1 La matriz de caracteres

Consideremos el conjunto de caracteres irreducibles de G, $Irr(G) = \{\chi_1, ..., \chi_r\}$ y sean $\{g_1, ..., g_r\}$ representantes de cada una de las clases de conjugación de elementos de G. Puesto que cada carácter χ_i está determinado por su valor sobre cada clase de conjugación, los caracteres de G están completamente determinados por la matriz de orden $r \times r$ que proporociona el valor de cada carácter sobre cada una de las clases de conjugación

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \chi_1(g_1) = 1 & ... & ... & \chi_1(g_r) = 1 \\ \chi_2(g_1) = n_2 & ... & ... & \chi_2(g_r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_r(g_1) = n_r & ... & ... & \chi_r(g_r) \end{pmatrix}.$$

Como es sabido el tamaño de cada clase de conjugación del elemento g_i viene dado por $k_i = [G : C_G(g_i)]$.

La relación

$$(\chi_i, \chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij},$$

puede escribirse como

$$(\chi_i, \chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{t=1}^{r} k_t \chi_i(g_t) \overline{\chi_j(g_t)} = \delta_{ij}$$

y es llamada *relación de ortogonalidad por filas.* En notación matricial es

$$\mathcal{X} C \overline{\mathcal{X}}^t = Id$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{|G|} & ... & \\ \vdots & \ddots & \\ & & \frac{k_r}{|G|} \end{pmatrix}.$$

De esta forma $\overline{\mathcal{X}}^t = (XC)^{-1} = C^{-1}X^{-1}$, y por tanto

$$\overline{\mathcal{X}}^t \mathcal{X} = C^{-1}$$

que proporciona

$$\sum_{t=1}^{r} \chi_t(g_i) \overline{\chi_t(g_j)} = \frac{|G|}{k_i} \delta_{ij}.$$

llamada *relación de ortogonalidad por columnas.*

Example 1 *Consideremos el grupo cíclico de orden* n, $\mathbb{Z}_n$. *Por ser* G *abeliano, tiene* n *clases de conjugación y por tanto tiene* n *caracteres irreducibles, cada uno de grado* 1. *Si llamamos* λ *a una raíz primitivia enésima de la unidad,* *definiendo* $\chi_2(\overline{1}) = \lambda$, $\chi_3(\overline{1}) = \lambda^2, ..., \chi_n(\overline{1}) = \lambda^{n-1}$, *el conjunto* $Irr(G) = \{\chi_1, ..., \chi_n\}$ *queda definido en la matriz*

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \chi_1(\overline{0}) = 1 & \chi_1(\overline{1}) = 1 & ... & \chi_1(\overline{n-1}) = 1 \\ \chi_2(\overline{0}) = 1 & \chi_2(\overline{1}) = \lambda & ... & \chi_2(\overline{n-1}) = \lambda^{n-1} \\ \chi_3(\overline{0}) = 1 & \chi_3(\overline{1}) = \lambda^2 & ... & \chi_3(\overline{1}) = \lambda^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_n(\overline{0}) = 1 & \chi_n(\overline{1}) = \lambda^{n-1} & ... & \chi_n(\overline{n-1}) = \lambda \end{pmatrix}.$$

Example 2 *Consideremos el grupo simétrico* S_3. *Las clases de conjugación son* $\{1\}$, $\{(12), (13), (23)\}$, *y* $\{(123), (132)\}$, *con lo que existen tres elementos* χ_1, χ_2, χ_3 *en* $Irr(S_3)$. *Si consideramos la representación*

$$\rho_2 : S_3 \to S^1$$

asignando a cada permutación en S_3 *su signo, obtenemos el carácter* χ_2 :

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \chi_1(1) = 1 & \chi_1(12) = 1 & \chi_1(123) = 1 \\ \chi_2(1) = 1 & \chi_2(12) = -1 & \chi_2(123) = 1 \\ \chi_3(1) = n_3 & \chi_2(12) & \chi_2(123) \end{pmatrix}.$$

Como $6 = |S_3| = 1 + 1 + n_3^2$, se tiene $n_3 = 2$. La ortogonalidad de las dos primeras columnas implica

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot \chi_2(12) = 0,$$

mientras que la ortogonalidad de las columnas primera y tercera proporciona

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \chi_2(123) = 0.$$

En conclusión, tenemos

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \chi_1(1) = 1 & \chi_1(12) = 1 & \chi_1(123) = 1 \\ \chi_2(1) = 1 & \chi_2(12) = -1 & \chi_2(123) = 1 \\ \chi_3(1) = 2 & \chi_2(12) = 0 & \chi_2(123) = -1 \end{pmatrix}.$$

- Sea N un subgrupo normal en G y sea $\rho : G/N \to Aut(V)$ una represenatación lineal. El morfismo que resulta de la composición de ρ con la proyección canónica
$$G \xrightarrow{\pi} G/N \xrightarrow{\rho} Aut(V)$$
induce una representación lineal del grupo G.

