Capítulo 2

Representaciones de grupos.

Una representación de un grupo finito G nos proporciona una manera de visualizar G como un grupo de matrices. Para ser mas preciso diremos que una representación es un homomorfismo de G en el grupo de matrices invertibles.
La estructura de estos homomorfismos y sus propiedades seran objeto de estudio en este capitulo.

2.1. Representaciones de grupos.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y sea $GL(V)$ el grupo de isomorfismos de V. Un elemento $a \in GL(V)$ es, por definición, una aplicación lineal de V en V que admite inversa a^{-1}; a^{-1} es también lineal. Si V admite una base finita (e_i) de n elementos, toda aplicación lineal $a : V \to V$ se representa por una matriz cuadrada (a_{ij}) de orden n. Los coeficientes a_{ij} son números complejos; se calculan expresando $a(e_j)$ en la base (e_i):

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$$

Decir que a es un isomorfismo equivale a decir que el determinante de a es no nulo. El grupo $GL(V)$ se identifica así como el grupo de matrices cuadradas invertibles de orden n. En algunas ocasiones escribiremos $GL(n, V)$.

Definicion 2.1.1 *Sea G un grupo finito. Una representación de G en V es un homomorfismo ρ del grupo G en el grupo $GL(V)$:*

$$\rho : G \to GL(V)$$

de modo que:

$$\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$$

cualesquiera que sean $s, t \in G$.

Supongamos que V es de dimensión finita, y sea n su dimensión; se dice también que n es el *grado* de la representación considerada.

Ejemplo 2.1.1 *Sea G el grupo dihedral $D_8 = \langle a, b : \ a^4 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Definimos las matrices A y B como:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se comprueba que:

$$A^4 = B^2 = I,\ B^{-1}AB = A^{-1}$$

la función

$$\rho : G \to GL(2, V)$$

definida como $\rho : a^i b^j \to A^i B^j$ *para* $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 1$, *es una representación de* D_8 *sobre* V. *Es una representación de grado 2.*
En la siguiente tabla se representan las imágenes de ρ *para cada elemento de* D_8*:*

g	$\rho(g)$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
a	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
a^2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
a^3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
b	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
ab	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
a^2b	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
a^3b	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cuadro 2.1: Representación del grupo dihedral 8.

Ejemplo 2.1.2 *Sea* G *un grupo cualquiera. Definimos* $\rho : G \to GL(n, V)$ *como* $\rho(g) = I_n$ *para todo* $g \in G$, *donde* I_n *es la matriz identidad* $n \times n$. *Entoces:*

$$\rho(gh) = I_n = I_n I_n = \rho(g)\rho(h)$$

para todo $g, h \in G$, *por lo tanto,* ρ *es una representación de* G. *Esto nos indica que todo grupo tiene representaciones de cualquier grado.*

2.2. Representaciones equivalentes.

Sean ρ y ρ' representaciones lineales de un grupo G en espacios vectoriales V y V' respectivamente. Se dice que estas representaciones son equivalentes (o isomorfas) si existe un isomorfismo lineal $\tau : V \to V'$ que transforma ρ en ρ', es decir, que verifica la identidad:

$$\tau \cdot \rho(s) = \rho'(s) \cdot \tau$$

para todo $s \in G$.

Si ρ y ρ' se dan en forma matricial por R y R' respectivamente, el isomorfismo se traduce en una matriz invertible T tal que:

$$T \cdot R = R' \cdot T$$

o, equivalentemente, tal que:

$$R' = TRT^{-1}$$

Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación, Y sea T una matriz invertible $n \times n$ de V. Para todas las $n \times n$ matrices A y B tenemos:

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = T^{-1}(AB)T$$

Usamos esto para crear una reprsentacion σ desde ρ; definimos

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

para todo $g \in G$. Por lo tanto, para todo $g, h \in G$, tenemos:

$$\sigma(gh) = T^{-1}\rho(gh)T$$

$$= T^{-1}\rho(g)\rho(h)T$$
$$= T^{-1}\rho(g)T \cdot T^{-1}\rho(h)T$$
$$= \sigma(g)\sigma(h)$$

por lo que, σ es, en efecto, una representación.

