Análisis y Diseño de Algoritmos: Transformada Rápida de Fourier

Mag. Rensso Victor Hugo Mora Colque

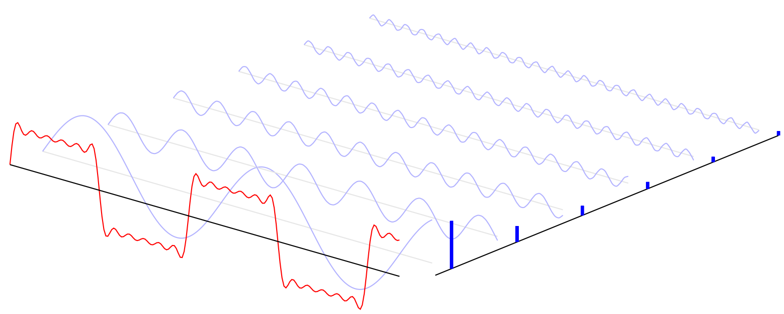
Jorge Huanca Mamani
Juan Flores Huanqui
Carl Villachica Villachica
Alexander Baylon Ibañez

Introducción

La transformada de Fourier es una transformación matemática que se utiliza para descomponer una función(usualmente una función del tiempo, o una señal) en las frecuencias que la constituyen, el termino se refiere tanto a la representación del dominio de la frecuencia y a la operación matemática que asocia tal representación a una función del tiempo. La transformada de Fourier es importante en matemáticas, ingeniería y física. Su contra parte discreta, la Transformada Discreta de Fourier(DFT) la cual normalmente es calculada con la Transformada Rápida de Fourier(FFT), ha revolucionado la sociedad moderna, ya que esta presente en la electrónica digital y en el procesamiento de señales.

La transformada de Fourier

Un motivación de la transformada de Fourier viene del del estudio de las series de Fourier que son funciones periódicas que son escritas como la suma de ondas simples las cuales son representadas por senos y cosenos, la transformada es una extensión de las series.



La transformada de Fourier se define como:

$$F(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \, e^{-2\pi isx} \, dx$$

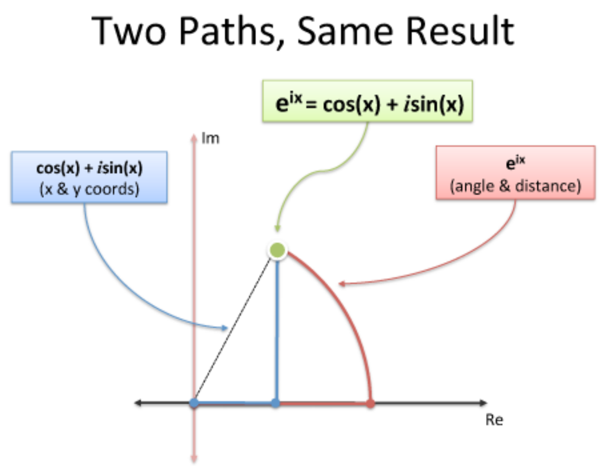
la cual es conocida como la transformación hacia adelante, y

$$f(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \cdot \, e^{2\pi isx} \, ds$$

que es la transformación inversa.

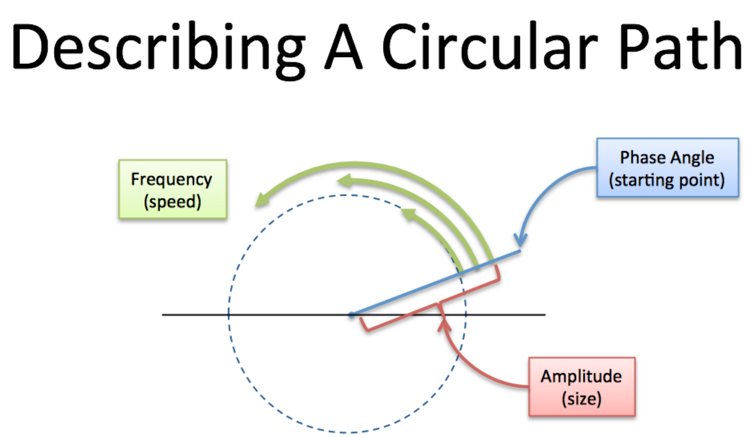
El exponente complejo es la esencia de la transformación. Un exponente complejo es simplemente un número complejo donde la parte real e imaginaria son sinusoides. Esta relación es llamada la formula de Euler.

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$



La transformada de Fourier toma un punto de vista en especifico: ¿Que pasaría si cada señal podría ser filtrada/convertida en varios caminos circulares?. La transformada de Fourier encuentra la receta de una señal:
- Comienza con una señal basada en tiempo.
- Se aplican filtros para medir cada "ingrediente circular".
- Se junta toda la receta, mostrando la cantidad de cada "ingrediente circular".

Un camino circular necesita un tamaño, una velocidad y un ángulo inicial **(amplitud/frecuencia/fase)**.