- Sea $X = \{x_1, ..., x_n\}$ un $G-$conjunto finito. Si consideramos el espacio vectorial $\mathbb{C}X$ generado formalmente sobre $\mathbb{C}$ por los elementos de X. La acción de G en X induce una represenatción ρ de G en $\mathbb{C}X$. Denotemos con π a su caracter. Para cada $g \in G$ se tiene que $\rho(g)$ es una permutacion de los elementos de la base $\{x_1, ..., x_n\}$ de $\mathbb{C}X$, con lo que $\pi(g)$, suma de los valores de la diagonal de esta matriz, es igual al número de elementos de X que son fijos por g.

Un ejemplo de esto es muy esclarecedor. Consideremos $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y consideremos la accion natural de S_4 en este conjunto. Entonces $\mathbb{C}X \simeq \mathbb{C}^4$ y por ejemplo se tiene $\pi(123) = 1$, (ya que $\pi(x_1) = x_2$, $\pi(x_2) = x_3$, $\pi(x_3) = x_1$, $\pi(x_4) = x_4$) y análogamente $\pi(1234) = 0$).

En general la natural de S_n en $\mathbb{C}^n$

$$g(x_1, ..., x_n) = (x_{g(1)}, ..., x_{g(n)}),\ g \in S_n$$

es llamada *representación estándar del grupo simétrico.* Se tiene la siguiente descomposición es subespacios S_n-estables

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{E} \oplus \mathbb{C}$$

donde $\mathbb{E} = \{(x_1, ..., x_n) : x_1 + ... + x_n = 0\}$ y $\mathbb{C} =< (1, 1, ..., 1) >$.

- Dado un grupo finito G, consideremos el subgrupo derivado $[G, G] = \{ghg^{-1}h^{-1}, g, h \in G\}$. Se cumple que $[G, G]$ es normal en G y que el grupo cociente $G/[G, G]$ es abeliano.

Proposition 3 *Existe una correspondencia biunívoca entre las representaciones de grado* 1 *de* G *y las representaciones del grupo abeliano* $G/[G, G]$.

Proof. Como sabemos una representación ρ de grado 1 de G es un morfismo de grupos

$$\rho : G \to S^1.$$

Como $\rho(ghg^{-1}h^{-1}) = \rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1}\rho(h)^{-1} = 1$, este morfismo ρ factoriza por un morfismo

$$\overline{\rho} : G/[G, G] \to S^1$$

que es, por tanto, una representación de grado 1 de $G/[G, G]$.

Recíprocamente, toda representación $\overline{\rho}$ de $G/[G, G]$, por ser éste abeliano, es de grado 1, y es por tanto un morfismo

$$\overline{\rho} : G/[G, G] \to S^1$$

que al componer con la proyección canónica $G \to G/[G, G]$ induce un morfismo de grupos $G \to S^1$, lo que define una representación de grado 1 de G. ■

En el siguiente ejemplo utilizamos estas técnicas para calcular la matriz de caracteres del grupo simétrico S_4.

Ejemplo. Consideremos el grupo simétrico S_4. Un subgrupo normal suyo viene dado por $N = \{1,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (1,4)(2,3)\}$. Considerando a S_3 como subgrupo de S_4 se cumple que $N \cap S_3 = \{1\}$. Por ser N normal se tiene que $N \cdot S_3$ es un subgrupo de S_4, y por ser la intersección de ambos trivial, ha de ser $N \cdot S_3 = S_4$. En consecuencia $S_4/N = S_3$.

El grupo S_4 tiene 5 clases de conjugación con representantes: 1, (12)(34), (123), (12) y (1234).

Determinemos el conjunto $Irr(S_4) = \{\chi_1, ..., \chi_5\}$. Como $[S_4, S_4] = A_4$ entonces $|S_4/[S_4, S_4]| = 2$, luego sólo existen dos representaciones de grado 1, que han de ser las correspondientes a la representación trivial χ_1 y al signo χ_2.

Utilizando la proyección $S_4 \to S_4/N = S_3$ calcularemos el carácter χ_3 de la representación proveniente de la única representación de grado 2 de S_3 (ver ejemplo anterior).

