Primer Simposio de las Licenciaturas de la Divisiï¿½n de Ciencias Naturales e Ingenierï¿½a

Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa
10 años
2005 — 2015

Aplicación de la Mecánica Cuántica a las Finanzas

Ilse Beatriz Zubieta Martínez* y Juan M. Romero **
Departamento de Matemï¿½ticas Aplicadas, werlix@outlook.com* , jromero@correo.cua.uam.mx**

Resumen

Una de las bases fundamentales dede las Finanzas estï¿½ dada por la ecuaciï¿½n de Black-Scholes-Merton. Sin embargo esta ecuaciï¿½n no es vï¿½lida para diferentes casos importantes. Por ejemplo, no es vï¿½lida cuando hay arbitraje en el mercado, ni cuando las Fluctuaciones del precio de un activo subyacente dejan de tener una distribuciï¿½n del tipo Gaussiano, tampoco cuando la volatilidad es grande. Por esta razï¿½n es importante plantear modificaciones de ï¿½sta que contemplen situaciones mï¿½s realistas.

En este trabajo, usando mecï¿½nica cuï¿½ntica relativista, se plantea una ecuaciï¿½n de Black-Scholes-Merton generalizada para la cual tiene sentido estudiar el caso en que la volatilidad es grande.

Introducción

En 1973 se publicï¿½ *Theory of Rational Option Pricing*, aquï¿½ se hizo referencia por primera vez al modelo de Black Scholes Merton. ï¿½ste pretendï¿½a estimar el valor de una opciï¿½n europea. El modelo se llegï¿½ a ampliar para aplicarse a opciones que producen dividendos y se adoptï¿½ posteriormente para el mercado monetario. Aunque puede optimizar de manera eficaz el precio de estos activos, la ecuaciï¿½n colapsa en cuanto se consideran volatilidades muy altas.

En Mecï¿½nica Cuï¿½ntica se sabe que la posiciï¿½n ni la velocidad de una partï¿½cula pueden ser determinadas a tiempo t de manera exacta, sino que se puede calcular la probabilidad de que ï¿½sta estï¿½ en cierta posiciï¿½n $\vec{x}$ con cierta velocidad $\vec{x}$. Es decir, la partï¿½cula se ve como una variable aleatoria, algo que en finanzas podrï¿½amos traducir a que el precio de un activo se comporta como una partï¿½cula.

Nuestro objetivo es encontrar alternativas a las soluciones de diferentes modelos financieros (especï¿½ficamente de Black Scholes Merton) de manera que se busque minimizar el riesgo de una inversiï¿½n utilizando herramientas de la Mecï¿½nica Cuï¿½ntica. De igual manera, queremos analizar el modelo (Black Scholes Merton) para volatilidades muy grandes y proponer una soluciï¿½n que no se indetermine con ï¿½sto.

Hace algunas dï¿½cadas se mostrï¿½ que existe un mapeo que relaciona la ecuaciï¿½n libre de Schrï¿½dinger de la mecï¿½nica cuï¿½ntica con la ecuaciï¿½n de Black-Scholes-Merton. Por lo que usando herramientas de la rama se pueden estudiar fenï¿½menos Financieros a un menor costo y de manera mï¿½s precisa.

La ecuaciï¿½n de Schrï¿½dinger describe la evoluciï¿½n temporal de una partï¿½cula masiva no relativista. Es de importancia central en la teorï¿½a de la mecï¿½nica cuï¿½ntica, donde representa para las partï¿½culas microscï¿½picas un papel anï¿½logo a la segunda ley de Newton en la mecï¿½nica clï¿½sica.

En Mecï¿½nica Cuï¿½ntica, la posiciï¿½n de una partï¿½cula cuï¿½ntica es una variable aleatoria. En finanzas, el precio de un activo es una variable aleatoria. El precio de una opciï¿½n $|C>$ es directamente observable y no necesita una interpretaciï¿½n probabilï¿½stica. De ahï¿½ que, a diferencia de la condiciï¿½n $<\Psi|\Psi>=1$, requerida por las interpretaciones probabilï¿½sticas en mecï¿½nica cuï¿½ntica, el valor de $<C|C>$ es arbitrario. La ecuaciï¿½n de Schrï¿½dinger requiere una funciï¿½n de estado compleja $|\Psi(t)>$, mientras que la de la ecuaciï¿½n de Black-Scholes-Merton es una ecuaciï¿½n real diferenciable que siempre da una expresiï¿½n real-valuada para el precio de la opciï¿½n C. Se puede pensar la ecuaciï¿½n de BSM como la ecuaciï¿½n de Schrï¿½dinger para tiempo imaginario. Todos los hamiltonianos en mecï¿½nica cuï¿½ntica son hermï¿½ticos, ï¿½sto asegura que todos los eigenvalores sean reales. Otros hamiltonianos junto con BSM que determinan el precio de una opciï¿½n no son hermï¿½ticos, ï¿½sto conlleva a que sus eigenvalores son complejos. Eigenvalores complejos de hamiltonianos en finanzas conllevan a anï¿½lisis mï¿½s complicados que uno de mecï¿½nica cuï¿½ntica; en partï¿½cular, no hay un proceso bien definido aplicable a todos los hamiltonianos para escoger un conjunto de eigenfunciones que de la ecuaciï¿½n completa. Los casos especiales donde una transformaciï¿½n similar llega a un hamiltoniano hermï¿½tico equivalente da una alternativa natural para el conjunto de eigenfunciones completas.

