

Capítulo 2

Representaciones de grupos.

Una representación de un grupo finito G nos proporciona una manera de visualizar G como un grupo de matrices. Para ser mas preciso diremos que una representación es un homomorfismo de G en el grupo de matrices invertibles.

La estructura de estos homomorfismos y sus propiedades seran objeto de estudio en este capitulo.

2.1. Representaciones de grupos.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos, y sea $GL(V)$ el grupo de isomorfismos de V . Un elemento $a \in GL(V)$ es, por definición, una aplicación lineal de V en V que admite inversa a^{-1} ; a^{-1} es también lineal. Si V admite una base finita (e_i) de n elementos, toda aplicación lineal $a : V \rightarrow V$ se representa por una matriz cuadrada (a_{ij}) de orden n . Los coeficientes a_{ij} son números complejos; se calculan expresando $a(e_j)$ en la base (e_i) :

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$$

Decir que a es un isomorfismo equivale a decir que el determinante de a es no nulo. El grupo $GL(V)$ se identifica así como el grupo de matrices cuadradas invertibles de orden n . En algunas ocasiones escribiremos $GL(n, V)$.

Definición 2.1.1 Sea G un grupo finito. Una representación de G en V es un homomorfismo ρ del grupo G en el grupo $GL(V)$:

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

de modo que:

$$\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$$

cualesquiera que sean $s, t \in G$.

Supongamos que V es de dimensión finita, y sea n su dimensión; se dice también que n es el grado de la representación considerada.

Ejemplo 2.1.1 Sea G el grupo dihedral $D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Definimos las matrices A y B como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se comprueba que:

$$A^4 = B^2 = I, B^{-1}AB = A^{-1}$$

la función

$$\rho : G \rightarrow GL(2, V)$$

definida como $\rho : a^i b^j \rightarrow A^i B^j$ para $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 1$, es una representación de D_8 sobre V . Es una representación de grado 2.

En la siguiente tabla se representan las imágenes de ρ para cada elemento de D_8 :

g	$\rho(g)$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
a	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
a^2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
a^3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
b	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
ab	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
a^2b	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
a^3b	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cuadro 2.1: Representación del grupo dihedral 8.

Ejemplo 2.1.2 Sea G un grupo cualquiera. Definimos $\rho : G \rightarrow GL(n, V)$ como $\rho(g) = I_n$ para todo $g \in G$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$. Entoces:

$$\rho(gh) = I_n = I_n I_n = \rho(g)\rho(h)$$

para todo $g, h \in G$, por lo tanto, ρ es una representación de G . Esto nos indica que todo grupo tiene representaciones de cualquier grado.

2.2. Representaciones equivalentes.

Sean ρ y ρ' representaciones lineales de un grupo G en espacios vectoriales V y V' respectivamente. Se dice que estas representaciones son equivalentes (o isomorfas) si existe un isomorfismo lineal $\tau : V \rightarrow V'$ que transforma ρ en ρ' , es decir, que verifica la identidad:

$$\tau \cdot \rho(s) = \rho'(s) \cdot \tau$$

para todo $s \in G$.

Si ρ y ρ' se dan en forma matricial por R y R' respectivamente, el isomorfismo se traduce en una matriz invertible T tal que:

$$T \cdot R = R' \cdot T$$

o, equivalentemente, tal que:

$$R' = T R T^{-1}$$

Sea $\rho : G \rightarrow GL(V)$ una representación, Y sea T una matriz invertible $n \times n$ de V . Para todas las $n \times n$ matrices A y B tenemos:

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = T^{-1}(AB)T$$

Usamos esto para crear una representacion σ desde ρ ; definimos

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

para todo $g \in G$. Por lo tanto, para todo $g, h \in G$, tenemos:

$$\begin{aligned}\sigma(gh) &= T^{-1}\rho(gh)T \\ &= T^{-1}\rho(g)\rho(h)T \\ &= T^{-1}\rho(g)T \cdot T^{-1}\rho(h)T \\ &= \sigma(g)\sigma(h)\end{aligned}$$

por lo que, σ es, en efecto, una representación.

