Movilidad social en un modelo de agentes inhomogéneos y su correlación con la desigualdad

A. Y. Bautista Sierra*

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia

Agosto 6 de 2021

Resumen

Un modelo basado en agentes en donde cada uno de ellos se puede diferenciar por alguna característica, ya sea educación, productividad u otra, es un modelo más cercano a la realidad, pues en una sociedad se puede observar una clara diversificación de las personas. Tal modelo corresponde a un modelo de agentes inhomogéneos y permite entender el origen de la desigualdad. En este trabajo se realiza un análisis de la movilidad social y de la correlación negativa que existe entre la desigualdad y la movilidad social en un modelo de agentes inhomogéneos, pues una sociedad que es cada vez más desigual se ve realmente afectada si la probabilidad que tienen sus individuos de mejorar su estatus económico disminuye. Lo anterior resalta la importancia de conocer el origen de esta correlación, sus posibles causas y proponer medidas para erradicar esta problemática. Para este fin se calculó de forma analítica la variación de la cantidad de individuos en una clase social particular, posteriormente se realizó una definición de la movilidad como la probabilidad que tienen los individuos de aumentar su ingreso. Después, se desarrollo una simulación con POO del modelo de agentes inhomogéneos propuesto y se encontró la diferenciación de clases sociales de forma natural. También se observó que el tipo de interacción que se realice afecta significativamente la distribución de la productividad y el ingreso para los agentes.

1. Introducción

El estudio de la distribución de la riqueza y el ingreso en una sociedad es un tema de gran importancia, pues permite crear una visión de la desigualdad económica en un país. La desigualdad económica ha estado aumentando considerablemente a nivel mundial, encontrándose incluso en algunos países que el 10 % de la población más rica tiene un ingreso de alrededor de nueve veces el ingreso del 10 % de la población más pobre [1], lo que muestra una gran brecha entre los ricos y los pobres. Además, esto usualmente se ve acompañado de una disminución en la movilidad social, un concepto que establece qué tan posible es para un individuo mejorar su estatus económico [2]. En un país en donde la desigualdad aumenta y la movilidad disminuye, las oportunidades de las personas que tratan de subir de clase social se ven severamente afectadas. Esta problemática refleja la realidad que viven muchos países actualmente y se hace vital estudiar esta correlación y las posibles medidas que se puedan tomar para mejorar las condiciones de vida de las personas.

La desigualdad económica tiene múltiples consecuencias que pueden llegar a afectar el crecimiento económico de una nación. Usualmente se hacen estudios a partir de datos empíricos que generalmente llevan a distribuciones de tipo log-normal, ley de potencias, exponencial o alguna combinación de las mismas,

*aybautistas@unal.edu.co

incluso se ha observado que por encima de cierto umbral la distribución sigue una ley de potencias [3]. Sin embargo, el tratar de explicar por qué surge la desigualdad en un país, representa un tema de debate, pues sus causas son diversas [1] y no se aplican uniformemente a todos los países. Análisis con medidas que cuantifican la desigualdad, como el índice de Gini, han observado que los países nórdicos, por ejemplo, tienen índices de desigualdad más bajos en comparación con los países en vía de desarrollo [4]. Si se pudiera realizar un análisis de los comportamientos de cada uno de los individuos que hacen parte de una sociedad, se podría estudiar a fondo el origen de la desigualdad en un país.

Se ha observado que la desigualdad económica esta relacionada con la distribución del ingreso y la riqueza. Vilfredo Pareto en el año 1897, fue el primero en demostrar que los ingresos de las personas más ricas se distribuían siguiendo una ley de potencias [5]. Estudios subsecuentes han mostrado que por debajo de cierto valor umbral, los ingresos presentan una distribución de tipo exponencial y por encima del mismo, se sigue una ley de potencias [6, 3]. Además, se ha encontrado que tal distribución exponencial (Gibbs-Boltzmann) surge naturalmente a partir de un modelo de N agentes idénticos basado en la mecánica estadística [7]. Este hecho se deriva de la distribución de energía para N partículas idénticas bajo el formalismo del ensamble canónico, lo cual demuestra que en una sociedad donde los N agentes están en igualdad de condiciones, la distribución para el ingreso será de tipo exponencial con un índice de Gini G=0.5 [8]. Además, la ley de Pareto se puede reproducir en las colas superiores de las distribuciones del ingreso [6, 3, 9]. El hecho de que se observen distribuciones tipo exponencial y ley de potencias simultáneamente en las distribuciones para el ingreso y la riqueza, puede ser evidencia de que la desigualdad tiene un origen complejo [8].

La similaridad que existe entre el régimen exponencial de la distribución del ingreso y la distribución de Boltzmann para la energía de las partículas en un sistema ha inspirado los modelos cinéticos de intercambio, en donde, en analogía con las partículas interactuando en un gas e intercambiando energía, se modela un sistema económico cerrado compuesto por N agentes, que intercambian dinero mediante una transacción bajo la condición de que el dinero total se conserva. A partir de las interacciones microscópicas de los N agentes, se pueden determinar variables macroscópicas, al igual que las propiedades en mecánica estadística permiten establecer una relación con la termodinámica [7].

Múltiples variantes de estos modelos basados en agentes han sido analizadas, por ejemplo, Dragulescu y Yakovenko estudiaron el papel de la deuda [7], Viaggiu realizó el primer estudio de un modelo económico con crédito y deuda [10], Chakrabarti y Chakraborti extendieron el modelo para estudiar el efecto de la propensión al ahorro (adversión al intercambio) en la distribución del dinero [9]. Los autores M. Patriarca, A. Chakraborti y K. Kaski estudiaron la distribución de equilibrio del modelo CC analíticamente y numéricamente, se encontró que la distribución de equilibrio para el dinero corresponde a una distribución tipo Gamma [11]. A. Chaterjee, B.K Chakrabarti y S. S Manna consideraron el modelo CC pero tomaron el parámetro λ como aleatorio y encontraron que en el límite asintótico la distribución del ingreso sigue una ley de potencias [12]. Los autores A. Chaterjee y B.K Chakrabarti extendieron un modelo basado en agentes introduciendo un factor para analizar la distribución de la riqueza y encontraron que correspondía a una fucnión Gamma cuando *lambda* era uniforme [12].

En la mayoría de los trabajos realizados se puede notar que los agentes se consideran homogéneos, es decir, poseen iguales condiciones de inteligencia, productividad, educación o cualquier otra cualidad que permita diferenciarlos, lo cual no se asemeja a la realidad, en donde cada persona tiene diferentes características que pueden determinar su nivel de ingresos [8].

Songtao Tian y Zhirong Liu [8] en el año 2019 propusieron un modelo basado en agentes inhomogéneos para estudiar el origen de la desigualdad y las posibles medidas que pueden tomarse para mejorar esta problematica. Allí se hace una descripción en la cual cada uno de los agentes produce bienes insustituibles y tendrá una producción (en \$/año) dependiendo de factores como su recurso propio, su productividad y su avance tecnológico. En este modelo se encuentra la diferenciación en clases sociales de forma natural [8]. Allí no se incluye la movilidad social como un concepto a estudiar, el cual es fundamental pues análisis empíricos han encontrado una correlación negativa con la desigualdad [13, 14]. El estudiar la movilidad social dentro de un modelo de agentes inhomogéneos permite dar una visión más clara del origen de esta correlación, que afecta considerablemente a muchos países.

Se han realizado diversos estudios sobre la movilidad social, en su mayoría con datos empíricos, uno de ellos es el realizado por D. Andrews y A. Leigh en el que se encontró que los hijos que crecían en sociedades más desiguales para el año 1970 tenían menos probabilidad de experimentar la movilidad social para el año 1999 [13], y un estudio más reciente de A. Michelangeli y U. Türk presenta el papel de las ciudades en la movilidad social, en donde con datos de estudiantes de Italia, Grecia y Portugal se encontró que la movilidad social tiende a ser más alta en: (i) las ciudades más grandes a nivel poblacional, (ii) ciudades más accesibles y (iii) ciudades con bajos índices de desigualdad y altos niveles de educación superior [15].

Es importante notar entonces que la desigualdad es una problemática que ha afectado a la humanidad desde los tiempos más remotos y que su origen es un gran tema de debate, pero de la misma forma que los modelos cinéticos han permitido estudiar la distribución del ingreso y la riqueza, un modelo basado en agentes inhomogéneos brinda una descripción más efectiva de la economía real y permite determinar las causas primarias de la desigualdad de forma más acertada.

El propósito de este trabajo consiste en hacer un análisis de la movilidad social en un modelo de agentes inhomogéneos tomando como base el planteado por Songtao Tian y Zhirong Liu [8]. Para este fin se adapta la definición analítica para la movilidad social encontrada por Maria Bertottia y Giovanni Modanese [2] al modelo propuesto y teniendo en cuenta el efecto de la variación de algunos parámetros fundamentales, como la productividad o el avance tecnológico en la movilidad social, se proponen las posibles causas de la correlación negativa y se plantean medidas que pueden ayudar a reducir los índices de la desigualdad.

En este trabajo se propone estudiar la movilidad social en un modelo basado en agentes inhomogéneos. El resto del proyecto se divide en secciones como se sigue. La sección 2 presenta las generalidades de los modelos planteados en los artículos de partida ([8, 2]). La sección 3 describe el objetivo general y la sección 4 cada uno de los pasos analíticos y computacionales para desarrollar el proyecto. La sección 5 corresponde al desarrollo de cada uno de los objetivos específicos, en la cual se determina de forma natural la diferenciación de clases sociales, la distribución de productividad obtenida en cuatro años diferentes, la cual cambia drásticamente según el tipo de interacción que se realice; también se encuentra que la distribución del ingreso tiende a ser de tipo exponencial cuando el tiempo va avanzando. Finalmente, en las secciones 6 y 7 se muestra el análisis de los resultados y las conclusiones. Al final se presenta un anexo con el código desarrollado.

2. Marco Teórico

A continuación se presenta una visión general del modelo propuesto por Songtao Tian y Zhirong Liu [8] de agentes inhomogéneos y la formulación matemática de la movilidad social por Maria Bertottia y Giovanni Modanese [2], modelos importantes pues marcan el punto de partida para el desarrollo del proyecto.

2.1. Modelo de agentes inhomogénos

Modelo propuesto por Songtao Tian y Zhirong Liu, [8]. Se simula una economía simple, cerrada compuesta por un número considerable de individuos (agentes). El principio básico consiste en que cada persona produce bienes y la energía que tiene (riqueza) determina en que clase social se encuentra, la cual a su vez, establece qué consumo tendrá [8]. Si el individuo no puede pagar el mínimo nivel de consumo podrá o vender su bien y convertirse en un empleado, o morir [8].

2.1.1. Componentes principales del modelo

1. **Producción**
   La producción de una persona en un paso de tiempo está dada por [8]:

$$\text{production} = \text{resource} \times \text{productivity} \times \text{ScienceEnhanced} \tag{1}$$

   El factor *productivity* se estima aleatoriamente a partir de una distribución gaussiana y se asume que no puede ser negativo [8]. Con el fin de evitar la acumulación infinita se considera que la energía decae con el tiempo [8].

2. **Consumo**
   En cada paso de tiempo cada persona es ubicada en una de las siguientes clases sociales de acuerdo a la energía que posea en el año anterior [8]:

   - Alive: el consumo es e_{Alive}, el cual corresponde al mínimo consumo para sobrevivir. Si una persona (agente) tiene una energía $e < e_{alive}$ morirá o podrá efectuar una transacción tipo *broke sale*, de la cual se hablará más adelante. Si una persona puede pagar el consumo de la siguiente clase (Enough), puede ascender a ella.
   - Enough: se consume e_{Enough} para tener ropa y comida suficiente para vivir. Al igual que en el caso anterior, una persona puede ascender a las siguiente clase si su energía se lo permite.
   - Satisfied: se consume $e_{Satisfied}$, que es mucho más alto que e_{Enough} para tener una vida satisfactoria. A diferencia de las dos clases anteriores, una persona de la clase Satisfied puede elegir si asciende a la clase Luxury o no, incluso si puede pagarlo.
   - Luxury: es la clase más alta, tener una vida lujosa corresponde a tener un consumo e_{Luxury}.

   Es importante aclarar que si un agente no tiene la energía suficiente que requiere el consumo de su respectiva clase social, descenderá a la clase más cercana y de igual forma si *energy*$< e_{Alive}$ el individuo muere [8].

3. **Broke Sale**
   Es una transacción que se puede efectuar cuando un agente esta en peligro de muerte ($energy < e_{Alive}$). Consiste en que un agente (seller) puede vender su recurso a otra persona (buyer) y convertirse en su empleado, a raíz de esto, el comprador (buyer, investor) debe pagar e_{Alive} al vendedor (seller) para salvarlo de la muerte, y adicionalmente pagar e_{Alive} como salario al vendedor cada año [8]. Con la ayuda del comprador, la productividad del vendedor (empleado) aumenta según la siguiente expresión [8]:

$$productivity_{seller,after} = \frac{(productivity_{seller,before} + productivity_{investor})}{2} \tag{2}$$

   La producción que genere el empleado a partir del recurso vendido irá toda al comprador (investor), y la diferencia entre la producción subsecuente y el salario e_{Alive} hará parte del *InvestIncome* del inversionista (buyer) [8].

4. **Premium Buying**
   Es un tipo de transacción que se considera en el modelo después de que todas las personas que no tenían la posibilidad de sobrevivir vendieron su recurso con *broke sale* [8]. En este proceso un agente vende su recurso a un inversionista para volverse su empleado, el inversionista debe pagar dos veces

el consumo de la clase del vendedor en el momento de la transacción y cada año consecutivo deberá pagarle una tasa *ratioPremium* [8]. De igual forma, la productividad del vendedor aumentará según la ecuación 2 y toda su producción irá al inversionista [8].

2.1.2. Cálculo de las cantidades macroscópicas en el modelo

La simulación de esta economía se realiza en cuatro pasos principales [8]:

1. Un agente i produce bienes $production(i,t)$ según la ecuación 1, dependiendo de si este agente es un empleado o un inversionista va a tener un ingreso dado por $WorkIncome(i,t)$ [8]
   Si i es un inversionista tendrá:
   $$WorkIncome(i,t) = production(i,t) \tag{3}$$
   Si i es un empleado tendrá:
   $$WorkIncome(i,t) = salary(i) \tag{4}$$
   Según el tipo de transacción que se haya realizado, el inversionista o el agente j que contrata empleados tendrá una ganancia $InvestIncome$ de [8]:
   $$InvestIncome(j,t) = \sum_{iin(i,j)} [production(i,t) - salary(i)] \tag{5}$$
   en donde la suma va sobre todos los empleados i que el inversionista j tenga. El ingreso total para el agente i en un paso de tiempo t (un año) será entonces [8]:
   $$income(i,t) = WorkIncome(i,t) + InvestIncome(i,t) \tag{6}$$
   Este valor se combina con el ahorro $saving(i,t)$ del año anterior para determinar la riqueza $wealth(i,t)$ [8]:
   $$wealth(i,t) = income(i,t) + saving(i,t) \times (1 - 1/\tau_{Decay}) \tag{7}$$
   en donde τ_{Decay} corresponde al tiempo de decaimiento de la energía.

2. Cada individuo i es clasificado en una de las cuatro clases sociales según la riqueza que tenga $wealth(i,t)$ y consume el $consumption(i,t)$ correspondiente [8].

3. Se realizan transacciones o actividades de inversión de tipo *Broke Sale* o de tipo *Premium Buying*. Cuando el individuo i le vende su recurso al inversionista j, el agente i gana la inversión $GainedInvest(i,t)$ y se vuelve un empleado de j, entonces j debe pagar la cantidad $PayInvest(j,t)$ dada por [8]:
   $$PayInvest(j,t) = \sum_{iin(i,j)} GainedInvest(i,t) \tag{8}$$
   Cabe aclarar que si un agente i en peligro de muerte no logra encontrar un inversionista al cual vender su recurso, el individuo i morirá y se descarta de la simulación en los años consecuentes [8].

4. Después de realizar los pasos (1-3), toda la energía que queda se convierte en el ahorro que se empleará en el siguiente año y esta dado por [8]:
   $$saving(i,t) = wealth(i,t) + GainedInvest(i,t) - consumption(i,t) - PayInvest(i,t) \tag{9}$$

Con este modelo se encuentra la diferenciación de clases sociales de forma natural, así como un variación en la distribución de la productividad en función del tiempo y para cada clase. También se determina que la distribución del ingreso sigue una ley de potencias para los más ricos y una distribución de tipo exponencial para las personas con medios y bajos ingresos, además de un gran nivel de desigualdad [8]. Estos son algunos resultados que se esperan encontrar dentro del proyecto.

