

Análisis de Señales y Sistemas Bidimensionales

Goodman

Índice

Preface

Esta edición de Metrología óptica contiene un nuevo capítulo sobre procesos ópticos computarizados, incluida la holografía digital y la fotografía digital moteada. El Capítulo 2, sobre óptica gaussiana, y el Capítulo 5, sobre fuentes de luz y detectores, se amplían considerablemente para incluir descripciones de sistemas de imágenes estándar, diodos emisores de luz y detectores de estado sólido. Se incluyen nuevas secciones separadas sobre tomografía de coherencia óptica, correlación moteada, transformada rápida de Fourier, desenvolvimiento de fase temporal y sensores de fibra Bragg. Finalmente, se da un nuevo apéndice sobre series de Fourier. Las soluciones a los problemas del final del capítulo se pueden encontrar en <http://www.wiley.co.uk/opticalmetrology>.

Desde la edición anterior, la cámara electrónica se ha impuesto cada vez más como medio de grabación. La palabra "digital" se está convirtiendo en un prefijo para un número cada vez mayor de técnicas. Creo que esta nueva edición refleja esta tendencia.

Es para mí un gran placer agradecer las muchas discusiones estimulantes con el profesor H.M. Pedersen en la Universidad Noruega de Ciencia y Tecnología. Gracias también a John Petter G'asvik por diseñar muchas de las nuevas figuras.

1. Básicos

1.1. Introducción

Antes de entrar en las diferentes técnicas de metrología óptica se deben establecer algunos términos y definiciones básicos. La metrología óptica se trata de la luz y, por lo tanto, debemos desarrollar una descripción matemática de las ondas y la propagación de las ondas, introduciendo términos importantes como longitud de onda, fase, frentes de fase, rayos, etc. El tratamiento se mantiene lo más simple posible, sin entrar en la complicada teoría electromagnética.

1.2. Movimiento Ondulatorio. Espectro Electromagnético

La figura

La relación entre la frecuencia y el número de ondas esta dado por:

$$\lambda\nu = v \tag{1}$$

donde

v es la velocidad de la onda

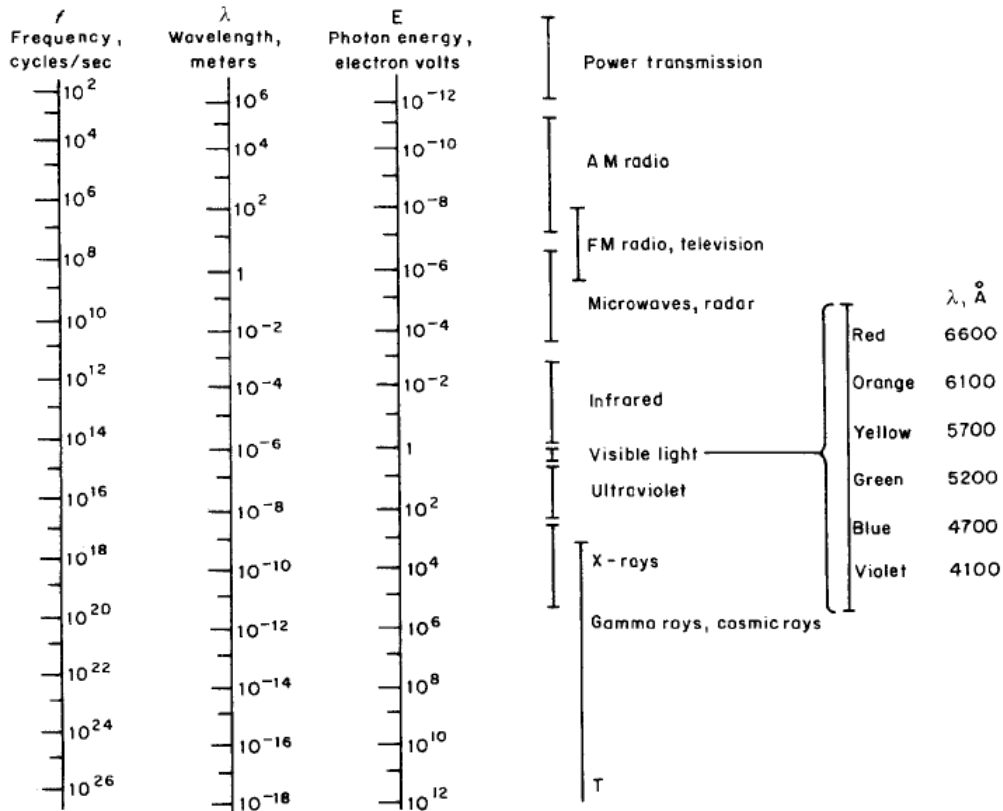
$\psi(x, y)$ podría representar el campo de una onda electromagnética donde

$$v = c = 3 \times 10^8 m/s$$

La relación entre la velocidad c de una onda electromagnética en el vacío y la velocidad v en un medio se conoce como índice absoluto de refracción n de ese medio.

