

Capítulo 1

Conceptos básicos.

1.1. Grupos.

Comencemos por definir el concepto de grupo:

Definición 1.1.1 *Un grupo es un conjunto no vacío G en el que está definida una operación que toma dos elementos $a, b \in G$ y nos devuelve otro elemento $ab \in G$*

$$G \times G \rightarrow G$$

que escribiremos

$$(a, b) \mapsto ab$$

tal que:

1. $(ab)c = a(bc)$ para cada terna de elementos a, b y c de G . Se dice que la operación es asociativa.
2. Existe un elemento $u \in G$ tal que

$$ua = a = au$$

para todos los elementos a de G . A este elemento le llamaremos elemento neutro o elemento identidad.

3. Para cada elemento $a \in G$ existe $x \in G$ tal que

$$ax = u = xa$$

A este elemento le llamaremos inverso de a .

Diremos que ab es el producto de a por b .

Como ejemplos de grupos (infinitos) podemos citar los conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y \mathbb{C} con la suma usual. Otro ejemplo lo podemos tomar escogiendo un conjunto X no vacío compuesto por las aplicaciones $X \rightarrow X$ que son biyectivas, este es un grupo con la operación composición de aplicaciones.

Definición 1.1.2 *Se dice que un grupo G es abeliano si $ab = ba$ para cada par de elementos $a, b \in G$.*

Sobre los grupos abelianos es importante enunciar que todo grupo formado por dos elementos es abeliano, pues si u es el elemento neutro y $a \neq u$ es el elemento restante,

$$uu = uu$$

$$aa = aa$$

$$au = u = ua$$

Definición 1.1.3 El número de elementos de un grupo G se llama orden de G y se denota como $o(G)$. Si $o(G)$ es finito, entonces se dice que G es un grupo finito.

1.2. Subgrupos.

En este apartado se definirá el concepto de subgrupo, y como caracterizarlo, y se enunciarán dos importantes operaciones con subgrupos: la intersección de varios subgrupos y el producto de dos subgrupos.

Definición 1.2.1 Un subconjunto no vacío H de un grupo G es un subgrupo de G si, con la misma operación de G , H es un grupo.

Proposición 1.2.1 Podemos afirmar que un conjunto no vacío H es un subgrupo de G si y solo si:

1. $\forall x, y \in H \rightarrow xy \in H$
2. $1_G \in H$, siendo 1_G el elemento neutro de G
3. $\forall x \in H \rightarrow x^{-1} \in H$

La siguiente proposición puede ser muy útil para caracterizar subgrupos:

Proposición 1.2.2 Un subconjunto no vacío H es un subgrupo de G si y solo si:

$$\forall x, y \in H \rightarrow xy^{-1} \in H$$

Trivialmente se tiene que G es subgrupo de G y 1_G es también subgrupo de G . Estos subgrupos se llaman *impropios*.

Intersección de subgrupos.

Proposición 1.2.3 La intersección de una cantidad cualquiera de subgrupos de G , es otro subgrupo.

Demostración: Sea $\Lambda \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera y sea $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de subgrupos de G . Entonces,

$$\begin{aligned} x, y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda &\rightarrow x, y \in H_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \rightarrow \\ &\rightarrow xy^{-1} \in H_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \rightarrow xy^{-1} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda. \end{aligned}$$

■

En particular, dados H, K subgrupos de G , se tendrá que $H \cap K$ es subgrupo de G .

Producto de dos subgrupos.

Dados dos subconjuntos no vacíos H y K de un grupo G , el conjunto

$$HK = \{g = xu \mid x \in H, u \in K\}$$

de todos los resultados de operar un elemento de H con otro de K , se nombra como el *producto de H por K* .

Suponiendo que H y K sean subgrupos, en general HK no va a ser otro subgrupo.

Vamos a desarrollar una de las condiciones suficientes para que HK sea subgrupo, y vamos a señalar una propiedad que poseé HK en caso de ser subgrupo.