Cabe seï¿½alar que, dentro de ï¿½sta, tambiï¿½n existe la mï¿½canica cuï¿½ntica relativista, la cual es gobernada por la ecuaciï¿½n de Klein-Gordon, que es una generalizaciï¿½n de la ecuaciï¿½n de Schrï¿½dinger. Por lo tanto, usando como mï¿½todo el mapeo que relaciona la ecuaciï¿½n de Schrï¿½dinger con la ecuaciï¿½n de Black-Scholes-Merton, construimos una generalizaciï¿½n de la misma y mostramos sus consecuencias.

Ecuaciones de Schrï¿½dinger y de Black -Scholes -Merton

Tomamos la ecuaciï¿½n de Schrï¿½dinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

Si nombramos $\bar{t}=it$, $\sigma^2=\frac{1}{m}$, $\hbar=1$ nuestra ecuaciï¿½n toma la forma:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}. \tag{3.1}$$

Aquí, σ es la volatilidad del activo suyacente. Usando esta versiï¿½n de la ecuaciï¿½n de Schrï¿½dinger, veremos que podemos obtener la ecuación de Black-Scholes. Primero consideremos las definiciones

$$\Psi=e^{\triangle}C(x,t),\quad \triangle=-[\frac{1}{\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2}-r)x+\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2}+r)^2t], \tag{3.2}$$

donde r es la tasa de interés anualizada y C es el precio de una opción. Usando a Ψ encontramos que

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=e^{\triangle}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2}+r)^2C(x,t)+\frac{\partial C(x,t)}{\partial t}\right], \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=e^{\triangle}\left[\frac{1}{4\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right)^2-\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right)^2\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]C(x,t), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=e^{\triangle}\left[-\frac{1}{\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2}-r)C(x,t)+\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right], \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=e^{\triangle}\left[\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)^2-\frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]C(x,t). \tag{3.6}$$

Ahora usaremos el cambio de variable

$$x=\log S,\qquad S=e^x.$$

Usamos S para representar el precio del activo subyacente. Si f es una función, aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}=S\frac{\partial f}{\partial S}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=S\frac{\partial f}{\partial S}+S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}. \tag{3.8}$$

Usando estos resultados en (**??**) se llega a

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=e^{\triangle}\left[\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)^2C+\frac{2r}{\sigma^2}S\frac{\partial C}{\partial S}+S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right] \tag{3.9}$$

Considerando esta última ecuación y (**??**) en la ecuación (**??**) se encuentra

$$e^{\triangle}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2}+r)^2C+\frac{\partial C}{\partial t}\right]$$
$$=-\frac{\sigma^2}{2}e^{\triangle}\left[\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)^2C+\frac{2r}{\sigma^2}S\frac{\partial C}{\partial S}+S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right]. \tag{3.10}$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{\partial C(S,t)}{\partial t}=-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2}-rS\frac{\partial C(S,t)}{\partial S}+rC, \tag{3.11}$$

la cual es la ecuación de Black-Scholes. Para opciones Europeas se tiene la solución

$$C(S,t)=SN(d_+)-Ke^{-r(T-t)}N(d_-), \tag{3.12}$$

que es la fórmula de Black-Scholes.

Caso Relativista

Se puede observar que si $m\to 0$ la ecuaciï¿½n de Schrï¿½dinger no tiene ningï¿½n sentido, mientras que si en Black Scholes σ^2 es muy grande tampoco sirve. En fï¿½sica, el caso $m\to 0$ no es estudiado en la mecï¿½nica no relativista cuï¿½ntica, pero lo es en la parte relativista. En esta teorï¿½a, la ecuaciï¿½n de Schrï¿½dinger es cambiada por la de Klein-Gordon

$$-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-m^2c^2\psi(x,t)=0$$

donde c es la velocidad de la luz.

Nï¿½tese que cuando $m\to 0$ la ecuaciï¿½n de Klein Gordon tiene sentido. De igual manera se puede demostrar que cuando $c\to\infty$ la ecuaciï¿½n de Klein Gordon se vuelve la de Schrï¿½dinger.

