando las contribuciones de estas ondas planas, teniendo en cuenta los cambios de fase que han sufrido durante la propagación. Para un tratamiento detallado de este enfoque de la teoría de la difracción, así como sus aplicaciones en la teoría de la propagación de ondas de radio, se puede consultar el trabajo de Ratcliffe [3.4].

Supongamos que, debido a algún sistema no especificado de fuentes monocromáticas, una onda incide en un plano transversal  $(x, y)$  que viaja con una componente de propagación en la dirección  $z$  positiva. Supongamos que el campo complejo a través de un plano  $z = 0$  esté representado por  $U(x, y, 0)$ ; y nuestro objetivo final es calcular el campo resultante  $U(x, y, z)$  en un segundo plano paralelo a una distancia  $z$  a la derecha del primer plano. En el plano  $z = 0$ , la función  $U$  tiene una transformada de Fourier bidimensional dada por

$$A(f_x, f_y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (3.41)$$

Como vimos en la sección 2, la operación de transformación de Fourier se puede considerar como una descomposición de una función complicada en una colección de funciones exponenciales complejas más simples. Para enfatizar este punto de vista, escribimos  $U$  como una transformada de Fourier inversa de su espectro,

$$U(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(f_x, f_y, 0) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y \quad (3.42)$$

Para darle sentido físico al integrando considérelo de la forma de una onda plana simple que se propaga con el vector de onda  $\vec{k}$  de magnitud  $2\pi/\lambda$  y dirección dada por los cosenos directores  $(\alpha, \beta, \gamma)$  como se ilustra en el esquema de la Figura 3.21.

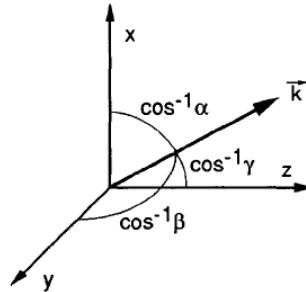


Figura 3.21: El vector de ondas.

Tales ondas planas tienen una representación compleja de la forma:

$$u(x, y, z; t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi v t)}$$

donde  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  y  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y} + \gamma\hat{z})$ . Eliminando la dependencia temporal, la amplitud compleja fasorial de la onda plana a través de un plano  $z$  constante es:

$$U(x, y, z; t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\gamma z)}$$

Recordando que los cosenos directores están interrelacionados a través de:  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ , decimos que a través del plano  $z = 0$ , la función exponencial compleja  $e^{i2\pi(f_x x + f_y y)}$  puede considerarse como una onda plana que se propaga con los cosenos directores,  $\alpha = \lambda f_x$ ;  $\beta = \lambda f_y$  y  $\gamma = \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}$ .

En la descomposición de Fourier de  $U$ , la amplitud compleja de las ondas planas componentes de frecuencias espaciales  $(f_x, f_y)$  es simplemente  $A(f_x, f_y, 0) df_x df_y$ , evaluada en  $(f_x = \alpha/\lambda, f_y = \beta/\lambda)$ . Por este motivo, la función:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; 0\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{-i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} dx dy \quad (3.43)$$

Se denomina espectro angular.

Consideremos ahora el espectro angular de la perturbación  $U$  a través de un plano paralelo al plano  $(x, y)$  pero a una distancia  $z$  de él. Sea la función  $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z)$  que representa el espectro angular de  $U(x, y, z)$ ; es decir,

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{-i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} dx dy \quad (3.44)$$

Ahora, si se puede encontrar la relación entre  $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; 0)$  y  $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z)$ , entonces serán evidentes los efectos de la propagación de la onda en el espectro angular de la perturbación. Para encontrar la relación deseada, tengamos en cuenta que  $U$  puede escribirse:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) e^{i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda} \quad (3.45)$$

Además  $U$  debe satisfacer la ecuación de Helmholtz,  $(\nabla^2 + k^2)U = 0$ , en todos los puntos fuente. La aplicación directa de este requisito a la ecuación anterior muestra que  $A$  debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dz^2} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 [1 - \alpha^2 - \beta^2] A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = 0$$

Una solución elemental

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} (*)$$

Esto demuestra que cuando los cosenos directores  $\alpha$  y  $\beta$  satisfacen que  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ , para todo coseno director, el efecto de la propagación en la distancia  $z$  es simplemente un cambio de las fases relativas de los diversos componentes del espectro angular. Como cada componente de onda plana se propaga en un ángulo diferente, cada uno recorre una distancia diferente entre dos planos paralelos y, por lo tanto, se introducen retardos de fase relativos.

Sin embargo, cuando  $\alpha^2 + \beta^2 > 1$  se requiere de una interpretación diferente dado que  $A(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0)$  es la transformada de Fourier de una distribución de campo en la que se imponen condiciones de contorno en el plano de la abertura, es muy posible que este espectro contenga componentes que satisfagan la relación anterior, bajo tal condición,  $\alpha$  y  $\beta$  ya no son interpretables como cosenos directores. Ahora la raíz cuadrada en la ec. (\*) es imaginaria, y esa ecuación puede ser reescrita como:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) e^{-\mu z} \quad (3.46)$$

donde  $\mu = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}$

Dado que  $\mu$  es un número real positivo, estas componentes de onda se atenúan rápidamente por el fenómeno de propagación. Dichos componentes se denominan ondas evanescentes y no llevan energía lejos de la apertura. Similar a las ondas producidas en una guía de ondas de microondas conducidas por debajo de su frecuencia de corte.

Finalmente, notamos que la perturbación observada en  $(x, y, z)$  puede escribirse en términos del espectro angular inicial mediante la transformación inversa de la ecuación (\*), dando

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} \times \text{circ}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) e^{i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda} \quad (3.47)$$

donde la función  $\text{circ}()$  limita la región de integración a aquella donde se satisface que  $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ .

Se debe tener en cuenta que ningún componente del espectro angular más allá del corte de la onda evanesciente contribuye a  $U(x, y, z)$ . Este hecho es la razón fundamental por la que ningún sistema de imágenes convencional puede resolver una estructura periódica con un período que sea más fino que la longitud de onda de la radiación utilizada. Es posible, sin embargo, acoplar ondas evanescentes con estructuras muy finas colocadas muy cerca del objeto difractor, y de ese modo se recupera la información que de otro modo se perdería. Nosotros, nos centraremos aquí en los instrumentos ópticos convencionales, para los cuales las ondas evanescentes no son recuperables. 3.9

### 3.12. DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y FRAUNHOFER- APROXIMACIÓN DE FRESNEL

#### 3.12.1 APROXIMACIÓN DE FRESNEL

Consideremos de nuevo la difracción de luz monocromática por una abertura finita  $\Sigma$  en una pantalla opaca infinita como se muestra en la figura 3.22:

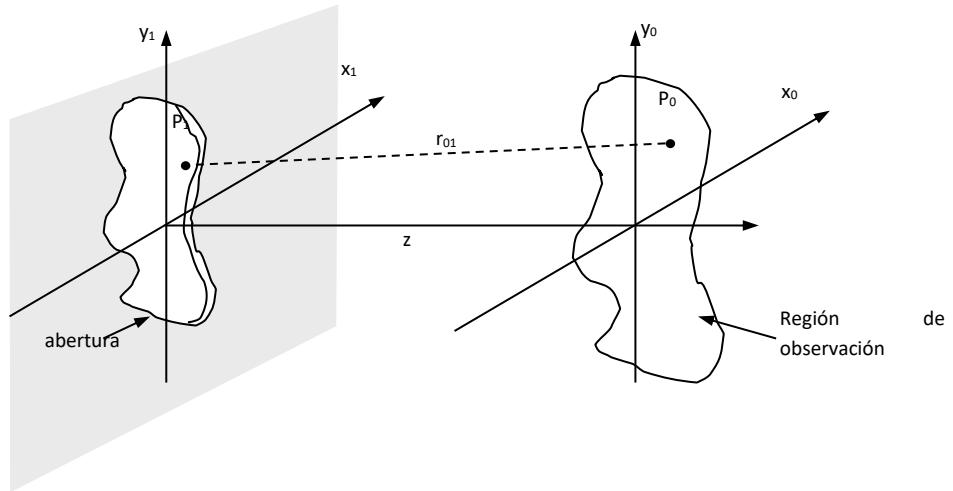


Figura 3.22: Geometría para estudiar la difracción.

La pantalla se supone plana, en un sistema coordenado  $(x_1, y_1)$ . Además, la región de observación también se supone plana y paralela al plano de la pantalla en una distancia normal  $z$ . Se coloca esta región en un sistema de coordenadas  $(x_0, y_0)$  con los ejes coordinados paralelos a los anteriores.

Según la expresión matemática del principio de Huygens-Fresnel, la amplitud del campo en el punto  $(x_0, y_0)$  es:

$$U(x_0, y_0) = \iint_{\Sigma} h(x_0, y_0; x_1, y_1) U(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (3.48)$$

donde:

$$h(x_0, y_0; x_1, y_1) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}) \quad (3.49)$$

En adelante, esta integral de superposición, se exhibirá con límites infinitos suponiendo que se entiende que, de acuerdo a las condiciones de borde de Kirchhoff,  $U(x_1, y_1)$  es idénticamente nula fuera de  $\Sigma$ . Por lo tanto, la ecuación 3.48 será:

$$U(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_0, y_0; x_1, y_1) U(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (3.50)$$

Una simplificación más se puede lograr considerando que la cantidad  $r_{01}$  en el denominador de la ecuación (3.49) no difiere demasiado de  $z$ , permitiendo que la función de peso pueda expresarse como:

$$h(x_0, y_0; x_1, y_1) \cong \frac{1}{i\lambda z} e^{ikr_{01}} \quad (3.51)$$

Esto es posible porque suponemos que la distancia de observación  $z$  es mucho más grande que cualquiera de las dimensiones de la abertura y además que en el plano de observación sólo nos interesa una región finita alrededor del eje  $z$  y también que  $z$  es mucho más grande que cualquier dimensión lineal de esta región. Con estas suposiciones el coseno de la expresión 3.49 es aproximadamente igual 1 si la precisión es menor que el 5% el ángulo no es superior a  $18^\circ$ . Ahora bien, la cantidad  $r_{01}$  en el exponente no puede ser reemplazada directamente por  $z$ , ya que el error resultante será multiplicado por un numero muy grande como lo es  $k$ , en consecuencia generaría errores de fase mayores que  $2\pi$  radianes. Para poder realizar una simplificación en el exponente procederemos como vimos en la sección I y usaremos la aproximación de Fresnel, ec. I.18 con lo cual

$$r_{01} \cong z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x_0 - x_1}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y_0 - y_1}{z} \right)^2 \right]$$

la cual nos permite escribir la función de peso como:

$$h(x_0, y_0; x_1, y_1) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\left\{ i\frac{k}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2] \right\}} \quad (3.52)$$

Cuando la distancia  $z$  es suficientemente grande para que esta aproximación sea precisa, el observador dice encontrarse en la región de difracción de Fresnel.

Se debe notar que lo crítico de esta aproximación es el reemplazo de las ondas esféricas de Huygens por una superficie cuadrática. O sea que es claro que en virtud de la precisión de tal aproximación es necesario imponer ciertas restricciones al tamaño de la abertura, la región de observación y de la distancia  $z$ . Como condición suficiente para una buena aproximación que el máximo cambio que contribuye al término siguiente de máxima frecuencia en el desarrollo binomial sea mucho menor que 1 radián. Esta condición se satisface si la distancia  $z$  es tal que:

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]_{max}^2 \quad (3.53)$$

sin embargo, este requerimiento en general no será necesario puesto que para que la aproximación de Fresnel permanezca válida, solo se requiere que el término de mayor orden del desarrollo no modifique el valor de la integral de superposición 3.50. De esta manera, el máximo valor del factor de fase que se agregue no necesita ser menor que un radián para que esto ocurra. Para distancias  $z$  suficientemente pequeñas para violar la ecuación 3.53 la cantidad  $k/2\pi$  será usualmente tan grande que el factor de fase cuadrático de la ecuación 3.52 oscila tan rápido que la contribución a la integral sólo será la proveniente de los puntos cercanos a  $(x_1 = x_0, y_1 = y_0)$  donde el cambio en la fase es mínimo. En las vecindades de estos puntos de "fase estacionaria", la magnitud del término del próximo orden alto de fase es generalmente despreciable. Esto se conoce como "principio de fase estacionaria".

Aceptando la validez de la aproximación de Fresnel, la integral de superposición puede ser expresada como:

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{\left\{ i\frac{k}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2] \right\}} dx_1 dy_1 \quad (3.54)$$

Desarrollando los términos cuadráticos en la exponente, resulta:

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ U(x_1, y_1) e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2 + y_1^2)} \right] e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \quad (3.55)$$

Como se puede apreciar, más allá del factor de amplitud y fase multiplicativo que es independiente de  $(x_1, y_1)$ , la función  $U(x_0, y_0)$  se obtiene realizando la transformada de Fourier de  $U(x_1, y_1) e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2 + y_1^2)}$ , y la misma debe ser evaluada en  $f_x = \frac{x_0}{\lambda z}$  y  $f_y = \frac{y_0}{\lambda z}$  para asegurar el correcto escalado espacial en el plano de observación.

Observando la ecuación 3.54 reconocemos la convolución que esta ecuación sugiere y posiblemente cierto entendimiento adicional se podría ganar si examinamos la difracción de Fresnel en el dominio de las frecuencias.

Haciendo la transformada de Fourier de la función de peso dada por la ecuación 3.52 obtendremos la función de transferencia

$$H(f_x, f_y) = e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)} \quad (3.56)$$

que describe el efecto de la propagación en la región de difracción de Fresnel. El primer factor exponencial en la función de transferencia representa un retardo general que sufre la fase por cada componente del espectro angular a medida que se propaga entre los planos separados una distancia  $z$ . El segundo factor exponencial representa la dispersión de la fase con una dependencia cuadrática de la frecuencia

### 3.12.2 APROXIMACIÓN DE FRAUNHOFER

Los cálculos de patrones de difracción pueden ser simplificados si se imponen restricciones más rigurosas a las impuestas en la aproximación de Fresnel. En particular ya vimos que en la región de la difracción de Fresnel la intensidad de campo observado  $U(x_0, y_0)$  se puede encontrar a partir de la transformada de Fourier del producto de la distribución en la abertura  $U(x_1, y_1)$  con una función cuadrática de la fase  $e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2 + y_1^2)}$  y además vamos a imponer una restricción más fuerte, denominada aproximación de Fraunhofer dada por:

$$z \gg \frac{k}{2} (x_1^2 + y_1^2)_{max} \quad (3.57)$$

esta restricción hace que el factor de fase cuadrática sea 1 en prácticamente toda la abertura y que la distribución observada se puede encontrar directamente como la transformada de Fourier de la distribución en la abertura. Por lo tanto la difracción en la región de Fraunhofer es:

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \quad (3.58)$$

A menos del factor multiplicativo que precede a la integral, esta expresión es la transformada de Fourier de la distribución en la abertura evaluada en las frecuencias  $f_x = \frac{x_0}{\lambda z}$  y  $f_y = \frac{y_0}{\lambda z}$ .

A las frecuencias ópticas, la condición requerida para la validez de la ecuación de la difracción de Fraunhofer puede ser muy severa, como se mencionó previamente. Sin embargo esta condición se cumple para un número importante de problemas. Además los patrones de difracción de Fraunhofer pueden observarse a distancias menores, si la abertura es iluminada por una onda esférica convergente hacia el observador, o si se coloca apropiadamente una lente convergente entre el observador y la abertura.

Finalmente se debe notar que no existe una función de transferencia que pueda ser asociada únicamente con la difracción de Fraunhofer, porque la aproximación 3.57 ha destruido la invariancia espacial de la ecuación de difracción, sin embargo, como la aproximación de Fraunhofer es un caso límite de la de Fresnel la función de transferencia 3.56 permanece válida en ambos regímenes.

### 3.13 VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DEL PRINCIPIO DE BBINET.

Para verificar el principio de Babinet, se armará el dispositivo óptico de acuerdo el esquema de la Figura.

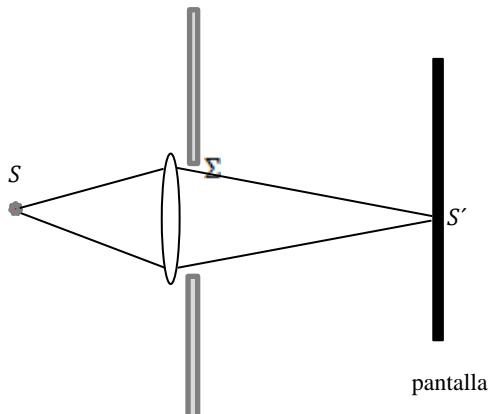


Figura 3.21: Dispositivo para obtener figuras de difracción similares a partir de pantallas complementarias.

Recordar que la imagen de punto sobre la pantalla no es un punto y como veremos en la siguiente sección, en esta configuración la distribución de campo en la pantalla es la ni más ni menos que las transformada de Fourier de  $\Sigma$ .

Se usarán pantallas complementarias  $\Sigma'$  y  $\Sigma''$  para verificar que son idénticas las figuras de difracción.

### 3.14 EJERCITACIÓN.

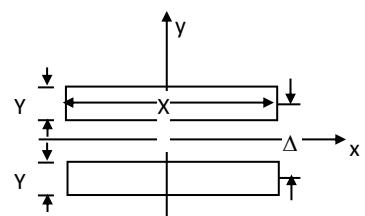
1- Considere un haz monocromático de longitud de onda  $\lambda$  que incide sobre un plano  $x_0 y_0$  donde yace una rendija rectangular estrecha muy larga de ancho  $w = 5\lambda$ :

- Exprese matemáticamente la función que representa la amplitud de transmitancia de la apertura. Establezca la condición requerida para la distancia  $z$  al plano de observación de modo que se cumpla la aproximación de Fraunhofer.
- Calcule y grafique el patrón de intensidad en un plano  $xy$  ubicado a una distancia  $z$  que cumpla con la condición de Fraunhofer.
- Calcule la posición angular del primer mínimo y el ancho  $\Delta x$  del lóbulo principal como función de la distancia  $z$  del plano de observación.
- Suponga que ahora ilumina la rendija con una onda plana que forma un ángulo  $\theta_0$  con la normal al plano  $x_0 y_0$ . Calcule y grafique la distribución de intensidad en el plano  $x y$ .
- Suponga que el ancho  $w$  de la rendija se incrementa a  $2w$ . Explique qué sucede con la distribución de intensidad a lo largo del eje  $y$  y grafique.

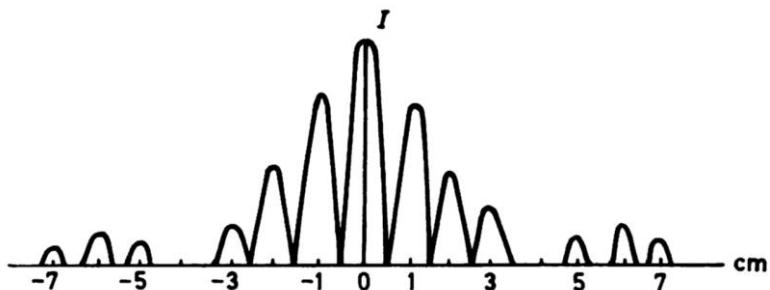
2- Un haz colimado de microondas incide en una pantalla metálica que contiene una rendija larga horizontal de 20 cm de ancho. Un detector que se mueve paralelamente a la pantalla en la región del campo lejano halla el primer mínimo de intensidad a un ángulo de  $36,87^\circ$  encima del eje central. Determine la longitud de onda de la radiación.

3- Sea la doble rendija que se muestra en la figura, con  $X = 0,5 \text{ mm}$ ,  $Y = 0,2 \text{ mm}$  y  $\Delta = 7\text{mm}$ , que se ilumina con una onda plana de amplitud unitaria y  $\lambda = 500\text{nm}$  que incide normal al plano de la apertura.

- Exprese matemáticamente la función que representa la amplitud de transmitancia.
- Calcule la distribución de intensidad del patrón de difracción de campo lejano.



- c) Represente gráficamente la distribución de intensidad. Suponga  $z = 10^3 \text{ m}$ .
- 4- Una onda plana proveniente de un láser de 600 nm incide en una doble rendija. Luego de atravesarla, la luz alcanza una pantalla ubicada a 100 cm de la misma. La distribución de intensidad del patrón de difracción que se observa en la pantalla se muestra en la figura. Estime, a partir del gráfico, el ancho de cada rendija y la separación entre las mismas.

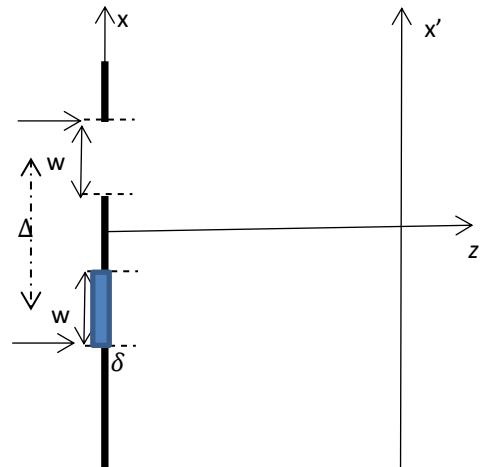


- 5- Una onda plana coherente de longitud de onda  $\lambda$  incide normalmente en una pantalla que contiene dos rendijas "infinitamente" largas de ancho  $w$  separadas una distancia  $\Delta$ . Una de las rendijas se cubre con una lámina delgada de vidrio de espesor  $\delta$  e índice de refracción  $n$ .

Datos:  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $w = 0,2 \text{ mm}$ ,  $\Delta = 7 \text{ mm}$  y  $n = 1,55$

Expresese matemáticamente la función que representa la amplitud de transmitancia  $t(x)$  de la apertura.

- a) Encuentre la distribución de intensidad como función de  $x'$  en un plano ubicado a una distancia  $z$  que cumple con la condición de Fraunhofer.
- b) Sea  $I_0$  la intensidad en  $x'=0$  (punto central) cuando  $\delta = 0$ . Escriba  $I(x' = 0)$  como función de  $\delta$ .
- c) Encuentre los valores del espesor  $\delta$  para los cuales  $I(x' = 0)$  es mínima.
- d) Realice un bosquejo de la distribución de intensidad resultante a lo largo del eje  $x'$ .



- 6- Un ejemplo elemental e importante de difracción ocurre cuando una onda plana monocromática de luz incide sobre una red de amplitud sinusoidal. La red tiene una amplitud de transmitancia que puede expresarse como:

$$t(x, y) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x) \right]$$

Donde  $f_0$  es el recíproco del período de las franjas de la red (o sea la frecuencia espacial de la red) y  $0 < m \leq 1$  es la modulación.

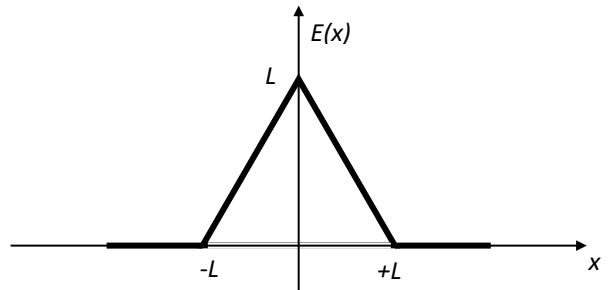
- a) Si tuviera que construir experimentalmente esta red ¿Cómo lo haría? ¿Cómo modificaría la frecuencia espacial de la red? Esquematicice  $t(x, y)$  (para ello, suponga  $f_0 = 10 \text{ líneas/mm}$ ).
- b) Una onda plana monocromática viaja en la dirección  $z$  e incide sobre esta red. Muestre que la amplitud compleja de la luz que abandona la red (justo detrás de la red) puede expresarse como la suma de tres

- ondas planas. ¿Cuál es la dirección de cada una de estas ondas respecto del eje z? ¿Qué sucede si aumenta la frecuencia espacial de la red  $f_0$ ?
- c) Calcule la difracción de campo lejano y esquematicamente. Suponga luz monocromática de 633 nm (láser de He-Ne).
- d) Ahora suponga que modifica la amplitud de transmitancia de tal modo que:

$$t(x, y) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right), \text{ donde las funciones rectángulo dan cuenta del tamaño}$$

finito de la red. Encuentre el patrón de difracción de campo lejano y esquematicamente. Suponga  $a=b=10\text{mm}$  y luz monocromática de 633 nm

- 7- Considera una ranura angosta y larga en la dirección y que se cubre con una máscara de amplitud de tal forma que el campo se hace decrecer linealmente desde el centro como se muestra en la figura. Calcula el campo de Fraunhofer difractado para luz monocromática incidente normalmente.



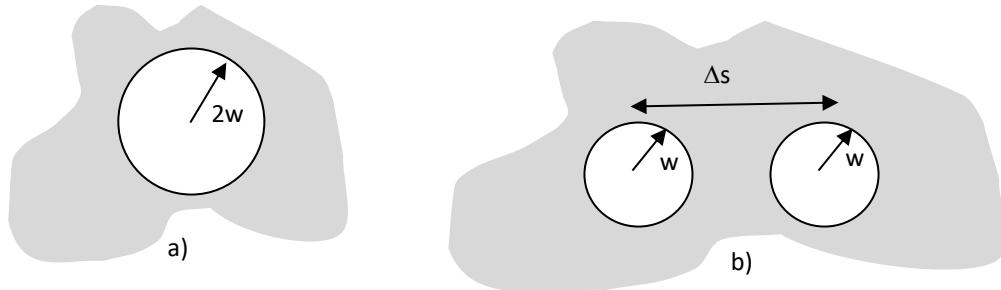
- 8- Considere la función de amplitud de transmitancia dada por:

$$t(x, y) = \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{X}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{Y}\right) \right] \otimes \left[ \frac{1}{\Delta} \text{comb}\left(\frac{y}{\Delta}\right) \delta(x) \right] \text{rect}\left(\frac{y}{N\Delta}\right)$$

Donde N es un impar entero y  $\Delta > Y$

- a) Esquematicice la apertura
- b) Encuentre una expresión para la distribución de intensidad para difracción de Fraunhofer, suponiendo la apertura iluminada por una onda plana de incidencia normal.
- 9- La luz blanca incide perpendicularmente sobre una red de transmisión que contiene 1000 líneas por centímetro. Considerando Difracción de Fraunhofer ¿A qué ángulo aparecerá la luz roja ( $\lambda_0 = 650 \text{ nm}$ ) en el espectro de primer orden?
- 10- Luz blanca incide perpendicularmente sobre una red de difracción cuyas rendijas están separadas en 3250 nm.
- a) ¿Por qué el máximo central siempre es blanco y los demás son coloreados? b) A medida que nos alejamos del máximo central, ¿de qué color es el máximo de primer orden que se observa? c) ¿Cuál es el mayor orden visible para el rojo con esta red (tomando  $\lambda_r = 650 \text{ nm}$ ) y para el violeta ( $\lambda_v = 420 \text{ nm}$ )?

11- Suponga que las aperturas de la figura son iluminadas con una onda plana de amplitud unitaria. Derive las expresiones analíticas para el campo de Fraunhofer y los patrones de intensidad correspondientes. Grafique el resultado (elija distancias de propagación adecuadas). Suponga:  $\lambda = 633 \text{ nm}$ ;  $w = 1 \text{ mm}$ ;  $\Delta s = 4 \text{ mm}$ :



11. ¿A qué distancia deben estar entre sí dos objetos en la luna para que puedan estar resueltos por el ojo sin la ayuda de ningún instrumento? Considerar el diámetro de la pupila del ojo 5mm, la longitud de onda de la luz de 600nm y la distancia a la luna de 380000 km.

b) ¿A qué distancia deben estar los objetos en la luna para que puedan ser resueltos por un telescopio que tiene un espejo de 5 m de diámetro?

12. La figura muestra varias configuraciones de abertura. Realice un esquema aproximado de las distribuciones de Fraunhofer para cada una de ellas. (recuerde que las regiones circulares deben engendrar unos sistemas de anillos centrados en el origen).



## REFERENCIAS

- [3.1] Kjell J. Gåsvik. Optical Metrology. John Wiley & Sons. Ltd. 3<sup>a</sup> Ed. 2002.
- [3.2] Joseph Goodman. Introduction to Fourier Optics. 2da. Edición. McGrow Hill Companies. 1996
- [3.3] M. Wolf & E. Born Principles of Optics. Pergamon Press. 6ta Ed. 1980
- [3.4] J. A. Ratcliffe. An introduction to the ionosphere and magnetosphere. Cambridge University Press. 1972

## CAPITULO IV: FILTRADO ÓPTICO Y FORMACIÓN DE IMÁGENES

### 4.1 INTRODUCCIÓN.

El componente más importante de un sistema formador de imágenes y de procesamiento de la información óptica son las lentes. En una discusión sobre las propiedades de las lentes parecería necesario recurrir a los principios básicos de la óptica geométrica, sin embargo, adoptaremos un punto de vista alternativo que no se basa directamente en ellos y con los que no es enteramente consistente. Nuestra discusión se limitará primeramente a los casos con iluminación monocromática y haremos alguna generalización al caso de iluminación no monocromática.

### 4.2 LENTE DELGADA COMO UNA TRANSFORMACION DE FASE.

Definimos a una LENTE como un elemento óptico compuesto por un material ópticamente denso, generalmente vidrio, en el cual la velocidad de propagación de una perturbación óptica es menor que la velocidad en el aire. Una lente se dice que es delgada cuando un rayo incidente en un punto de coordenadas  $(x, y)$  en una de las caras emerge en la cara opuesta en aproximadamente las mismas coordenadas, o sea si la traslación de los rayos en el interior de la lente es despreciable. Por lo tanto, una lente delgada simplemente retrasa un frente de onda incidente en una cantidad proporcional al espesor de la lente en cada punto.

Como se muestra en la Figura 4.1, si el máximo espesor de la lente es  $\Delta_0$ , y si el espesor de la lente en el punto de coordenadas  $(x, y)$  es  $\Delta(x, y)$ . Entonces el retardo de fase total que sufre un onda en la coordenada  $(x, y)$  al pasar a través de la lente se puede expresar por:

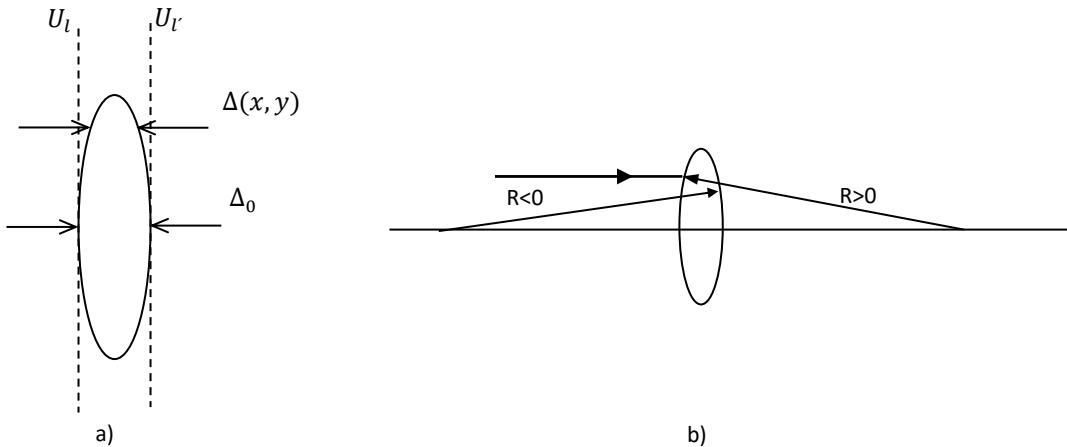


Figura 4.1: a) La función espesor. b) Convención de signo  
 $\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$ .

donde  $n$  es el índice de refracción del material de la lente,  $kn\Delta(x, y)$  es el retardo de fase introducido por la lente y  $k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$  es el retardo introducido por la región restante del espacio libre entre los dos planos. La lente puede entonces ser representada en forma equivalente como una transformación de fase multiplicativa de la forma:

$$t_l(x, y) = e^{ik\Delta_0} e^{ik[(n-1)\Delta(x, y)]} \quad (4.1)$$

El campo complejo  $U'_l(x, y)$  en el plano inmediatamente detrás de la lente se relaciona con el campo complejo  $U_l(x, y)$  incidente en el plano inmediatamente anterior a la lente por:

$$U'_l(x, y) = t_l(x, y)U_l(x, y) \quad (4.2)$$

Por lo que sólo resta especificar la forma matemática la función espesor  $\Delta(x, y)$  para entender los efectos de la lente.