$$n = \frac{c}{v} \quad (2)$$

El espectro electromagnético está dado en la siguiente tabla



Aunque en realidad no afecta nuestro argumento, nos ocuparemos principalmente de la luz visible donde

$$\lambda = 400 - 700 \text{ nm} \quad (1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m})$$

$$\nu = (4,3 - 7,5) \times 10^{14} \text{ Hz}$$

1.3. Ondas planas. Rayos de luz

Las ondas electromagnéticas no son bidimensionales como en la Figura

La ecuación

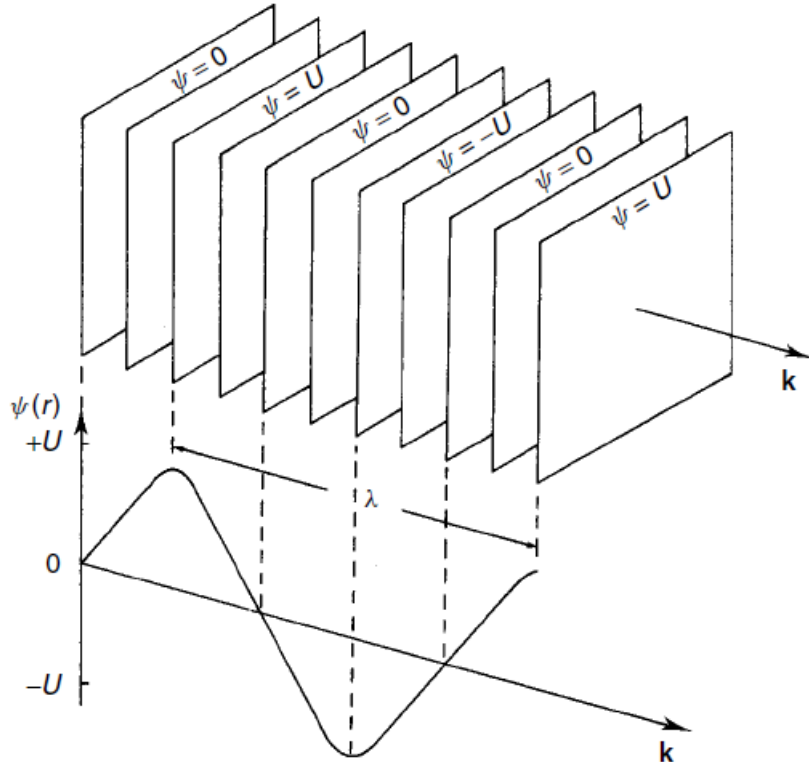


Figura 1: Onda plana

$$\psi(x, y, z, t) = U \cos[k \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - 2\pi \nu t + \delta] \quad (3)$$

Que el producto escalar que cumple la condición $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = cte$ describe un plano que es perpendicular a \mathbf{n} se muestra en el caso bidimensional de la figura

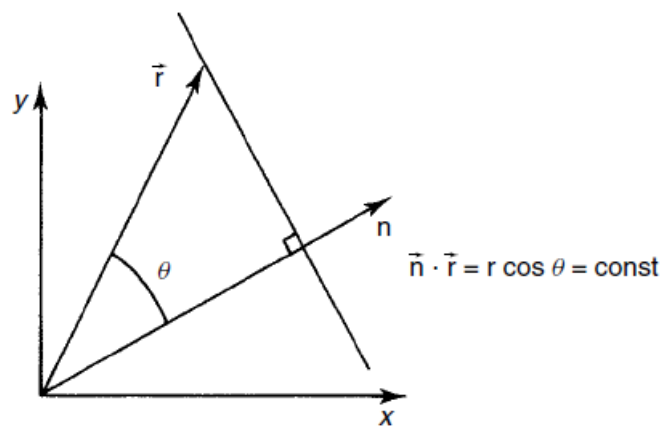


Figura 2

A continuación damos la definición de rayos de luz. Son líneas dirigidas que son en todas partes perpendiculares a los planos de fase. Esto se ilustra en la Figura

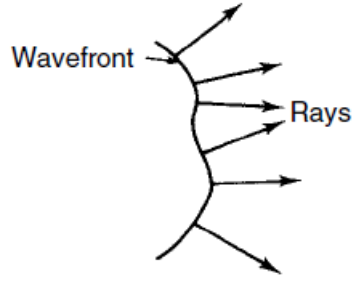


Figura 3

1.4. Diferencia de fase

Volvamos por un momento a la onda plana descrita por la Ecuación

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = k(z_1 - z_2) \quad (4)$$

Por lo tanto, vemos que la diferencia de fase entre dos puntos a lo largo de la dirección de propagación de una onda plana es igual a la diferencia de longitud de trayectoria geométrica multiplicada por el número de onda. Esto es generalmente cierto para cualquier rayo de luz. Cuando la luz pasa por un medio diferente al aire (vacío), tenemos que multiplicar por el índice de refracción n del medio, tal que

longitud del camino óptico = $n \times$ (longitud del camino geométrico)
diferencia de fase = $k \times$ (longitud del camino óptico)

1.5. Notación Compleja. Amplitud Compleja

La expresión en la Ecuación

$$\psi(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ U e^{i(\phi - 2\pi \nu t)} \right\} \quad (5a)$$

donde

$$\phi = k \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + \delta \quad (5b)$$

es la fase espacial dependiente. En el Apéndice A, se dan algunas reglas aritméticas simples para números complejos.

