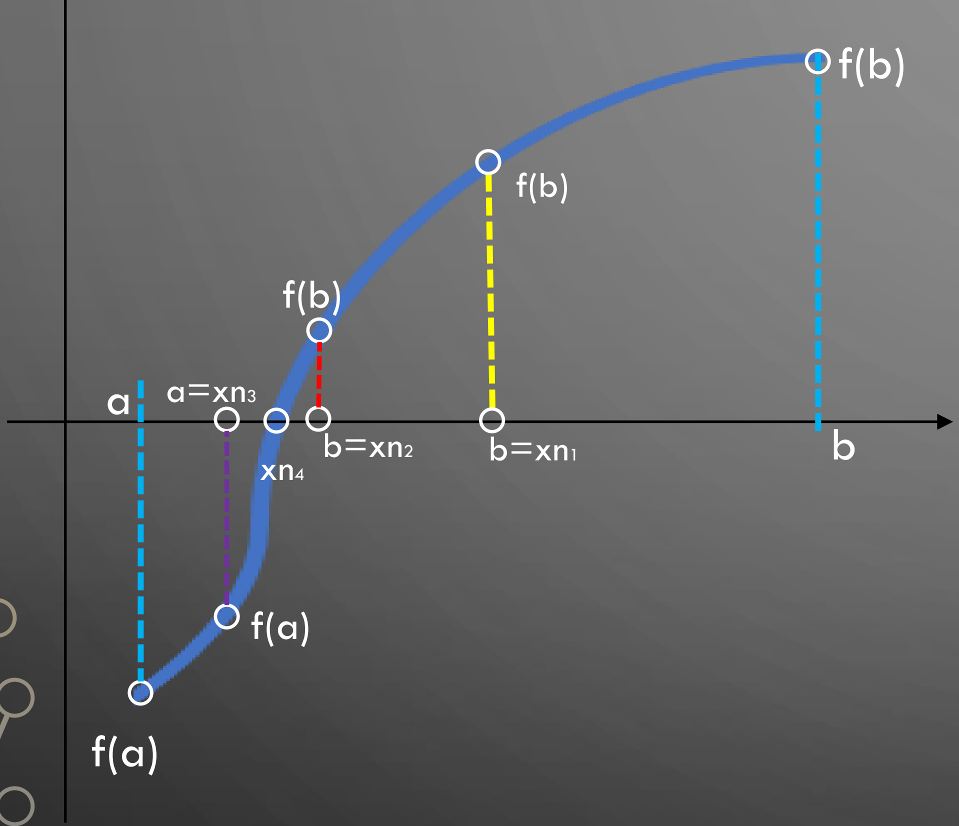
MÉTODOS NÚMERICOS

CAPÍTULO 2 – RAÍZES DE FUNÇÕES REAIS

MÉTODO DA BISSEÇÃO

$$xn = \frac{a+b}{2}$$



Definição de nº de raízes e dos respetivos intervalos (a-b);

- Calcular o ponto médio entre a e b;
- Testamos os dois intervalos gerados [a-xn1] e [xn1-b] para ver qual deles incluí a raiz.
- Substituímos o extremo a excluir por xn1:

- Voltamos a calcular o ponto médio entre a e xn1 que este caso substitui o b;
- Testamos os intervalos gerados;
- Substituímos o extremo a excluir por xn2;

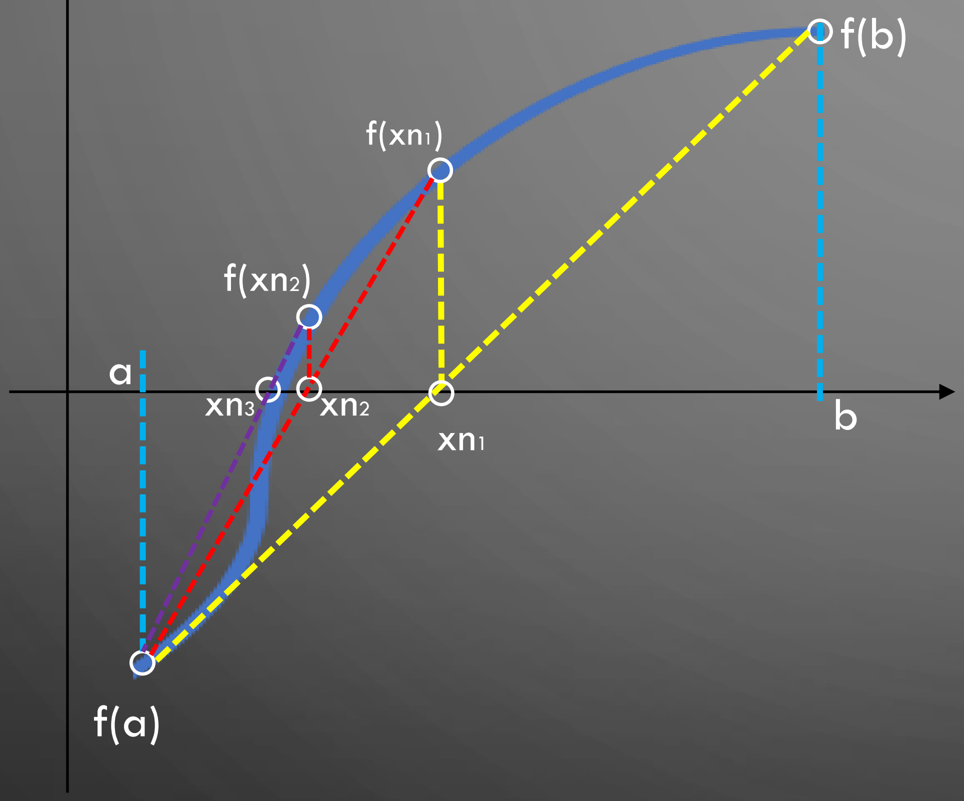
Teste do intervalo que contém a raiz:
Se f(a) x f(b) <0
b=xn & a=a;
Caso contrário
a=xn & b=b;

