

# Geometría multisimpléctica: primeras definiciones y propiedades básicas.

Ángel Blasco Muñoz

Escuela Internacional de Doctorado, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), España.

8 de enero de 2026



# Referencias. I

- [1] Ralph Abraham y Jerrold E. Marsden. *Foundations of mechanics*. 2nd ed. AMS Chelsea Pub./American Mathematical Society, 2008.
- [2] F. Cantrijn, A. Ibort y M. De León. “Hamiltonian structures on multisymplectic manifolds”. En: *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 54.3 (1996), págs. 225-236.
- [3] F. Cantrijn, A. Ibort y M. De León. “On the geometry of multisymplectic manifolds”. En: *J. Aust. Math. Soc. A* 66.3 (1999), págs. 303-330.
- [4] J. F. Cariñena, M. Crampin y L. A. Ibort. “On the multisymplectic formalism for first order field theories”. En: *Differential Geometry and its Applications* 1.4 (1991), págs. 345-374.
- [5] M. de Leon, D. Martin de Diego y A. Santamaria-Merino. “Tulczyjew’s triples and lagrangian submanifolds in classical field theories”. En: *arXiv e-prints* (2003). arXiv: math-ph/0302026.

## Referencias. II

- [6] Paulette Libermann y Charles-Michel Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Springer Netherlands, 1987.
- [7] Geoffrey Martin. "A Darboux theorem for multi-symplectic manifolds". En: *Letters in Mathematical Physics* 16.2 (1988), págs. 133-138.

# Contenidos.

- 1 Introducción.
- 2 Espacios vectoriales multisimplécticos.
- 3 Subespacios característicos.
- 4 Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.
- 5 Variedades multisimplécticas.
- 6 Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.
- 7 Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

# Contenidos.

- 1 Introducción.
- 2 Espacios vectoriales multisimplécticos.
- 3 Subespacios característicos.
- 4 Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.
- 5 Variedades multisimplécticas.
- 6 Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.
- 7 Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

# Introducción.

La geometría multisimpléctica puede entenderse como una generalización de la geometría simpléctica al contexto de las teorías de campos clásicas. Mientras que una variedad simpléctica está equipada con una 2-forma cerrada y no degenerada, la geometría multisimpléctica considera variedades provistas de una  $(k+1)$ -forma cerrada y no degenerada, adecuadas para describir sistemas con varias variables independientes.

# Introducción.

Este marco geométrico surge de manera natural en el estudio de formulaciones covariantes de las ecuaciones de Euler–Lagrange, especialmente en el contexto de los fibrados de jets y los fibrados multimomento. La forma multisimpléctica codifica la dinámica del sistema de forma intrínseca, extendiendo el formalismo Hamiltoniano clásico a dimensiones superiores.

# Introducción.

Los orígenes de la geometría multisimpléctica se remontan a los trabajos de **De Donder** y **Weyl** sobre formulaciones Hamiltonianas de teorías de campos. Su desarrollo geométrico moderno fue impulsado por contribuciones fundamentales de **Tulczyjew**, **Kijowski**, y posteriormente sistematizado por **Gotay**, **Isenberg** y **Marsden**, entre otros.

# Introducción.

Entre algunos de los trabajos mas importantes de los anteriores autores que han influido en el posterior desarrollo de la geometría multisimpléctica podemos destacar:

- T. De Donder, *Théorie Invariantive du Calcul des Variations*, Gauthier-Villars, 1935.
- H. Weyl, *Geodesic fields in the calculus of variations*, Ann. of Math., 1935.
- J. Kijowski, *A finite-dimensional canonical formalism in the classical field theory*, Commun. Math. Phys., 1974.
- M. J. Gotay, J. Isenberg, J. E. Marsden, *Momentum maps and classical relativistic fields*, Part I & II, 1998.