En la descripción de los fenómenos ondulatorios, se adopta comúnmente la notación de la Ecuación

Una ventaja de una representación compleja del campo es que las partes espacial y temporal se factorizan:

$$\psi(x, y, z, t) = U e^{i(\phi - 2\pi \nu t)} \quad (6)$$

En metrología óptica (y en otras ramas de la óptica) lo que más interesa es la distribución espacial del campo. Dado que la parte dependiente del tiempo se conoce para cada componente de frecuencia, podemos omitir el factor $e^{-i2\pi \nu t}$ y solo considerar la amplitud espacial compleja

$$u = U e^{i\phi} \quad (7)$$

Esta expresión describe no solo una onda plana, sino una onda tridimensional general donde tanto la amplitud U como la fase ϕ pueden ser funciones de x , y y z .

La figura

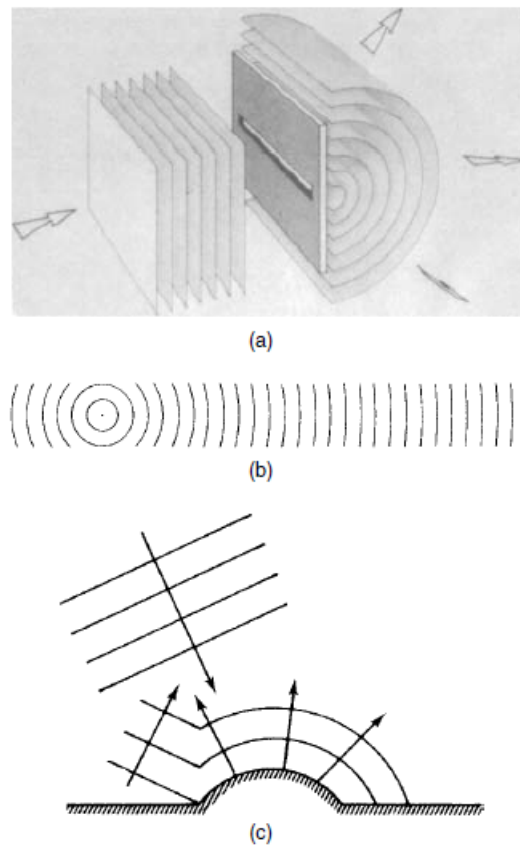


Figura 4

1.6. Incidencia Oblicua de una Onda Plana

En óptica, uno suele estar interesado en la distribución de amplitud y fase de una onda sobre planos fijos en el espacio. Consideremos el caso simple esbozado en la figura

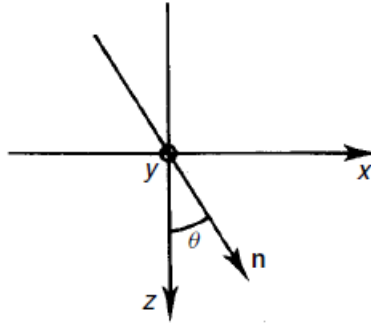


Figura 5

$$\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

Estas expresiones puestas en la Ecuación

$$u = U e^{ik(x \sin\theta + z \cos\theta)} \quad (8a)$$

Para $z = 0$ (el plano xy) esto se reduce a

$$u = U e^{ikx \sin\theta} \quad (8b)$$

1.7. Onda Esférica

Una onda esférica, ilustrada en la figura

$$u = \frac{U}{r} e^{ikr} \quad (9)$$

donde r es la distancia radial desde la fuente puntual. Vemos que la fase de esta onda es constante para $r = \text{constante}$, es decir, los frentes de fase son esferas centradas en la fuente puntual. La r en el denominador de la Ecuación

Considere la Figura

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (10)$$

donde x, y son las coordenadas del plano iluminado. Esta expresión es, sin embargo, bastante engorrosa para trabajar. Por lo tanto, generalmente se hacen algunas aproximaciones, la primera de las cuales es reemplazar z por r en el denominador de la Ecuación