Con esto podemos ya dar la siguiente definición:

Definicion 2.2.1 *Sean $\rho : G \to GL(m, V)$ y $\sigma : G \to GL(n, V)$ representaciones de G sobre V. Decimos que ρ es equivalente a σ si $n = m$ y existe una matriz invertible $n \times n$ T tal que, para todo $g \in G$,*

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

Dadas las representaciones ρ, σ y τ de G sobre V, se tiene que:

1. ρ es equivalente a ρ. (Prop. Reflexiva).

2. si ρ es equivalente a σ, entonces σ es equivalente a ρ. (Prop. Simétrica).

3. si ρ es equivalente a σ y σ es equivalente a τ, entonces ρ es equivalente a τ. (Prop. Transitiva).

Esto nos indica que ser equivalentes es una relación de equivalencia.

Demostracion: Sean ρ, σ y τ representaciones de G sobre V, y sea $g \in G$. Tenemos:

1. Prop. Reflexiva:
   Sea I la matriz identidad, que ademas es una matriz cuadrada e invertible, siempre podemos poner
   $$\rho(g) = I^{-1}\rho(g)I$$
   por lo que ρ es equivalente a ρ.

2. Prop. Simétrica:
   Por ser ρ equivalente a σ, tenemos que existe una matriz cuadrada invertible T que cumple:
   $$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$
   $$T\sigma(g) = \rho(g)T$$
   $$T\sigma(g)T^{-1} = \rho(g)$$
   lo que concluye que σ es equivalente a ρ.

3. Prop. Transitiva.
   Por ser ρ equivalente a σ, tenemos que existe una matriz cuadrada invertible T que cumple:
$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$
   Del mismo modo, por ser σ equivalente a τ, tenemos que existe una matriz cuadrada invertible P que cumple:
$$\tau(g) = P^{-1}\sigma(g)P$$
   Sustituyendo tenemos que:
$$\tau(g) = P^{-1}T^{-1}\rho(g)TP$$
$$\tau(g) = (TP)^{-1}\rho(g)TP$$
   por lo que ρ es equivalente a τ.

■

2.3. Núcleo de una representación.

Sea una representación $\rho : G \to GL(V)$. El núcleo de una representación consiste en un grupo de elementos $g \in G$ para los cuales $\rho(g)$ es la matriz identidad.

$$Ker\,\rho = \{g \in G : \rho(g) = I_n\}$$

El núcleo de ρ es un subgrupo normal de G.

Puede ocurrir que el núcleo de una representación es el propio grupo G.

Definicion 2.3.1 *Una representación $\rho : G \to GL(1, V)$ definida como:*

$$\rho(g) = 1_G$$

para todo $g \in G$, se denomina representación trivial de G.

2.4. Representaciones irreducibles.

Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal y sea W un subespacio de V. Si W es estable para la accion de G, es decir
$$gW \subset W, \forall g \in G$$
entonces ρ define por restricción una representación $\rho' : G \to GL(W)$.

Si W' es otro subespacio del mismo, se dice que V es suma directa de W y W' si todo $v \in V$ se puede expresar de la forma $v = w + w'$, $w \in W$, $w' \in W'$ y $W \cap W' = 0$. Se escribe entonces $V = W \oplus W'$ y se dice que W' es un suplementario de W en V. La aplicación p que hace corresponder a cada vector $v \in V$ su componente $w \in W$ es llamada proyector de de V sobre W asociado a la descomposición $V = W \oplus W'$; en consecuencia p verifica las condiciones $Im(p) = W$ y $p(w) = w$ si $w \in W$. Recíprocamente cualquier aplicación lineal p que verifique estas condiciones cumple $p^2 = p$. La expresión $v = p(v) + v - p(v)$ para todo $v \in V$, da una descripción explícita de la suma $V = W + Ker(p)$. Fácilmente se comprueba que $W \cap Ker(p) = 0$, con lo que $V = W \oplus Ker(p)$. Se establece asi una correspondencia biyectiva entre los proyectores de V sobre W y los suplementarios de W en V.

