Geometría multisimpléctica: primeras definiciones y propiedades básicas.

Ángel Blasco Muñoz

Escuela Internacional de Doctorado, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), España.

8 de enero de 2026

Referencias. I

[1] Ralph Abraham y Jerrold E. Marsden. *Foundations of mechanics*. 2nd ed. AMS Chelsea Pub./American Mathematical Society, 2008.

[2] F. Cantrijn, A. Ibort y M. De León. "Hamiltonian structures on multisymplectic manifolds". En: *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 54.3 (1996), págs. 225-236.

[3] F. Cantrijn, A. Ibort y M. De León. "On the geometry of multisymplectic manifolds". En: *J. Aust. Math. Soc. A* 66.3 (1999), págs. 303-330.

[4] J. F. Cariñena, M. Crampin y L. A. Ibort. "On the multisymplectic formalism for first order field theories". En: *Differential Geometry and its Applications* 1.4 (1991), págs. 345-374.

[5] M. de Leon, D. Martin de Diego y A. Santamaria-Merino. "Tulczyjew's triples and lagrangian submanifolds in classical field theories". En: *arXiv e-prints* (2003). arXiv: `math-ph/0302026`.

[6] Paulette Libermann y Charles-Michel Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Springer Netherlands, 1987.

[7] Geoffrey Martin. “A Darboux theorem for multi-symplectic manifolds”. En: *Letters in Mathematical Physics* 16.2 (1988), págs. 133-138.

Contenidos.

Contenidos.

Introducción.

Se pretende ofrecer una introducción a la Geometría Multisimpléctica basada en el estudio de [2] y [3] y ver sus propiedades básicas, las cuales forman un marco abstracto de estudio para la teoría clásica de campos, la geometría mecánica, la dinámica... y demás ramas relacionadas con la física-matemática.

Contenidos.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

ω se denomina *forma multisimpléctica* (de grado $k+1$).

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

ω se denomina *forma multisimpléctica* (de grado $k+1$).
$i_v\omega = 0 \iff v = 0$ para $v \in \mathcal{V}$.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

ω se denomina *forma multisimpléctica* (de grado $k+1$).
$i_v \omega = 0 \iff v = 0$ para $v \in \mathcal{V}$.
La no-degeneración de la forma multisimpléctica significa que la aplicación inducida:

$$\hat{\omega} : \mathcal{V} \to \wedge^k \mathcal{V}^*$$

$$v \mapsto i_v \omega$$

es inyectiva.

Dos espacios vectoriales multisimplécticos $(\mathcal{V}, \omega)$ y $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\omega})$ del mismo orden $(k+1)$, son isomorfos si existe un isomorfismo

$$\Psi : \mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{V}}$$

tal que:

$$\tilde{\omega}(\Psi(v_1), \ldots, \Psi(v_{k+1})) = \omega(v_1, \ldots, v_{k+1})$$

para todo $v_i \in \mathcal{V}, \ (i = 1, \ldots, k+1)$.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico?

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico?
Si. Dado un k con $1 \leq k \leq \dim V$, el espacio $V \times \wedge^k V^*$ puede ser equipado con una $(k+1)$-forma canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), \ldots, (v_{k+1}, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha_i(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1})$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico?
Si. Dado un k con $1 \leq k \leq \dim V$, el espacio $V \times \wedge^k V^*$ puede ser equipado con una $(k+1)$-forma canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), \ldots, (v_{k+1}, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha_i(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1})$$

Proposición:

$(V \times \wedge^k V^*, \Omega)$ es un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$.

En adelante, por simplicidad, utilizaremos la notación $\mathcal{V}_V^k = V \times \wedge^k V^*$.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \to \ker\pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \to 0$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \rightarrow \ker\pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 0$$

Denotamos por $\wedge_r^k \pi$ el espacio de las k-formas exteriores.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \to \ker\pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \to 0$$

Denotamos por $\wedge_r^k \pi$ el espacio de las k-formas exteriores.

$$\alpha \in \wedge_r^k \pi \iff i_{v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r+1}} \alpha = 0$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \ldots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \ldots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Claramente, para $0 \leq r < k$ tenemos que $\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}$ es un subespacio de $\mathcal{V}_V^k$
-CONTAR pg 308 de [3]

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \ldots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Claramente, para $0 \leq r < k$ tenemos que $\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}$ es un subespacio de $\mathcal{V}_V^k$ -CONTAR pg 308 de [3]

Proposición:

Para cada r, con $0 \leq r \leq k-1$ y $k - r \leq \dim W$, $(\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}, \Omega)$ es un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

La anterior proposición nos indica que para cualquier fibrado π de un espacio vectorial V, hay una familia de subespacios vectoriales multisimplécticos de $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$.

