Primer Simposio de las Licenciaturas de la División de Ciencias Naturales e Ingeniería

Aplicación de la Mecánica Cuántica a las Finanzas

Ilse Beatriz Zubieta Martínez* y Juan M. Romero **
Departamento de Matemáticas Aplicadas, werlix@outlook.com* , jromero@correo.cua.uam.mx**

Resumen

Una de las bases fundamentales de las Finanzas está dada por la ecuación de Black-Scholes-Merton. Sin embargo esta ecuación no es válida para diferentes casos importantes. Por ejemplo, no es válida cuando hay arbitraje en el mercado, ni cuando las Fluctuaciones del precio de un activo subyacente dejan de tener una distribución del tipo Gaussiano, tampoco cuando la volatilidad es grande. Por esta razón es importante plantear modificaciones de ésta que contemplen situaciones más realistas.

En este trabajo, usando mecánica cuántica relativista, se plantea una ecuación de Black-Scholes-Merton generalizada para la cual tiene sentido estudiar el caso en que la volatilidad es grande.

Introducción

En 1973 se publicó *Theory of Rational Option Pricing*, aquí se hizo referencia por primera vez al modelo de Black Scholes Merton. Éste pretendía estimar el valor de una opción europea. El modelo se llegó a ampliar para aplicarse a opciones que producen dividendos y se adoptó posteriormente para el mercado monetario. Aunque puede optimizar de manera eficaz el precio de estos activos, la ecuación colapsa en cuanto se consideran volatilidades muy altas.

En Mecánica Cuántica se sabe que la posición ni la velocidad de una partícula pueden ser determinadas a tiempo t de manera exacta, sino que se puede calcular la probabilidad de que ésta esté en cierta posición $\vec{x}$ con cierta velocidad $\dot{\vec{x}}$. Es decir, la partícula se ve como una variable aleatoria, algo que en finanzas podríamos traducir a que el precio de un activo se comporta como una partícula.

Nuestro objetivo es encontrar alternativas a las soluciones de diferentes modelos financieros (específicamente de Black Scholes Merton) de manera que se busque minimizar el riesgo de una inversión utilizando herramientas de la Mecánica Cuántica. De igual manera, queremos analizar el modelo (Black Scholes Merton) para volatilidades muy grandes y proponer una solución que no se indetermine con ésto.

Hace algunas décadas se mostró que existe un mapeo que relaciona la ecuación libre de Schrödinger de la mecánica cuántica con la ecuación de Black-Scholes-Merton. Por lo que usando herramientas de la rama se pueden estudiar fenómenos Financieros a un menor costo y de manera más precisa.

La ecuación de Schrödinger describe la evolución temporal de una partícula masiva no relativista. Es de importancia central en la teoría de la mecánica cuántica, donde representa para las partículas microscópicas un papel análogo a la segunda ley de Newton en la mecánica clásica.

En Mecánica Cuántica, la posición de una partícula cuántica es una variable aleatoria. En finanzas, el precio de un activo es una variable aleatoria. El precio de una opción $|C>$ es directamente observable y no necesita una interpretación probabilística. De ahí que, a diferencia de la condición $<\Psi|\Psi>=1$, requerida por las interpretaciones probabilísticas en mecánica cuántica, el valor de $<C|C>$ es arbitrario. La ecuación de Schrödinger requiere una función de estado compleja $|\Psi(t)>$, mientras que la de la ecuación de Black-Scholes-Merton es una ecuación real diferenciable que siempre da una expresión real-valuada para el precio de la opción C. Se puede pensar la ecuación de BSM como la ecuación de Schrödinger para tiempo imaginario. Todos los hamiltonianos en mecánica cuántica son hermíticos, ésto asegura que todos los eigenvalores sean reales. Otros hamiltonianos junto con BSM que determinan el precio de una opción no son hermíticos, ésto conlleva a que sus eigenvalores son complejos. Eigenvalores complejos de hamiltonianos en finanzas conllevan a análisis más complicados que uno de mecánica cuántica; en partícular, no hay un proceso bien definido aplicable a todos los hamiltonianos para escoger un conjunto de eigenfunciones que de la ecuación completa. Los casos especiales donde una transformación similar llega a un hamiltoniano hermítico equivalente da una alternativa natural para el conjunto de eigenfunciones completas.

Cabe señalar que, dentro de ésta, también existe la mécanica cuántica relativista, la cual es gobernada por la ecuación de Klein-Gordon, que es una generalización de la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, usando como método el mapeo que relaciona la ecuación de Schrödinger con la ecuación de Black-Scholes-Merton, construimos una generalización de la misma y mostramos sus consecuencias.

Ecuaciones de Schrödinger y de Black -Scholes -Merton

Tomamos la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{t}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

Si nombramos $\tilde{t} = it$, $\sigma^2 = \frac{1}{m}$, $\hbar = 1$ nuestra ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}. \tag{3.1}$$

Aquí, σ es la volatilidad del activo suyacente. Usando esta versión de la ecuación de Schrödinger, veremos que podemos obtener la ecuación de Black-Scholes. Primero consideremos las definiciones

$$\Psi = e^{\triangle}C(x,t), \quad \triangle = -[\frac{1}{\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} - r)x + \frac{1}{2\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} + r)^2 t], \tag{3.2}$$

donde r es la tasa de interés anualizada y C es el precio de una opción. Usando a Ψ encontramos que