Por definición de grado tenemos que $\chi_3(1) = 2$ y como la imagen de (12)(34) es trivial en S_4/N ha de ser también $\chi_3(12)(34) = 2$. Por otra parte, como (1234) tiene orden 2 en S_4/N (ya que $(1234)(1234) = (13)(24)$), se ha de tener $\chi_3(1234) = 0$ (ya que es nula la traza de una matriz cuyo polinomio mínimo es $X^2 - 1$). De esta forma, completando los valores de χ_3 sobre los elementos de la matriz de tenemos

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \chi_1(1) = 1 & \chi_1(12)(34) = 1 & \chi_1(123) = 1 & \chi_1(12) = 1 & \chi_1(1234) = 1 \\ \chi_2(1) = 1 & \chi_2(12)(34) = 1 & \chi_2(123) = 1 & \chi_2(12) = -1 & \chi_2(1234) = -1 \\ \chi_3(1) = 2 & \chi_3(12)(34) = 2 & \chi_3(123) = -1 & \chi_3(12) = 0 & \chi_2(1234) = 0 \\ \chi_4(1) & \chi_4(12)(34) & \chi_4(123) & \chi_4(12) & \chi_4(1234) \\ \chi_5(1) & \chi_5(12)(34) & \chi_5(123) & \chi_5(12) & \chi_5(1234) \end{pmatrix}.$$

Consideremos la representación estándar de S^4 en $\mathbb{C}^4$. Con las notaciones introducidas anteriormente consideremos la descomposición de $\mathbb{C}^4$ en subespacios estables para la acción de S^4, $\mathbb{C}^4 = \mathbb{E} \oplus \mathbb{C}$, donde $\mathbb{E} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Comprobemos que $\mathbb{E}$ es una representación irreducible. Como $\chi_{\mathbb{E}} = \chi_{\mathbb{C}^4} - \chi_{\mathbb{C}}$, tenemos

$$\chi_{\mathbb{E}}(1) = 3,\ \chi_{\mathbb{E}}(12)(34) = 0-1 = -1,\ \chi_{\mathbb{E}}(123) = 1-1 = 0,\ \chi_{\mathbb{E}}(12) = 2-1,\ \chi_4(1234) = 0-1 = -1.$$

Con ello
$$(\chi_{\mathbb{E}}, \chi_{\mathbb{E}}) = \frac{1}{24}(9 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = 1$$
por lo que $\mathbb{E}$ es una representación irreducible. Escribiendo $\chi_4 = \chi_{\mathbb{E}}$, y $\chi_5 = \chi_4\chi_2$, completamos la tabla de caracteres

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \chi_1(1) = 1 & \chi_1(12)(34) = 1 & \chi_1(123) = 1 & \chi_1(12) = 1 & \chi_1(1234) = 1 \\ \chi_2(1) = 1 & \chi_2(12)(34) = 1 & \chi_2(123) = 1 & \chi_2(12) = -1 & \chi_2(1234) = -1 \\ \chi_3(1) = 2 & \chi_3(12)(34) = 2 & \chi_3(123) = -1 & \chi_3(12) = 0 & \chi_2(1234) = 0 \\ \chi_4(1) = 3 & \chi_4(12)(34) = -1 & \chi_4(123) = 0 & \chi_4(12) = 1 & \chi_4(1234) = -1 \\ \chi_5(1) = 3 & \chi_5(12)(34) = -1 & \chi_5(123) = 0 & \chi_5(12) = -1 & \chi_5(1234) = 1 \end{pmatrix}.$$

- Sean G y H grupos para los que $Irr(G) = \{\chi_1, ..., \chi_r\}$ e $Irr(H) = \{\psi_1, ..., \psi_s\}$. Deseamos determinar el conjunto $Irr(G \times H)$. Si $g_1, ..., g_r$

son representantes de las clases de conjugación en G y $h_1, ..., h_s$ lo son para las clases en H, entonces el conjunto

$$(g_i, h_j),\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s$$

es un conjunto de representates de las clases de conjugación en $G \times H$. De esta forma el conjunto $Irr(G \times H)$ tiene rs elementos.

