1 Caracteres

Sea $\rho : G \to Aut(V)$ una representación lineal de un grupo finito G. Para cada $g \in G$ definimos

$$\chi(g) = Tr(\rho(g))$$

esto es, la traza de la aplicación lineal $\rho(g)$ referida a cualquier base de V.

Lemma 1 *$\rho(g)$ es diagonalizable y todos sus valores propios son raíces de la unidad.*

Proof. Si m es el orden de g, entonces $g^m = 1$, lo que implica que el polinomio mínimo $p(x)$ de $\rho(g)$ divide a $x^m - 1$. En particular $p(x)$ no tiene raíces multiples, por lo tanto $\rho(g)$ es diagonalizable. Como los valores propios satisfacen la ecuación $x^m - 1 = 0$ tienen norma 1.

Un argumento con la teoría de represenatciones es el siguiente. Denotando por H al subgrupo de G generado por g, la restricción de ρ a H es una represenación $\rho : H \to Aut(V)$. Sea $W_1 \oplus ... \oplus W_r$ una descomposición en suma de representaciones irreducibles. Como H es abeliano, cada W_i es unidimensional $W_i = \langle e_i \rangle$. Denotando $\rho_i : H \to Aut(W_i) = \mathbb{C}^*$, se tiene $\rho_i(g) = \lambda_i$ donde λ_i es una raíz $m-$sima de la unidad. En conlusión $\rho(g)$ en la base $\{e_1, ..., e_n\}$ tiene por matriz

$$\rho(g) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

■

Proposition 2 *Si χ es el carácter de una representación ρ de grado n, entonces*

1. $\chi(1) = n$.
2. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.
3. $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$.
4. $|\chi(g)| \leq \chi(1)$, *la igualdad se cumple si y sólo si $\rho(g)$ es una matriz escalar.*

Proof. Tenemos que $\chi(1)$ es la traza de la matriz identidad con ello $\chi(1) = \dim(V)$.

Si los valores propios de la transformación lineal $\rho(g)$ son $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, los valores propios de $\rho(g^{-1})$ son $\{\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}\}$. Como cada uno de ellos es de módulo 1, se tiene

$$\chi(g^{-1}) = \sum_i \lambda_i^{-1} = \sum_i \overline{\lambda}_i = \overline{\chi(g)}.$$

Por otra parte, dadas A y B matrices cualesquiera, como el polinomio característico de A y de BAB^{-1} son los mismos, en particular $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$.

Por último, si $\chi(g) = \sum_i \lambda_i$, se sigue

$$|\chi(g)| \leq \sum_i |\lambda_i| = n = \chi(1).$$

Además, si se verifica la igualdad, esto es, $|\sum_i \lambda_i| = \sum_i |\lambda_i| = n$, un sencillo argumento (por ejemplo, geométrico) prueba que todos los λ_i han de ser iguales; en consecuencia, si escribimos $\lambda_i = \lambda$ se tiene que $\rho(g)$ es la matriz escalar y los elementos de la diagonal principal son todos λ. ∎

Proposition 3 *Sen $\rho_V : G \to Aut(V)$ y $\rho_W : G \to Aut(W)$ dos representaciones lineales de grupo G y sean χ_V y χ_W sus caracteres respectivos.*

1. El caracter $\chi_{V\oplus W}$ de la represenatción suma directa $V \oplus W$ es igual a la suma de los caracteres $\chi_V + \chi_W$.

2. El caracter $\chi_{V\otimes_{\mathbb{C}} W}$ de la representación producto tensorial $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ es igual a $\chi_V \cdot \chi_W$.

3. El carácter de la representación inducida por ρ_V en su dual es igual a $\overline{\chi}_V$.

4. El carácter de la represenatción inducida por ρ_V y ρ_W en $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ es $\chi_{Hom_{\mathbb{C}}(V,W)} = \overline{\chi_V}\chi_W$.