2.2. Movilidad Social

La movilidad social es un concepto que representa la posibilidad que tiene una persona de mejorar su estatus económico [2]. Además, se ha observado que una sociedad desigual se puede ver afectada seriamente si sus niveles de movilidad son bajos [2]. Análisis empíricos han mostrado que la desigualdad y la movilidad tienen una correlación negativa [13, 14], lo cual significa que entre más desigual es una sociedad, menor es la posibilidad de mejorar las condiciones económicas por medio de educación o trabajo.

En el modelo propuesto por Maria Bertottia y Giovanni Modanese se estudia un modelo cinético para describir los intercambios económicos en una sociedad y se presenta una definición analítica para la movilidad [2]. En este modelo se habla de movilidad en el equilibrio y se considera una movilidad a corto plazo, lo que le da una probabilidad a cada individuo de ascender de clase social [2].

Inicialmente se plantean las ecuaciones diferenciales de balance para establecer la variación de la proporción de individuos pertenecientes a una clase social, las cuales estan dadas por:

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C^i_{hk} X_h X_k - \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C^h_{ik} X_i X_k + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} T^i_{[h,k]}(X) X_h X_k \tag{10}$$

en donde C^i_{hk} representa la probabilidad de que un individuo de la clase h pertenezca a la clase i después de una interacción con un individuo de la clase k y $T^i_{[h,k]}$ representa la variación de la clase i cuando un individuo de la clase h interactúa con uno de la clase k, pero $T^i_{[h,k]}$ corresponde a una probabilidad de transición indirecta pues depende de la redistribución de los impuestos por parte del Gobierno [2].

Para llegar a una expresión analítica de la movilidad social, inicialmente se define la probabilidad de que un individuo perteneciente a la clase i, con i=2,3, .. n-1, sea promovido a una clase más alta por medio de interacciones directas o indirectas respectivamente como [2]:

$$P_{i,exchanges(individual)} = \frac{S}{r_{i+1} - r_i} \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}(1 - \tau_i)\tilde{X}_k \tag{11}$$

y

$$P_{i,welfare(individual)} = \frac{S}{r_{i+1} - r_i} \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{X}_j} \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{h,k}\tau_k \tilde{X}_h \tilde{X}_k \tag{12}$$

en donde la variable $r \in [0, +\infty)$ representa el ingreso individual, y r_i es el ingreso correspondiente a la clase social i, pues la población ha sido dividida en un número finito de clases $0 = r_0 < r_1 < r_2 < ... < r_n$ [2]. El intercambio de dinero se da cuando un individuo de la clase h paga a un individuo de la clase k, una cantidad de dinero S tal que $S < (\tilde{r_{i+1}} - \tilde{r}_i)$ con $\tilde{r}_i = (r_{i-1} + r_i)/2$, que representa el ingreso promedio de los individuos de la clase i [2]. La variable $p_{h,k}$ es la probabilidad de que en un encuentro del individuo-h con el individuo-k, el que pague sea el de la clase h [2]. Para el modelo de una familia se considera $p_{h,k}$ como [2]:

$$p_{h,k} = min(\tilde{r}_h, \tilde{r}_k)/4\tilde{r}_n \tag{13}$$

El termino $\tilde{X}_h$ es la fracción de individuos en la clase h cuando el sistema llega al equilibrio [2]. También se introduce w_i, que denota que los subsidios no están distribuidos uniformemente, y se define como [2]:

$$w_j = \tilde{r}_{n+1-j} + \frac{2}{n-1}\gamma(j - \frac{n+1}{2})(\tilde{r}_n - \tilde{r}_1) \tag{14}$$

aquí, $\gamma \in (0, 1/2)$, lo cual nos indica que entre más pequeño sea el valor de gamma, mayor será la diferencia $w_1 - w_n$ [2]. Finalmente el valor τ_i es una tasa de impuesto que se agrega al modelo, en el que si un individuo-h paga una cantidad de dinero S, el individuo-k gana una cantidad de dinero $S(1-\tau_k)$ mientras que el gobierno recibe la cantidad $S\tau_k$, la cual se retorna a la sociedad [2].

Una vez definido esto, se puede obtener la probabilidad total de que un solo individuo avance [2]:

$$P_{i(individual)} = P_{i,exchanges(individual)} + P_{i,welfare(individual)} \tag{15}$$

Posteriormente, se define la probabilidad promedio para la clase i de ser promovida a la siguiente clase como [2]:

$$P_{i,exchanges(class)} = \frac{1}{(1-\tilde{X}_1-\tilde{X}_n)} \frac{S}{r_{i+1}-r_i} \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}(1-\tau_i)\tilde{X}_k\tilde{X}_i \tag{16}$$

y

$$P_{i,welfare(class)} = \frac{1}{(1-\tilde{X}_1-\tilde{X}_n)} \frac{S}{r_{i+1}-r_i} \frac{w_i\tilde{X}_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j\tilde{X}_j} \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{h,k}\tau_k\tilde{X}_h\tilde{X}_k \tag{17}$$

con i=2,..,n-1. Se define así entonces la probabilidad total para una clase como [2]:

$$P_{i(class)} = P_{i,exchanges(class)} + P_{i,welfare(class)} \tag{18}$$

La medida de movilidad en este modelo tiene en cuenta una probabilidad colectiva de que todas las clases asciendan, desde la segunda hasta la clase n-1, entonces se define [2]:

$$P_{exchanges(collective)} = \frac{1}{(1-\tilde{X}_1-\tilde{X}_n)} \frac{S}{r_{i+1}-r_i} \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} p_{k,i}(1-\tau_i)\tilde{X}_k\tilde{X}_i \tag{19}$$

y

$$P_{welfare(collective)} = \frac{1}{(1-\tilde{X}_1-\tilde{X}_n)} \frac{S}{r_{i+1}-r_i} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{w_i\tilde{X}_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j\tilde{X}_j} \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{h,k}\tau_k\tilde{X}_h\tilde{X}_k \tag{20}$$

Finalmente, la movilidad se define como la suma [2]:

$$M = P_{exchanges(collective)} + P_{welfare(collective)} \tag{21}$$

2.3. Índice de Gini

El estudio de la distribución del ingreso y su grado de concentración en una sociedad puede realizarse a partir del análisis del coeficiente de Gini. El índice de Gini se interpreta geométricamente como 1 menos el área entre la curva de Lorentz y la línea diagonal que representa perfecta igualdad [**lerman1984note**]. Este índice corresponde a una medida de dispersión que permite medir la desigualdad en una distribución [16]. El índice de Gini (G) se define a partir de la curva de Lorentz $F(X)$ como:

$$G = 1 - 2\int_0^1 F(X)dX$$

en donde X representa el ingreso agregado e Y la población agregada [16].

El índice de Gini se puede calcular a partir de la ecuación 22, que se usa particularmente cuando se tienen datos empíricos.

$$G = 1 - \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})(Y_k + Y_{k-1}) \tag{22}$$

Aquí X_k representa el ingreso agregado y Y_k es la población agregada. Es de resaltar que si se hace el intercambio en la sumatoria $(X_k + X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})$ se obtiene el mismo resultado para G. El valor de este coeficiente estará siempre entre 0 y 1, en donde el valor $G = 0$ corresponde a máxima igualdad,i.e, todos los individuos poseen el mismo ingreso y $G = 1$ muestra máxima desigualdad [16].

3. Planteamiento del Problema

El sistema econofísico a estudiar corresponde a un modelo basado en agentes que simula una economía simple y cerrada. Este sistema ha sido abordado en los dos artículos de partida con la diferencia de que en el artículo de Songtao Tian y Zhirong Liu se propone un modelo de agentes inhomogéneos, es decir, estos pueden diferenciarse por alguna característica particular, ya sea educación, nivel de ingresos, avance tecnológico, entre otros [8]. En el segundo artículo de partida Maria Bertottia y Giovanni Modanese proponen un modelo cinético en el que los agentes realizan intercambios pero estos no se diferencian, se define la movilidad social analíticamente y se estudia su correlación con la desigualdad [2].

La simulación de un modelo basado en agentes inhomogéneos propuesta por Songtao Tian y Zhirong Liu se realiza en cuatro pasos que involucran: primero, cada uno de los agentes produce bienes y recibe un ingreso dependiendo si es un empleado o un inversionista, cuyo valor se combina con el ahorro que tenga cada uno para estimar la riqueza; segundo, cada uno de los agentes es ubicado en una clase social dependiendo de su energía y el nivel de consumo de cada clase; tercero, se realizan dos tipos de interacciones en los cuales se establece que agentes serán empleados y cuales de ellos serán inversionistas; finalmente, toda la energía restante hará parte del ahorro que tendrá cada uno para el siguiente año [8]. De esta forma se observa entonces que se puede simular una economía de forma más realista, pues las personas pobres le venderán sus bienes a las personas más ricas, permitiendo o facilitando la acumulación de la riqueza y la ubicación de los individuos naturalmente en clases sociales.

En el modelo planteado por Maria Bertottia y Giovanni Modanese se supone un modelo cinético de intercambio de dinero en el que no se da una distinción de los agentes, i.e, es un modelo homogéneo. Inicialmente se divide la población en un número finito de clases teniendo en cuenta los rangos de ingreso en los que se encuentran, después en cada paso de tiempo se plantea una interacción entre individuos de diferentes clases, para esto se define una probabilidad $p_{h,k}$ de que se de un encuentro [2]. Una vez el sistema llega al equilibrio se puede hacer una estimación de la probabilidad de que un individuo ascienda de clase social según parámetros como la cantidad de dinero a intercambiar y el rango de ingresos de la siguiente clase social [2]. Al final se observa como evoluciona la movilidad social con el tiempo y se encuentra la correlación negativa con la desigualdad al estimar el índice de Gini [2].

El modelo de agentes inhomogéneos propuesto por Songtao Tian y Zhirong Liu [8] permite estudiar y entender el origen de la desigualdad en una sociedad y propone diversas políticas para resolver el problema. Sin embargo, en este modelo no se hace un estudio con la movilidad social, el cual es un concepto importante, pues permite determinar la posibilidad que tienen los individuos de mejorar su estatus económico. Como se menciono en la sección previa, estudios empíricos han demostrado que existe una correlación negativa entre la desigualdad y la movilidad, por lo cual se hace fundamental entender el origen de esta correlación. Al incluir la movilidad social en el modelo de agentes inhomogéneos se pueden identificar las causas de esta correlación y proponer soluciones mas cercanas a la realidad para disminuir la desigualdad en un país.

En este trabajo se propone estudiar un modelo de agentes inhomogéneos con el fin de analizar la distribución de ingresos y el origen de la desigualdad tomando como base el modelo propuesto por Tian y Liu [8]. A partir de allí, se pretende hacer un análisis de la movilidad social en el modelo, así como estudiar la correlación entre la desigualdad y la movilidad.

Para este fin se proponen 9 pasos metodológicos para resolver el problema. Inicialmente, se divide la población en cuatro clases sociales según el valor de consumo que tiene cada una, a partir de allí, analíticamente se calcula la variación de la fracción de individuos pertenecientes a una clase social particular con las ecuaciones diferenciales de balance del modelo propuesto por Maria Bertottia y Giovanni Modanese [2] teniendo en cuenta que no se considera una tasa de tributación, por lo tanto solo existen interacciones entre los agentes sin intervención del Gobierno.

Posteriormente, se define la probabilidad de que dos individuos de diferentes clases sociales se encuentren teniendo en cuenta la riqueza promedio de cada clase social y el hecho de que por lo general, los más pobres pagan menos dinero y menos frecuentemente que las personas de clase media o clase alta. Con estos conceptos definidos se puede construir una definición analítica de la probabilidad de que un individuo perteneciente a una clase social sea promovido a la siguiente clase teniendo en cuenta factores como la cantidad de riqueza que se intercambia según el tipo de transacción que se efectúe, la probabilidad de que dos agentes de diferentes clases se encuentren y el número de individuos pertenecientes a una clase social en particular cuando el sistema llega al equilibrio. Después, se define una probabilidad promedio de que todos los individuos de una clase suban a la siguiente clase. Finalmente, se define un probabilidad colectiva de que todas la clases desde la 2 hasta la (n-1) sean promovidas, la cual al final corresponde a la movilidad social. Se puede ver la variación en el tiempo de cada una de estas probabilidades con las poblaciones de equilibrio de cada una de las clases.

Una vez se ha definido analíticamente la movilidad social para el modelo se pretende construir una simulación con programación orientada a objetos del modelo propuesto por Tian y Liu [8] en la que se creará un vector de agentes, en el que cada uno tendrá características como educación, recurso, producción, avance tecnológico, entre otros. Se construyen las cuatro clases sociales en la simulación con otro vector de objetos. Se crean las dos funciones de interacción tipo Broke Sale y Premium Buying. Se pone a evolucionar el sistema y al final, cuando éste llegue al equilibrio se calculan las probabilidades definidas analíticamente para el modelo y se calcula la movilidad.

Además, en la simulación se construye una función para calcular el índice de Gini, se varían algunos parámetros para aumentar la igualdad y hacer que el índice de Gini decrezca, por ejemplo, se puede pasar de un avance tecnológico de 0.5 a 1 sin cambiar los demás parámetros, de esta forma se puede evaluar el efecto que esto tiene en la estimación de la movilidad social y analizar su correlación con la desigualdad.

4. Objetivo General

Estudiar la movilidad social en un modelo basado en agentes inhomogéneos como el propuesto por Songtao Tian y Zhirong Liu y a partir de allí, determinar las posibles causas de la correlación negativa entre la desigualdad y la movilidad. Para este fin, se encuentra analíticamente la definición de la movilidad social a partir de la definición de una probabilidad individual de que una persona ascienda de clase social tomando como base el artículo de partida de Bertottia y Modanese.

5. Objetivos Específicos

1. Calcular analíticamente la variación de la cantidad de individuos pertenecientes a una clase social en particular con las ecuaciones diferenciales de balance propuestas por Maria Bertottia y Giovanni Modanese.

2. Crear una definición analítica de movilidad social para el modelo de agentes inhomogénenos partiendo

de la definición de la probabilidad que tiene un individuo de ascender de clase social propuesto por Maria Bertottia y Giovanni Modanese.

3. Simular el modelo de agentes inhomogéneos en el que los individuos trabajan, invierten y consumen tomando como base el modelo construido por Songtao Tian y Zhirong Liu.
4. Encontrar la diferenciación de clases y la distribución del ingreso y la riqueza con la simulación del modelo de agentes inhomogénos.
5. Incluir las probabilidades definidas analíticamente a nivel individual, de clase y colectivo de ascender de clase social dentro de la simulación y evaluar su evolución en el tiempo.
6. Calcular la movilidad social y el índice de Gini en la simulación con la definición analítica que se tiene para cada uno de estos conceptos.
7. Variar parámetros del modelo para aumentar la igualdad y ver el efecto que tiene en la movilidad calculada para encontrar la correlación y analizar los resultados obtenidos.

6. Desarrollo de los objetivos específicos y análisis de resultados

1. **Desarrollo objetivo específico 1**

Se realiza un desarrollo similar al que se plantea en la referencia de Maria Bertotti y Giovanni Modanese [2] para el modelo de agentes inhomogéneos considerado.