Proposición 1.2.4 *Si H y K son subgrupos de un grupo abeliano G , se cumple que HK es otro subgrupo de G .*

Demostración: Sea $g = xu$, $h = yv$, donde $x, y \in H$ y $u, v \in K$, dos elementos de HK . Entonces, aplicando las propiedades asociativa y conmutativa, tenemos

$$gh^{-1} = (xu)(yv)^{-1} = (xu)(v^{-1}y^{-1}) = (xy^{-1})(uv^{-1}) \in HK$$

porque, al tratarse de subgrupos, sabemos que

$$x, y \in H \rightarrow xy^{-1} \in H, uv \in K \rightarrow uv^{-1} \in K$$

A su vez, la relación $gh^{-1} \in HK$ implica que HK es subgrupo. ■

Proposición 1.2.5 *Supongamos dos subgrupos H y K de G tales que HK también sea subgrupo. Sea L un tercer subgrupo. Entonces,*

1. $H \cup K \subseteq HK$.
2. $H \cup K \subseteq L \rightarrow HK \subseteq L$.

Demostración:

1. Todo elemento $x \in H$ se puede escribir de la forma xe , con $e \in K$ (recordemos que e representa el elemento neutro), luego $x \in HK$. Igualmente, si $u \in K$ escribiendo $u = eu$ con $e \in H$, vemos que $u \in HK$. Así HK contiene a H y contiene a K , y, por ello,

$$H \cup K \subseteq HK$$

2. Sea L un subgrupo tal que $H \cup K \subseteq L$. Dado un elemento $g \in HK$, se tendrá $g = xu$, donde $x \in H$ y $u \in K$. Como los dos factores pertenecen a $H \cup K$, pertenecerán a L . Siendo L subgrupo, su producto también. Así queda probado que $HK \subseteq L$. ■

Esta proposición significa que si HK es subgrupo, tiene la propiedad de ser el mínimo subgrupo (para la relación de contenido) que contiene a la unión.

Subgrupo generado.

Definición 1.2.2 *Si S es un subconjunto no vacío de un grupo G , el conjunto*

$$\langle S \rangle = \{s_1^{h_1} \dots s_n^{h_n} : n \in \mathbb{N}, s_i \in S, h_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n\}$$

es un subgrupo de G que contiene a S , llamado subgrupo generado por S .

Un caso particular y muy importante es aquel en que $S = \{a\}$ para algún $a \in G$. Obviamente

$$\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

y se le llama *subgrupo generado por a* .

Definición 1.2.3 *Un subconjunto no vacío S de un grupo G se llama sistema generador de G si $G = \langle S \rangle$*

Conjunto conjugado.

Si S es un subconjunto no vacío de un grupo G y $a \in G$, se llama *conjugado de S por a* al conjunto

$$S^a = \{a^{-1}xa : x \in S\}$$

Este conjunto tiene las siguientes propiedades que pasaremos a enunciar:

1. $S \rightarrow S^a : x \mapsto a^{-1}xa$ es biyectiva.
2. $(S^a)^b = S^{ab}$ para cualesquiera $a, b \in G$.
3. $S = S^1$
4. Si S es subgrupo de G , también lo es S^a .
5. Si $S \subset T$, entonces $S^a \subset T^a$.

Si S es un subconjunto no vacío de un grupo G , se llama *normalizador de S en G* a

$$N_G(S) = \{a \in G : S^a = S\}$$

que es un subgrupo de G .

1.3. Orden de un elemento.

Sea a un elemento de un grupo G de orden g y consideremos la sucesión de potencias de a

$$1_G, a, a^2, a^3, \dots$$

todas las cuales son, por supuesto, elementos de G . Como G es finito, estos elementos no pueden ser todos distintos, debemos tener la igualdad:

$$a^k = a^l$$

en la que podemos suponer $k > l$, por ejemplo. Por consiguiente,

$$a^{k-l} = 1_G$$

lo que demuestra que en un grupo finito cada elemento tiene alguna potencia igual al elemento unidad.