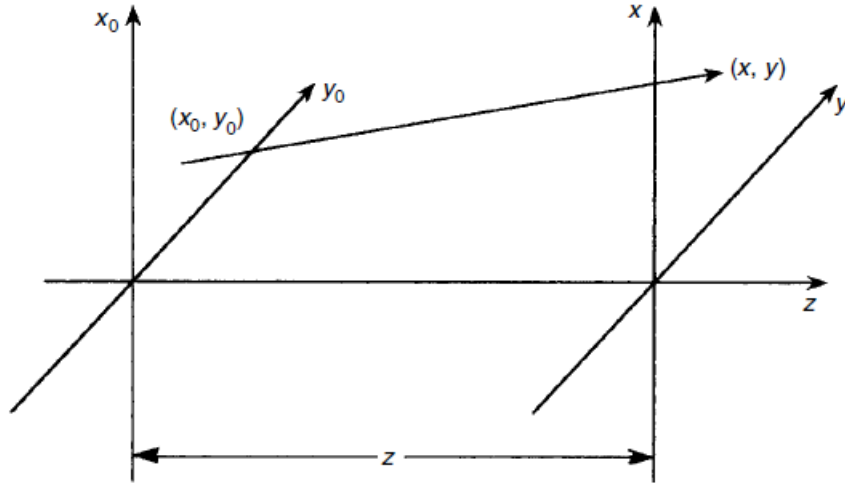


Figura 6

$$r = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - x_0}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{z} \right)^2} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_0}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - y_0}{z} \right)^2 \right] \quad (11)$$

donde r se aproxima por los dos primeros términos de la expansión.

La amplitud del campo complejo en el plano xy que resulta de una fuente puntual en x_0, y_0 en el plano x_0y_0 está dada por lo tanto por

$$u(x, y, z) = \frac{U}{z} e^{ikz} e^{i(k/2z)[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} \quad (12)$$

Las aproximaciones que conducen a esta expresión se denominan aproximaciones de Fresnel. No discutiremos aquí las condiciones detalladas para su validez, pero está claro que $(x - x_0)$ y $(y - y_0)$ deben ser mucho menores que la distancia z .

1.8. Intensidad

En cuanto al registro de la luz, nos encontramos con que no existen medios para el registro directo de la amplitud del campo. Los detectores más comunes (como el ojo, los fotodiodos, los tubos de multiplicación, la película fotográfica, etc.) registran la irradiancia (es decir, el efecto por unidad de área) que es proporcional a la amplitud del campo absolutamente al cuadrado:

$$I = |u|^2 = U^2 \quad (13)$$

A esta importante cantidad la llamaremos de ahora en adelante intensidad. Mencionamos que la relación correcta entre U^2 y la irradiancia está dada por

$$I = \frac{\epsilon \nu}{2} U^2 \quad (14)$$

donde ν es la velocidad de la onda y ϵ se conoce como la permitividad eléctrica del medio. En este libro, necesitaremos esta relación solo cuando calculemos la transmitancia en una interfaz (consulte la Sección 9.5).

1.9. ÓPTICA Geométrica

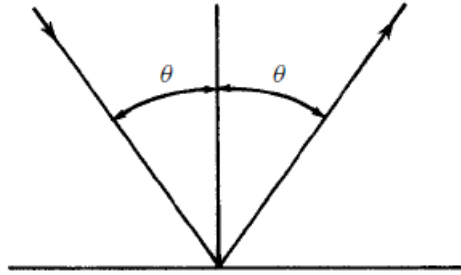


Figura 7: Ley de reflexión

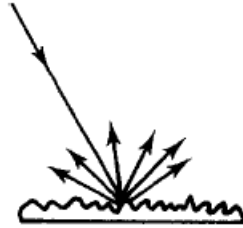


Figura 8: Dispersión desde una superficie rugosa

Para completar, nos referimos a las tres leyes de la óptica geométrica:

1. Propagación rectilínea en un medio uniforme y homogéneo.
2. Reflexión. En la reflexión de un espejo, el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia (ver Figura

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (15)$$

donde θ_1 es el ángulo de incidencia y θ_2 es el ángulo de emergencia (ver Figura

$$\sin \theta_1 = \frac{n_1}{n_2} \quad (16)$$

Esto se llama reflexión interna total y se tratará con más detalle en la Sección 9.5.

Finalmente, también mencionamos que para la luz reflejada en la interfaz de la Figura

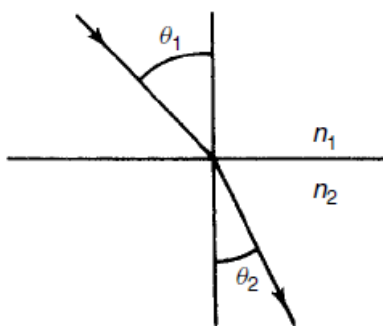


Figura 9: Ley de refracción

1.10. Lentes Simples Convexas (Positivas)

Aquí no entraremos en la teoría general de las lentes, sino que mencionaremos algunas de las propiedades más importantes de una lente ideal simple, convexa. Para obtener más detalles, consulte el Capítulo 2 y la Sección 4.6.

