Capítulo 2

Representaciones de grupos.

Una representación de un grupo finito G nos proporciona una manera de visualizar G como un grupo de matrices. Para ser mas preciso diremos que una representación es un homomorfismo de G en el grupo de matrices invertibles.
La estructura de estos homomorfismos y sus propiedades seran objeto de estudio en este capitulo.

2.1. Representaciones de grupos.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y sea $GL(V)$ el grupo de isomorfismos de V. Un elemento $a \in GL(V)$ es, por definición, una aplicación lineal de V en V que admite inversa a^{-1}; a^{-1} es también lineal. Si V admite una base finita (e_i) de n elementos, toda aplicación lineal $a : V \to V$ se representa por una matriz cuadrada (a_{ij}) de orden n. Los coeficientes a_{ij} son números complejos; se calculan expresando $a(e_j)$ en la base (e_i):

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$$

Decir que a es un isomorfismo equivale a decir que el determinante de a es no nulo. El grupo $GL(V)$ se identifica así como el grupo de matrices cuadradas invertibles de orden n. En algunas ocasiones escribiremos $GL(n, V)$.

Definicion 2.1.1 *Sea G un grupo finito. Una representación de G en V es un homomorfismo ρ del grupo G en el grupo $GL(V)$:*

$$\rho : G \to GL(V)$$

de modo que:

$$\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$$

cualesquiera que sean $s, t \in G$.

Supongamos que V es de dimensión finita, y sea n su dimensión; se dice también que n es el *grado* de la representación considerada.

Ejemplo 2.1.1 *Sea G el grupo dihedral $D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Definimos las matrices A y B como:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se comprueba que:

$$A^4 = B^2 = I, B^{-1}AB = A^{-1}$$

la función

$$\rho : G \to GL(2, V)$$

definida como $\rho : a^i b^j \to A^i B^j$ *para* $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 1$, *es una representación de* D_8 *sobre* V. *Es una representación de grado 2.*
En la siguiente tabla se representan las imágenes de ρ *para cada elemento de* D_8*:*

g	$\rho(g)$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
a	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
a^2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
a^3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
b	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
ab	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
a^2b	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
a^3b	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cuadro 2.1: Representación del grupo dihedral 8.

Ejemplo 2.1.2 *Sea* G *un grupo cualquiera. Definimos* $\rho : G \to GL(n, V)$ *como* $\rho(g) = I_n$ *para todo* $g \in G$*, donde* I_n *es la matriz identidad* $n \times n$*. Entoces:*

$$\rho(gh) = I_n = I_n I_n = \rho(g)\rho(h)$$

para todo $g, h \in G$*, por lo tanto,* ρ *es una representación de* G*. Esto nos indica que todo grupo tiene representaciones de cualquier grado.*

2.2. Representaciones equivalentes.

Sean ρ y ρ' representaciones lineales de un grupo G en espacios vectoriales V y V' respectivamente. Se dice que estas representaciones son equivalentes (o isomorfas) si existe un isomorfismo lineal $\tau : V \to V'$ que transforma ρ en ρ', es decir, que verifica la identidad:

$$\tau \cdot \rho(s) = \rho'(s) \cdot \tau$$

para todo $s \in G$.

Si ρ y ρ' se dan en forma matricial por R y R' respectivamente, el isomorfismo se traduce en una matriz invertible T tal que:

$$T \cdot R = R' \cdot T$$

o, equivalentemente, tal que:

$$R' = TRT^{-1}$$

Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación, Y sea T una matriz invertible $n \times n$ de V. Para todas las $n \times n$ matrices A y B tenemos:

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = T^{-1}(AB)T$$

Usamos esto para crear una reprsentacion σ desde ρ; definimos

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

para todo $g \in G$. Por lo tanto, para todo $g, h \in G$, tenemos:

$$\sigma(gh) = T^{-1}\rho(gh)T$$

$$= T^{-1}\rho(g)\rho(h)T$$
$$= T^{-1}\rho(g)T \cdot T^{-1}\rho(h)T$$
$$= \sigma(g)\sigma(h)$$

por lo que, σ es, en efecto, una representación.

Con esto podemos ya dar la siguiente definición:

Definicion 2.2.1 *Sean $\rho : G \to GL(m, V)$ y $\sigma : G \to GL(n, V)$ representaciones de G sobre V. Decimos que ρ es equivalente a σ si $n = m$ y existe una matriz invertible $n \times n$ T tal que, para todo $g \in G$,*

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

Dadas las representaciones ρ, σ y τ de G sobre V, se tiene que:

1. ρ es equivalente a ρ. (Prop. Reflexiva).

2. si ρ es equivalente a σ, entonces σ es equivalente a ρ. (Prop. Simétrica).