E assim sucessivamente até:

- Á medida que nos aproximamos da raiz a distância entre a e b será cada vez menor! Podemos utilizar os critérios de paragem absoluto e relativo!
- Com a aproximação à raiz, f(xn) aproxima-se de 0! Podemos utilizar o critério de anulação da função!
- Quando queremos resolver a questão num nº determinado de passos, podemos utilizar o critério do número de iterações!

MÉTODO DA CORDA/FALSA POSIÇÃO

$$xn = \frac{f(b) \times a - f(a) \times b}{f(b) - f(a)}$$



Definição de nº de raizes e dos respetivos intervalos (a-b);

- **Traçar uma reta que une f(a) e f(b);**
- **A intersecção da reta com o eixo do x (y=0) define a primeira aproximação à raiz (xn1);**
- **Substituímos o ponto móvel (neste caso b) por xn1;**

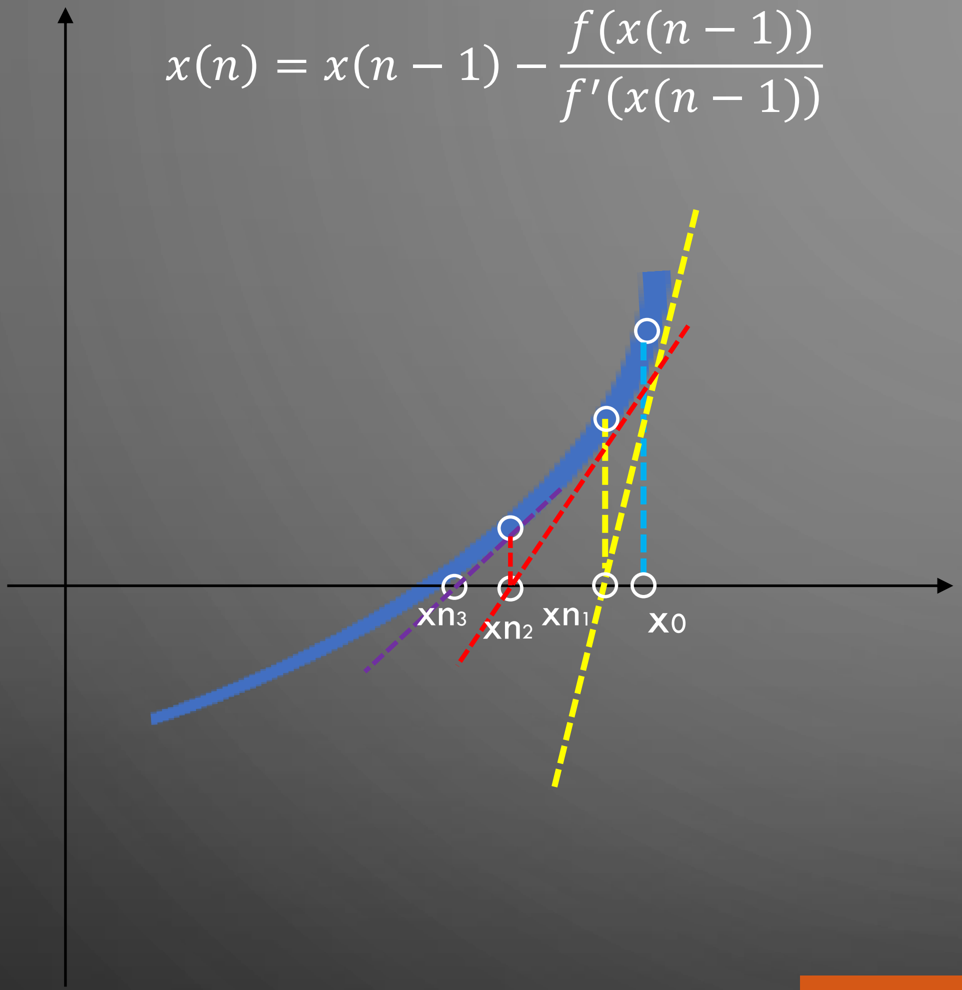
- **Traçamos uma nova reta entre f(a) e f(xn1);**
- **A intersecção da reta com o eixo do x (y=0) define a segunda aproximação à raiz (xn2);**
- **Substituímos xn1 por xn2;**