La figura

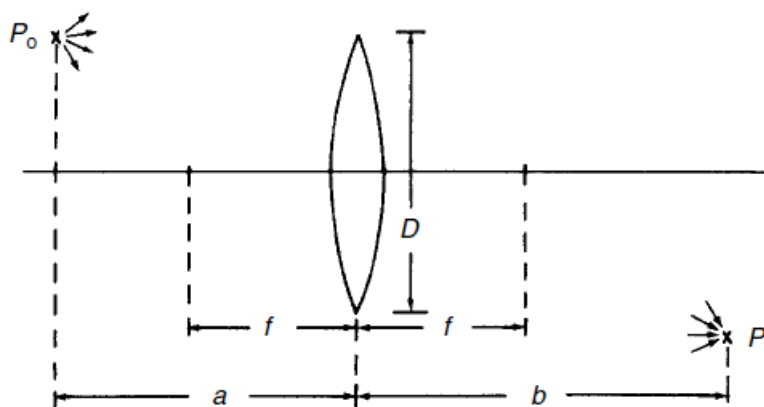


Figura 10

Para encontrar P_i , es suficiente trazar solo dos de estos rayos. La figura

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (17)$$

y el aumento transversal

$$m = \frac{h_i}{h_o} = \frac{b}{a} \quad (18)$$

En la figura

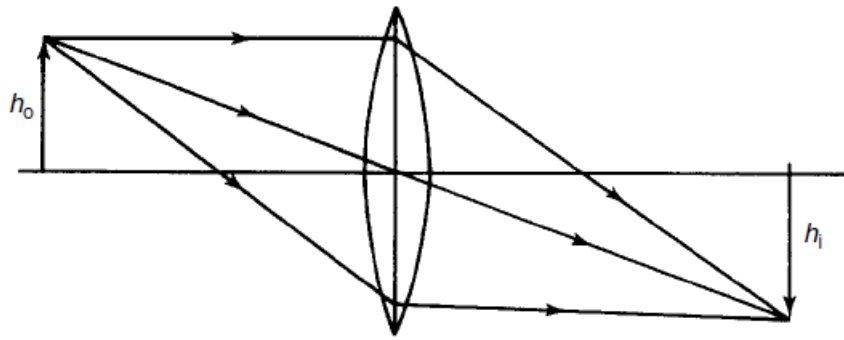


Figura 11

$$\tan\theta = h/f \quad (19)$$

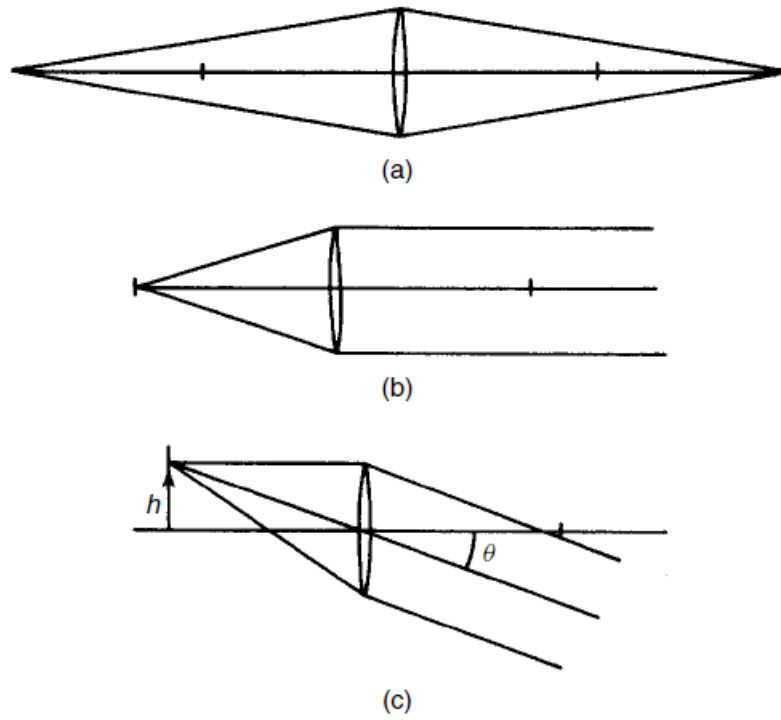


Figura 12

1.11. Configuración de Onda Plana

Finalmente, nos referimos a la Figura

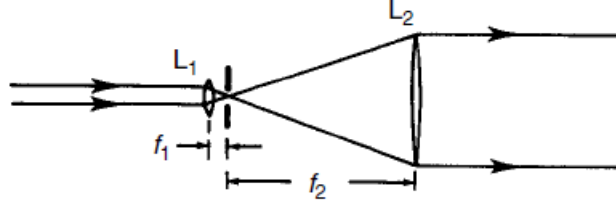


Figura 13: Una configuración de onda plana

2. Óptica Gaussiana

2.1. Introducción

Las lentes son una parte importante de la mayoría de los sistemas ópticos. Los buenos resultados en las mediciones ópticas a menudo dependen de la mejor selección de lentes. En este capítulo desarrollamos las relaciones que gobiernan el paso de los rayos de luz a través de los elementos de imagen sobre la base de la aproximación paraxial usando álgebra matricial. También mencionamos las aberraciones que ocurren cuando los rayos se desvían de este comportamiento gaussiano ideal. Finalmente, repasamos algunos de los sistemas de imágenes estándar.