#### 4.3 LA FUNCIÓN ESPESOR $\Delta(x, y)$

Para especificar las formas de las transformaciones de fase introducidas por los diferentes tipos de lentes primero vamos a adoptar una convención de signos:

A medida que los rayos viajan de izquierda a derecha, cada superficie convexa que atraviesan se considera que tienen un radio de curvatura positivo mientras que si la superficie es cóncava se considera un radio de curvatura negativo. Por lo tanto, en la Figura 4.1, el radio de curvatura de la superficie del lado izquierdo es un número positivo  $R_1$ , y el radio de curvatura del lado derecho es un número negativo  $R_2$ , como se resalta en la Figura 4.1 b).

Para encontrar el espesor  $\Delta(x, y)$  vamos a dividir a la lente en dos partes como se muestra en la figura 4.2 y escribiremos la función espesor total como la suma de las funciones espesor individuales,

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y) \quad (4.3)$$

De acuerdo a la figura, el espesor  $\Delta_1(x, y)$  vendrá dado por:

$$\Delta_1(x, y) = \Delta_{01} - \left( R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2} \right) = \Delta_{01} - R_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) \quad (4.4)$$

y similarmente

$$\Delta_2(x, y) = \Delta_{02} - \left( -R_2 - \sqrt{R_2^2 - x^2 - y^2} \right) = \Delta_{02} + R_2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right) \quad (4.5)$$

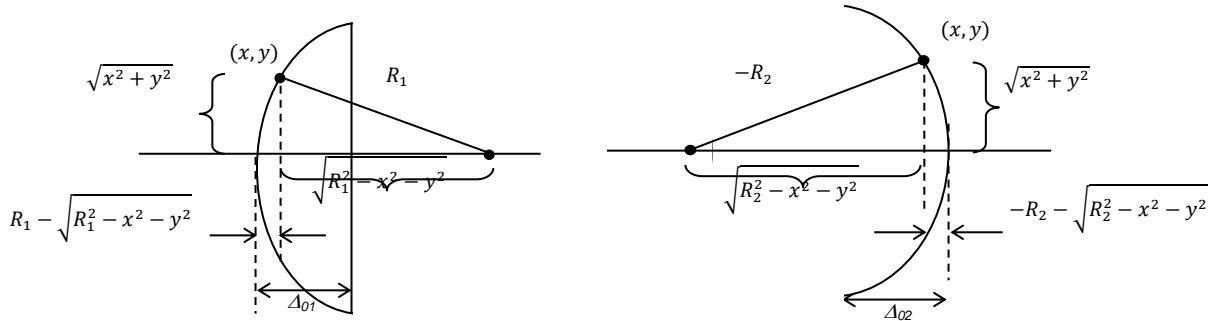


Figura 4.2: Cálculo de la función espesor

Combinando estas ecuaciones encontramos que la función espesor total será:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - R_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right) \quad (4.6)$$

donde  $\Delta_0 = \Delta_{01} + \Delta_{02}$

#### 4.4 LA APROXIMACIÓN PARAXIAL

La expresión de la función espesor se puede simplificar sustancialmente si restringimos los cálculos a la porción del frente de onda cercano al eje de la lente o lo que es equivalente si, solo se consideran rayos paraxiales. O se vamos a considerar valores de x e y suficientemente pequeños para asegurar que se cumpla:

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \cong 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_1^2} \quad y \quad \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \cong 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_2^2} \quad (4.7)$$

Las transformaciones de fase, por lo tanto, representaran a la lente sólo en una región limitada pero esto no es más restrictivo que la aproximación paraxial de la óptica geométrica. Las aproximaciones de la ecuación 4.7 cuantifican

a aproximación de las superficies esféricas de la lente por superficies parabólicas. Con la ayuda de estas aproximaciones, la función espesor es:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.8)$$

#### 4.5 LA TRANSFORMACIÓN DE FASE Y SU SIGNIFICADO FÍSICO

Sustituyendo la ec. 4.8 en 4.1 se obtiene la siguiente aproximación paraxial para la transformación de las lentes:

$$t_l(x, y) = e^{ikn\Delta_0} e^{\left[ -ik(n-1)\frac{x^2 + y^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]}$$

Las propiedades físicas de las lentes ( $n, R_1, R_2$ ) pueden combinarse en un número  $f$  denominado distancia focal el que se define por:

$$\frac{1}{f} \equiv (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.9)$$

Entonces las transformaciones de fase pueden describirse de la siguiente manera:

$$t_l(x, y) = e^{ikn\Delta_0} e^{\left[ -i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2) \right]}$$

Esta ecuación es la representación básica de los efectos de una lente sobre una perturbación incidente. Aunque nuestra deducción se basa en la forma específica de la lente de la Figura 4.1 a), la convención de signos establecida permite que el resultado obtenido sea aplicable a otros tipos de lentes, como las que se muestran en la Figura 4.3 incluida la ya estudiada.

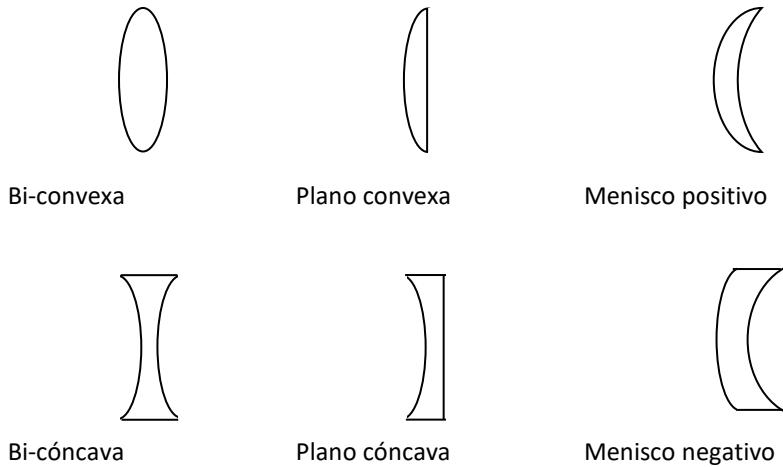


Figura 4.3: Tipos de lentes

Para entender mejor el significado físico de la transformaciones de fase que producen las lentes consideremos una onda plana de amplitud unitaria incidiendo normalmente. De esta manera, la distribución de campo  $U_l'$  delante de la lente es uno y la ec. 4.2 nos da la siguiente expresión para  $U_l'$  detrás de la lente:

$$U_l'(x, y) = e^{ikn\Delta_0} e^{\left[ -i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2) \right]} \quad (4.10)$$

el primer término es simplemente un retardo de fase constante, mientras que el segundo término se puede interpretar como una aproximación cuadrática a una onda esférica. Si la distancia focal es positiva, la onda esférica es convergente y si es negativa es divergente

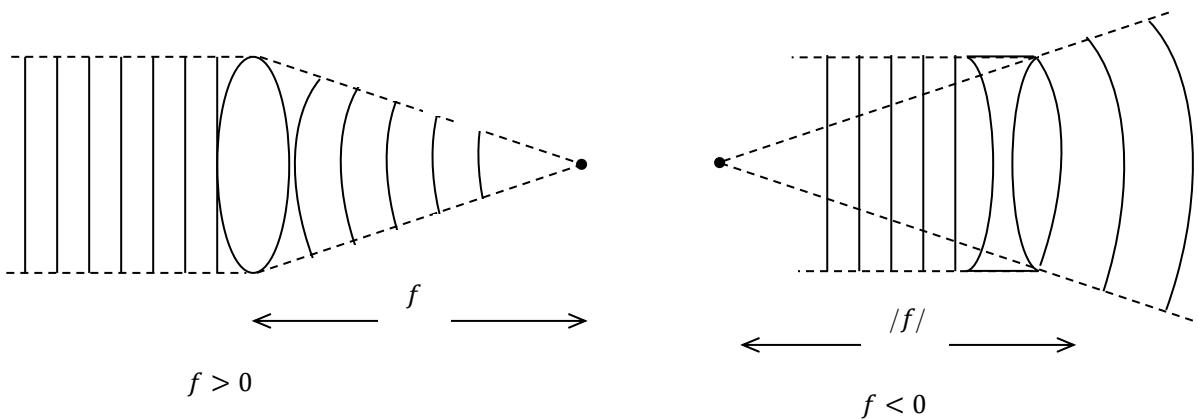


Figura 4.4: Efecto de una lente convergente y una divergente sobre una onda plana normalmente incidente.

La conclusión de que una lente compuesta por superficies esféricas realiza un mapeo de una onda plana incidente en una onda esférica es muy dependiente de la aproximación paraxial ya que en condiciones no paraxiales, aun cuando las superficies de la lente sean perfectamente esféricas, el frente de onda emergente, se aparta de la esfericidad perfecta lo que se denomina aberración esférica. Por lo general, las lentes son a menudo corregidas de aberraciones puliendo sus superficies esféricas para mejorar la esfericidad del frente de onda emergente.

#### 4.6 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMACIÓN FOURIER DE LAS LENTES

Una de las propiedades más remarcables y útil de una lente es su capacidad para realizar transformadas bidimensionales de Fourier. La operación de transformación Fourier, es una de las propiedades generalmente asociadas a un analizador de espectros, compacto, complejo y extensivo y ahora veremos que esta complicada operación se puede llevar a cabo con extrema simplicidad en un sistema coherente.

En todos los casos supondremos iluminación monocromática y que se desea calcular la distribución de amplitud en el plano focal posterior de la lente. Para ello vamos a considerar tres configuraciones en las que el objeto a ser transformado. El objeto se coloca inmediatamente delante de la lente, el objeto se coloca a una distancia  $d_0$  delante de la lente y el objeto se coloca detrás de la lente a una distancia  $d$  del plano focal.

a) Objeto colocado contra la lente

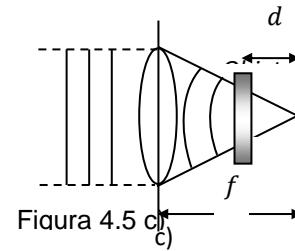
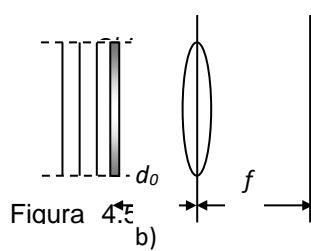
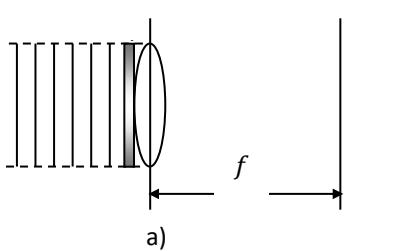


Figura 4.5: a) objeto inmediatamente delante de la lente. b) objeto a una distancia  $d_0$  delante de la lente y c) objeto se detrás de la lente a una distancia  $d$  del plano focal

Supongamos que se coloca un objeto de fase con amplitud de transmitancia  $t_0(x, y)$  inmediatamente delante de una lente de distancia focal  $f$  como se muestra en la figura 4.5 a). Supondremos que el objeto se ilumina uniformemente con una onda monocromática plana en incidencia normal de amplitud  $A$ , con lo cual la perturbación incidente de la lente será:

$$U_l = At_0(x, y) \quad (4.11)$$

Para tener en cuenta el tamaño finito de la apertura de la lente le asociamos a la lente una función pupila  $P(x, y)$  definida por:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dentro de la apertura} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto la distribución de amplitud detrás de la lente se puede evaluar usando la ecuación 4.10

$$U_l'(x, y) = U_l(x, y)P(x, y)e^{-\frac{i\lambda}{2f}(x^2+y^2)} \quad (4.12)$$

Donde, dado que el retardo de fase constante asociado a la transformación de la lente no afecta significativamente el resultado se omitió su contribución. Para encontrar la distribución  $U_f(x, y)$  de la amplitud del campo a través del plano focal de la lente, aplicaremos la fórmula de difracción de Fresnel, reemplazando  $z$  por  $f$ .

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{\frac{i\lambda}{2f}(x_f^2+y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} [U_l'(x, y)e^{\frac{i\lambda}{2f}(x^2+y^2)}] e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)} dx dy \quad (4.13)$$

donde se ha eliminado el factor de fase constante. Reemplazando en esta expresión la ecuación anterior tenemos que, los factores de fase cuadrática se cancelan dando:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{\frac{i\lambda}{2f}(x_f^2+y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} At_0(x, y)P(x, y)e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)} dx dy \quad (4.14)$$

O sea que la distribución de amplitud es proporcional a la transformada de Fourier de la porción de campo incidente subtendido por la apertura de la lente. Cuando la extensión física del objeto es del tamaño de la abertura, la función pupila se puede despreciar dando:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{\frac{i\lambda}{2f}(x_f^2+y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} At_0(x, y)e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)} dx dy \quad (4.15)$$

O sea que la amplitud y la fase de la luz en las coordenadas  $(x_f, y_f)$  está influenciada por la amplitud y la fase de las componentes de Fourier en las frecuencias ( $f_x = x_f/\lambda f$ ,  $f_y = y_f/\lambda f$ ).

Se debe notar que la transformación de Fourier entre el objeto y la distribución de amplitud en el plano focal no es exactamente una Transformada de Fourier debido al factor de fase cuadrática que precede a la integral de la ecuación 4.15. Aunque, la distribución de fase en el plano focal no es la misma en el plano objeto, la relación entre ambas es una simple curvatura de fase. En la mayoría de los casos lo que nos interesa es la distribución de intensidad en el plano focal. La medición de la misma conduce a lo que se conoce como el espectro de potencia del objeto; la distribución de fase no influye en esta medición. Por lo tanto:

$$I_f(x_f, y_f) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \iint_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)} dx dy \right|^2 \quad (4.16)$$

### b) Objeto colocado delante la lente

Consideremos la geometría más general de la figura 4.5 b). En la misma se observa que el objeto colocado a una distancia  $d_0$  delante de la lente es iluminado con una onda plana de amplitud  $A$  en incidencia normal. La transmitancia en amplitud del objeto, de nuevo se representará por  $t_0(x, y)$  y sea  $F_0(f_x, f_y)$  representa el espectro de Fourier de la luz transmitida por el objeto y  $F_l(f_x, f_y)$  el espectro de Fourier de la luz incidente en la lente; o sea:

$$F_0(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{At_0(x, y)\} \quad y \quad F_l(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{U_l\}$$

Suponiendo que las aproximaciones de Fresnel son válidas para la propagación en una distancia  $d_0$ , entonces  $F_0$  y  $F_l$  se pueden relacionar mediante la función de peso para un sistema espacialmente invariante (ecuación 3.56) lo que despreciando el retardo de fase constante resulta:

$$F_l(f_x, f_y) = F_0(f_x, f_y) e^{-i\pi\lambda d_0(f_x^2+f_y^2)} \quad (4.17)$$

Por ahora también vamos a despreciar la extensión finita de la apertura de la lente, por lo que haciendo  $P = 1$ , la ecuación 4. 14 resulta:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)}}{i\lambda f} F_l\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right) \quad (4.18)$$

Reemplazando 4.17 en 4.18 tenemos:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(1-\frac{d_0}{f})(x_f^2 + y_f^2)}}{i\lambda f} F_l\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right)$$

O lo que es lo mismo,

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{A e^{i\frac{k}{2f}(1-\frac{d_0}{f})(x_f^2 + y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f + yy_f)} dx dy \quad (4.19)$$

En conclusión, la amplitud y la fase de la luz en las coordenadas  $(x_f, y_f)$  nuevamente están relacionadas con la amplitud y la fase del espectro del objeto en las frecuencias  $(f_x = x_f/\lambda f, f_y = y_f/\lambda f)$ . En esta última expresión, el factor que precede a la integral, tiene a cero para el caso especial  $d_0 = f$ .

De estos resultados, es evidente que cuando el objeto se coloca en el plano focal anterior  $d$  de una lente, la curvatura de fase desaparece, dejando una transformación de Fourier exacta.

Para obtener este resultado hemos despreciado la extensión finita de la apertura de la lente, para incluirla debemos usar una aproximación de la óptica geométrica. Tal aproximación es válida solo si  $d_0$  es lo suficientemente pequeña de tal manera que el objeto se coloca en la región de Fresnel para la apertura de la lente. Esta condición afortunadamente se satisface en una vasta mayoría de situaciones concretas de interés.

### c) Objeto colocado delante la lente

Bajo las mismas condiciones de iluminación de los casos anteriores, el objeto de transmision  $t_0(x, y)$  se coloca a una distancia  $d$  del plano focal de la lente. De esta manera una onda esférica convergente hacia el plano focal posterior, incide sobre el objeto. En la aproximación de la óptica geométrica, la amplitud de la onda esférica incidente es  $Af/d$ , y la región iluminada del objeto se determina con la intersección del cono de rayos con el plano del objeto.

Considerando que la lente tiene un diámetro  $l$  la región iluminada será  $lf/d$ . La extensión finita de este spot de iluminación se puede representar por medio de una función pupila efectiva  $P[x_o(f/d), y_o(f/d)]$  en el plano del objeto. Usando aproximación paraxial, la amplitud transmitida por el objeto será:

$$U_o(x_o, y_o) = \frac{A e^{i\frac{k}{2d}(x_f^2 + y_f^2)}}{i\lambda f} \frac{f}{d} \iint_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) P[x_o(f/d), y_o(f/d)] e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x_o x_f + y_o y_f)} dx_o dy_o \quad (4.20)$$

por lo tanto, a menos del factor de fase cuadrático, la distribución de amplitud en el plano focal es la transformada de Fourier de la porción del objeto subtendida por la proyección de la apertura de la lente.

El resultado presentado en la ec. 4.19 es esencialmente el mismo resultado obtenido cuando la entrada se colocó directamente contra la lente. Sin embargo, en la presente configuración se ha obtenido una flexibilidad adicional, es decir, la escala de la transformada de Fourier está bajo el control del experimentador. Al aumentar  $d$ , la distancia desde el plano focal, el tamaño de la transformada se hace más grande, al menos hasta que la transparencia esté directamente contra la lente (es decir,  $d = f$ ). Al disminuir  $d$ , la escala de la transformada se hace más pequeña. Esta flexibilidad puede ser de utilidad en aplicaciones de filtrado espacial como veremos enseguida, donde algún ajuste potencial del tamaño de la transformación puede ser de considerable ayuda.

Ilustramos con un ejemplo típico el tipo de análisis de Fourier bidimensional que se puede lograr ópticamente con gran facilidad. La figura 4.6 muestra una transparencia de un número 3, que se coloca frente a una lente positiva se iluminado con una onda plana, dando en el plano focal posterior la distribución de intensidad que se muestra en la parte derecha de la figura. Obsérvese en particular los componentes de alta frecuencia introducidos por los bordes rectos en la entrada, como mencionamos en la Sección 2.

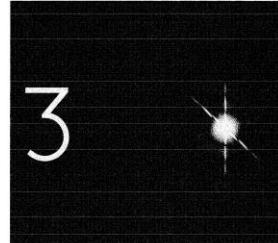


Figura 4.6: Transformada de Fourier óptica.

#### 4.7 FORMACIÓN DE IMAGEN: ILUMINACIÓN MONOCROMÁTICA

La propiedad más familiar de una lente es su capacidad para imágenes. Si un objeto se coloca en frente de una lente y se lo ilumina, bajo ciertas condiciones aparecerá en el plano imagen una distribución de intensidad muy similar al objeto. En principio vamos a considerar la formación de imágenes en un contexto limitado:

- Consideraremos lentes delgadas positivas y libres de aberraciones
- Iluminación monocromática, lo que implica que el sistema formador de imágenes es lineal en el campo de amplitud compleja

#### 4.8 RESPUESTA IMPULSIVA DE UNA LENTE POSITIVA

Consideremos la geometría de la figura 4.7, en la que un objeto plano se coloca a una distancia  $d_o$  en frente de una lente positiva y se ilumina con luz monocromática. Sea  $U_o(x_o, y_o)$  el campo de amplitud compleja, en el plano objeto, inmediatamente detrás del objeto. En el plano imagen a una distancia  $d_i$  detrás de lente, la distribución del campo se representa por  $U_i(x_i, y_i)$ . Queremos encontrar las condiciones bajo las cuales  $U_i$  puede considerarse razonablemente como una imagen de la distribución del objeto  $U_o$ .

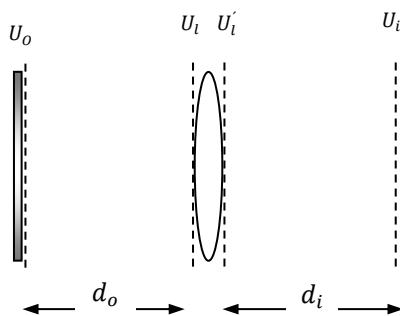


Figura 4.7: Geometría para la formación de imágenes.

De acuerdo con la linealidad del fenómeno de la propagación de las ondas el campo en el plano imagen se puede calcular de acuerdo a la integral de superposición:

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_i, y_i; x_o, y_o) U_o(x_o, y_o) \quad (4.21)$$

Donde  $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$  es la amplitud del campo producido en la coordenada  $(x_i, y_i)$  por una fuente puntual de amplitud unitaria aplicada en el punto de coordenadas  $(x_o, y_o)$ . O sea que las propiedades del sistema formador de imágenes estarán completamente descritas si se especifica la respuesta impulsiva  $h$ .

Si el sistema óptico se usa producir imágenes de alta calidad, entonces  $U_i$  debe ser lo más similar posible a  $U_o$ . Lo que significa que la respuesta impulsiva debe ser lo más aproximada a:

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) \cong K\delta(x_i \pm Mx_o, y_i \pm My_o) \quad (4.22)$$

donde  $K$  es una constante compleja,  $M$  representa el aumento del sistema y el signo más o menos se incluye para permitir una posible inversión de la imagen. Por lo tanto, especificaremos como el plano imagen al plano donde la ecuación 4.22 es lo más exacta posible.

Para encontrar  $h$ , consideremos una función  $\delta$  (fuente puntual) en la coordenada  $(x_o, y_o)$ . La aproximación paraxial para tal onda se escribe:

$$U_l(x, y) = \frac{1}{i\pi d_o} e^{\left\{i\frac{k}{2d_o}[(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]\right\}} \quad (4.23)$$

Después de pasar por la lente, la distribución de campo se transforma en:

$$U'_l(x, y) = U_l(x, y)P(x, y)e^{\left[-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right]} \quad (4.24)$$

Finalmente usando la difracción de Fresnel para tener en cuenta la propagación sobre una distancia  $d_i$ , tendremos (se sugiere operar y demostrarlo):

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = \frac{1}{\lambda^2 d_i d_o} e^{\left[i\frac{k}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)\right]} e^{\left[i\frac{k}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)\right]} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) e^{\left[-i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f}\right)(x^2+y^2)\right]} e^{-ik\left[\left(\frac{x_o}{d_o} + \frac{x_i}{d_i}\right)x + \left(\frac{y_o}{d_o} + \frac{y_i}{d_i}\right)y\right]} dx dy \quad (4.25)$$

Pero esta expresión tiene la desventaja de que es difícil de determinar por lo que es necesario hacer algunas simplificaciones.

#### 4. 9 ELIMINACION DE LOS FACTORES DE FASE CUADRÁTICA

La complicación más importante la expresión 4.25 son aquellos factores de fase cuadrática dos de ellos,  $e^{\left[i\frac{k}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)\right]}$  y  $e^{\left[i\frac{k}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)\right]}$  son independientes de las coordenadas de la lente mientras que el otro,  $e^{\left[-i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f}\right)(x^2+y^2)\right]}$  depende ellas, que son las variables de integración.

Vamos a considerar una serie de aproximaciones y simplificaciones que nos permitirán deshacernos de ellos.

I – Para eliminar el término dependiente de las coordenadas de la imagen, debemos considerar que, en la mayoría de los casos de interés, la distribución de luz detrás de la lente será el producto final de la operación de formación de imágenes. Esta distribución es generalmente registrada directamente con un detector que sólo responde a intensidad (película fotográfica, cámara CCD, fotomultiplicador, etc). Dado que este término sólo modifica la distribución de fase de la luz, no afectará los resultados de estas mediciones por lo tanto se puede eliminar.

II – Desafortunadamente el factor de fase cuadrática que depende de las coordenadas del objeto no puede eliminarse así directamente por su dependencia de las variables de integración de la integral de superposición (cuando la iluminación es “incoherente”, el sistema formador de imagen se puede considerar un sistema lineal con respuesta impulsiva  $|h|^2$  y en este caso ambos factores de fase cuadrática pueden ser eliminados).

Sin embargo, este factor puede ser eliminado en la mayoría de los casos que nos pueden interesar con los siguientes argumentos:

Si el sistema formador de imágenes se comporta idealmente de acuerdo a la ecuación 4.22 la amplitud en las coordenadas  $(x_i, y_i)$  debe consistir solo de las contribuciones de una pequeña región del espacio objeto, centrada en un punto objeto geométrico ideal, como se muestra en la Figura 4.8. Si en el interior de esta región, el argumento de  $e^{[i\frac{k}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)]}$  cambia en cantidades menores que una fracción de un radián, se puede utilizar la siguiente aproximación:

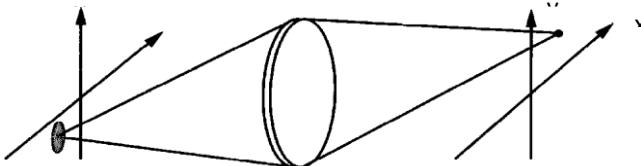


Figura 4.8 Región del plano objeto que contribuye al campo en un punto particular de la imagen

$$e^{[i\frac{k}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)]} \cong e^{[i\frac{k}{2d_o}\left(\frac{x_i^2+y_i^2}{M^2}\right)]} \quad (4.26)$$

Puesto que la dependencia de este factor con  $(x_o, y_o)$  ha sido removida, ahora podemos ver que la exponencial se hace despreciable ya que nuevamente no afecta a la medición de la intensidad en el plano de la imagen.

III – Una última simplificación será restringir nuestra atención al plano particular detrás de la lente para el cual la distancia  $d_i$ , es tal que:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} = 0 \quad (4.27)$$

lo que es justamente la ley de las lentes de la óptica geométrica y que debe satisfacerse para que se formen imágenes. Esta distancia, representa la distancia particular detrás de la lente donde los rayos que emergen de un punto objeto convergen en uno punto en la imagen. Desde este punto de vista de la óptica geométrica, la ley de las lentes se satisface si la respuesta impulsiva es aproximadamente la ideal.

Entonces asumiendo que la ley de las lentes se satisface y con las simplificaciones propuestas, la respuesta impulsiva se reduce a:

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = \frac{1}{\lambda^2 d_i d_o} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) e^{-ik[(\frac{x_o}{d_o} + \frac{x_i}{d_i})x + (\frac{y_o}{d_o} + \frac{y_i}{d_i})y]} dx dy \quad (4.27)$$

Definimos el aumento del sistema por:

$$M = \frac{d_i}{d_o} \quad (4.28)$$

encontramos una forma más simple de la respuesta impulsiva dada por:

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = \frac{1}{\lambda^2 d_i d_o} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) e^{-ik[(x_i + Mx_o)x + (y_i + My_o)y]} dx dy \quad (4.29)$$

Por lo tanto si se satisface la ley de las lentes, la respuesta impulsiva se puede ver como dada por el patrón de difracción de la apertura de la lente, centrado en las coordenadas de la imagen ( $x_i = -Mx_o, y_i = -My_o$ ).

Esto, no debe sorprendernos ya que al elegir  $d_i$  para satisfacer la ley de las lentes, estamos observando en el plano donde la onda esférica que abandona la lente converge. De estos resultados, es de esperar que la distribución de luz alrededor del punto de convergencia sea precisamente el patrón de difracción de la apertura de la lente el que limita la extensión de la onda esférica.

#### 4.10 LA RELACION ENTRE LA IMAGEN Y EL OBJETO

Vamos a analizar en primer lugar, la naturaleza de la imagen que predice la óptica geométrica. Para encontrar esta imagen ideal, vamos a usar el artificio de considerar que la longitud de onda se aproxima a cero con lo cual los efectos de difracción se hacen despreciables. Haciendo el cambio de variables:  $\bar{x} = \frac{x}{\lambda d}$  y  $\bar{y} = \frac{y}{\lambda d}$  la respuesta impulsiva se puede reescribir:

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) \cong M \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \bar{x}, \lambda d_i \bar{y}) e^{-i2\pi[(x_i + Mx_o)\bar{x} + (y_i + My_o)\bar{y}]} dx dy \quad (4.30)$$

A medida que  $\lambda$  tiende a cero, el rango de  $(\bar{x}, \bar{y})$  sobre el que la función pupila vale uno crecerá infinitamente y entonces se puede reemplazar  $P$  por uno manteniendo los límites de integración. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} h(x_i, y_i; x_o, y_o) &\rightarrow M \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \bar{x}, \lambda d_i \bar{y}) e^{-i2\pi[(x_i + Mx_o)\bar{x} + (y_i + My_o)\bar{y}]} dx dy \\ &= \delta(x_i + Mx_o, y_i + My_o) = \frac{1}{M} \delta\left(\frac{x_i}{M} + x_o, \frac{y_i}{M} + y_o\right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Luego reemplazando en la integral de superposición 4.21, las distribuciones de las amplitudes del objeto y de la imagen están relacionadas mediante:

$$U(x_i, y_i) = \frac{1}{M} U_o\left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M}\right) \quad (4.32)$$

O sea que hemos demostrado que, si el sistema formador de imágenes es perfecto, la imagen será una réplica aumentada o reducida e invertida del objeto. Por supuesto que esta predicción de la óptica geométrica no es perfecta y para tener una comprensión más completa de la relación entre el objeto y su imagen necesitamos considerar los efectos de la difracción. Para hacerlo volvamos a la ecuación 4.30 y hagamos un cambio de variable adicional tal que,  $\bar{x}_o = -Mx_o$  y  $\bar{y}_o = -My_o$  y en cuyo caso encontramos que la respuesta impulsiva será,

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = M \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \bar{x}, \lambda d_i \bar{y}) e^{-i2\pi[(x_i - \bar{x}_o)\bar{x} + (y_i - \bar{y}_o)\bar{y}]} dx dy \quad (4.33)$$

Esta expresión de  $h$  ahora nos habla de un sistema espacialmente invariante, que depende sólo de la diferencia de las coordenadas. Por otro lado si definimos  $\bar{h} = \frac{1}{M} h$  la integral de superposición resulta,

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(x_i - \bar{x}_o, y_i - \bar{y}_o) \left[ \frac{1}{M} U_o\left(\frac{\bar{x}_o}{M}, \frac{\bar{y}_o}{M}\right) \right] d\bar{x}_o d\bar{y}_o \quad (4.34)$$

donde reconocemos una convolución entre la respuesta impulsiva  $\bar{h}$  con la imagen predicha por la óptica geométrica. Por comodidad definimos una nueva función  $U_g$  que representa la predicción de la óptica geométrica o sea:

$$U_g(x_i, y_i) = \frac{1}{M} U_o\left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M}\right)$$

con lo cual la convolución puede escribirse en notación simplificada como:

$$U_i(x_i, y_i) = \bar{h}(x_i, y_i) * U_g(x_i, y_i)$$

donde:

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = M \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \bar{x}, \lambda d_i \bar{y}) e^{-i2\pi[x_i \bar{x} + y_i \bar{y}]} dx dy \quad (4.35)$$

Estas dos últimas ecuaciones son el resultado final de este análisis y nos dicen que cuando se tienen en cuenta los efectos de difracción la imagen no es una réplica perfecta del objeto. Por el contrario, la imagen obtenida es una versión suavizada del objeto como consecuencia del ancho finito de la respuesta impulsiva  $\bar{h}$ . El efecto de este suavizado puede atenuar fuertemente los detalles finos del objeto con la correspondiente pérdida de fidelidad.

#### 4.12 TRATAMIENTO GENERALIZADO DE LOS SISTEMAS FORMADORES DE IMAGENES

Vamos a suponer que nuestro sistema formador de imágenes consiste de un conjunto de lentes positivas y negativas y no necesariamente delgadas. Supondremos también que el sistema en definitiva produce una imagen real; aunque esto no debe considerarse una restricción porque si se observa una imagen virtual siempre se puede convertir en real tal vez con la lente del ojo. Por esta razón incluiremos a esta lente como el elemento final de nuestro sistema.

En resumen, para especificar las propiedades de un sistema de lentes, lo consideraremos una “caja negra”, y las propiedades significativas del sistema serán descriptas sólo especificando las propiedades de sus “terminales”.