Con esto podemos ya dar la siguiente definición:

Definicion 2.2.1 Sean $\rho : G \rightarrow GL(m, V)$ y $\sigma : G \rightarrow GL(n, V)$ representaciones de G sobre V . Decimos que ρ es equivalente a σ si $n = m$ y existe una matriz invertible $n \times n$ T tal que, para todo $g \in G$,

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

Dadas las representaciones ρ , σ y τ de G sobre V , se tiene que:

1. ρ es equivalente a ρ . (Prop. Reflexiva).
2. si ρ es equivalente a σ , entonces σ es equivalente a ρ . (Prop. Simétrica).
3. si ρ es equivalente a σ y σ es equivalente a τ , entonces ρ es equivalente a τ . (Prop. Transitiva).

Esto nos indica que ser equivalentes es una relación de equivalencia.

Demostracion: Sean ρ , σ y τ representaciones de G sobre V , y sea $g \in G$. Tenemos:

1. Prop. Reflexiva:

Sea I la matriz identidad, que ademas es una matriz cuadrada e invertible, siempre podemos poner

$$\rho(g) = I^{-1}\rho(g)I$$

por lo que ρ es equivalente a ρ .

2. Prop. Simétrica:

Por ser ρ equivalente a σ , tenemos que existe una matriz cuadrada invertible T que cumple:

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

$$T\sigma(g) = \rho(g)T$$

$$T\sigma(g)T^{-1} = \rho(g)$$

lo que concluye que σ es equivalente a ρ .

3. Prop. Transitiva.

Por ser ρ equivalente a σ , tenemos que existe una matriz cuadrada invertible T que cumple:

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

Del mismo modo, por ser σ equivalente a τ , tenemos que existe una matriz cuadrada invertible P que cumple:

$$\tau(g) = P^{-1}\sigma(g)P$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\tau(g) = P^{-1}T^{-1}\rho(g)TP$$

$$\tau(g) = (TP)^{-1}\rho(g)TP$$

por lo que ρ es equivalente a τ . ■

2.3. Núcleo de una representación.

Sea una representación $\rho : G \rightarrow GL(V)$. El núcleo de una representación consiste en un grupo de elementos $g \in G$ para los cuales $\rho(g)$ es la matriz identidad.

$$Ker \rho = \{g \in G : \rho(g) = I_n\}$$

El núcleo de ρ es un subgrupo normal de G .

Puede ocurrir que el núcleo de una representación es el propio grupo G .

Definición 2.3.1 Una representación $\rho : G \rightarrow GL(1, V)$ definida como:

$$\rho(g) = 1_G$$

para todo $g \in G$, se denomina representación trivial de G .

2.4. Representaciones irreducibles.

Antes de dar una definición de representación irreducible veamos un resultado que nos va a ser útil en breve:

Teorema 2.4.1 Sea $\rho : G \rightarrow GL(V)$ una representación lineal de G en V y sea W un subespacio vectorial de V estable por la acción de G . Existe un subespacio complementario W^0 de W en V el cual es estable por la acción de G .

Demostración: Sea W' un subespacio complementario del subespacio W de V y sea p la proyección de V sobre W . Definimos p^0 como el promedio de los conjugados de p por los elementos de G :

$$p^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho(t) \cdot p \cdot \rho(t)^{-1}$$

ya que p envía V dentro de W y que $\rho(t)$ conserva W , vemos que p^0 envía V en W ; por lo tanto $\rho(t)^{-1}x \in W$ para $x \in W$, de donde

$$p \cdot \rho(t)^{-1}x = \rho(t)^{-1}x$$

$$\rho(t) \cdot p \cdot \rho(t)^{-1}x = x$$

y

$$p^0x = x$$

Asi que p^0 es una proyección de V en W correspondiente a algún complementario W^0 de W . Tenemos ademas

$$\rho(s) \cdot p^0 = p^0 \cdot \rho(s)$$

para todo $s \in G$. De hecho, calculando $\rho(s) \cdot p^0 \cdot \rho(s)^{-1}$ tenemos

$$\rho(s) \cdot p^0 \cdot \rho(s)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho(s)\rho(t) \cdot p \cdot \rho(t)^{-1}\rho(s)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho(st) \cdot p \cdot \rho(st)^{-1} = p^0$$

Si ahora $x \in W^0$ y $s \in G$ tenemos $p^0x = 0$, asi que $p^0 \cdot \rho(s)x = \rho(s) \cdot p^0x = 0$, por lo que $\rho(s)x \in W^0$, lo cual muestra que W^0 es estable por G . Esto completa la demostración. ■