2.2. Refracción en una Superficie Esférica

Considere la Figura 2.1 donde tenemos una esfera de radio R con centro en C y con índice de refracción n' . La esfera está rodeada por un medio de índice de refracción n . Un rayo de luz que forma un ángulo α con el eje z incide sobre la esfera en un punto A a una altura x sobre el eje z . El rayo incide en un plano que es normal al radio R y el ángulo de incidencia θ es el ángulo entre el rayo y el radio desde C . El ángulo de refracción es θ' y el rayo refractado forma un ángulo α' con el eje z . Introduciendo el ángulo auxiliar ϕ tenemos las siguientes relaciones:

$$\phi = \theta' - \alpha' \quad (20a)$$

$$\phi = \theta - \alpha \quad (20b)$$

$$\sin\phi = x/R \quad (20c)$$

$$n \sin\theta = n' \sin\theta' \quad (20d)$$

La última ecuación se deriva de la ley de refracción de Snell. Al suponer que los ángulos son pequeños, tenemos $\sin\phi \approx \phi$, $\sin\theta \approx \theta$, $\sin\theta' \approx \theta'$ y al combinar las ecuaciones

$$\alpha' = \frac{n - n'}{n'R} x + \frac{n}{n'} \alpha = -\frac{P}{n'} x + \frac{n}{n'} \alpha \quad (21)$$

3. Interferencia

3.1. Introducción

El principio de superposición de las ondas electromagnéticas implica que, por ejemplo, dos campos superpuestos u_1 y u_2 se suman para dar $u_1 + u_2$. Esta es la base de la interferencia. Debido a la respuesta lenta de los detectores prácticos, los fenómenos de interferencia también son una cuestión de promediar en el tiempo y el espacio. Por tanto, el concepto de coherencia está íntimamente relacionado con el de interferencia. En este capítulo investigaremos ambos temas. Se obtiene un alto grado de coherencia de los láseres, que por lo tanto se han utilizado ampliamente como fuentes de luz en interferometría. En los últimos años, la falta de coherencia se ha aprovechado en una técnica llamada interferometría de luz blanca o de baja coherencia, que investigaremos al final del capítulo.

3.2. Descripción General

La interferencia puede ocurrir cuando dos o más ondas se superponen en el espacio. Suponga que dos ondas descritas por

$$u_1 = U_1 e^{i\phi_1} \quad (22a)$$

y

$$u_2 = U_2 e^{i\phi_2} \quad (22b)$$

La teoría de las ondas electromagnéticas nos dice que el campo resultante simplemente se convierte en la suma, a saber.

$$u = u_1 + u_2 \quad (23)$$

La cantidad observable es, sin embargo, la intensidad, que se convierte en

$$\begin{aligned} I = |u|^2 &= |u_1 + u_2|^2 = U_1^2 + U_2^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi \end{aligned} \quad (24)$$

donde

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 \quad (25)$$

Como puede verse, la intensidad resultante no se convierte simplemente en la suma de las intensidades ($= I_1 + I_2$) de las dos ondas parciales. Se dice que las dos ondas interfieren y $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi$ se denomina término de interferencia. También vemos que cuando

$$\Delta\phi = (2n + 1)\pi, \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\cos \Delta\phi = -1$ y I alcanza su mínimo. Las dos ondas están en desfase, lo que significa que interfieren destructivamente.

Cuándo

$$\Delta\phi = 2n\pi \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\cos \Delta\phi = 1$ y la intensidad alcanza su máximo. Las dos ondas están en fase, lo que significa que interfieren constructivamente.

Para dos ondas de igual intensidad, es decir, $I_1 = I_2 = I_0$, la ecuación

$$I = 2I_0[1 + \cos \Delta\phi] = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) \quad (26)$$

donde la intensidad varía entre 0 y $4I_0$.

3.3. Coherencia

La detección de la luz (es decir, la medición de la intensidad) es un proceso de promedio en el espacio y el tiempo. Al desarrollar la Ecuación

Una forma de ilustrar la luz emitida por fuentes reales es representarla como trenes de ondas sinusoidales de longitud finita con diferencias de fase distribuidas aleatoriamente entre los trenes individuales.

Supongamos que aplicamos una fuente de este tipo en un experimento de interferencia, p. el interferómetro de Michelson descrito en la Sección 3.6.2. Aquí, la luz se divide en dos ondas parciales de amplitudes iguales mediante un divisor de haz, después de lo cual las dos ondas se recombinan para interferir después de haber recorrido caminos diferentes.

