

## Construcción del AFD mínimo

Cuando se tiene un **Autómata Finito Determinista (AFD)** definido como  $(\Sigma, Q, q_0, f, F)$ , es posible construir un **AFD mínimo equivalente**, es decir, un autómata con el menor número posible de estados que reconozca el mismo lenguaje.

El **AFD mínimo asociado** se representa como:  $(\Sigma, Q/\equiv, [q_0], [f], F/\equiv)$  donde se obtiene al **agrupar estados equivalentes** según una relación de equivalencia definida sobre los estados del autómata original.

## Procedimiento de construcción

### 1. Inicialización

- Se inicia con ( $k = 0$ ).
- Se construye la primera partición de los estados, llamada  $\Pi_0$ , separando los estados finales de los no finales:

$$\Pi_0 = \{F, Q \setminus F\}$$

Es decir:

- Un grupo con todos los **estados finales**.
- Otro grupo con todos los **estados no finales**.

### 2. Refinamiento de la partición

El objetivo es **dividir los grupos de estados** hasta que cada grupo contenga únicamente estados **indistinguibles** entre sí.

Se realiza un proceso iterativo:

1. **Incrementar el contador:**  
 $(k \leftarrow k + 1)$
2. **Construir una nueva partición**  $\Pi_k$  a partir de la anterior  $\Pi_{k-1}$ , aplicando la siguiente regla:
  - Dos estados ( $q$ ) y ( $q'$ ) permanecen en la **misma clase de equivalencia** si, y solo si, para **toda entrada** ( $a \in \Sigma$ ):

$$f(q, a) \text{ y } f(q', a) \text{ están en la misma clase de } \Pi_{k-1}$$

En otras palabras, los estados producen **comportamientos equivalentes** ante todas las posibles entradas del alfabeto.

3. **Condición de parada:**

El proceso se repite **hasta que la partición no cambie**, es decir:

$$\Pi_{k-1} = \Pi_k$$

Esto ocurre antes de alcanzar ( $k = n - 1$ ), donde ( $n = |Q|$ ) es el número total de estados del AFD.

### 3. Resultado final

La **partición final** ( $\Pi_{k-1}$ ) corresponde al **conjunto cociente  $Q/\equiv$** , es decir, el conjunto de clases de equivalencia de los estados.

Cada clase representa un **estado del AFD mínimo**, y los elementos de esta nueva definición son:

- **$Q/\equiv$** : El conjunto de clases de equivalencia (agrupaciones de estados indistinguibles).
- **[ $q_0$ ]**: La clase que contiene al estado inicial del AFD original.
- **[f]**: La clase que contiene un estado final ( $f$ ) del autómata original.
- **$F/\equiv$** : El conjunto de clases que contienen estados finales (conjunto de estados finales del AFD mínimo).

#### Interpretación de los símbolos

 Símbolo	Significado
$Q/\equiv$	Representa el conjunto de estados del AFD mínimo. Puede interpretarse como “Q módulo una relación de equivalencia”, es decir, los estados del AFD original agrupados según su comportamiento equivalente.
[ $q_0$ ]	Conjunto (clase de equivalencia) que contiene al estado inicial ( $q_0$ ).
[f]	Conjunto que contiene a un estado final ( $f$ ) del AFD original.
$F/\equiv$	Conjunto de todas las clases de equivalencia que contienen al menos un estado final. Representa el nuevo conjunto de estados finales del AFD mínimo.

#### Conclusión

El proceso de **minimización de un AFD** consiste en identificar y unir los estados que son **indistinguibles** desde el punto de vista del lenguaje que reconoce el autómata. De este modo, se obtiene un nuevo AFD con la **misma capacidad de reconocimiento**, pero con **menos estados**, lo que lo hace más **eficiente y compacto**.

## Minimización paso a paso del AFD dado

\**AFD original (alfabeto {1,2}, estado inicial  $q_0$ , estados de aceptación marcados con \*)*:

Transición (filas = estados, columnas = entrada 1 y 2):

Estado	1	2
$>*q_0$	$q_1$	$q_5$
$q_1$	$q_2$	$q_3$
$q_2$	$q_3$	$q_6$
$q_3$	$q_4$	$q_1$
$*q_4$	$q_1$	$q_5$
$q_5$	$q_3$	$q_6$
$*q_6$	$q_1$	$q_5$

Estados finales:  $F = \{q_0, q_4, q_6\}$

Estados no finales:  $Q \setminus F = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}$

## Paso 1 — Partición inicial $\Pi_0$

Se separan finales y no finales:

$$\Pi_0 = \{\{q_0, q_4, q_6\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5\}\}$$

Denotemos para comodidad:

- $A = \{q_0, q_4, q_6\}$  (clase de finales)
- $N = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}$  (clase de no-finales)

## Paso 2 — Construir $\Pi_1$ refinando $\Pi_0$

Para cada estado obtenemos la **firma** (clase de destino al leer 1, clase de destino al leer 2) usando  $\Pi_0$ :

- $q_0 \rightarrow (q_1, q_5) \rightarrow (N, N)$
- $q_1 \rightarrow (q_2, q_3) \rightarrow (N, N)$
- $q_2 \rightarrow (q_3, q_6) \rightarrow (N, F)$
- $q_3 \rightarrow (q_4, q_1) \rightarrow (F, N)$
- $q_4 \rightarrow (q_1, q_5) \rightarrow (N, N)$
- $q_5 \rightarrow (q_3, q_6) \rightarrow (N, F)$
- $q_6 \rightarrow (q_1, q_5) \rightarrow (N, N)$