La estructura multisimpléctica obtenida al restringir Ω a $\mathcal{V}_\pi^{(k,l)} = V \times \wedge_l^k \pi$ es el modelo lineal para la estructura multisimpléctica canónica que surge en la formulación Hamiltoniana covariante de la teoría de campos (Ver [4]).

Contenidos.

Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico con una $(k+1)$-forma no degenerada ω, y sea W un subespacio de $\mathcal{V}$. Sea l, con $1 \leq l \leq k$,

Definición

El l-ésimo complemento ortogonal de W es un subespacio lineal de $\mathcal{V}$ definido como:

$$W^{\perp,l} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_l} \omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \ldots, l\}$$

Subespacios característicos.

Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico con una $(k+1)$-forma no degenerada ω, y sea W un subespacio de $\mathcal{V}$. Sea l, con $1 \leq l \leq k$,

Definición

El l-ésimo complemento ortogonal de W es un subespacio lineal de $\mathcal{V}$ definido como:

$$W^{\perp,l} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v\wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_l}\omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \ldots, l\}$$

$$W^{\perp,1} \subseteq W^{\perp,2} \subseteq \ldots \subseteq W^{\perp,k}$$

Subespacios característicos.

Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico con una $(k+1)$-forma no degenerada ω, y sea W un subespacio de $\mathcal{V}$. Sea l, con $1 \leq l \leq k$,

Definición

El l-ésimo complemento ortogonal de W es un subespacio lineal de $\mathcal{V}$ definido como:

$$W^{\perp,l} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_l}\omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \ldots, l\}$$

$$W^{\perp,1} \subseteq W^{\perp,2} \subseteq \ldots \subseteq W^{\perp,k}$$

$$W^{\perp,l} = \mathcal{V} \text{ siempre que } l > \dim\ W$$

Subespacios característicos.

En [3] se enuncian y demuestran las siguientes propiedades:

- $\{0\}^{\perp,l} = \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}^{\perp,l} = \{0\}$;
- $U \subset W \Longrightarrow W^{\perp,l} \subset U^{\perp,l}$;
- $(U + W)^{\perp,l} \subset W^{\perp,l} \cap U^{\perp,l}$;
- $U^{\perp,l_1} \cap W^{\perp,l_2} \subset (U + W)^{\perp,l_1+l_2-1}$ para $l_1 + l_2 \leq k + 1$;
- $U^{\perp,l_1} + W^{\perp,l_2} \subset (U \cap W)^{\perp,\bar{l}}$ para $\bar{l} = \max\{l_1, l_2\}$;

Subespacios característicos.

W es un subespacio de un espacio vectorial multisimpléctico $(\mathcal{V}, \omega)$ de orden $k+1$, entonces:

- l-isotrópico si $W \subset W^{\perp, l}$
- l-coisotrópico si $W^{\perp, l} \subset W$
- l-Lagrangiano si $W = W^{\perp, l}$

Contenidos.

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Por [6] sabemos que:
$(\mathcal{V}, \omega)$ sea un espacio vectorial simpléctico y L un subespacio Lagrangiano de $\mathcal{V}$ (que siempre existe)

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Por [6] sabemos que:
$(\mathcal{V}, \omega)$ sea un espacio vectorial simpléctico y L un subespacio Lagrangiano de $\mathcal{V}$ (que siempre existe)

$$(\mathcal{V}, \omega) \cong (\mathcal{V}_L^1, \Omega)$$

con

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Por [6] sabemos que:
$(\mathcal{V},\omega)$ sea un espacio vectorial simpléctico y L un subespacio Lagrangiano de $\mathcal{V}$ (que siempre existe)

$$(\mathcal{V},\omega) \cong (\mathcal{V}_L^1,\Omega)$$

con

$$\Omega((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

Todos los espacios vectoriales simplécticos de la misma dimensión "son parecidos", en el sentido de que son isomorfos a algún $(\mathcal{V}_L^1,\Omega)$.

