III. Lógica matemática

#developed by **Roberto Angel Melendez-Armenta**

angelarmenta - Overview
angelarmenta has 7 repositories available. Follow their code on GitHub.

https://github.com/angelarmenta

3.1 Lógica proposicional

La **lógica proposicional** es una rama de la lógica matemática que se centra en las proposiciones y su conectividad mediante operadores lógicos. Las proposiciones son afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas.

3.1.1 Proposiciones simples y compuestas

- **Proposición simple:** es una afirmación que tiene un valor de verdad (verdadera o falsa) y no contiene ninguna otra proposición dentro de ella. Ejemplos: "El cielo es azul" (verdadera), "2 + 2 = 5" (falsa).
- **Proposición compuesta:** se forma al combinar dos o más proposiciones simples mediante operadores lógicos como:
  - Conjunción $(\wedge)$: $p \wedge q$ es verdadera solo si *p* y *q* son verdaderas.
  - Disyunción $(\vee)$: $p \vee q$ es verdadera si al menos una de *p* o *q* es verdadera.
  - Negación $(\neg)$: $\neg p$ invierte el valor de verdad de *p*.
  - Implicación $(\rightarrow)$: $p \rightarrow q$ es falsa solo si *p* es verdadera y *q* es falsa.
  - Doble implicación $(\leftrightarrow)$: $p \leftrightarrow q$ es verdadera si *p* y *q* tienen el mismo valor de verdad.

3.1.2 Tablas de verdad

Las **tablas de verdad** muestran todos los posibles valores de verdad para las proposiciones en una expresión lógica. Se construyen combinando los valores de verdad de las proposiciones simples.

- Tablas de verdad de los operadores lógicos:
  - Conjunción:

p	*q*	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F

F	F	F

- Disyunción:

p	*q*	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Negación:

p	$\neg p$
V	F
F	V

- Implicación:

p	*q*	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Doble implicación:

p	*q*	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Por ejemplo: tabla de verdad para la preposición compuesta $p \rightarrow (q \vee \neg r)$:

p	*q*	*r*	$\neg r$:	$q \vee \neg r$:	$p \rightarrow (q \vee \neg r)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

3.1.3 Tautologías, contradicción y contingencia

- **Tautología:** Una proposición compuesta es una tautología si es verdadera en todas las combinaciones posibles de valores de verdad. Por ejemplo: $p \vee \neg p$
- **Contradicción:** Es una proposición que es falsa en todas las combinaciones posibles de valores de verdad. Por ejemplo: $p \wedge \neg p$
- **Contingencia:** Es una proposición que no es ni tautología ni contradicción; es decir, tiene valores de verdad variados según las combinaciones de las proposiciones.

3.1.4 Equivalencias lógicas

Dos proposiciones son **lógicamente equivalentes** si tienen el mismo valor de verdad en todas las situaciones. Se representa como $p \equiv q$.

Algunas equivalencias lógicas comunes incluyen:

- **Ley de De Morgan:**
  - $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- **Doble negación:** $\neg(\neg p) \equiv p$
- **Implicación:** $p \to q \equiv \neg p \vee q$

3.1.5 Reglas de inferencia

Las **reglas de inferencia** son principios que permiten deducir nuevas proposiciones a partir de proposiciones dadas. Algunas reglas básicas incluyen:

- **Modus ponens:** Si $p \to q$ es verdadera y p es verdadera, entonces q es verdadera.
- **Modus tollens:** Si $p \to q$ es verdadera y $\neg q$ es verdadera, entonces $\neg q$ es verdadera.
- **Silogismo hipotético:** Si $p \to q$ y $q \to r$, entonces $p \to r$.

3.1.6 Argumentos válidos y no válidos

Un **argumento** consiste en un conjunto de premisas y una conclusión. Un argumento es válido si, cuando todas las premisas son verdaderas, la conclusión también es verdadera. De lo contrario, el argumento es inválido.