Agrupamos estados según su firma dentro de  $\Pi_0$ :

- Firma  $(N, N)$ :  $\{q_0, q_1, q_4, q_6\}$  — **ojo**: aunque  $q_0, q_4, q_6$  son finales y  $q_1$  no lo es; sin embargo la firma se evalúa *dentro de la misma clase* de  $\Pi_0$ ; **no pueden mezclar finales y no-finales en la misma clase**. En la práctica debemos respetar  $\Pi_0$ : la clase de finales ( $A$ ) y la de no-finales ( $N$ ) ya están separadas, así que sólo dividimos cada clase por firmas **internas**:

Descomposición correcta dentro de cada clase de  $\Pi_0$ :

- Dentro de A = {q0,q4,q6}: sus firmas son todas (N,N) → permanecen juntas: A sigue siendo {q0,q4,q6}.
- Dentro de N = {q1,q2,q3,q5}: firmas son q1:(N,N), q2:(N,F), q3:(F,N), q5:(N,F) → se divide en:
  - {q1} (firma (N,N))
  - {q2, q5} (firma (N,F))
  - {q3} (firma (F,N))

Por tanto:

$$\Pi_1 = \{\{q_0, q_4, q_6\}, \{q_1\}, \{q_2, q_5\}, \{q_3\}\}$$

(Las clases las etiquetamos para seguir: A={q0,q4,q6}, B={q1}, C={q2,q5}, D={q3}.)

## Paso 3 — Construir $\Pi_2$ a partir de $\Pi_1$

Calculamos firmas ahora en términos de las clases A,B,C,D:

Transiciones re-etiquetadas por clase:

- $q0 \in A \rightarrow 1: q1 \in B ; 2: q5 \in C \Rightarrow$  firma (B, C)
- $q4 \in A \rightarrow 1: q1 \in B ; 2: q5 \in C \Rightarrow$  firma (B, C)
- $q6 \in A \rightarrow 1: q1 \in B ; 2: q5 \in C \Rightarrow$  firma (B, C)
- $q1 \in B \rightarrow 1: q2 \in C ; 2: q3 \in D \Rightarrow$  firma (C, D)
- $q2 \in C \rightarrow 1: q3 \in D ; 2: q6 \in A \Rightarrow$  firma (D, A)
- $q5 \in C \rightarrow 1: q3 \in D ; 2: q6 \in A \Rightarrow$  firma (D, A)
- $q3 \in D \rightarrow 1: q4 \in A ; 2: q1 \in B \Rightarrow$  firma (A, B)

Comparando firmas dentro de cada clase de  $\Pi_1$ :

- En A: q0,q4,q6 tienen todos (B,C) → A no se subdivide.
- En B: solo q1 con (C,D) → B no se subdivide.
- En C: q2,q5 ambos tienen (D,A) → C no se subdivide.
- En D: solo q3 con (A,B) → D no se subdivide.

Así  $\Pi_2 = \Pi_1$  (no hay cambios).

## Condición de parada

Como  $\Pi_2 = \Pi_1$ , el proceso termina. La **partición final** es:

$$\Pi_1 = \{A = \{q_0, q_4, q_6\}, B = \{q_1\}, C = \{q_2, q_5\}, D = \{q_3\}\}$$

## AFD mínimo resultante (construcción del cociente)

Cada clase se convierte en un estado del AFD mínimo. Tomamos transiciones por clases usando cualquier representante:

- Estado [A] (clase A, contiene el estado inicial q0) — **estado inicial** y además **estado de aceptación** (porque contiene estados finales q0,q4,q6).
  - [A] —1→ [B] ( $q_0 \xrightarrow{1} q_1 \in B$ )
  - [A] —2→ [C] ( $q_0 \xrightarrow{2} q_5 \in C$ )
- Estado [B] = {q1}
  - [B] —1→ [C] ( $q_1 \xrightarrow{1} q_2 \in C$ )
  - [B] —2→ [D] ( $q_1 \xrightarrow{2} q_3 \in D$ )
- Estado [C] = {q2,q5}
  - [C] —1→ [D] ( $q_2 \xrightarrow{1} q_3 \in D$ )
  - [C] —2→ [A] ( $q_2 \xrightarrow{2} q_6 \in A$ )
- Estado [D] = {q3}
  - [D] —1→ [A] ( $q_3 \xrightarrow{1} q_4 \in A$ )
  - [D] —2→ [B] ( $q_3 \xrightarrow{2} q_1 \in B$ )

Tabla de transición del AFD mínimo:

Estado	1	2	Acept.
[A]	[B]	[C]	sí
[B]	[C]	[D]	no
[C]	[D]	[A]	no
[D]	[A]	[B]	no

- Estado inicial: [A] (contiene q0).
- Conjunto de aceptaciones: {[A]} (porque q0,q4,q6 están en la misma clase).

## Observaciones finales (didácticas)

- Estados equivalentes identificados y **unidos**:
  - q0, q4 y q6 son indistinguibles → forman [A].
  - q2 y q5 son indistinguibles → forman [C].
  - q1 → [B] y q3 → [D] permanecen solos.
- El AFD mínimo resultante tiene **4 estados**.
- La partición final se alcanzó tras una sola refinación ( $\Pi_1$ ) porque  $\Pi_2 = \Pi_1$ .