Definición 1.3.1 *El menor entero positivo h , para el que a^h es igual al elemento unidad se llama orden de a .*

De modo que si h es el orden de a entonces $a^h = 1_G$, mientras que $a^x \neq 1_G$ cuando $0 < x < h$. Además, si m es múltiplo de h , es decir $m = hq$, tenemos que:

$$a^m = (a^h)^q = 1_G^q = 1_G$$

Si a es de orden h , entonces $a^m = 1_G$ si y solo si, m es múltiplo de h .

Las siguientes propiedades, referentes al orden de un elemento, son de uso frecuente:

1. El único elemento de orden 1 es el elemento unidad.
2. Los elementos a y a^{-1} tienen siempre el mismo orden.

3. Si $b = p^{-1}ap$, en donde p es un elemento arbitrario, entonces a y b son del mismo orden. Porque

$$b^2 = (p^{-1}ap)(p^{-1}ap) = p^{-1}a1_Gap = p^{-1}a^2p$$

y, en general,

$$b^k = p^{-1}a^k p$$

de modo que si $a^k = 1_G$, tenemos $b^k = p^{-1}1_G p = 1_G$, y reciprocamente.

4. El orden de cualquier potencia de a no puede superar al orden de a . Porque si $a^h = 1_G$ y $b = a^s$, entonces $b^h = a^{sh} = (a^h)^s = 1_G^s = 1_G$. Y aún mas: si a es de orden h y s primo con h , entonces a^s y a son del mismo orden.

1.4. Grupos cíclicos.

Definición 1.4.1 Se llama grupo cíclico aquel cuyos elementos pueden expresarse por las potencias de uno solo de ellos.

La forma general de un grupo cíclico G de orden c es:

$$G = \{1_G, a, a^2, \dots, a^{c-1}\}$$

en donde c es el menor entero positivo que verifica la igualdad $a^c = 1_G$. Y decimos que a genera el grupo G o que es el *elemento generador* del grupo.

El orden de un grupo cíclico es igual al del elemento generador; reciprocamente, si un grupo de orden c contiene un elemento también de orden c , entonces el grupo es cíclico. El elemento generador no está unívocamente determinado; en efecto, si e es un entero cualquiera primo con c y $0 < e < c$, entonces se puede tomar a^e por elemento generador del grupo.

Todos los grupos cíclicos del mismo orden son isomorfos como se ve haciendo que se correspondan sus elementos generadores; en efecto, existe un grupo cíclico (abstracto) y solo uno para cada orden dado.

Proposición 1.4.1 Todos los grupos cíclicos son abelianos.

Demostración: Sea $G = \langle a \rangle$ un grupo cíclico. Dados $x, y \in G$, sean $x = a^k$, $y = a^l$, para ciertos enteros k y l . Por lo tanto

$$xy = a^{k+l} = yx$$

lo que implica que G es abeliano. ■

1.5. Coclases, índice de un grupo y Teorema de Lagrange.

Definición 1.5.1 Sea H un subgrupo de un grupo G , y sea x un elemento de G . El subconjunto de G formado por los productos hx ($h \in H$) se denomina *coclase derecha* de H en G y se denota por Hx . La *coclase izquierda* de H en G , xH , se define de forma similar.

Definición 1.5.2 El número de las distintas coclases derechas de H se llama *índice* de H en G y se denota por $[G : H]$

Para cada subconjunto S de G , S^{-1} será el conjunto de los elementos inversos de S :

$$S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$$

Si S es una coclase derecha de H , entonces $S = Hx$ para algún $x \in G$. La inversa de un elemento de hx de S es $x^{-1}h^{-1}$, así que S^{-1} coincide con la coclase izquierda $x^{-1}H$. De igual forma $(yH)^{-1} = Hy^{-1}$. Así que, el número de las distintas coclases derechas de H es igual al número de las distintas coclases izquierdas de H .