# Contenidos.

- 1 Introducción.
- 2 Espacios vectoriales multisimplécticos.
- 3 Subespacios característicos.
- 4 Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.
- 5 Variedades multisimplécticas.
- 6 Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.
- 7 Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

## Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden  $k + 1$  es un par  $(\mathcal{V}, \omega)$  formado por un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  y una  $(k + 1)$ -forma en  $\mathcal{V}$  no degenerada.

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

## Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden  $k + 1$  es un par  $(\mathcal{V}, \omega)$  formado por un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  y una  $(k + 1)$ -forma en  $\mathcal{V}$  no degenerada.

$\omega$  se denomina *forma multisimpléctica* (de grado  $k + 1$ ).

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

## Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden  $k + 1$  es un par  $(\mathcal{V}, \omega)$  formado por un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  y una  $(k + 1)$ -forma en  $\mathcal{V}$  no degenerada.

$\omega$  se denomina *forma multisimpléctica* (de grado  $k + 1$ ).

$$i_v \omega = 0 \iff v = 0 \text{ para } v \in \mathcal{V}.$$

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

## Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden  $k + 1$  es un par  $(\mathcal{V}, \omega)$  formado por un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  y una  $(k + 1)$ -forma en  $\mathcal{V}$  no degenerada.

$\omega$  se denomina *forma multisimpléctica* (de grado  $k + 1$ ).

$$i_v \omega = 0 \iff v = 0 \text{ para } v \in \mathcal{V}.$$

La no-degeneración de la forma multisimpléctica significa que la aplicación inducida:

$$\hat{\omega} : \mathcal{V} \rightarrow \wedge^k \mathcal{V}^*$$

$$v \mapsto i_v \omega$$

es inyectiva.

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

Dos espacios vectoriales multisimplécticos  $(\mathcal{V}, \omega)$  y  $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\omega})$  del mismo orden  $(k+1)$ , son isomorfos si existe un isomorfismo

$$\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$$

tal que:

$$\tilde{\omega}(\Psi(v_1), \dots, \Psi(v_{k+1})) = \omega(v_1, \dots, v_{k+1})$$

para todo  $v_i \in \mathcal{V}$ ,  $(i = 1, \dots, k+1)$ .

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial  $V$ , el espacio  $V \times V^*$  admite una forma simpléctica canónica  $\Omega$  definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial  $V$ , el espacio  $V \times V^*$  admite una forma simpléctica canónica  $\Omega$  definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

*¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico?*

## Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial  $V$ , el espacio  $V \times V^*$  admite una forma simpléctica canónica  $\Omega$  definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

*¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico?*

Si. Dado un  $k$  con  $1 \leq k \leq \dim V$ , el espacio  $V \times \wedge^k V^*$  puede ser equipado con una  $(k+1)$ -forma canónica  $\Omega$  definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), \dots, (v_{k+1}, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha_i(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1})$$

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial  $V$ , el espacio  $V \times V^*$  admite una forma simpléctica canónica  $\Omega$  definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico?  
Si. Dado un  $k$  con  $1 \leq k \leq \dim V$ , el espacio  $V \times \wedge^k V^*$  puede ser equipado con una  $(k+1)$ -forma canónica  $\Omega$  definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), \dots, (v_{k+1}, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha_i(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1})$$

## Proposición:

$(V \times \wedge^k V^*, \Omega)$  es un espacio vectorial multisimpléctico de orden  $k+1$ .

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

En adelante, por simplicidad, utilizaremos la notación  $\mathcal{V}_V^k = V \times \wedge^k V^*$ .

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \rightarrow \ker\pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 0$$

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \rightarrow \ker \pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 0$$

Denotamos por  $\wedge_r^k \pi$  el espacio de las  $k$ -formas exteriores.

