Capítulo 2

Representaciones de grupos.

Una representación de un grupo finito G nos proporciona una manera de visualizar G como un grupo de matrices. Para ser mas preciso diremos que una representación es un homomorfismo de G en el grupo de matrices invertibles.
La estructura de estos homomorfismos y sus propiedades seran objeto de estudio en este capitulo.

2.1. Representaciones de grupos.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y sea $GL(V)$ el grupo de isomorfismos de V. Un elemento $a \in GL(V)$ es, por definición, una aplicación lineal de V en V que admite inversa a^{-1}; a^{-1} es también lineal. Si V admite una base finita (e_i) de n elementos, toda aplicación lineal $a : V \to V$ se representa por una matriz cuadrada (a_{ij}) de orden n. Los coeficientes a_{ij} son números complejos; se calculan expresando $a(e_j)$ en la base (e_i):

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$$

Decir que a es un isomorfismo equivale a decir que el determinante de a es no nulo. El grupo $GL(V)$ se identifica así como el grupo de matrices cuadradas invertibles de orden n. En algunas ocasiones escribiremos $GL(n, V)$.

Definicion 2.1.1 *Sea G un grupo finito. Una representación de G en V es un homomorfismo ρ del grupo G en el grupo $GL(V)$:*

$$\rho : G \to GL(V)$$

de modo que:

$$\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$$

cualesquiera que sean $s, t \in G$.

Supongamos que V es de dimensión finita, y sea n su dimensión; se dice también que n es el *grado* de la representación considerada.

Ejemplo 2.1.1 *Sea G el grupo dihedral $D_8 = \langle a, b :\ a^4 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Definimos las matrices A y B como:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se comprueba que:

$$A^4 = B^2 = I,\ B^{-1}AB = A^{-1}$$

la función

$$\rho : G \to GL(2, V)$$

definida como $\rho : a^i b^j \to A^i B^j$ *para* $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 1$, *es una representación de* D_8 *sobre* V. *Es una representación de grado 2.*
En la siguiente tabla se representan las imágenes de ρ *para cada elemento de* D_8*:*

g	$\rho(g)$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
a	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
a^2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
a^3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
b	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
ab	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
a^2b	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
a^3b	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cuadro 2.1: Representación del grupo dihedral 8.

Ejemplo 2.1.2 *Sea* G *un grupo cualquiera. Definimos* $\rho : G \to GL(n, V)$ *como* $\rho(g) = I_n$ *para todo* $g \in G$, *donde* I_n *es la matriz identidad* $n \times n$. *Entoces:*

$$\rho(gh) = I_n = I_n I_n = \rho(g)\rho(h)$$

para todo $g, h \in G$, *por lo tanto,* ρ *es una representación de* G. *Esto nos indica que todo grupo tiene representaciones de cualquier grado.*

2.2. Representaciones equivalentes.

Sean ρ y ρ' representaciones lineales de un grupo G en espacios vectoriales V y V' respectivamente. Se dice que estas representaciones son equivalentes (o isomorfas) si existe un isomorfismo lineal $\tau : V \to V'$ que transforma ρ en ρ', es decir, que verifica la identidad:

$$\tau \cdot \rho(s) = \rho'(s) \cdot \tau$$

para todo $s \in G$.

Si ρ y ρ' se dan en forma matricial por R y R' respectivamente, el isomorfismo se traduce en una matriz invertible T tal que:

$$T \cdot R = R' \cdot T$$

o, equivalentemente, tal que:

$$R' = TRT^{-1}$$

Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación, Y sea T una matriz invertible $n \times n$ de V. Para todas las $n \times n$ matrices A y B tenemos:

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = T^{-1}(AB)T$$

Usamos esto para crear una reprsentacion σ desde ρ; definimos

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

para todo $g \in G$. Por lo tanto, para todo $g, h \in G$, tenemos:

$$\sigma(gh) = T^{-1}\rho(gh)T$$

$$= T^{-1}\rho(g)\rho(h)T$$
$$= T^{-1}\rho(g)T \cdot T^{-1}\rho(h)T$$
$$= \sigma(g)\sigma(h)$$

por lo que, σ es, en efecto, una representación.

Con esto podemos ya dar la siguiente definición:

Definicion 2.2.1 *Sean $\rho : G \to GL(m, V)$ y $\sigma : G \to GL(n, V)$ representaciones de G sobre V. Decimos que ρ es equivalente a σ si $n = m$ y existe una matriz invertible $n \times n$ T tal que, para todo $g \in G$,*

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$