Ahora, usando el mapeo

$$\bar{t}=it,\qquad \bar{h}=1,\qquad m=\frac{1}{\sigma^2},\qquad x=\ln S$$

$$c^2=q,\qquad \psi(x,t)=e^{-\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)x-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right)^2t\right)}C_R(x,t)$$

la ecuaciï¿½n de Klein Gordon se vuelve:

$$\frac{1}{q}\frac{\partial C_R(S,t)}{\partial t^2}-\frac{1}{q\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right)^2\frac{\partial C_R(S,t)}{\partial t}$$
$$=-S^2\frac{\partial^2 C_R(S,t)}{\partial S^2}-\frac{2r}{\sigma^2}S\frac{\partial C_R(S,t)}{\partial S}+\left(\frac{q}{\sigma^2}-\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)\right)C_R(S,$$

ï¿½sta es una ecuaciï¿½n de Black Scholes Merton generalizada, nï¿½tese que ï¿½sta ahora tiene un nuevo parï¿½metro q. En base a esto, podemos ver que cuando

$$C_R(S,t)=e^{\pm\frac{q}{\sigma^2}t}C(S,t) \tag{4.1}$$

obtenemos la ecuaciï¿½n:

$$\pm\frac{\sigma^2}{2q}\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial t^2}+\left(1\mp\frac{1}{2q}\left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right)^2\right)\frac{\partial C(S,t)}{\partial t}$$
$$=-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2}-rS\frac{\partial C(S,t)}{\partial S}+rC(S,t)$$

Cuando $q\to\infty$ obtenemos la ecuaciï¿½n de Black Scholes:

$$\frac{\partial C(S,t)}{\partial t}=-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2}-rS\frac{\partial C(S,t)}{\partial S}+rC(S,t).$$

No tenemos una interpretación del parámero q en finanzas. Sin embargo, podemos notar que a orden cero en q la solución de la ecuación de Black-Scholes-Merton debe ser la fórmula de Black-Scholes. Como la solución a la ecuación de Black-Scholes-Merton generalizada debe ser de la forma (**??**), a primer orden se tiene que la fórmula de Black-Scholes generalizada debe ser

$$C_R(S,t)=e^{\pm\frac{q}{\sigma^2}t}\left(SN(d_+)-Ke^{-r(T-t)}N(d_-)\right). \tag{4.2}$$

Esto nos indica cuando la volatilidad de precio de un activo subyacente es alta tendremos dos tipos comportamientos. En uno el precio de la opción crecerá de manera muy rápida. Mientras en que en el otro caso el valor de la opción disminuirá rapidamente.

Cabe señalar que este tipo de comportamiento suele ocurrir en los mercados en épocas de crisis, que es cuando la volatilidad es muy alta. Por ejemplo, en 2008 antes de las crisis los precios de opciones hipotecarias era muy alto, mientras que eran muy baratas las opciones del oro, petróleo, materias primas y alimentos. Sin embargo, durante la crisis del 2008 la volatilidad fue muy alta y lo que se observó fue que las opciones sobre oro, petróleo, materias primas, alimentos y oro crecieron enormemente. Mientras que las opciones inmobilarias se convirtieron en papel sin valor. Este tipo de comportamiento no predicho por la ecuación de Black-Scholes-Merton usual.

En un trabajo futuro estudiaremos las posibles soluciones de nuestra ecuación generalizada y buscaremos aplicaciones ellas.

Conclusiones

La mecï¿½nica cuï¿½ntica y sus aportaciones han tenido un gran auge los ï¿½ltimos aï¿½os, a pesar de ser una teorï¿½a con casi cien aï¿½os de haberse propuesto. Como en todas las ciencias, siempre se buscan nuevas maneras de resolver viejos problemas. En este trabajo tratamos de hacer ver la aplicaciï¿½n en el estudio financiero; si bien, hasta ahorita solo hemos trabajado en ubicar de dï¿½nde se puede partir para la aplicaciï¿½n de ï¿½sta, esperamos seguir indagando de manera de hacer posible el uso de instrumentos cuï¿½nticos para cï¿½lculos financieros. Podemos igual ver que si, en un futuro prï¿½ximo, podemos interpretar bien nuestras nuevas propuestas y/o variables, determinaremos una manera con un costo mï¿½s bajo de calcular Black-Scholes-Merton para volatilidades muy altas.

Referencias

[1] F. Black and M. Scholes, *The pricing options and corporate liabilities,* Journal of Political Economy **81**, 637 (1973).

[2] R.C. Merton, *Theory of Rational Option Pricing,* Bell J. Econ. and Management Sci. **4**, 141 (1973).

[3] B. E. Baaquie, *Quantum Finance,* Cambridge University Press (2004).