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \rightarrow \ker \pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 0$$

Denotamos por  $\wedge_r^k \pi$  el espacio de las  $k$ -formas exteriores.

$$\alpha \in \wedge_r^k \pi \iff i_{v_1 \wedge \dots \wedge v_{r+1}} \alpha = 0$$

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \dots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \dots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Claramente, para  $0 \leq r < k$  tenemos que  $\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}$  es un subespacio de  $\mathcal{V}_V^k$

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \dots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Claramente, para  $0 \leq r < k$  tenemos que  $\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}$  es un subespacio de  $\mathcal{V}_V^k$

## Proposición:

Para cada  $r$ , con  $0 \leq r \leq k - 1$  y  $k - r \leq \dim W$ ,  $(\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}, \Omega)$  es un espacio vectorial multisimpléctico de orden  $k + 1$ .

# Espacios vectoriales multisimplécticos.

La anterior proposición nos indica que para cualquier fibrado  $\pi$  de un espacio vectorial  $V$ , hay una familia de subespacios vectoriales multisimplécticos de  $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$ .

La estructura multisimpléctica obtenida al restringir  $\Omega$  a  $\mathcal{V}_\pi^{(k,l)} = V \times \wedge_l^k \pi$  es el modelo lineal para la estructura multisimpléctica canónica que surge en la formulación Hamiltoniana covariante de la teoría de campos (Ver [4]).

# Contenidos.

- 1 Introducción.
- 2 Espacios vectoriales multisimplécticos.
- 3 Subespacios característicos.
- 4 Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.
- 5 Variedades multisimplécticas.
- 6 Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.
- 7 Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

# Subespacios característicos.

Sea  $(\mathcal{V}, \omega)$  un espacio vectorial multisimpléctico con una  $(k+1)$ -forma no degenerada  $\omega$ , y sea  $W$  un subespacio de  $\mathcal{V}$ . Sea  $I$ , con  $1 \leq I \leq k$ ,

## Definición

El  $I$ -ésimo complemento ortogonal de  $W$  es un subespacio lineal de  $\mathcal{V}$  definido como:

$$W^{\perp,I} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_I} \omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \dots, I\}$$

# Subespacios característicos.

Sea  $(\mathcal{V}, \omega)$  un espacio vectorial multisimpléctico con una  $(k+1)$ -forma no degenerada  $\omega$ , y sea  $W$  un subespacio de  $\mathcal{V}$ . Sea  $I$ , con  $1 \leq I \leq k$ ,

## Definición

El  $I$ -ésimo complemento ortogonal de  $W$  es un subespacio lineal de  $\mathcal{V}$  definido como:

$$W^{\perp,I} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_I} \omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \dots, I\}$$

$$W^{\perp,1} \subseteq W^{\perp,2} \subseteq \dots \subseteq W^{\perp,k}$$

# Subespacios característicos.

Sea  $(\mathcal{V}, \omega)$  un espacio vectorial multisimpléctico con una  $(k+1)$ -forma no degenerada  $\omega$ , y sea  $W$  un subespacio de  $\mathcal{V}$ . Sea  $I$ , con  $1 \leq I \leq k$ ,

## Definición

El  $I$ -ésimo complemento ortogonal de  $W$  es un subespacio lineal de  $\mathcal{V}$  definido como:

$$W^{\perp,I} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_I} \omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \dots, I\}$$

$$W^{\perp,1} \subseteq W^{\perp,2} \subseteq \dots \subseteq W^{\perp,k}$$

$$W^{\perp,I} = \mathcal{V} \text{ siempre que } I > \dim W$$

## Subespacios característicos.

En [3] se enuncian y demuestran las siguientes propiedades:

- $\{0\}^{\perp,I} = \mathcal{V}$  y  $\mathcal{V}^{\perp,I} = \{0\}$ ;
- $U \subset W \implies W^{\perp,I} \subset U^{\perp,I}$ ;
- $(U + W)^{\perp,I} \subset W^{\perp,I} \cap U^{\perp,I}$ ;
- $U^{\perp,l_1} \cap W^{\perp,l_2} \subset (U + W)^{\perp,l_1+l_2-1}$  para  $l_1 + l_2 \leq k + 1$ ;
- $U^{\perp,l_1} + W^{\perp,l_2} \subset (U \cap W)^{\perp,\bar{l}}$  para  $\bar{l} = \max\{l_1, l_2\}$ ;