Antes de dar una definición de representación irreducible veamos un resultado que nos va a ser útil en breve:

Teorema 2.4.1 *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal de G en V y sea W un subespacio vectorial de V estable por la acción de G. Existe un subespacio complementario W' de W en V el cual es estable por la acción de G.*

Demostracion: Sea p cualquier proyector de V sobre W. Consideremos la suma de Poincaré P de p:

$$P(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp(g^{-1}v)$$

se cumple que P es también un proyector de V sobre W. En efecto, como W es estable por G, la expresión para P dice que $Im(P) \subset W$. Ademas si $w \in W$, como también $g^{-1}w \in W$, se tiene $gp(g^{-1}w) = gg^{-1}w = w$, lo que implica que $P(w) = w$ y en consecuencia $P^2 = Id$ y P es un proyector sobre W.
Por ser P una suma de Poincaré , se cumple $P(gv) = gP(v), \forall g \in G$, con lo que $Ker(P)$ es estable por G. Como $V = W \oplus Ker(P)$ se concluye el enunciado. ■

Supongamos que V esta dotado de un producto escalar $\langle x, y \rangle$ satisfaciendo las condiciones de linealidad en x, bilinealidad en y, y $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$. Supongamos que este producto escalar permanece invariante por la acción de G, $\langle \rho(s)x, \rho(s)y \rangle = \langle x, y \rangle$; podemos reemplazar $\langle x, y \rangle$ por $\sum_{t \in G} \langle \rho(t)x, \rho(t)y \rangle$. Bajo esta hipótesis el complementario ortogonal W' de W en V es un subespacio complementario de W estable por G; y asi, obtenemos una demostración alternativa al anterior teorema (2.4.1). Observemos el hecho de que como el producto escalar $\langle x, y \rangle$ es invariante, implica que, si (e_i) es una base ortonormal de V, la matriz $\rho(s)$ con respecto a esa base es la matriz unitaria.

Manteniendo las hipótesis y notación del teorema 2.4.1, sea $x \in V$, y sean w y w' proyecciones en W y W' respectivamente. Tenemos $x = w + w'$, de donde $\rho(s)x = \rho(s)w + \rho(s)w'$, por lo que w y w' son estables por G, tenemos que $\rho(s)w \in W$ y $\rho(s)w' \in W'$; asi que $\rho(s)w$ y $\rho(s)w'$ son proyecciones de $\rho(s)x$.

Se sigue, entonces, que las representaciones de W y W' determinan la representación de V. Decimos que V es suma directa de W y W', y lo escribimos como $V = W \oplus W'$. Podemos definir los elementos de V como un par (w, w') con $w \in W$ y $w' \in W'$. Si W y W' son dados en forma matricial por R_s y R'_s, $W \oplus W'$ estará dado en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R'_s \end{pmatrix}$$

Definicion 2.4.1 *Una representación lineal $\rho : G \to GL(V)$ se dice irreducible si $V \neq 0$ y ningún subespacio de V es estable por G, excepto, claro está, 0 y V.*

Debido al teorema 2.4.1 la segunda condición equivale a decir que V no es suma directa de dos representaciones, salvo la descomposición trivial $V = 0 \oplus V$.

Toda representacion de grado 1 es evidentemente irreducible.