Supongamos que V esta dotado de un producto escalar $\langle x, y \rangle$ satisfaciendo las condiciones de linealidad en x , bilinealidad en y , y $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$. Supongamos que este producto escalar permanece invariante por la acción de G , $\langle \rho(s)x, \rho(s)y \rangle = \langle x, y \rangle$; podemos reemplazar $\langle x, y \rangle$ por $\sum_{t \in G} \langle \rho(t)x, \rho(t)y \rangle$. Bajo esta hipótesis el complementario ortogonal W^0 de W en V es un subespacio complementario de W estable por G ; y asi, obtenemos una demostración alternativa al anterior teorema (2.4.1). Observemos el hecho de que como el producto escalar $\langle x, y \rangle$ es invariante, implica que, si (e_i) es una base ortonormal de V , la matriz $\rho(s)$ con respecto a esa base es la matriz unitaria.

Manteniendo las hipótesis y notación del teorema 2.4.1, sea $x \in V$, y sean w y w^0 proyecciones en W y W^0 respectivamente. Tenemos $x = w + w^0$, de donde $\rho(s)x = \rho(s)w + \rho(s)w^0$, por lo que w y w^0 son estables por G , tenemos que $\rho(s)w \in W$ y $\rho(s)w^0 \in W^0$; asi que $\rho(s)w$ y $\rho(s)w^0$ son proyecciones de $\rho(s)x$.

Se sigue, entonces, que las representaciones de W y W^0 determinan la representación de V . Decimos que V es suma directa de W y W^0 , y lo escribimos como $V = W \oplus W^0$. Podemos definir los elementos de V como un par (w, w^0) con $w \in W$ y $w^0 \in W^0$. Si W y W^0 son dados en forma matricial por R_s y R_s^0 , $W \oplus W^0$ estará dado en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}$$

Definicion 2.4.1 Una representación lineal $\rho : G \rightarrow GL(V)$ se dice irreducible si $V \neq 0$ y ningún subespacio de V es estable por G , excepto, claro está, 0 y V .

Debido al teorema 2.4.1 la segunda condición equivale a decir que V no es suma directa de dos representaciones, salvo la descomposición trivial $V = 0 \oplus V$.

Toda representacion de grado 1 es evidentemente irreducible.

Teorema 2.4.2 Toda representación es suma directa de representaciones irreducibles.

Demostracion: Sea V una representación lineal de G . Se razona por inducción sobre $\dim(V)$. Si $\dim(V) = 0$, el teorema es evidente, 0 es suma directa de la familia vacia de representaciones irreducibles. Si $\dim(V) \geq 1$ y V es irreducible no hay nada que demostrar. De lo contrario, debido al teorema 2.4.1, V puede ser descompuesto como suma directa $V' \oplus V''$ con $\dim(V') < \dim(V)$ y $\dim(V'') < \dim(V)$. Por hipótesis de inducción V' y V'' son suma directa

de representaciones irreducibles, y lo mismo es cierto para V . ■

Sea V una representación y sea $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ una descomposición de V en suma directa de representaciones irreducibles, podemos preguntarnos si la descomposición es única. En el caso donde todas las representaciones $\rho(s)$ son iguales a 1 muestra que esto no es cierto en general. Sin embargo, mas adelante, veremos que el número de W_i isomorfas a una representación irreducible dada, no depende de la descomposición elegida.

2.5. FG-módulos.

Sea G un grupo, y sea $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$. Escribiremos como $V = F^n$ el espacio vectorial formado por los vectores fila $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con $\lambda_i \in F$. Para todo $v \in V$ y $g \in G$, el producto matricial

$$v\rho(g)$$

de el vector fila v con la matriz de dimensión $n \times n$ $\rho(g)$, es un vector fila en V .

Basandonos en el producto matricial $v\rho(g)$ definimos el FG-módulo.

Definición 2.5.1 *Sea V un espacio vectorial sobre F y sea G un grupo. Entonces V es un FG-módulo si esta definida la multiplicación vg , para $v \in V$ y $g \in G$, y ademas satisfacen las siguientes condiciones para todo $u, v \in V$, $\lambda \in F$ y $g, h \in G$:*

1. $vg \in V$
2. $v(gh) = (vg)h$
3. $v1 = v$
4. $(\lambda v)g = \lambda(vg)$
5. $(u + v)g = ug + vg$

Las condiciones (1), (4) y (5) de la definición aseguran que para todo $g \in G$, la función

$$v \rightarrow vg$$

es un endomorfismo de V .