## Subespacios característicos.

$W$  es un subespacio de un espacio vectorial multisimpléctico  $(\mathcal{V}, \omega)$  de orden  $k + 1$ , entonces:

- I-isotrópico si  $W \subset W^{\perp,I}$
- I-coisotrópico si  $W^{\perp,I} \subset W$
- I-Lagrangiano si  $W = W^{\perp,I}$

# Contenidos.

- 1 Introducción.
- 2 Espacios vectoriales multisimplécticos.
- 3 Subespacios característicos.
- 4 Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.
- 5 Variedades multisimplécticas.
- 6 Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.
- 7 Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Por [6] sabemos que:

$(\mathcal{V}, \omega)$  sea un espacio vectorial simpléctico y  $L$  un subespacio Lagrangiano de  $\mathcal{V}$  (que siempre existe)

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Por [6] sabemos que:

$(\mathcal{V}, \omega)$  sea un espacio vectorial simpléctico y  $L$  un subespacio Lagrangiano de  $\mathcal{V}$  (que siempre existe)

$$(\mathcal{V}, \omega) \cong (\mathcal{V}_L^1, \Omega)$$

con

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Por [6] sabemos que:

$(\mathcal{V}, \omega)$  sea un espacio vectorial simpléctico y  $L$  un subespacio Lagrangiano de  $\mathcal{V}$  (que siempre existe)

$$(\mathcal{V}, \omega) \cong (\mathcal{V}_L^1, \Omega)$$

con

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

Todos los espacios vectoriales simplécticos de la misma dimensión "son parecidos", en el sentido de que son isomorfos a algún  $(\mathcal{V}_L^1, \Omega)$ .

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

¿Y en el marco multisimpléctico?

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

¿Y en el marco multisimpléctico?

¿Como tienen que ser los espacios vectoriales multisimplécticos para que sean isomorfos a alguno del tipo  $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$ ?

Donde  $\Omega$  se define como:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), \dots, (v_{k+1}, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha_i(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1})$$

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Recordemos que  $\mathcal{V}_V^k = V \times \wedge^k V^*$ .

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Recordemos que  $\mathcal{V}_V^k = V \times \wedge^k V^*$ . Podemos identificar:

$$V \implies V \times \{0\} \text{ y } \wedge^k V^* \implies \{0\} \times \wedge^k V^*$$

ambos son subespacios de  $\mathcal{V}_V^k$ .

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Recordemos que  $\mathcal{V}_V^k = V \times \wedge^k V^*$ . Podemos identificar:

$$V \implies V \times \{0\} \text{ y } \wedge^k V^* \implies \{0\} \times \wedge^k V^*$$

ambos son subespacios de  $\mathcal{V}_V^k$ .

**Teorema:**

$V$  es un subespacio  $k$ -Lagrangiano de  $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$  y  $\wedge^k V^*$  es un subespacio  $1$ -Lagrangiano.

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Pongamos  $W = \wedge^k V^*$ , tenemos entonces que:

$$\wedge^k (\mathcal{V}_V^k / W)^* = \wedge^k V^* = W$$

y, por lo tanto

$$\dim W = \dim \wedge^k (\mathcal{V}_V^k / W)^*$$

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Si tomamos  $\dim \mathcal{V}_V^k = n$  y  $\dim W = p$  entonces tenemos la siguiente relación:

$$p = \binom{n-p}{k}$$

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Si tomamos  $\dim \mathcal{V}_V^k = n$  y  $\dim W = p$  entonces tenemos la siguiente relación:

$$p = \binom{n-p}{k}$$

## Observación:

Dado un espacio multisimpléctico  $n$ -dimensional  $(\mathcal{V}, \omega)$  de orden  $k+1$ , una condición necesaria para que sea isomorfo a un espacio multisimpléctico canónico  $n$ -dimensional  $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$  es que  $\mathcal{V}$  admita un subespacio 1-Lagrangiano  $W$  de dimensión  $p$ , tal que la anterior relación se cumpla.

