

Construcción del AFD mínimo

Cuando se tiene un **Autómata Finito Determinista (AFD)** definido como (Σ, Q, q_0, f, F) , es posible construir un **AFD mínimo equivalente**, es decir, un autómata con el menor número posible de estados que reconozca el mismo lenguaje.

El **AFD mínimo asociado** se representa como: $(\Sigma, Q/\equiv, [q_0], [f], F/\equiv)$ donde se obtiene al **agrupar estados equivalentes** según una relación de equivalencia definida sobre los estados del autómata original.

Procedimiento de construcción

1. Inicialización

- Se inicia con $(k = 0)$.
- Se construye la primera partición de los estados, llamada Π_0 , separando los estados finales de los no finales:

$$\Pi_0 = \{F, Q \setminus F\}$$

Es decir:

- Un grupo con todos los **estados finales**.
- Otro grupo con todos los **estados no finales**.

2. Refinamiento de la partición

El objetivo es **dividir los grupos de estados** hasta que cada grupo contenga únicamente estados **indistinguibles** entre sí.

Se realiza un proceso iterativo:

1. **Incrementar el contador:**
 $(k \leftarrow k + 1)$
2. **Construir una nueva partición Π_k** a partir de la anterior Π_{k-1} , aplicando la siguiente regla:
 - Dos estados (q) y (q') permanecen en la **misma clase de equivalencia** si, y solo si, para **toda entrada** $(a \in \Sigma)$:

$$f(q, a) \text{ y } f(q', a) \text{ están en la misma clase de } \Pi_{k-1}$$

En otras palabras, los estados producen **comportamientos equivalentes** ante todas las posibles entradas del alfabeto.

3. **Condición de parada:**

El proceso se repite **hasta que la partición no cambie**, es decir:

$$\Pi_{k-1} = \Pi_k$$

Esto ocurre antes de alcanzar ($k = n - 1$), donde ($n = |Q|$) es el número total de estados del AFD.

3. Resultado final

La **partición final** (Π_{k-1}) corresponde al **conjunto cociente** Q/\equiv , es decir, el conjunto de clases de equivalencia de los estados.

Cada clase representa un **estado del AFD mínimo**, y los elementos de esta nueva definición son:

- Q/\equiv : El conjunto de clases de equivalencia (agrupaciones de estados indistinguibles).
- $[q_0]$: La clase que contiene al estado inicial del AFD original.
- $[f]$: La clase que contiene un estado final (f) del autómata original.
- F/\equiv : El conjunto de clases que contienen estados finales (conjunto de estados finales del AFD mínimo).

Interpretación de los símbolos

Símbolo	Significado
Q/\equiv	Representa el conjunto de estados del AFD mínimo. Puede interpretarse como “Q módulo una relación de equivalencia”, es decir, los estados del AFD original agrupados según su comportamiento equivalente.
$[q_0]$	Conjunto (clase de equivalencia) que contiene al estado inicial (q_0).
$[f]$	Conjunto que contiene a un estado final (f) del AFD original.
F/\equiv	Conjunto de todas las clases de equivalencia que contienen al menos un estado final. Representa el nuevo conjunto de estados finales del AFD mínimo.

Conclusión

El proceso de **minimización de un AFD** consiste en identificar y unir los estados que son **indistinguibles** desde el punto de vista del lenguaje que reconoce el autómata.

De este modo, se obtiene un nuevo AFD con la **misma capacidad de reconocimiento**, pero con **menos estados**, lo que lo hace más **eficiente y compacto**.

Minimización paso a paso del AFD dado

**AFD original (alfabeto $\{1,2\}$, estado inicial q_0 , estados de aceptación marcados con *):*

Transición (filas = estados, columnas = entrada 1 y 2):

Estado	1	2
>*q0	q1	q5
q1	q2	q3
q2	q3	q6
q3	q4	q1
*q4	q1	q5
q5	q3	q6
*q6	q1	q5

Estados finales: $F = \{q_0, q_4, q_6\}$

Estados no finales: $Q \setminus F = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}$

Paso 1 — Partición inicial Π_0

Se separan finales y no finales:

$$\Pi_0 = \{\{q_0, q_4, q_6\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5\}\}$$

Denotemos para comodidad:

- $A = \{q_0, q_4, q_6\}$ (clase de finales)
- $N = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}$ (clase de no-finales)

Paso 2 — Construir Π_1 refinando Π_0

Para cada estado obtenemos la **firma** (clase de destino al leer 1, clase de destino al leer 2) usando Π_0 :

- $q_0 \rightarrow (q_1, q_5) \rightarrow (N, N)$
- $q_1 \rightarrow (q_2, q_3) \rightarrow (N, N)$
- $q_2 \rightarrow (q_3, q_6) \rightarrow (N, F)$
- $q_3 \rightarrow (q_4, q_1) \rightarrow (F, N)$
- $q_4 \rightarrow (q_1, q_5) \rightarrow (N, N)$
- $q_5 \rightarrow (q_3, q_6) \rightarrow (N, F)$
- $q_6 \rightarrow (q_1, q_5) \rightarrow (N, N)$

Agrupamos estados según su firma dentro de Π_0 :

- Firma (N,N): $\{q_0, q_1, q_4, q_6\}$ — **ojo**: aunque q_0, q_4, q_6 son finales y q_1 no lo es; sin embargo la firma se evalúa *dentro de la misma clase* de Π_0 ; **no pueden mezclar finales y no-finales en la misma clase**. En la práctica debemos respetar Π_0 : la clase de finales (A) y la de no-finales (N) ya están separadas, así que sólo dividimos cada clase por firmas **internas**:

Descomposición correcta dentro de cada clase de Π_0 :

- Dentro de $A = \{q_0, q_4, q_6\}$: sus firmas son todas $(N, N) \rightarrow$ permanecen juntas: A sigue siendo $\{q_0, q_4, q_6\}$.
- Dentro de $N = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}$: firmas son $q_1:(N, N)$, $q_2:(N, F)$, $q_3:(F, N)$, $q_5:(N, F) \rightarrow$ se divide en:
 - $\{q_1\}$ (firma (N, N))
 - $\{q_2, q_5\}$ (firma (N, F))
 - $\{q_3\}$ (firma (F, N))

Por tanto:

$$\Pi_1 = \{\{q_0, q_4, q_6\}, \{q_1\}, \{q_2, q_5\}, \{q_3\}\}$$

(Las clases las etiquetamos para seguir: $A = \{q_0, q_4, q_6\}$, $B = \{q_1\}$, $C = \{q_2, q_5\}$, $D = \{q_3\}$.)

Paso 3 — Construir Π_2 a partir de Π_1

Calculamos firmas ahora en términos de las clases A,B,C,D:

Transiciones re-etiquetadas por clase:

- $q_0 \in A \rightarrow 1: q_1 \in B$; 2: $q_5 \in C \Rightarrow$ firma (B, C)
- $q_4 \in A \rightarrow 1: q_1 \in B$; 2: $q_5 \in C \Rightarrow$ firma (B, C)
- $q_6 \in A \rightarrow 1: q_1 \in B$; 2: $q_5 \in C \Rightarrow$ firma (B, C)
- $q_1 \in B \rightarrow 1: q_2 \in C$; 2: $q_3 \in D \Rightarrow$ firma (C, D)
- $q_2 \in C \rightarrow 1: q_3 \in D$; 2: $q_6 \in A \Rightarrow$ firma (D, A)
- $q_5 \in C \rightarrow 1: q_3 \in D$; 2: $q_6 \in A \Rightarrow$ firma (D, A)
- $q_3 \in D \rightarrow 1: q_4 \in A$; 2: $q_1 \in B \Rightarrow$ firma (A, B)

Comparando firmas dentro de cada clase de Π_1 :

- En A: q_0, q_4, q_6 tienen todos (B,C) \rightarrow A no se subdivide.
- En B: solo q_1 con (C,D) \rightarrow B no se subdivide.
- En C: q_2, q_5 ambos tienen (D,A) \rightarrow C no se subdivide.
- En D: solo q_3 con (A,B) \rightarrow D no se subdivide.

Así $\Pi_2 = \Pi_1$ (no hay cambios).

Condición de parada

Como $\Pi_2 = \Pi_1$, el proceso termina. La **partición final** es:

$$\Pi_1 = \{A = \{q_0, q_4, q_6\}, B = \{q_1\}, C = \{q_2, q_5\}, D = \{q_3\}\}$$

AFD mínimo resultante (construcción del cociente)

Cada clase se convierte en un estado del AFD mínimo. Tomamos transiciones por clases usando cualquier representante:

- Estado [A] (clase A, contiene el estado inicial q_0) — **estado inicial** y además **estado de aceptación** (porque contiene estados finales q_0, q_4, q_6).
 - $[A] \xrightarrow{1} [B]$ ($q_0 \xrightarrow{1} q_1 \in B$)
 - $[A] \xrightarrow{2} [C]$ ($q_0 \xrightarrow{2} q_5 \in C$)
- Estado [B] = $\{q_1\}$
 - $[B] \xrightarrow{1} [C]$ ($q_1 \xrightarrow{1} q_2 \in C$)
 - $[B] \xrightarrow{2} [D]$ ($q_1 \xrightarrow{2} q_3 \in D$)
- Estado [C] = $\{q_2, q_5\}$
 - $[C] \xrightarrow{1} [D]$ ($q_2 \xrightarrow{1} q_3 \in D$)
 - $[C] \xrightarrow{2} [A]$ ($q_5 \xrightarrow{2} q_6 \in A$)
- Estado [D] = $\{q_3\}$
 - $[D] \xrightarrow{1} [A]$ ($q_3 \xrightarrow{1} q_4 \in A$)
 - $[D] \xrightarrow{2} [B]$ ($q_3 \xrightarrow{2} q_1 \in B$)

Tabla de transición del AFD mínimo:

Estado	1	2	Acept.
[A]	[B]	[C]	sí
[B]	[C]	[D]	no
[C]	[D]	[A]	no
[D]	[A]	[B]	no

- Estado inicial: [A] (contiene q_0).
- Conjunto de aceptaciones: $\{[A]\}$ (porque q_0, q_4, q_6 están en la misma clase).

Observaciones finales (didácticas)

- Estados equivalentes identificados y **unidos**:
 - q_0, q_4 y q_6 son indistinguibles \rightarrow forman [A].
 - q_2 y q_5 son indistinguibles \rightarrow forman [C].
 - $q_1 \rightarrow [B]$ y $q_3 \rightarrow [D]$ permanecen solos.
- El AFD mínimo resultante tiene **4 estados**.
- La partición final se alcanzó tras una sola refinación (Π_1) porque $\Pi_2 = \Pi_1$.