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

¿Y en el marco multisimpléctico?

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

¿Y en el marco multisimpléctico?
¿Como tienen que ser los espacios vectoriales multisimplécticos para que sean isomorfos a alguno del tipo $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$?
Donde Ω se define como:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), \ldots, (v_{k+1}, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha_i (v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1})$$

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Recordemos que $\mathcal{V}_V^k = V \times \wedge^k V^*$.

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Recordemos que $\mathcal{V}_V^k = V \times \wedge^k V^*$. Podemos identificar:

$$V \Longrightarrow V \times \{0\} \text{ y } \wedge^k V^* \Longrightarrow \{0\} \times \wedge^k V^*$$

ambos son subespacios de $\mathcal{V}_V^k$.

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Recordemos que $\mathcal{V}_V^k = V \times \wedge^k V^*$. Podemos identificar:

$$V \Longrightarrow V \times \{0\} \text{ y } \wedge^k V^* \Longrightarrow \{0\} \times \wedge^k V^*$$

ambos son subespacios de $\mathcal{V}_V^k$.

Teorema:

V es un subespacio k-Lagrangiano de $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$ y $\wedge^k V^*$ es un subespacio 1-Lagrangiano.

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Pongamos $W = \wedge^k V^*$, tenemos entonces que:

$$\wedge^k (\mathcal{V}_V^k / W)^* = \wedge^k V^* = W$$

y, por lo tanto

$$\dim W = \dim \wedge^k (\mathcal{V}_V^k / W)^*$$

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Si tomamos $\dim \mathcal{V}_V^k = n$ y $\dim W = p$ entonces tenemos la siguiente relación:

$$p = \binom{n-p}{k}$$

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Si tomamos $\dim \mathcal{V}_V^k = n$ y $\dim W = p$ entonces tenemos la siguiente relación:

$$p = \binom{n-p}{k}$$

Observación:

Dado un espacio multisimpléctico n-dimensional $(\mathcal{V}, \omega)$ de orden $k+1$, una condición necesaria para que sea isomorfo a un espacio multisimpléctico canónico n-dimensional $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$ es que $\mathcal{V}$ admita un subespacio 1-Lagrangiano W de dimensión p, tal que la anterior relación se cumpla.

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Teorema:

Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$. Entonces, $(\mathcal{V}, \omega)$ es isomorfo al espacio vectorial multisimpléctico canónico $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$ si y solo si existe un subespacio W de $\mathcal{V}$ tal que:

- W es 1-Lagrangiano.
- $\dim W = \dim \ \wedge^k (\mathcal{V}/W)^*$

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Teorema:

Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$. Entonces, $(\mathcal{V}, \omega)$ es isomorfo al espacio vectorial multisimpléctico canónico $(\mathcal{V}_V^k, \Omega)$ si y solo si existe un subespacio W de $\mathcal{V}$ tal que:

- W es 1-Lagrangiano.
- $\dim W = \dim \ \wedge^k (\mathcal{V}/W)^*$

Corolario:

Sea ν una forma de volumen de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ $(k+1)$-dimensional, entonces el espacio multisimpléctico $(\mathcal{V}, \nu)$ es isomorfo a un espacio multisimpléctico canónico de orden $k+1$.

Contenidos.

Variedades multisimplécticas.

Definición:

Una variedad multisimpléctica (M, ω) de orden $k+1$ es un par formado por una variedad diferenciable M y una $(k+1)$-forma cerrada ω sobre M la cual es a su vez no degenerada. La forma diferencial ω se denomina forma multisimpléctica (de grado $k+1$).

Definición:

Una subvariedad N de una variedad multisimpléctica (M, ω) de orden $k+1$ sera l-isotrópica (resp. l-coisotrópica, l-Lagrangiana), para $1 \leq l \leq k$, si para cada punto $n \in N$, T_nN es un subespacio l-isotrópico (resp. l-coisotrópico, l-Lagrangiano) de un espacio vectorial multisimpléctico (T_nM, ω_n).