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

## Teorema:

Sea  $(\mathcal{V}, \omega)$  un espacio vectorial multisimpléctico de orden  $k + 1$ . Entonces,  $(\mathcal{V}, \omega)$  es isomorfo al espacio vectorial multisimpléctico canónico  $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$  si y solo si existe un subespacio  $W$  de  $\mathcal{V}$  tal que:

- $W$  es 1-Lagrangiano.
- $\dim W = \dim \wedge^k (\mathcal{V}/W)^*$

# Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

## Teorema:

Sea  $(\mathcal{V}, \omega)$  un espacio vectorial multisimpléctico de orden  $k + 1$ . Entonces,  $(\mathcal{V}, \omega)$  es isomorfo al espacio vectorial multisimpléctico canónico  $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$  si y solo si existe un subespacio  $W$  de  $\mathcal{V}$  tal que:

- $W$  es 1-Lagrangiano.
- $\dim W = \dim \wedge^k (\mathcal{V}/W)^*$

## Corolario:

Sea  $\nu$  una forma de volumen de un espacio vectorial  $\mathcal{V}$   $(k + 1)$ -dimensional, entonces el espacio multisimpléctico  $(\mathcal{V}, \nu)$  es isomorfo a un espacio multisimpléctico canónico de orden  $k + 1$ .

# Contenidos.

- 1 Introducción.
- 2 Espacios vectoriales multisimplécticos.
- 3 Subespacios característicos.
- 4 Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.
- 5 Variedades multisimplécticas.
- 6 Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.
- 7 Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

# Variedades multisimplécticas.

## Definición:

Una variedad multisimpléctica  $(M, \omega)$  de orden  $k + 1$  es un par formado por una variedad diferenciable  $M$  y una  $(k + 1)$ -forma cerrada  $\omega$  sobre  $M$  la cual es a su vez no degenerada. La forma diferencial  $\omega$  se denomina forma multisimpléctica (de grado  $k + 1$ ).

# Variedades multisimplécticas.

## Definición:

Una subvariedad  $N$  de una variedad multisimpléctica  $(M, \omega)$  de orden  $k+1$  sera  $l$ -isotrópica (resp.  $l$ -coisotrópica,  $l$ -Lagrangiana), para  $1 \leq l \leq k$ , si para cada punto  $n \in N$ ,  $T_n N$  es un subespacio  $l$ -isotrópico (resp.  $l$ -coisotrópico,  $l$ -Lagrangiano) de un espacio vectorial multisimpléctico  $(T_n M, \omega_n)$ .

# Variedades multisimplécticas.

## Definición:

Una subvariedad  $N$  de una variedad multisimpléctica  $(M, \omega)$  de orden  $k+1$  sera  $l$ -isotrópica (resp.  $l$ -coisotrópica,  $l$ -Lagrangiana), para  $1 \leq l \leq k$ , si para cada punto  $n \in N$ ,  $T_n N$  es un subespacio  $l$ -isotrópico (resp.  $l$ -coisotrópico,  $l$ -Lagrangiano) de un espacio vectorial multisimpléctico  $(T_n M, \omega_n)$ .

Como:

$$TN^{\perp,l} = \bigcup_{n \in N} (T_n N)^{\perp,l}$$

$N$  es  $l$ -isotrópico (resp.  $l$ -coisotrópico,  $l$ -Lagrangiano) si  $TN \subset TN^{\perp,l}$  (resp.  $TN^{\perp,l} \subset TN$ ,  $TN = TN^{\perp,l}$ ).