E assim sucessivamente até:

- Á medida que nos aproximamos da raiz a distância entre xn sucessivos será cada vez menor! Podemos utilizar os critérios de paragem absoluto e relativo!
- Com a aproximação à raiz, f(xn) aproxima-se de 0! Podemos utilizar o critério de anulação da função!
- Quando queremos resolver a questão num nº determinado de passos, podemos utilizar o critério do número de iterações!

MÉTODO DE NEWTON/TANGENTE

$$x(n) = x(n-1) - \frac{f(x(n-1))}{f'(x(n-1))}$$



Definição de nº de raízes e do "guess" X0 próximo da raiz;

- **Traçar uma reta tangente a f(X0);**
- **A intersecção da reta com o eixo do x (y=0) define a primeira aproximação à raiz (xn1);**
- **Substituímos o "guess" por xn1;**

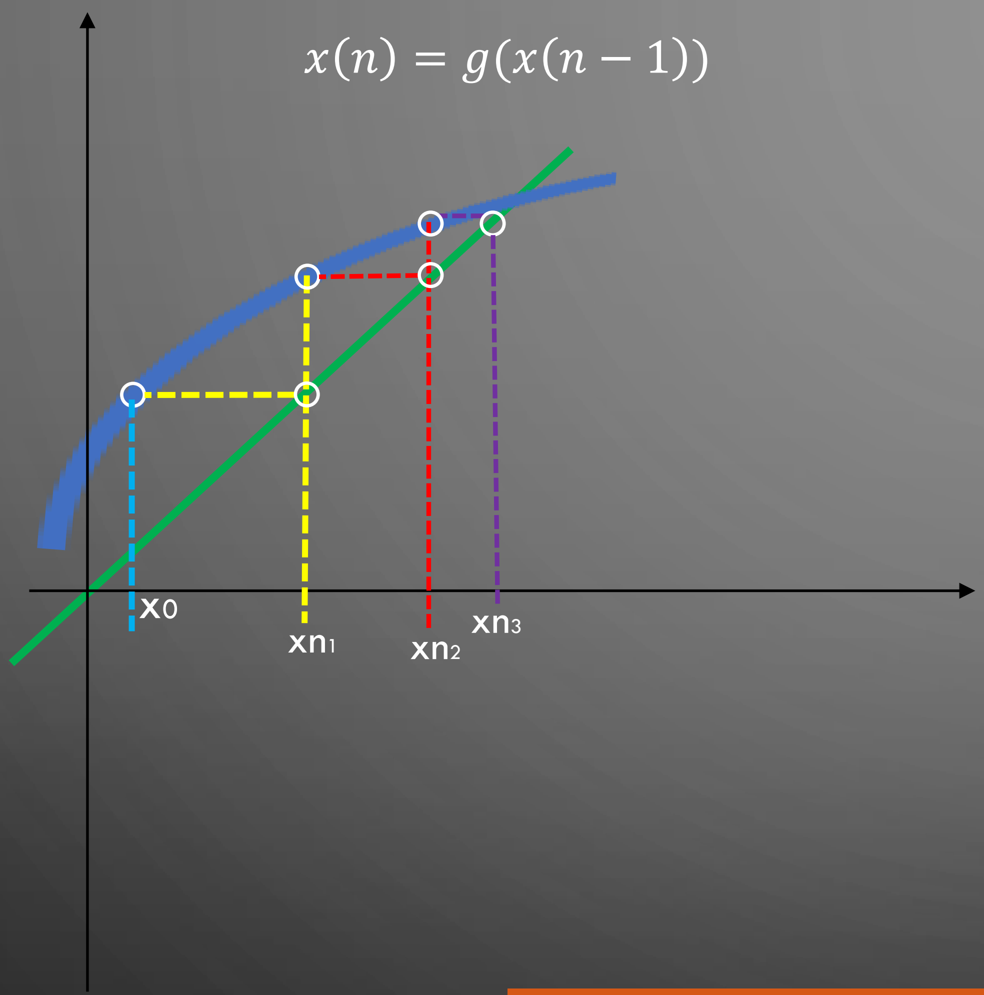
- **Traçamos uma nova tangente a f(xn1);**
- **A intersecção da reta com o eixo do x (y=0) define a segunda aproximação à raiz (xn2);**
- **Substituímos xn1 por xn2;**

E assim sucessivamente até:

- Á medida que nos aproximamos da raiz a distância entre xn sucessivos será cada vez menor! Podemos utilizar os critérios de paragem absoluto e relativo!
- Com a aproximação à raiz, f(xn) aproxima-se de 0! Podemos utilizar o critério de anulação da função!
- Quando queremos resolver a questão num nº determinado de passos, podemos utilizar o critério do número de iterações!