Podríamos haber definido el índice usando las coclases izquierdas de igual manera.

A continuación se enunciarán las propiedades básicas de las coclases:

Sea H un subgrupo de G ,

1. Todo elemento $g \in G$ está contenido en una y solo una coclase de H . Esta coclase es Hg .
2. Dos coclases distintas de H no tienen elementos comunes.
3. El grupo G está particionado en una unión disjunta de coclases de H .
4. La función $h \rightarrow hx$ tiene una correspondencia uno-a-uno entre los elementos del conjunto H y los de la coclase Hx . Al tratarse H de un subgrupo finito cada coclase de H tiene el mismo número de elementos que H .
5. Dos elementos $x, y \in G$ están contenidos en la misma coclase de H si y solo si $xy^{-1} \in H$.

Pasemos ahora a enunciar y demostrar el Teorema de Lagrange:

Teorema 1.5.1 (Teorema de Lagrange) Sean G un grupo y H un subgrupo de G , tenemos que $o(G) = o(H) \cdot [G : H]$. En particular, el orden de H y el índice de H en G dividen al orden de G .

Demostración: Utilizando las propiedades básicas de las coclases, en concreto por 3) y 4), el conjunto G está particionado en una unión disjunta de $[G : H]$ conjuntos que contienen, cada uno, $o(H)$ elementos. Contando el número de elementos en G , obtenemos que:

$$o(G) = o(H) \cdot [G : H].$$

■

El teorema de Lagrange implica los siguientes corolarios que no demostraremos:

Corolario 1.5.1 El orden de un elemento de un grupo finito G divide a $o(G)$.

Corolario 1.5.2 Si el orden de un grupo finito G es n , entonces todo elemento $x \in G$ satisface $x^n = 1_G$.

1.6. Subgrupos normales. Grupo cociente.

1.6.1. Subgrupos normales.

Dado un grupo G y un subgrupo H de G , formaremos un nuevo grupo cuyos elementos son las clases laterales izquierdas de H en G . Estos subgrupos los denominaremos *subgrupos normales* y su definición es:

Definición 1.6.1 Sea G un grupo. Un subgrupo H de G es un subgrupo normal si

$$ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, h \in H$$

Teorema 1.6.1 Si G es un grupo abeliano y H es un subgrupo de G , entonces H es un subgrupo normal de G .

Demostracion: Como G es abeliano, $ghg^{-1} = hgg^{-1} = h \in H$ para todo $g \in G$ y todo $h \in H$, luego H es subgrupo normal de G . ■

Sea G un grupo. Sea H un subgrupo normal de G . Recordemos que, para $g \in G$, las clases laterales izquierda y derecha son, respectivamente,

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

Para un subgrupo normal estas clases son iguales pues si $h \in H$, entonces $ghg^{-1} \in H$, luego $ghg^{-1} = h_1$ para algún $h_1 \in H$, luego $gh = h_1g$. Esto muestra que $gH = Hg$.

Notar también que $gH = Hg$ significa que para cada $h \in H$ hay $h_1 \in H$ tal que $gh = gh_1$.

Lo anterior no ocurre cuando H no es subgrupo normal.

1.6.2. Grupo cociente.

Sea H un subgrupo normal de un grupo G (no usamos un símbolo especial para la operación). Denotamos por G/H el conjunto de las clases laterales izquierdas de H en G , es decir

$$G/H = \{gH : g \in G\}$$

Observar que $gH = Hg$ pues H es un subgrupo normal. Definiremos una operación en este conjunto de clases.

Teorema 1.6.2 Sea H un subgrupo normal de un grupo G . Dados $a, b \in G$ sea

$$(aH)(bH) = (ab)H$$

Esto define una operación en G/H .