# Contenidos.

- 1 Introducción.
- 2 Espacios vectoriales multisimplécticos.
- 3 Subespacios característicos.
- 4 Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.
- 5 Variedades multisimplécticas.
- 6 Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.
- 7 Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

# Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Sea  $(M, \omega)$  una variedad multisimpléctica de orden  $k + 1$ :

# Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Sea  $(M, \omega)$  una variedad multisimpléctica de orden  $k + 1$ :

Definición:

Un campo vectorial  $X$  en  $M$  es locálmente Hamiltoniano si  $\mathcal{L}_X \omega = 0$

Sea un campo vectorial  $X$  con una  $k$ -forma  $i_X\omega$  exacta, es decir,  $i_X\omega = d\alpha$  para alguna  $(k - 1)$ -forma  $\alpha$  de  $M$ , entonces:

## Definición:

- $X$  es Hamiltoniano.
- $\alpha$  es la forma Hamiltoniana (de orden  $k - 1$ ).

## Definición:

Un campo multivectorial de grado  $m$  en una variedad  $M$  (con  $m \leq n = \dim M$ ) es una sección del fibrado  $\wedge^m(TM) \rightarrow M$  (que es un campo tensorial antisimétrico de grado  $m$  en  $M$  y contravariante).

El conjunto de los campos multivectoriales de grado  $m$  en una variedad  $M$  lo denotamos por  $\mathfrak{X}^m(M)$ .

# Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Para todo  $p \in M$ , hay un entorno  $U_p \subset M$  y campos vectoriales  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U_p)$ , con  $m \leq r \leq \dim M$ , tal que:

# Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Para todo  $p \in M$ , hay un entorno  $U_p \subset M$  y campos vectoriales  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U_p)$ , con  $m \leq r \leq \dim M$ , tal que:

$$\mathbf{X}|_{U_p} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} f^{i_1 \dots i_m} X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_m}; \text{ con } f^{i_1 \dots i_m} \in C^\infty(U_p)$$

Sea  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$  un campo multivectorial:

## Definición:

- $\mathbf{X}$  es homogéneo si existen  $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  
$$\mathbf{X} = X_1 \wedge \dots \wedge X_m.$$
- $\mathbf{X}$  es locálmemente homogéneo si, para todo  $p \in M$ , existen  $U_p \in M$  y  $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(U_p)$  tal que  $\mathbf{X}|_{U_p} = X_1 \wedge \dots \wedge X_m.$

# Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Todo campo multivectorial  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$  define una contracción con las formas diferenciales  $\Omega \in \Omega^k(M)$ .

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{X}} \Omega|_{U_p} &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} f^{i_1 \dots i_m} i_{X_1 \wedge \dots \wedge X_m} \Omega = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} f^{i_1 \dots i_m} i_{X_1} \dots i_{X_m} \Omega \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$ , la derivada de Lie de  $\Omega \in \Omega^k(M)$  es:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = d(i_{\mathbf{X}}\Omega) - (-1)^m i_{\mathbf{X}}d\Omega$$

Sea  $(M, \Omega)$  una variedad multisimpléctica de orden  $k$ :

## Definición:

Un campo multivectorial  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$  con  $(m < k)$  es un campo multivectorial localmente Hamiltoniano si  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = 0$ , es decir,  
 $i_{\mathbf{X}}\Omega \in \Omega^{k-m}(M)$  es una forma cerrada.

Sea  $(M, \Omega)$  una variedad multisimpléctica de orden  $k$ :

## Definición:

Un campo multivectorial  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$  con  $(m < k)$  es un campo multivectorial localmente Hamiltoniano si  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = 0$ , es decir,  
 $i_{\mathbf{X}}\Omega \in \Omega^{k-m}(M)$  es una forma cerrada.