Como se muestra en la figura 4.9 las terminales de esta caja negra consisten de la pupila de entrada, representando un apertura finita (efectiva o real) a través de la cual la luz pasa para atravesar los elementos formadores de imagen y de la pupila de salida (nuevamente efectiva o real) representando una abertura finita a través de la cual la luz pasa después de abandonar los elementos del sistema.

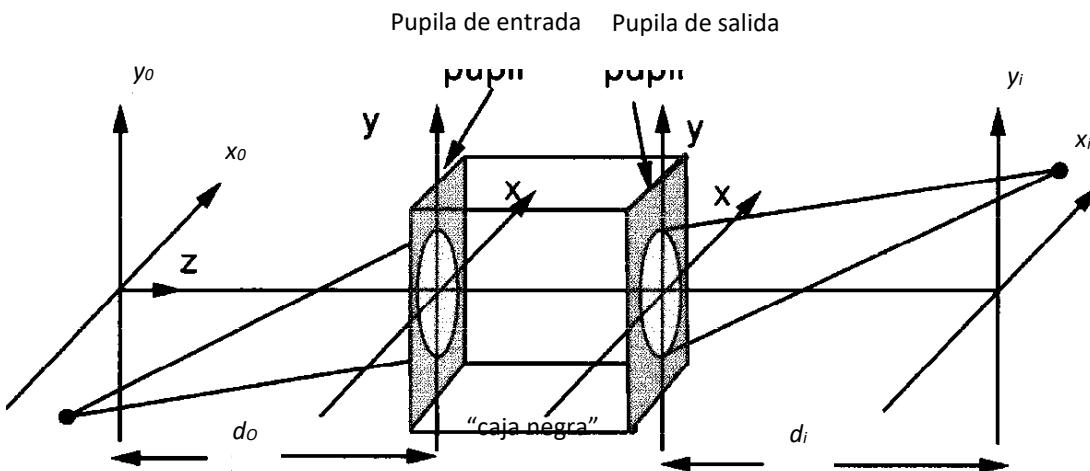


Figura 4.9: modelo generalizado de un sistema formador de imágenes.

Usualmente, se supone que el paso de la luz entre la entrada y la salida puede ser descripto por la óptica geométrica. Por lo tanto, la extensión finita de las dos pupilas se puede calcular como la proyección geométrica de la apertura más chica del sistema a través de los elementos ópticos entre el plano de entrada y el de salida.

Un sistema se dice limitado por difracción cuando una onda esférica emergente de un punto objeto es convertida por el sistema nuevamente en una onda esférica perfecta y que converge en un punto ideal en el plano de la imagen. En resumen, la propiedad fundamental de un sistema limitado por difracción, es que una onda esférica divergente que incide en la pupila de entrada es mapeada en una onda esférica convergente en la pupila de salida. Para cualquier sistema real, esta propiedad será a lo sumo satisfecha solo en un rango finito en el plano del objeto. Si el objeto de interés se confina a esta región, entonces el sistema puede ser tratado como limitado por difracción.

Si en presencia de fuentes puntuales objeto las formas de los frentes de onda que salen de la pupila de salida se apartan significativamente de una onda esférica entonces decimos que el sistema tiene aberraciones. Estas aberraciones tienen relación con defectos en la respuesta en frecuencia de un sistema formador de imágenes.

##### 4.12.1 EFECTOS DE DIFRACCION EN LA IAMGEN

Puesto que la óptica geométrica describe adecuadamente el pasaje de la luz desde la pupila de entrada a la de salida, los efectos de difracción juegan un rol importante sólo en la propagación de la luz desde al objeto hasta la pupila de entrada y desde la pupila de entrada a la imagen. Por lo que es posible asociar todas las limitaciones de difracción a una de estas dos pupilas.

Los dos puntos de vista que analizan la resolución de la imagen ya sea limitada por;

1) el tamaño finito de la pupila de entrada y

2) la extensión finita de la pupila de salida

vista desde el espacio imagen, son equivalentes. La justificación fundamental de esta equivalencia yace en el hecho de ambas pupilas son una imagen de la otra.

El punto de vista de considerar que los efectos de difracción resultan del tamaño finito de la pupila de entrada ha sido propuesto en 1873 por Ernst Abbe en sus estudios de formación de imágenes microscópicas en sistemas coherentes. De acuerdo con la teoría de Abbe, sólo una cierta porción de las componentes de difracción, generadas por un objeto complicado son interceptadas por la abertura finita de la pupila de entrada. Con lo que las componentes de alta frecuencia, como se muestra en la figura 4.10 para el caso de una red de difracción y un sistema óptico compuesto de una sola lente positiva, son filtradas.

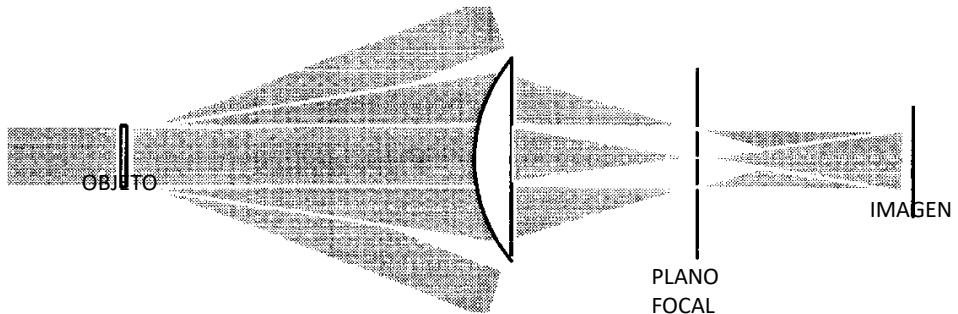


Figura 4. 10: Teoría de Abbe de la formación de imágenes.

Una mirada esencialmente equivalente de asociar los efectos de difracción al tamaño finito de la pupila de salida ha sido presentada por Lord Reyleigh en 1896 y es el que usaremos nosotros.

Nuevamente consideraremos la amplitud de la imagen (bajo iluminación monocromática restricción que eliminaremos luego) como representada por una integral de superposición.

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_i, y_i; x_o, y_o) U_o(x_o, y_o) \quad (4.36)$$

donde  $h$  es la amplitud en las coordenadas  $(x_i, y_i)$  de la imagen en respuesta a una fuente puntual objeto en la coordenada  $(x_o, y_o)$ . En ausencia de aberraciones la respuesta  $h$  es la de una onda esférica convergente de la pupila de salida hacia un punto imagen ideal. En el caso más general el aumento puede ser positivo o negativo de acuerdo a que la imagen sea o no invertida.

De las discusiones de la sección anterior vimos que la distribución de amplitud de un punto imagen ideal es simplemente la difracción de Fraunhofer de la pupila de salida. Por lo que,

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = K \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda d_i}[(x_i+Mx_o)+(y_i+My_o)]} dx dy \quad (4.37)$$

donde  $K$  es una constante compleja y la función pupila es uno dentro de la pupila y cero fuera de ella. Y en esta expresión hemos eliminado los factores de fase cuadrática sobre el plano objeto e imagen. Con los cambios de variables  $\bar{x} = \frac{x}{\lambda d_i}$ ,  $\bar{y} = \frac{y}{\lambda d_i}$ ,  $\bar{x}_o = Mx_o$  y  $\bar{y}_o = My_o$ , se obtiene:

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = K \lambda^2 d_i^2 \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \bar{x}, \lambda d_i \bar{y}) e^{-i2\pi[(x_i+\bar{x}_o)\bar{x}+(y_i+\bar{y}_o)\bar{y}]} dx dy \quad (4.38)$$

con las definiciones:

$$\bar{h} = \frac{1}{K \lambda d_i} h \text{ y } U_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o) = \frac{\lambda^2 d_i^2}{M} U_o\left(\frac{\bar{x}_o}{M}, \frac{\bar{y}_o}{M}\right) \quad (4.39)$$

la integral de superposición se resulta:

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(x_i - \bar{x}_o, y_i - \bar{y}_o) U_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o) d\bar{x}_o d\bar{y}_o \quad (4.40)$$

donde  $U_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o)$  es la imagen ideal predicha por la óptica geométrica y

$$\bar{h}(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \bar{x}, \lambda d_i \bar{y}) e^{-i2\pi(x_i \bar{x} + y_i \bar{y})} d\bar{x} d\bar{y} \quad (4.41)$$

Por lo tanto, en el caso más general la imagen puede considerarse como la convolución de la imagen predicha por la óptica geométrica con una respuesta impulsiva que es determinada por la pupila de salida del sistema.

#### 4.12.2 ILUMINACIÓN POLICROMÁTICA: CASO COHERENTE E INCOHERENTE

La suposición de luz estictamente coherente que estuvimos haciendo es tremadamente restrictiva ya que las fuentes reales, aun el láser, no son perfectamente monocromáticas. Las variaciones de naturaleza estadística de la intensidad de amplitud y fase pueden influenciar muchísimo en el comportamiento de un sistema formador de imágenes.

Como vimos hasta ahora, en el caso de iluminación monocromática, ha sido conveniente representar a la onda de luz mediante un fasor complejo  $U$ , que era una función de las coordenadas espaciales. Para el caso de iluminación policromática, pero de banda angosta, o sea que el ancho de banda es pequeño comparado con su frecuencia central, este procedimiento puede generalizarse y representar a la perturbación óptica por medio de un fasor complejo, pero esta vez dependiente del tiempo.

En esta situación, la luz policromática transmitida o reflejada por un objeto, debe ser tratada en términos estadísticos debido a las variaciones temporales del fasor de amplitud compleja. Si como vimos en el caso coherente cada punto del objeto genera una respuesta impulsiva de amplitud en la imagen, en este caso las variaciones aleatorias de amplitud y fase de una fuente puntual objeto, se corresponderán con variaciones de amplitud y fase de las respuestas impulsivas de amplitud en la imagen. Vamos a considerar básicamente dos tipos de iluminación:

- Luz espacialmente coherente (coherente): las amplitudes de los fasores de todos los puntos del campo objeto varían al unísono. Esto significa que, aunque cualquier par de puntos tengan entre sí fases relativas diferentes, sus fases absolutas están perfectamente correlacionadas.
- Luz espacialmente incoherente (incoherente): es el caso opuesto, las amplitudes de los fasores del campo varían de manera completamente decorrelacionada.

La iluminación coherente se obtiene siempre que la luz parezca provenir de un punto. Las fuentes coherentes más comunes son los láseres, aunque también pueden obtenerse fuentes coherentes con fuentes convencionales haciendo pasar la luz de una lámpara de arco por un “pinhole” (orificio muy pequeño), pero la intensidad que se obtiene normalmente es muy baja. La iluminación incoherente se obtiene a partir de fuentes difusas o extensas como las fuentes de descargas en gases.

Cuando la iluminación es coherente, las varias respuestas impulsivas en el plano imagen varían al unísono y por lo tanto se deben sumar en amplitud, Por lo que un sistema formador de imagen coherente es lineal en amplitud.

Cuando se ilumina con luz incoherente, las respuestas impulsivas en el plano imagen varían de manera estadísticamente independientes. Por lo que deben sumarse en intensidad. Puesto que la intensidad de cualquier respuesta impulsiva es proporcional a la intensidad del punto objeto que le da lugar, se puede decir que un sistema incoherente es un mapeo lineal en intensidad y que la respuesta impulsiva de este mapeo en intensidad es proporcional al módulo cuadrado de la respuesta impulsiva de un sistema coherente.

Estas conclusiones son exclusivamente heurísticas por lo que vamos a hacer una formalización tratando de descubrir los detalles ocultos en ellas. Para comenzar debemos notar que para el caso monocromático obtenemos la representación fasorial del campo suprimiendo las componentes de frecuencias positivas del campo cosenoidal y

duplicando las negativas. Para generalizar el procedimiento a una onda policromática, nuevamente, suprimimos las frecuencias positivas de su espectro y duplicamos sus negativas dando lugar a una función compleja

$$u(P, t) = U(P) \cos[\omega t + \phi(P)]$$

$$u(P, t) = U(P, t) e^{-i2\pi\nu t}$$

donde  $U(P, t)$  se puede considerar como un fasor dependiente del tiempo representativo de  $u(P, t)$ . Bajo condición de ancho de banda angosto, se imponen condiciones particulares tales como,

$$\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}} \ll 1 \text{ y } \frac{1}{\Delta\nu} \gg \frac{d}{c}$$

donde  $\Delta\nu$  es el ancho de banda de la perturbación,  $d$  es la longitud de camino óptico involucrado más largo y  $c$  la velocidad de la luz), la respuesta impulsiva no cambia apreciablemente para la distintas frecuencias contenidas en el espectro óptico. Por lo tanto, podemos representar a la amplitud compleja dependiente del tiempo del campo en la imagen como una convolución de la respuesta impulsiva dependiente de la longitud de onda con la amplitud compleja dependiente del tiempo en el objeto:

$$U_i(x_i, y_i, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(x_i - \bar{x}_o, y_i - \bar{y}_o) U_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o, t - \tau) d\bar{x}_o d\bar{y}_o \quad (4.42)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de retardo asociado con la propagación entre  $(x_o, y_o)$  y  $(x_i, y_i)$ ,  $U_g$  es la amplitud del fasor en la imagen predicha por la óptica geométrica  $h$  viene dada por

$$U_l(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(x_i - \bar{x}_o, y_i - \bar{y}_o) U_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o) d\bar{x}_o d\bar{y}_o \quad (4.43)$$

que es la misma expresión 4.40 pero se debe reemplazar  $\lambda$  por  $\bar{\lambda}$ . La intensidad en en plano imagen será entonces:

$$I_i(x_i, y_i) = \langle U_i(x_i, y_i) U_i^*(x_i, y_i) \rangle \quad (4.44)$$

Para realizar esta cuenta reemplazamos la expresión del campo dado por 4.43 y obtenemos:

$$I_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}_o d\bar{y}_o \iint_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}_o d\bar{y}_o \bar{h}(x_i - \bar{x}_o, y_i - \bar{y}_o) \bar{h}^*(x_i - \bar{x}_o, y_i - \bar{y}_o) \langle U_g(x_i, y_i) U_g^*(x_i, y_i) \rangle \quad (4.45)$$

el último factor de esta expresión se denomina correlación mutua y es una medida de la coherencia espacial de la luz en dos puntos del objeto. Puesto que las propiedades estadísticas de  $U_g$  son idénticas a las de  $U_o$ , la correlación mutua se puede considerar dependiente de la coherencia espacial de la luz. Cuando la iluminación es coherente, las amplitudes de los fasores dependientes del tiempo en el plano objeto varían solo en constantes complejas o lo que es lo mismo:

$$U_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o, t) = U_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o) \frac{U_g(0,0,t)}{\langle |U_g(0,0,t)|^2 \rangle^{1/2}}$$

$$U_g(\bar{x}'_o, \bar{y}'_o, t) = U_g(\bar{x}'_o, \bar{y}'_o) \frac{U_g(0,0,t)}{\langle |U_g(0,0,t)|^2 \rangle^{1/2}}$$

sustituyendo estas relaciones en la ecuación de la intensidad se tiene:

$$I_i(x_i, y_i) = \left| \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(x_i - \bar{x}_o, y_i - \bar{y}_o) U_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o) d\bar{x}_o d\bar{y}_o \right|^2 \quad (4.46)$$

Entonces cuando la iluminación es incoherente, las amplitudes del fasor en el plano objeto varían estadísticamente independientes, esta propiedad ideal se puede representar por la ecuación:

$$\langle U_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o; t) U_g^*(\bar{x}'_o, \bar{y}'_o) \rangle = \kappa I_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o) \delta(\bar{x}_o - \bar{x}'_o, \bar{y}_o - \bar{y}'_o) \quad (4.47)$$

Esta representación no es exacta, pero permite ver que las ondas transmitidas por el objeto son solo evanescentes y la distancia mínima en la que existe coherencia es del orden una longitud de onda. No obstante, siempre que el área de coherencia en el objeto sea pequeña en comparación con un tamaño de celda de resolución en el espacio del objeto, la ec. (4.47) es precisa. Para la mayoría de los propósitos prácticos es correcta y cuando se usa en la ecuación de la intensidad 4.45 se obtiene:

$$I_i(x_i, y_i) = \kappa \iint_{-\infty}^{\infty} |\bar{h}(x_i - \bar{x}_o, y_i - \bar{y}_o)|^2 I_g(\bar{x}_o, \bar{y}_o) d\bar{x}_o d\bar{y}_o \quad (4.48)$$

o sea que bajo iluminación incoherente el sistema debe ser analizado como un sistema lineal en intensidad y la respuesta impulsiva es proporcional al módulo de la respuesta obtenida bajo iluminación coherente.

#### 4.13 FILTRADO ÓPTICO EXPERIMENTO DE ABBE-PORTER

Históricamente, las técnicas de síntesis de Fourier tienen su origen en los trabajos de manipulación intencional del espectro de una imagen desarrollados inicialmente por Abbe (1873) y posteriormente por Porter (1906). En ambos casos, el propósito explícito fue la verificación de la teoría de formación de imágenes en un microscopio. A continuación, los describiremos brevemente.

Estos experimentos, son una poderosa demostración del mecanismo detallado por el que se forman las imágenes coherentes y además de los principios básicos del análisis de Fourier en sí mismo. Para entender mejor los conceptos consideremos el experimento que se muestra en la Figura 4.11. Un dispositivo óptico como este recibe el nombre de Computador Óptico por la capacidad de las lentes de hacer transformadas de Fourier.

Un objeto consistente de una malla de delgados alambres rectangulares, se ilumina con un haz de luz láser colimado. En el plano focal posterior de la lente se obtiene, como vimos en la Sección 4.6, el espectro de Fourier de la malla periódica. Finalmente, en el plano imagen las componentes de Fourier que pasaron a través de la lente se recombinan para formar una réplica de la malla. Colocando varias máscaras (un iris, una rendija,.. etc.) en el plano focal es posible manipular en forma directa el espectro de la imagen en diversas formas.

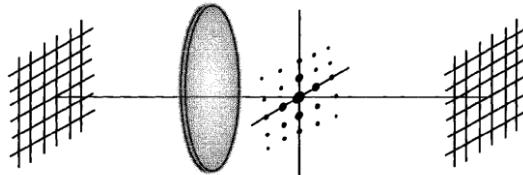


Figura 4.11: Experimento de Abbe-Porter

En la fotografía de la Figura 4.12 a) se muestra el espectro de la red bidimensional, en la b) la imagen original completa de la misma.

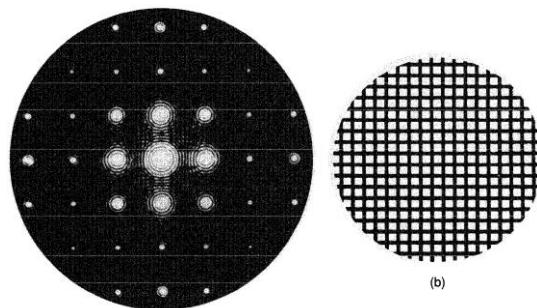


Figura 4.12: a) Espectro de la red y b) imagen de la misma.

La naturaleza periódica de la malla, genera en el plano focal una serie de componentes espectrales aisladas cada una de ellas espaciada por la extensión finita de la abertura circular en la que ha confinado a la red.

Los spots brillantes a lo largo del eje horizontal en el plano focal provienen de las componentes exponenciales complejas del objeto que son horizontales y los verticales de los componentes verticales. Los componentes del espectro que están fuera de estos ejes, corresponden a componentes exponenciales complejas dirigidas en los ángulos correspondientes en el plano objeto. La potencialidad de las técnicas de filtrado espacial se ilustra insertando una rendija delgada en el plano focal para dejar pasar sólo una fila de las componentes espetrales. Como se muestra en la Figura 4.13.

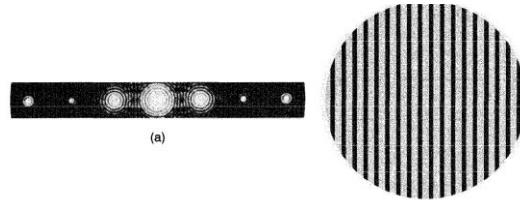


Figura 4.13: Espectro filtrado horizontalmente y la imagen obtenida

O sea, se observa sólo la estructura vertical de la red. Esto significa que permanece solo la información correspondiente a aquellas componentes exponenciales complejas relacionadas con la estructura vertical uniforme. De esta manera se suprime completamente las líneas horizontales de la red.

Si se quiere obtener sólo la información de las líneas horizontales, entonces la máscara en el plano de Fourier debe ser vertical como se muestra en figura 4.14.

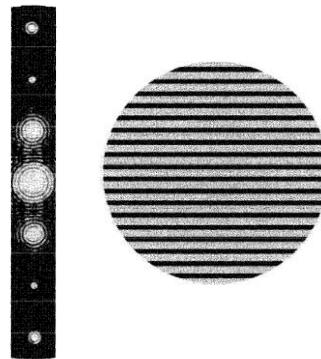


Figura 4.14: Espectro filtrado verticalmente y la imagen obtenida.

Muchas de las herramientas de procesamiento de imágenes, se basan en estas ideas, tales como la detección de bordes, borroneo, eliminado de ruido, etc. A modo de ejemplo se muestra a continuación alguna de estas operaciones simples de filtrado óptico. El objeto que se coloca en el computador óptico es la imagen de La Gioconda, como se muestra en la Figura 4.15 a). El espectro del campo difractado por este objeto se muestra en la Figura 4.15 b).

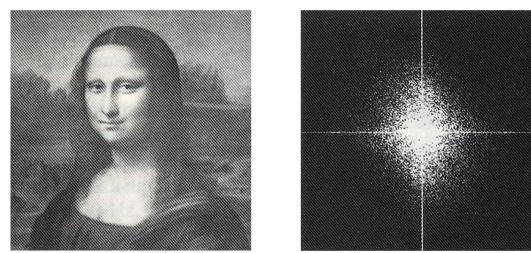


Figura 4.15: a) Imagen original, b) espectro de potencia

Es fácil darse que cuenta que la distribución de las componentes espectrales de un objeto de esta naturaleza es menos predecible como el caso de la malla de nuestro ejemplo anterior. A simple vista podemos distinguir la difracción de los bordes de la imagen, puntos brillantes ubicados en líneas verticales y horizontales. Y alrededor del centro de coordenadas del espectro un “manchón brillante”, que es el contenido de frecuencia del objeto. Las frecuencias más altas, más alejadas del origen, corresponden a los bordes de la imagen. Esto se hace evidente si por ejemplo se aplica un filtro pasa bajos, es decir se bloquen las altas frecuencia y el resultado es un borroneo en la imagen como se muestra en la Figura 4.16 a). Por el contrario, con la aplicación de un filtro pasa altos, los detalles se eliminan y sólo se resaltan los bordes, Figura 4.16 b).

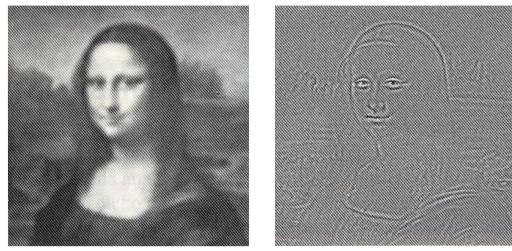


Figura 4.16: a) Filtro pasa bajos. B) Filtro pasa altos

Esta es la base del funcionamiento del pinole, utilizado en el experimento de la Sección I.4, para eliminar figuras de difracción espurias que se obtienen al expandir un haz utilizando una lente. El haz expandido además de la iluminación principal, de distribución de intensidad Gaussiana, presentará pequeñas figuras de difracción correspondientes a rayaduras, partículas de polvo, defectos en los depósitos anti-reflectantes y/o pelusas muy pequeñas que se encuentran en la lente. Estos pequeños objetos, introducen altas frecuencias en el patrón de difracción, como se muestra en la fotografía de la Figura 4.17. Una forma de eliminar estas componentes de frecuencias espuria es aplicar un filtro pasa-altos. Esto se logra introduciendo un “pinole” en el plano focal de la lente expansora, el que bloquea esas altas frecuencia permitiendo que sólo pasen las frecuencias que contienen la información del haz.

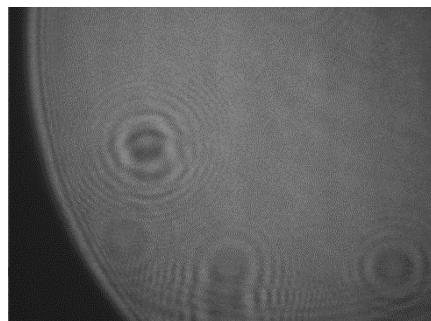


Figura 4.17: Imagen de un haz expandido sin filtrar.

En el texto [4.2] puede encontrarse el siguiente ejemplo. Se trata de una fotografía de un cráter lunar, tomada por bandas con un scanner lineal y posteriormente unidas las diferentes imágenes para dar la imagen total. Esta forma de operar trae aparejado que, en la fotografía final, como se muestra en Figura 4.18 a), las líneas de unión entre las diferentes zonas registradas son evidentes y degradan la calidad de la imagen. En la Figura 4.18 b), c) y d) se muestran el espectro, la máscara diseñada para filtrar la información relacionada con las líneas de las uniones y el resultado final.

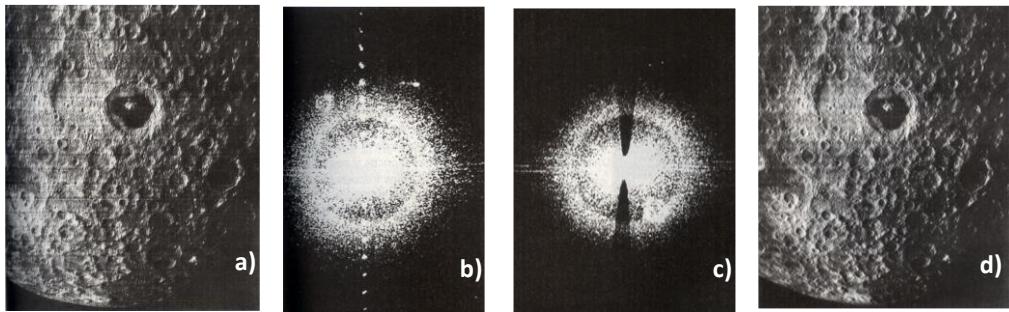


Figura 4.18: a) Imagen original, b) Espectro, c) máscara ad-hoc y d) imagen filtrada

Se debe recalcar que las máscaras para filtrar frecuencias específicas, deben ser tales que no quiten información relevante. En este caso el filtro se diseñó para quitar la información de las líneas, pero no puede evitarse eliminar algunas otras frecuencias, tanto altas como bajas. Esta es la razón por la que en el ambiente de los que trabajan en Procesamiento de Imágenes, reza la regla, “lo mejor que le podemos hacer a una imagen es dejarla como está, a menos que sea absolutamente necesario”. Claramente se refiere a fotografías en las que importa el tema de la estética y actualmente se hacen muchas operaciones que no afectan negativamente a las imágenes. Si se piensa en estas operaciones sobre el espectro con fines de obtener información, como por ejemplo en técnicas como la Holografía Digital, donde la reconstrucción digital de hologramas depende fuertemente de la operación de filtrado en el espectro.

#### 4.14 MICROSCOPIO DE CONTRASTE DE FASE DE ZERNIKE.

La mayoría de los objetos de interés en microscopía son muy transparentes, por lo tanto, absorben poco o nada de luz (por ejemplo, microorganismos como parásitos, bacterias, etc.). Cuando la luz pasa a través de ellos el efecto predominante es la generación de un corrimiento de fase. Este efecto no es directamente observable con los microscopios convencionales y con sensores que sólo responden a intensidad. A fin de poder observar este tipo de objetos, a lo largo de la historia, se han desarrollado numerosas técnicas tales como:

- Método de máscara central oscura, en el que se usa una máscara oscura que bloquea sólo el orden central del espectro. Ciertos microscopios convencionales vienen provistos de objetivos especiales, que justamente tienen estas máscaras.
- Método de Schlieren en el que todas las componentes de frecuencia del orden cero son bloqueadas solo de un lado del espectro.

Estas técnicas tienen el defecto de que las variaciones de intensidad observadas no están linealmente relacionadas con las variaciones de fase y por lo tanto no se pueden considerar como indicadoras de las variaciones de espesor del objeto.

En 1935 Zernike, propuso una nueva técnica de contraste de fase que se basa en principios de filtrado espacial y que tiene la ventaja de que la intensidad está, bajo ciertas condiciones, linealmente relacionada con los corrimientos de fase introducidos por el objeto. Consideremos un objeto transparente, con amplitud de transmitancia dada por:

$$t_A(x, y) = e^{i\phi(x, y)} \quad (4.49)$$

es iluminado con luz coherente en un sistema formador de imagen, como se muestra en la Figura 4.19.

Por simplicidad supondremos que el sistema tiene aumento 1 y despreciaremos la extensión finita de las pupilas de entrada y salida del sistema. También es necesario agregar, para asegurar la linealidad entre los corrimientos de fase y la intensidad, que la región variable del objeto introduce un corrimiento de fase  $\Delta\phi$ , menores que  $2\pi$  radianes en cuyo caso una aproximación “cruda” a la amplitud de transmitancia podría ser:

$$t_A(x, y) = e^{i\phi_0} e^{i\Delta\phi(x, y)} \cong e^{i\phi_0} [1 + i\Delta\phi(x, y)] \quad (4.50)$$

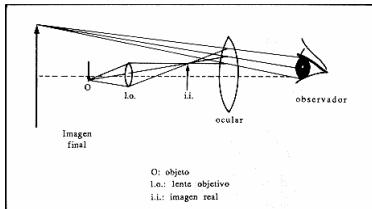


Figura 4.19: Esquema de un microscopio.

Donde hemos despreciado términos de órdenes  $(\Delta\phi)^2$  y superiores del desarrollo en serie de  $e^{i\Delta\phi(x,y)}$  y la cantidad  $\phi_0$  representa un corrimiento de fase promedio a través del objeto, con lo cual,  $\Delta\phi(x,y)$  por definición no tiene componente espectral de frecuencia cero. Se debe recalcar que el primer término de esta ecuación representa, un onda intensa que pasa a través de la muestra sufriendo un corrimiento de fase uniforme  $\Delta\phi(x,y)$ . El segundo término genera luz fuertemente deflectada lejos del eje óptico. La intensidad de la imagen producida por un microscopio convencional en esta aproximación, se puede escribir como:

$$I_i \approx |1 + i\Delta\phi|^2 \approx 1 \quad (4.51)$$

donde para mantener consistencia con la aproximación el segundo término se anula. Zernike descubrió que la luz difractada proveniente de las estructuras de fase no es observable en el plano imagen porque ella está en cuadratura de fase con el fondo intenso y si esta relación de cuadratura de fase se puede modificar, los dos términos interferirían directamente para producir variaciones de fase en la imagen de intensidad. Reconociendo que la intensidad de fondo se enfoca sobre el eje óptico en el plano focal, mientras que la luz difractada, proveniente de las altas frecuencias, se desparrama más allá del eje óptico, Zernike propuso que se debe insertar una placa que cambie la fase en el plano focal para modificar la relación de fase entre la luz enfocada y la difractada.

La placa para cambiar la fase adecuadamente consiste de un sustrato de vidrio en el que se deposita un pequeño punto de un material dieléctrico transparente. Este punto se centra en el eje óptico en el plano focal. El espesor y el índice de refracción del material es tal que retarda la fase de la luz enfocada ya sea en  $\pi/2$  rad o  $3\pi/2$  rad relativo al retardo de fase de la luz difractada. En el primer caso, la intensidad de la imagen se hace:

$$I_i = \left| e^{i(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi)} \right|^2 \approx |i(1 + \Delta\phi)|^2 \approx 1 + 2\Delta\phi \quad (4.52)$$

Mientras que en el segundo caso, para un retardo de  $3\pi/2$ :

$$I_i = \left| e^{i(\frac{3\pi}{2} + \Delta\phi)} \right|^2 \approx |-i(1 - \Delta\phi)|^2 \approx 1 - 2\Delta\phi \quad (4.53)$$

Con lo cual la intensidad de la luz se hace linealmente dependiente de los cambios de fase. En la ecuación 4.52 se dice que el contraste de fase es positivo y en 4.53 es negativo.