El ingreso que tiene un agente-i en el año t esta dado por:

$$income(i,t) = WorkIncome(i,t) + InvestIncome(i,t) \tag{23}$$

Esto se combina con el ahorro que tuvo en el año anterior para calcular la riqueza en el año t:

$$wealth(i,t) = income(i,t) + saving(i,t-1)(1 - 1/\tau_{Decay}) \tag{24}$$

Se definen cuatro clases sociales según el nivel de riqueza de cada uno de los individuos:

$$Alive < Enough < Satisfied < Luxury$$

La fracción de individuos que tienen riqueza entre $[w_{i-1}, w_i)$ es:

$$X_i = \int_{w_{i-1}}^{w_i} x_i dw = x_i(w_i - w_{i-1}) \tag{25}$$

donde x_i es la densidad de la población cuya riqueza pertenece al intervalo $[w_{i-1}, w_i)$ en el equilibrio y se considera constante. La riqueza de esta fracción de individuos es:

$$W_i = \int_{w_{i-1}}^{w_i} w x_i dw = x_i \frac{(w_i^2 - w_{i-1}^2)}{2} \tag{26}$$

También se tiene que:

$$W_i = X_i \bar{w_i} \tag{27}$$

donde $\bar{w_i} = \frac{(w_{i-1}+w_i)}{2}$ es la riqueza promedio de los individuos de la clase i.
Se introducen las probabilidades de transición de clase cuando dos individuos se encuentran (directas):

$$P_{hk}^i \in [0,1] \text{para} i, h, k \in 1, ..., n$$

The table of game:

$$h = k : \begin{cases} A_{hk}^{i=h} = 1 \\ A_{hk}^{i \neq h} = 0 \end{cases}$$

$$h \neq k : \begin{cases} |h-k| \leq m : \begin{cases} h = 1 \text{ or } h = n : \begin{cases} A_{hk}^{i=h} = 1 \\ A_{hk}^{i \neq h} = 0 \end{cases} \\ h \neq 1,\ h \neq n : \begin{cases} h < k : \begin{cases} A_{hk}^{i=h-1} = 1 \\ A_{hk}^{i \neq h-1} = 0 \end{cases} \\ h > k : \begin{cases} A_{hk}^{i=h+1} = 1 \\ A_{hk}^{i \neq h+1} = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ |h-k| > m : \begin{cases} h < k : \begin{cases} A_{hk}^{i=h+1} = 1 \\ A_{hk}^{i \neq h+1} = 0 \end{cases} \\ h > k : \begin{cases} A_{hk}^{i=h-1} = 1 \\ A_{hk}^{i \neq h-1} = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Figura 1: Tablas de reglas de juego derivadas por Maria Berotti en la referencia [17]

aquí n representa el número de clases sociales. Se cumple entonces que:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{hk}^{i} = 1 \tag{28}$$

donde P_{hk}^{i} representa la probabilidad de que un individuo de la clase h pertenezca a la clase i después de una interacción con un individuo de la clase k.

La variación en el tiempo del número de personas pertenecientes a las n-clases sociales se describe con las ecuaciones diferenciales de balance [2]:

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P_{hk}^{i} X_h X_k - \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P_{ik}^{h} X_i X_k \tag{29}$$

la cual se puede simplificar con la ecuación 28 y se encuentra que:

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P_{hk}^{i} X_h X_k - X_i \sum_{k=1}^{n} X_k \tag{30}$$

estas son ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales cuya solución es complicada cuando se tiene un número grande de clases sociales. En este caso se tienen n=4 clases sociales y se pueden encontrar las soluciones asintóticas para las poblaciones de equilibrio de forma analítica.
La probabilidad P_{hk}^{i} es una matriz de tamaño $n \times n$ y se van a tener cuatro matrices, una para cada una de las clases sociales. Estas matrices son llamadas tablas de reglas de juego y definen las reglas que deben seguir los pares de agentes en la interacción, son reglas estocásticas y las que se emplearán aqui fueron estimadas para una aplicación a la dinámica social en la referencia [17].
Teniendo en cuenta las tablas de la figura 1 se calculan los elementos de las matrices P^1, P^2, P^3, P^4 las cuales se muestran a continuación:

$$P^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Con estas matrices se puede obtener el sistema de cuatro ecuaciones diferenciales para la variable X_k que representa la cantidad de individuos en la clase-k a partir de la ecuación 30. La ecuación diferencial que se obtiene para X_1 es:

$$\frac{dX_1}{dt} = X_1^2 + X_1X_2 + X_2X_3 - X_1$$

Para X_2:

$$\frac{dX_2}{dt} = X_2^2 + 2X_1X_3 + X_3X_4 + X_1X_4 - X_2$$

Y la ecuación para X_3 es:

$$\frac{dX_3}{dt} = X_3^2 + X_2X_1 + 2X_2X_4 + X_1X_4 - X_3$$

y para X_4 la ecuación:

$$\frac{dX_4}{dt} = X_4^2 + X_3X_2 + X_4X_3 - X_4$$

Teniendo en cuenta que la dinámica se da en una superficie S se cumple que $X_4 = 1 - X_1 - X_2 - X_3$ y las ecuaciones diferenciales se pueden reducir al sistema de tres ecuaciones diferenciales dado por:

$$\frac{dX_1}{dt} = X_1^2 + X_1X_2 + X_2X_3 - X_1 \tag{35}$$

$$\frac{dX_2}{dt} = X_2^2 - X_3^2 - X_1^2 + X_3 - X_2X_3 + X_1 - X_1X_2 - X_2 \tag{36}$$

$$\frac{dX_3}{dt} = X_3^2 - X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_1X_2 - 2X_2X_3 - X_3X_1 + 2X_2 + X_1 - X_3 \tag{37}$$

Se introduce la función:

$$V(X_1, X_2, X_3) = \left(X_1 - \frac{(3-\sqrt{5})}{4}\right)^2 + \left(X_2 - \frac{(-1+\sqrt{5})}{4}\right)^2 + \left(X_3 - \frac{(-1+\sqrt{5})}{4}\right)^2$$

$$+\left(1-X_1-X_2-X_3-\frac{(3-\sqrt{5})}{4}\right)^2$$

Se calcula $\dot{V}(X_1,X_2,X_3)$ y se obtiene :

$$\dot{V}=-2X_1X_2(3X_1+4X_2-1)-2X_2X_3(5X_3+6X_2-3)-2X_1X_3(3X_1+2X_3-2)-12X_1X_2X_3-4X_1^2$$

$$+2X_1(a_0-2a_1)+2X_2(a_0-a_1)+2X_2^2(a_1-2a_0)+2X_1X_3(a_1-a_0)$$

con $a_1=\frac{(-1+\sqrt{5})}{4}$ y $a_0=\frac{(3-\sqrt{5})}{4}$. Finalmente derivando parcialmente $V(X_1,X_2,X_3)$ e igualando a cero se pueden determinar los puntos hacia los cuales tienden las poblaciones X_1,X_2,X_3,X_4, es decir, los puntos de equilibrio o las soluciones asintóticas del sistema de ecuaciones diferenciales. Estos son:

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$$

2. **Desarrollo objetivo específico 2**
En el modelo de agentes inhomogéneos considerado la única interacción que permite que los individuos asciendan de clase social es la transacción *Premium Buying*, pues allí las personas tienen un aumento considerable en su productividad y por ende en su riqueza, esto hace que sea más probable la transición. En la interacción tipo Broke Sale los agentes que no pueden sobrevivir pueden salvarse de la muerte pero llegan de forma inmediata a la clase Alive, la cual es la más baja. Teniendo en cuenta lo presentado anteriormente se construye una definición para la movilidad social a partir del desarrollo planteado por Maria Bertotti [2] y adaptando cada uno de los términos allí presentados para ajustarlos al modelo considerado en este trabajo.

La probabilidad que tiene un individuo perteneciente a la clase-i de ascender de clase social se define como:

$$P_{i,individual}=\frac{1}{w_{i+1}-w_i}\sum_{k=0}^{3}p_{k,i}\bar{X_k}S_k \tag{38}$$

en donde $p_{k,i}=min(\bar{w_k}\bar{w_i})/4\bar{w_n}$ es la probabilidad de que un individuo de la clase-i se encuentre con un individuo de la clase-k, y $\bar{w_k}=(w_{k+1}+w_k)/2$ representa la riqueza promedio de la clase k. Debido al hecho de que la interacción tipo Premium Buying es la que influye en la transición de clase se define la cantidad de dinero que se intercambia en la transacción como $S_k=2*min\_consumo$, pues al momento de realizarla el comprador (Investor) paga de forma inmediata dos veces el consumo que tiene el vendedor(Seller) en ese año por la compra de su recurso. Se realizó el cálculo de esta probabilidad con el consumo promedio de cada clase y el consumo mínimo y no se observó mayor diferencia, al final se consideró el consumo mínimo por simplicidad, el cual es para cada clase (e_alive,e_enough,e_satisfied,e_luxury)=(2500,7500,2 $\times$ 10^5,10^6). En esta ecuación $\bar{X_k}$ representa la cantidad de individuos de la clase-k cuando el sistema están en equilibrio.

Tomando como base la anterior definición para la probabilidad a nivel individual se construye una definición para la probabilidad de que toda una clase social i ascienda a la siguiente clase como:

$$P_{i,class}=\frac{1}{(w_{i+1}-w_i)(\bar{X_0}-\bar{X_n})}\sum_{k=0}^{3}p_{k,i}\bar{X_k}S_k\bar{X_i} \tag{39}$$

en donde X_0 y X_n representan las poblaciones de equilibrio de las clases 0 (Alive) y $n = 4$ (Luxury) respectivamente. Las demás variables son las mismas que se consideraron para la probabilidad $P_{i,individual}$.

La probabilidad colectiva de que todas las clases sociales desde la $i = 0$ (Alive) hasta la $i = 2$ (Satisfied) asciendan a la siguiente clase se definió como:

$$P_{i,collective} = \frac{1}{(\bar{X}_0 - \bar{X}_n)} \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{(w_{i+1} - w_i)} \sum_{k=0}^{3} p_{k,i} \bar{X}_k S_k \bar{X}_i \tag{40}$$

y esta probabilidad es la que al final representa la movilidad social:

$$M = P_{i,collective}$$

3. **Desarrollo objetivo específico 3**

Se realiza una simulación en Python con Programación Orientada a Objetos (POO) del modelo de agentes inhomogéneos. En este modelo los agentes invierten, trabajan y consumen, inicalmente todos tienen una productividad, que representa sus habilidades o su nivel de educación, un recurso que puede representar un terreno y un factor de ciencia que representa la facilidad y el acceso a la tecnología. El parámetro que hace que los agentes sean inhomogéneos es la productividad, pues en el tiempo inicial ($t = 0$) se asigna de forma aleatoria una productividad a cada uno con una distribución gaussiana con media 5000 y desviación estándar 5000, el factor recurso y ciencia se define como 1 para todos los agentes. Con el fin de incluir todos los parámetros que tiene un agente dentro de la simulación, se define la clase Persona, la cual contiene todos los atributos para crear a un objeto que represente a un individuo. En la figura 2 se muestra un diagrama con los atributos que contiene la clase Persona dentro de la simulación.

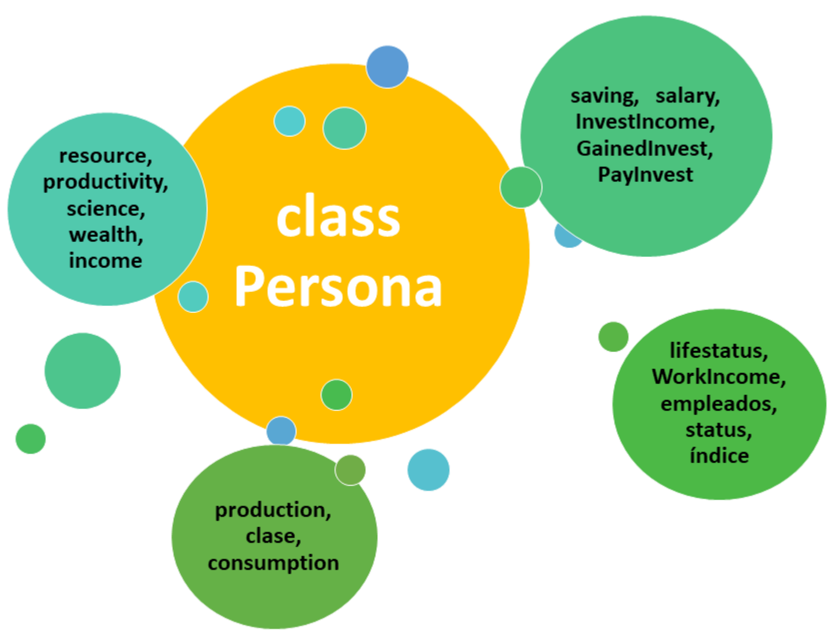


Figura 2: Atributos de la clase Persona implementada

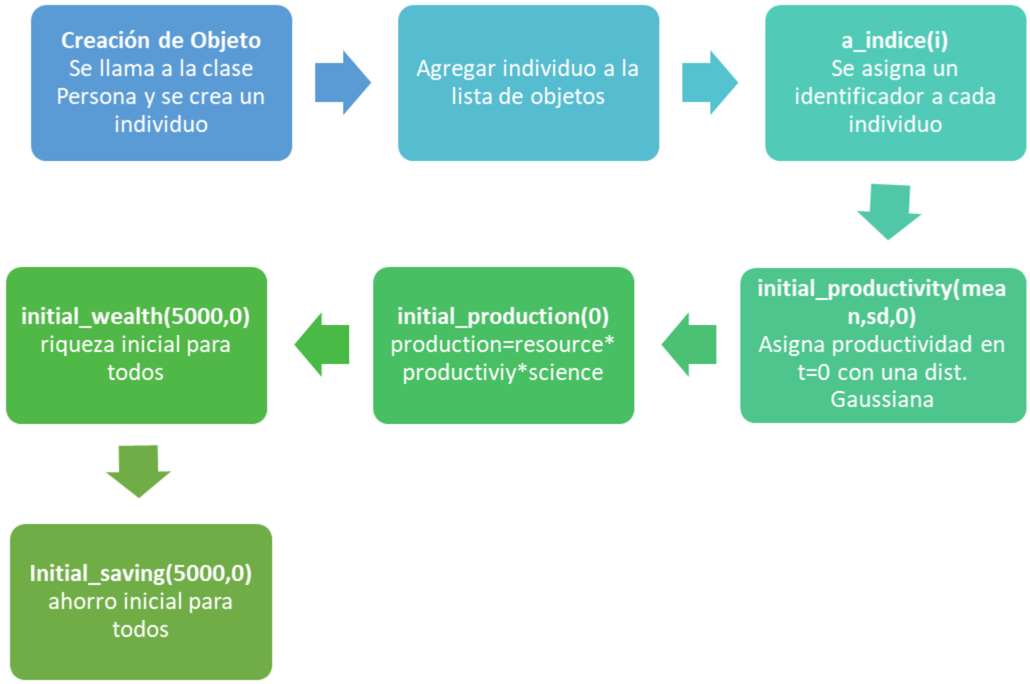


Figura 3: Resumen de los pasos de la inicialización del sistema

Cada uno de estos atributos esta asociado a los parámetros del modelo de agentes inhomogéneos desarrollado en la referencia [8] y que se describen en el marco teórico de este trabajo.

Una vez creada la clase se implementan varios métodos para la inicialización del sistema. Inicialmente se crea una lista vacía llamada *poblacion* en la que se van a guardar cada uno de los individuos creados. Posteriormente, se realiza un ciclo que recorre el numero de individuos en el sistema y en cada una de estas iteraciones se crea un objeto llamando a la clase Persona, pasando arreglos de algunos de sus atributos como la productividad, la riqueza, el ingreso, entre otros, de tamaño número de pasos de tiempo con el fin de estudiar la evolución temporal de cada uno. Después, la persona creada se agrega a la lista *poblacion*.

Los siguientes pasos determinan la inicialización del sistema:
(1) Se asigna un índice a cada individuo, el cual lo va a identificar durante la simulación.
(2) Se calcula la productividad inicial (en t=0) con una distribución Gaussiana con media 5000 y desviación estándar 5000.
(3) Se calcula la producción inicial con la ecuación 1.
(4) Se asigna la riqueza inicial (t=0), la cual es una constante (se considero como 5000$).
(5) Se asigna el ahorro inicial (t=0), el cual es una constante (se considero como 5000$).

En la figura 3 se presenta un resumen de los pasos de la inicialización del sistema.

Una vez se inicializa la simulación, se procede a realizar la evolución temporal del sistema. Se siguen los cuatro pasos descritos para el modelo de agentes inhomogéneos descritos en la sección del marco teórico de este trabajo. En la figura 4 se presenta un resumen de las funciones implementadas en la simulación para los pasos de tiempo $t = 1$ hasta t=n_{tsteps} (número de pasos de tiempo).