Proof. Sea $g \in G$ y consideremos las aplicaciones lineales $\rho_V(g)$ y $\rho_W(g)$. La forma matricial de la representción $V \oplus W$ es

$$\begin{pmatrix} \rho_V(g) & 0 \\ 0 & \rho_W(g) \end{pmatrix},$$

de donde $\chi_{V\oplus W}\chi(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$.

Tomemos una base $\{v_1, ..., v_n\}$ en V de vectores propios de $\rho_1(g)$; análogamente se toma una base $\{w_1, ..., w_m\}$ de autovectores para $\rho_2(g)$ en W. Se tiene

$$g(v_j \otimes w_k) = gv_j \otimes gw_k = \lambda_j v_j \otimes \mu_k w_k = \lambda_j \mu_k (v_j \otimes w_k)$$

con lo que $v_j \otimes w_k$ es un vector propio en $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ para la acción de $g \in G$. De esta forma

$$\chi_{V\otimes_{\mathbb{C}} W}(g) = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k = \sum_j \lambda_j \sum_k \mu_k = \chi_V(g)\chi_W(g).$$

Para la tercera afirmación, sea $\{v_1^*, ..., v_n^*\}$ la base dual en V^* de la base dada anteriormente en V. Entonces

$$g^* v_i^*(v_j) = v_i^*(g^{-1}v_j) = v_i^*(\lambda_j^{-1}v_j) = \lambda_j^{-1}v_i^*(v_j) = \delta_{ij}\lambda_j^{-1},$$

de donde $g^*v_i^*{=}\lambda_i^{-1}v_i^*$. Por tanto

$$\chi_{V^*}(g) = \sum_i \lambda_i^{-1} = \sum_i \overline{\lambda}_i = \sum_i \overline{\lambda_i} = \overline{\chi_V(g)}.$$

La última afirmación se sigue del hecho de que el $\mathbb{C}-$espacio $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ es isomorfo a $V^* \otimes_{\mathbb{C}} W$. ∎

1.1 Producto escalar de caracteres

Sean ρ_V y ρ_W dos representaciones lineales de G y sean χ_V y χ_W sus caracteres. Se define su producto escalar como

$$(\chi_V, \chi_W) = \frac{1}{|G|} \sum_{g_i \in G} \chi_V(g_i) \overline{\chi_W(g_i)}.$$

Se cumplen las siguientes propiedades

- (χ_V, χ_W) es un número real. En efecto, podemos escribir

$$(\chi_V, \chi_W) = \frac{1}{|G|} \sum_{g_i \in G} \chi_V(g_i^{-1}) \overline{\chi_W(g_i^{-1})} = \frac{1}{|G|} \sum_{g_i \in G} \overline{\chi_V(g_i)} \chi_W(g_i) = \overline{(\chi_V, \chi_W)}.$$

- $(\chi, \chi) \geq 0$ para cualquier caracter χ, y $(\chi, \chi) = 0$ si y sólo si $\chi = 0$.

Lemma 4 *Sea V un $G-$espacio, entonces* $\dim_{\mathbb{C}} V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$.

Proof. Vimos en la proposición 1 que la aplicación

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g_i \in V} g_i v, \ v \in V$$

es un proyector sobre V^G. Calculemos su traza. Como $V = \ker \pi \oplus \operatorname{Im} \pi = \ker \pi \oplus V^G$, la traza de π coincide con la traza de sus restricción a V^G. Como esta restricción es la identidad, esta traza vale $\dim_{\mathbb{C}} V^G$. Por último, como la traza de la suma de aplicaciones lineales es la suma de las trazas, se concluye el enunciado. ■

Theorem 5 *Te tiene* $(\chi_V, \chi_W) = \dim_{\mathbb{C}} Hom_{\mathbb{C}}(V, W)^G = Hom_G(V, W)$.

