Geometría multisimpléctica: primeras definiciones y propiedades básicas.

Ángel Blasco Muñoz

Escuela Internacional de Doctorado, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), España.

8 de enero de 2026

Referencias.

[1] Ralph Abraham y Jerrold E. Marsden. *Foundations of mechanics*. 2nd ed. AMS Chelsea Pub./American Mathematical Society, 2008.

[2] F. Cantrijn, A. Ibort y M. De León. “Hamiltonian structures on multisymplectic manifolds”. En: *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 54.3 (1996), págs. 225-236.

[3] F. Cantrijn, A. Ibort y M. De León. “On the geometry of multisymplectic manifolds”. En: *J. Aust. Math. Soc. A* 66.3 (1999), págs. 303-330.

[4] J. F. Cariñena, M. Crampin y L. A. Ibort. “On the multisymplectic formalism for first order field theories”. En: *Differential Geometry and its Applications* 1.4 (1991), págs. 345-374.

[5] Paulette Libermann y Charles-Michel Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Springer Netherlands, 1987.

Contenidos.

Contenidos.

Introducción.

Se pretende ofrecer una introducción a la Geometría Multisimpléctica basada en el estudio de [2] y [3] y ver sus propiedades básicas, las cuales forman un marco abstracto de estudio para la teoría clásica de campos, la geometría mecánica, la dinámica... y demás ramas relacionadas con la física-matemática.

Contenidos.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

ω se denomina *forma multisimpléctica* (de grado $k+1$).

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V},\omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

ω se denomina *forma multisimpléctica* (de grado $k+1$).
$i_v\omega = 0 \iff v = 0$ para $v \in \mathcal{V}$.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

ω se denomina *forma multisimpléctica* (de grado $k+1$).

$i_v\omega = 0 \iff v = 0$ para $v \in \mathcal{V}$.

La no-degeneración de la forma multisimpléctica significa que la aplicación inducida:

$$\hat{\omega} : \mathcal{V} \to \wedge^k \mathcal{V}^*$$

$$v \mapsto i_v\omega$$

es inyectiva.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Dos espacios vectoriales multisimplécticos $(\mathcal{V}, \omega)$ y $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\omega})$ del mismo orden $(k+1)$, son isomorfos si existe un isomorfismo

$$\Psi : \mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{V}}$$

tal que:

$$\tilde{\omega}(\Psi(v_1), \ldots, \Psi(v_{k+1})) = \omega(v_1, \ldots, v_{k+1})$$

para todo $v_i \in \mathcal{V},\ (i = 1, \ldots, k+1)$.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico?

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico?
Si. Dado un k con $1 \leq k \leq \dim V$, el espacio $V \times \wedge^k V^*$ puede ser equipado con una $(k+1)$-forma canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), \ldots, (v_{k+1}, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha_i(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1})$$

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico? Si. Dado un k con $1 \leq k \leq \dim V$, el espacio $V \times \wedge^k V^*$ puede ser equipado con una $(k+1)$-forma canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), \ldots, (v_{k+1}, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha_i(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1})$$

Proposición:

$(V \times \wedge^k V^*, \Omega)$ es un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

En adelante, por simplicidad, utilizaremos la notación $\mathcal{V}_V^k = V \times \wedge^k V^*$.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \to \ker\pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \to 0$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \to \ker\pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \to 0$$

Denotamos por $\wedge_r^k \pi$ el espacio de las k-formas exteriores.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \to \ker\pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \to 0$$

Denotamos por $\wedge_r^k \pi$ el espacio de las k-formas exteriores.

$$\alpha \in \wedge_r^k \pi \Longleftrightarrow i_{v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r+1}} \alpha = 0$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \ldots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \ldots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Claramente, para $0 \leq r < k$ tenemos que $\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}$ es un subespacio de $\mathcal{V}_V^k$
-CONTAR pg 308 de [3]

Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \ldots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Claramente, para $0 \leq r < k$ tenemos que $\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}$ es un subespacio de $\mathcal{V}_V^k$ -CONTAR pg 308 de [3]

Proposición:

Para cada r, con $0 \leq r \leq k-1$ y $k - r \leq \dim W$, $(\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}, \Omega)$ es un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$.

La anterior proposición nos indica que para cualquier fibrado π de un espacio vectorial V, hay una familia de subespacios vectoriales multisimplécticos de $(\mathcal{V}^k_V, \Omega)$.