Teorema 2.4.2 *Toda representación es suma directa de representaciones irreducibles.*

Demostracion: Sea V una representación lineal de G. Se razona por inducción sobre $dim(V)$. Si $dim(V) = 0$, el teorema es evidente, 0 es suma directa de la familia vacia de representaciones irreducibles. Si $dim(V) \geq 1$ y V es irreducible no hay nada que demostrar. De lo contrario, debido al teorema 2.4.1, V puede ser descompuesto como suma directa $V' \oplus V''$. Por hipótesis de inducción V' y V'' son suma directa de representaciones irreducibles, y lo mismo es cierto para V. ■

Sea V una representación y sea $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ una descomposición de V en suma directa de representaciones irreducibles, podemos preguntarnos si la descomposición es unica. En el caso donde todas las representaciones $\rho(s)$ son iguales a 1 muestra que esto no es cierto en general. Sin embargo, mas adelante, veremos que el número de W_i isomorfas a una representación irreducible dada, no depende de la descomposición elegida.

2.5. FG-módulos.

Sea G un grupo, y sea $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$. Escribiremos como $V = F^n$ el espacio vectorial formado por los vectores fila $(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ con $\lambda_i \in F$. Para todo $v \in V$ y $g \in G$, el producto matricial

$$v\rho(g)$$

de el vector fila v con la matriz de dimensión $n \times n$ $\rho(g)$, es un vector fila en V.

Basandonos en el producto matricial $v\rho(g)$ definimos el FG-módulo.

Definicion 2.5.1 *Sea V un espacio vectorial sobre F y sea G un grupo. Entonces V es un FG-modulo si esta definida la multiplicación vg, para $v \in V$ y $g \in G$, y ademas satisfacen las siguientes condiciones para todo $u, v \in V$, $\lambda \in F$ y $g, h \in G$:*

1. $vg \in V$
2. $v(gh) = (vg)h$
3. $v1 = v$
4. $(\lambda v)g = \lambda(vg)$
5. $(u + v)g = ug + vg$

Las condiciones (1), (4) y (5) de la definición aseguran que para todo $g \in G$, la función

$$v \to vg$$

es un endomorfismo de V.

Sea V un FG-módulo, y sea $\mathscr{B}$ una base de V. Para cada $g \in G$, denotamos como

$$[g]_{\mathscr{B}}$$

a la matriz del endomorfismo $v \to vg$ de V, relativo a la base $\mathscr{B}$.
La relación entre los FG-módulos y las representaciones de G sobre F se verá en el siguiente teorema:

Teorema 2.5.1 *(1) Si $\rho : G \to GL(F)$ es una representación de G sobre F, y $V = F^n$, entonces V sera un FG-módulo si definimos la multiplicación vg como*

$$vg = v\rho(g)$$

ademas, existe una base $\mathscr{B}$ de V tal que

$$\rho(g) = [g]_{\mathscr{B}}$$

para todo $g \in G$.

(2) Sea V un FG-módulo y sea $\mathscr{B}$ una base de V. Entonces la función

$$g \to [g]_{\mathscr{B}}$$

es una representación de G sobre F.

Demostracion: (1) Sabemos que $v\rho(g) \in F^n$, ademas por ser ρ un homomorfismo tenemos que $v(\rho(gh)) = v(\rho(g)\rho(h))$ y $v(\rho(1)) = v$. Del mismo modo, por las propiedades de la multiplicación matricial tenemos que $(\lambda v)\rho(g) = \lambda(v\rho(g))$ y $(u+v)\rho(g) = u\rho(g) + v\rho(g)$ para todo $u, v \in F^n$, $\lambda \in F$ y $g, h \in G$.
Por lo tanto, F^n se convertirá en un FG-módulo si definimos

$$vg = v\rho(g)$$

para todo $v \in F^n, g \in G$.
Ademas, si consideramos la base $\mathscr{B}$ como

$$(1, 0, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, 0, ..., 1)$$

de F^n, entonces $\rho(g) = [g]_{\mathscr{B}}$ para todo $g \in G$.