Sea V un FG-módulo, y sea \mathcal{B} una base de V . Para cada $g \in G$, denotamos como

$$[g]_{\mathcal{B}}$$

a la matriz del endomorfismo $v \rightarrow vg$ de V , relativo a la base \mathcal{B} .

La relación entre los FG-módulos y las representaciones de G sobre F se verá en el siguiente teorema:

Teorema 2.5.1 (1) *Si $\rho : G \rightarrow GL(F)$ es una representación de G sobre F , y $V = F^n$, entonces V sera un FG-módulo si definimos la multiplicación vg como*

$$vg = v\rho(g)$$

ademas, existe una base \mathcal{B} de V tal que

$$\rho(g) = [g]_{\mathcal{B}}$$

para todo $g \in G$.

(2) Sea V un FG -módulo y sea \mathcal{B} una base de V . Entonces la función

$$g \rightarrow [g]_{\mathcal{B}}$$

es una representación de G sobre F .

Demostración: (1) Sabemos que $v\rho(g) \in F^n$, además por ser ρ un homomorfismo tenemos que $v(\rho(gh)) = v(\rho(g)\rho(h))$ y $v(\rho(1)) = v$. Del mismo modo, por las propiedades de la multiplicación matricial tenemos que $(\lambda v)\rho(g) = \lambda(v\rho(g))$ y $(u+v)\rho(g) = u\rho(g) + v\rho(g)$ para todo $u, v \in F^n$, $\lambda \in F$ y $g, h \in G$.

Por lo tanto, F^n se convertirá en un FG -módulo si definimos

$$vg = v\rho(g)$$

para todo $v \in F^n, g \in G$.

Además, si consideramos la base \mathcal{B} como

$$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$$

de F^n , entonces $\rho(g) = [g]_{\mathcal{B}}$ para todo $g \in G$.

(2) Sea V un FG -módulo con base \mathcal{B} . De $v(gh) = (vg)h$ para todo $g, h \in G$ y todo $v \in \mathcal{B}$, se sigue que

$$[gh]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$$

En particular,

$$[1]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}}[g^{-1}]_{\mathcal{B}}$$

para todo $g \in G$. Ahora $v1 = v$ para todo $v \in V$, así que $[1]_{\mathcal{B}}$ es la matriz identidad.

Por lo tanto cada matriz $[g]_{\mathcal{B}}$ es invertible.

Hemos probado que la función $g \rightarrow [g]_{\mathcal{B}}$ es un homomorfismo de G a $GL(F)$ y por lo tanto es una representación de G sobre F . ■

Podemos construir FG -módulos sin usar una representación. Para hacer esto transformamos un espacio vectorial V sobre F en un FG -módulo especificando la acción de los elementos del grupo en una base v_1, \dots, v_n de V y haciendo que sea lineal la acción en el entorno de V , es decir, primero definimos $v_i g$ para cada i y cada $g \in G$, y entonces definimos

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)g$$

para $\lambda_i \in F$, como

$$\lambda_1(v_1 g) + \dots + \lambda_n(v_n g)$$

Como era de esperar existen restricciones a la hora de definir los vectores $v_i g$.

Teorema 2.5.2 Sea v_1, \dots, v_n una base de un espacio vectorial V sobre F . Supongamos que tenemos una multiplicación vg para todo $v \in V$ y $g \in G$, la cual satisface las siguientes condiciones para todo i con $1 \leq i \leq n$, para todo $g, h \in G$ y para todo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$:

1. $v_i g \in V$
2. $v_i(gh) = (v_i g)h$
3. $v_i 1 = v_i$

$$4. (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)g = \lambda_1(v_1 g) + \dots + \lambda_n(v_n g)$$

Entonces V es un FG -módulo.

Demostración: Es trivial ver de (3) y (4) que $v1 = v$ para todo $v \in V$. Las condiciones (1) y (4) nos aseguran que, para todo $g \in G$, la función $v \rightarrow vg$ ($v \in V$) es un endomorfismo de V . Esto es:

$$\begin{aligned} vg &\in V, \\ (\lambda v)g &= \lambda(vg), \\ (u + v)g &= ug + vg, \end{aligned}$$

para todo $u, v \in V$, $\lambda \in F$ y $g \in G$. Por lo tanto

$$(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n)h = \lambda_1(u_1 h) + \dots + \lambda_n(u_n h)$$

para todo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$, todo $u_1, \dots, u_n \in V$, y todo $h \in G$.