Variedades multisimplécticas.

Definición:

Una subvariedad N de una variedad multisimpléctica (M, ω) de orden $k+1$ sera l-isotrópica (resp. l-coisotrópica, l-Lagrangiana), para $1 \leq l \leq k$, si para cada punto $n \in N$, T_nN es un subespacio l-isotrópico (resp. l-coisotrópico, l-Lagrangiano) de un espacio vectorial multisimpléctico (T_nM, ω_n).

Como:

$$TN^{\perp,l} = \bigcup_{n \in N} (T_nN)^{\perp,l}$$

N es l-isotrópico (resp. l-coisotrópico, l-Lagrangiano) si $TN \subset TN^{\perp,l}$ (resp. $TN^{\perp,l} \subset TN$, $TN = TN^{\perp,l}$).

Contenidos.

Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Sea (M, ω) una variedad multisimpléctica de orden $k+1$:

Sea (M, ω) una variedad multisimpléctica de orden $k+1$:

Definición:

Un campo vectorial X en M es locálmente Hamiltoniano si $\mathcal{L}_X \omega = 0$

Sea un campo vectorial X con una k-forma $i_x\omega$ exacta, es decir, $i_X\omega = d\alpha$ para alguna $(k-1)$-forma α de M, entonces:

Definición:

- X es Hamiltoniano.
- α es la forma Hamiltoniana (de orden $k-1$).

Denominamos:
$\mathcal{Z}^l(M) \Longrightarrow$ Espacio de l-formas cerradas en M.
$\mathcal{H}^{k-1}(M) \Longrightarrow$ Conjunto de las formas Hamiltonianas de orden $k-1$.
$\mathcal{V}_1^H(M) \Longrightarrow$ Conjunto de los campos vectoriales Hamiltonianos.

Denominamos:
$\mathcal{Z}^l(M) \Longrightarrow$ Espacio de l-formas cerradas en M.
$\mathcal{H}^{k-1}(M) \Longrightarrow$ Conjunto de las formas Hamiltonianas de orden $k-1$.
$\mathcal{V}_1^H(M) \Longrightarrow$ Conjunto de los campos vectoriales Hamiltonianos.

Importante:

De la no-degeneración de ω se puede deducir que para un $\alpha \in \mathcal{H}^{k-1}(M)$, el correspondiente campo vectorial Hamiltoniano esta unicamente determinado X_α.

Definición:

Un campo multivectorial de grado m en una variedad M (con $m \leq n = \dim M$) es una sección del fibrado $\wedge^m(TM) \to M$ (que es un campo tensorial antisimétrico de grado m en M y contravariante).

El conjunto de los campos multivectoriales de grado m en una variedad M lo denotamos por $\mathfrak{X}^m(M)$.

Para todo $p \in M$, hay un entorno $U_p \subset M$ y campos vectoriales $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(U_p)$, con $m \leq r \leq \dim M$, tal que:

Para todo $p \in M$, hay un entorno $U_p \subset M$ y campos vectoriales $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U_p)$, con $m \leq r \leq \dim M$, tal que:

$$\mathbf{X}|_{U_p} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} f^{i_1 \dots i_m} X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_m} \text{ ; con } f^{i_1 \dots i_m} \in C^\infty(U_p)$$

Sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$ un campo multivectorial:

Definición:

- $\mathbf{X}$ es homogéneo si existen $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathbf{X} = X_1 \wedge \ldots \wedge X_m$.
- $\mathbf{X}$ es locálmente homogéneo si, para todo $p \in M$, existen $U_p \in M$ y $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{X}(U_p)$ tal que $\mathbf{X}|_{U_p} = X_1 \wedge \ldots \wedge X_m$.

Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Todo campo multivectorial $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$ define una contracción con las formas diferenciales $\Omega \in \Omega^k(M)$.

$$i_{\mathbf{X}}\Omega|_{U_p} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq r} f^{i_1 \ldots i_m} i_{X_1 \wedge \ldots \wedge X_m}\Omega =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq r} f^{i_1 \ldots i_m} i_{X_1} \ldots i_{X_m}\Omega$$

Si $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$, la derivada de Lie de $\Omega \in \Omega^k(M)$ es:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = d(i_{\mathbf{X}}\Omega) - (-1)^m i_{\mathbf{X}} d\Omega$$

Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Sea (M, Ω) una variedad multisimpléctica de orden k:

Definición:

Un campo multivectorial $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$ con $(m < k)$ es un campo multivectorial locálmente Hamiltoniano si $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = 0$, es decir, $i_{\mathbf{X}}\Omega \in \Omega^{k-m}(M)$ es una forma cerrada.