En conclusión, entonces, el método de contraste de fase permite cambiar una modulación espacial de fase en una modulación espacial de intensidad. A modo de ejemplo en la Figura 4.20 se muestra la imagen de un objeto microscópico transparente tomada en microscopio convencional y con contraste de fase. Es muy notorio como la técnica pone en evidencia detalles que en la fotografía común aparecen borroneados y sin contraste respecto del fondo.

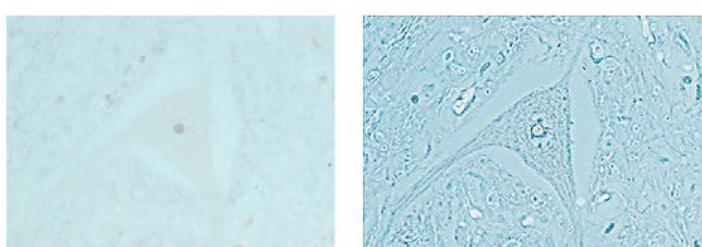


Figura 4.20: Imagen de un objeto transparente vista al microscopio. a) Sin contraste de fase y b) con contraste de fase.

#### 4.15 EXPERIMENTACIÓN ARMADO DE UN COMPUTADOR ÓPTICO

Objetivos:

- Construir un computador óptico.
- Filtrado Espacial: Aplicar filtros espaciales para manipular la información de los objetos proporcionados.
- Filtrado Espacial Numérico: Calcular la Transformada de Fourier y construir filtros espaciales por medio de computadora.

#### PARTE I: EL COMPUTADOR ÓPTICO

Construye un computador óptico. Interprete el patrón resultante de la transformada de Fourier de los objetos proporcionados; asocie las frecuencias a la información correspondiente de cada objeto. Con los fundamentos de la Teoría de Abbe construya y aplique diferentes filtros y observe e interprete los resultados.

##### Filtrado Espacial

- a) Objeto 1: Malla cuadriculada. Por medio del filtrado espacial elimine:
  - a1) las líneas verticales.
  - a2) las líneas horizontales.
- b) Objeto 2: Diapositiva de muñeca. Aplique diferentes filtros y observe lo que sucede.

#### PARTE II: FFT - PROCESAMIENTO DIGITAL

Un “photoshop” a Hello Kitty.

- a) Determine la transformada de Fourier de la siguiente fotografía utilizando el algoritmo de la FFT. Compárela con la obtenida en la primera parte de este laboratorio. Analice la información asociada a las frecuencias observadas

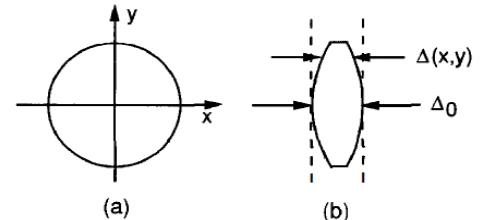


- b) Efectúe el filtrado espacial de:
    - b1) las líneas verticales. Analiza la diferencia entre las frecuencias asociadas a la información de la remera con respecto a los ojos.
    - b2) las líneas horizontales. Analiza la diferencia entre las frecuencias asociadas a la información de las manos y pies con respecto a la de la nariz.
    - b3) Elimine las líneas del vestido.
    - b4) Elimine las líneas de la flor
    - b5) ¿Qué sucede si se eliminan las altas frecuencias? ¿Si se elimina el orden cero?
    - b6) Aplique otros filtros de su interés e interprete los resultados.
- Elabore un informe de laboratorio.

#### 4.16 EJERCITACIÓN.

- 1- Supongamos que una lente delgada solamente retarda un frente de onda incidente una cantidad proporcional al espesor de la lente en cada punto. Sea  $\Delta_0$  el máximo espesor de una lente delgada, y  $\Delta(x, y)$  el espesor en las coordenadas  $(x, y)$ ; el retardo total de fase que sufre una onda que la atraviesa se escribe como:

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$$

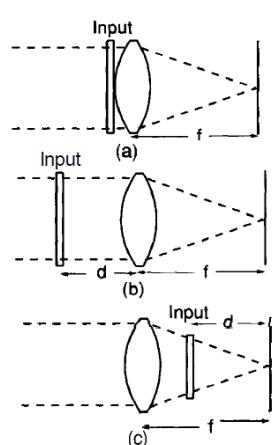
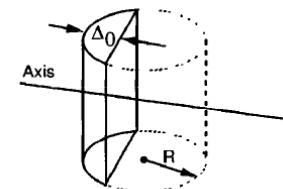


Función espesor: a) Vista Frontal; b) Vista lateral

Con  $n$  el índice de refracción de la lente.

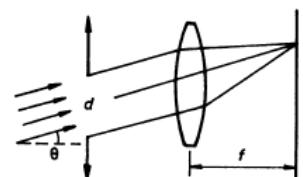
Con las consideraciones geométricas que correspondan, y teniendo en cuenta la aproximación paraxial encuentre la expresión la función espesor  $\Delta(x, y)$  para un punto genérico  $(x, y)$ . Encuentre la expresión que define la distancia focal.

- 2- Muestre que las longitudes focales para lentes Doble Convexa, Plano Convexa y Menisco Positiva son positivas, mientras que para lentes Doble Cónica, Plano Cónica, y Menisco Negativa la distancia focal es negativa.
- 3- Considere una lente delgada como una porción de un cilindro como el mostrado en la figura:
- a) Encuentre la aproximación paraxial a la transformación de fase introducida por esta lente.
- b) ¿Cuál es el efecto de esta lente sobre una onda plana que viaja de izquierda a derecha en la dirección del eje óptico?



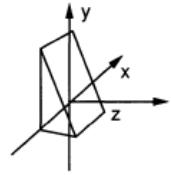
- 4- Una onda plana monocromática ilumina una lente convergente de distancia focal  $f$ . Encuentre el campo complejo en el plano focal posterior de la lente, para los siguientes casos:
- c) Si se coloca un objeto de transmitancia  $t(x, y)$  justo delante de la misma.
- d) Si el objeto se coloca una distancia  $d$  delante de la lente. ¿Qué ocurre cuando  $d=f$ ?
- e) Si el objeto se coloca detrás de la lente a una distancia  $d$  por delante del plano focal posterior.

- 5- Una onda plana coherente de longitud de onda  $\lambda$  incide en una pantalla con una rendija estrecha y larga de ancho  $d$ . La dirección de propagación del haz hace un ángulo  $\theta$  con la normal a la pantalla. Encuentre la distribución de intensidad detrás de la rendija en el plano focal de una lente delgada de distancia focal  $f$ .



- 6- Suponga que una onda plana incide normalmente sobre un prisma que deflecta la dirección de propagación de la onda un ángulo  $\theta$  con respecto al eje óptico (eje z) en el plano (y,z). Dicho prisma puede representarse matemáticamente por la función:

$$t(x, y) = \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen}(\theta)y\right]$$

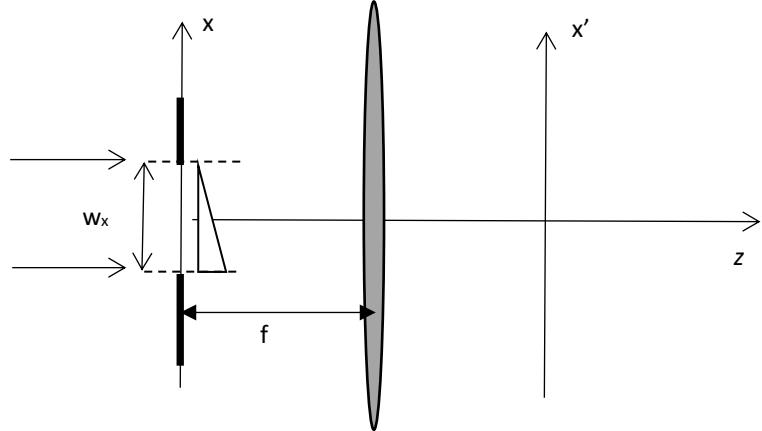


Considere una estructura difractante delgada cuya amplitud de transmitancia viene dada por:

$$t_D(x, y) = \exp\left\{-i\pi\left[a^2 x^2 + (by + c)^2\right]\right\}$$

Con  $a$ ,  $b$  y  $c$  constantes reales positivas. Se dice que esta estructura puede considerarse como consistente en una secuencia de: una lente esférica, una lente cilíndrica y un prisma, todos en contacto, uno al lado del otro. Describa la combinación de elementos delgados que llevan a esta transmitancia, especificando distancias focales de las lentes y el ángulo de deflexión del prisma en términos de  $a$ ,  $b$  y  $c$  y la longitud de onda  $\lambda$ .

- 7- Una onda plana coherente de longitud de onda  $\lambda$  incide normalmente en una pantalla que contiene una rendija "infinitamente" larga de ancho  $w_x$ . La rendija se encuentra cubierta por un prisma delgado de vidrio de índice de refracción  $n$  cuyo espesor  $\Delta(x)$  cambia proporcionalmente con la distancia a la parte superior de la rendija, siendo  $\Delta_0$  el máximo espesor del prisma.



- a) Encuentre la función espesor  $\Delta(x)$ , en términos de  $\Delta_0$  y  $w_x$
- b) Encuentre el retardo total de fase  $\phi(x)$  que sufre la onda plana en una coordenada arbitraria  $x$  cuando pasa por el prisma.
- c) Escriba la función de transmitancia  $t(x)$  asociada al prisma.
- d) Se coloca una lente delgada de distancia focal  $f$  a una distancia  $z = f$ .

Encuentre la distribución de intensidad como función de  $x'$  en un plano ubicado a una distancia  $z = 2f$  detrás de la apertura.

- e) Realice un bosquejo de la distribución de intensidad resultante a lo largo del eje  $x'$ .
- 8- Una onda plana monocromática ilumina una lente convergente de 5 cm de diámetro y 2 m de distancia focal. Un metro por detrás de la lente y centrada en el eje óptico se ubica un objeto difractante, cuya amplitud de transmitancia es:  $t(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi f_0 x_0) \operatorname{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)$ . Suponiendo  $L = 1 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 633 \text{ nm}$  y

$f_0 = 100 \frac{\text{ciclos}}{\text{cm}}$ , encuentre la distribución de intensidad en el plano focal. Realice un bosquejo de la intensidad para el eje  $x_f$  del plano focal.

- 9- Una pantalla difractante tiene una función de transmitancia dada por:

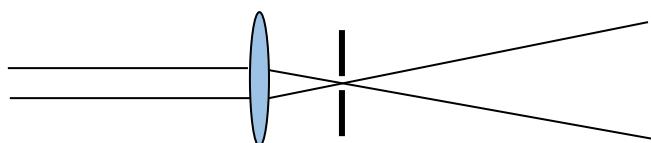
$t(r) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\alpha r^2) \right] \text{circ}\left(\frac{r}{l}\right)$ . Esta es una placa zonal de transmitancia sinusoidal, limitada por una pupila circular de radio  $l$ .

- f) Reescriba la amplitud de transmitancia de tal modo que se evidencie que esta placa zonal actúa simultáneamente como dos lentes diferentes: una positiva y una negativa, además de contar con un término continuo que sólo atenúa el frente de onda incidente.
- g) Encuentre una expresión para la distancia focal de la placa zonal.

- 10- Una malla cuadrada de alambre con 50 alambres por cm está colocada sobre el plano objeto del ordenador óptico. Si cada lente tiene una distancia focal de 1.00 m

- h) ¿Cuál será la longitud de onda de iluminación si los puntos de difracción en el plano de la transformada tienen que estar separados horizontal y verticalmente por una distancia de 2.0 mm?
- i) ¿Cuál será el espaciado en la malla en el plano imagen?
- j) Diseñe el filtro que permita que en plano imagen se observen sólo líneas verticales

- 11- La disposición de la figura se usa para convertir un haz láser colimado en una onda esférica. El filtro *pinhole*, consistente en un pequeño agujero en una pantalla opaca, elimina los efectos de difracción debidos al polvo y otras partículas en la lente. ¿Cómo lo consigue?



- 12- Suponga que tiene una red cosenoidal (una transparencia cuyo perfil de transmisión de amplitud es cosenoidal) con un período espacial de 0.01 mm. La red está iluminada por ondas planas cuasimonocromáticas de  $\lambda = 500\text{nm}$  y se encuentra en plano objeto  $\Sigma_o$  de un ordenador óptico, en el cual las longitudes focales de la lente transformadora  $L_t$  y formadora de imagen  $L_i$  son respectivamente de 2.0 m y 1.0 m

- k) Esquematice la configuración óptica del ordenador
- l) Explique la figura resultante en el plano de la transformada  $\Sigma_t$  y diseñe un filtro que deje pasar solamente los términos de primer orden.
- m) ¿Cómo aparecerá la imagen en el *plano imagen*  $\Sigma_i$  con el filtro puesto?
- n) ¿Cómo podría dejarse pasar sólo el término *cc* (orden cero) y cómo aparecería la imagen?

## REFERENCIAS

- [4.1] Joseph Goodman. Introduction to Fourier Optics. 2da. Edición. McGrow Hill Companies. 1996
- [4.2] Hecht Eugene. Optics. Addison Wesley Publishing Company, 4<sup>a</sup> Ed.

## CAPITULO V: INTRODUCCIÓN A LA METROLOGÍA ÓPTICA

En metrología óptica se destaca el hecho de que la estimación desplazamientos, deformaciones, vibraciones, tensiones, fracturas, campos de temperatura y/o concentración, variaciones de índice de refracción, etc. se logra utilizando luz, sin necesidad de la interacción con la muestra, es decir ensayos no destructivos, END. Por lo general, se alcanzan precisiones submicrométricas y en relación con el alcance de la medida existen dos grandes grupos de técnicas: las técnicas locales o punto a punto, que implican un desplazamiento del sensor, y las técnicas del campo completo que proporcionan un mapa más o menos extenso sobre el que se efectúa la medida. Dentro de las técnicas locales pueden mencionarse como ejemplo las que utilizan sensores de fibra óptica. Entre las técnicas de campo completo pueden citarse las técnicas de moiré, interferometría holográfica y la interferometría speckle. En este capítulo nos centraremos en estas dos últimas.

### 5.1 HOLOGRAFÍA CONVENCIONAL.

Cuando se ilumina un objeto con luz coherente, la onda reflejada o transmitida lleva información de las propiedades ópticas y físicas de la muestra. En los alrededores del objeto, la intensidad de la luz queda relacionada con su reflectancia o atenuación, mientras que la fase con su topografía o espesor, esto es, con su información tridimensional. Los sensores de luz, tales como películas fotográficas o cámaras digitales pueden usarse para medir la intensidad de la luz que emana el objeto, pero son incapaces de captar la fase. Esta información importante, por tanto, se pierde. Desde un punto de vista matemático, como vimos en la sección anterior, este tipo de registro de la información óptica implica la medición del módulo cuadrado de un número complejo, una operación que claramente descarta la fase.

En 1948, Dennis Gabor [5.1] propuso un nuevo proceso de obtención de imágenes sin lentes de dos pasos al que llamó reconstrucción de frente de onda y que ahora conocemos como holografía. Gabor reconoció que cuando una onda de referencia coherente adecuada interfiere con la luz difractada o dispersada por un objeto, entonces la información sobre tanto la amplitud como la fase de las ondas difractadas o dispersas se pueden registrar, a pesar de que los medios de registro responden solo a la intensidad de la luz. Demostró que, a partir de tal patrón de interferencia registrado (al que llamó holograma, que significa "registro del todo"), en última instancia se puede obtener una imagen del objeto original. La técnica de registro de imágenes de Gabor, sin embargo, recibió poco interés cuando lo formuló, recién en la década de 1960, con la invención del láser se introdujeron importantes mejoras tanto en el concepto como en la tecnología, mejoras que ampliaron enormemente su aplicabilidad y practicidad. Gabor recibió en 1971, el premio Nobel de física por su invención. En resumen, puede decirse que un holograma es un proceso de formación de imágenes sin utilizar lentes.

En esta sección, examinamos los principios básicos detrás de la holografía [5.2], exploramos las muchas variaciones modernas sobre el tema original de Gabor y examinamos algunas de las aplicaciones importantes que se han desarrollado en el GOL para esta novedosa técnica de registro de imágenes.

#### 5.1.1 PROCESO DE REGISTRO

Como vimos necesitamos registrar tanto amplitud y fase de luz coherente, pero todos los medios de registro registran intensidad. Por lo tanto, es necesario convertir, de alguna forma las variaciones de fase en variaciones de intensidad y la técnica estándar para hacerlo es la interferometría. Se utiliza para ello un segundo haz de luz coherente con el frente de onda del objeto original (el dispersado por el objeto, desconocido) de amplitud y fase conocidos y se suma al primero.

Como hemos visto en la Sección 2, el dispositivo óptico para hacer interferir ondas es un interferómetro, para el caso del registro de un holograma un esquema de un interferómetro holográfico se mostró en la Figura 1.11 b). Un haz de luz coherente, proveniente de un láser, se divide en dos ondas por medio de un divisor de haz (BS). Una de ellas, llamada onda objeto, ilumina el objeto, siendo dispersada por la superficie del mismo (en todas las direcciones) y llegando parte de ella al medio de registro (PH, placa holográfica). La otra, denominada onda de referencia, ilumina directamente la placa holográfica. Ambas interfieren allí, grabando un complejo patrón de franjas microscópicas

portadoras de la información completa del objeto. Para exemplificar el desarrollo que nos permitirá cuantificar matemáticamente el proceso de registro de un holograma, 5. 1, muestra un esquema de este procedimiento.

Desde un punto de vista matemático, el proceso de registro de un holograma se describe usando el formalismo de la Sección 1. Supongamos que sobre la superficie plana de una placa holográfica incide una onda objeto dada por:

$$E_O(x, y) = a_O(x, y)e^{i\varphi_O(x, y)} \quad (5.1)$$

Y una onda de referencia dada por:

$$E_R(x, y) = a_R(x, y)e^{i\varphi_R(x, y)} \quad (5.2)$$

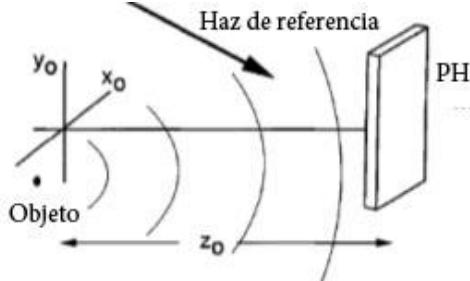


Figura 5.1: Registro de un holograma.

La intensidad resultante sobre la placa holográfica será:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |E_O(x, y) + E_R(x, y)|^2 \\ &= (E_O(x, y) + E_R(x, y))(E_O(x, y) + E_R(x, y))^* \\ &= E_R(x, y)E_R(x, y)^* + E_O(x, y)E_O(x, y)^* + E_O(x, y)E_R(x, y)^* + E_R(x, y)E_O(x, y)^* \end{aligned} \quad (5.3)$$

Esta intensidad es lo que llamaremos holograma. Como vimos en la Sección 1 la ec. (5.3) puede escribirse de la siguiente manera:

$$I(x, y) = |E_R(x, y)|^2 + |E_O(x, y)|^2 + 2E_R(x, y)E_O(x, y)\cos(\varphi_R - \varphi_O) \quad (5.4)$$

Los dos primeros términos dependen sólo de la intensidad de las ondas y el tercero depende de sus fases relativas. Entonces, la expresión matemática de un holograma, pone en evidencia que ha quedado registrada la información de la amplitud y la fase de  $E_O$ . También se ha registrado el haz de referencia  $E_R(x, y)$ , pero luego veremos la forma de separar esta información.

### 5.1.2 PROCESO DE REGISTRO

Existen diversos medios capaces de registrar la información óptica entre los cuales podemos mencionar: emulsión fotográfica de AgBr (bromuro de plata), cristales fotocromáticos, detectores electrónicos (p.ej. CCD: *charge couple device*), etc. Por el momento sólo nos ocuparemos del primero de ellos y más adelante veremos aplicaciones con detectores CCD.

Consideremos una emulsión fotográfica depositada en una lámina de acetato (*film*) o una placa de, *placa holográfica*, PH en la Figura 5.1. Como vimos, el medio de registro de un holograma debe ser uno que permite un mapeo lineal de intensidad durante el proceso de registro en amplitud transmitida (o reflejada) en el proceso de reconstrucción. Suponemos que el medio tiene una respuesta lineal entre la intensidad de exposición ( $E$ ) y su transmitancia en amplitud ( $t$ ) luego de revelada. Para ello deberá trabajarse en la región lineal de la curva  $t - E$ , correspondiente a la emulsión.

La exposición,  $E$ , a la que se somete una película, se define como la energía por unidad de área en cada punto de la superficie fotosensible. La exposición depende de la intensidad incidente,  $I$ , y de la duración,  $t$ , de acuerdo a:  $E = It$ . La forma más utilizada para describir las propiedades fotosensibles de una película fotográfica es a través de un

gráfico de densidad,  $D$ , de los depósitos de plata en función del logaritmo de  $E$ ; se conoce como curva característica, curva  $D - \log E$ , o curva  $H-D$  (Hurter y Drifford). A modo de ejemplo en la Figura 5.2 se muestra una curva H-D típica. Allí se resalta claramente la región lineal la que recibe el nombre de latitud de exposición.

Otra propiedad que debe cumplir el film utilizado para registrar hologramas, es que su función de transferencia de modulación,  $MTF$ , debe extenderse a frecuencias suficientemente altas para registrar la estructura espacial del interferograma. (volveremos sobre este punto más adelante). Finalmente debemos recalcar que también supondremos que la intensidad del haz de referencia  $|E_R(x, y)|^2$  debe ser uniforme sobre el material de registro.

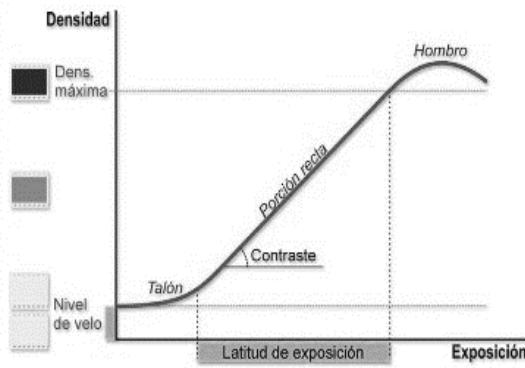


Figura 5.2: Curva  $H - D$  de un film fotográfico.

Una vez registrado el holograma se procede a su revelado y entonces, la amplitud de transmitancia de la placa revelada, será:

$$h(x, y) = h_0 + \beta \tau I(x, y) \quad (5.4)$$

$h_0$  es una transmitancia de fondo uniforme debido al haz de referencia,  $\beta$  la pendiente de la curva  $t - E$  y  $\tau$  el tiempo de exposición.  $h(x, y)$  es lo que llamamos holograma. Reemplazando la ec. 5.3 en 5.4 se obtiene:

$$h(x, y) = h_0 + \beta \tau (E_R^2 + E_O^2 + E_O E_R^* + E_R E_O^*) \quad (5.5)$$

### 5.1.3 PROCESO DE RECONSTRUCCION DEL FRENTE DE ONDA ORIGINAL

Para esta etapa, supondremos que iluminamos la transparencia revelada, el holograma, con una onda coherente de reconstrucción  $B(x, y)$  como se muestra en la Figura 5.3 a).

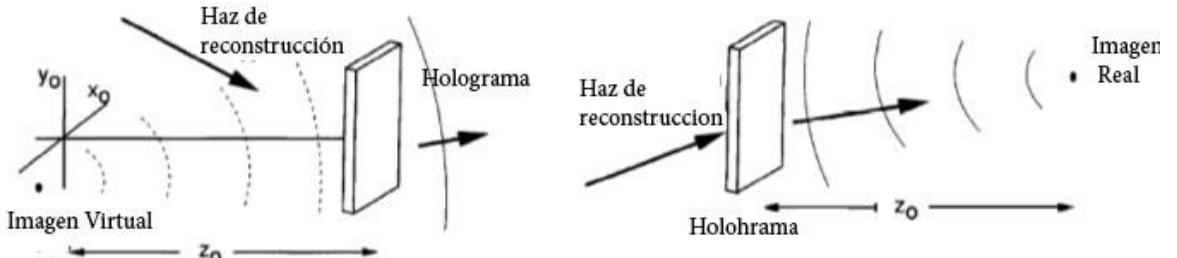


Figura 5.3: Reconstrucción de la a) Imagen Virtual y b) Imagen Real.

La amplitud transmitida por el holograma será:

$$\begin{aligned} B(x, y)h(x, y) &= B(x, y)h_0 + \beta \tau B(x, y)(E_R^2 + E_O^2) + \beta \tau B(x, y)E_O E_R^* + \beta \tau B(x, y)E_R E_O^* \\ &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Si  $B(x, y) = E_R(x, y)$ , o sea el haz de referencia original el tercer término es:

$$U_3(x, y) = \beta\tau|E_R(x, y)|^2 E_O(x, y)$$

y si como se estableció,  $E_R(x, y)$  es uniforme, entonces este término es un duplicado de  $E_O(x, y)$  (amplitud de la onda objeto), a menos de un factor constante.

Si  $B(x, y) = E_R(x, y)^*$  (conjugado del haz de referencia), como se muestra en la Figura 5. 3 b), entonces:

$$U_4(x, y) = \beta\tau|E_R(x, y)|^2 E_O(x, y)^*$$

que es proporcional al conjugado del haz objeto. En cualquiera de los dos casos, los términos restantes deberán separarse espacialmente de la luz transmitida para que no se superpongan a la salida del holograma y no molesten en la observación de la imagen.

e la ecuación para la transmitancia, ec. 5.6, se ve que el holograma es altamente no lineal en lo que respecta a la correspondencia entre el campo incidente durante la exposición y el campo transmitido por la transparencia después del revelado. Sin embargo, la correspondencia entre el campo objeto  $E_O(x, y)$  y el campo transmitido  $U_3(x, y)$  sí es lineal; lo mismo acontece entre  $E_O(x, y)^*$  y  $U_4(x, y)$ . Si consideramos estos campos como entrada y salida del sistema (holograma), el proceso es lineal. Los otros términos generados en la salida constituyen la no-linealidad del sistema, pero no hay, en principio, distorsión de los términos de interés siempre que se trabaje en la región lineal de la curva  $t - E$ , correspondiente a la emulsión utilizada.

De todas maneras, en las aplicaciones prácticas que veremos, no se requiere un cuidado especial en el proceso de exposición y revelado para asegurar una respuesta lineal, lo que haría muy delicado el trabajo. El efecto de no proceder así se manifestará en la aparición de otros órdenes de difracción que, al estar separados espacialmente del orden de interés, no afectan los resultados.

#### 5.1.4 FORMACIÓN DE IMÁGENES EN LA RECONSTRUCCIÓN DEL FRENTE DE ONDA

Para entender mejor el proceso de formación de imágenes, tomaremos el caso más simple de un objeto puntual, haciendo referencia al modelo geométrico desarrollado anteriormente. La imagen de un objeto extenso puede considerarse como una superposición lineal de fuentes puntuales.

Dado que  $U_3(x, y)$  es un duplicado del frente de onda proveniente del objeto, su propagación en el espacio, más allá de la superficie de la placa, deberá ser idéntica al frente de onda original. La luz deberá aparecer al observador como divergiendo del objeto, aunque éste no esté allí. Es decir, el campo  $U_3(x, y)$  generará una imagen virtual. El holograma aparecerá como una ventana a través de la cual se observa el objeto; la perspectiva tridimensional del mismo estará limitada por las dimensiones de la placa holográfica. El campo  $U_4(x, y)$  generará una imagen real del objeto.

#### SOLUCIÓN PUNTUAL

En la Figura 5.1 se ilustra construcción de un objeto puntual y el Figura 5.3 la reconstrucción de la imagen holográfica cuando se ilumina el holograma: a) con el haz de referencia original (imagen virtual) y b) cuando se lo ilumina con el conjugado del haz de referencia original (imagen real).

Incidente sobre la placa tenemos la superposición del haz de referencia  $E_R(x, y)$  y la onda esférica proveniente del objeto puntual de la figura 5.1:

$$E_O(x, y) = a_O(x, y)e^{\left[ik\sqrt{z_0^2 + (x-x_O')^2 + (y-y_O')^2}\right]}$$

donde  $x, y$  son las coordenadas en el plano de la placa,  $x_O', y_O'$ , las coordenadas del objeto en un plano paralelo a la placa, ubicado a una distancia  $z_0$  de ésta. En la reconstrucción, iluminando el holograma con el haz de referencia original,  $E_R(x, y)$ , se obtiene, a la salida del holograma, el término:

$$U_3(x, y) = \beta\tau|E_R(x, y)|^2 E_O(x, y) = \beta\tau|E_R(x, y)|^2 a_O(x, y) e^{ik\sqrt{z_0^2 + (x - x_{O'})^2 + (y - y_{O'})^2}}$$

que es la onda divergente proveniente del punto donde se ubicaba el objeto puntual, por lo que ésta forma una imagen virtual del mismo. Si se ilumina el holograma con el conjugado de  $E_O(x, y)$ ,  $E_O(x, y)^*$ , entonces a la salida del holograma tendremos el término:

$$U_4(x, y) = \beta\tau|E_R(x, y)|^2 E_O(x, y)^* = \beta\tau|E_R(x, y)|^2 a_O(x, y) e^{-ik\sqrt{z_0^2 + (x - x_{O'})^2 + (y - y_{O'})^2}}$$

que es una onda esférica convergente hacia un punto ubicado a una distancia  $z_0$  del holograma; es decir, se obtiene una imagen real del objeto puntual.

Un objeto puede considerarse como una multitud de fuentes puntuales de distintas amplitudes y fases; por la propiedad de linealidad cada fuente puntual generará su propia imagen real, formando la imagen real del objeto

### 5.1.5 ASPECTOS PRÁCTICOS

Existe un gran número de formas de construir un holograma y la que se adopte dependerá de la aplicación particular y del equipo con que se cuente. Se describen aquí algunas disposiciones prácticas más sencillas. Se presentan esquemas con la disposición de los elementos en la mesa de trabajo y recomendaciones de tipo general

#### 5.1.5.1 HOLOGRAMAS DE TRANSMISIÓN

##### HOLOGRAMA DE HAZ SIMPLE

Como se vio anteriormente, un holograma se forma registrando en un material sensible, la interferencia de la luz dispersada por un objeto iluminado por luz láser, denominado haz objeto y un haz proveniente directamente del láser llamado haz de referencia. Existen muchas formas de producir esta interferencia, aunque la más simple involucra el uso del mismo haz (como se muestra en la Figura 5.4). El haz que emite el láser es expandido mediante una lente convergente, de distancia focal muy corta, para lo cual generalmente se usa un objetivo de microscopio (distancia focal entre  $f=4$  y  $f=20$  mm, según la aplicación). Parte del haz expandido ilumina el objeto y la otra parte actúa como haz de referencia incidiendo sobre el material de registro. Este tipo de holograma fue construido por primera vez por Emmett Leith y Juri Upatnieks en la Universidad de Michigan entre los años 1962 y 1964. Generalmente hablando, la calidad de una imagen de simple haz no es muy buena comparada con un holograma de haz dividido que veremos luego. Sin embargo, se recomienda como una forma de iniciación en el uso de la óptica para formar hologramas.

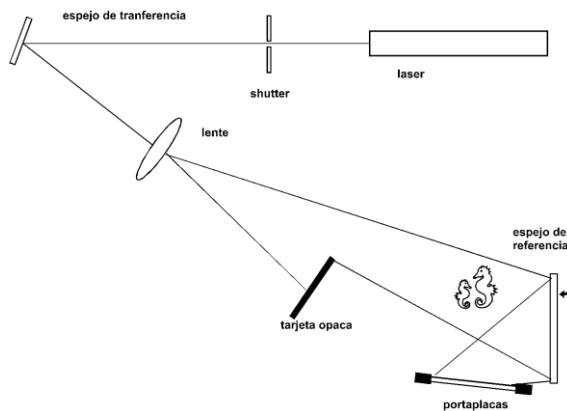


Figura 5.4: Disposición de los elementos en la mesa para construir un holograma de transmisión de simple haz

Lo esencial para la construcción de hologramas es la estabilidad de la mesa de trabajo y del entorno de trabajo. Hablamos de condiciones mecánicas, acústicas y térmicas, es decir, toda acción externa que pueda perturbar los elementos del montaje durante la construcción del holograma, teniendo en cuenta que durante el proceso estamos

registrando un diagrama de interferencia luminosa. La manipulación de la placa holográfica debe ser hecha preferentemente a oscuras, aunque si fuera necesario se puede utilizar luz de seguridad verde.