Ahora sea $v \in V$ y $g, h \in G$. Entonces $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ para algún $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$, y

$$\begin{aligned} v(gh) &= \lambda_1(v_1(gh)) + \dots + \lambda_n(v_n(gh)) \\ &= \lambda_1((v_1 g)h) + \dots + \lambda_n((v_n g)h) \\ &= (\lambda_1(v_1 g) + \dots + \lambda_n(v_n g))h \\ &= (vg)h \end{aligned}$$

Con esto hemos comprobado todos los axiomas requeridos para que V sea un FG -módulo. ■

Definición 2.5.2 El FG -módulo trivial es un espacio vectorial V sobre F 1-dimensional con

$$vg = v$$

para todo $v \in V$, $g \in G$.

Definición 2.5.3 Un FG -módulo V es fiel si el elemento unitario de G es el único elemento g para el cual

$$vg = v$$

para todo $v \in V$.

2.5.1. FG -módulos y representaciones equivalentes.

Veamos ahora las relaciones entre los FG -módulos y las representaciones equivalentes de G sobre F . Un FG -módulo tiene varias representaciones, todas de la forma

$$g \rightarrow [g]_{\mathcal{B}}$$

para una base \mathcal{B} de V . El siguiente resultado muestra que todas estas representaciones son equivalentes entre sí.

Teorema 2.5.3 Sea V un FG -módulo con una base \mathcal{B} , y sea ρ la representación de G sobre F definida por

$$\rho : g \rightarrow [g]_{\mathcal{B}}$$

(1) Si \mathcal{B}' es una base de V , entonces la representación

$$\phi : g \rightarrow [g]_{\mathcal{B}'}$$

de G es equivalente a ρ .

(2) Si σ es una representación de G la cual es equivalente a ρ , entonces existe una base \mathcal{B}'' de V tal que

$$\sigma : g \rightarrow [g]_{\mathcal{B}''}$$

Demostracion: (1) Sea T la matriz del cambio de base de \mathcal{B} a \mathcal{B}' . Para todo $g \in G$, tenemos

$$[g]_{\mathcal{B}} = T^{-1}[g]_{\mathcal{B}'}T$$

Por lo tanto ϕ es equivalente a ρ .

(2) Supongamos que ρ y σ son representaciones equivalentes de G . Entonces, para la matriz invertible T tenemos

$$g\rho = T^{-1}(g\sigma)T$$

para todo $g \in G$. Sea \mathcal{B}'' la base de V para la cual la matriz del cambio de base de \mathcal{B} a \mathcal{B}'' es T . Entonces para todo $g \in G$

$$[g]_{\mathcal{B}} = T^{-1}[g]_{\mathcal{B}''}T$$

por lo que $g\sigma = [g]_{\mathcal{B}''}$. ■

2.5.2. FG-submódulos.

En lo sucesivo G sera un grupo y F sera \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Definicion 2.5.4 Sea V un FG-módulo. Un subconjunto W de V se dice que es un FG-submódulo de V si W es un subespacio y $wg \in W$ para todo $w \in W$ y $g \in G$.

2.5.3. FG-módulos irreducibles.

Definicion 2.5.5 Un FG-módulo V se dice que es irreducible si es diferente a $\{0\}$ y no tiene FG-submódulos aparte de $\{0\}$ y V .

Si V tiene un FG-submódulo W donde W es distinto a $\{0\}$ o V , entonces V es reducible.

Del mismo modo, una representación $\rho : G \rightarrow GL(F)$ es irreducible si el correspondiente FG-módulo F^n dado por

$$vg = v(\rho(g))$$

es irreducible; y ρ es reducible si F^n es reducible.

Supongamos ahora que V es un FG-módulo reducible, por lo tanto hay un FG-submódulo W con $0 < \dim W < \dim V$. Tomando una base \mathcal{B} de W y extendiéndola a una base \mathcal{B} de V . Entonces para todo $g \in G$, la matriz $[g]_{\mathcal{B}}$ tiene la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} X_g & 0 \\ \hline Y_g & Z_g \end{array} \right) \quad (2.5.1)$$

para las matrices X_g , Y_g y Z_g , donde X_g es $k \times k$ para $k = \dim(W)$.