Sea (M, Ω) una variedad multisimpléctica de orden k:

Definición:

Un campo multivectorial $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$ con $(m < k)$ es un campo multivectorial locálmente Hamiltoniano si $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = 0$, es decir, $i_{\mathbf{X}}\Omega \in \Omega^{k-m}(M)$ es una forma cerrada.

Por lo tanto, para todo $p \in M$, existe $U \in M$ y $\zeta \in \Omega^{k-m-1}(U)$ tal que $i_{\mathbf{X}}\Omega = d\zeta$ (en U).

Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Sea (M, Ω) una variedad multisimpléctica de orden k:

Definición:

Un campo multivectorial $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$ con $(m < k)$ es un campo multivectorial locálmente Hamiltoniano si $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = 0$, es decir, $i_{\mathbf{X}}\Omega \in \Omega^{k-m}(M)$ es una forma cerrada.

Por lo tanto, para todo $p \in M$, existe $U \in M$ y $\zeta \in \Omega^{k-m-1}(U)$ tal que $i_{\mathbf{X}}\Omega = d\zeta$ (en U).

Definición:

$\zeta \in \Omega^{k-m-1}(U)$ es una forma locálmente Hamiltoniana para $\mathbf{X}$.

Sea (M, Ω) una variedad multisimpléctica de orden k:

Definición:

$\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(M)$ es un campo multivectorial Hamiltoniano si $i_{\mathbf{X}}\Omega \in \Omega^{k-m}(M)$ es una forma exacta; es decir, existe $\zeta \in \Omega^{k-m-1}(M)$ tal que $i_{\mathbf{X}}\Omega = d\zeta$.

En este caso $\zeta \in \Omega^{k-m-1}(M)$ es la denominada forma Hamiltoniana para $\mathbf{X}$.

Contenidos.

Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

Ver [5] para mas detalles:

- Fibrado tangente $\Longrightarrow$ Modelo canónico para variedades simplécticas.
- Fibrado de formas $\Longrightarrow$ Modelo canónico para variedades simplécticas.

Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

Q es una variedad diferenciable. $\rho : \wedge^k(T^*Q) \to Q$ es el fibrado de las k-formas en Q.

Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

Q es una variedad diferenciable. $\rho : \wedge^k(T^*Q) \to Q$ es el fibrado de las k-formas en Q.
Existe una k-forma(canónica):

$$\Theta_Q \in \Omega^k(\wedge^k(T^*Q))$$

$$\Theta_{Q_\alpha}(V_1, \dots, V_k) = i(\rho_* V_k \wedge, \dots, \wedge \rho_* V_1)$$

para:
$\alpha \in \wedge^k(T^*Q)$ y $V_1, \dots V_k \in T_\alpha(\wedge^k(T^*Q))$

Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

$\Omega_Q = d\Theta_Q \in \Omega^{k+1}(\wedge^k(T^*))$ es una forma cerrada y no-degenerada.

Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

$\Omega_Q = d\Theta_Q \in \Omega^{k+1}(\wedge^k(T^*))$ es una forma cerrada y no-degenerada.
$(\wedge^k(T^*Q, \Omega_Q)$ es una variedad multisimpléctica de orden $k+1$.

Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

$(x^i, p_{i_1,\dots,i_k})$ es un sistema natural de coordenadas en $U \subset \wedge^k(T^*Q)$

$$\Theta_Q|_U = p_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_1}$$

$$\Omega_Q|_U = dp_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_1}$$

son las coordenadas de Darboux en $\wedge^k(T^*Q)$.

Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.

Cuidado !!!

Al contrario que en las variedades simplécticas, las variedades multisimplécticas, en general, no son (locálmente) difeomorfas a sus modelos canónicos, deben cumplir propiedades adicionales para asegurar la existencia de coordenadas de Darboux para ellas. Ver [7] para mas información.