Si bien es muy simple de hacer, existen limitaciones al holograma de simple haz. Por un lado, no hay forma de controlar la relación de intensidades entre los haces de referencia y objeto, un factor importante para obtener un holograma eficiente en brillo y por otro lado tampoco se puede controlar la iluminación de objetos más complicados.

#### HOLOGRAMA DE HAS DIVIDIDO

En la Figura 5.5 se muestra una disposición típica para construir un holograma de transmisión de haz dividido, que permite manipular independientemente los haces objeto y de referencia y podemos decir que permite gran flexibilidad, lo que es necesario para hacer hologramas de una gran diversidad de objetos.

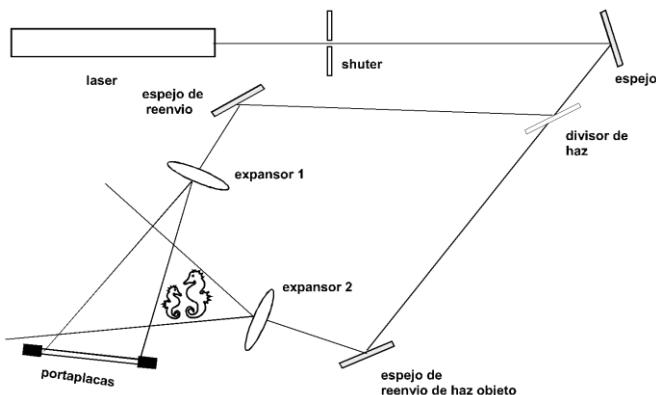


Figura 5.5: Disposición de los elementos en la mesa, para holograma de transmisión de haz dividido

Se recomienda el montaje de los elementos de la forma más simétrica posible. Esto es importante para asegurar que los recorridos de los haces desde el divisor de haz a la placa sean iguales, para evitar sombra o luz directa y para permitir mayor espacio para trabajar y ajustar los elementos. Una vez ubicados y fijados los elementos sobre la mesa (p.ej. con soldadura plástica) con las precauciones mencionadas, debe verificarse que no se observen desde el portaplatas luces espurias producidas por reflexión en algún soporte o sobre la mesa. En caso de que se observen luces espurias, deberán eliminarse con tarjetas bien sujetas a soportes. Durante la exposición sólo la luz del haz de referencia y la luz reflejada por el objeto deben llegar a la placa holográfica. Otro paso importante previo a la exposición es verificar la relación de intensidades entre los haces. Esto puede hacerse con un medidor de intensidad o bien, con un entrenamiento adecuado, a ojo. Es necesario que la relación de intensidades (referencia/objeto) sea aproximadamente de 4:1, aunque esto puede variar según el caso concreto. El tiempo de exposición depende del material fotosensible utilizado y de la intensidad de la luz que llega a la placa. Para determinarlo puede hacerse una prueba de exposición mediante procedimientos análogos a los empleados en fotografía. Es importante, antes de realizar la exposición, dejar estabilizar todo el sistema durante un tiempo suficiente.

Una variante al esquema de la Figura 5.5, para la disposición de los elementos en la mesa de trabajo, se muestra en la Figura 5.6. Esta disposición permite iluminar mejor el objeto ya que utiliza dos haces objetos.

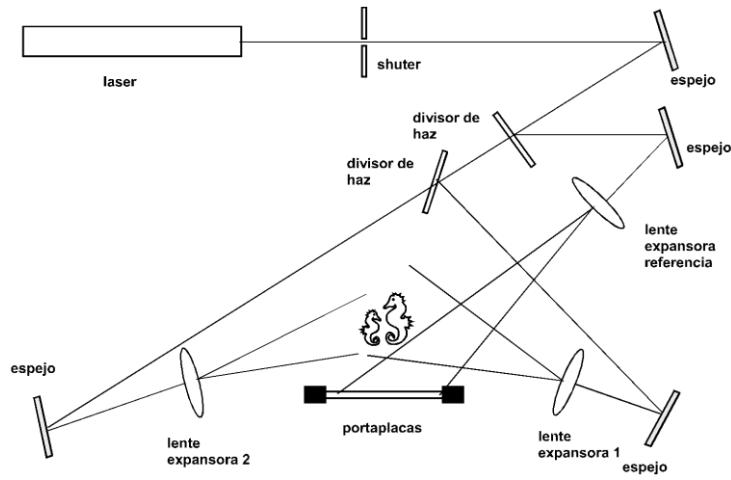


Figura 5.6: Alternativa del dispositivo de haz dividido

Una posible disposición de los elementos para construir un holograma interferométrico, cuando se estudia un medio transparente, se muestra en el esquema de la Figura 5.7. Esta disposición será utilizada más adelante.

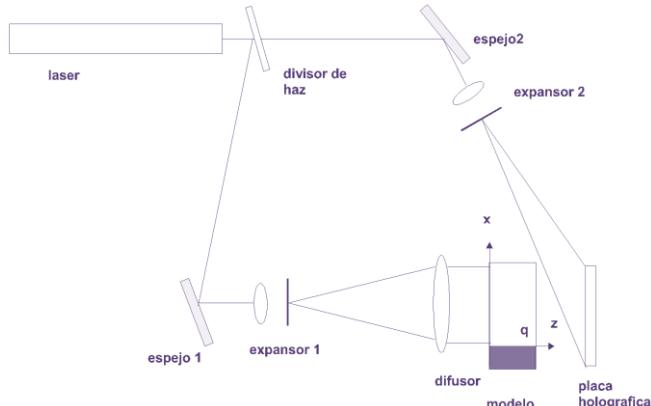


Figura 5.7: Montaje de los elementos para construir un holograma interferométrico.

## 5.2 INTERFEROMETRÍA HOLOGRÁFICA

Cuando se reconstruye la imagen holográfica de un objeto, iluminando el holograma con un haz reconstructor idéntico al haz de referencia utilizado en la construcción, esta imagen está ubicada en el mismo lugar, respecto de la placa, que ocupaba el objeto y posee las mismas dimensiones que éste. En otras palabras, la holografía nos permite almacenar frentes de onda y reconstruirlos en un tiempo posterior. Gracias a esta propiedad, se puede lograr la interferencia de frentes de onda que no existen simultáneamente. De la misma manera que en interferometría convencional, la observación de las franjas que se forman nos permite comparar los campos y consecuentemente, también los objetos en los cuales ellos se originan.

La técnica de *Interferometría Holográfica* es una técnica no perturbativa muy utilizada en fenómenos de transferencia térmica a medios transparentes y se basa, como vimos, en la distribución no homogénea de índice de refracción [5.3, 5.4, 5.5]. La evaluación cuantitativa de las deformaciones por este método requiere de equipamiento y métodos adecuados, como así también de un cuidadoso planeamiento de la experiencia a fin de poder extraer la información requerida. Básicamente existen dos técnicas para realizar interferometría holográfica:

### INTERFEROMETRÍA HOLOGRÁFICA A TIEMPO REAL

En algunas aplicaciones es deseable observar la respuesta de un objeto de prueba sometido a diversas acciones mecánicas o térmicas, a tiempo real. Esto puede ser logrado por la *interferometría holográfica a tiempo real*, en la

cual la luz dispersada por un objeto interfiere con la onda de luz proveniente de su imagen virtual reconstruida holográficamente. Para ello puede utilizarse un sistema holográfico típico en el que se realiza una simple exposición holográfica del objeto en su configuración estática inicial. La placa es removida del aparato, procesada, secada y devuelta a su posición original en el sistema holográfico. El holograma será iluminado simultáneamente por la onda de referencia y por la onda dispersada por el objeto. Un observador que mira a través del holograma recibirá luz proveniente de la imagen holográfica virtual del objeto y también luz que es dispersada por el objeto mismo y trasmisita a través del holograma. Estas dos ondas son coherentes y, en condiciones ideales, se superponen exactamente en el espacio. En las condiciones descritas, si el objeto es ahora ligeramente deformado, el frente de onda que de él proviene no coincidirá exactamente con el frente de onda proveniente de la imagen holográfica. Al ser estas ondas coherentes, producirán un patrón de interferencia que reflejará los cambios experimentados por el objeto en el instante en que se producen.

### INTERFEROMETRÍA HOLOGRÁFICA DE DOBLE EXPOSICIÓN

Ambos campos, el del frente de onda proveniente del objeto en el estado inicial y el proveniente luego de introducidas ciertas modificaciones, pueden ser registrados sucesivamente sobre el mismo holograma y reconstruidos simultáneamente; esto es llamado *doble exposición* o *congelamiento de franjas*. Se trata de efectuar un registro holográfico de un estado de referencia del objeto (primera exposición). En algún instante posterior elegido convenientemente, después que el objeto ha experimentado variaciones, se efectúa un segundo registro (segunda exposición). Con este método, pequeñas diferencias entre los dispositivos de reconstrucción y registro son menos críticos que con la técnica precedente, ya que ambos campos de onda sufren los mismos cambios. Por otra parte, una vez que los dos campos son registrados, ellos no pueden ser influenciados a posteriori.

Ambos métodos son aplicables tanto a objetos opacos como transparentes. En el caso de un objeto opaco, la luz es reflejada o dispersada por la superficie de éste; por lo tanto, los cambios que se observan son aquellos que implican una deformación de la superficie respecto de su configuración de referencia. En el caso de un objeto transparente, es la luz transmitida por el objeto la que se analiza interferencialmente. Las variaciones locales de índice de refracción inducidas por las acciones externas, se manifiestan en variaciones de la velocidad de la onda objeto que atraviesa el medio en dos estados diferentes (variaciones del camino óptico). Esto provoca una diferencia de fase que da lugar a la formación de un patrón de franjas de interferencia cuyo análisis permite determinar las variaciones ocurridas en la distribución de índice de refracción del objeto. A partir de la distribución de índice de refracción, pueden inferirse otras propiedades físicas del medio relacionadas con esta magnitud, tales como densidad, temperatura, concentración, etc.

### 5.3 MEDIDA DE DESPLAZAMIENTOS – EL VECTOR SENSIBILIDAD

Tanto para la interferometría holográfica de doble exposición como a tiempo real, la amplitud compleja de la onda del objeto en el estado inicial es:

$$E_1(x, y) = a(x, y)e^{i\varphi(x, y)} \quad (5.7)$$

$a(x, y)$ , es la amplitud real y  $\varphi(x, y)$  la fase de la onda del objeto. Los cambios en el camino óptico debidos a deformaciones de la superficie del objeto pueden describirse mediante una variación de la fase de  $\varphi(x, y)$  a  $\varphi(x, y) + \Delta\varphi(x, y)$ .  $\Delta\varphi(x, y)$  representa la diferencia entre la fase de referencia y la real. Se llama fase de interferencia. Por lo tanto, la amplitud compleja de la onda del objeto después de la deformación, vendrá dada por:

$$E_2(x, y) = a(x, y)e^{i[\varphi(x, y) + \Delta\varphi(x, y)]} \quad (5.8)$$

La intensidad del patrón de interferencia holográfica se describe mediante el cuadrado de la suma de las amplitudes complejas, que se calcula de la siguiente manera:

$$I(x, y) = |E_1 + E_2|^2 = (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* = 2a^2[1 + \cos\Delta\varphi(x, y)] \quad (5.9)$$

Es decir que la expresión general para la intensidad a lo largo de un patrón de interferencia viene dada por:

$$I(x, y) = A(x, y) + B(x, y)\cos\Delta\varphi(x, y) \quad (5.10)$$

Los parámetros  $A(x, y)$  y  $B(x, y)$  dependen de las coordenadas en el interferograma. En la práctica son desconocidos debido a una serie de factores, entre ellos podemos mencionar que:

- El objeto se ilumina con un haz de perfil gaussiano expandido. Esto trae aparejado que, el brillo del interferograma varía de acuerdo a ello.
- El interferograma tiene superpuesto de speckle de altas frecuencias.
- Patrones de difracción de basuras o rayas de los sistemas ópticos.
- La reflectividad no uniforme de la superficie del objeto, etc.
- El registro y transmisión electrónica de los interferogramas holográficos genera ruido adicional.

La ec. 5.10 describe la relación entre la intensidad del patrón de interferencia y la fase de interferencia, que contiene la información sobre la magnitud física que se va a medir (desplazamiento del objeto, cambio del índice de refracción o forma del objeto). En general, no es posible calcular  $\Delta\varphi(x, y)$  directamente a partir de la intensidad medida, porque los parámetros  $A(x, y)$  y  $B(x, y)$  son desconocidos y además la función coseno es par con lo cual el signo de la fase no se puede determinar sin ambigüedad. Por lo tanto, se han desarrollado varias técnicas para determinar la fase de interferencia registrando información adicional. Las técnicas más comunes son los diversos métodos de cambio de fase, como veremos más adelante.

Para el caso de objetos opacos, a continuación, a modo de ejemplo, vamos a investigar la relación que existe entre la fase de interferencia medida y los desplazamientos que sufrió la superficie del objeto entre los dos estados. Para ello consideraremos el esquema de la Figura 5.8 donde se muestra un objeto en un estado inicial y el mismo objeto luego que sufrió una deformación, y se explicitan las cantidades geométricas a tener en cuenta.

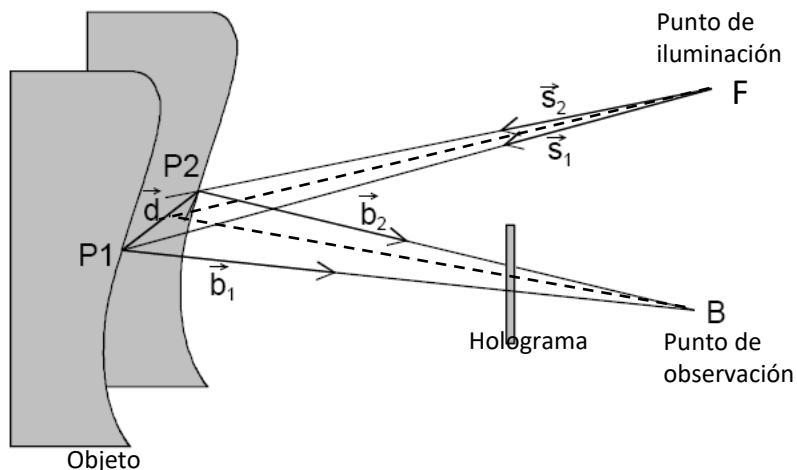


Figura 5.8: Esquema para el cálculo de la fase de interferencia.

El vector  $\vec{d}$  se denomina vector desplazamiento y describe el desplazamiento que sufre un punto de la superficie de un objeto desde una posición inicial  $P_1$  a otra final  $P_2$  debido a la deformación.  $\vec{s}_1$  es el vector unitario desde el punto fuente  $F$  a  $P_1$  y  $\vec{s}_2$  desde  $F$  a  $P_2$ ; finalmente,  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  son los vectores unitarios en la dirección del punto de observación  $B$  a  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente. La diferencia de camino óptico de rayos que van de  $F$  a  $B$  vía los  $P$  será

$$\delta = \overline{FP_1} + \overline{P_1B} - (\overline{FP_2} + \overline{P_2B}) = \vec{s}_1 \cdot \overline{FP_1} - \vec{b}_1 \cdot \overline{P_1B} - \vec{s}_2 \cdot \overline{FP_2} + \vec{b}_2 \cdot \overline{P_2B} \quad (5.11)$$

Las longitudes desde  $F$  a los puntos  $P_1$  y  $P_2$  son del orden de los metros mientras que  $|\vec{d}|$  es del orden de varios micrones. Por tanto, los vectores  $\vec{s}_1$  y  $\vec{s}_2$  pueden entonces ser reemplazados por un vector unitario  $\vec{s}$  en dirección de la bisectriz (línea de puntos en la Figura 5.8) del ángulo entre estos vectores con lo cual,

$$\vec{s} = \vec{s}_1 = \vec{s}_2 \quad (5.12)$$

Similarmente, los vectores  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  se pueden reemplazar por un vector unitario  $\vec{b}$  en dirección de la bisectriz del ángulo entre  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  y entonces,

$$\vec{b} = \vec{b}_1 = \vec{b}_2 \quad (5.13)$$

De acuerdo al esquema se puede ver que, el vector desplazamiento  $\vec{d}$  vendrá dado por:

$$\vec{d} = \overrightarrow{FP_2} - \overrightarrow{FP_1} \quad \text{y} \quad \vec{d} = \overrightarrow{BP_2} - \overrightarrow{BP_1} \quad (5.14)$$

Reemplazando ecs. 5.12, 5.13 y 5.14 en la ec. 5.11 se tiene para la diferencia de camino óptico de los rayos provenientes del objetos en las dos exposiciones:

$$\delta = -\vec{s} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot (\vec{b} - \vec{s}) \quad (5.15)$$

La diferencia de fase entonces resulta:

$$\Delta\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{d}(x, y, z) \cdot (\vec{b} - \vec{s}) = \vec{d}(x, y, z) \cdot \vec{S} \quad (5.16)$$

donde se define  $\vec{S} = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{b} - \vec{s})$  como el *vector sensibilidad*. Este vector, queda definido sólo por la geometría de la disposición holográfica. Indica la dirección en la que la configuración tiene sensibilidad máxima. En cada punto se mide la proyección del vector de desplazamiento sobre el vector de sensibilidad. La ec. 5.16 es la base de todas las mediciones cuantitativas de la deformación de cuerpos opacos. En el caso general de un campo de deformación tridimensional, esta ecuación contiene las tres componentes de  $\vec{d}$  como parámetros desconocidos. Se necesitan tres interferogramas de la misma superficie con vectores de sensibilidad linealmente independientes para determinar el desplazamiento. En muchos casos prácticos, no interesa el campo de desplazamiento tridimensional, sino la deformación perpendicular a la superficie. Esta deformación fuera del plano se puede medir utilizando una configuración optimizada con iluminación paralela y direcciones de observación  $\vec{S} = \frac{2\pi}{\lambda}(0, 0, 2)$ . Luego, la componente  $d_z$  se calcula a partir de la fase de interferencia mediante:

$$d_z = \Delta\varphi \frac{\lambda}{4\pi}$$

Una variación de fase de  $2\pi$  radianes, corresponde a una deformación de  $\lambda/2$ .

Otra aplicación de la Interferometría Holográfica es la generación de un patrón de franjas correspondiente a contornos de nivel constante con respecto a un plano de referencia. Estas franjas de contorno se pueden utilizar para determinar la forma de un objeto tridimensional. Más detalles se pueden encontrar en la referencia [5.3].

A continuación, se describen un par de experimentos desarrollados en el Laboratorio del Grupo de Óptica Láser.

#### 5.4 APLICACIONES PRÁCTICAS

##### 5.4.1 UN DISPOSITIVO HOLOGRÁFICO SENCILLO PARA VISUALIZACIÓN DE FLUJOS.

Como una herramienta didáctica en visualización de flujos, se introduce un dispositivo que usa la interferometría holográfica para este propósito. El énfasis es puesto en la disposición experimental y en el método de llevar a cabo experiencias demostrativas, simples y entretenidas, tanto para los alumnos como para el profesor [5.4]. La técnica

hace posible visualizar la distribución de temperatura alrededor de objetos calientes que están sumergidos en un fluido. Algunos resultados experimentales se ilustran por medio de fotografías.

Desde los trabajos pioneros de Reynolds y Prandtl, las técnicas de visualización de flujos han sido una de las muchas herramientas disponibles en el estudio experimental de la mecánica de fluidos. Una clase importante de métodos de visualización son los ópticos, en los cuales se utiliza la relación que existe entre el índice de refracción y la densidad del medio fluido. Esta relación constituye la base de las técnicas interferométricas dado que la fase de los rayos de luz que atraviesan el medio, es alterada por la distribución de índice de refracción. En los métodos interferométricos, la fase de un rayo que atraviesa el medio bajo estudio se compara con la fase de otro rayo que no ha sido perturbado, permitiendo que ambos interfieran.

La característica notable de esta técnica yace en el hecho que ella provee información acerca de todo el campo de flujo en una forma no perturbativa. La información instantánea en todo el campo, de los cambios que ocurren en medios transparentes puede encontrar aplicación en mediciones de flujo de fluidos, transferencia de calor, aerodinámica y transferencia de masa, para nombrar solo algunas.

A continuación, se aplicará la interferometría holográfica a tiempo real con el objeto de visualizar de manera cualitativa la distribución de temperaturas alrededor de objetos de distintas geometrías, cuando son sumergidos en un fluido (aire o agua) a diferentes temperaturas. El énfasis es puesto en el montaje experimental y en los métodos para llevar a cabo experiencias demostrativas. Éstas pueden ser realizadas fácilmente y solo requieren de elementos de bajo costo que generalmente están disponibles en un laboratorio de óptica. Algunos resultados obtenidos con estos dispositivos se ilustran por medio de fotografías. Las bases teóricas de esta técnica se desarrollaron anteriormente.

El sistema utilizado para los experimentos es un interferómetro holográfico de un solo haz, dispuesto para producir un holograma de transmisión, que utiliza el mismo haz de luz del láser para iluminar el objeto y para actuar como haz de referencia. La mitad del haz expandido pasa a través del objeto transparente y la otra mitad ilumina la placa holográfica, sirviendo como haz de referencia. El dispositivo se esquematiza en la Figura 5.9. En este caso, el objeto será el aire entre el expensor y una placa de vidrio esmerilado que actúa como difusor.

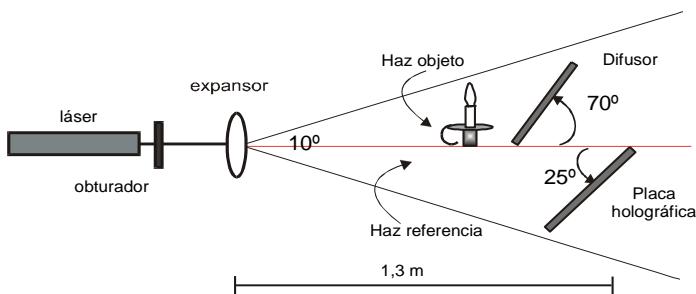


Figura 5.9: Esquema del dispositivo experimental.

En esta disposición, el frente de onda proveniente del vidrio difusor es registrada holográficamente. Cuando se mira el vidrio esmerilado a través del holograma reconstruido, su imagen virtual se verá superpuesta con éste. Cualquier variación del índice de refracción del aire detrás del difusor producirá cambios en el frente de onda objeto y podrá observarse un patrón de franjas, relacionado con estos cambios, cubriendo la superficie del difusor. Notar que, en este caso, no es el difusor el que ha sido deformado sino el medio en el que se encuentra sumergido. El rol del difusor es el de proveer una fuente de luz extendida que permita visualizar el patrón de interferencia, al dispersar la luz hacia el holograma.

La Figura 5.10 muestra el esquema experimental con las dimensiones recomendadas. Alternativamente un espejo puede ser colocado enfrente del expensor de haz para reenviar el haz, si la mesa no es lo suficientemente larga. Por ejemplo, la fotografía de la Figura 5.10 muestra el montaje experimental utilizado, donde se advierte el espejo de reenvío utilizado debido a la escasa longitud de la mesa. Después de la exposición, la placa debe ser revelada in

situ. Este procedimiento es altamente recomendado debido a las dificultades para reposicionar la placa con exactitud sin el equipamiento adecuado. Esto puede hacerse fácilmente, por ejemplo, dejando suficiente espacio debajo del porta-placas durante el montaje, como para poder alojar una pequeña cubeta que servirá para contener y recuperar los líquidos utilizados en el proceso de revelado. Cuando la placa esté seca, prender el láser y observar el holograma. Bloqueando el haz objeto o tapando el difusor con un papel oscuro, mirar a través del holograma para ver la imagen virtual del difusor. Si ahora se remueve el papel se verá el difusor y su imagen superpuestos. Puede que se observen algunas franjas de interferencia espurias, debidas a pequeñas variaciones de las condiciones ambientales o a deformaciones de la emulsión fotográfica ocurridas durante el proceso de revelado. Sin embargo, esta es una buena señal porque estas franjas sólo podrán observarse si el holograma ha sido registrado exitosamente. Cuando se modifique el camino óptico del haz objeto detrás del difusor, se observará un patrón de franjas de interferencia relacionado con esos cambios. Hay muchas formas de hacer esto. Por ejemplo, el aire en el haz objeto puede ser calentado por una pequeña llama, como la de un encendedor o una vela. Pueden utilizarse otros objetos calientes para producir una distribución no uniforme de temperatura y consecuentemente, una distribución no uniforme de índice de refracción. Ocurrirán corrientes convectivas y se podrán observar franjas de interferencia "vivas" cruzando el difusor. Puede obtenerse un registro permanente de estas franjas de interferencia por medio de una cámara fotográfica enfocada, a través del holograma, sobre el vidrio difusor, como se ilustra en las siguientes fotografías.

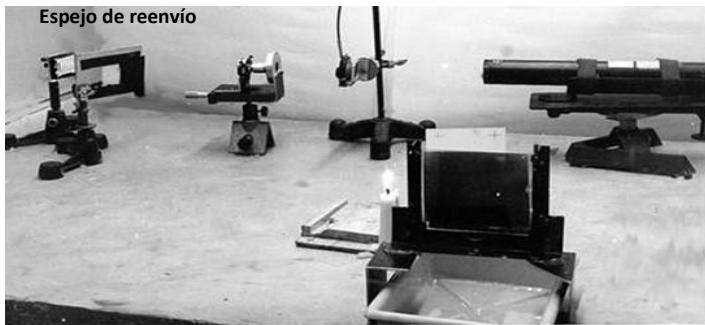


Figura 5.10: Disposición de los elementos en la mesa holográfica.

La fotografía de la Figura 5.11 muestra el patrón de franjas obtenido cuando el aire detrás del difusor fue calentado por medio de una pequeña llama. La escena muestra el vidrio esmerilado con el patrón de interferencia que representa la distribución de temperatura de los gases en convección natural alrededor de la llama. La vela encendida se ve en segundo plano. Proyectada sobre el difusor, se observa la silueta (sombra) de la parte superior de la vela y su mechita.

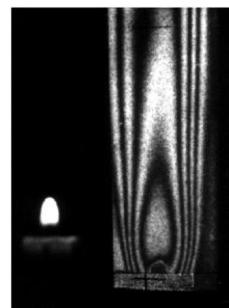


Figura 5.11: Franjas de interferencia producidas por la distribución de temperatura alrededor de una vela *encendida*. La Figura 5.12 a) muestra el patrón de interferencia producido por una resistencia eléctrica, devanada sobre un tubo cilíndrico, cuando circula una corriente eléctrica. La silueta de la bobina y su soporte se ven proyectados sobre el difusor.

Para mejorar la calidad de la imagen y el contraste de las franjas de interferencia, es conveniente usar un filtro espacial para eliminar las altas frecuencias ópticas producidas por ralladuras y partículas de polvo presentes en las superficies de la lente usada para expandir el haz. Recordar experimento de la sección I.4. También, el uso de un espejo para reenviar el haz láser (montado sobre un soporte que permita modificar su orientación) proveerá cierto control sobre la orientación y espaciado de las franjas espurias. De esta manera, el holograma podrá ser usado durante varios días después de su procesamiento, suponiendo que ningún elemento en el montaje sea perturbado.

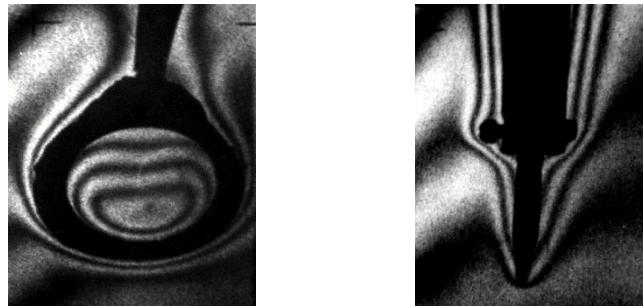


Figura 5.12: Patrón de franjas sobre el difusor, producidos por a) una bobina calentada eléctricamente y b) un soldador caliente. Ambos colocados en el haz objeto para calentar el aire circundante

#### 5.4.2 ESTUDIO DE UN FLUIDO EN CONVECCIÓN NATURAL.

Se planteó el uso de la Interferometría Holográfica a tiempo real para obtener información cualitativa (visualización de flujo) y cuantitativa (campo de temperaturas) de un fluido en convección natural, en modelos a escala reducida que simulan sistemas utilizados en climatización de viviendas [5.5]. El proceso convectivo se estudió a tiempo real a través de la evolución temporal de los interferogramas holográficos, registrados secuencialmente en película fotográfica o en forma continua en video. También se utilizaron hologramas de doble exposición. Se determinó el gradiente de temperatura en zonas adyacentes a la placa calefactora como así también la variación de temperatura entre franjas de interferencia, utilizando la hipótesis de bidimensionalidad del flujo. Se analizó la validez de esta hipótesis y se efectuaron correcciones debido a errores de refracción.

El modelo es de geometría prismática de dimensiones  $0,10 \times 0,09 \times 0,8 \text{ m}^3$  realizado en vidrio y contiene agua en su interior a la que se entrega calor por medio de una resistencia eléctrica devanada en una de las paredes verticales. El modelo es iluminado haciendo incidir el haz objeto en un difusor adyacente a una de sus paredes. El dispositivo para la construcción y reconstrucción del holograma se esquematiza en la figura 5.13.

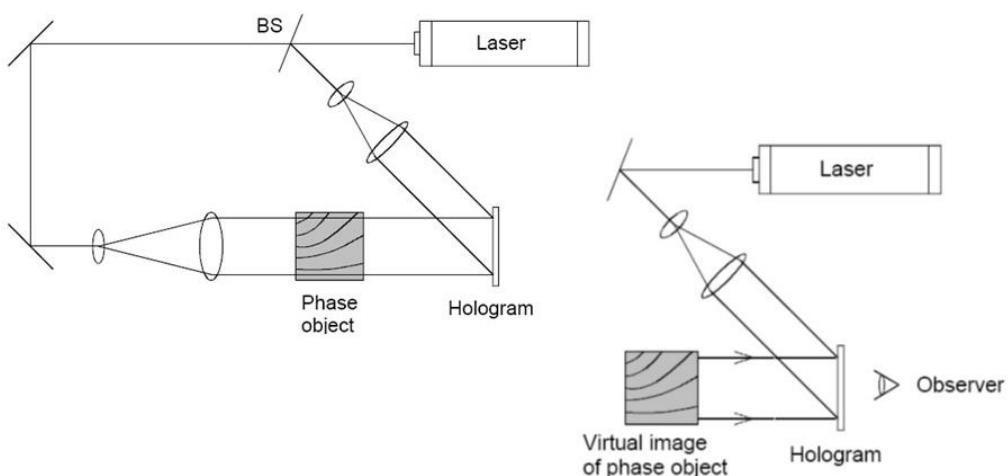


Figura 5.13: Dispositivo experimental. Construcción y reconstrucción del holograma

El holograma se construye estando el fluido a temperatura uniforme ( $T(x, y, z) = T_0$ ) lo que constituye el estado de referencia. Se procede a su revelado "in situ" utilizando una "liquid gate" diseñada al efecto, lo que elimina errores de reposicionamiento y minimiza los efectos de la deformación de la emulsión, con lo que se logra la eliminación de franjas de interferencia espurias. La imagen holográfica del objeto se reconstruye por medio del

el mismo haz de referencia utilizado en la construcción. De esta manera, la onda objeto proveniente de la imagen holográfica (virtual) correspondiente al estado de referencia, se superpone espacial y temporalmente con la onda proveniente del objeto real.

Si todas las condiciones han permanecido invariables durante el proceso, la diferencia de fase entre estas dos ondas es nula y se observa un campo de irradiancia uniforme. Al entregar energía al sistema se produce una distribución de índice de refracción  $n(x, y, z)$ . La diferencia con el índice de refracción uniforme  $n_0$  del estado de referencia viene  $\Delta n(x, y, z) = n(x, y, z) - n_0$  genera una diferencia de fase entre las ondas. Si se considera que el medio transparente es un objeto de fase, es decir, se desprecian los efectos de la refracción, los rayos se propagan en línea recta y la diferencia de camino óptico entre rayos correspondientes que viajan en la dirección  $z$  (dirección de observación) viene dada por la expresión:

$$\Delta\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^L [n(x, y, z) - n_0] dz \quad (5.17)$$

donde  $L$  es la longitud del modelo en la dirección de observación (eje  $z$ ). En la Figura 5.14, se muestra un interferograma típico. El patrón de interferencia da cuenta de la distribución de índice de refracción en un estado del sistema.