Ejemplo de argumento válido (Modus Ponens):

1. Si hoy llueve, entonces llevaré paraguas.
2. Hoy llueve.
3. Conclusión: Llevaré paraguas.

3.1.7 Demostración formal

La **demostración formal** es un conjunto de inferencias lógicas que derivan una proposición como conclusión a partir de un conjunto de premisas. Las demostraciones son fundamentales en matemáticas y lógica para establecer la validez de afirmaciones de manera rigurosa.

3.2 Lógica de predicados

La **lógica de predicados** extiende la lógica proposicional al incluir **cuantificadores** y **predicados**, que permiten expresar afirmaciones más complejas sobre conjuntos de objetos.

3.2.1 Cuantificadores

- **Cuantificador universal** $(\forall)$**:** Expresa que una proposición es cierta para todos los elementos de un conjunto.
    - Por ejemplo: $\forall x(x > 0)$, se lee como "para todo x, x es mayor que 0".
- **Cuantificador existencial** $(\exists)$**:** Expresa que existe al menos un elemento en el conjunto para el cual la proposición es cierta.
    - Por ejemplo: $\exists x(x > 0)$, se lee como "existe un x tal que x es mayor que 0".

3.2.2 Representación y evaluación de predicados

Un **predicado** es una función que representa una propiedad o relación sobre uno o más elementos. Por ejemplo, el predicado $P(x)$ podría representar "x es un número par". Los predicados se combinan con cuantificadores para formar proposiciones.

3.3 Álgebra declarativa

El **álgebra declarativa** se utiliza para expresar relaciones y funciones en lógica mediante el uso de operadores y reglas. Incluye el uso de álgebra booleana, un sistema binario basado en dos valores, generalmente verdadero (1) y falso (0), con operaciones como AND, OR y NOT. Este álgebra es fundamental en la computación y el diseño de circuitos.

3.4 Inducción matemática

La **inducción matemática** es una técnica de demostración utilizada para probar propiedades de números naturales. Consta de dos pasos:

1. Paso base: Se demuestra que la proposición es cierta para el primer caso (usualmente con $n = 1$).
2. Paso inductivo: Se asume que la proposición es cierta para un número arbitrario k y se demuestra que también es cierta para $k + 1$.

Por ejemplo, demostrar que $S(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Paso base:
    - Cuando $n = 1$:

$S(1) = 1$

- Verificamos si coincide con la fórmula:
  $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1\times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Como $S(1) = 1$, la fórmula es válida para $n = 1$.

2. Paso inductivo: asumimos que la fórmula es cierta para algún número natural k. Es decir, supondremos que:

   $S(k) = 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$

   Esta hipótesis de inducción significa que asumimos que la fórmula es cierta para $n = k$. Ahora necesitamos demostrar que la fórmula también es válida para $n = k + 1$. Es decir, queremos probar que:

   $S(k+1) = 1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

   Demostración:

   Suponiendo que $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$ y añadiendo $k + 1$ a ambos lados de la ecuación:

   $S(k+1) = S(k) + (k+1)$

   Sustituyendo $S(k)$ por su valor de acuerdo con la hipótesis de inducción:

   $S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

   Ahora, simplificamos la expresión para obtener la fórmula para $S(k+1)$ y sacando $k + 1$ como factor común:

   $S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

3.5 Aplicaciones de la lógica matemática en la computación

La lógica matemática es fundamental en la computación, pues permite:

- **Diseñar circuitos lógicos**: Los circuitos electrónicos están basados en puertas lógicas que operan con álgebra booleana.
- **Desarrollar algoritmos y programación**: La lógica proposicional se usa para crear condiciones en los programas y tomar decisiones.
- **Verificación de software**: La lógica formal permite verificar la corrección

Referencias

Espinosa Armenta, R. (2010). *Matemáticas Discretas*. Alfaomega Grupo Editor. ISBN: 978-607-7854-57-9.

Rosen, K. H. (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications* (8th ed.). McGraw-Hill. ISBN: 978-0073383095.

Liu, C. L. (2001). *Elementos de Matemáticas Discretas* (4ª ed.). Pearson Educación. ISBN: 978-9701702404.