Se pueden combinar caminos, y la posición combinada de todos los ciclos en la señal.

La transformada de Fourier Discreta

La transformada de Fourier Discreta convierte una señal del dominio del tiempo y de duración infinita en un espectro continuo conformado por un número infinito de sinusoides. Dependiendo de la data, solo se necesita un número finito de sinusoides y la DFT es apropiada para ello. La DFT de N puntos uniformemente muestreados x_n (donde $n = 0, ..., N-1$) y su inversa están definidas por:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \ e^{-i2\pi kn/N}$$

y

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \ e^{i2\pi kn/N}$$

Donde:
- **N** = número de muestras que se tienen.
- **n** = la muestra actual que se considera.
- $\mathbf{x_n}$ = el valor de la señal en el momento n.
- **k** = frecuencia actual considerada(0 Hertz hasta $N-1$ Hertz)
- $\mathbf{X_k}$ = cantidad de frecuencia k en la señal(amplitud y fase, un número complejo).
- El factor **1/N** se utiliza en la transformación reversa(de frecuencias hacia el tiempo).
- **n/N** es el porcentaje del tiempo que se realizo. $2 * pi * k$ es la velocidad en radianes/seg. e^{-ix} es el movimiento en reversa del camino circular. La combinación es cuanto se ha movido, para esta velocidad y tiempo.
- Las ecuaciones mostradas para la DFT nos dicen que sumemos números complejos, muchos lenguajes de programación no manejan números complejos, entonces se convierte todo a coordenadas rectangulares y se trabaja con eso.

La transformada rápida de Fourier

La DFT es calculada usualmente por un algoritmo muy ingenioso y revolucionario conocido como la transformada rápida de Fourier(FFT). El descubrimiento de la FFT moderna es mayoritariamente atribuido a James W. Cooley y Jhon W. Tukey ("An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," Math. Comput. 19, 297–301) en 1965. Las FFTs son ampliamenta utilizadas para aplicaciones en ingeniería, música, ciencia y matemáticas.

La ventaja de la FFT por encima de la DFT es que la complejidad disminuye de $O(N^2)$ para una DFT a $O(Nlog_2(N))$ para la FFT. Implementaciones modernas de la FFT permiten esta complejidad para cualquier valor de N, no solo para potencias de dos o los productos de primos pequeños.

Si estimamos el incremento en velocidad al calcular con FFT en vez de DFT para transformaciones de tamaño 10^3, 10^6 y 10^9 puntos, obtenemos:

$$\text{mejora de velocidad}(N = 10^3) \propto \frac{N^2}{N \log_2(N)} = \frac{N}{\log_2(N)} \sim \frac{10^3}{10} \sim 100$$

$$\text{mejora de velocidad}(N = 10^6) \propto \frac{N}{\log_2(N)} \sim \frac{10^6}{20} \sim 5 \times 10^4$$

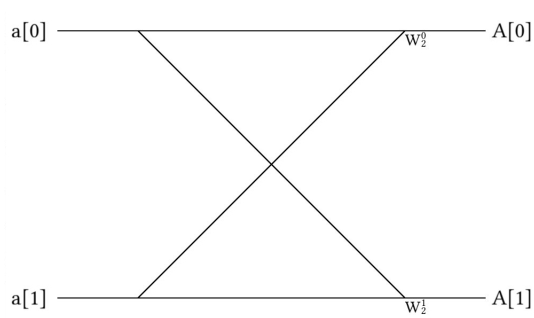
$$\text{mejora de velocidad}(N = 10^9) \propto \frac{N}{\log_2(N)} \sim \frac{10^9}{30} \sim 3 \times 10^7$$

El algoritmo Cooley-Tukey

El problema de utilizar DFT es que requiere de multiplicaciones de matrices grandes y sumas sobre todos sus elementos, las cuales son operaciones complejas. El algoritmo Cooley-Tukey calcula el DFT directamente con menos sumas y sin multiplicar matrices. El truco con este algoritmo es la **recursión**. En particular, la matriz a la que se le aplica el DFT se divide en dos partes: una para todos los elementos con índice par, y otra para los que tienen índice impar. Entonces se procede a dividir el arreglo varias veces hasta que se tenga un arreglo de tamaño manejable para realizar el DFT. Se puede también utilizar un reordenamiento similar al realizar un esquema de inversión de bits. Para realizar este algoritmo se necesita saber el uso de los **Diagramas Mariposa**, que nos muestran donde corresponden los elementos antes, durante y después del FFT. Como se observa FFT utiliza DFT y después de realizar el procedimiento inicial de subdivisión o inversión de bits, se realiza la multiplicación de matrices de los $e^{-i2\pi kn/N}$ términos. Se dividira el arreglo en una serie de valores omega:

$$\omega_N^k = e^{-i2\pi kn/N}$$

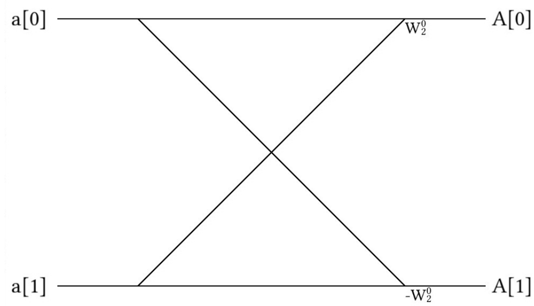
Y en cada paso, se utiliza el termino apropiado. Por ejemplo, si se necesita realizar la FFT de un arreglo de solo dos elementos. Se puede representar esto con el siguiente diagrama mariposa(radix-2):