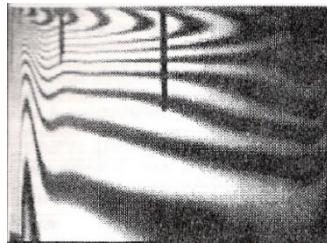


Figura 5.14: Patrón de interferencia.

A fin de calibrar la determinación de temperaturas en el modelo, se incorporaron sensores de temperatura convencionales como termocuplas y termistores. Líneas verticales oscuras que se suspenden desde el techo del modelo, en la figura. En el centro de la placa calefactora, se colocó un peine de seis microtermocuplas espaciadas 1 mm, para registrar temperaturas en la zona de la capa límite térmica.

La inversión de la ec. 5.17 para obtener  $\Delta\varphi(x, y)$  puede ser más o menos laborioso dependiendo de la estructura del objeto de fase. Si se puede considerar que la distribución de índice de refracción es bidimensional, la variación de índice de refracción se puede expresar en términos del orden de las franjas de interferencia como:

$$\Delta n(x, y) = N(x, y) \frac{\lambda}{L} \quad (5.18)$$

La dependencia del índice de refracción del agua con la temperatura se obtuvo a partir de la fórmula de Dobinson y Peck [5.6].

$$n - 1.3332 = -(1.936T + 1699T^2)x10^{-5}$$

Por lo tanto, a cada franja de interferencia se le puede asociar una temperatura y en la Figura 5.15 se muestra una curva de distribución de temperatura en función de la distancia de la placa calefactora, para disponer de la información del gradiente térmico en el estudio de la convección natural.

Claramente se observa que ambas medidas se apartan a medida que nos acercamos a la placa calefactora. Posibles causas de este desacuerdo podrían ser algunas de las hipótesis simplificadoras realizadas inicialmente. Para corregir

se consideraron dos posibilidades, que los errores de refracción no son despreciables y que el modelo no puede ser analizado como bidimensional, como se discute a continuación.

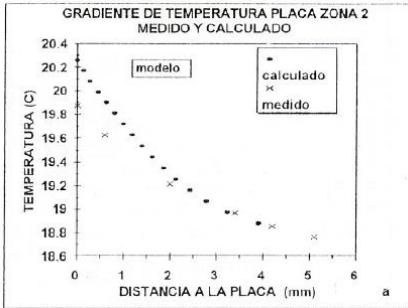


Figura 5.15: Gradiante de temperatura en las vecindades de la placa.

En cuanto a la refracción producida por el gradiente de indicie de refracción el error en el cálculo del camino óptico será menor que  $\lambda/10$  si se cumple:

$$e = \frac{\lambda L}{n_0 d_f^2} < 0,3 \quad (5.19)$$

donde  $d_f$  es la distancia entre franjas. La evaluación del error arrojó un valor de 2 en las cercanías de la placa y 0,09 a una distancia de 4 mm. Lo que significa que la refracción afecta a las mediciones en las regiones muy cercanas a la placa calefactora. Para subsanar este inconveniente, se procedió a corregir utilizando la fórmula de recurrencia sugerida en la referencia [5.6]:

$$n(x_i) - n_0 = N(x_i) \frac{\lambda}{L} - n_0 L \left( \frac{n'}{n_0} \right)^2 \left( \frac{L}{3} - \frac{z_f}{2} \right) \quad (5.20)$$

donde  $n'$  es la derivada de  $n$  respecto de  $x$  y  $z_f$  es la distancia focal de la lente utilizada para el registro fotográfico de las franjas.

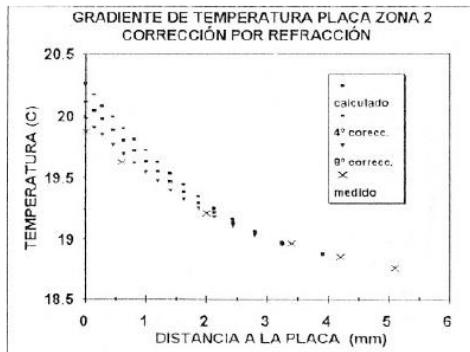


Figura 5.16: Corrección por errores de refracción.

En la Figura 5.16 se muestran distintos órdenes de corrección utilizando la expresión de la ec. 5.20, puede verse que las mediciones interferométricas se aproximan bastante hasta la corrección de orden 8, posteriores iteraciones no mejoraron los resultados. El siguiente paso en este estudio es dilucidar el problema de la hipótesis de bidimensionalidad, para ello se realizó un holograma en la dirección perpendicular a  $z$  y se obtuvo un resultado como el que se muestra en la Figura 5.17, en la que la placa calefactora se ubica en la parte superior.

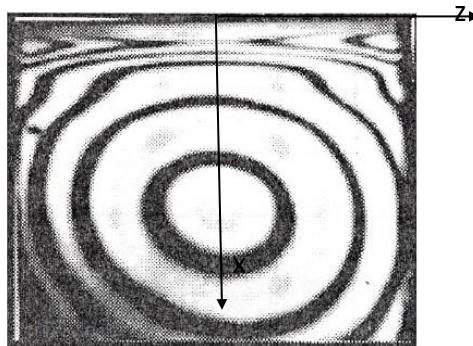


Figura 5.17: Holograma de doble exposición vista en plata (dirección de observación eje y)

Del análisis del patrón de interferencia se puede notar que, es simétrico respecto del plano medio ( $x, y$ ), en  $z = L/2$ , lo que evidencia que el flujo no es bidimensional. En la región central del gradiente térmico vecino a la placa, las franjas son prácticamente paralelas, aunque se observan perturbaciones en las esquinas, este resultado hace suponer que la hipótesis de bidimensionalidad es válida en la zona donde se llevaron a cabo las mediciones. Por otro lado, en la región central, donde se observan franjas circulares, se pueden contar 2,5 partiendo desde el centro hasta una de las paredes laterales. El error estimado en el cálculo de la temperatura por franja de interferencia, ver Ref, [5.4], resultó de  $0,17^{\circ}\text{C}$ , que es del orden de precisión de las mediciones realizadas con termocuplas.

Desde el punto de vista cualitativo la interferometría holográfica ha demostrado ser útil para la visualización de la evolución del campo de temperaturas en modelos de recintos climatizados por convección natural. También se demostró que es posible obtener medidas cuantitativas de la distribución de temperatura en el caso que sea válida la hipótesis de bidimensionalidad, evitando la perturbación en el fenómeno de convección que introducen los sensores de temperatura.

##### 5.5 EL FENÓMENO SPECKLE

Cuando una superficie difusora, como por ejemplo un metal o un vidrio despolido, se ilumina con luz láser, se observa una estructura granular muy fina. La superficie parece cubierta por puntos brillantes y oscuros distribuidos en forma aleatoria, y si el observador se mueve dicha estructura parece parpadear y moverse respecto al objeto [5.10]. Este fenómeno resulta inherente de la luz altamente coherente, ya que a diferencia de lo que sucede con luz blanca, todos los puntos de la superficie reflectora pueden considerarse como fuentes coherentes, es decir emiten ondas luminosas capaces de interferir. La imagen de cada uno de estos puntos formada en la retina de un observador es la figura de difracción propia del sistema óptico del ojo. La interferencia de dichas figuras de difracción origina el aspecto granular aleatorio característico, denominado speckle. La Figura 5.18 muestra una fotografía de un patrón de speckle típico producido por la dispersión de luz láser a partir de una superficie rugosa. El mismo resultado se obtiene si se reemplaza el ojo por una cámara fotográfica. En realidad, no es necesario formar una imagen de la superficie difusora para obtener un diagrama de speckle. En efecto, la superficie rugosa genera ondas secundarias con fase aleatoria, que interfieren entre sí en todo el espacio circundante al difusor.



Figura 5.18: Fotografía de un patrón de speckle

Los patrones de speckle presentan una distribución de intensidad aleatoria. Pueden producirse ya sea cuando la luz altamente coherente es reflejada por una superficie (speckle por reflexión) o cuando se propaga en un medio con fluctuaciones aleatorias de índice de refracción o de espesor (speckle por transmisión). En general las propiedades estadísticas de los patrones de speckle dependen tanto de la coherencia de la luz incidente como de las propiedades de la superficie o el medio que los producen, de esta forma, la coherencia de la luz incidente, transforma a la luz dispersada en portadora de información sobre aquello que originó la dispersión.

En la Figura 5.19 se muestra las dos formas para observar patrones de speckle. Por analogía con el fenómeno de difracción, el speckle se dirá que es del tipo Fraunhofer en el primer caso y del tipo Fresnel en el segundo. Las superficies de la mayoría de los materiales son extremadamente rugosas en la escala de una longitud de onda óptica. Cuando luz prácticamente monocromática es reflejada o transmitida por una superficie, la onda resultante en un punto a una cierta distancia, es la superposición coherente de ondas elementales provenientes de diferentes elementos microscópicos de la superficie. Esto se conoce como propagación libre y se corresponde con el esquema de la Figura 5.19 a).

Cuando la geometría es la de un sistema formador de imagen (figura 5.19 b), en vez de la de propagación libre, en la explicación del origen físico de la granularidad se debe incluir la difracción, así como la interferencia. Aun para un sistema óptico perfectamente corregido, esto es libre de aberraciones, la intensidad en un dado punto imagen resulta de la suma coherente de contribuciones provenientes de varios elementos independientes de superficie. Es necesario sólo que la amplitud de la función de punto extendido del sistema óptico sea ancha comparada con las variaciones microscópicas de la superficie para asegurar que las distintas contribuciones coherentes desfasadas se suman en cada punto de la imagen.

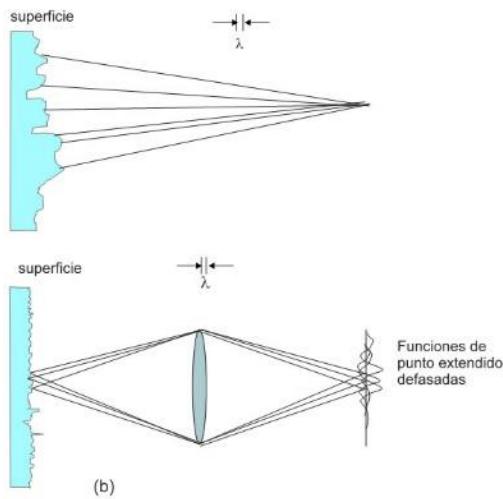


Figura 5.19: Geometrías para observar patrones de speckle. a) Propagación libre y b) formación de imagen

En general, las propiedades estadísticas de los patrones de speckle suelen ser bastante complicadas. Vamos a deducir la estadística de un patrón de speckle proveniente de un medio aleatorio iluminado con luz perfectamente coherente, que no despolariza la luz e introduce cambios de fase mayores que  $2\pi$ . Por otro lado, asumiremos que la intensidad en un punto del plano de observación resulta de la contribución de un gran número de centros dispersores.

El resultado más importante de la estadística de primer orden del speckle láser es que, para este tipo de speckle, la desviación standard de las variaciones espaciales es igual a la intensidad media del patrón, por lo tanto, el cociente  $\sigma/\langle I \rangle$ , que se utiliza para medir el contraste, resulta igual a 1. Un patrón de speckle con estas características suele denominarse, patrón de speckle completamente desarrollado ("fully developed" speckle pattern). Por otro lado, la estadística de segundo orden permite cuantificar la distribución de tamaño de los granos de speckle a través de la función de autocorrelación (espacial) de la intensidad. A continuación, en la siguiente sección, apliaremos sobre estas cuestiones.

### 5.5.1 ESTADÍSTICA DE PRIMER ORDEN

Consideremos que colocamos un detector de intensidad en punto arbitrario  $(x, y, z)$  del patrón de speckle y analizaremos la intensidad producida en él, debida al conjunto de elementos dispersores macroscópicamente idénticos, pero microscópicamente distintos. La estructura superficial microscópica de todos los elementos dispersores presenta las mismas características desde el punto de vista estadístico. Suponiendo que la luz incidente es monocromática y linealmente polarizada y que el fenómeno de dispersión no afecta su estado de polarización, sea  $u(x, y, z; t)$  una componente de polarización del campo eléctrico en el punto de observación  $(x, y, z)$  y en el instante  $t$ . Si la onda es monocromática podemos representarla por:

$$u(x, y, z; t) = A(x, y, z)e^{-i2\pi v t} \quad (5.21)$$

donde  $v$  es la frecuencia óptica y  $A$  representa el fasor amplitud del campo, que es una función compleja del espacio y viene dada por:

$$A(x, y, z) = |A(x, y, z)|e^{-i\phi(x, y, z)} \quad (5.22)$$

Como vimos en la sección I, La intensidad de la onda vendrá dada por:

$$I(x, y, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |u(x, y, z; t)|^2 dt = |A(x, y, z)|^2 \quad (5.23)$$

Ya sea que la figura de speckle provenga de una propagación libre o de un sistema formador de imágenes la amplitud del campo eléctrico en el punto de observación  $(x, y, z)$  consiste en una multitud de contribuciones desfasadas provenientes de distintas regiones de la superficie. Luego, la amplitud  $A(x, y, z)$  se puede representar como una suma de contribuciones elementales de acuerdo a la ecuación

$$A(x, y, z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{N}} a_k(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^n |a_k| e^{i\phi_k} \quad (5.24)$$

Estamos interesados en conocer la estadística del campo, de la intensidad y de la fase del diagrama de speckle en un punto cualquiera  $(x, y, z)$ . Este problema es idéntico al problema estadístico clásico de la caminata aleatoria ampliamente estudiado. El diagrama de la Figura 5.20 ilustra la suma de varias contribuciones complejas que dan como resultado el número complejo  $A$ .

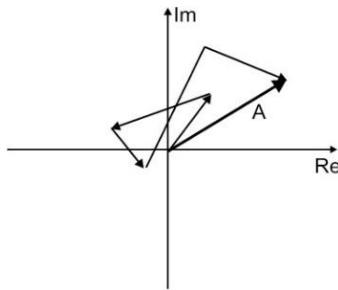


Figura 5.20: Problema de la caminata aleatoria.

Vamos a simplificar el desarrollo a aquellos resultados que nos interesan poniendo cuidado en delinear las suposiciones que están implícitas y sus significados físicos. Se considera que:

- I- Las amplitudes  $a_k$  y las fases  $\phi_k$  de las contribuciones elementales son estadísticamente independientes entre sí y de las amplitudes y fases de todas las otras contribuciones (esto es, las regiones difusoras elementales no están relacionadas y la intensidad de cada componente no guarda ninguna relación con su fase).
- II- II Las fases  $\phi_k$  están uniformemente distribuidas en el intervalo primario  $(-\pi, \pi)$ , esto significa que la superficie es rugosa comparada con la longitud de onda, de modo que las incursiones de fase de varias veces  $2\pi$  producen una distribución uniforme en el intervalo primario.

Con estas suposiciones y si el número de contribuciones  $N$  es extremadamente grande, haciendo uso del teorema central del límite, Goodman [5.2] encontró que la función de densidad conjunta de las partes real e imaginaria del campo se aproxima asintóticamente a:

$$P_{r,i}(u^r, u^i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{[u^r]^2 + [u^i]^2}{2\sigma^2}} \quad (5.25)$$

donde,

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\langle |a_k|^2 \rangle}{2}$$

Las funciones de densidad como éstas, se conocen como gaussianas circulares, ya que los contornos de densidad de probabilidad constante son circulares en el plano complejo. De acuerdo con esto, el fasor  $A$  se conoce como variable aleatoria compleja gaussiana circular.

En la mayoría de los experimentos en la región óptica del espectro, es la intensidad de la onda la que se mide directamente. Debido a esto, nos interesa conocer las propiedades estadísticas de la intensidad en un diagrama de speckle a partir de las estadísticas del campo. Como resultado de este análisis se obtienen también las de la fase.

La intensidad  $I$  y la fase  $\phi$  del campo resultante están relacionadas con las partes reales e imaginaria de la amplitud compleja mediante las transformaciones:

$$\begin{aligned} A^{(r)} &= \sqrt{I} \cos \phi \\ A^{(i)} &= \sqrt{I} \sin \phi \end{aligned} \quad (5.26)$$

o sus relaciones inversas:

$$\begin{aligned} I &= [A^{(r)}]^2 + [A^{(i)}]^2 \\ \phi &= \arctan \left( \frac{A^{(i)}}{A^{(r)}} \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Aplicando las técnicas habituales de transformaciones de variables aleatorias se encuentra que las densidades de probabilidad marginales de  $I$  y de  $\phi$  vienen dadas por:

$$P_I(I) = \int_{-\pi}^{\pi} P_{I,\phi}(I, \phi) d\phi = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{I}{2\sigma^2}}, & I \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.28)$$

$$P_\phi(\phi) = \int_{-\pi}^{\pi} P_{I,\phi}(I, \phi) dI = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2}, & -\pi \leq \phi \leq \pi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.29)$$

Concluimos que la intensidad en un punto cualquiera  $(x, y, z)$  en un patrón de speckle polarizado, obedece una estadística exponencial negativa, mientras que la fase tiene una distribución uniforme. Además, se cumple

$$P_{I,\phi}(I, \phi) = P_I(I)P_\phi(\phi) \quad (5.30)$$

y entonces la intensidad y la fase son estadísticamente independientes en todo punto. Conocida la función de distribución podemos calcular el momento  $k$ -ésimo de la intensidad que resulta

$$\langle I^k \rangle = k! (2\sigma^2)^k = k! \langle I \rangle^k \quad (5.31)$$

donde para  $k = 1$ .

$$\langle I \rangle = 2\sigma^2 \quad (5.32)$$

De especial importancia son los momentos de segundo orden y la varianza dadas por

$$\begin{aligned}\langle I^2 \rangle &= 2\langle I \rangle^2 \\ \sigma_I^2 &= \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \langle I \rangle^2\end{aligned}\quad (5.33)$$

Por lo tanto, la desviación estándar de un patrón de speckle polarizado es igual a la intensidad media. Una medida razonable del contraste del speckle resulta el cociente:

$$C = \sigma/\langle I \rangle \quad (5.34)$$

Con esta definición vemos que el contraste es siempre igual a uno para un speckle polarizado. En la práctica es usualmente la probabilidad  $P(I)$ , que la intensidad excede un cierto umbral  $I$ , la que resulta de interés. En el presente caso encontramos que

$$P(I) = \int_I^\infty \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{\zeta}{\langle I \rangle}} d\zeta = e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}} \quad (5.35)$$

En la Figura 5.21 se muestra la gráfica de la densidad de probabilidad de un speckle completamente desarrollado.

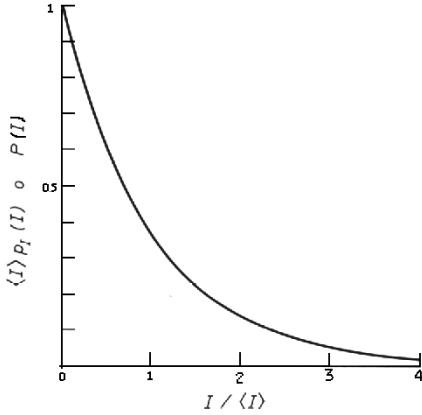


Figura 5.21: Función de densidad de probabilidad y la probabilidad de que la intensidad exceda un umbral  $I$ .

### 5.5.2 ESTADÍSTICA DE SEGUNDO ORDEN

Hasta ahora se ha limitado la atención a las propiedades estadísticas del speckle medidas en un solo punto. Estas consideraciones son suficientes para describir las fluctuaciones de brillo, pero no alcanzan para describir algunas otras propiedades fundamentales como la distribución de su estructura espacial. Para ello es necesario concentrarse en la estadística de segundo orden.

En geometría de propagación libre observamos a cierta distancia la luz dispersada por una superficie sobre la que incide un haz de luz monocromática. Describiremos el campo reflejado por la superficie en un plano inmediatamente adyacente, mediante la función  $\alpha(\xi, \eta)$  que representa una componente del campo eléctrico linealmente polarizado. La otra componente, puede ser tratada, en primera aproximación, independientemente de la misma manera. Por simplicidad consideraremos una única componente. En la Figura 5.22, se muestra un esquema de la geometría que se utilizará en el siguiente desarrollo.

Estamos interesados en estudiar el campo  $A(x, y)$  en un plano paralelo a la superficie y a una distancia  $z$ . Deseamos calcular la función de autocorrelación de la distribución de intensidades  $I(x, y) = |A(x, y)|^2$  en el plano  $x - y$ , esto es:

$$G_I(x_1, y_1; x_2, y_2) = \langle I(x_1, y_1)I(x_2, y_2) \rangle \quad (5.36)$$

Para calcular esta función de autocorrelación consideramos el hecho de que para una superficie rugosa comparada con la longitud de onda, el campo  $A(x, y)$  es una variable aleatoria compleja circular gaussiana en cada punto  $(x, y)$ . Para tales campos, la función de autocorrelación de la intensidad puede ser representada a partir de la autocorrelación del campo.

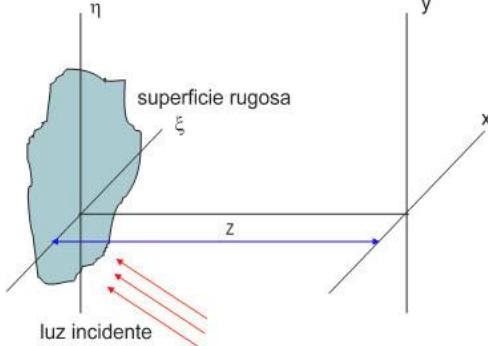


Figura 5.22: Geometría para el cálculo de la estadística de Segundo Orden.

$$J_A(x_1, y_1; x_2, y_2) = \langle A(x_1, y_1) A^*(x_2, y_2) \rangle \quad (5.37)$$

esta última expresión recibe el nombre de intensidad mutua del campo. Para campos circulares gaussianos, la relación entre  $G_I$  y  $J_A$  es

$$G_I(x_1, y_1; x_2, y_2) = \langle I(x_1, y_1) \rangle \langle I(x_2, y_2) \rangle + |J_A(x_1, y_1; x_2, y_2)|^2 \quad (5.38)$$

El problema de calcular  $G_I$  se reduce a calcular la intensidad mutua  $J_A$ . Siguiendo a Goodman, el cálculo de la intensidad mutua en el plano de observación comienza con una relación fundamental entre los campos  $\alpha(\xi, \eta)$  en la superficie dispersora y el campo  $A(x, y)$  en el plano de observación. La relación es el principio de Huygens-Fresnel expresado en términos de la aproximación de Fresnel, como:

$$A(x, y) = \frac{1}{\lambda z} e^{-i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \alpha(\xi, \eta) e^{-i\frac{\pi}{\lambda z}(\xi^2+\eta^2)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (5.39)$$

Con los cambios de las variables de integración adecuados, sustituyendo esta expresión en la expresión de la intensidad mutua del campo mediante un intercambio de orden de integración y promediando, se obtiene la relación entre la intensidad mutua  $J_A$  en la región de observación y la intensidad mutua  $J_\alpha$  en el plano de dispersión

$$J_A(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{1}{\lambda^2 z^2} e^{-i\frac{\pi}{\lambda z}(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2)} \iint \iint_{-\infty}^{\infty} J_\alpha(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) e^{-i\frac{\pi}{\lambda z}(\xi_1^2-\xi_2^2+\eta_1^2-\eta_2^2)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda z}(x_1\xi_1+y_1\eta_1-x_2\xi_2-y_2\eta_2)} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \quad (5.40)$$

Vamos a considerar en esta expresión general, dos hipótesis simplificadoras que nos permitirán obtener los resultados que interesan en este caso, de una manera más simple. Primero, puesto que estamos interesados sólo en el módulo de  $J_A$ , podemos descartar el primer factor exponencial en  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . Segundo, supondremos que la microestructura de la superficie dispersora es lo suficientemente fina como para que no se pueda resolver desde la región de observación en el plano  $(x, y)$ , en tal caso:

$$J_\alpha(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) \cong \kappa P(\xi_1, \eta_1) P^*(\xi_2, \eta_2) \delta(\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2) \quad (5.41)$$

donde  $\kappa$  es una constante de proporcionalidad, la función  $P(\xi, \eta)$  representa la amplitud del campo incidente en el área de dispersión y  $\delta(\xi, \eta)$  es una función delta bidimensional. Por la definición de la distribución delta, la expresión anterior es nula siempre que  $(\xi_1, \eta_1) \neq (\xi_2, \eta_2)$ , lo que implica la suposición de que no se puede resolver la estructura de la superficie; es decir, dos puntos distintos no están correlacionados, resultando nulo el valor de correlación de los campos. Por otro lado, cuando  $(\xi_1, \eta_1) = (\xi_2, \eta_2)$ ,  $J_\alpha$  coincide con la intensidad incidente. Reemplazando estas simplificaciones en la ec. 5.40 se tiene:

$$J_A(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{\kappa}{\lambda^2 z^2} \iint_{-\infty}^{\infty} |P(\xi_1, \eta_1)|^2 e^{i \frac{2\pi}{\lambda z} \{ \xi_1(x_1 - x_2) + \eta_1(y_1 - y_2) \}} d\xi_1 d\eta_1 \quad (5.42)$$

por lo tanto la intensidad mutua del campo observado depende sólo de la diferencia de coordenadas en el plano  $(x, y)$  y viene dada, a menos de una constante multiplicativa, por la transformada de Fourier de la distribución de intensidades incidentes sobre la superficie difusora. Finalmente reemplazando, la función de autocorrelación de la intensidad del speckle toma la forma:

$$G_I(\Delta x, \Delta y) = \langle I \rangle^2 + C |\mathcal{F}[|P(\xi_1, \eta_1)|^2]|^2 \quad (5.43)$$

donde hemos definido  $C = \left| \frac{\kappa}{\lambda^2 z^2} \right|$ . Luego podemos decir que una medida razonable del tamaño promedio del speckle es el ancho de la transformada de Fourier de la función  $|P(\xi_1, \eta_1)|^2$ . Una manera de regular el tamaño de los granos de speckle es variando el tamaño de la región de la superficie difusora iluminada o modificando las distancias  $z$  al plano de observación, lo que produce un cambio de escala en las frecuencias de transformación.

Consideremos un ejemplo para entender mejor este último concepto. Supongamos una iluminación uniforme sobre una pupila cuadrada de lado  $L$ ; de acuerdo con esto:

$$|P(\xi_1, \eta_1)|^2 = \text{rect}\left(\frac{x}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{L}\right) \quad (5.44)$$

Donde por definición, donde  $\text{rect}(x) = 1$  para  $|x| = 1$ , y cero en cualquier otro caso. La función de autocorrelación de la intensidad es, por lo tanto:

$$G_I(\Delta\xi, \Delta\eta) = \langle I \rangle^2 \left[ 1 + \text{sinc}^2\left(\frac{L\Delta\xi}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{L\Delta\eta}{\lambda z}\right) \right] \quad (5.45)$$

El gráfico de esta función se muestra en la Figura 5.23.

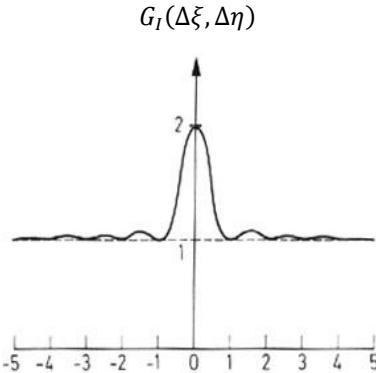


Figura 5.23: Autocorrelación de la intensidad. Pupila rectángulo bidimensional

El ancho medio del speckle puede considerarse tomando el valor de  $\Delta\xi$  en donde se anula por primera vez la función  $\text{sinc}^2\left(\frac{L\Delta\xi}{\lambda z}\right)$ . Llamando  $\delta$  a dicho valor, tenemos:

$$\delta = \frac{\lambda z}{L} \quad (5.46)$$

## 5.6 METROLOGÍA SPECKLE

Como se mencionó más arriba, el speckle como fenómeno surgió con el advenimiento del láser y el desarrollo de la holografía, siendo en ese entonces un problema de ruido que debía ser eliminado. Los estudios realizados, en ese entonces, con este fin mostraron que los patrones de speckle eran sensibles al movimiento de la superficie rugosa que lo genera. Surgen entonces numerosas aplicaciones para mediciones con precisión micrométrica de rugosidad, micro desplazamientos, vibraciones, procesamiento de imágenes. El alcance esta propiedad del fenómeno speckle ha dado lugar incluso a importantes aplicaciones en Astronomía para ir más allá del límite de la resolución impuesta por las turbulencias de la atmósfera para alcanzar a lo sumo el límite de resolución de los telescopios.

Los diagramas de speckle, considerados como interferencia de múltiples haces, no poseen una posición de referencia en el espacio y por consiguiente no son, por sí mismos, de utilidad en metrología. Por esta razón, los primeros trabajos sobre holografía interferométrica no reconocían la importancia del speckle, tratándose más bien de reducir su efecto a fin de mejorar la calidad de las imágenes reconstruidas. Sin embargo, a partir de la observación de que el speckle es sensible al movimiento de la superficie difusora, se comenzaron a desarrollar técnicas que utilizaban al diagrama de speckle como una portadora aleatoria, a la que se podía modular información sobre cambios locales de la superficie. La metrología speckle puede definirse como la rama de la Óptica en la que el fenómeno llamado speckle es utilizado para determinar y cuantificar desplazamientos, deformaciones y velocidades de objetos difusores, variaciones o gradientes de índices de refracción de un medio, etc. La metrología speckle comprende una cantidad relativamente extensa de técnicas, las que generalmente resultan incluidas en una de las dos siguientes categorías generales: a) Fotografía speckle y b) Interferometría speckle.

#### 5.6.1 EXPERIENCIA DE BURCH-TOKARSKY

La Fotografía Speckle está fundamentada en la experiencia de Burch y Tokarsky y sus aplicaciones. Esta experiencia se basa en la determinación del desplazamiento del speckle por el procesamiento óptico del negativo de una película (specklegrama) en la cual se registra, por doble exposición, los patrones de speckle antes y después de una deformación del objeto. Los specklegramas son registrados normalmente en el plano imagen del objeto. Si se explora localmente punto por punto cada pequeña región del specklegrama con un haz láser concentrado aparecerán franjas de Young rectas y equiespaciadas en el espectro de difracción. Su orientación es perpendicular a la dirección del desplazamiento del speckle, mientras que su espaciado es inversamente proporcional a la magnitud del desplazamiento. Por lo tanto, al extraer estos parámetros de las franjas de Young se puede evaluar la distribución de los desplazamientos en el specklegrama.

En la Figura 5.24 se presenta un esquema de la idea para el caso del registro fotográfico de dos patrones de speckle, habiendo introducido un desplazamiento  $\vec{d}$  del objeto difusor entre ellas.

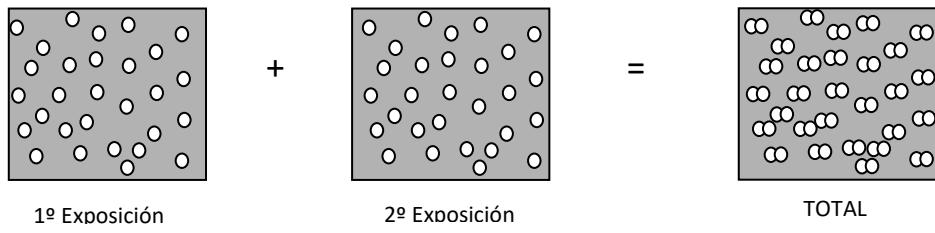


Figura 5.24: Experiencia de Burch-Tokarsky

Si  $A_1$  y  $A_2$  son las amplitudes complejas antes y después del desplazamiento, las franjas de Young se obtienen de la transformada óptica de Fourier del specklegrama en el cual se registraron  $I_1 = |A_1(x, y)|^2$  e  $I_2 = |A_2(x, y)|^2$  y cuya intensidad en el plano de frecuencias espaciales está dada por donde

$$I_Y(f_x, f_y) = \langle \mathcal{F}\{|[I_1(x, y) + I_2(x, y)]A_B(x, y)|^2\} \rangle \quad (5.47)$$

$p_x$  y  $p_x$  denotan una posición en el plano de Fourier y  $A_B(x, y)$  es la amplitud del haz láser incidente. El procedimiento de promediado se introduce para eliminar ruido tipo speckle superpuesto con las franjas. La formación de franjas de Young fue investigada por Khetan y Chiang [5.8] y por Yamaguchi [5.9].