Demostracion: Si $aH = cH$ y $bH = dH$, queremos probar que $(ab)H = (cd)H$. Como $a \in aH = cH$, entonces $a = ch_1$, algún $h_1 \in H$. De $b \in bH = dH$ obtenemos $b = dh_2$, algún $h_2 \in H$. Ahora $ab = ch_1dh_2$ y ya que $dH = Hd$, hay $h_3 \in H$ tal que $h_1d = dh_3$, luego $ch_1dh_2 = cdh_3h_2 = cdh_4$, donde $h_4 = h_3h_2$. Tenemos entonces que $ab = cdh_4$ y por lo tanto $(ab)H = (cdh_4)H = (cd)H$. ■

Sea H un subgrupo normal de un grupo G . El conjunto G/H es un grupo con la operación

$$(aH)(bH) = (ab)H$$

1.7. Homomorfismos de grupos.

Definicion 1.7.1 Sean G_1 y G_2 grupos, y sea $f : G_1 \rightarrow G_2$ una aplicación entre ellos. Se dice que f es un homomorfismo de grupos si

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

Un homomorfismo inyectivo recibe el nombre de monomorfismo; un homomorfismo suprayectivo recibe el nombre de epimorfismo; un homomorfismo biyectivo recibe el nombre de isomorfismo; y un isomorfismo de G en si mismo es un automorfismo.

Si existe un isomorfismo entre G_1 y G_2 se dice que ambos grupos son isomorfos.

Proposición 1.7.1 Sean G y H grupos, y sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo entre ellos. Entonces, para todo $x, y \in G$

$$\begin{aligned} f(xy^{-1}) &= f(x)f(y)^{-1} \\ f(y^{-1}x) &= f(y)^{-1}f(x) \end{aligned}$$

Demostración: Utilizando que f es un homomorfismo,

$$f(xy^{-1})f(y) = f((xy^{-1})y) = f(x)$$

y basta componer con $f(y)^{-1}$ por la derecha. La demostración de la segunda igualdad es análoga. ■

Proposición 1.7.2 Sean G y H grupos, y sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo entre ellos. Entonces,

$$\begin{aligned} 1. & f(1_G) = 1_H \\ 2. & f(g^{-1}) = f(g)^{-1}, \forall g \in G \end{aligned}$$

Demostración: Para 1) basta aplicar la proposición anterior al caso $x = y$. Para 2) basta aplicar la proposición anterior al caso $x = 1_G, y = g$. ■

Definición 1.7.2 Sean G y H grupos, y sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo entre ellos. Se llaman núcleo e imagen de f a los conjuntos:

$$\ker f = \{g \in G : f(g) = 1_H\}$$

$$\operatorname{im} f = \{h \in H : \exists g \in G : f(g) = h\}$$

Es importante indicar que el núcleo de f es un subgrupo de G , mientras que la imagen de f es un subgrupo de H .

Proposición 1.7.3 Sean G y H grupos, y $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo. Si G es abeliano, $f(G)$ es abeliano.

Demostración:

$$f(x)f(y) = f(xy) = f(yx) = f(y)f(x)$$

■

1.7.1. Teorema de Cayley.

Este teorema afirma que todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de un grupo S_n para algún natural n . Primero a cada elemento de un grupo G le asociaremos una función biyectiva.

Teorema 1.7.1 Dado un conjunto no vacío X , el conjunto S_X de todas las funciones biyectivas de X en X es un grupo con la operación \circ de composición de funciones.

La demostración es trivial usando las condiciones que debe cumplir un grupo.

Teorema 1.7.2 Dado un grupo G ,

1. Para cada $g \in G$ la función $\alpha_g : G \rightarrow G, \alpha_g(x) = gx$ es biyectiva.
2. La función inversa de α_g es α_g^{-1} .

3. Dados $a, b \in G$, $\alpha_a \circ \alpha_b = f_{ab}$.

4. El conjunto $\{\alpha_g : g \in G\}$ es un grupo de S_G con la operación composición.

Teorema 1.7.3 (Teorema de Cayley.) Si G es un grupo finito de orden n , entonces G es isomorfo a un subgrupo del grupo simétrico S_n .