(2) Sea V un FG-módulo con base $\mathscr{B}$. De $v(gh) = (vg)h$ para todo $g, h \in G$ y todo $v \in \mathscr{B}$, se sigue que

$$[gh]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}}[h]_{\mathscr{B}}$$

En particular,

$$[1]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}}[g^{-1}]_{\mathscr{B}}$$

para todo $g \in G$. Ahora $v1 = v$ para todo $v \in V$, asi que $[1]_{\mathscr{B}}$ es la matriz identidad.
Por lo tanto cada matriz $[g]_{\mathscr{B}}$ es invertible.
Hemos probado que la función $g \to [g]_{\mathscr{B}}$ es un homomorfismo de G a $GL(F)$ y por lo tanto es una representación de G sobre F. ■

Podemos construir FG-módulos sin usar una representación. Para hacer esto transformamos un espacio vectorial V sobre F en un FG-módulo especificando la acción de los elementos del grupo en una base $v_1, \ldots v_n$ de V y haciendo que sea lineal la acción en el entorno de V, es decir, primero definimos $v_i g$ para cada i y cada $g \in G$, y entonces definimos

$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)g$$

para $\lambda_i \in F$, como

$$\lambda_1(v_1 g) + \ldots + \lambda_n(v_n g)$$

Como era de esperar existen restricciones a la hora de definir los vectores $v_i g$.

Teorema 2.5.2 *Sea $v_1, \ldots v_n$ una base de un espacio vectorial V sobre F. Supongamos que tenemos una multiplicación vg para todo $v \in V$ y $g \in G$, la cual satisface las siguientes condiciones para todo i con $1 \leq i \leq n$, para todo $g, h \in G$ y para todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$:*

1. *$v_i g \in V$*
2. *$v_i(gh) = (v_i g)h$*
3. *$v_i 1 = v$*

4. $(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)g = \lambda_1(v_1 g) + \ldots + \lambda_n(v_n g)$

Entonces V es un FG-módulo.

Demostracion: Es trivial ver de (3) y (4) que $v1 = v$ para todo $v \in V$. Las condiciones (1) y (4) nos aseguran que, para todo $g \in G$, la función $v \to vg$ $(v \in V)$ es un endomorfismo de V. Esto es:

$$vg \in V,$$
$$(\lambda v)g = \lambda(vg),$$
$$(u+v)g = ug + vg,$$

para todo $u, v \in V$, $\lambda \in F$ y $g \in G$. Por lo tanto

$$(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n)h = \lambda_1(u_1 h) + \ldots + \lambda_n(u_n h)$$

para todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$, todo $u_1, \ldots, u_n \in V$, y todo $h \in G$.
Ahora sea $v \in V$ y $g, h \in G$. Entonces $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ para algún $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$, y

$$\begin{aligned} v(gh) &= \lambda_1(v_1(gh)) + \ldots + \lambda_n(v_n(gh)) \\ &= \lambda_1((v_1 g)h) + \ldots + \lambda_n((v_n g)h) \\ &= (\lambda_1(v_1 g) + \ldots + \lambda_n(v_n g))h \\ &= (vg)h \end{aligned}$$

Con esto hemos comprobado todos los axiomas requeridos para que V sea un FG-módulo. ■

Definicion 2.5.2 *El FG-módulo trivial es un espacio vectorial V sobre F 1-dimensional con*

$$vg = v$$

para todo $v \in V$, $g \in G$.

Definicion 2.5.3 *Un FG-módulo V es fiel si el elemento unitario de G es el único elemento g para el cual*

$$vg = v$$

para todo $v \in V$.

2.5.1. FG-módulos y representaciones equivalentes.

Veamos ahora las relaciones entre los FG-módulos y las representaciones equivalentes de G sobre F. Un FG-módulo tiene varias representaciones, todas de la forma

$$g \to [g]_{\mathscr{B}}$$

para una base $\mathscr{B}$ de V. El siguiente resultado muestra que todas estas representaciones son equivalentes entre si.