3. si ρ es equivalente a σ y σ es equivalente a τ, entonces ρ es equivalente a τ. (Prop. Transitiva).

Esto nos indica que ser equivalentes es una relación de equivalencia.

Demostracion: Sean ρ, σ y τ representaciones de G sobre V, y sea $g \in G$. Tenemos:

1. Prop. Reflexiva:
   Sea I la matriz identidad, que ademas es una matriz cuadrada e invertible, siempre podemos poner
   $$\rho(g) = I^{-1}\rho(g)I$$
   por lo que ρ es equivalente a ρ.

2. Prop. Simétrica:
   Por ser ρ equivalente a σ, tenemos que existe una matriz cuadrada invertible T que cumple:
   $$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$
   $$T\sigma(g) = \rho(g)T$$
   $$T\sigma(g)T^{-1} = \rho(g)$$
   lo que concluye que σ es equivalente a ρ.

3. Prop. Transitiva.
   Por ser ρ equivalente a σ, tenemos que existe una matriz cuadrada invertible T que cumple:
$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$
   Del mismo modo, por ser σ equivalente a τ, tenemos que existe una matriz cuadrada invertible P que cumple:
$$\tau(g) = P^{-1}\sigma(g)P$$
   Sustituyendo tenemos que:
$$\tau(g) = P^{-1}T^{-1}\rho(g)TP$$
$$\tau(g) = (TP)^{-1}\rho(g)TP$$
   por lo que ρ es equivalente a τ.

■

2.3. Subrepresentaciones.

Antes de avanzar en este punto, vamos a tratar, de manera muy breve, algunas nociones relativas a los espacios vectoriales.

Sea V un espacio vectorial, W y W' subespacios de V. Se dice que V es *suma directa* de W y W' si todo $x \in V$ se puede escribir de manera única en la forma $x = w + w'$, $w \in W$ y $w' \in W'$; equivale a decir que $W \cap W' = 0$ y $dim(V) = dim(W) + dim(W')$; se escribe entonces $V = W \oplus W'$, y se dice que W' es *suplementario* de W en V. La aplicación p que hace corresponder a cada $x \in V$ su componente $w \in W$ se llama *proyector* de V sobre W (asociado a la descomposición $V = W \oplus W'$); la imagen de p es W, y $p(x) = x$ si $x \in W$; recíprocamente, si p es un endomorfismo de V que verifica estas propiedades, inmediatamente se prueba que V es suma directa de W y del núcleo W' de p. Se establece así una correspondencia biyectiva entre los proyectores de V sobre W y los suplementarios de W en V.

Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación, y sea W un subespacio de V. Si W es estable por la acción de G, esto es, si $gW \subset W$, $\forall g \in G$, entonces ρ define por restricción una representación $\rho' : G \to GL(W)$.

2.4. Núcleo de una representación.

Sea una representación $\rho : G \to GL(V)$. El núcleo de una representación consiste en un grupo de elementos $g \in G$ para los cuales $\rho(g)$ es la matriz identidad.

$$Ker\,\rho = \{g \in G : \rho(g) = I_n\}$$

El núcleo de ρ es un subgrupo normal de G.

Puede ocurrir que el núcleo de una representación es el propio grupo G.

Definicion 2.4.1 *Una representación $\rho : G \to GL(1, V)$ definida como:*

$$\rho(g) = 1_G$$

para todo $g \in G$, se denomina representación trivial de G.

2.5. Representaciones irreducibles.

Definicion 2.5.1 *Una representación lineal $\rho : G \to GL(V)$ se dice irreducible si $V \neq 0$ y ningún subespacio de V es estable por G, excepto, claro está, 0 y V.*

Esto equivale a decir que V no es suma directa de dos subrepresentaciones, salvo la descomposición trivial $V = 0 \oplus V$.

Toda representacion de grado 1 es evidentemente irreducible. La suma directa de representaciones irreducibles da cualquier representación.

Teorema 2.5.1 *Toda representación es suma directa de representaciones irreducibles.*

Demostracion: Sea V una representación lineal de G. Se razona por inducción sobre $dim(V)$. Si $dim(V) = 0$, el teorema es evidente, 0 es suma directa de la familia vacia de representaciones irreducibles. Si $dim(V) \geq 1$ y V es irreducible, también es cierto el teorema. En el resto de casos podemos descomponer V como suma directa de $V' \oplus V''$, con $dim(V') < dim(V)$ y $dim(V'') < dim(V)$. Por inducción, V' y V'' son suma directa de representaciones irreducibles y por tanto lo mismo le ocurre a V. ■

Sea V una representación y sea $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ una descomposición de V en suma directa de representaciones irreducibles. El numero de las W_i isomorfas a una representación irreducible dada no depende de la descomposición elegida.