Demostración: La función $\alpha : G \rightarrow S_G$, $\alpha(g) = \alpha_g$ es un homomorfismo. Si $g \in \ker \alpha$, entonces $\alpha(g)$ es la identidad de S_G , luego $\alpha_g(x) = gx = x$, todo $x \in G$, de donde $g = 1_G$. Así α es inyectiva y G es isomorfo con $\alpha(G)$, que es un subgrupo de S_G .

Ahora si G es un grupo de orden n veremos que S_G es isomorfo con S_n . Si $o(G) = n$, entonces existe una función biyectiva $\beta : G \rightarrow N_n$ y también $\beta^{-1} : N_n \rightarrow G$ es biyectiva. Dado $\sigma \in S_n$, la función $\beta^{-1} \circ \sigma \circ \beta : G \rightarrow G$ es una biyección y la función $S_n \rightarrow S_G : \sigma \mapsto \beta^{-1} \circ \sigma \circ \beta$ es un isomorfismo. ■

1.7.2. Factorización de homomorfismos.

Sean G y G' grupos arbitrarios y $\varphi : G \rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos. Sea H un subgrupo de $\ker(\varphi)$; observar que H es subgrupo normal de G porque el núcleo es normal. Sea $\pi : G \rightarrow G/H$ la proyección al cociente. Entonces existe un único homomorfismo de grupos $\bar{\varphi} : G/H \rightarrow G'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ & \searrow \pi \quad \nearrow \bar{\varphi} & \\ & G/H & \end{array}$$

Es decir, para todo $x \in G$ dicho homomorfismo cumple que $\varphi(x) = \bar{\varphi}(\pi(x))$.

Demostración: Existencia. Sea $\bar{\varphi} : G/H \rightarrow G'$ la aplicación dada por $\bar{x} \mapsto \varphi(x)$. Está bien definida porque si $\bar{x} = \bar{y}$, entonces $1 = \bar{xy}^{-1}$, con lo cual $xy^{-1} \in H \subseteq \ker(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(xy^{-1}) = 1$, y entonces $\varphi(x) = \varphi(y)$. Además, define un homomorfismo porque $\bar{\varphi}(\bar{xy}) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \bar{\varphi}(\bar{x})\bar{\varphi}(\bar{y})$. Para ver que hace conmutar el diagrama, notar que para todo $x \in G$ se cumple $\varphi(x) = \bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\pi(x))$.

Unicidad. Para la unicidad, basta observar que la manera en que fue definido el homomorfismo $\bar{\varphi}$ es la única manera de definirlo de tal manera que conmute con el diagrama. Es decir, si se tiene un homomorfismo ψ que conmuta con el diagrama, $\psi(\bar{x}) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, y entonces $\psi = \bar{\varphi}$. ■

1.7.3. Teoremas de isomorfía.

Primer teorema de isomorfía.

Teorema 1.7.4 Sean G y G' grupos arbitrarios y sea $\varphi : G \rightarrow G'$ Un homomorfismo de grupos. Entonces $G/\ker(\varphi) \simeq \text{im}(\varphi)$.

El símbolo \simeq indica que los dos elementos son isomorfos.

Demostración: Usando la factorización de homomorfismos de grupos sobre el núcleo $\ker(\varphi)$, se tiene que existe un único homomorfismo $\bar{\varphi} : G/\ker(\varphi) \rightarrow G'$ tal que $\varphi = \bar{\varphi} \cdot \pi$.

Si consideramos dicho homomorfismo $\bar{\varphi}$ restringiendo su dominio a $\text{im}(\varphi)$ tendríamos un epimorfismo, porque por definición de la imagen, para todo $y \in \text{im}(\varphi)$ existe un $x \in G$ tal que $\varphi(x) = y$, y por lo tanto $\bar{\varphi}(\bar{x}) = y$.

Además, es un monomorfismo, porque $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$. Entonces si, $\bar{\varphi}(x) = 0$ se tiene que $x \in \ker(\varphi)$, con lo cual $\bar{x} = 0$.