Teorema 2.5.3 *Sea V un FG-módulo con una base $\mathscr{B}$, y sea ρ la representación de G sobre F definida por*

$$\rho : g \to [g]_{\mathscr{B}}$$

(1) Si $\mathscr{B}'$ es una base de V, entonces la representación

$$\phi : g \to [g]_{\mathscr{B}'}$$

de G es equivalente a ρ.
(2) Si σ es una representación de G la cual es equivalente a ρ, entonces existe una base $\mathscr{B}''$ de V tal que

$$\sigma : g \to [g]_{\mathscr{B}''}$$

Demostracion: (1) Sea T la matriz del cambio de base de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$. Para todo $g \in G$, tenemos

$$[g]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}'}T$$

Por lo tanto ϕ es equivalente a ρ.
(2) Supongamos que ρ y σ son representaciones equivalentes de G. Entonces, para la matriz invertible T tenemos

$$g\rho = T^{-1}(g\sigma)T$$

para todo $g \in G$. Sea $\mathscr{B}''$ la base de V para la cual la matriz del cambio de base de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}''$ es T. Entonces para todo $g \in G$

$$[g]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}''}T$$

por lo que $g\sigma = [g]_{\mathscr{B}''}$. ■

2.5.2. FG-submódulos.

En lo sucesivo G sera un grupo y F sera $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definicion 2.5.4 *Sea V un FG-módulo. Un subconjunto W de V se dice que es un FG-submódulo de V si W es un subespacio y $wg \in W$ para todo $w \in W$ y $g \in G$.*

2.5.3. FG-módulos irreducibles.

Definicion 2.5.5 *Un FG-módulo V se dice que es irreducible si es diferente a $\{0\}$ y no tiene FG-submódulos aparte de $\{0\}$ y V.*
Si V tiene un FG-submódulo W donde W es distinto a $\{0\}$ o V, entonces V es recucible.

Del mismo modo, una representación $\rho : G \to GL(F)$ es irreducible si el correspondiente FG-módulo F^n dado por

$$vg = v(\rho(g))$$

es irreducible; y ρ es reducible si F^n es reducible.

Supongamos ahora que V es un FG-módulo reducible, por lo tanto hay un FG-submódulo W con $0 <$ dim W $<$ dim V. Tomando una base $\mathscr{B}$ de W y extendiéndola a una base $\mathscr{B}$ de V. Entonces para todo $g \in G$, la matriz $[g]_{\mathscr{B}}$ tiene la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} X_g & 0 \\ \hline Y_g & Z_g \end{array}\right) \tag{2.5.1}$$

para las matrices X_g, Y_g y Z_g, donde X_g es $k \times k$ para $k = dim(W)$.

Una representación de grado n es reducible si, y solo si, es equivalente a una representación de la forma (2.6.1), donde X_g es $k \times k$ y $0 < k < n$. Notemos que en (2.6.1), las funciones $g \to X_g$ y $g \to Z_g$ son representaciones de G.

2.5.4. FG-homomorfismos.

Definicion 2.5.6 *Sean V y W FG-módulos. Una función $\vartheta : V \to W$ se dice que es un FG-homomorfismo si ϑ es una transformación lineal y*

$$\vartheta(vg) = \vartheta(v)g$$

En otras palabras, si ϑ envia v a w entonces envia vg a wg.