En la Figura

$$I = I_1 + I_2 \quad (27)$$

La figura

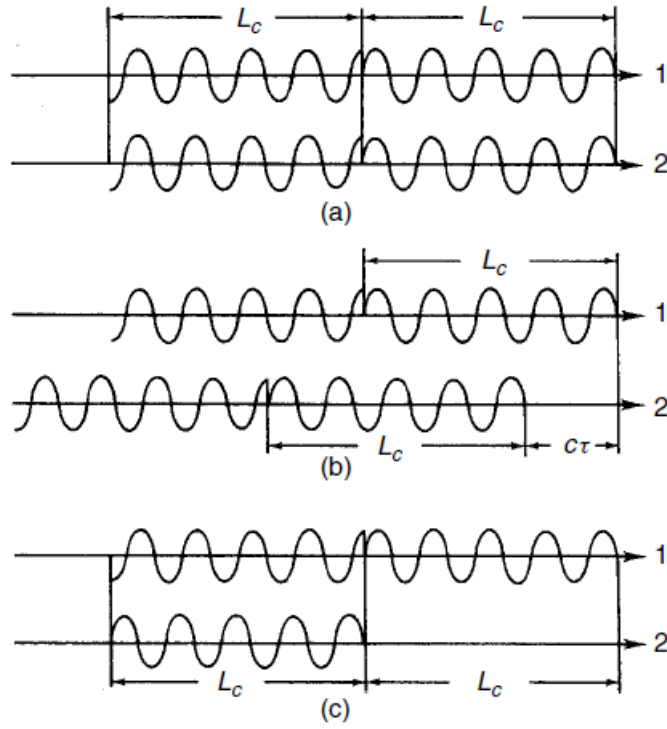


Figura 14

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)| \cos \Delta \phi \quad (28)$$

donde $|\gamma(\tau)|$ es el valor absoluto de $\gamma(\tau)$.

Para ver claramente que esta cantidad está relacionada con el contraste del patrón, introducimos la definición de contraste o visibilidad.

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (29)$$

donde I_{max} e i_{min} son dos máximos y mínimos vecinos del patrón de interferencia descrito por la Ecuación

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)| \quad (30a)$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)| \quad (30b)$$

que, puesto en la Ecuación

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)|}{I_1 + I_2} \quad (31)$$

Para dos ondas de igual intensidad, $I_1 = I_2$, y la Ecuación

$$V = |\gamma(\tau)| \quad (32)$$

lo que muestra que en este caso $|\gamma(\tau)|$ es exactamente igual a la visibilidad. $\gamma(\tau)$ se denomina el **grado complejo de coherencia** y es una medida de la capacidad de los dos campos de ondas para interferir. De las discusiones anteriores debemos tener

$$|\gamma(0)| = 1 \quad (33a)$$

$$|\gamma(\tau_c)| = 0 \quad (33b)$$

$$0 \leq |\gamma(\tau)| \leq 1 \quad (33c)$$

donde las ecuaciones (

De mayor interés es conocer el valor de τ_c , es decir, en qué longitud de trayectoria la diferencia $|\gamma(\tau)| = 0$. En la Sección 5.4.9 encontramos que en el caso de un láser de dos frecuencias esto sucede cuando

$$\tau = \tau_c = \frac{L_c}{c} = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (34)$$

donde $\Delta\nu$ es la diferencia entre las dos frecuencias. Se puede demostrar que esta relación se aplica a cualquier fuente de luz con una distribución de frecuencias de ancho $\Delta\nu$. L_c se denomina longitud de coherencia y τ_c tiempo de coherencia.

Vemos que la Ecuación

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\lambda_c}{\lambda^2} \quad (35)$$

que puede derivarse de la ecuación

Como se indicó en la Sección 1.2, el espectro visible varía de 4,3 a $7,5 \times 10^{14}$ Hz, lo que da un ancho espectral aproximadamente igual a $\Delta\nu = 3 \times 10^{14}$ Hz. A partir de la ecuación

Las lámparas de descarga ordinarias tienen anchos espectrales correspondientes a longitudes de coherencia del orden de 1 μm , mientras que las líneas espectrales emitidas por lámparas de isótopos de baja presión tienen longitudes de coherencia de varios milímetros.

Con mucho, la fuente de luz más coherente es el láser. Un láser de frecuencia única puede tener longitudes de coherencia de varios cientos de metros. Esto se analizará con más detalle en la Sección 5.4.9.

Hasta ahora hemos estado discutiendo la coherencia entre dos campos de ondas en un punto del espacio. Este fenómeno se denomina coherencia temporal o longitudinal. También es posible

medir la coherencia de un campo de ondas en dos puntos del espacio. Este fenómeno se denomina coherencia espacial o transversal y puede analizarse mediante el experimento clásico de doble rendija (o agujero de alfiler) de Young (consulte la Sección 3.6.1). Aquí se analiza el campo de ondas en dos puntos P_1 y P_2 pasando la luz a través de dos pequeños agujeros en una pantalla S_1 en P_1 y P_2 y observando el patrón de interferencia resultante en una pantalla S_2 (vea la figura ??(a)). De la misma manera que el grado de coherencia temporal $\gamma(\tau)$ es una medida del contraste de franjas en función de la diferencia de tiempo τ , el grado de coherencia espacial γ_{12} es una medida del contraste de franjas del patrón en la pantalla S_2 como una función de la diferencia espacial D entre P_1 y P_2 . Tenga en cuenta que dado que γ_{12} es el grado espacial de coherencia para $\tau = 0$, es el contraste de la franja central en S_2 lo que debe medirse.