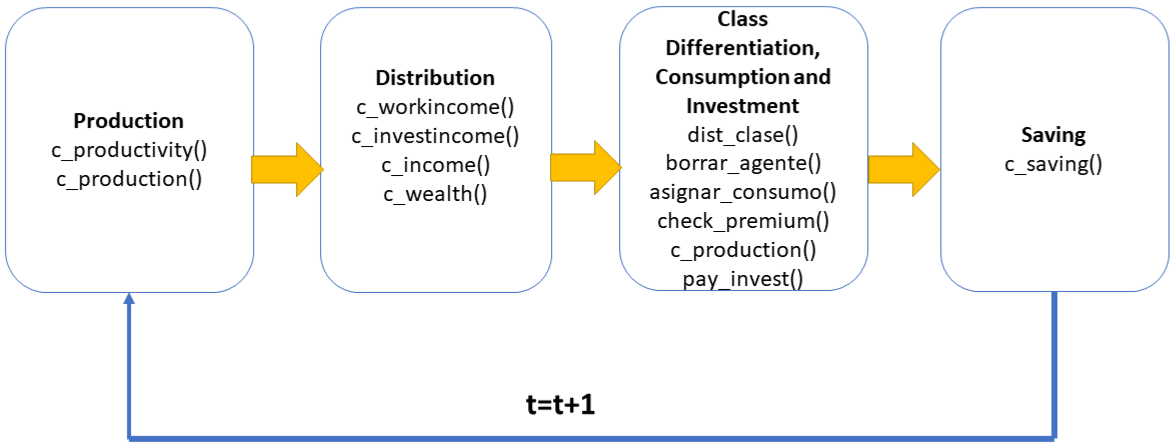


Figura 4: Evolución del sistema en la simulación

En el primer paso (**Production**) se tienen las funciones c_productivity(poblacion,t), la cual asigna la productividad a todos los agentes en el año t, y la función c_production(poblacion,t) que calcula la producción de todos en el año t con la ecuación 1. La función de productividad al inicio de cada año asigna la productividad que tenía el agente en el año anterior, y esta se actualizará cuando un agente realice una transacción.

En el segundo paso las funciones c_workincome(poblacion,t), c_investincome(poblacion,t), c_income(poblacion,t) y c_wealth(poblacion,t,2) calculan el ingreso proveniente del salario, de la inversión, el ingreso total y la riqueza de cada agente según las ecuaciones 3, 5, 6 y 7 respectivamente.

En el tercer paso se emplea la función dist_clase(lista_clase,poblacion,t) la cual recibe la lista que contiene los valores límites de las cuatro clases sociales $lista\_clase = [2500, 7500, 2 * 10^5, 10^6]$, aquí se emplean condicionales para evaluar si el nivel de riqueza de cada individuo se encuentra dentro del intervalo de cada clase, entonces por ejemplo, si el individuo tiene una riqueza $w = 5000\$$ se encontrará en la clase e_{Alive} pues sus valores límites son [2500,7500). Cada agente tiene un atributo llamado clase, el cual cambiará según la clasificación que se encuentre. Se consideraron los índices $[0 \longrightarrow alive, 1 \longrightarrow enough, 2 \longrightarrow satisfied, 3 \longrightarrow luxury]$. Además aquí se evalúa si algún agente tiene riqueza menor al nivel mínimo e_{alive} y se envía a la función *Broke Sale*. A continuación se presenta la implementación de la función de distribución de clase en el código.

```
def dist_clase(lista_consumo,agentes,t):
for i in range(len(agentes)):
    if(agentes[i].lifestatus==0):
        for s in range(len(lista_consumo)):
            if (s!=len(lista_consumo)-1):
                min=lista_consumo[s]
                max=lista_consumo[s+1]
```

```
                if (agentes[i].wealth[t]>=min and agentes[i].wealth[t]<max):
                    agentes[i].clase=s
            if (s==len(lista_consumo)-1):
                if (agentes[i].wealth[t]>=max):
                     agentes[i].clase=s
        if (agentes[i].wealth[t]<lista_consumo[0]):
                ind=agentes[i].indice
                broke_sale(ind,agentes,lista_consumo[0],5000,t)
```

La función de *Broke Sale* se activa cuando un agente está en riesgo de muerte, aquí para cada agente en peligro de muerte se busca a un inversor que tenga riqueza por encima de un valor límite. Además se espera que la transacción se realice si el $InvestIncome$ que recibirá será positivo. A continuación se muestra su implementación.

```
def broke_sale(i,agentes,e_alive,e_satisfied,t):

    if(agentes[i].wealth[t]<e_alive):
        j=random.randint(0,len(agentes)-1)
        expected_productivity=0
        expected_production=0
        if(i!=j and agentes[j].wealth[t]>=1*10**4):
            expected_productivity=
            np.divide(agentes[i].productivity[t]+agentes[j].productivity[t],2)
            expected_production=
            agentes[i].resource*expected_productivity*agentes[i].science
        if (expected_production-e_alive>0 and agentes[j].status!=0):
            agentes[i].GainedInvest[t]=e_alive
            #cambia la productividad
            agentes[i].productivity[t]=np.divide(agentes[i].productivity[t]+
                    agentes[j].productivity[t],2)
            agentes[i].salary=e_alive
            agentes[j].guardar_empleado(agentes[i].indice)
            setattr(agentes[i],'status',0)#cambiar status->empleado
            setattr(agentes[j],'status',2)#cambiar status->investor
```

La regla de intercambio en este caso se ve reflejada en el GainedInvest del vendedor y el PayInvest del comprador, pues en el momento de la interacción el inversionista paga e_alive al vendedor y este dinero hace parte del GainedInvest del vendedor. Posteriormente cuando se calcula el ahorro (ecuación 9) se resta o se suma a su riqueza el ingreso que ganó en la transacción (Gained Invest) o si es un inversionista se resta a su riqueza lo que debe pagar cada año si tiene empleados (PayInvest). El valor del ahorro se emplea después para calcular la riqueza del siguiente año y así se ve reflejado el intercambio.

Después de que todos los agentes en riesgo de muerte realicen *Broke Sale*, los agentes que están en riesgo de muerte y no consiguieron un comprador de sur recurso mueren y ya no hacen parte de la simulación en los años posteriores, aqui se emplea la función borrar_agente(poblacion,lista_clase[0],t) la cual cambia el atributo *lifestatus* a 1 cuando la persona muere. Una vez se realiza esto se procede a hacer la interacción *Premium Buying* con la función check_premium(poblacion,t) la cual verifica que no existe ningún individuo vivo en ese año con riqueza menor a e_{Alive} para hacer la transacción.

La interacción tipo *Premium Buying* se implementa de la misma manera que se describe en la referencia de Tian et al. Inicialmente se crea una lista de vendedores potenciales y otra de inversores potenciales, estas se construyen de acuerdo a valores límites en su productividad. Después, se ordena la lista de vendedores potenciales de menor a mayor y se calcula la probabilidad que tiene un inversor de hacer la interacción, la cual es proporcional a su riqueza. Se escogen primero los agentes con productividad menor para hacer la interacción y se considera un valor límite para la probabilidad del inversor. A continuación se presenta su implementación.

```
def premium_buying(agentes,t):
    pot_sellers=[]
    pot_investors=[]
    for i in range(len(agentes)):
        if (agentes[i].lifestatus==0):
            if ((agentes[i].productivity[t]<10000
            and agentes[i].productivity[t]>5000) and (agentes[i].status==1)):
                    pot_sellers.append(agentes[i])
                    #print('seller',agentes[i].indice)
            if ((agentes[i].productivity[t]>22000
            ) and (agentes[i].status!=0 and agentes[i].status!=3)):
                    pot_investors.append(agentes[i])
                    #print('investor',agentes[i].indice)

    #ordenamos los sellers con su productividad
    pot_sellers.sort(key=lambda x: x.productivity[t])
    #calculmamos suma potenctial investors
    suma=sum(c.wealth[t] for c in pot_investors)
    #print(suma)

    #calculamos probabilidad individual
    probj=0
    #tomar un investor aleatorio y calcular su probabilidad
    for m in pot_sellers:
        j=random.randint(0,len(pot_investors)-1)
        probj=np.divide(pot_investors[j].wealth[t],suma)
        print('probabilidad',probj)
        if (probj>0.2):
                m.GainedInvest[t]=2*m.consumption[t]
                m.salary=1.1*m.production[t]
                m.productivity[t]=np.divide(m.productivity[t]
                      +pot_investors[j].productivity[t],2)
                pot_investors[j].guardar_empleado(m.indice)
                setattr(m,'status',3)#cambiar status a 3->empleado premium buying
                setattr(pot_investors[j],'status',2)#cambiar status a 2->investor
                print(m.status)
```

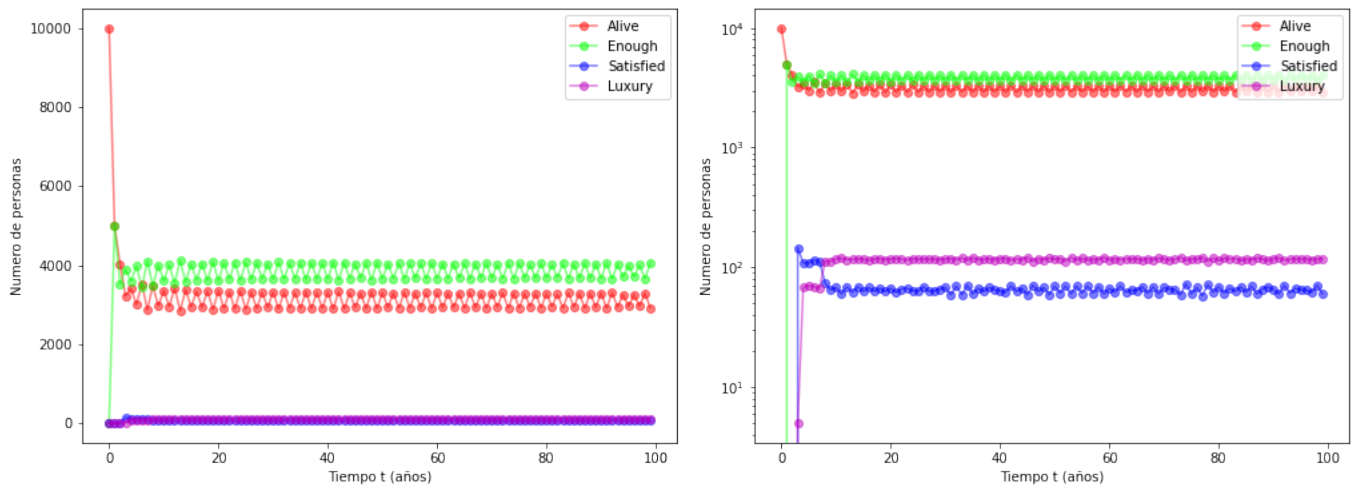
Las demás funciones presentadas en el diagrama calculan los demás parámetros según las ecuaciones presentadas en el marco teórico dela referencia de Tian [8]. Aquí el intercambio se presenta de la misma forma que en el Broke Sale, solo que esta vez lo que gana el vendedor al realizar la transacción es $2 \times$ *consumption* y esto hará parte de su GainedInvest. En el anexo 1 al final se presenta toda la simulación realizada.

4. **Desarrollo del objetivo específico 4**

En la simulación realizada se considera un un sistema con 10^4 individuos y 100 pasos de tiempo para la evolución. En este paso metodológico se pretendía encontrar la diferenciación de clase de forma natural al igual que se presenta en el modelo de agentes inhomogéneos del artículo de partida [8], además de reproducir algunos de los resultados allí presentados. A continuación se presenta la diferenciación de clase, la distribución de la productividad y el ingreso, el número de vendedores y de empleados contratados en cada año, además se describe el procedimiento realizado para su determinación.

a) Distribución de Clase

Con el fin de determinar el número de individuos en cada clase social en cada año, se construyó una función en la simulación denominada *conteo_clase* la cual recibe como parámetros el arreglo que contiene a todas las personas (poblacion), cuatro listas: clase0,clase1,clase2,clase3 y el año t. Esta función se llama en cada paso de tiempo con el fin de identificar inicialmente si los agentes están vivos, es decir si el parámetro *life_status*=0 y después, teniendo en cuenta que la clase social es un atributo de los objetos Persona, se accede a su clase y dependiendo de si es (0,1,2,3)=(Alive,Enough,Satisfied,Luxury) se cuenta con la variables $s0, s1, s2, s3$ en cada caso. Al final de recorrer el arreglo con todos los agentes se guarda el valor de las cuentas de cada clase en la casilla correspondiente al año t para cada una de las listas que recibe la función. De esta forma se va llenando el arreglo $l_{alive}, l_{enough}, l_{satisfied}, l_{luxury}$ con el número de personas que hay en cada una de las clases para cada año. La implementación de esta función se muestra en el anexo 1.
La clase social de cada uno de los agentes se asigna con la función *dist_clase* implementada en la simulación, la cual mira la riqueza que tiene cada uno y lo clasifica según el rango en el que se encuentre. Los rangos escogidos se presentan en la tabla 1, el valor máximo de riqueza para la clase Luxury se considero lo suficientemente grande como para abarcar los niveles más altos que se observaron en la simulación.
En la figura 5 se presenta la diferenciación de clase obtenida con este procedimiento en (a) con una escala lineal y (b) una escala logarítmica. De la figura se puede observar que en el año inicial ($t = 0$) todos se encuentran en la clase Alive, representada en color rojo, esto se da porque la riqueza inicial para todos los agentes es de 5000$. Después, en el año $t = 1$ las personas se empiezan a diferenciar en las clases Alive y Enough (en verde en la gráfica) cuando se calcula el ingreso proveniente del trabajo $WorkIncome$ con la producción calculada para cada uno con la ecuación 1, la cual depende de la productividad, el factor que da la heterogeneidad al modelo, pues se asigna de forma aleatoria para cada una de las personas. En el año $t = 5$ se observa en la figura 5 (b) que las clases Luxury y Satisfied empiezan a aumentar el número de individuos, pero en el año $t = 8$ el número de personas disminuye en Satisfied y aumenta en Luxury hasta que después del año 10 empiezan a tender hacia los valores constantes $X_2 = 69$ para Satisfied y $X_3 = 113$ para Luxury, este aumento se debe a que después del año cinco se empiezan a realizar las transacciones Premium Buying, las cuales afectan considerablemente la productividad y la riqueza de los agentes y por ende su clase social. Esto también se ve reflejado en la disminución de la cantidad de individuos en las clases Alive y Enough, en las que en el año final habrán $X_0 = 2940$ Y $X_1 = 4021$ personas para Alive y Enough respectivamente.
Se observa entonces que se reproduce el resultado de Tian [8] para la diferenciación de clases sociales con la simulación realizada y descrita en la subsección anterior, lo cual refleja que la diferenciación de clases sociales es grande debido a que la productividad de los agentes es diferente y es asignada de forma aleatoria con una distribución normal con media 5000 y desviación estándar 5000.



(a) Número de personas en cada clase con escala lineal (b) Número de personas en cada clase con escala log

Figura 5: Diferenciación de clase determinada en la simulación (a) escala lineal y (b) escala log

Rango riqueza	Clase
[2500,7500)	0-Alive
[7500,2×10^5)	1-Enough
[2×10^5,10^6)	2-Satisfied
[10^6,10^{10})	3-Luxury

Cuadro 1: Rangos de riqueza y su respectiva clase social

b) Distribución de Productividad para cuatro años diferentes

La productividad se ve afectada por las interacciones tipo Broke Sale y Premium Buying, es por esto que se realiza una gráfica para observar cómo se distribuye la productividad entre los agentes para cuatro años diferentes en la simulación. Inicialmente se implemento una función en la simulación denominada *c_productivity*, la cual se emplea desde el año 1 y asigna la productividad de cada año con la que tenia el agente en el año previo. Sin embargo, después se realizan las interacciones dentro de las funciones *dist_clase* y *check_premium* en la simulación, en las que se actualiza la productividad de cada agente si es el que vende (seller) en la transacción con la ecuación 2.
La función *broke_sale* se llama dentro de la función *dist_clase* si se encuentra algún agente en peligro de muerte ($e < e_alive$, si su energía o riqueza es menor al valor mínimo para sobrevivir)), la función *broke_sale* busca a un posible inversor (buyer o investor) que pueda comprar su recurso y salvarlo de la muerte, para este fin se elige de forma aleatoria un agente y se calcula el *expected_InvestIncome* con la producción que tendría el seller si hace la transacción con el investor elegido. El investor espera que este valor esperado sea positivo, por lo que se calcula la diferencia $expected\_production - e\_alive$ y se restringe que solo si es positiva el agente seller puede realizar la transacción, esto se realiza hasta que encuentre un investor, pero si no se da el encuentro el agente muere y se cambia el atributo $life\_status$ por el valor de 1. También se agrega una condición para el inversionista con la riqueza, en el modelo se considera que si su riqueza de ese año es mayor a 1×10^4 se puede realizar la transacción, esto se hizo con el fin de evitar que las personas más pobres tengan que pagar un salario cada año y se queden con un valor de riqueza negativo.
Para la interacción tipo Premium Buying se construyó la función *check_premium* con el fin de garantizar que cuando todas las personas en riesgo de muerte hayan realizado Broke Sale, las demás personas puedan realizar Premium Buying. Dentro de la función *premium_buying* se crean dos listas, una para vendedores potenciales y otra para inversores potenciales. Se recorre el vector y se buscan agentes con productividad entre 7000 y 10000, los cuales se irán guardando en la lista $pot\_sellers$, para los inversionistas se buscan agentes con productividad mayor a 15000 y se van guardando en la lista $pot\_investors$, aquí también se restringe la transacción para personas que no sean empleadas. La lista de pot_sellers se ordena de menor a mayor con la productividad de cada uno para tomar inicialmente a aquellos agentes que tengan menor productividad para realizar la transacción. Para los inversionistas potenciales se obtiene la riqueza de un agente aleatorio en la lista $pot\_sellers$ y se calcula la probabilidad $wealth/total\_wealthpotinvestors$, si esta probabilidad es mayor a 0.01 el inversionista puede realizar la transacción. Este valor de probabilidad límite fue considerado debido a que si se ponía un valor muy grande no habían inversores potenciales y si se consideraba muy baja habían demasiados inversionistas. Se tomaron varios valores límite para las productividades de los vendedores e inversionistas potenciales y se observó el valor de la probabilidad. Se eligió un valor de probabilidad que garantizara que no se tuviera ninguno de estos dos casos extremos.

