Geometría multisimpléctica: primeras definiciones y propiedades básicas.

Ángel Blasco Muñoz

Escuela Internacional de Doctorado, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), España.

8 de enero de 2026

Referencias.

[1] Ralph Abraham y Jerrold E. Marsden. *Foundations of mechanics*. 2nd ed. AMS Chelsea Pub./American Mathematical Society, 2008.

[2] F. Cantrijn, A. Ibort y M. De León. “Hamiltonian structures on multisymplectic manifolds”. En: *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 54.3 (1996), págs. 225-236.

[3] F. Cantrijn, A. Ibort y M. De León. “On the geometry of multisymplectic manifolds”. En: *J. Aust. Math. Soc. A* 66.3 (1999), págs. 303-330.

[4] J. F. Cariñena, M. Crampin y L. A. Ibort. “On the multisymplectic formalism for first order field theories”. En: *Differential Geometry and its Applications* 1.4 (1991), págs. 345-374.

Contenidos.

Contenidos.

Introducción.

Se pretende ofrecer una introducción a la Geometría Multisimpléctica basada en el estudio de [2] y [3] y ver sus propiedades básicas, las cuales forman un marco abstracto de estudio para la teoría clásica de campos, la geometría mecánica, la dinámica... y demás ramas relacionadas con la física-matemática.

Contenidos.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

ω se denomina *forma multisimpléctica* (de grado $k+1$).

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

ω se denomina *forma multisimpléctica* (de grado $k+1$).
$i_v\omega = 0 \iff v = 0$ para $v \in \mathcal{V}$.

Definición

Un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$ es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una $(k+1)$-forma en $\mathcal{V}$ no degenerada.

ω se denomina *forma multisimpléctica* (de grado $k+1$).

$i_v\omega = 0 \iff v = 0$ para $v \in \mathcal{V}$.

La no-degeneración de la forma multisimpléctica significa que la aplicación inducida:

$$\hat{\omega} : \mathcal{V} \to \wedge^k \mathcal{V}^*$$

$$v \mapsto i_v\omega$$

es inyectiva.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Dos espacios vectoriales multisimplécticos $(\mathcal{V}, \omega)$ y $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\omega})$ del mismo orden $(k+1)$, son isomorfos si existe un isomorfismo

$$\Psi : \mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{V}}$$

tal que:

$$\tilde{\omega}(\Psi(v_1), \ldots, \Psi(v_{k+1})) = \omega(v_1, \ldots, v_{k+1})$$

para todo $v_i \in \mathcal{V}, \ (i = 1, \ldots, k+1)$.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico?

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico?
Si. Dado un k con $1 \leq k \leq \dim V$, el espacio $V \times \wedge^k V^*$ puede ser equipado con una $(k+1)$-forma canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), \ldots, (v_{k+1}, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha_i(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1})$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Por [1] sabemos que cualquier espacio vectorial V, el espacio $V \times V^*$ admite una forma simpléctica canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

¿Esta estructura tiene su extensión natural en el marco multisimpléctico? Si. Dado un k con $1 \leq k \leq \dim V$, el espacio $V \times \wedge^k V^*$ puede ser equipado con una $(k+1)$-forma canónica Ω definida:

$$\Omega((v_1, \alpha_1), \ldots, (v_{k+1}, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha_i(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1})$$

Proposición:

$(V \times \wedge^k V^*, \Omega)$ es un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$.

En adelante, por simplicidad, utilizaremos la notación $\mathcal{V}_V^k = V \times \wedge^k V^*$.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \to \ker\pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \to 0$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \rightarrow \ker\pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 0$$

Denotamos por $\wedge_r^k \pi$ el espacio de las k-formas exteriores.

Espacios vectoriales multisimplécticos.