Por lo tanto, para todo  $p \in M$ , existe  $U \in M$  y  $\zeta \in \Omega^{k-m-1}(U)$  tal que  
 $i_{\mathbf{X}}\Omega = d\zeta$  (en  $U$ ).

# Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Sea  $(M, \Omega)$  una variedad multisimpléctica de orden  $k$ :

## Definición:

Un campo multivectorial  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$  con  $(m < k)$  es un campo multivectorial locálmente Hamiltoniano si  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = 0$ , es decir,  
 $i_{\mathbf{X}}\Omega \in \Omega^{k-m}(M)$  es una forma cerrada.

Por lo tanto, para todo  $p \in M$ , existe  $U \in M$  y  $\zeta \in \Omega^{k-m-1}(U)$  tal que  
 $i_{\mathbf{X}}\Omega = d\zeta$  (en  $U$ ).

## Definición:

$\zeta \in \Omega^{k-m-1}(U)$  es una forma locálmente Hamiltoniana para  $\mathbf{X}$ .

Sea  $(M, \Omega)$  una variedad multisimpléctica de orden  $k$ :

## Definición:

$\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$  es un campo multivectorial Hamiltoniano si  $i_{\mathbf{X}}\Omega \in \Omega^{k-m}(M)$  es una forma exacta; es decir, existe  $\zeta \in \Omega^{k-m-1}(M)$  tal que  $i_{\mathbf{X}}\Omega = d\zeta$ .

En este caso  $\zeta \in \Omega^{k-m-1}(M)$  es la denominada forma Hamiltoniana para  $\mathbf{X}$ .

# Contenidos.

- 1 Introducción.
- 2 Espacios vectoriales multisimplécticos.
- 3 Subespacios característicos.
- 4 Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.
- 5 Variedades multisimplécticas.
- 6 Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.
- 7 Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

# Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

Ver [5] para mas detalles:

- Fibrado tangente  $\implies$  Modelo canónico para variedades simplécticas.
- Fibrado de formas  $\implies$  Modelo canónico para variedades simplécticas.

# Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

$Q$  es una variedad diferenciable.  $\rho : \wedge^k(T^*Q) \rightarrow Q$  es el fibrado de las  $k$ -formas en  $Q$ .

# Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

$Q$  es una variedad diferenciable.  $\rho : \wedge^k(T^*Q) \rightarrow Q$  es el fibrado de las  $k$ -formas en  $Q$ .

Existe una  $k$ -forma(canónica):

$$\Theta_Q \in \Omega^k(\wedge^k(T^*Q))$$

$$\Theta_{Q_\alpha}(V_1, \dots, V_k) = i(\rho_* V_k \wedge \dots \wedge \rho_* V_1)$$

para:

$$\alpha \in \wedge^k(T^*Q) \text{ y } V_1, \dots, V_k \in T_\alpha(\wedge^k(T^*Q))$$

# Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

$\Omega_Q = d\Theta_Q \in \Omega^{k+1}(\wedge^k(T^*))$  es una forma cerrada y no-degenerada.

# Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

$\Omega_Q = d\Theta_Q \in \Omega^{k+1}(\wedge^k(T^*))$  es una forma cerrada y no-degenerada.  
 $(\wedge^k(T^*Q, \Omega_Q)$  es una variedad multisimpléctica de orden  $k + 1$ .

# Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

$(x^i, p_{i_1, \dots, i_k})$  es un sistema natural de coordenadas en  $U \subset \wedge^k(T^*Q)$

$$\Theta_Q|_U = p_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_1}$$

$$\Omega_Q|_U = dp_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_1}$$

son las coordenadas de Darboux en  $\wedge^k(T^*Q)$ .

# Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

## Cuidado !!!

Al contrario que en las variedades simplécticas, las variedades multisimplécticas, en general, no son (localmente) difeomorfas a sus modelos canónicos, deben cumplir propiedades adicionales para asegurar la existencia de coordenadas de Darboux para ellas. Ver [7] para mas información.