Como G es un grupo finito y $\vartheta : V \to W$ es un FG-homomorfismo, entonces para todo $v \in V$ y $r = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in FG$, tenemos
$$\vartheta(vr) = \vartheta(v)r$$

Proposicion 2.5.1 *Sea V y W FG-módulos y sea $\vartheta : V \to W$ un FG-homomorfismo. Entonces $Ker\,\vartheta$ es un FG-submódulo de V y $Im\,\vartheta$ es un FG-submódulo de W.*

Demostracion: $Ker\,\vartheta$ es un subespacio de V y $Im\,\vartheta$ es un subespacio de W ya que ϑ es una transformación lineal.
Sea $v \in Ker\,\vartheta$ y $g \in G$, entonces

$$\vartheta(vg) = \vartheta(v)g = 0g = 0$$

asi que $vg \in Ker\,\vartheta$. Ademas $Ker\,\vartheta$ es un FG-submodulo de V.
Sea $w \in Im\,\vartheta$, tal que $w = \vartheta(v)$ para algún $v \in V$. Para todo $g \in G$,

$$wg = \vartheta(v)g = \vartheta(vg) \in Im\,\vartheta$$

por lo que $Im\,\vartheta$ es un FG-submódulo de W. ■

2.5.5. Isomorfismos de FG-módulos.

Definicion 2.5.7 *Sean V y W FG-módulos. Decimos que $\vartheta : V \to W$ es un FG-isomorfismo si ϑ es un FG-homomorfismo y ademas posee inversa. Si $\vartheta : V \to W$ es un FG-isomorfismo, entonces V y W son FG-módulos isomorfos y los representaremos como $V \cong W$.*

En el siguiente teorema veremos que si $V \cong W$ entonces $W \cong V$.

Teorema 2.5.4 *Si $\vartheta : V \to W$ es un FG-isomorfismo, entonces la inversa $\vartheta^{-1} : W \to V$ es tambien un FG-isomorfismo.*

Demostracion: Es evidente que ϑ^{-1} es una transformación lineal invertible, por lo que, unicamente, debemos demostrar que ϑ^{-1} es un FG-homomorfismo. Sean $w \in W$ y $g \in G$,

$$\vartheta(\vartheta^{-1}(w)g) = g(\vartheta(\vartheta^{-1}(w))$$

como ϑ es un FG-homomorfismo,

$$= wg$$

$$\vartheta(\vartheta^{-1}(wg))$$

Así que $\vartheta^{-1}(w)g = \vartheta^{-1}(wg)$ como se buscaba. ■

Sea $\vartheta : V \to W$ un FG-isomorfismo, entonces podemos usar ϑ y ϑ^{-1} para cambiar entre los FG-módulos isomorfos V y W, y probar que V y W comparten la mismas propiedades estructurales; algunos ejemplos pueden ser:

1. dim V = dim W (cada $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V si y solo si $\vartheta(v_1), \ldots, \vartheta(v_n)$ es base de W).

2. V es irreducible si y solo si W es irreducible (cada X es un FG-submódulo de V si y solo si $\vartheta(X)$ es un FG-submódulo de W).

3. V contiene un FG-submódulo trivial si y solo si W contiene un FG-submódulo trivial (cada X es un FG-submódulo trivial de V si y solo si $\vartheta(X)$ es un FG-submódulo trivial de W).

Teorema 2.5.5 *Sea V un FG-módulo con una base $\mathscr{B}$, y sea W un FG-módulo con una base $\mathscr{B}'$. Entonces V y W son isomorfas si y solo si las representaciones*

$$\rho : g \to [g]_{\mathscr{B}}$$

$$\sigma : g \to [g]_{\mathscr{B}'}$$

son equivalentes.

Demostracion: Para la demostración del anterior teorema primero estableceremos lo siguiente:

1. Los FG-módulos V y W son isomorfos si y solo si existe una base $\mathscr{B}_1$ de V y una base $\mathscr{B}_2$ de W tal que
$$[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}$$
para todo $g \in G$.