Sean $U_1, ..., U_r$ y $W_1, ..., W_s$ las representaciones irreducibles de G y H respectivamente. Para cada i y j se define una represenatción de $G \times H$ en $U_i \otimes W_j$ de forma natural

$$(g, h)(u \otimes w) = gu \otimes hw.$$

Denotemos con τ_{ij} al carácter de esta represenatción. Un argumento similar al de la proposición xx prueba $\tau_{ij}(g, h) = \chi_i(g)\psi_j(h)$. Ahora para cualesquiera índices $i, j.i', j'$ se tiene

$$\begin{aligned}
(\tau_{ij}, \tau_{i'j'}) &= \frac{1}{|G \times H|} \sum_{(g,h) \in G \times H} \tau_{ij}(g, h)\overline{\tau_{i'j'}(g, h)} \\
&= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\chi_{i'}(g)} \right) \left(\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \psi_j(h)\overline{\psi_{j'}(h)} \right) \\
&= (\chi_i, \chi_{i'})(\psi_j, \psi_{j'}) = \delta_{ii'}\delta_{jj'}.
\end{aligned}$$

De esta forma, los τ_{ij} son todos los rs caracteres irreducibles de $G \times H$.

Como ejemplo podemos tomar el $4-$grupo de Klein $G = \{\langle a, b \rangle : a^2 = b^2 = 1, ab = ba\}$ que es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Si formamos las matrices de caracteres de cada una de las copias de $\mathbb{Z}_2$

$$\begin{pmatrix} \chi_1(1) = 1 & \chi_1(a) = 1 \\ \chi_2(1) = 1 & \chi_2(a) = -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_1(1) = 1 & \psi_1(b) = 1 \\ \psi_2(1) = 1 & \psi_2(a) = -1 \end{pmatrix}$$

entonces escribiendo como anteriormente $\tau_{ij}(g, h) = \chi_i(g)\psi_j(h)$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \tau_{11}(1,1) = 1 & \tau_{11}(1,b) = 1 & \tau_{11}(a,1) = 1 & \tau_{11}(a,b) = 1 \\ \tau_{12}(1,1) = 1 & \tau_{12}(1,b) = -1 & \tau_{12}(a,1) = 1 & \tau_{12}(a,b) = -1 \\ \tau_{21}(1,1) = 1 & \tau_{21}(1,b) = 1 & \tau_{21}(a,1) = -1 & \tau_{21}(a,b) = -1 \\ \tau_{22}(1,1) = 1 & \tau_{22}(1,b) = -1 & \tau_{22}(a,1) = -1 & \tau_{22}(a,b) = 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Calculemos la matriz de caracteres de un grupo no abeliano G de orden 8. Como necesariamente $|Z(G)| = 2$, entonces $G/Z(G)$ es un grupo de órden 4 y, por tanto, abeliano con lo que ha de ser $\mathbb{Z}_4$ o $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Sabemos que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano, con lo que forzosamente $G/Z(G) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Puesto que $[G, G]$ es el menor subgrupo de G tal que $G/[G, G]$ es abelino, se ha de tener $[G, G] = Z(G)$. De esta forma G tiene 4 caracteres irreducibles de grado 1. Como $\sum_{i=1}^{r} n_i^2 = 8$, necesariamente ha ser $r = 5$ y $n_5 = 2$.

En consecuencia G tiene 5 clases de conjugación. Si $Z(G) =< x >$ entonces 1 y x son los únicos elementos de G cuyas clases de conjugación tienen un único elemento. Sean a, b, c representantes de las 3 restantes clases de conjugación; forzosamente cada una de estas clases tiene orden 2 (ya que este orden ha de dividir a 8). Podemos construir los valores de los caraceres $\chi_1, ..., \chi_4$ como consecuencia de la tabla de caracteres de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, tenieno en cuante que la imagen de x es trivial en la proyección $G \to G/Z(G)$. El último carácter χ_5 está caracterizado por $\chi_5(1) = 2$, mientras que la ortogonalidad por columnas implica

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \chi_1(1) = 1 & \chi_1(x) = 1 & \chi_1(a) = 1 & \chi_1(b) = 1 & \chi_1(c) = 1 \\ \chi_2(1) = 1 & \chi_2(x) = 1 & \chi_2(a) = 1 & \chi_2(b) = -1 & \chi_2(c) = -1 \\ \chi_3(1) = 1 & \chi_3(x) = 1 & \chi_3(a) = -1 & \chi_3(b) = 1 & \chi_2(c) = -1 \\ \chi_4(1) = 1 & \chi_4(x) = 1 & \chi_4(a) = -1 & \chi_4(b) = 1 & \chi_4(c) = -1 \\ \chi_5(1) = 2 & \chi_5(x) = -2 & \chi_5(a) = 0 & \chi_5(12) = 0 & \chi_5(1234) = 0 \end{pmatrix}.$$