NOTA: é condição necessária, embora não suficiente, que f'(x) seja diferente de 0 para que o método de newton seja aplicável!

MÉTODO PICARD PEANO



- Definição de nº de raizes e do "guess" X0 de cada raiz;
- Transformação da expressão de forma a isolar x num dos membros fazendo f(x)=0 vamos transformar em x=g(x) – Por vezes temos de procurar transformações diferentes para as várias raizes
- Vamos representar graficamente as duas funções: y=x e y=g(x);
- A interseção das duas funções será a raiz da função inicial f(x);

- Vamos nos aproximar da raiz utilizando utilizando um método para nos aproximarmos da interseção entre os dois gráficos:
- Se x=g(x) então xn1 = g(X0);
- Ou seja, a nossa nova aproximação à raiz é g(x0);

- Da mesma forma, a segunda aproximação à raiz (xn2) será g(x1);

E assim sucessivamente até:

- Á medida que nos aproximamos da raiz a distância entre xn sucessivos será cada vez menor! Podemos utilizar os critérios de paragem absoluto e relativo!
- Com a aproximação à raiz, f(xn) aproxima-se de 0! Podemos utilizar o critério de anulação da função!
- Quando queremos resolver a questão num nº determinado de passos, podemos utilizar o critério do número de iterações!

NOTA: é condição necessária que |g'(x)|<1para que o método seja aplicável!

CRITÉRIOS DE PARAGEM - GERAL

- $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ - Critério de paragem absoluto
- $\left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \leq \varepsilon$ - Critério de paragem relativo
- $|f(x_2) - f(x_1)| \leq \varepsilon$ - Critério de anulação da função
- n = N – critério do número de iterações

- ε - precisão

CRITÉRIOS DE PARAGEM – MÉTODOS INTERVALARES

- $|b - a| \leq \varepsilon$ - Critério de paragem absoluto
- $\left|\frac{b-a}{a}\right| \leq \varepsilon$ - Critério de paragem relativo
- $|f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$ - Critério de anulação da função
- n = N – critério do número de iterações

- ε - precisão

EXERCÍCIOS

1. Considere a função $f(x) = x-2\ln(x)-5$
   a) Represente graficamente a função e defina o nº de zeros a estimar;
   b) Defina intervalos que contenham os dois zeros e aplique os métodos intervalares (critério de paragem relativo com ε=10^-4);
   c) Com base na representação gráfica defina valores x0 e teste as condições de convergência (critério de paragem relativo com ε=10^-4);
   d) Com base nos valores definidos na alínea c), aplique os métodos não intervalares;

Solução: Para confirmar se os métodos estão bem aplicados, basta confirmar se os valores obtidos se aproximam dos zeros reais (ver representação gráfica)

2 - Considere a função $f(x)=5.5x^2+6.2x-2.1$. Determine o nº de iterações necessárias para calcular o zero no intervalo [-2,-1], utilizando diferentes critérios de paragem (ver tabela), considerando uma precisão de 10^{-3} e recorrendo apenas a métodos intervalares.

	$\lvert b-a \rvert \leq \varepsilon$	$\left\lvert \frac{b-a}{a} \right\rvert \leq \varepsilon$	$\lvert x_2 - x_1 \rvert \leq \varepsilon$	$\left\lvert \frac{x_2-x_1}{x_2} \right\rvert \leq \varepsilon$
Método 1	9	9	8	8
Método 2	Não é possível	Não é possível	5	5

3 - Considere a função $f(x)=x^2-x-1.2$. Aplique os métodos a)Newton e b)Picard-Peano, utilizando $x_0=4$. Preencha as seguintes tabelas com 3 casas decimais.

x	f(x)	f'(x)	N° iteração
4	10.800	7.000	0
2.456	2.380	3.914	1
1.849	0.370	2.698	2

x	g(x)	N° iteração
4	2.280	0
2.280	1.866	1
1.866	1.751	2

4 - Considere $f(x)=-1+5.5x-4x^2+0.5x^3$, determine a raiz real de f(x) recorrendo ao método de newton e utilizando como aproximação inicial a)4.52 e b)4.54. O critério de paragem a utilizar deve ser o da aproximação da função, com precisão de 10^-5. Comente as diferenças obtidas.