En la Figura 5.25 se muestra el dispositivo experimental para la obtención de las franjas de Young, como las que se muestran en la fotografía del plano de Franunhofer, se incluyen en el esquema, los sistemas coordenados en cada plano de interés para la descripción matemática, siguiendo los procedimientos vistos en la sección 3.

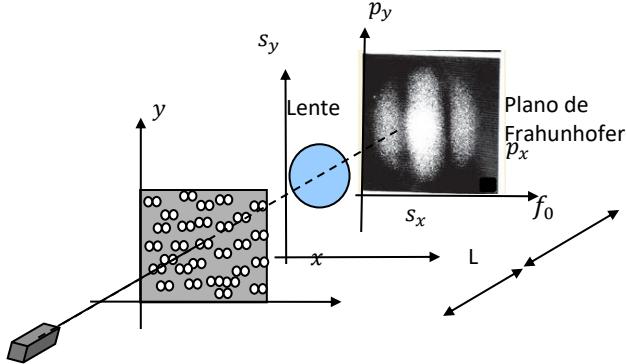


Figura 5.25: Experiencia de Burch-Tokasky. Dispositivo para la observación de las franjas de Young

Un specklegrama es iluminado por un spot láser de longitud de onda  $\lambda$ , donde  $L$  es la distancia del specklegrama a la lente y  $f_0$  es la distancia focal de la lente, y se hicieron coincidir los planos de la pupila y la lente. La función de transmisión de amplitud del specklegrama, en primera aproximación, está dada por:

$$T_{12} = T_0 - \eta [I_1(x, y) + I_2(x, y)] \quad (5.48)$$

donde  $T_0$  y  $\eta$  son constantes. Se supone que el registro del specklegrama se ha realizado de manera que el límite de resolución de la película no tenga efecto sobre él.

Una región pequeña del specklegrama es iluminado con un haz láser de amplitud  $A_B(x - x_c, y - y_c)$  con  $(x_c, y_c)$  las coordenadas del centro de su spot. Entonces, este haz de lectura generará franjas de Young en el plano focal de la lente de coordenadas  $(p_x, p_y)$ . La intensidad de las franjas estará dada por

$$I_\gamma(p_x, p_y) = \left\langle \int \int A_B(x - x_c, y - y_c) T_{12}(x, y) e^{-\frac{ik_0(xp_x + yp_y)}{f_0}} dx dy \right\rangle^2 \quad (5.49)$$

donde  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$  es el número de onda del haz láser y  $f_0$  es la distancia focal de la lente. Operando, se tiene:

$$I_\gamma(p_x, p_y) = (T_0 - \eta(I))^2 \left| \tilde{A}_B\left(\frac{p_x}{\lambda_0 f_0}, \frac{p_y}{\lambda_0 f_0}\right) \right|^2 + 2\eta^2 \int \int |A_B(x, y)|^2 dx dy \Re\left(\frac{p_x}{\lambda_0 f_0}, \frac{p_y}{\lambda_0 f_0}\right) \left\{ 1 + \gamma \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda_0 f_0} p_x d_{x_c} + p_y d_{y_c} \right] \right\} \quad (5.50)$$

Con  $\tilde{A}_B$  la transformada de Fourier de  $A_B$ ,  $\Re$  dado por:

$$\Re\left(\frac{p_x}{\lambda_0 f_0}, \frac{p_y}{\lambda_0 f_0}\right) = \int \int |P(p_x, p_y)|^2 \left| P(s_x + \frac{\lambda L}{\lambda_0 f_0} p_x, s_y \frac{\lambda L}{\lambda_0 f_0} p_y) \right|^2 ds_x ds_y \quad (5.51)$$

y  $\gamma$  se define como:

$$\gamma = \frac{\left| \int \int P(s_x, s_y) P^*(s_x, s_y) |P(s_x + d_{s_x}, s_y + d_{s_y})|^2 ds_x ds_y \right|^2}{\int \int |P(s_x, s_y)|^2 ds_x ds_y} \quad (5.52)$$

En una interpretación física de la ec. 5.50, podemos considerar que el primer término del lado derecho representa la "mancha" de orden cero que aparece en el sistema de franjas, el segundo término es el que da origen las franjas, donde la función  $\Re$  representa una envolvente de las franjas de Young llamada halo de difracción, que también corresponde al espectro de Wiener del speckle y depende solamente del tamaño de la abertura de la lente que forma la imagen del objeto y no de sus aberraciones. Las franjas de Young son perpendiculares al desplazamiento del speckle  $d(x_c, y_c)$  y tienen un espaciado  $l = \frac{\lambda_0 f_0}{|d|}$ . Por lo tanto, a partir del espaciado y la orientación se puede

obtener el desplazamiento  $\vec{d}$ , excepto por un signo. La figura 5.26 muestra un esquema de las situaciones físicas que se presentan en los diferentes planos en el proceso de observación de franjas.

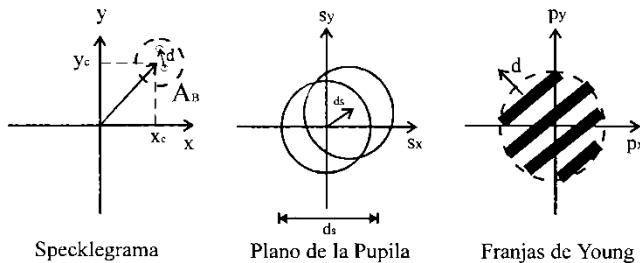


Figura 5.26: Situaciones físicas que afectan a la intensidad de las franjas de Young.

Con esta técnica, el rango de desplazamientos que pueden ser medidos comprende entre 1 y  $30 \mu\text{m}$

### 5.6.2 EXPERIENCIA DE BURCH-TOKARSKY – VERSIÓN DIGITAL

Como se describió en la sección anterior, la experiencia de Burch-Tokarsky, es una de las clásicas basadas en el registro fotográfico de los specklegrams. Esto, involucra el proceso de revelado de placas fotográficas, que más allá de las cuestiones relacionadas con las técnicas de revelado, se han ido reemplazando en la actualidad, por sensores digitales y ya casi es imposible encontrar un laboratorio de revelado fotográfico.

En esta sección se describe la experiencia de Burch y Tokarsky donde el registro y procesamiento de los diagramas de speckle se realiza digitalmente, reemplazando el proceso fotográfico clásico. Además, el montaje óptico de la Figura 5.25, necesario para observar el espectro del negativo, que consiste esencialmente en las clásicas franjas de Young a partir de las cuales se mide el desplazamiento del objeto, es también reemplazado por un procesamiento digital. Mediante la aplicación sucesiva de la FFT (Fast Fourier Transform), se obtienen las franjas de Young y el mapa de fase correspondiente que permite medir automáticamente el desplazamiento en cuestión. La adaptación digital de esta experiencia fue desarrollada por el Dr. Germán Salazar, actual investigador de CONICET, en oportunidad de la realización de su Tesis de Licenciatura en Física [5.10, se incluye el capítulo 3, como material bibliográfico complementario] y aquí se trascibe todo el proceso con el objeto de mostrar la evolución histórica ya que en la actualidad se desarrolla bajo entorno Visual Basic, usando librerías MATROX-PULSAR, como se describe en la sección de desarrollo experimental para este tema.

El dispositivo experimental utilizado, se muestra en la Figura 5.27, siendo los elementos constituyentes, todos disponibles en el Laboratorio de Metrología Óptica del GOL:

- 1) Láser de He-Ne : Spectra-Physics modelo 127 , de 35 mW .
- 2) Expansor : Melles Griot , con una lente de distancia focal de 4 mm.
- 3) Difusor : placa de vidrio despolido.
- 4) Lente colimadora: distancia focal de 500 mm.
- 5) Cámara CCD : Electrim EDC 1000N .
- 6) Desplazador nanométrico Melles Griot (Nanomover): *apreciación* = 0,001 mm.

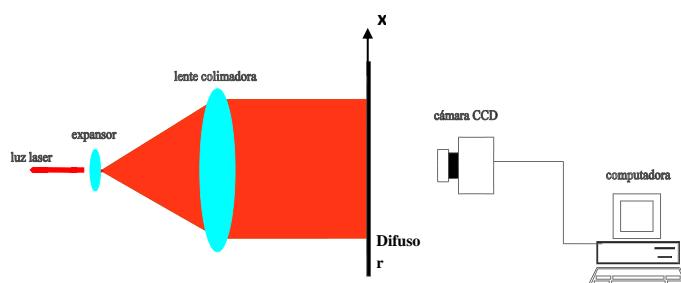


Figura 5.27: Dispositivo Experimental, experiencia de Burch - Tokasky Digital.

Se registró, con la cámara CCD, la imagen del difusor, iluminado por un haz paralelo. Esta imagen corresponde al campo de speckle original. Luego, se desplaza el difusor una cierta distancia en el eje  $x$ , y se registra nuevamente la imagen del difusor. Para producir los desplazamientos, se utilizó un “nanomover”, arriba descripto. Para cada desplazamiento se registraron las imágenes variando la apertura focal de la lente de la cámara CCD, para ajustar el tamaño del grano de speckle.

Utilizando el programa de procesamiento de imágenes ADOBE v. 4.0, se sumaron las imágenes correspondientes a cada par por desplazamiento. A modo de ejemplo, en la Figura 5.28 se muestran dos specklegramas típicos y el resultado de la suma. La imagen “suma” es procesada utilizando el software de procesamiento de imágenes, KHOROS. En este programa se diseñó un procedimiento que consta de los siguientes pasos:

1) Cambio de formato: es necesario en este caso por no coincidir el formato original de la imagen, 652 x 492 píxeles, con el que maneja KHOROS, 512 x 512 píxeles. Esto tiene su origen en el hecho de que, en este software, el algoritmo de la FFT está diseñado para tamaños de imágenes cuadradas potencias de 2.

2) Aplicación de una FFT (Fast Fourier Transform) a la imagen suma : el resultado es una imagen donde se aprecian franjas de Young. Una imagen de las mismas se muestra en la Figura 5.29. Este paso es equivalente a iluminar el negativo del specklegrama suma con un haz láser colimado, y registrar el espectro en el plano de Fourier, plano focal de la lente de la Figura 5.25. Las franjas de la Figura 5.29 corresponden a un desplazamiento de 1mm y para un número f/8 de apertura del diafragma de la cámara.

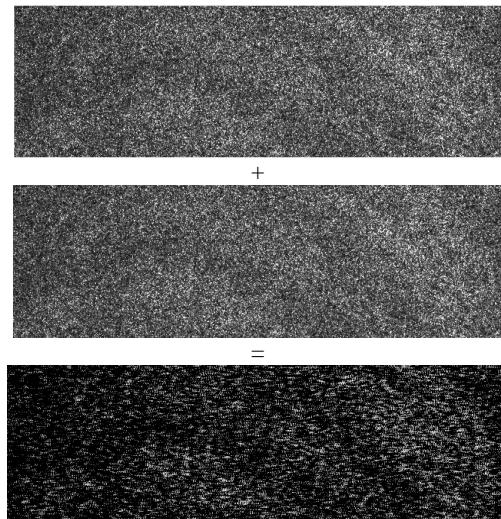


Figura 5.28: Specklegrams típicos, desplazado uno respecto del otro y el resultado de la suma digital.

La imagen muestra el módulo de la FFT pero el archivo correspondiente es una matriz de números complejos. A fin de realizar las operaciones siguientes, es necesario transformar a una matriz real, tomando el modulo.

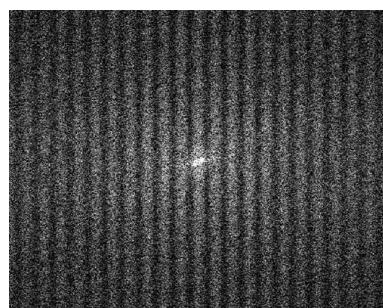


Figura 5.29: Specklegrams típicos, desplazado uno respecto del otro y el resultado de la suma digital

3) Nueva aplicación de una FFT a la imagen anterior: el resultado es una imagen donde se aprecia el espectro, es decir la distribución de frecuencias en el plano de Fourier. El espectro se muestra en la Figura 5.30.

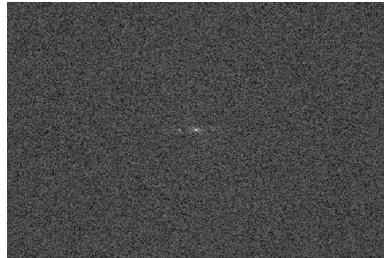


Figura 5.30: Espectro de las Franjas de Young

En el espectro se observa el halo de speckle en el centro y las frecuencias correspondientes a la función coseno a ambos lados.

4) Se diseña un filtro que nos permitirá obtener las franjas libres de speckle, para facilitar la obtención del mapa de fase a partir del cual se determinará el desplazamiento. El filtro consiste en una máscara que sólo deja pasar una de las frecuencias por ejemplo la de la derecha.

5) Aplicación de una FFT inversa: Al aplicar la antitransformada de Fourier, o FFT inversa, se obtiene una función compleja, necesaria para la obtención de la fase. Así reconstruimos la imagen de las franjas, pero sin el ruido de speckle.

6) Aplicación del comando PHASE: este es un comando que calcula la fase módulo  $2\pi$  de la matriz compleja, resultando del procedimiento anterior.

7) Aplicación del comando GRADIENT: este comando permite obtener las líneas que indican zonas de discontinuidad en el valor de la fase (saltos de fase).

8) Aplicación del comando RESAMPLE: convierte la última imagen de  $512 \times 512$  pixeles a una imagen de  $652 \times 494$  pixeles. Este paso es necesario para restablecer el tamaño de la imagen original. El resultado se muestra en la Figura 5.31.

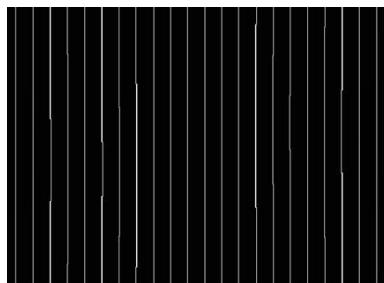


Figura 5.31: Mapa de gradiente de saltos de fase.

La información provista por el gradiente de saltos de fase, se debe relacionar con los desplazamientos sufridos por los patrones de speckle. En este sentido, debemos encontrar la manera de relacionarlos con otros parámetros que surgieron del análisis digital. Los parámetros separación angular de las franjas, y la longitud de onda de la luz, de la experiencia original, ahora no son representativos para obtener los valores de los desplazamientos realizados, dado que hemos trabajado con una transformación matemática y no óptica, como en la experiencia original. Para relacionar las magnitudes entre los espacios físicos de desplazamientos en el plano del difusor y su equivalente en el de frecuencias, se sigue el siguiente procedimiento:

La unidad de escala en el espacio de frecuencias,  $f$ , es igual a la frecuencia de muestreo  $f_m$  dividida por el numero total de datos (652), o sea:

$$f = \frac{f_m}{652} \text{ pix}^{-1} \quad (5.53)$$

La frecuencia espacial  $l$ , correspondiente a las franjas de Young, se obtiene multiplicando la expresión anterior por la separación  $L$  entre franjas

$$l = fL \quad (5.54)$$

El desplazamiento  $d$  del patrón de speckle, medido en píxeles en la imagen, será

$$d = \frac{1}{l} \quad (5.55)$$

Para obtener el desplazamiento real del difusor, debe multiplicarse esta distancia por el factor de magnificación, que es la relación entre distancia medida en el difusor (en milímetros) y las distancias correspondientes medidas en la pantalla de la computadora (en píxeles).

Para medir la magnificación, se realizó una marca en el difusor y se tomó una imagen del mismo. Luego se lo desplazó una cierta distancia conocida,  $(25,000 \pm 0,001) \text{ mm}$ , y se volvió a tomar una imagen del difusor. Estas imágenes se sumaron y se midió la distancia en píxeles que separaba las dos marcas, la que resultó ser 574 píxeles. Por lo tanto, el factor buscado resulta ser,  $25 \text{ mm}/574 \text{ píxeles} = 0,043554 \text{ mm/píxel}$ . Esto se hizo con el programa ADOBE PHOTOSHOP.

Los resultados obtenidos para todos los desplazamientos realizados se muestran en la Tabla I y en el gráfico de la Figura 5.32.

Tabla 1: Mediciones de desplazamiento. Burch - Tokasky

DESPLAZAMIENTO DEL DIFUSOR [mm]	DESPLAZAMIENTO CALCULADO [mm]	
	f/8	f/11
0	0	0
0,100	-	-
0,200	0,200	0,194
0,300	0,296	0,292
0,400	0,395	0,393
0,500	-	0,458
1,000	0,975	0,906

Los resultados obtenidos para f/8 y f/11 nos indican que el tamaño de speckle es más grande que el tamaño de pixel para esas aperturas, lo que garantiza que el desplazamiento pueda ser resuelto. Se puede observar que el método es bastante exacto, el máximo error en los desplazamientos es de 9%.

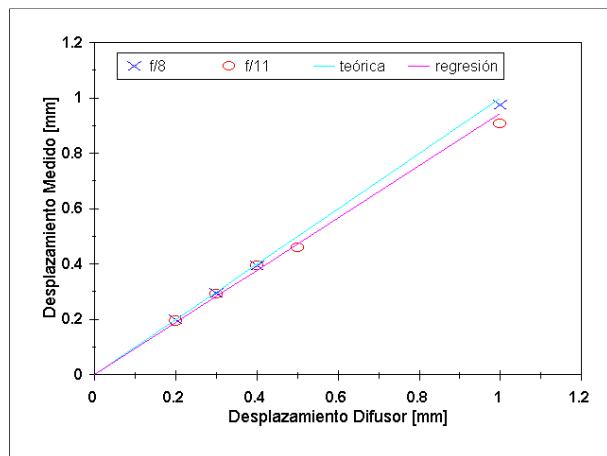


Figura 5.32: Desplazamiento medido vs desplazamiento del difusor

### 5.6.3 INTERFEROMETRÍA SPECKLE DIGITAL

La interferometría speckle resulta una herramienta de análisis muy útil que permite la realización de ensayos no destructivos en diversos campos tales como la metrología óptica, el control de procesos industriales, la inspección visual, etc. Una de las principales ventajas de esta técnica es que permite realizar registros a tiempo real, es decir visualizar el fenómeno y efectuar los registros mientras el fenómeno físico analizado se desarrolla.

El punto de partida de la interferometría speckle puede considerarse representado en el trabajo de Leendertz, quien utilizó un arreglo interferométrico similar al de un interferómetro de Michelson, pero donde los espejos fueron reemplazados por superficies difusoras  $S_1$  y  $S_2$ , como se muestra en la Figura 5.33.

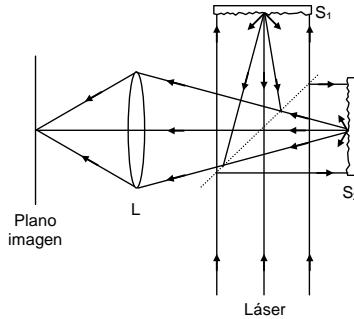


Figura 5.33: Interferometría Speckle. Experiencia de Leendertz

Se utiliza un sistema óptico de forma tal que las dos superficies se superponen en el plano imagen, lo que hace posible un registro fotográfico simultáneo de las mismas. Una de las superficies da origen a un diagrama de speckle  $D_1(x, y)$  y la otra a otro diagrama diferente  $D_2(x, y)$ . La adición coherente de estos dos diagramas de speckle aleatorios da como resultado un nuevo diagrama de speckle  $D_3(x, y)$ , con estadística similar a los anteriores pero distinto en los detalles.

Suponiendo a la superficie  $S_2$  de la Figura 5.33 como "fija" ó "de referencia" y que la superficie  $S_1$  se desplaza en la dirección de su normal, la fase de la luz dispersada por ella cambiará en todas partes una cantidad  $\delta$ . El nuevo diagrama de speckle resultante,  $D_3(x, y, \delta)$ , diferirá del anterior,  $D_3(x, y, 0)$  de acuerdo al valor que tome  $\delta$ . Esto significa que ha ocurrido una reducción en el grado de correlación de los diagramas de speckle, obtenidos antes y después de desplazar a  $S_1$ . Si  $\delta = (2N + 1)\pi$  con  $N$  entero, no habrá correlación entre ambos diagramas, pero si,  $\delta = 2N\pi$  entonces  $D_3(x, y, \delta) = D_3(x, y, 0)$  y los diagramas estarán nuevamente correlacionados. Conceptualmente, es posible pensar que, en este último caso, cada grano individual de speckle ha completado un número entero de ciclos brillante–oscuro para terminar en un estado idéntico al de partida. Si es posible detectar estas "posiciones de correlación", el interferómetro puede utilizarse para medir el cambio de fase o, equivalentemente, el desplazamiento sufrido por la superficie.

En la práctica puede procederse, por ejemplo, obteniendo un registro fotográfico del diagrama  $D_3(x, y, 0)$  antes de provocar el desplazamiento de la superficie  $S_1$  y, luego de revelar la placa, reposicionarla donde se encontraba al momento de obtener la fotografía. Como se trata de un negativo, las zonas oscuras de la placa fotográfica impedirán el paso de luz proveniente de las zonas claras que les corresponden y viceversa. Como resultado se obtiene una muy baja transmisión de luz por parte de la placa. La misma condición de baja transmisión ocurrirá siempre que la fase  $\delta$  haya variado un número entero de veces  $2\pi$  radianes, ya que en este caso los diagramas  $D_3(x, y, 0)$  y  $D_3(x, y, \delta)$  serán idénticos. Por otro lado, para variaciones de fase distintas de  $2N\pi$ , el diagrama de speckle  $D_3(x, y, \delta)$  diferirá del original registrado en la placa fotográfica y, como consecuencia de ello, habrá luz transmitida por la placa, ya que el nuevo campo de speckle y la máscara negativa no son coincidentes entre sí. Más aún, si  $\delta$  varía sobre la superficie  $S_1$ , por ejemplo porque la misma ha sido deformada, la máscara transmitirá luz en aquellas zonas donde el nuevo diagrama de speckle no está correlacionado con el que se encuentra registrado en ella, pero no transmitirá luz en las zonas donde existe correlación. Esto hace que la superficie aparezca cubierta por un diagrama de franjas que recorren zonas con  $\delta$  constante. Estas franjas se denominan, por lo tanto, *franjas de correlación de speckle*.

El método descripto (en el cual las franjas se obtienen “en vivo”), resulta un tanto impráctico debido a las dificultades que presenta el reposicionado del negativo en el sistema. La obtención de las franjas de correlación de speckle puede mejorarse aplicando la técnica de “restado fotográfico”. Leendertz, en su experiencia, procedió de éste modo, registrando los dos estados  $D_3(x, y, 0)$  y  $D_3(x, y, \delta)$  en placas separadas. Estos correspondían a una membrana metálica difusora, sujetada por los bordes, en reposo y con un gradiente de presión aplicado sobre ella respectivamente. A continuación realizó una copia positiva de una cualquiera de las placas y colocó cuidadosamente una sobre la otra. Finalmente iluminando al conjunto de placas por transmisión obtuvo un diagrama de franjas de correlación de speckle consistente en anillos concéntricos. El espaciado de estos anillos estaba en dependencia con la presión ejercida y, por lo tanto, con la deformación sufrida por la membrana. Sus resultados fueron corroborados por, en esa época, la más asentada técnica de interferometría holográfica. El trabajo de Leendertz demostró, por lo tanto, la posibilidad de extraer información metrológica por restado óptico de dos diagramas de speckle.

Es importante destacar el paralelismo existente entre esta técnica de correlación de diagramas de speckle y la holografía interferométrica en el plano imagen. La diferencia fundamental a favor de la primera de estas dos consiste en que no es necesario que el medio de registro pueda resolver muy altas frecuencias (aproximadamente 2000 líneas/mm) como se requiere para la holografía. El precio a pagar por ello es que las franjas de correlación aparecen inmersas en el ruido generado precisamente por el speckle, de este modo las franjas más finas se “ pierden” en el ruido de fondo, limitando así la resolución del método a una menor que la alcanzable holográficamente.

Para la implementación de los sistemas de interferometría speckle, como los que fueron tratados en los párrafos anteriores, el registro de la distribución de intensidades de los diagramas de speckle resulta un paso fundamental en el proceso global.

Las técnicas fotográficas de registro poseen ciertas ventajas como alta sensibilidad, buena resolución y capacidad de retener la información registrada durante largos períodos sin que ésta se altere considerablemente. Por otro lado, la necesidad de utilizar procedimientos químicos para el revelado, constituye la principal desventaja de las técnicas fotográficas convirtiéndolas en esencialmente lentas. Algunos métodos alternativos, como la utilización de láminas termoplásticas han sido propuestos y utilizados en reemplazo de las técnicas fotográficas. Sin embargo la resolución alcanzable con estos materiales es notablemente inferior. En el intento de simplificar los procedimientos para aplicaciones metrológicas surge a comienzos de los años 70 en la Universidad de Loughborough (Inglaterra) y en forma paralela en Stanford (USA) un cambio importante en la metrología speckle. En ese entonces, surge la posibilidad de implementar las técnicas básicas de holografía interferométrica utilizando un sistema de video en reemplazo del procesamiento fotográfico, con la ventaja adicional del procesamiento electrónico de las señales adquiridas. El principal objetivo de estos trabajos consistía en proveer sistemas rápidos, capaces de funcionar en régimen continuo o próximo a él, para la inspección de piezas “en línea”, mientras éstas eran fabricadas. La técnica resultante, que incluía un haz de referencia fijo, proveyendo así la sensibilidad interferométrica de la holografía, surge entonces de la fusión y evolución de la interferometría speckle y la holografía interferométrica y fue denominada originalmente interferometría speckle electrónica (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI, en el idioma original). En los inicios de la aplicación de la técnica ESPI el sistema estándar utilizado para la detección estaba conformado por un sistema de video, en el que el registro, almacenamiento y visualización era realizado por sistemas físicamente separados. Actualmente las tarjetas adquisición y procesamiento de imágenes son dispositivos que integran las computadoras personales y desde principios de los 90 el creciente desarrollo tecnológico ha permitido la implementación de nuevos sensores matriciales de detección, como las cámaras de estado sólido CCD (Charged Coupled Device) o los de tecnología CMOS (Complementary Metal –Oxide - Semiconductor). En la actualidad el poder de resolución típico de estos sensores supera los cientos de megapixeles.

De acuerdo a las características del speckle, como se vio en la sección anterior, la pupila del sistema óptico determina el tamaño del grano, por lo que en el caso de la implementación de la técnica ESPI dicha pupila no puede elegirse arbitrariamente grande, sino que debe reducirse de modo tal que el tamaño de los granos de speckle crezca hasta que éstos puedan ser resueltos por la cámara. De otro modo la señal en cada elemento corresponderá a un promedio sobre más de un grano de speckle, originándose así una pérdida en el contraste del diagrama. En un sistema CCD la

señal luminosa recibida en un área elemental, píxel, es integrada durante el tiempo que el sistema electrónico demora en realizar un barrido completo de todo el detector. Las imágenes pueden ser actualizadas entonces muy rápidamente pero, simultáneamente el tiempo máximo de exposición queda fijo, de modo que el brillo de la superficie que se está examinando debe ser alto, para que la relación señal/ruido a la salida del detector sea apreciable. Este problema de la relación señal/ruido en los sistemas ESPI ha sido profundamente estudiado, entre otros autores, por C. Wykes quien encontró un valor máximo para esta relación cuando la apertura de la lente es tal que el diagrama de speckle está justo en el límite de ser completamente resuelto y cuando el cociente de las intensidades correspondientes a los haces objeto y referencia es tal que este último no supera en intensidad al primero por más de un factor de 1,7. Asimismo C. Wykes demostró que debido a los limitados rangos dinámicos de las cámaras, para evitar pérdidas de información debidas a la saturación del detector por excesiva iluminación, es necesario mantener valores de iluminación total tales que la intensidad media del haz objeto en el detector sea del orden del 15 % del valor requerido para saturarlo. Este valor aparentemente bajo surge del hecho que en un diagrama de speckle ocurren fuertes variaciones de intensidad, que pueden saturar localmente al detector de la cámara aun cuando, en promedio, la intensidad del haz objeto sea baja.

Finalmente, la señal proveniente de la cámara es amplificada y mostrada en el monitor. El paso importante aquí es que, antes de que la señal alcance el monitor, puede ser procesada electrónicamente para mostrar finalmente el resultado de alguna operación deseada. En los sistemas ESPI que reemplazan a los sistemas interferometría speckle con registro fotográfico, luego de que una imagen del estado inicial del objeto a analizar ha sido almacenada, las imágenes registradas a continuación son restadas punto a punto de la imagen inicial de referencia antes de que el resultado aparezca en el monitor, siguiendo siempre la idea original de Leendertz. Si existe algún cambio de fase en porciones o puntos equivalentes de la imagen de referencia respecto a la que es registrada en un determinado instante posterior, debido a que el objeto sufrió modificaciones o se varió la dirección de iluminación del haz objeto, la resta de las dos imágenes dará, en estos puntos un resultado variable según sea la magnitud del cambio de fase. Así, donde la fase haya variado múltiples enteros de  $2\pi$  radianes, los diagramas de speckle de ambas imágenes coincidirán y la resta dará un resultado nulo que aparecerá oscuro en el monitor. Para aquellas zonas donde el cambio de fase no resulte múltiplo de  $2\pi$  radianes, la intensidad correspondiente en el monitor variará según sea el caso. La imagen del objeto en el monitor aparecerá entonces modulada por franjas ubicadas en las zonas donde se ha producido el mismo cambio de fase.

Actualmente, la denominación interferometría speckle electrónica ha sido reemplazada por interferometría speckle digital (Digital Speckle Pattern Interferometry, DSPI, en el idioma original) que indica que el almacenamiento y procesamiento de las imágenes se realiza digitalmente en una computadora auxiliar dotada de un sistema dedicado al procesamiento de imágenes. Por otra parte, a través del desarrollo tecnológico, nuevos dispositivos electrónicos y de procesamiento digital permiten un notable mejoramiento en el análisis automático de los patrones de franjas, lo cual otorga más ventajas a la técnica. En forma particular, la aplicación de técnicas de filtrado permite mejorar el contraste de las franjas en casos en los que, por ejemplo, el tamaño medio de los granos de speckle sea menor que la resolución espacial de la cámara.

En un esquema básico de los sistemas de interferometría speckle digital el objeto a ser estudiado es iluminado por un haz láser convenientemente expandido y una imagen de dicho objeto se forma por el sistema óptico de una cámara de video sobre el elemento fotosensible de ella. En la Figura 5.34 se muestra el esquema de un dispositivo experimental para la implementación de la interferometría speckle digital.

El haz que ilumina al objeto se denomina haz objeto, y es coherente con otro haz generado por el divisor de haz  $DH_1$  que se expande y es dirigido por medio de otro divisor de haz  $DH_2$  hacia el fotosensor CCD. De este modo la intensidad en un punto  $\vec{r}$  del plano imagen está representada por:

$$I_1(\vec{r}) = U_O(\vec{r})U_O^*(\vec{r}) + U_R(\vec{r})U_R^*(\vec{r}) + U_O(\vec{r})U_R^*(\vec{r}) + U_R(\vec{r})U_O^*(\vec{r}) \quad (5.56)$$

en donde

$$\begin{aligned} U_O(\vec{r}) &= A_O(\vec{r})e^{i\phi_O(\vec{r})} \\ y \\ U_R(\vec{r}) &= A_R(\vec{r})e^{i\phi_R(\vec{r})} \end{aligned} \quad (5.57)$$

representan las amplitudes complejas de los haces objeto y referencia respectivamente.

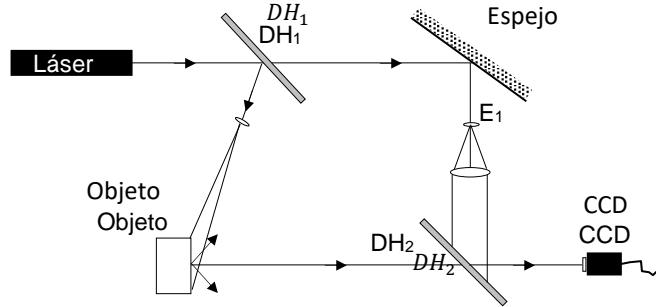


Figura 5.34: Dispositivo experimental Interferometría Speckle.

Si la superficie es óptimamente rugosa, es decir las variaciones de espesor de la superficie son mayores que una longitud de onda de la luz utilizada, como suele ser el caso en este tipo de experiencias, los valores de  $A_O$  y  $A_R$  varían en forma aleatoria, dando lugar a la formación de un diagrama de speckle.