Una representación de grado n es reducible si, y solo si, es equivalente a una representación de la forma (2.6.1), donde X_g es $k \times k$ y $0 < k < n$. Notemos que en (2.6.1), las funciones $g \rightarrow X_g$ y $g \rightarrow Z_g$ son representaciones de G .

2.5.4. FG-homomorfismos.

Definicion 2.5.6 Sean V y W FG-módulos. Una función $\vartheta : V \rightarrow W$ se dice que es un FG-homomorfismo si ϑ es una transformación lineal y

$$\vartheta(vg) = \vartheta(v)g$$

En otras palabras, si ϑ envia v a w entonces envia vg a wg .

Como G es un grupo finito y $\vartheta : V \rightarrow W$ es un FG-homomorfismo, entonces para todo $v \in V$ y $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in FG$, tenemos

$$\vartheta(vr) = \vartheta(v)r$$

Proposición 2.5.1 *Sea V y W FG-módulos y sea $\vartheta : V \rightarrow W$ un FG-homomorfismo. Entonces $\text{Ker } \vartheta$ es un FG-submódulo de V y $\text{Im } \vartheta$ es un FG-submódulo de W .*

Demostración: $\text{Ker } \vartheta$ es un subespacio de V y $\text{Im } \vartheta$ es un subespacio de W ya que ϑ es una transformación lineal.

Sea $v \in \text{Ker } \vartheta$ y $g \in G$, entonces

$$\vartheta(vg) = \vartheta(v)g = 0g = 0$$

así que $vg \in \text{Ker } \vartheta$. Además $\text{Ker } \vartheta$ es un FG-submódulo de V .

Sea $w \in \text{Im } \vartheta$, tal que $w = \vartheta(v)$ para algún $v \in V$. Para todo $g \in G$,

$$wg = \vartheta(v)g = \vartheta(vg) \in \text{Im } \vartheta$$

por lo que $\text{Im } \vartheta$ es un FG-submódulo de W . ■

2.5.5. Isomorfismos de FG-módulos.

Definición 2.5.7 *Sean V y W FG-módulos. Decimos que $\vartheta : V \rightarrow W$ es un FG-isomorfismo si ϑ es un FG-homomorfismo y además posee inversa. Si $\vartheta : V \rightarrow W$ es un FG-isomorfismo, entonces V y W son FG-módulos isomorfos y los representaremos como $V \cong W$.*

En el siguiente teorema veremos que si $V \cong W$ entonces $W \cong V$.

Teorema 2.5.4 *Si $\vartheta : V \rightarrow W$ es un FG-isomorfismo, entonces la inversa $\vartheta^{-1} : W \rightarrow V$ es también un FG-isomorfismo.*

Demostración: Es evidente que ϑ^{-1} es una transformación lineal invertible, por lo que, únicamente, debemos demostrar que ϑ^{-1} es un FG-homomorfismo. Sean $w \in W$ y $g \in G$,

$$\vartheta(\vartheta^{-1}(w)g) = g(\vartheta(\vartheta^{-1}(w)))$$

como ϑ es un FG-homomorfismo,

$$= wg$$

$$\vartheta(\vartheta^{-1}(wg))$$

Así que $\vartheta^{-1}(w)g = \vartheta^{-1}(wg)$ como se buscaba. ■

Sea $\vartheta : V \rightarrow W$ un FG-isomorfismo, entonces podemos usar ϑ y ϑ^{-1} para cambiar entre los FG-módulos isomorfos V y W , y probar que V y W comparten la mismas propiedades estructurales; algunos ejemplos pueden ser:

1. $\dim V = \dim W$ (cada v_1, \dots, v_n es una base de V si y solo si $\vartheta(v_1), \dots, \vartheta(v_n)$ es base de W).
2. V es irreducible si y solo si W es irreducible (cada X es un FG-submódulo de V si y solo si $\vartheta(X)$ es un FG-submódulo de W).

3. V contiene un FG-submódulo trivial si y solo si W contiene un FG-submódulo trivial (cada X es un FG-submódulo trivial de V si y solo si $\vartheta(X)$ es un FG-submódulo trivial de W).

Teorema 2.5.5 *Sea V un FG-módulo con una base \mathcal{B} , y sea W un FG-módulo con una base \mathcal{B}' . Entonces V y W son isomorfas si y solo si las representaciones*

$$\rho : g \rightarrow [g]_{\mathcal{B}}$$

$$\sigma : g \rightarrow [g]_{\mathcal{B}'}$$

son equivalentes.