En la figura 6 se presenta el cambio en la distribución de la productividad conforme avanza el tiempo. En azul se tiene la distribución inicial (t=0) para la productividad, la cual fue calculada con una distribución normal y asignada a cada uno de los agentes, no se permite un valor de productividad negativo. Se observa en amarillo (año 10) que la distribución empieza a cambiar su forma gaussiana debido a que después de este año ya se han realizado interacciones tipo Broke Sale y Premium Buying, que cambian la productividad de los agentes, la cual va a cambiar significativamente para el último año de la simulación (año 99 en morado). El resultado obtenido se asemeja al encontrado por Tian en su modelo [8], a diferencia del último año en el que la productividad no presenta una forma similar a una gaussiana, esto pudo deberse a

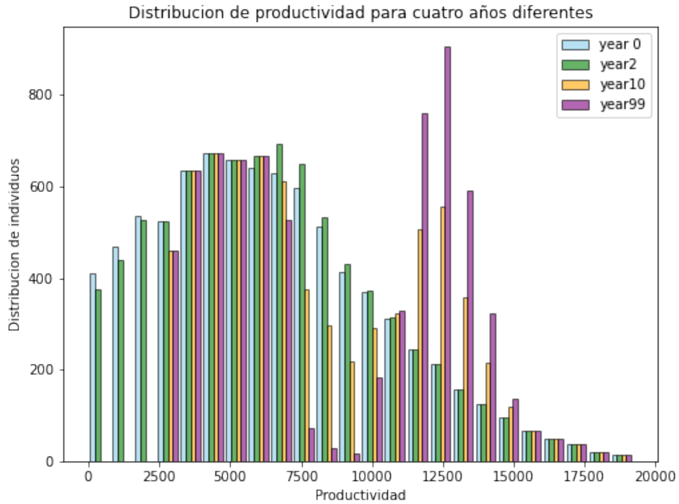


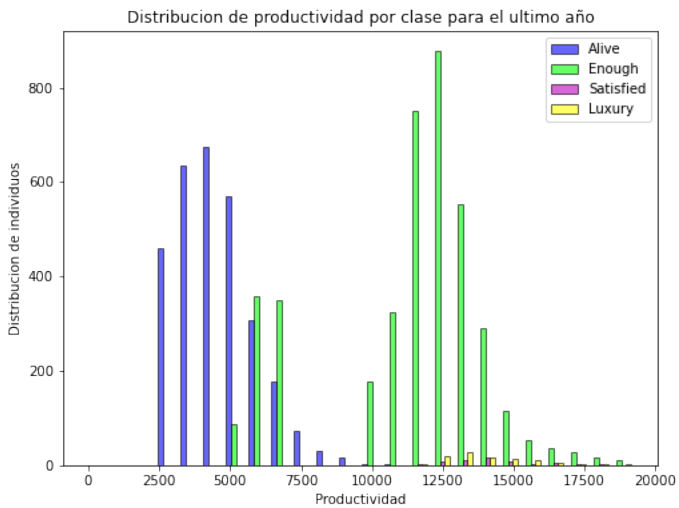
Figura 6: Distribución de la productividad para los años 0, 2, 10 y 99

los valores límites de riqueza y productividad que fueron considerados en este trabajo para el Premium Buying y el Broke Sale, sobre los que no se habla mucho al respecto en el artículo de partida.

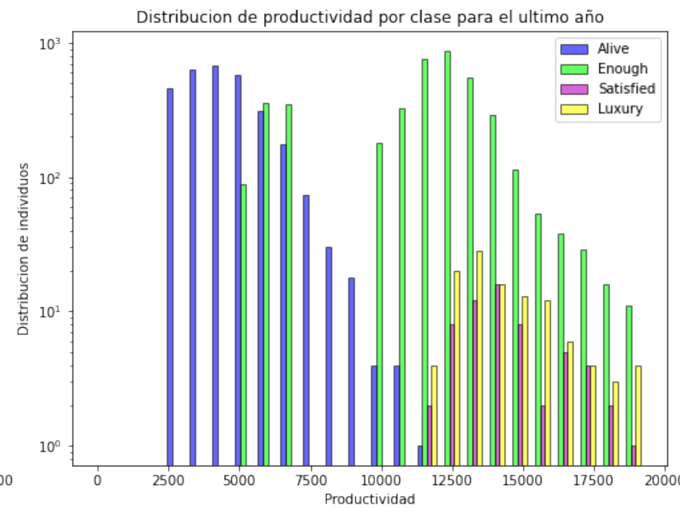
c) Distribución de Productividad por clase

Cada uno de los objetos en la simulación tiene un arreglo para guardar su respectiva productividad en cada año, se estudio la distribución de productividad en cada clase para el último año de la simulación ($t = 99$). Para este fin, se emplearon condicionales para inicialmente identificar la clase social a la que pertenecía cada uno y posteriormente guardar en las listas $pro\_ali, pro\_eno, pro\_sat, pro\_lux$ el valor de la productividad correspondiente para el último año con el arreglo de productividad que cada uno posee.
En la figura 7 se ilustra la distribución de la productividad obtenida en (a) escala lineal y (b) escala logarítmica. En ambas gráficas se puede apreciar con claridad el efecto de la interacción Premium Buying en la productividad de las personas de la clase Enough, pues son las que hacen parte de esta clase social las que más realizan esta interacción y para las cuales la productividad aumenta debido a la ayuda del inversionista. Su productividad, representada en verde oscila entre 5000 y 18000, cubriendo un amplio rango de productividades e incluso tomando productividades de clases más altas. Por otro lado, la productividad de la clase Alive (en azul) es más baja como es de esperarse y para las más altas (Satisfied y Luxury en morado y amarillo respectivamente) un menor número de personas con las productividades mayores.

d) Distribución de ingreso
El ingreso de los agentes se calculó dentro de la simulación con la ecuación 6 para cada año y con la función *c_income* en el programa. Cada uno de los agentes (objetos) en la simulación tiene un arreglo de ingreso (*income*) de tamaño (n_timesteps) como uno de sus atributos y al igual que en el caso anterior para la productividad, se va llenando para cada paso de tiempo. Si el agente muere porque no encontró a un inversionista su ingreso será cero y no se tendrá en cuenta para los demás años. En este caso se construyó una matriz *sort_income* que contiene en cada una de sus filas el ingreso de todos los agentes para cada año ordenados de forma ascendente. En la distribución del ingreso se empleó el arreglo sort_income[t] para obtener el ingreso para los años 1, 4, 10 y 99 de todos los agentes.



(a) Distribución de productividad clase escala lineal



(b) Distribución de productividad clase escala log

Figura 7: Distribución de productividad por clase para el último año de la simulación en (a) escala lineal y (b) escala log

En la figura 8 se muestra la distribución obtenida para el ingreso para los años 1 en azul, 4 en verde, 10 en morado y 99 en amarillo. De esta gráfica se puede observar que al inicio la distribución sigue una distribución gaussiana pues depende de la productividad inicial, la cual se calcula con una gaussiana. Conforme avanza el tiempo la distribución tiende a ser una exponencial, sin embargo, en el año 99 no se obtiene de forma exacta. Esto pudo deberse a que no se repitió la simulación varias veces pues en el artículo de partida se llega a una distribución exponencial con $x_0 \approx 5950$ y allí se repite varias veces la simulación.

e) Número de vendedores según el tipo de transacción realizada

Cada vez que un agente entraba a una transacción de tipo Broke Sale o Premium Buying dentro de las condiciones para los valores límites que debían tener los vendedores e inversionistas se contaba este número con los arreglos conteo_broke y conteo_premium que reciben cada una de estas funciones (*broke_sale* y *premium_buying*). Se crean los arreglos n_brokesale y n_premium de tamaño n_timesteps de forma que en cada paso de tiempo se cuente el número de veces que un agente entra a la transacción en cada año y se va llenando este arreglo hasta el año final.
En la figura 9 (a) se ilustra el número de empleados que realizaron Broke Sale en rojo y que realizaron Premium Buying en azul. Se puede observar que en los primeros años alrededor de 180 personas realizaron Broke Sale y después del año 5 alrededor de 300 personas realizaron Premium Buying. Esta gráfica se puede relacionar con la distribución de productividad por clase (figura 6) pues se evidencia que después del año 5 un gran número de personas van a aumentar su productividad y la distribución cambia considerablemente debido a que un gran número de personas hacen Premium Buying.
A pesar de que el número considerado de personas en este trabajo no es el mismo que en la referencia [8], pues aquí se consideran 1×10^4 mientras que en el artículo de partida se toman 1×10^6, se puede ver según la figura 9 (a) que el comportamiento para el número de empleados es prácticamente el mismo al reportado en la referencia de Tian [8].

f) Número de empleados contratados por clase social

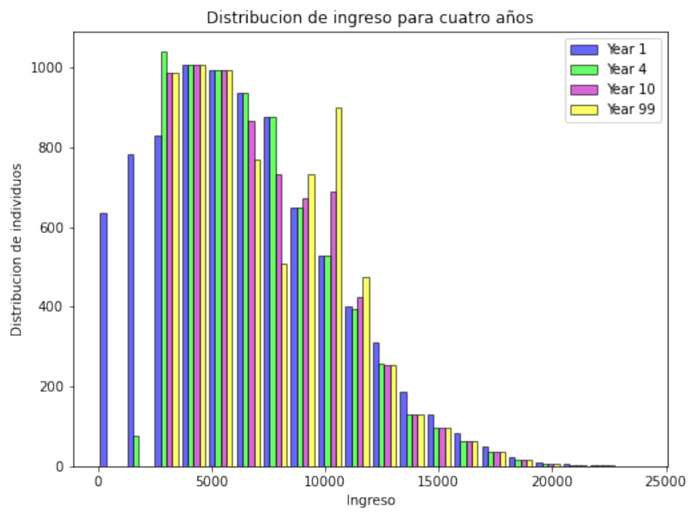
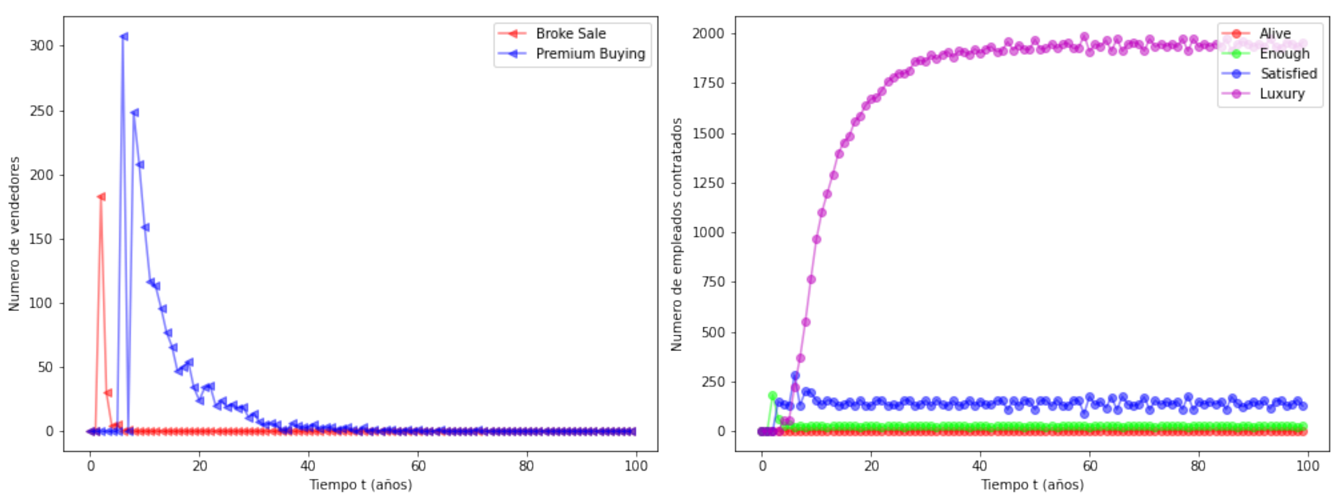


Figura 8: Distribución del ingreso



(a) Número de empleados en cada año (b) Número de personas contratadas por clase

Figura 9: (a) Número de empleados que realizan Broke Sale o Premium Buying como función del tiempo y (b) Número de personas contratadas acumuladas por clase social como fucnión del tiempo

Cada agente dentro de la simulación tiene una lista de empleados en la cual se guardan los índices de los que se vuelven sus empleados en el momento de realizar la transacción. Para calcular el número de empleados contratados en cada clase social se construyó la función *conteo_empleado* la cual recibe cuatro arreglos $num\_alive, num\_enough, num\_satisfied, num\_luxury$ de tamaño n. Dentro de esta función se identifica el estado de los inversionistas ($status$) el cual es un atributo de los agentes que se tomo como 2 para aquellos que son inversionistas y también se identifica su clase, que es otro atributo. Se emplean condicionales para identificar a inversionistas de cada clase social y se realiza un conteo de la longitud de la lista de empleados de cada uno de los inversionistas con las variables $nalive, nenough, nsatisfied, nluxury$ que al final de recorrer el arreglo con todos los agentes se guardara en la casilla correspondiente de cada tiempo para los arreglos que recibe la función.

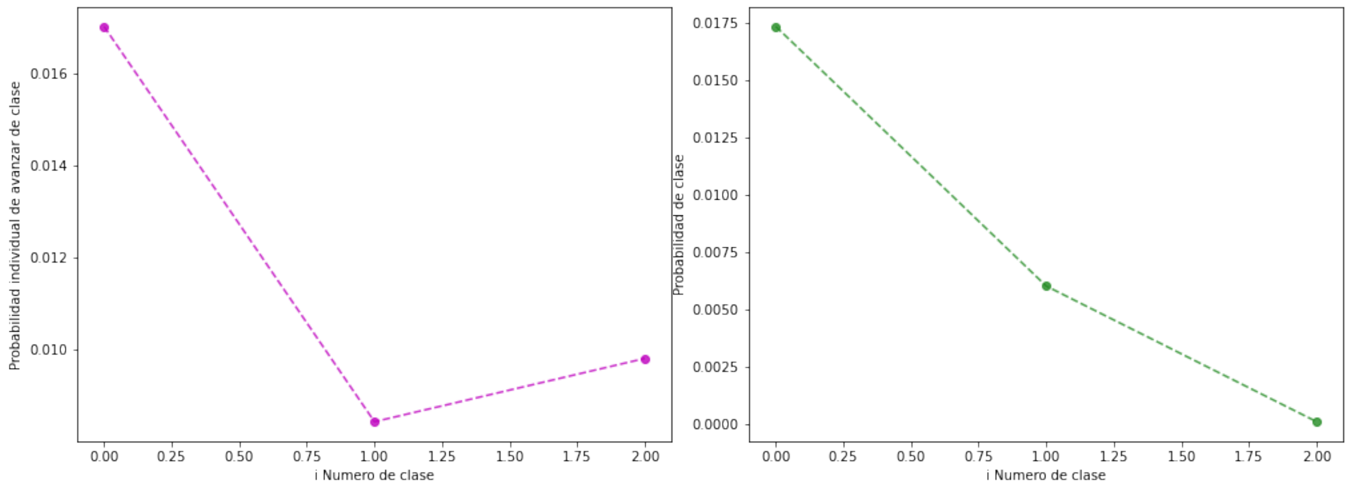
En la figura 9 (b) se muestra el número de personas contratadas acumuladas por clase social. Se puede observar que la clase Luxury en color morado, es la que más tiene empleados contratados lo cual es consistente pues se espera que las personas más ricas sena los compradores e inversionistas en las transacciones.

5. **Desarrollo del objetivo específico 5**

Tomando como base las definiciones construidas en el desarrollo del objetivo específico 2 para las probabilidades a nivel individual, de clase y colectivo de ascender de clase social, se construye dentro de la simulación una función para calcular dichas probabilidades.