Que significa:

$$A[0] = a_0 + \omega_2^0 a_1$$
$$\mathrm{A}[1] = \mathrm{a}_0 + \omega_2^1 a_1$$

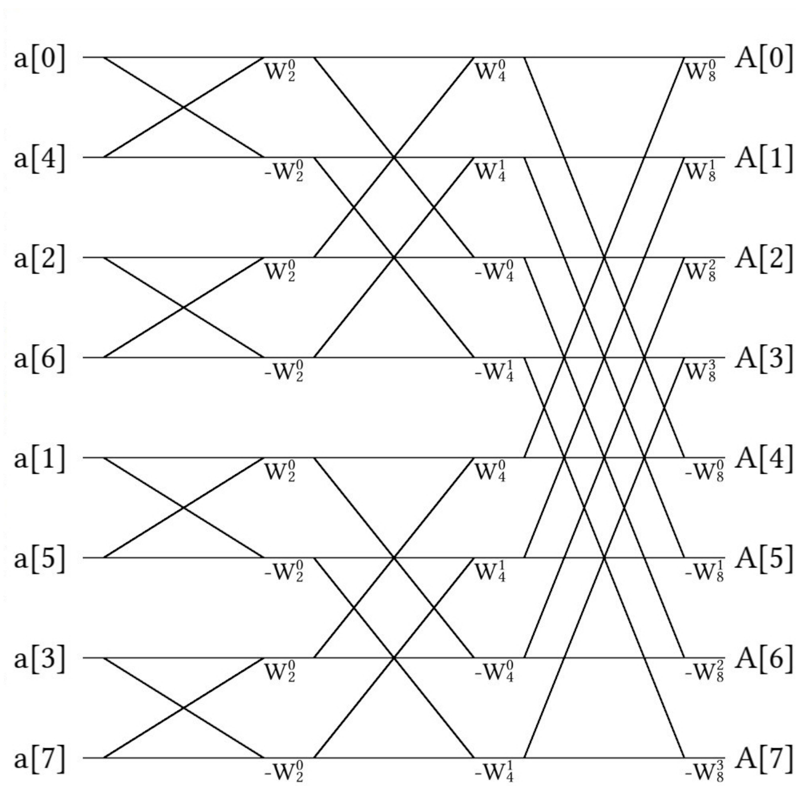
Sin embargo, existe una propiedad que muestra que la segunda mitad del arreglo de valores ω es siempre el negativo de la primera mitad del arreglo, entonces $\omega_2^0 = -\omega_2^1$, entonces el diagrama quedaria como:



Y la siguiente ecuación:

$$A[0] = a_0 + \omega_2^0 a_1$$
$$\mathrm{A}[1] = \mathrm{a}_0 - \omega_2^0 a_1$$

Al realizar esto, podemos ahorrar una buena cantidad de espacio. Si se necesita combinar mas elementos se realizan sumas de sumas. Por ejemplo, si se tienen 8 elementos se tiene:



Bibliografia

- ”FFT · HonKit”, Algorithm-archive.org, 2020. [Online]. Available: https://www.algorithm-archive.org/contents/cooley$_t$ukey/cooley$_t$ukey.html.[Accessed : 25 − Nov − 2020]
−”AnInteractiveGuideToTheFourierTransform–BetterExplained”, Betterexplained.com, 2020.[Onlin
https : //betterexplained.com/articles/an − interactive − guide − to − the − fourier − transform/.[Accessed : 25−Nov−2020]−”HowtheFFTworks”, Dspguide.com, 2020.[Online].Available :
https : //www.dspguide.com/ch12/2.htm.[Accessed : 25 − Nov − 2020]
−”Fouriertransform”, En.wikipedia.org, 2020.[Online].Available : https : //en.wikipedia.org/wiki/Fou
25 − Nov − 2020]
−”FastFouriertransform”, En.wikipedia.org, 2020.[Online].Available : https : //en.wikipedia.org/wiki
25 − Nov − 2020]
−”Cooley–TukeyFFTalgorithm”, En.wikipedia.org, 2020.[Online].Available : https : //en.wikipedia.org
Tukey$_F$FT$_a$lgorithm[Accessed : 25 − Nov − 2020]