La estructura multisimpléctica obtenida al restringir Ω a $\mathcal{V}^{(k,l)}_\pi = V \times \wedge^k_l \pi$ es el modelo lineal para la estructura multisimpléctica canónica que surge en la formulación Hamiltoniana covariante de la teoría de campos (Ver [4]).

Contenidos.

Subespacios característicos.

Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico con una $(k+1)$-forma no degenerada ω, y sea W un subespacio de $\mathcal{V}$. Sea l, con $1 \leq l \leq k$,

Definición

El l-ésimo complemento ortogonal de W es un subespacio lineal de $\mathcal{V}$ definido como:

$$W^{\perp, l} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_l}\omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \ldots, l\}$$

Subespacios característicos.

Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico con una $(k+1)$-forma no degenerada ω, y sea W un subespacio de $\mathcal{V}$. Sea l, con $1 \leq l \leq k$,

Definición

El l-ésimo complemento ortogonal de W es un subespacio lineal de $\mathcal{V}$ definido como:

$$W^{\perp,l} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_l} \omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \ldots, l\}$$

$$W^{\perp,1} \subseteq W^{\perp,2} \subseteq \ldots \subseteq W^{\perp,k}$$

Subespacios característicos.

Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico con una $(k+1)$-forma no degenerada ω, y sea W un subespacio de $\mathcal{V}$. Sea l, con $1 \leq l \leq k$,

Definición

El l-ésimo complemento ortogonal de W es un subespacio lineal de $\mathcal{V}$ definido como:

$$W^{\perp,l} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v\wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_l}\omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \ldots, l\}$$

$$W^{\perp,1} \subseteq W^{\perp,2} \subseteq \ldots \subseteq W^{\perp,k}$$

$$W^{\perp,l} = \mathcal{V} \text{ siempre que } l > \dim W$$

En [3] se enuncian y demuestran las siguientes propiedades:

- $\{0\}^{\perp,l} = \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}^{\perp,l} = \{0\}$;
- $U \subset W \Longrightarrow W^{\perp,l} \subset U^{\perp,l}$;
- $(U + W)^{\perp,l} \subset W^{\perp,l} \cap U^{\perp,l}$;
- $U^{\perp,l_1} \cap W^{\perp,l_2} \subset (U + W)^{\perp,l_1+l_2-1}$ para $l_1 + l_2 \leq k + 1$;
- $U^{\perp,l_1} + W^{\perp,l_2} \subset (U \cap W)^{\perp,\bar{l}}$ para $\bar{l} = \max\{l_1, l_2\}$;

Subespacios característicos.

W es un subespacio de un espacio vectorial multisimpléctico $(\mathcal{V}, \omega)$ de orden $k+1$, entonces:

- l-isotrópico si $W \subset W^{\perp, l}$
- l-coisotrópico si $W^{\perp, l} \subset W$
- l-Lagrangiano si $W = W^{\perp, l}$

Contenidos.

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Por [5] sabemos que:
$(\mathcal{V}, \omega)$ sea un espacio vectorial simpléctico y L un subespacio Lagrangiano de $\mathcal{V}$ (que siempre existe)

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Por [5] sabemos que:
$(\mathcal{V},\omega)$ sea un espacio vectorial simpléctico y L un subespacio Lagrangiano de $\mathcal{V}$ (que siempre existe)

$$(\mathcal{V},\omega) \cong (\mathcal{V}_L^1,\Omega)$$

con

$$\Omega((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Por [5] sabemos que:
$(\mathcal{V}, \omega)$ sea un espacio vectorial simpléctico y L un subespacio Lagrangiano de $\mathcal{V}$ (que siempre existe)

$$(\mathcal{V}, \omega) \cong (\mathcal{V}_L^1, \Omega)$$

con

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

Todos los espacios vectoriales simplécticos de la misma dimensión "son parecidos", en el sentido de que son isomorfos a algún $(\mathcal{V}_L^1, \Omega)$.

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

¿Y en el marco multisimpléctico?

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

¿Y en el marco multisimpléctico?
¿Como tienen que ser los espacios vectoriales multisimplécticos para que sean isomorfos a alguno del tipo $(\mathcal{V}^k_V, \Omega)$?

Contenidos.

Variedades multisimplécticas.

Contenidos.

Contenidos.

Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.