Se crea la función *movilidad* la cual recibe el número de clases que se tienen en el modelo *n_clases* y las poblaciones de equilibrio calculadas dentro de la simulación $poblacion_eq$, es decir, la cantidad de individuos en cada clase en el año $t = 99$. En la función inicialmente se define la lista l_clase que representa la riqueza mínima y el consumo mínimo de cada clase, después se declara un arreglo para guardar la riqueza promedio, se calcula para cada clase social y se guarda en su respectiva casilla de *lista_claseprom* (por ejemplo $lista\_claseprom[0] = \bar{w_0}$) donde $\bar{w_0} = (w_1 + w_0)/2$ y $w_0 = 2500$ y $w_1 = 7500$. Una vez calculados los valores promedios de riqueza para cada clase se declaran arreglos para guardar las sumatorias de las probabilidades individuales y de clase, que se definen como *sumaki* y *sumakc*, estas sumatorias se definen como en las ecuaciones presentadas en el desarrollo del objetivo específico 2. Una vez obtenida la sumatoria en k para cada clase i se divide por $(w_{i+1} - w_i)$ para $P_{i,individual}$ y por $(w_{i+1} - w_i)(poblacion\_eq[0] - poblacion\_eq[3])$. Como la probabilidad de que toda la clase ascienda es muy similar a la probabilidad colectiva, se emplea la sumatoria k calculada para cada clase-i a nivel de clase *sumakc* y se divide para cada i por $(w_{i+1} - w_i)(4\bar{w_3})$ y se guarda en el arreglo *probm* de tamaño $n\_clases - 1$ (pues la última clase no puede ascender). Posteriormente, se suman los valores de *probm* porque en la productividad colectiva se tienen dos sumatorias y se divide entre $(poblacion\_eq[0] - poblacion\_eq[1])$=$(X_0 - X_3)$ la diferencia de las poblaciones de equilibrio entre la clase Alive y la clase Luxury. Es importante acalarar que la llamada de esta función se realiza cuando el sistema llega al equilibrio.

Al final se obtiene una lista de tamaño $(n\_clases - 1)$ para la probabilidad a nivel individual, otra para la probabilidad a nivel de clase y un valor de la probabilidad colectiva que corresponde a la movilidad social.
En la figura 10 (a) se ilustran los resultados obtenidos para la probabilidad que tiene un individuo de la clase-i de ascender de clase social para las clases $i = 0, i = 1, i = 2$=(Alive,Enough,Satisfied) para el caso considerado en el desarrollo del objetivo específico 4 y en la figura 10 (b) la probabilidad que tienen todos los individuos de una clase-i de ascender de clase social para el mismo caso. Se puede observar que la probabilidad que tiene un individuo de la clase Alive de subir de clase es considerablemente alta comparada con la que tiene un individuo de la clase Enough y Satisified, esto



(a) Probabilidad individual

(b) Probabilidad de clase

Figura 10: (a) Probabilidad que tiene un individuo de la clase-i de ascender de clase social para las clases $i = 0, i = 1, i = 2$=(Alive,Enough,Satisfied) (b) Probabilidad que tienen todos los individuos de una clase-i de ascender de clase social

Movilidad	Gini
0,029	0,914

Cuadro 2: Indice de Gini y Movilidad Social calculados con la simulación para el modelo del objetivo 4

se puede explicar por el hecho de que en este caso aproximadamente 180 personas realizan Broke Sale, lo que conlleva a un aumento en su productividad y su riqueza y por lo tanto es más probable que asciendan. Con respecto a la figura 10 (b) se puede decir que se obtuvo un resultado consistente pues la probabilidad de que todos los individuos de una clase asciendan se reduce conforme aumenta la clase social porque el número de individuos que hay en cada una es menor.

6. **Desarrollo del objetivo específico 6**

En la subsección previa se explicó como se calculaa la movilidad social dentro de la simulación. También se incluyó una función *gini* para calcular el índice de Gini dentro de la simulación a partir del ingreso de los agentes. Esta función recibe una arreglo o lista que debe estar ordenado en forma ascendente con el ingreso de todos los agentes en el año final ($t = 99$). Teniendo en cuenta la ecuación 22 que se presentó previamente se define cada uno de sus elementos dentro de la función. Inicialmente se calcula el tamaño del arreglo que se ha enviado, después se declaran arreglos de tamaño N (número de agentes) para el ingreso total, el ingreso agregado, la población agregada y la suma de $(X_k - X_{k-1})(Y_k + Y_{k-1})$.
En la tabla 2 se encuentran los resultados encontrados para la movilidad y el índice de Gini para el modelo presentado previamente de agentes inhomogénos (desarrollo del objetivo específico 4). En este caso no se obtuvo el mismo índice de Gini encontrado en el artículo de partida [8], lo que puede deberse al hecho de que la distribución del ingreso en este caso no corresponde de forma exacta a una exponencial.

7. **Desarrollo del objetivo específico 7**

Se variaron algunos parámetros del modelo en la simulación con el fin de analizar que efectos tenían sobre la movilidad y la desigualdad con el índice de Gini. Se consideraron siete escenarios para los cuales se realizaron las gráficas obtenidas en el desarrollo del objetivo específico 4 en cada caso, además se calculó el índice de Gini y la movilidad social.En todos los casos se tomaron 1×10^4 agentes y $t = 100$ pasos de tiempo. A continuación se presentan los resultados obtenidos en cada caso:

a) Escenario 1

El escenario N°1 considerado en la simulación fue el que se presentó en el desarrollo del objetivo específico 4, en el que la productividad inicial de los agentes se calcula con una distribución gaussiana con media 5000 y desviación estándar 5000. Los resultados para la diferenciación de clase, la distribución de la productividad en cuatro años y por clase en el último año, la distribución del ingreso, el número de empleados según el tipo de interacción, el número de personas contratadas por cada clase social, la probabilidad de ascender a nivel individual y de clase, se resumen en las figuras 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 7. En este caso se obtuvo una movilidad de $M = 0,029$ y un índice de Gini de $G = 0,914$ lo cual representa un alto nivel de desigualdad acompañado de un bajo nivel de la movilidad social. Los resultados obtenidos en este escenario fueron discutidos y analizados en las subsecciones previas.

b) Escenario 2

El escenario N°2 considerado consiste en asignar la productividad inicial con una distribución gaussiana con media 10000 y desviación estándar 5000 con el fin de observar qué sucede con las distribuciones cuando la productividad de los individuos aumenta, y una forma de interpretar este aumento en la productividad puede estar dado por la educación. Para cambiar la media de la distribución para la productividad inicializar se empleó el método *initial_productivity* que se incluye en la simulación, este es un método que tienen todos los objetos y se calcula directamente el número aleatorio para la productividad con la librería random de Python y restringiendo que no sea asignada al agente si es negativa. Esta función recibe la media, la desviación estándar y el tiempo, cada agente tiene un arreglo en el que va a guardar su productividad de cada año. Entonces simplemente se cambian los parámetros de la función *initial_productivity* en el código. Los resultados obtenidos se resumen en las figuras 11 y 12.

Las poblaciones de equilibrio para cada clase fueron (X_0, X_1, X_2, X_3) =(1783, 7595, 110, 99). Un resultado importante es que en este caso la proporción de individuos en la clase más baja (Alive) fue del 19 % mientras que en el escenario 1 esta proporción fue del 41 %, por lo que se dio un aumento en el número de personas para las clases más altas. La proporción de individuos para la clase Enough (representada en verde en la diferenciación de clase) represento el 79 %, el 1 % en la clase Satisfied y el 1 % en la clase Luxury. Aquí, al igual que en el escenario 1 la diferenciación de clase (Figura 11 (b))comienza en el año 1 cuando el $WorkIncome$ de todos los agentes es diferente y las clases Luxury y Satisfied se empiezan a llenar después del año 5, lo cual tiene sentido pues según la figura 12 (a) la interacción tipo Premium Buying tiene lugar después del año cinco. Aquí se observa con la distribución del ingreso (Figura 11 (f)) representa una sociedad más igualitaria que en el escenario 1 y la productividad no cambia significativamente a través de los años (Figura 11 (c)) mientras que la productividad de las personas de la clase Enough (Figura 11 (d)) abarca la mayor parte de la productividad y esto se debe a la interacción tipo Premium Buying. Estos resultados demuestran que si se promueve la productividad en una sociedad la proporción de individuos en la clase más baja disminuye por lo que puede ser una medida a tomar para disminuir los índices de desigualdad.
Aquí al igual que en el escenario anterior, la clase que más empleados contrato es la clase Luxury

(Figura 12 (b)). En este caso se obtuvo una movilidad de $M = 0,063$ y un índice de Gini de $G = 0,790$ lo cual si se compara con el escenario anterior demuestra que el índice de desigualdad fue menor y la movilidad social aumento al aumentar la productividad que tienen los individuos.

c) Escenario 3

En este caso se calculó la productividad inicial con una distribución gaussiana con media 10000 y desviación estándar 2500 para simular un aumento en la desigualdad y una reducción en la diferencia de habilidades que tienen los individuos. Aquí es importante aclarar que con el fin de obtener suficientes inversionistas, de evitar los casos extremos en los que hay muchos vendedores para realizar Premium Buying o solo un posible comprador, se tuvieron que modificar los valores límites para construir la lista de vendedores e inversionistas potenciales en el Premium Buying. En este caso si la productividad de los agentes estaba entre (7000,10000) se consideraba un vendedor potencial y si la productividad de los inversionistas estaba por encima de 14000 se podía considerar un comprador potencial. Sumado a esto se tuvo que cambiar el valor límite para la probabilidad que tiene un comprador de hacer la transacción según su riqueza, se consideró que debía estar por encima de 0.002.

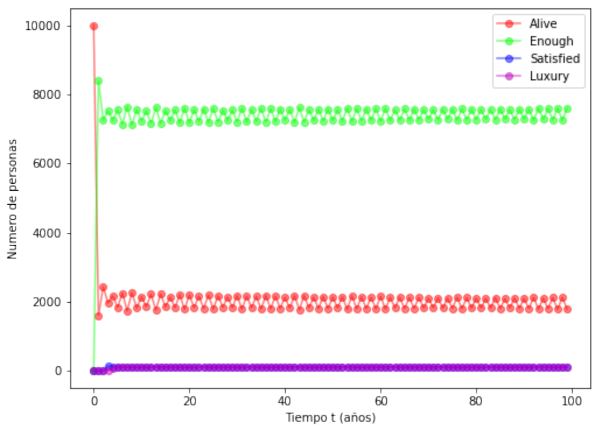
En las figuras 13 y 14 se resumen los resultados obtenidos para este caso. Con respecto a la diferenciación de clase (Figura 13 (a) y (b)) se observa que la mayoría de la población se encuentra en la clase Enough, de hecho la proporción de individuos en esta clase fue del 93 %, mucho más grande que en los casos anteriores y en la clase Alive solo esta el 6 % de la población. Esto demuestra nuevamente que el incrementar la productividad y reducir la desigualdad de habilidades permite disminuir la desigualdad. Las distribuciones para la productividad y el ingreso en este caso (Figura 13 (e) y (f)) son muy similares a las obtenidas para el escenario 2, también se observa una distribución más igualitaria para el ingreso, donde la mayoría se distribuyen alrededor de la media conforme va pasando el tiempo. En este caso se obtuvo una movilidad de $M = 0,14$ y un índice de Gini de $G = 0,82$, aquí no fue evidente la reducción de la desigualdad pero si se observa un aumento considerable en la movilidad social.

Si se compara el número de vendedores que se presenta en la figura 14 (a) con la diferenciación de clase de la figura 13 (b) se puede entender porque el número de individuos en la clase satisfied disminuye alrededor del año 8, esto se da porque el número de personas que realizan interacción de tipo Premium Buying es más de la mitad de la población, esto genera un aumento considerable en la productividad y la riqueza de las personas, por lo que la mayoría de las personas en la clase Alive va a ir a la clase Enough, pero así mismo muchas personas de la clase Satisfied van a ir a la clase Luxury, y así se puede entender este comportamiento. Al igual que en los casos anteriores la clase que más empleados contrata es la clase Luxury. También es importante notar que la probabilidad de que todos los individuos de la clase Enough lleguen a la siguiente clase es relativamente alta comparada con las de las dos otras clases (Figura 14) (d) lo cual se entiende también porque la mayoría de la población del rango delimitado para hacer Premium Buying pertenece a la clase Enough.

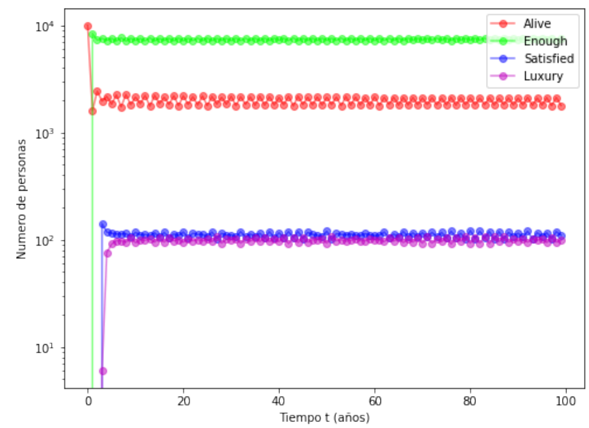
d) Escenario 4

Para este caso se tuvo en cuenta el papel del salario en la desigualdad. Cuando se realiza la transacción tipo Premium Buying, el comprador para 1.1 veces la producción del vendedor cada año como salario, se analizó en este caso qué sucede cuando el vendedor le paga 1.5 veces la producción al vendedor, ya que esto se ve reflejado en mejores pagos para los empleados y reducción de ingresos para los inversionistas, pues el PayInvest de cada año aumenta considerablemente. En este escenario se consideraron los mismos parámetros y valores límite que en el escenario 3.

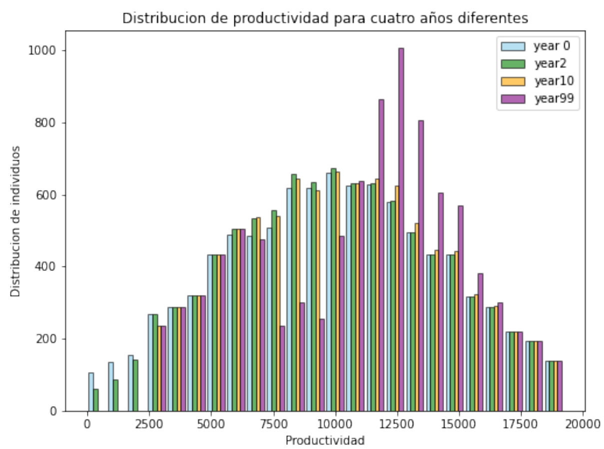
En las figuras 15 y 16 se resumen los resultados encontrados en este escenario. La proporción de individuos en la clase Alive en este caso fue del 45 % y se encontró un valor muy similar para la