Proof. Por el lema anterior

$$\dim_{\mathbb{C}} Hom_{\mathbb{C}}(V, W)^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g_i \in G} \chi_{Hom_{\mathbb{C}}(V,W)}(g_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g_i)} \chi_W(g_i) = (\chi_V, \chi_W).$$

■

Corollary 6 *Si χ_W es el caracter de una representación irreducible W entonces $(\chi_W, \chi_W) = 1$. Si χ_W y $\chi_{W'}$ son los caracteres de dos representaciones irreducibles W, W' no isomorfas entonces $(\chi_W, \chi_{W'}) = 0$.*

Proof. En efecto, por el lema de Schur, si W es irreducible los únicos isomorfismos de $G-$espacios son las constantes, con lo que $\dim_{\mathbb{C}} Hom_G(W, W) = 1$. Por otra parte, que W y W' sean $G-$espacios no isomorfos quiere decir que $\dim_{\mathbb{C}} Hom_G(W, W') = 0$, con lo que, por el teorema anterior, $(\chi_W, \chi_{W'}) = 0$. ■

(Esto es, si χ_i, χ_j son caracteres asociados a representaciones irreducibles de G, entonces

$$(\chi_i, \chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \chi_j(g) = \delta_{ij}$$

según que sean isomorfas o no)

Theorem 7 *Sea V una representación de G de carácter φ, y descompongamos V en suma directa de representaciones irreducibles*

$$V = W_1 \oplus ... \oplus W_k.$$

Entonces, si W es una representación irreducible cuyo carácter es χ, el número de las W_i isomorfas a W es igual a (φ, χ).

Proof. Denotemos con χ_i al carácter de la representación W_i. Se tiene

$$\varphi = \chi_1 + ... + \chi_k$$

y por tanto $(\varphi, \chi) = (\chi_1, \chi) + ... + (\chi_k, \chi)$. Por el corolario (χ_j, χ) es uno o cero segun que W_j y W sean $G-$espacios isomorfos o no lo sean. ■

Corollary 8 *El número de las W_i isomorfas a W no depende de la descomposición elegida.*

Proof. En efecto, este número coincide con el producto escalar (φ, χ). ■

Corollary 9 *Dos represenatciones del grupo G son isomorfas si y sólo si tienen el mismo carácter.*

Proof. En efecto, ambas contienen el mismo número de veces toda represenatción irreducible W dada. ■

Consideremos la acción de G en $\mathbb{C}G = g_1\mathbb{C} \oplus ... \oplus g_m\mathbb{C}$ definida por la representación regular. Denotemos con φ a su carácter. Fijado $g \in G$, dado que su acción permuta los lementos de la base de $\mathbb{C}G$, se tiene que $\varphi(g)$ es igual al número de índices i tales que

$$g \cdot g_i = g_i.$$

Como esto implica que $g = 1$, se tiene

$$\varphi(1) = |G|, \ \varphi(g) = 0, \text{ si } g \neq 1.$$

Proposition 10 *Toda representación irreducible W_i de G está contenida en la representación regular $\mathbb{C}G$ un número de veces igual a su grado n_i. En consecuencia se tiene*

$$\varphi = \sum n_i \chi_i.$$

Proof. Este número es igual a (φ, χ_i) , ahora bien

$$(\varphi, \chi_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g_j \in G} \varphi(g_j)\overline{\chi_i(g_j)} = \frac{1}{|G|} |G| \, \overline{\chi_i(1)} = n_i.$$

■

Corollary 11 *Los grados n_i de las representaciones irreducibles verifican $\sum n_i^2 = |G|$.*

Proof. Basta aplicar los dos miembros de $\varphi = \sum n_i \chi_i$ a $1 \in G$. ■

En consecuencia es finito el número de representaciones irreducibles de G, y en lo sucesivo a este conjunto nos referiremos como $Irr(G) = \{\chi_1, ..., \chi_k\}$.