Así, $\bar{\varphi} : G/\ker(\varphi) \rightarrow \text{im}(\varphi)$ resulta un isomorfismo. ■

Segundo teorema de isomorfía.

Teorema 1.7.5 Sean G, H, K grupos tales que K es subgrupo de H , y este, a su vez, es subgrupo de G , con K subgrupo normal de G y H subgrupo normal de G . Entonces se tiene que $(G/H)/(H/K) \simeq G/H$.

Demostración: Para empezar, se debe verificar que las expresiones del enunciado están bien definidas. Es decir, que todos los grupos por los que se hace el cociente son normales. Por un lado K es subgrupo normal de H , pues H es un subconjunto de G , con lo que $gKg^{-1} = K$ para todo $g \in H$. Además, H/K es subgrupo normal de G/K , ya que dados $gK \in G/K$ y $hK \in H/K$ se tiene $ghg^{-1} \in H$ y por lo tanto $ghg^{-1}K \in H/K$.

Para el isomorfismo, consideramos primero la proyección al cociente $\pi_H : G \rightarrow G/H$. Su núcleo es H , y $K \subseteq H$. Por lo tanto, se puede aplicar la factorización de homomorfismos de grupos para concluir que existe un único homomorfismo $\psi : G/K \rightarrow G/H$ donde $\pi_K : G \rightarrow G/K$ es la proyección al cociente sobre K .

El homomorfismo ψ es un epimorfismo, porque $\pi_H = \psi \cdot \pi_K$ lo es. Además, $\ker(\psi) = \{xK \in G/K : \psi(xK) = 0\}$, es decir, $\ker(\psi) = \{xK \in G/K : \pi_H(x) = 0\}$. Esto a su vez equivale a afirmar que $\ker(\psi) = \{xK \in G/K : x \in H\} = H/K$.

Resumiendo, $\psi : G/K \rightarrow G/H$ es un epimorfismo tal que $\ker(\psi) = H/K$, con lo cual, por el primer teorema de isomorfismo, se concluye $(G/K)/(H/K) \simeq G/H$. ■

Tercer teorema de isomorfía.

Teorema 1.7.6 Sean G un grupo y S, T subgrupos de G . Sea S un subgrupo normal de G . Entonces se tiene que $ST/S = T/(S \cap T)$.

Demostración: Para empezar, se debe verificar que las expresiones del enunciado están bien definidas. Por un lado ST es subgrupo de G porque S es normal en G . Teniendo esto en cuenta se cumple también que S es subgrupo normal de ST , por que dado cualquier $x \in ST$, en particular $x \in G$, y por lo tanto $xSx^{-1} = S$. Por último $S \cap T$ es subgrupo normal de T . Para ello, dados $t \in T$ y $s \in S \cap T$, se debe ver que $tst^{-1} \in S \cap T$. En efecto, $tst^{-1} \in S$ porque S es normal, y está en T porque todos sus factores lo están.

Para el isomorfismo, vamos a considerar primero la aplicación $\varphi : T \rightarrow ST/S$ definida por $t \mapsto \bar{t} = 1tS$. Se tiene que φ es un homomorfismo de grupos porque $\varphi(tt') = \overline{tt'} = \varphi(t)\varphi(t')$.

Por un lado, φ es un epimorfismo. Para ver esto, considerar un elemento $stS \in ST/S$ arbitrario. Por ser S normal, se sabe que st se escribe como $t\tilde{s}$ para algún $\tilde{s} \in S$. Se tiene entonces que $stS = t\tilde{s}S = tS = \varphi(t)$.

Por otro lado, el núcleo $\ker(\varphi)$ es el conjunto $\{t \in T : tS = S\}$, es decir, $T \cap S$.

Resumiendo, $\varphi : T \rightarrow ST/S$ es un epimorfismo cuyo núcleo es $T \cap S$. Por el primer teorema de isomorfía se concluye entonces que $T/(T \cap S) \simeq ST/S$. ■