Demostración: Para la demostración del anterior teorema primero estableceremos lo siguiente:

1. Los FG-módulos V y W son isomorfos si y solo si existe una base \mathcal{B}_1 de V y una base \mathcal{B}_2 de W tal que

$$[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$$

para todo $g \in G$.

Para ver esto supongamos, primero, que ϑ es un FG-isomorfismo de V a W , y sea v_1, \dots, v_n una base \mathcal{B}_1 de V ; entonces $\vartheta(v_1), \dots, \vartheta(v_n)$ es una base de \mathcal{B}_2 de W . Sea $g \in G$. Ya que $\vartheta(v_i g) = \vartheta(v_i)g$ para cada i , se sigue que $[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$.

De modo inverso, supongamos que v_1, \dots, v_n una base \mathcal{B}_1 de V y w_1, \dots, w_n una base \mathcal{B}_2 de W tal que $[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$ para todo $g \in G$. Sea ϑ la transformación lineal invertible de V a W para la cuál $\vartheta(v_i) = w_i$. Y que $[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$, se deduce que $\vartheta(v_i g) = \vartheta(v_i)g$ y por lo tanto cada ϑ es un FG-isomorfismo. Esto completa la demostración de (1).

Ahora asumimos que V y W son FG-módulos isomorfos. Por (1) hay una base \mathcal{B}_1 de V y una base \mathcal{B}_2 de W tal que $[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$ para todo $g \in G$. Definimos ahora una representación ϕ de G como $\phi : g \rightarrow [g]_{\mathcal{B}_1}$. Según el teorema 2.6.3(1), ϕ es equivalente a ρ y a σ , por lo que ρ y σ son equivalentes.

A la inversa, supongamos que ρ y σ son equivalentes, entonces, por el teorema 2.6.3(2) hay una base \mathcal{B}'' de V tal que $\sigma(g) = [g]_{\mathcal{B}''}$ para todo $g \in G$; esto es, $[g]_{\mathcal{B}'} = [g]_{\mathcal{B}''}$ para todo $g \in G$. Por lo tanto V y W son FG-módulos isomorfos, por (1). ■

2.5.6. Suma directa de FG-módulos.

Sea V un FG-módulo, y supongamos que

$$V = U \oplus W$$

donde U y W son FG-submódulos de V . Sea u_1, \dots, u_m una base \mathcal{B}_1 de U , y w_1, \dots, w_n una base \mathcal{B}_2 de W . Entonces sabemos, por los primeros cursos de álgebra lineal, que $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ es una base \mathcal{B} de V , y para $g \in G$

$$\left(\begin{array}{c|c} [g]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [g]_{\mathcal{B}_2} \end{array} \right)$$

Generalizando aun mas, si $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, es suma directa de los FG-submódulos U_i y \mathcal{B}_i es una base de U_i , entonces podemos unir $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$, para obtener una base \mathcal{B} de V , y para $g \in G$,

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [g]_{\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [g]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix}$$

Proposición 2.5.2 Sea V un FG -módulo, y supongamos que

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$$

donde cada U_i es un FG -submódulo de V . Para $v \in V$, tenemos que $v = u_1 + \dots + u_r$ para $u_i \in U_i$, y definimos $\pi_i : V \rightarrow V$ como

$$\pi_i(v) = u_i$$

Entonces cada π_i es un FG -homomorfismo, y es, además, una proyección de V .

Demostración: Evidentemente π_i es una transformación lineal; y es también un FG -homomorfismo, ya que para $v \in V$ con $v = u_i + \dots + u_r$ siendo $u_j \in U_j$ para todo j , y $g \in G$, tenemos que

$$\pi_i(vg) = \pi_i(u_1g + \dots + u_rg) = u_ig = \pi_i(v)g$$

por lo tanto

$$\pi_i^2(v) = \pi_i(u_i) = u_i = \pi_i(v)$$

así que $\pi_i^2 = \pi_i$. Lo que implica que π_i es una proyección. ■

Veamos, por último, un resultado concerniente a la suma de FG -módulos irreducibles del cual no daremos una demostración.

Proposición 2.5.3 Sea V un FG -módulo, y supongamos que

$$V = U_1 + \dots + U_r$$

donde cada U_i es un FG -submódulo irreducible de V . Entonces V es una suma directa de algunos FG -submódulos U_i .