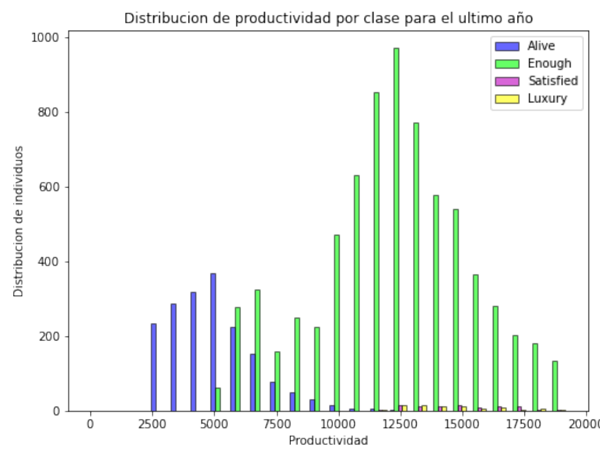
(a) Dif. de clase escala lineal



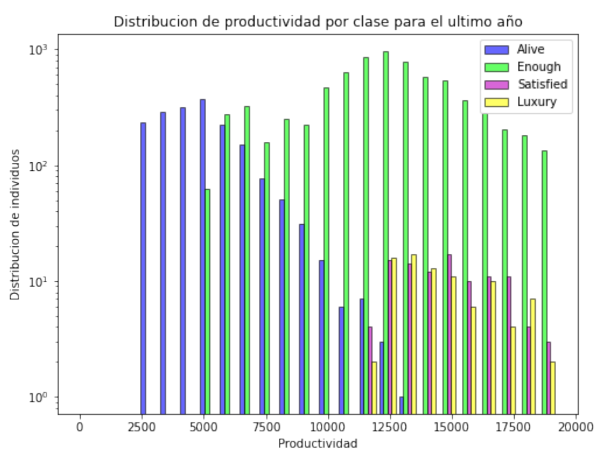
(b) Dif. clase escala log



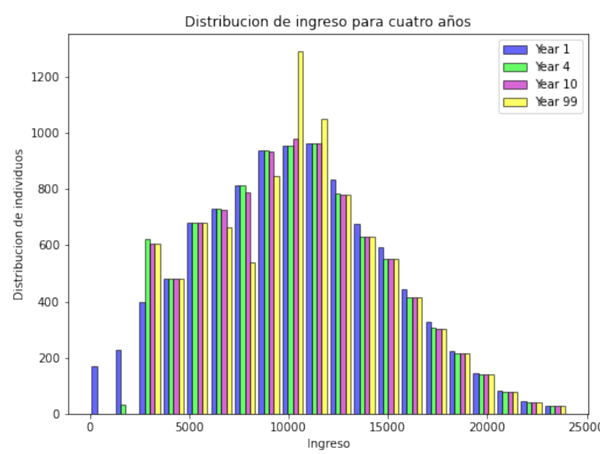
(c) Dist. Productividad cuatro años



(d) Dist. Productividad escala lineal

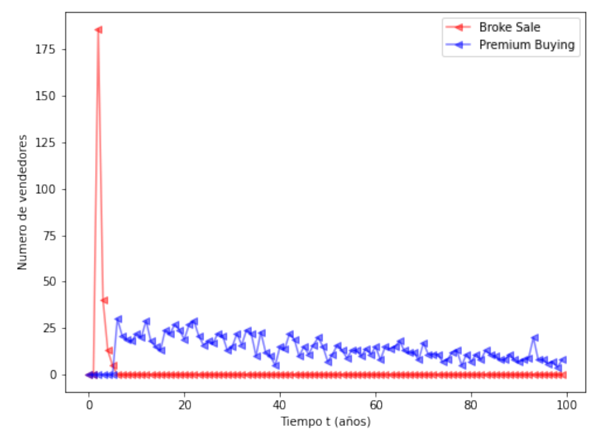


(e) Dist. Productividad escala log

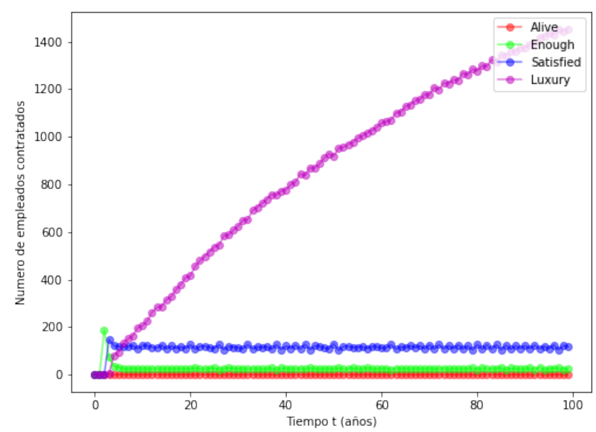


(f) Dist. Ingreso

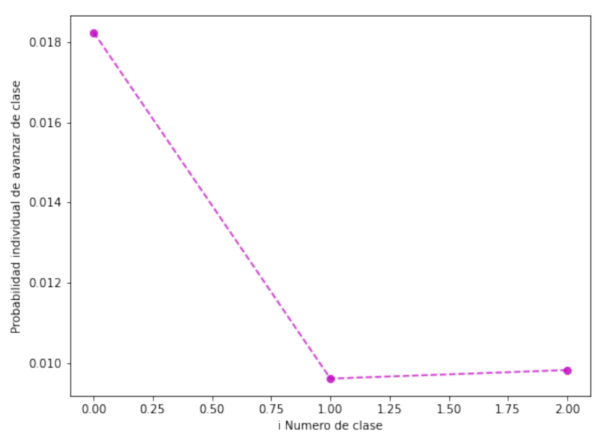
Figura 11: Escenario 2 considerado: (a) Diferenciación de clase en función del tiempo con escala lineal, (b) Dif. clase escala log. (c) Distribución de productividad para cuatro años, año:0,2,10 y 99, (d) Distribución de productividad por clase escala lineal, (e) Distribución de productividad por clase escala log, (f) Distribución de ingreso para cuatro años diferentes: 1, 4, 10 y 99



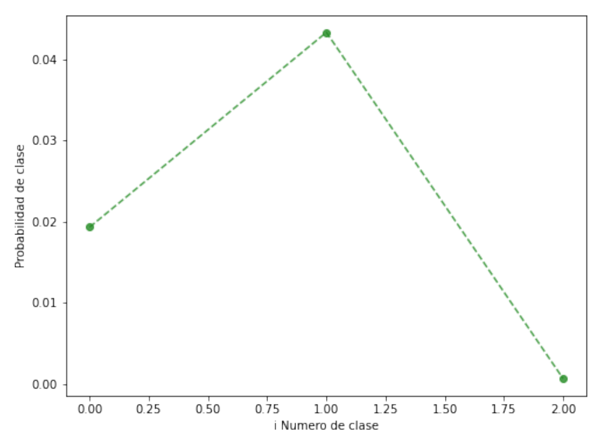
(a) Número de empleados



(b) Número de personas contratadas por clase

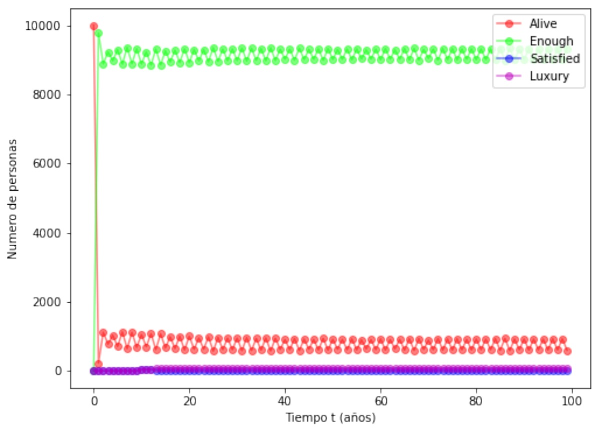


(c) Probabilidad a nivel individual

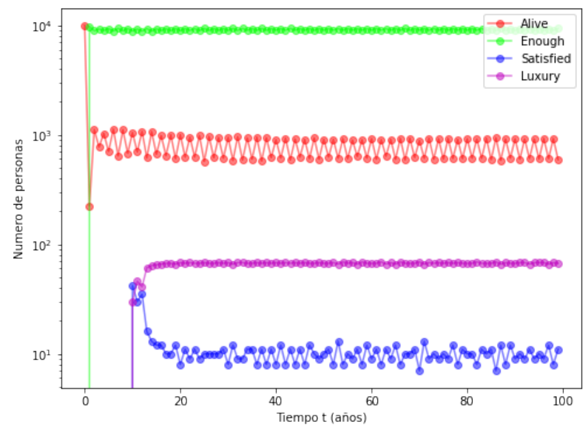


(d) Probabilidad a nivel de clase

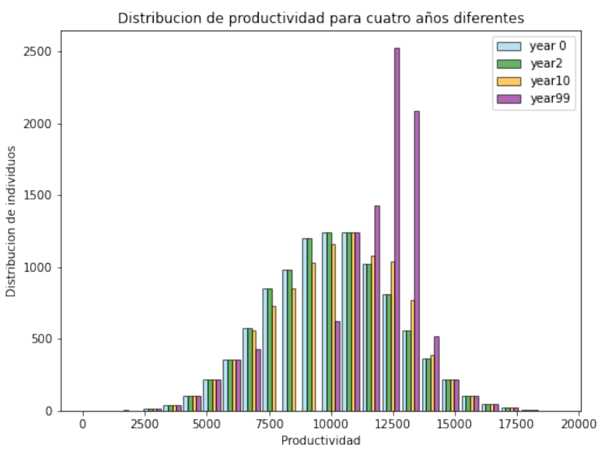
Figura 12: Escenario 2 considerado: (a) Número de empleados según el tipo de interacción, (b) Número de personas contratadas por cada clase social. (c) Probabilidad que tiene un individuo de la clase i de ascender, (d) Probabilidad de todos los individuos de la clase i de ascender para i=0,1,2



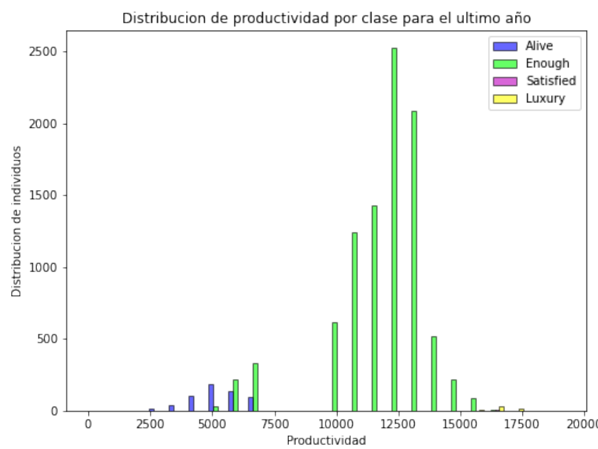
(a) Dif. de clase escala lineal



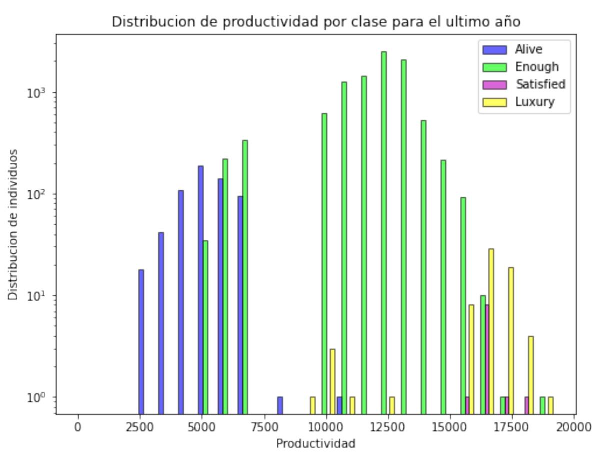
(b) Dif. clase escala log



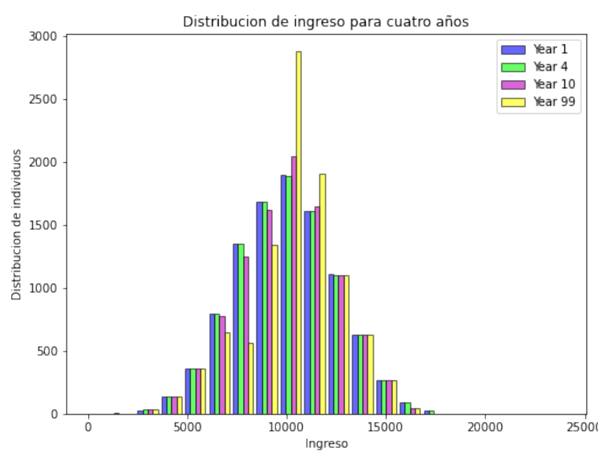
(c) Dist. Productividad cuatro años



(d) Dist. Productividad escala lineal

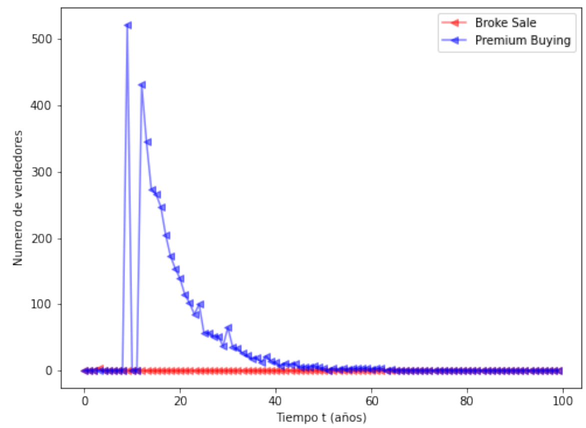


(e) Dist. Productividad escala log

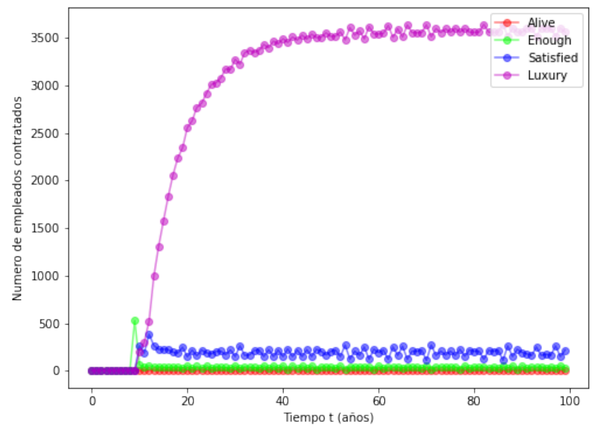


(f) Dist. Ingreso

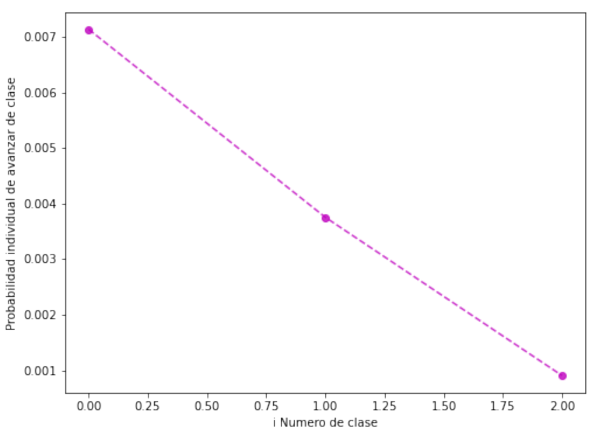
Figura 13: Escenario 3 considerado: (a) Diferenciación de clase en función del tiempo con escala lineal, (b) Dif. clase escala log. (c) Distribución de productividad para cuatro años, año:0,2,10 y 99, (d) Distribución de productividad por clase escala lineal, (e) Distribución de productividad por clase escala log, (f) Distribución de ingreso para cuatro años diferentes: 1, 4, 10 y 99



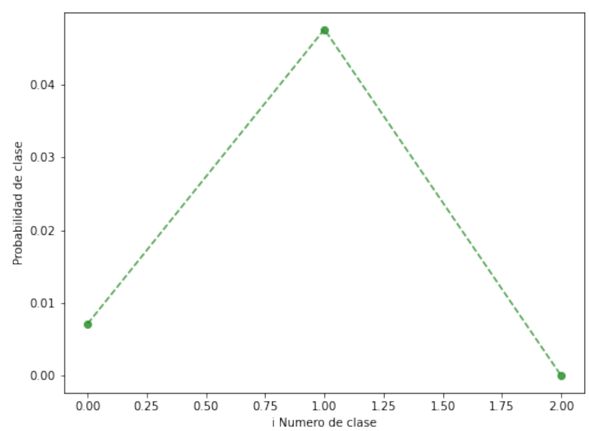
(a) Número de empleados



(b) Número de personas contratadas por clase



(c) Probabilidad a nivel individual



(d) Probabilidad a nivel de clase

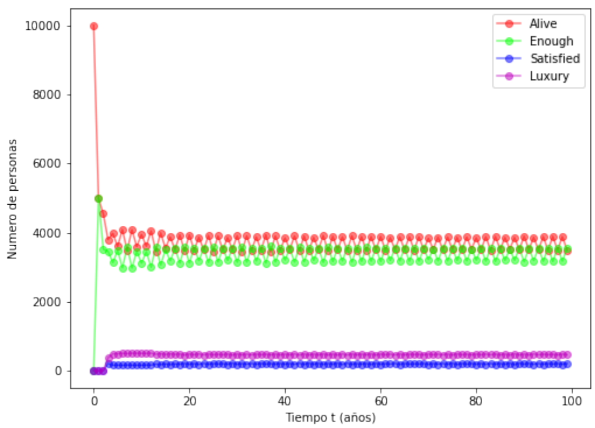
Figura 14: Escenario 3 considerado: (a) Número de empleados según el tipo de interacción, (b) Número de personas contratadas por cada clase social. (c) Probabilidad que tiene un individuo de la clase i de ascender, (d) Probabilidad de todos los individuos de la clase i de ascender para i=0,1,2

proporción de individuos de la clase Enough, fue del 46 %, para las clases Satisfied y Luxury se encontraron las proporciones del 3 % y del 6 % respectivamente. Aquí no se observa un efecto tan marcado en la reducción de la cantidad de individuos en la clase Alive como en los escenarios 2 y 3. De igual forma se encuentra la diferenciación de clases de forma natural, sin embargo el número de individuos en las dos primeras clases es muy similar (Figura 15 (a) y (b)) y las clases Satisfied y Luxury se empiezan a llenar alrededor del año 4. No se observa una diferenciación notable en la distribución de la productividad en varios años y la productividad por clase con respecto a los demás escenarios. Se observa una diferencia significativa en la distribución del ingreso (figura 15(f)) pues en el último año no se observa que los ingresos se distribuyan alrededor de un valor medio sino que tiende a ser una distribución de tipo exponencial. La figura 16 (a) representa que en este caso el número de personas que realizaron Broke Sale fue considerablemente grande comparado con el número de personas que realizaron Premium Buying y esto se ve reflejado en que las personas de las clases Alive y Enough no pasaron a las clases más altas por un aumento en la riqueza. Aquí también se observa que las clases sociales que más contrataron empleados fueron la clase Luxury y la clase Satisfied (figura 16 (b)), número que aumenta significativamente a partir del año 10. La probabilidad a nivel individual para la clase Enough es muy baja (figura 16 (c)) y esto es consecuencia del hecho de solo un poco más de 300 personas realizan la transacción de tipo Premium Buying, y la clase Enough es la mpas afectada pues se encuentra dentro del rango de productividad seleccionado. La probabilidad de clase (figura 16 (d)) en este caso tiene un comportamiento como el que se espera comúnmente para la probabilidad de que toda la clase ascienda.