Consideramos la siguiente aplicación lineal sobreyectiva

$$\pi : V \longrightarrow W$$

y su secuencia exacta corta

$$0 \to \ker\pi \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} W \to 0$$

Denotamos por $\wedge_r^k \pi$ el espacio de las k-formas exteriores.

$$\alpha \in \wedge_r^k \pi \iff i_{v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r+1}} \alpha = 0$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \ldots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \ldots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Claramente, para $0 \leq r < k$ tenemos que $\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}$ es un subespacio de $\mathcal{V}_V^k$
-CONTAR pg 308 de [3]

Espacios vectoriales multisimplécticos.

$$\wedge_0^k \pi \subseteq \wedge_1^k \pi \subseteq \ldots \subseteq \wedge_{k-1}^k \pi \subseteq \wedge^k V^*$$

Denotamos

$$\mathcal{V}_\pi^{(k,r)} = V \times \wedge_r^k \pi$$

Claramente, para $0 \leq r < k$ tenemos que $\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}$ es un subespacio de $\mathcal{V}_V^k$
-CONTAR pg 308 de [3]

Proposición:

Para cada r, con $0 \leq r \leq k-1$ y $k-r \leq \dim W$, $(\mathcal{V}_\pi^{(k,r)}, \Omega)$ es un espacio vectorial multisimpléctico de orden $k+1$.

La anterior proposición nos indica que para cualquier fibrado π de un espacio vectorial V, hay una familia de subespacios vectoriales multisimplécticos de $(\mathcal{V}^k_V, \Omega)$.

La estructura multisimpléctica obtenida al restringir Ω a $\mathcal{V}^{(k,l)}_\pi = V \times \wedge^k_l \pi$ es el modelo lineal para la estructura multisimpléctica canónica que surge en la formulación Hamiltoniana covariante de la teoría de campos (Ver [4]).

Contenidos.

Subespacios característicos.

Sea $(\mathcal{V},\omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico con una $(k+1)$-forma no degenerada ω, y sea W un subespacio de $\mathcal{V}$. Sea l, con $1 \leq l \leq k$,

Definición

El l-ésimo complemento ortogonal de W es un subespacio lineal de $\mathcal{V}$ definido como:

$$W^{\perp,l} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v\wedge w_1\wedge\ldots\wedge w_l}\omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1,\ldots,l\}$$

Subespacios característicos.

Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico con una $(k+1)$-forma no degenerada ω, y sea W un subespacio de $\mathcal{V}$. Sea l, con $1 \leq l \leq k$,

Definición

El l-ésimo complemento ortogonal de W es un subespacio lineal de $\mathcal{V}$ definido como:

$$W^{\perp,l} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_l}\omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \ldots, l\}$$

$$W^{\perp,1} \subseteq W^{\perp,2} \subseteq \ldots \subseteq W^{\perp,k}$$

Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ un espacio vectorial multisimpléctico con una $(k+1)$-forma no degenerada ω, y sea W un subespacio de $\mathcal{V}$. Sea l, con $1 \leq l \leq k$,

Definición

El l-ésimo complemento ortogonal de W es un subespacio lineal de $\mathcal{V}$ definido como:

$$W^{\perp,l} = \{v \in \mathcal{V} \mid i_{v \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_l}\omega = 0 \text{ para todo } w_i \in W, i = 1, \ldots, l\}$$

$$W^{\perp,1} \subseteq W^{\perp,2} \subseteq \ldots \subseteq W^{\perp,k}$$

$$W^{\perp,l} = \mathcal{V} \text{ siempre que } l > \dim\ W$$

Subespacios característicos.

En [3] se enuncian y demuestran las siguientes propiedades:

- $\{0\}^{\perp,l} = \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}^{\perp,l} = \{0\}$;
- $U \subset W \Longrightarrow W^{\perp,l} \subset U^{\perp,l}$;
- $(U + W)^{\perp,l} \subset W^{\perp,l} \cap U^{\perp,l}$;
- $U^{\perp,l_1} \cap W^{\perp,l_2} \subset (U + W)^{\perp,l_1+l_2-1}$ para $l_1 + l_2 \leq k + 1$;
- $U^{\perp,l_1} + W^{\perp,l_2} \subset (U \cap W)^{\perp,\bar{l}}$ para $\bar{l} = \max\{l_1, l_2\}$;

Subespacios característicos.

W es un subespacio de un espacio vectorial multisimpléctico $(\mathcal{V}, \omega)$ de orden $k+1$, entonces:

- l-isotrópico si $W \subset W^{\perp,l}$
- l-coisotrópico si $W^{\perp,l} \subset W$
- l-Lagrangiano si $W = W^{\perp,l}$

Contenidos.

Caracterización de las estructuras multisimplécticas canónicas.

Contenidos.

Variedades multisimplécticas.

Contenidos.

Estructuras Hamiltonianas en variedades multisimplécticas.

Contenidos.

Modelos canónicos para variedades multisimplécticas. Coordenadas de Darboux.