1.1.1 Número de representaciones irreducibles

Una función compleja definida en G, $f : G \to \mathbb{C}$ diremos que es una función de clases si toma el mismo valor sobre cada clase de conjugación, esto es, si cumple que $f(hgh^{-1}) = f(g)$ para cualesquiera elementos $h, g \in G$. El $\mathbb{C}-$espacio vectorial de todas las funciones centrales será denotado por $cf(G)$. Podemos definir un producto escalar entre dos funciones de clase φ, φ' de forma similar al producto escalar de caracteres:

$$(\varphi, \varphi') = \frac{1}{|G|} \sum_{g_j \in G} \varphi(g_j)\overline{\varphi'(g_j)}.$$

En este caso no se puede afirmar que (φ, φ') sea un número real, sino que se cumple

$$(\varphi, \varphi') = \overline{(\varphi', \varphi)}.$$

Sean $\{g_1, ..., g_r\}$ representantes de cada una de las clases de conjugación en G. Para cada i definimos el elemento φ_i de $Cf(G)$ siguiente

$$\varphi_i(g_i) = 1, \ \varphi_i(g_j) = 0 \text{ si } j \neq i.$$

Es claro que en conjunto $\{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ genera $cf(G)$. El conjunto $Irr(G) = \{\chi_1, ..., \chi_k\}$ es linelamente independiente en $cf(G)$. En efecto, si existiese una combinación lineal igualada a cero

$$\lambda_1\chi_1 + ... + \lambda_r\chi_r = 0$$

haciendo producto escalar con χ_i se conluye que $\lambda_i = 0$.

Lemma 12 *Sea V una representación irreducible de G de carácter χ y grado n y φ una función central. Consideremos el endomorfismo de V dado por*

$$\Phi = \sum_{g_i \in G} \varphi(g_i)g_i.$$

Entonces Φ *es una homotecia de razón*

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{g_i \in G_i} \varphi(g_i)\chi(g_i) = \frac{|G|}{n}(\varphi, \overline{\chi}).$$

Proof. Veamos que Φ es un morfismo de $G-$espacios. Dado $h \in G$ se tiene

$$h\Phi h^{-1} = \sum_{g \in G} \varphi(g) hgh^{-1} = \sum_{g \in G} \varphi(hgh^{-1}) hgh^{-1} = \Phi.$$

Con ello, por el lema de Schur, se tiene $\Phi = \lambda \cdot Id$ para cierto número complejo λ. Tomando trazas en la definición de Φ, se tiene

$$n \cdot \lambda = \sum_{g_i \in G} \varphi(g_i)\chi(g_i),$$

con lo que se concluye. ■

Theorem 13 *El conjunto* $\{\chi_1, ..., \chi_k\}$ *de caracteres irreducibles de* G *forma una base de* $cf(G)$*. En consecuencia el número de representaciones irreducibles de* G *concide con el número de clases de conjugación.*

Proof. Sea φ una función central en G. Basta ver que $\varphi = \sum_{i=1}^{k}(\varphi, \chi_i)\chi_i$. Equivalentemente basta ver que la función de clases $\varphi' = \varphi - \sum_i (\chi_i, \varphi)\chi_i$, por ser ortogonal a todos los caracteres $\{\chi_1, ..., \chi_k\}$, es nula. Sea pues V una representación de G. Si V es irreducible, entonces en endomorfismo

$$\Phi = \sum_{g \in G} \varphi'(g) g$$

es nulo por el lema anterior. Si V admite una descomposición en representaciones irreducibles, entonces Φ es nulo sobre cada sumando directo W_i de V, con lo que $\Phi = 0$.

Tomando, en particular, la representación regular $\mathbb{C}G = g_1\mathbb{C} \oplus ... \oplus g_n\mathbb{C}$ y aplicando Φ al elemento neutro $1 \in G$, se tiene

$$\sum_{g \in G} \varphi'(g) g = 0 \text{ en } \mathbb{C}G.$$

Ello implica que todos los coeficientes de esta combinación son nulos, esto es $\varphi'(g) = 0 \ \forall g \in G$, con lo que se concluye. ■