Luego de que la imagen del objeto, correspondiente a la intensidad  $I_1(\vec{r})$  se almacena mediante el sistema de adquisición de imágenes, se introduce una variación de fase en el haz objeto ya sea deformando al objeto mismo o modificando la iluminación. La amplitud compleja que representa al haz objeto es, en estas condiciones será:

$$U'_O(\vec{r}) = A_O(\vec{r})e^{i[\phi_O(\vec{r}) + \Phi(\vec{r})]} = U_O(\vec{r})e^{i\Phi(\vec{r})} \quad (5.58)$$

en donde  $\Phi(\vec{r})$  representa el cambio de fase producido. La nueva intensidad registrada por la cámara vendrá dada por:

$$I_2(\vec{r}) = U_O(\vec{r})U_O^*(\vec{r}) + U_R(\vec{r})U_R^*(\vec{r}) + U_O(\vec{r})U_R^*(\vec{r})e^{i\Phi(\vec{r})} + U_R(\vec{r})U_O^*(\vec{r})e^{-i\Phi(\vec{r})} \quad (5.59)$$

Omitiendo la dependencia con la posición en las amplitudes complejas y restando la intensidad de la segunda imagen (ec. 5.59) de la de la primera (ec. 5.56) se obtiene:

$$I_2 - I_1 = U_O U_R^* [1 - e^{i\Phi(\vec{r})}] + U_R U_O^* [1 - e^{-i\Phi(\vec{r})}] \quad (5.60)$$

Reemplazando las ec. 5.48 en 5.57 se tiene:

$$[I_2 - I_1] = 4A_O A_R \operatorname{sen} [\phi(x, y) + \frac{\Phi}{2}] \operatorname{sen} \frac{\Phi}{2} \quad (5.61)$$

De la ec. 5.61 puede verse que en aquellos puntos de la superficie donde el cambio de fase  $\Phi$  introducido es nulo o múltiplo entero de  $2\pi$ , la intensidad resultante será nula, mientras que para otros valores de la intensidad resultante será distinta de cero, presentando una variación sinusoidal.

En un sistema de interferometría speckle digital el resultado del módulo de la diferencia calculada por la ec. 5.61 se muestra a través del monitor del sistema de adquisición, ya que no es posible representar intensidades de valores negativos. La imagen muestra al objeto cubierto por un diagrama de speckle modulado por un sistema de franjas sinusoidales cuyos mínimos recorren las zonas donde  $\Phi(\vec{r}) = 2N\pi$ . El contraste del speckle será máximo justamente entre dos mínimos de las franjas, correspondiente a  $\Phi(\vec{r}) = (2N + 1)\pi$ , lo que puede interpretarse como los lugares donde la fase es tal que las franjas presentan máximos de intensidad.

#### 5.6.4 FUENTES DE ERRORES

Los interferogramas normalmente se ven afectados por una serie de factores que pueden generar algún tipo de distorsiones en la visibilidad y resolución del patrón de interferencia. Algunos de ellos son susceptibles a ser tratados a través de técnicas de procesamiento digital de imágenes. Rescribiendo la distribución de intensidad teniendo en cuenta algunos de los factores más destacados se tiene:

$$I(x, y) = I_0(x, y)[1 + V(x, y)\cos\Phi(x, y)]R_S(x, y) + R_E(x, y) + R_D(x, y) \quad (5.62)$$

donde

$I_0(x, y)$  representa la intensidad de fondo causada por cambios en la iluminación;

$V(x, y)$  es la visibilidad de franjas que está influenciada por naturaleza del speckle y por la relación de amplitudes de los haces objeto y de referencia;

$R_S(x, y)$  describe la variación de contraste debida a los speckles;

$R_E(x, y)$  representa el ruido electrónico que varía en el tiempo debido a las componentes electrónicas del sistema de adquisición y procesamiento; y finalmente

$R_D(x, y)$  describe patrones de difracción de las partículas de polvo presentes en los caminos ópticos.

En el Capítulo 3 se proporcionan algunas herramientas de procesamiento digital de imágenes para la evaluación de interferogramas.

Dentro de los factores que pueden originar una iluminación de fondo no uniforme, se puede mencionar la utilización de haz láser expandido que produce una variación de fondo de baja frecuencia. Por otro lado, también pueden producirse variaciones de frecuencias espaciales mayores debidas principalmente a fluctuaciones de la reflexibilidad en la superficie del objeto o a cambios de la sensibilidad del sensor empleado para el registro. Otra fenómeno importante que suele afectar a esta intensidad es la existencia de patrones de difracción espurios o de interferencias parásitas generados por ejemplo por la presencia de partículas de polvo en los caminos ópticos de los haces.

El ruido electrónico, es producido por las fluctuaciones aleatorias de voltaje y corriente en los dispositivos fotodetectores usados para el registro. El ruido electrónico surge de una suma de numerosos procesos aleatorios que varían en función del tiempo. Dada esta característica desde el punto de vista estadístico, es posible disminuir sus efectos tomando el promedio de una secuencia que patrones de interferencia registrados a diferentes instantes de tiempo. La relación señal/ruido puede llegar a aumentar en un factor  $\sqrt{n}$ , donde  $n$  es el número de patrones de interferencia promediados. En el modelo considerado para la intensidad correspondiente a un interferograma está representado por el término  $R_E(x, y)$ .

La decorrelación del speckle se produce principalmente por variaciones aleatoria de la fase aleatoria, entre los speckles individuales. Este fenómeno determina una disminución en la visibilidad de las franjas de correlación. De hecho, se ha demostrado que la visibilidad del patrón de franjas resulta proporcional al coeficiente de correlación. A continuación, se considera un modelo sencillo pero adecuado para la explicación del proceso de decorrelación.

Teniendo en cuenta la amplitud compleja en el plano de observación antes del registro:

$$U_1 = A_1(\vec{r})e^{i\phi_1} \quad (5.63)$$

y después del registro:

$$U_2 = A_2(\vec{r})e^{i(\phi_2 + \Delta\Phi)} \quad (5.64)$$

si  $A_1 = A_2$  y  $\phi_1 = \phi_2$  las amplitudes estarán correlacionadas cuando  $\Delta\Phi = 2N\pi$ . A fin de analizar la decorrelación resulta útil considerar el coeficiente de correlación de  $U_1$  y  $U_2$  que está definido como:

$$\Gamma(U_1 U_2^*) = \frac{\langle U_1 U_2^* \rangle - \langle U_1 \rangle \langle U_2^* \rangle}{\langle U_1 \rangle^{1/2} \langle U_2 \rangle^{1/2}} \quad (5.65)$$

que puede reescribirse como:

$$\Gamma(U_1 U_2^*) = \frac{\langle U_1 U_2^* \rangle}{\langle I \rangle} \quad (5.66)$$

bajo el supuesto caso que  $\langle U_1 \rangle = \langle U_2 \rangle = 0$  y  $\langle U_1^2 \rangle = \langle U_2^2 \rangle = \langle I \rangle$ .

En interferometría speckle la visibilidad de las franjas está dada por  $Re\{\langle U_1 U_2 \rangle\}$  que según las ecuaciones anteriores puede escribirse como:

$$Re\{\langle U_1 U_2 \rangle\} = \langle I \rangle Re\{\Gamma(U_1 U_2)\} \quad (5.67)$$

La ec. 5.67 supone que  $\Delta\Phi$  es constante a través de un grano de speckle y esto es correcto siempre que el tamaño de las franjas sea mucho mayor que el tamaño del grano de speckle. A medida que el tamaño de las franjas se approxima al tamaño del grano de speckle, lo anterior ya no es válido y el valor de  $\Gamma(U_1 U_2)$  tiende a cero.

Suponiendo que la fase varía a través del grano solo en una dirección y que la luz que llega a un punto del plano imagen es dispersada por una línea que contiene  $n$  dispersores puntuales. La amplitud compleja  $U_1$  está dada por:

$$U_1 = A_1 \sum_{k=-M}^M e^{i\psi_k} \quad (5.68)$$

donde  $\psi_k$  es la fase aleatoria asociada al  $k$ -ésimo dispersor puntual y se elige  $(2M+1) = n$ . Cuando se introduce el cambio de fase correspondiente al segundo estado se asume que su valor varía linealmente a lo largo de un elemento dispersor individual por lo que el cambio de fase en el  $k$ -ésimo punto de un dado elemento está dado por:

$$\Delta\Phi = \chi_0 + \frac{1}{2}k\Delta\chi \quad (5.69)$$

donde  $\chi_0$  es el cambio de fase en el centro del elemento dispersor. Así la amplitud en el plano imagen ahora es:

$$U_2 = A_1 \sum_{k=-M}^M e^{i(\psi_k + \chi_0 + \frac{1}{2}k\Delta\chi)} \quad (5.70)$$

Con lo que el coeficiente de correlación queda:

$$\Gamma = \frac{\langle A_1 \sum_k \sum_p e^{i((\psi_k - \psi_p) + \chi_0 + \frac{1}{2}k\Delta\chi)} \rangle}{\langle U_1 U_1 \rangle^{1/2} \langle U_2 U_2 \rangle^{1/2}} \quad (5.71)$$

Que se reduce a:

$$\Gamma = \frac{e^{i\chi_0}}{n} \sum_{k=-M}^M e^{i\frac{1}{2}k\Delta\chi} \quad (5.72)$$

y que puede escribirse como:

$$\Gamma = Ze^{i\chi_0} \quad (5.73)$$

donde

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{k=-M}^M e^{i\frac{1}{2}k\Delta\chi} = |Z| e^{i\alpha} \quad (5.74)$$

Así la parte real del coeficiente de correlación está dado por:

$$Re(\Gamma) = |Z| (\cos\chi_0 \cos\alpha - \sin\chi_0 \sin\alpha) \quad (5.75)$$

Ahora bien, la sumatoria de la ecuación 5.74 puede escribirse como:

$$|Z| = \frac{1}{n} \left[ \frac{\sin\left(\frac{n\Delta\chi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\chi}{2}\right)} \right] \quad (5.76)$$

Si  $N$  es el número de speckles por franja:

$$n\Delta\chi = \frac{2\pi}{N} \quad (5.77)$$

Como por lo general  $n \gg 1$ ,  $\Delta\chi$  es pequeño, con lo que la ecuación (5.71) puede escribirse:

$$|Z| = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{N}\right) \quad (5.78)$$

Como puede apreciarse cuando  $N = 1$ ,  $\text{Re}(\Gamma) = 0$  es cero y entonces no se observan franjas de interferencia. Experimentalmente se encuentra que para tener una óptima visibilidad de franjas, el valor de  $N$  debería ser mayor que 5.

La decorrelación de speckle también se puede generar a partir de desplazamientos. La decorrelación de speckle debida a desplazamientos en el plano, pueden determinarse considerando que el patrón de speckle se mueve en el sentido opuesto a dicho desplazamiento en el plano imagen y que guarda proporción con el aumento del sistema formador de imagen empleado. Un desplazamiento pequeño comparado con la resolución de píxel, genera pequeños cambios en el patrón de speckle en un punto dado. Es posible demostrar que el patrón de speckle en un determinado punto está totalmente decorrelacionado cuando el objeto se desplaza una cierta cantidad  $\Delta x$ , igual a la resolución del diámetro.

$$\Delta x = \frac{1}{m D} f \lambda \quad (5.79)$$

Donde  $m$  es el aumento,  $D$  es el diámetro de la lente, y  $f$  es la distancia focal de la misma. Como puede apreciarse cuanto mayor es el aumento del sistema óptico usado, menor suele ser la traslación en el plano que produce una decorrelación del speckle. El efecto de este fenómeno en la intensidad del interferograma se considera en el término  $V(x, y)$ , relacionado con la visibilidad.

Otras de las posibles fuentes de error en las mediciones, se vinculan con la digitalización y la cuantización. El registro de los interferogramas en formato digital se lleva a cabo con una cámara CCD. O sea, la intensidad registrada es digitalizada en una matriz de  $M \times N$  y cuantizada en  $L$  niveles de gris discretos. Los números  $M$  y  $N$  correspondientes al proceso de digitalización imponen un límite superior a la densidad de franjas de correlación a ser registrada. De acuerdo al teorema del muestreo, ver Sección 2, se requieren más de dos puntos de registro por franja. Esto supone detectores puntuales ideales, pero en un sensor CCD real los elementos detectores tienen un tamaño finito. Por lo tanto, en términos del teorema del muestreo en los sensores reales es necesario considerar del orden de 3 a 5 pixeles por franja, para poder realizar una buena evaluación. Otra consideración importante al momento de analizar los efectos de la digitalización es el tamaño del grano de speckle. El mismo debe ser más chico que el menor de los períodos de franja al menos en un factor de 10. Cuando se registra la intensidad de un interferograma, la señal de video analógica se convierte en una señal digital de niveles discretos a través de un conversor análogo-digital.

Los cambios en las condiciones del medio en el que se realiza la experiencia tales como, vibraciones, acústica y turbulencias del aire pueden influir en la calidad de los interferogramas. Los dos primeros afectan al sistema en forma mecánica y en el caso de las turbulencias, se produce una variación en la distribución del índice de refracción del aire. En ambos casos se alteran en forma aleatoria las longitudes de camino óptico. En forma particular esto resulta crítico en el caso del análisis del fenómeno estudiado a tiempo real. Por ello es importante el uso del equipamiento adecuado que garantice cierta estabilidad, tales como mesa holográfica y soportes con sistema de ajuste para sujetar las componentes ópticas. Por otro lado para tiempos de exposición prolongados, y dado que el registro de los interferogramas tiene implícita una integración en el tiempo, puede observarse una disminución del contraste del patrón de franjas.

Al igual que con la técnica de Interferometría Holográfica a continuación se muestran los resultados de aplicar la Interferometría Speckle Digital a casos estudiados en el laboratorio GOL y cuyos resultados han sido publicados en diferentes revistas científicas.

### 5.7.1 DETERMINACIÓN DE CURVAS DE CONCENTRACIÓN

En esta aplicación es de interés la medición del coeficiente de difusión en soluciones salinas [5.12], este parámetro que caracteriza la velocidad con la que una solución más concentrada difunde en una de menor concentración es de particular importancia en el control de los gradientes salinos en posas solares por dar un ejemplo práctico. En esta aplicación de aplica la técnica de doble exposición como se explica a continuación.

El dispositivo experimental se muestra en la Figura 5.35. La celda de difusión es un recinto de sección rectangular uniforme cuya dimensión mayor coincide con la dirección de difusión (vertical). El haz objeto es un haz paralelo que incide normalmente a la ventana de entrada, la cual es transparente, en tanto que la de salida, paralela a la anterior es difusora. El haz de referencia expandido incide sobre otro difusor translúcido, colocado a  $90^\circ$  respecto de la ventana de salida. La luz dispersada por los difusores se superpone a la salida del interferómetro, por medio de un segundo divisor de haz colocado a  $45^\circ$  de ambos. La imagen del difusor se forma sobre el sensor CCD y el diafragma del objetivo se regula a fin de obtener un tamaño de grano de speckle adecuado.

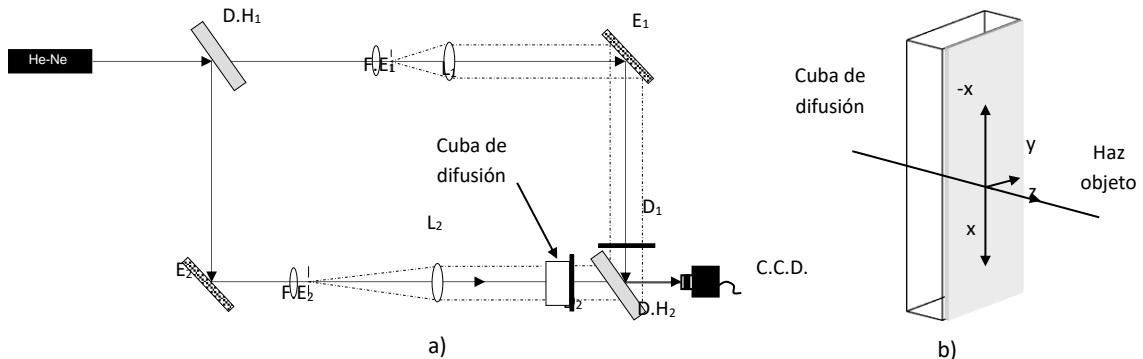


Figura 5.35 a) Vista en planta del arreglo experimental: D.H., divisor de haz; F.E., filtro espacial; L, lente; E, espejo; D, difusor. b) Cuba de difusión y sistema de referencia.

La ubicación del difusor en la ventana de salida es una mejora respecto de otros dispositivos, ya que de esta manera se logra una disminución importante de los efectos de refracción, al quedar minimizada la desviación de los rayos al pequeño recorrido dentro de la celda. La solución más concentrada, es decir la de mayor densidad, se coloca en la parte inferior de la celda y la de menor concentración se vierte lentamente en la superficie libre de aquella de manera que se forma una interfaz, constituyendo este estado la condición inicial para el fenómeno de difusión del soluto.

Establecido el escalón de concentración correspondiente al tiempo  $t = 0$ , se permite evolucionar el sistema hasta un tiempo posterior  $t_1$  en el que se registra el patrón de speckle correspondiente. Se vacía la celda y se la llena con solvente puro registrándose un segundo patrón de speckle, que se resta digitalmente del anterior. Es decir, el estado correspondiente al tiempo  $t_1$  se compara con un estado de referencia de concentración uniforme  $C_0$ . Así a partir de las franjas de correlación de speckle como las de la Figura 5.36 es posible obtener la distribución de concentración al tiempo  $t_1$ . En este caso la franja de orden cero corresponde a la zona de solvente puro. Como el índice de refracción varía solo en la dirección  $x$ , la ecuación para una franja brillante vendrá dada por:

$$\Delta n(x, t_1) = n(x, t_1) - n_0 = \frac{N(x)\lambda}{d} \quad (5.80)$$

donde  $\Delta n$  es la variación del índice de refracción del medio respecto de  $n_0$ , índice de refracción del solvente puro,  $n(x, t_1)$  es la distribución de índice de refracción al tiempo  $t_1$ ,  $N(x)$  es el orden de interferencia,  $d$  es el espesor de la celda de difusión y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz utilizada. Algo muy importante a tener en cuenta es que el

número total de franjas de correlación que aparecen en el interferograma depende del espesor de la celda y de la diferencia de índices de refracción correspondientes a las concentraciones extremas,  $C$  y  $C_0$ , en tanto que la separación entre ellas dependerá del tiempo  $t_1$ , que da la extensión en la dirección  $x$  del gradiente de concentración. En este caso la variación de fase a la salida de la celda,  $\Delta\phi(x, t_1)$ , resulta proporcional a la variación de índice de refracción,  $n(x, t_1) - n_0$  y por ende, en el supuesto que exista una relación lineal, a la distribución de concentración,  $C(x, t_1)$ .

Los interferogramas se procesan en mediante un método de evaluación automática basado en la transformada de Fourier, como se describió en la Sección 2.11. Como resultado de esta etapa se obtiene la distribución unidimensional de fase continua que viene dada por:

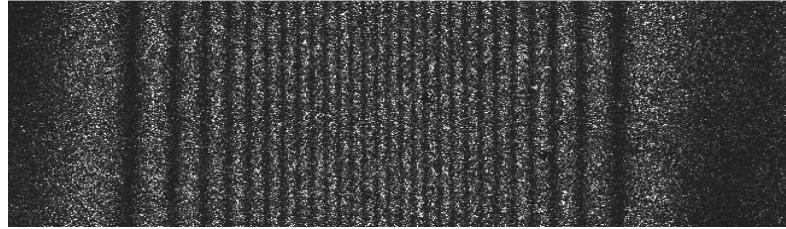


Figura 5.36: Patrón de franjas de correlación de speckle correspondiente a una experiencia de difusión.

$$\phi(x, t_1) = bC(x, t_1) \quad (5.81)$$

y

$$\phi(x, t_1) = bC_0 \quad (5.82)$$

donde  $b$  es una constante. Así la distribución de fase normalizada es:

$$\frac{\phi(x, t_1)}{\{\phi(x, t_1)\}_{max}} = \frac{C(x, t_1)}{C_0} \quad (5.83)$$

El término de la derecha de esta última expresión, obtenido de los mapas de correlación de speckle nos da la distribución de fase en función de la posición, la que se muestra en la Figura 5.37.

El proceso de difusión está gobernado por las leyes de Fick,

$$F = -D \frac{\partial C}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (5.84)$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión. Para las condiciones de borde establecidas para este experimento:

$$\begin{aligned} C &= C_0 && \text{para } x < 0 \\ C &= 0 && \text{para } x > 0 \end{aligned} \quad (5.85)$$

La solución analítica es:

$$\frac{C(x, t)}{C_0} = 0,5 \operatorname{erfc} \left[ \frac{x}{(4Dt)^{1/2}} \right] \quad (5.83)$$

Como la curva teórica dada por la ec. 5.83 depende del valor de  $D$ , en una planilla de cálculo, se parte de un valor arbitrario y se lo modifica hasta lograr el mejor ajuste entre las curvas teóricas y experimental. De esta manera se obtiene el mejor valor del coeficiente de difusión. En la Figura 5.37 se muestran las curvas teórica y experimental.

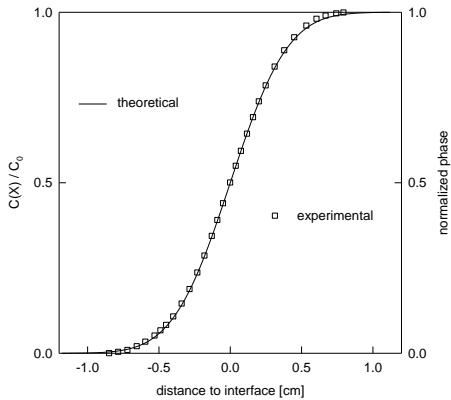


Figura 5.37: Curvas teórica y experimental.

En gráfica, solo se han representado algunos puntos de la distribución de fase normalizada a los fines de mostrar el ajuste entre ambas.

### 5.7.2 ANALISIS DE VIBRACIONES

En esta aplicación se implementa la técnica de interferometría speckle digital promediada en el tiempo para la visualización y determinación de vibraciones mecánicas de placas, con el objeto de comparar los resultados que arroja dicha técnica con aquellos obtenidos por métodos numéricos [5.11]. El objeto de análisis consiste en una placa trapezoidal de espesor constante, montada en cantiléver en un borde, sujetada a una carga periódica y sometida a resonancia acústica a través de una fuente sonora conectada a un generador de onda sinusoidal de frecuencia variable. En este caso se aplica la técnica de interferometría speckle digital a tiempo real para que la visualización de los interferogramas permita la sintonización de los modos normales de vibración, con lo cual es posible la determinación de las frecuencias resonantes. El dispositivo experimental utilizado en este caso se muestra en la Figura 5.38.

El haz se expande y se colima a través de la lente  $L_1$  y se ilumina la superficie del objeto. En la figura, los vectores  $\vec{K}_s$  y  $\vec{K}_b$  definen las direcciones de iluminación y observación, ver definición del vector sensibilidad (Sección 5.2) definen las direcciones de iluminación y observación respectivamente. El otro haz se expande y se hace pasar a través del difusor  $D$  a fin de generar el haz de referencia. Este haz y el haz objeto se recombinan mediante un segundo divisor de haz,  $D.H_2$ , de tal manera que ambos inciden sobre el sensor CCD. A fin de mejorar el contraste se coloca un polarizador  $P$  delante del segundo divisor de haz.

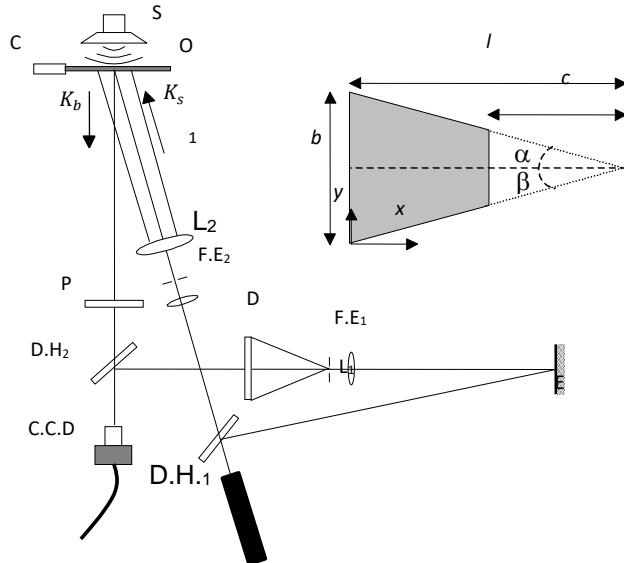
Al inicio de la experiencia, cuando el objeto se encuentra en equilibrio estacionario, la intensidad  $I_0(x, y)$  producida por la interferencia de los patrones de speckle de los haces objeto y referencia se registra por el sensor CCD y se almacena en la memoria de la computadora. Esta intensidad viene dada por:

$$I_0(x, y) = I_{obj}(x, y) + I_{ref}(x, y) + 2[I_{obj}(x, y) I_{ref}(x, y)]^{\frac{1}{2}} \cos\phi(x, y) \quad (5.84)$$

donde  $I_{obj}(x, y)$  y  $I_{ref}(x, y)$  son las intensidades de los haces objeto y de referencia en el punto  $(x, y)$  y  $\phi(x, y)$  es la diferencia de fase aleatoria entre ambos haces. Cuando el objeto vibra sinusoidalmente en uno de sus modos resonantes [5.6], a una determinada frecuencia  $f$ , y considerando direcciones de iluminación y observación normales, es decir  $\vec{K}_s = \vec{K}_b$ , el cambio de fase del haz objeto está dado por:

$$\Phi(x, y, t) = k(x, y) \operatorname{sen}(2\pi f t) \quad (5.85)$$

Figura 5.38 Dispositivo experimental para la visualización de modos normales de vibración: O, objeto; S, generador de audio; C,



soporte; P, polarizador; D.H., divisor de haz; D, difusor; F.E., filtro espacial; E, espejo; L, lente. Se indican los parámetros geométricos de la placa.

Donde  $k(x, y) = 4\pi a(x, y)/\lambda$  en la cual  $a(x, y)$  es la amplitud de vibración en el punto  $(x, y)$  y  $\lambda$  es la longitud de onda del láser. Si el tiempo de integración del registro realizado por el sistema de video es mucho mayor que el período de vibración, las intensidades se promedian en un tiempo igual al tiempo de exposición del fotosensor, de manera que se pueden escribir:

$$I_{av}(x, y) = I_{obj}(x, y) + I_{ref}(x, y) + 2[I_{obj}(x, y)I_{ref}(x, y)]^{\frac{1}{2}} \cos[\phi(x, y)]J_0[k(x, y)] \quad (5.86)$$

en la cual  $J_0$  es la función de Bessel de orden cero de primera clase. El interferograma correspondiente a esta ecuación se almacena y se resta del interferograma correspondiente a la ec. 5.84 y el módulo de esta diferencia se muestra por pantalla. Este procedimiento provee información, acerca de la amplitud resultante; codificada en el patrón de franjas de correlación de speckle, a tiempo real y promediada en el tiempo.

Las franjas de contraste de speckle constante representan las regiones de la superficie del objeto con amplitudes de vibración constantes. Para sintonizar el modo normal correspondiente se varía la frecuencia hasta que se obtiene un patrón de franjas de correlación estacionario y se mide la frecuencia a partir del generador de onda, que ha sido previamente calibrado con un osciloscopio.

En la Figura 5.39 se muestran algunos de los interferogramas obtenidos para diferentes frecuencias de resonancia. En ella pueden observarse dos tipos de contraste en los patrones de speckle: las franjas oscuras representan regiones nodales, en tanto que las de menor contraste están relacionadas con la deformación producida por la vibración. También se muestran los patrones nodales y las formas modales obtenidos mediante métodos numéricos, llevados a cabo en el laboratorio del ICMASA de la Facultad de Ingeniería de la UNSa.

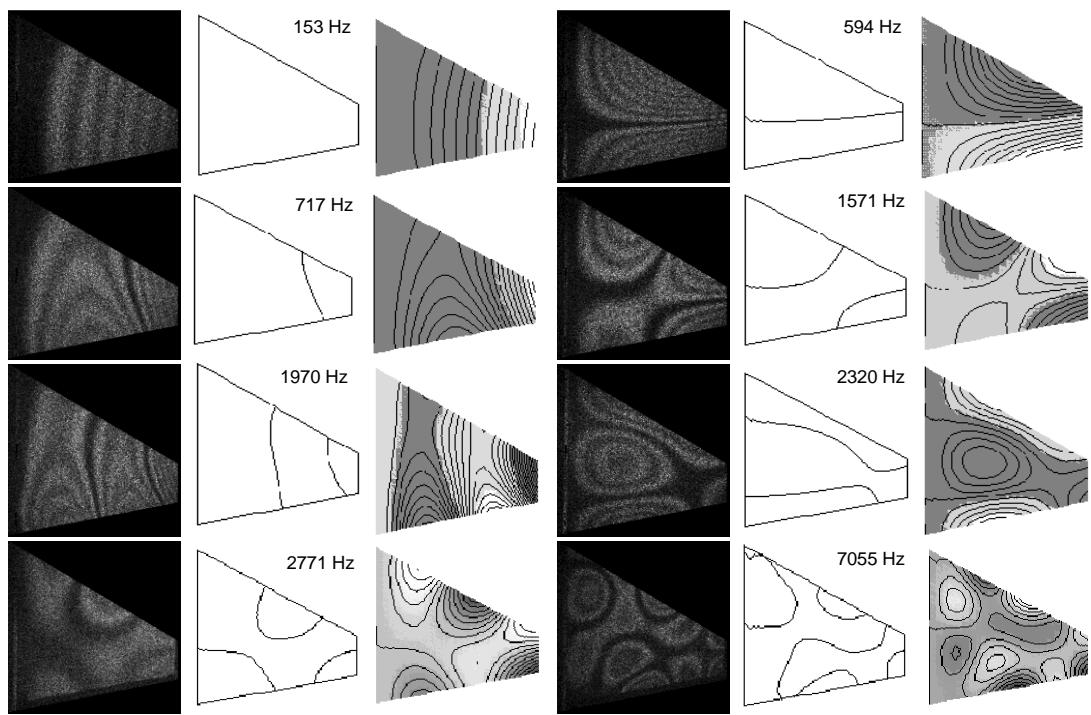


Figura 5.39 De izquierda a derecha: a) interferogramas; b) patrones nodales y c) formas nodales determinados por métodos numéricos. Se indican los valores de las frecuencias resonantes correspondientes.

## REFERENCIAS

- [5.1] D. Gabor. A New Microscopic Principle. *Nature* 161, 777-778. 1948
- [5.2] Joseph Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. 2da. Edición. McGraw Hill Companies. 1996
- [5.3] U. Schnars y W. Juptner. *Digital Holography*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005
- [5.4] G. Romero, C. Martínez, E. Alanís, Interferómetro Holográfico sencillo para demostraciones. *ANALES AFA*, v. 5, n. 1. 1993
- [5.5] E. E Alanís, G. G Romero, C.C. Martínez. Interferometría Holográfica: Estudio de un fluido en convección natural. *AFA (Revista de la Asociación Física Argentina)*. Vol 7, pp 31-35. 1995
- [5.6] C. Vest. "Holographic Interferometry", Chapter 1. John Wiley & Sons. USA. 1979
- [5.7] Goodmann, "Statistical Optics" John Wiley & Sons (1985)
- [5.8] R. P., Khetan, F.P. Chiang. "Strain analysis by one-beam laser speckle interferometry, 1: single aperture method," *Appi. Opt.* 15, 2205. 1976
- [5.9] Yamaguchi, I. "Fringe formation in speckle photography," *J. Opt. Soc. Am. A*, 81. 1984
- [5.10] G. Salazar. Estudio de técnicas de Interferometría Speckle Digital. Aplicación a la medición de deformaciones mecánicas. Tesis de Licenciatura en Física. UNSa. 2000
- [5.11] E. Alanís, C. Martínez, L. Alvarez, G. Romero "Determinación de curvas de concentración por interferometría de correlación speckle digital". AFA. Vol. 10, pp 107 – 110. La Plata (1998)
- [5.12] G. Romero, L. Alvarez, E. Alanís, L. Nallim, R. Grossi. "Study of vibrating plate: comparison between experimental (ESPI) and analytical results". *Optics and Lasers in Engineering*, Vol 40, pp 81 – 90. Elsevier Ltd. (2003)