Para ver esto supongamos, primero, que ϑ es un FG-isomorfismo de V a W, y sea $v_1, \ldots, v_n$ una base $\mathscr{B}_1$ de V; entonces $\vartheta(v_1), \ldots, \vartheta(v_n)$ es una base de $\mathscr{B}_2$ de W. Sea $g \in G$. Ya que $\vartheta(v_i g) = \vartheta(v_i)g$ para cada i, se sigue que $[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}$.
De modo inverso, supongamos que $v_1, \ldots, v_n$ una base $\mathscr{B}_1$ de V y $w_1, \ldots, w_n$ una base $\mathscr{B}_2$ de W tal que $[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}$ para todo $g \in G$. Sea ϑ la transformación lineal invertible de V a W para la cuál $\vartheta(v_i) = w_i$. Y que $[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}$, se deduce que $\vartheta(v_i g) = \vartheta(v_i)g$ y por lo tanto cada ϑ es un FG-isomorfismo. Esto completa la demostración de (1).
Ahora asumimos que V y W son FG-módulos isomorfos. Por (1) hay una base $\mathscr{B}_1$ de V y una base $\mathscr{B}_2$ de W tal que $[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}$ para todo $g \in G$. Definimos ahora una representación ϕ de G como $\phi : g \to [g]_{\mathscr{B}_1}$. Según el teorema 2.6.3(1), ϕ es equivalente a ρ y a σ, por lo que ρ y σ son equivalentes.
A la inversa, supongamos que ρ y a σ son equivalentes, entonces, por el teorema 2.6.3(2) hay una base $\mathscr{B}''$ de V tal que $\sigma(g) = [g]_{\mathscr{B}''}$ para todo $g \in G$; esto es, $[g]_{\mathscr{B}'} = [g]_{\mathscr{B}''}$ para todo $g \in G$. Por lo tanto V y W son FG-módulos isomorfos, por (1). ■

2.5.6. Suma directa de FG-módulos.

Sea V un FG-módulo, y supongamos que

$$V = U \oplus W$$

donde U y W son FG-submódulos de V. Sea $u_1, \ldots, u_m$ una base $\mathscr{B}_1$ de U, y $w_1, \ldots, w_n$ una base $\mathscr{B}_2$ de W. Entonces sabemos, por los primeros cursos de álgebra lineal, que $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ es una base $\mathscr{B}$ de V, y para $g \in G$

$$\left(\begin{array}{c|c} [g]_{\mathscr{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [g]_{\mathscr{B}_2} \end{array}\right)$$

Generalizando aun mas, si $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$, es suma directa de los FG-submódulos U_i y $\mathscr{B}_i$ es una base de U_i, entonces podemos unir $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_r$, para obtener una base $mathscrB$ de V, y para $g \in G$,

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} [g]_{\mathscr{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [g]_{\mathscr{B}_r} \end{pmatrix}$$

Proposicion 2.5.2 *Sea V un FG-módulo, y supongamos que*

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$$

donde cada U_i es un FG-submódulo de V. Para $v \in V$, tenemos que $v = u_1 + \ldots + u_r$ para $u_i \in U_i$, y definimos $\pi_i : V \to V$ como

$$\pi_i(v) = u_i$$

Entonces cada π_i es un FG-homomorfismo, y es, ademas, una proyección de V.

Demostracion: Evidentemente π_i es una transformación lineal; y es también un FG-homomorfismo, ya que para $v \in V$ con $v = u_i + \ldots + u_r$ siendo $u_j \in U_j$ para todo j, y $g \in G$, tenemos que

$$\pi_i(vg) = \pi_i(u_1 g + \ldots + u_r g) = u_i g = \pi_i(v)g$$

por lo tanto

$$\pi_i^2(v) = \pi_i(u_i) = u_i = \pi_i(v)$$

asi que $\pi_i^2 = \pi_i$. Lo que implica que π_i es una proyección. ■

Veamos, por último, un resultado concerniente a la suma de FG-módulos irreducibles del cual no daremos una demostración.

Proposicion 2.5.3 *Sea V un FG-módulo, y supongamos que*

$$V = U_1 + \ldots + U_r$$

donde cada U_i es un FG-submódulo irreducible de V. Entonces V es una suma directa de algunos FG-submódulos U_i.