Para medir la coherencia espacial de la propia fuente, la pantalla S_1 debe ponerse en contacto con la fuente. Inmediatamente queda claro que para una fuente de luz térmica extendida, $|\gamma_{12} = 0|$ a menos que $P_1 = P_2$, lo que da $|\gamma_{11} = 1|$. Por otro lado, si alejamos S_1 de esta fuente, observamos que $|\gamma_{12}|$ puede ser diferente de cero, lo que muestra que un campo de ondas aumenta su coherencia espacial por mera propagación. También observamos que $|\gamma_{12}|$ aumenta deteniendo la fuente por, por ejemplo, una apertura hasta $|\gamma_{12} = 1|$ para una abertura estenopeica. La distancia D_c entre P_1 y P_2 para la cual $|\gamma_{12} = 0|$ se denomina longitud de coherencia espacial. Puede demostrarse que D_c es inversamente proporcional al diámetro de la apertura en analogía con la longitud de coherencia temporal, que es inversamente proporcional al ancho espectral. Además, se puede demostrar que $|\gamma_{12}|$ es la transformada de Fourier de la distribución de intensidad de la fuente y que $|\gamma(\tau)|$ es la transformada de Fourier de la distribución espectral de la fuente (ver Sección 3.7).

Un experimentador que utilice técnicas como la holografía, el muaré, el moteado y la fotoelasticidad no necesita preocuparse mucho por los detalles de la teoría de la coherencia. Tanto en la teoría como en los experimentos, se suele suponer que el grado de coherencia es uno o cero. Sin embargo, uno debe estar familiarizado con hechos fundamentales tales como:

1. La luz de dos fuentes separadas no interfiere.
2. La coherencia espacial y temporal de la luz de una fuente térmica extendida se incrementa al detenerla y al usar un filtro de color, respectivamente.
3. La función de visibilidad de un láser multimodo exhibe máximos en un múltiplo integral del doble de la longitud de la cavidad (consulte la Sección 5.4.9).

3.4. Interferencia entre dos Ondas Planas

La figura

$$u_1 = U_1 e^{i\phi_1} \quad (36)$$

$$u_2 = U_2 e^{i\phi_2} \quad (37)$$

$$\phi_1 = k \left[x \sin \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) + z \cos \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (38)$$

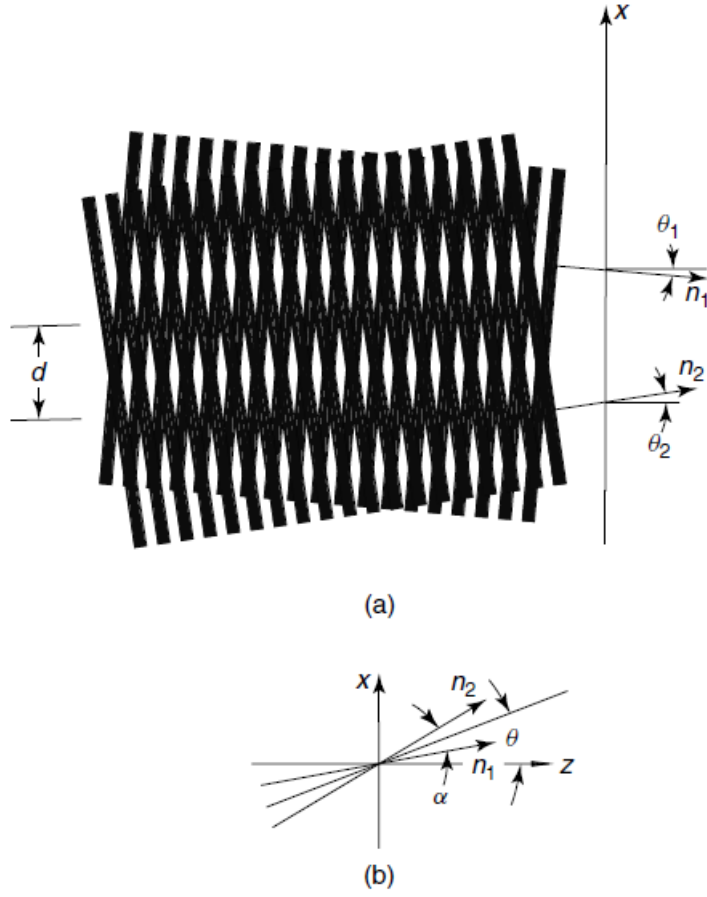


Figura 15

$$\phi_2 = k \left[x \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) + z \cos \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (39)$$

La intensidad se da mediante la expresión general de la ecuación (3.3) insertando

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = k \left\{ x \left[\sin \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) \right] + z \left[\cos \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) - \cos \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\Delta\phi = k \sin \frac{\alpha}{2} \{ -x \cos \theta + z \sin \theta \} \quad (40)$$

Por lo tanto, el término de interferencia tiene la forma

$$\cos \frac{2\pi}{d} (z \sin(\theta) - x \cos(\theta)) \quad (41)$$

Comparando esta expresión con la parte real de la ecuación (1.9a), vemos que la ecuación (3.20) puede considerarse como la representación de una onda plana con su dirección de propa-

gación en el plano xz formando un ángulo θ con el eje x como se muestra en la figura 3.3, y con una longitud de onda igual a

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \quad (42)$$