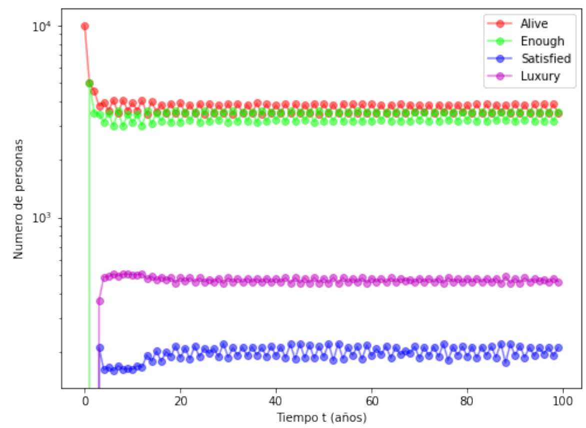
7. Conclusiones

1. Se consideró un modelo de agentes inhomogéneos para estudiar la desigualdad socio-económica en el que las personas trabajan, invierten y consumen. Al inicio todos tienen la misma riqueza y el factor que determina su heterogeneidad es la productividad, la cual se asigna de forma aleatoria con una distribución gausssiana. Se definieron cuatro clases sociales (Alive, Enough, Satisfied y Luxury) en las cuales se ubican los individuos según su riqueza. Se analizó el número de personas en cada clase social en cada año, se encontró la diferenciación de clases de forma natural y una variación en el número de individuos en cada clase conforme avanza el tiempo, este hecho se explica con el año en el que se empiezan a realizar interacciones de tipo Broke Sale y Premium Buying, pues cambian y aumentan la productividad de los agentes.

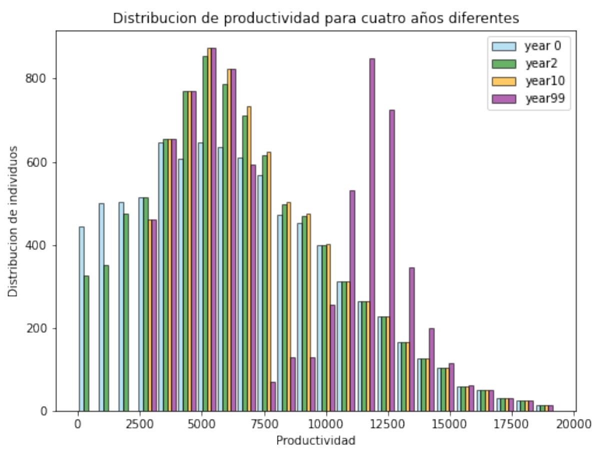
2. Se realizó un análisis de la movilidad social y el índice de Gini para cuatro escenarios considerados: en el primero la productividad se calculó con una distribución gaussiana con media 5000 y desviación estándar 5000, allí se encontró que a partir del año 1 de la simulación las personas se empiezan a diferenciar en las clases Alive y Enough debido al ingreso que adquieren debido a su productividad con el $WorkIncome$, y esto es resultado del factor que da la heterogeneidad en el sistema, la productividad. En el año $t = 8$ el número de personas disminuye en la clase Satisfied y aumenta en Luxury hasta que después del año 10 tienden a los valores $X2 = 69$ en Satisfied y $X3 = 113$ en Luxury, aumento que se explica porque después del año 5 se empiezan a realizar transacciones Premium Buying. En el segundo escenario la media en la distribución gausssiana de la productividad se incrementó a 10000, aquí se encontró que la proporción de individuos en la clase Alive era del 19 % y en la clase Enough del 79 %, lo cual representó que un aumento en la productividad de los individuos puede reducir la proporción de los mismos en las clases sociales más bajas y el aumento en la productividad se puede interpretar como un aumento en la educación. En el tercer escenario se tomo una media de 10000 y se redujo la desviación estándar a 2500 para el cálculo de la productividad, aquí se encontró una proporción de individuos aún más baja para la clase Alive que fue del 6 % por lo que se puede interpretar que el aumento en la producción y la disminución de la desigualdad de habilidades entre



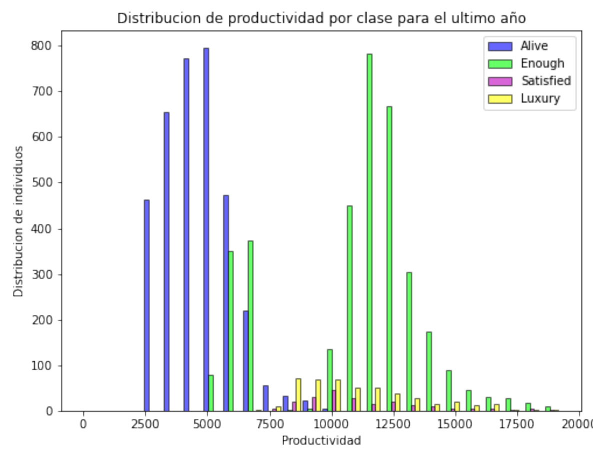
(a) Dif. de clase escala lineal



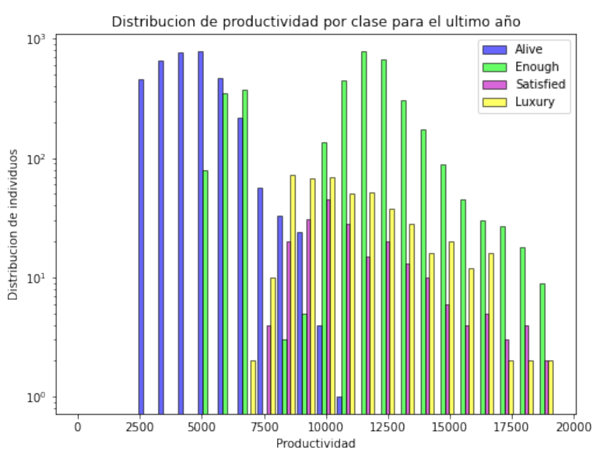
(b) Dif. clase escala log



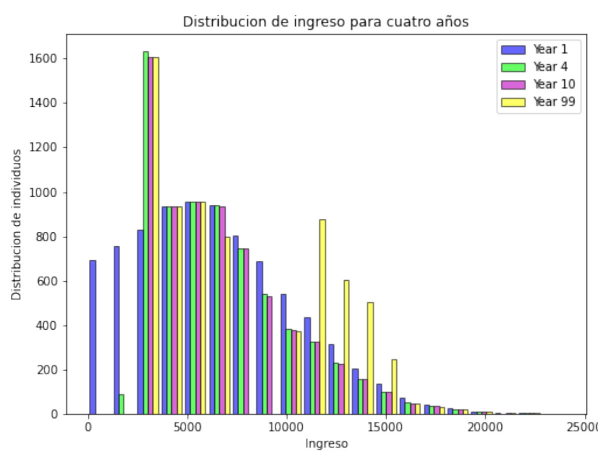
(c) Dist. Productividad cuatro años



(d) Dist. Productividad escala lineal

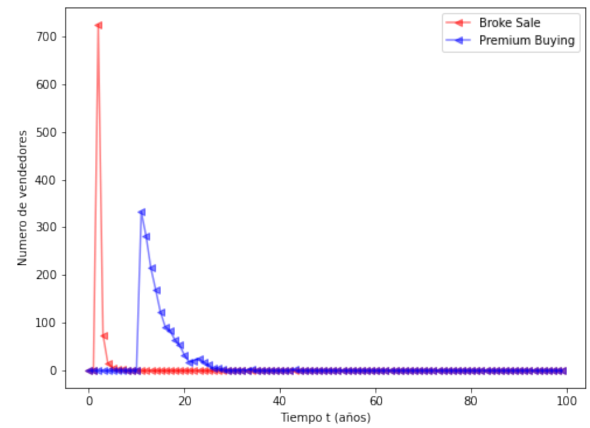


(e) Dist. Productividad escala log

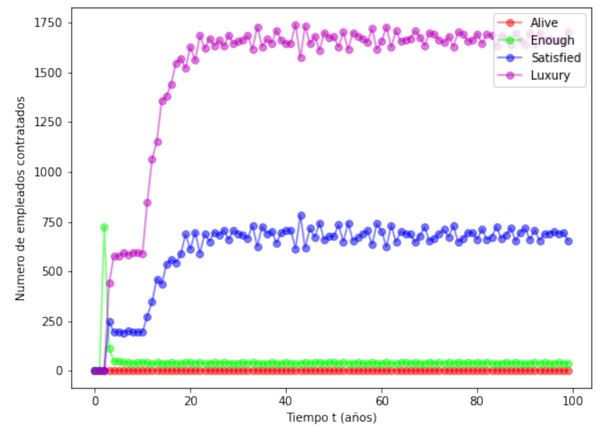


(f) Dist. Ingreso

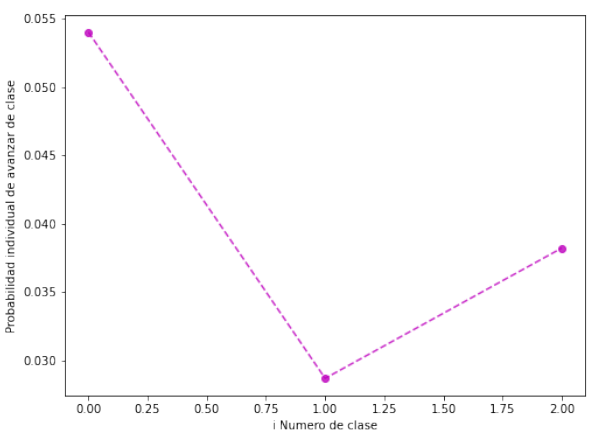
Figura 15: Escenario 4 considerado: (a) Diferenciación de clase en función del tiempo con escala lineal, (b) Dif. clase escala log. (c) Distribución de productividad para cuatro años, año:0,2,10 y 99, (d) Distribución de productividad por clase escala lineal, (e) Distribución de productividad por clase escala log, (f) Distribución de ingreso para cuatro años diferentes: 1, 4, 10 y 99



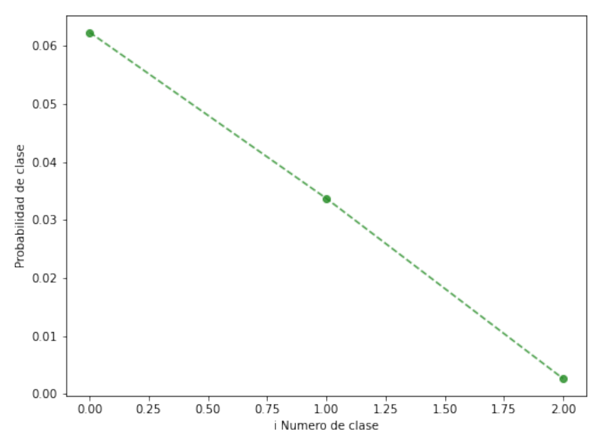
(a) Número de empleados



(b) Número de personas contratadas por clase



(c) Probabilidad a nivel individual



(d) Probabilidad a nivel de clase

Figura 16: Escenario 4 considerado: (a) Número de empleados según el tipo de interacción, (b) Número de personas contratadas por cada clase social. (c) Probabilidad que tiene un individuo de la clase i de ascender, (d) Probabilidad de todos los individuos de la clase i de ascender para i=0,1,2

las personas crean una sociedad más igualitaria en donde la mayoría de los individuos están en la clase Enough(93 %). En el cuatro escenario la media y la desviación se consideraron iguales que al inicio sin embargo, se cambio la tasa que paga el inversionista como salario al vendedor cada año, se tenía una tasa de 1.1 y en este caso se consideró de 1.5, en este caso las proporciones de las clases Alive y Enough fueron prácticamente las mismas y se observó que la distribución del ingreso en el último año tendía a una distribución de tipo exponencial.

3. Se calculó el índice de Gini y la movilidad social para cada uno de los cuatro escenarios mencionados previamente, se observó que efectivamente cuando la productividad aumenta (Escenario 2) el índice de Gini se redujo desde 0,91 hasta 0,78 y la movilidad social presentó un aumento desde 0,029 hasta 0,063. Al comparar el escenario 3 con los demás escenarios se observó un aumento de la movilidad social desde 0,063 hasta 0,14 sin embargo esto no se vio reflejado en una disminución del índice de Gini (G=0,82). Al pasar al escenario 4 se observó una movilidad de 0,094 pero el índice de Gini no presentó una reducción, se obtuvo G=089. Algo a tener en cuenta es que en todos los escenarios no se tuvieron en cuenta los mismos parámetros para decidir quienes eran los vendedores e inversionistas potenciales para realizar una transacción tipo Premium Buying, pues al variar factores como la media o la desviación estándar en la productividad se llegan a casos extremos en los que o no se encuentra a un inversor potencial o se encuentran muchos inversionistas potenciales.

Referencias

[1] Organisation for Economic Co-operation y Development. *Divided we stand: Why inequality keeps rising*. OECD Publishing Paris, 2011.

[2] Maria Letizia Bertotti y Giovanni Modanese. «Economic inequality and mobility in kinetic models for social sciences». En: *The European Physical Journal Special Topics* 225.10 (2016), págs. 1945-1958.

[3] Adrian Drăgulescu y Victor M Yakovenko. «Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 299.1-2 (2001), págs. 213-221.

[4] James B Davies y col. *The world distribution of household wealth*. Vol. 5. December, 2006.

[5] Vilfredo Pareto. *Cours d'économie politique*. Vol. 1. Librairie Droz, 1964.

[6] Adrian Drăgulescu y Victor M Yakovenko. «Evidence for the exponential distribution of income in the USA». En: *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 20.4 (2001), págs. 585-589.

[7] Adrian Dragulescu y Victor M Yakovenko. «Statistical mechanics of money». En: *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 17.4 (2000), págs. 723-729.

[8] Songtao Tian y Zhirong Liu. «Emergence of income inequality: Origin, distribution and possible policies». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 537 (2020), pág. 122767.

[9] Anirban Chakraborti y Bikas K Chakrabarti. «Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution». En: *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 17.1 (2000), págs. 167-170.

[10] Stefano Viaggiu y col. «Statistical ensembles for money and debt». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 391.20 (2012), págs. 4839-4849.

[11] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti y Kimmo Kaski. «Statistical model with a standard Γ distribution». En: *Physical Review E* 70.1 (2004), pág. 016104.

[12] Arnab Chatterjee, Sitabhra Sinha y Bikas K Chakrabarti. «Economic inequality: Is it natural?» En: *Current Science* (2007), págs. 1383-1389.

[13] Dan Andrews y Andrew Leigh. «More inequality, less social mobility». En: *Applied economics letters* 16.15 (2009), págs. 1489-1492.

[14] Miles Corak. «Income inequality, equality of opportunity, and intergenerational mobility». En: *Journal of Economic Perspectives* 27.3 (2013), págs. 79-102.

[15] TÜRK Umut. «Cities as drivers of social mobility». En: (2021).

[16] *Notas de Clase, author=Quimbay, Carlos, volume=1, year=2020, publisher=Universidad Nacional de Colombia.*

[17] Maria Letizia Bertotti y Marcello Delitala. «From discrete kinetic and stochastic game theory to modelling complex systems in applied sciences». En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 14.07 (2004), págs. 1061-1084.