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = e^{\triangle}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} + r)^2 C(x,t) + \frac{\partial C(x,t)}{\partial t}\right], \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = e^{\triangle}\left[\frac{1}{4\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2 - \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]C(x,t), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = e^{\triangle}\left[-\frac{1}{\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} - r)C(x,t) + \frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right], \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = e^{\triangle}\left[\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)^2 - \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]C(x,t). \tag{3.6}$$

Ahora usaremos el cambio de variable

$$x = \log S, \qquad S = e^x.$$

Usamos S para representar el precio del activo subyacente. Si f es una función, aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = S\frac{\partial f}{\partial S}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = S\frac{\partial f}{\partial S} + S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}. \tag{3.8}$$

Usando estos resultados en (**??**) se llega a

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = e^{\triangle}\left[\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)^2 C + \frac{2r}{\sigma^2}S\frac{\partial C}{\partial S} + S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right] \tag{3.9}$$

Considerando esta última ecuación y (**??**) en la ecuación (**??**) se encuentra

$$e^{\triangle}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} + r)^2 C + \frac{\partial C}{\partial t}\right] = -\frac{\sigma^2}{2}e^{\triangle}\left[\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)^2 C + \frac{2r}{\sigma^2}S\frac{\partial C}{\partial S} + S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right]. \tag{3.10}$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{\partial C(S,t)}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} - rS\frac{\partial C(S,t)}{\partial S} + rC, \tag{3.11}$$

la cual es la ecuación de Black-Scholes. Para opciones Europeas se tiene la solución

$$C(S,t) = SN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-), \tag{3.12}$$

que es la fórmula de Black-Scholes.

Caso Relativista

Se puede observar que si $m \to 0$ la ecuación de Schrödinger no tiene ningún sentido, mientras que si en Black Scholes σ^2 es muy grande tampoco sirve. En física, el caso $m \to 0$ no es estudiado en la mecánica no relativista cuántica, pero lo es en la parte relativista. En esta teoría, la ecuación de Schrödinger es cambiada por la de Klein-Gordon

$$-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial\bar{t}^2} + \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - m^2c^2\psi(x,t) = 0$$

donde c es la velocidad de la luz.

Nótese que cuando $m \to 0$ la ecuación de Klein Gordon tiene sentido. De igual manera se puede demostrar que cuando $c \to \infty$ la ecuación de Klein Gordon se vuelve la de Schrödinger.

Ahora, usando el mapeo

$$\bar{t} = it, \quad \bar{h} = 1, \quad m = \frac{1}{\sigma^2}, \quad x = \ln S$$

$$c^2 = q, \quad \psi(x,t) = e^{-\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)x - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2 t\right)}C_R(x,t)$$

la ecuación de Klein Gordon se vuelve:

$$\frac{1}{q}\frac{\partial C_R(S,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{q\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2\frac{\partial C_R(S,t)}{\partial t} = -S^2\frac{\partial^2 C_R(S,t)}{\partial S^2} - \frac{2r}{\sigma^2}S\frac{\partial C_R(S,t)}{\partial S} + \left(\frac{q}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\right)C_R(S,$$

Ésta es una ecuación de Black Scholes Merton generalizada, nótese que ésta ahora tiene un nuevo parámetro q. En base a esto, podemos ver que cuando

$$C_R(S,t) = e^{\pm\frac{q}{\sigma^2}t}C(S,t) \tag{4.1}$$

obtenemos la ecuación:

$$\pm\frac{\sigma^2}{2q}\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial t^2} + \left(1 \mp \frac{1}{2q}\left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2\right)\frac{\partial C(S,t)}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} - rS\frac{\partial C(S,t)}{\partial S} + rC(S,t)$$

Cuando $q \to \infty$ obtenemos la ecuación de Black Scholes:

$$\frac{\partial C(S,t)}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} - rS\frac{\partial C(S,t)}{\partial S} + rC(S,t).$$

No tenemos una interpretación del parámero q en finanzas. Sin embargo, podemos notar que a orden cero en q la solución de la ecuación de Black-Scholes-Merton debe ser la fórmula de Black-Scholes. Como la solución a la ecuación de Black-Scholes-Merton generalizada debe ser de la forma (**??**), a primer orden se tiene que la fórmula de Black-Scholes generalizada debe ser

$$C_R(S,t) = e^{\pm\frac{q}{\sigma^2}t}\left(SN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-)\right). \tag{4.2}$$

Esto nos indica cuando la volatilidad de precio de un activo subyacente es alta tendremos dos tipos comportamientos. En uno el precio de la opción crecerá de manera muy rápida. Mientras en que en el otro caso el valor de la opción disminuirá rapidamente.

Cabe señalar que este tipo de comportamiento suele ocurrir en los mercados en épocas de crisis, que es cuando la volatilidad es muy alta. Por ejemplo, en 2008 antes de las crisis los precios de opciones hipotecarias era muy alto, mientras que eran muy baratas las opciones del oro, petróleo, materias primas y alimentos. Sin embargo, durante la crisis del 2008 la volatilidad fue muy alta y lo que se observó fue que las opciones sobre oro, petróleo, materias primas, alimentos y oro crecieron enormemente. Mientras que las opciones inmobilarias se convirtieron en papel sin valor. Este tipo de comportamiento no predicho por la ecuación de Black-Scholes-Merton usual.

En un trabajo futuro estudiaremos las posibles soluciones de nuestra ecuación generalizada y buscaremos aplicaciones ellas.

Conclusiones

La mecánica cuántica y sus aportaciones han tenido un gran auge los últimos años, a pesar de ser una teoría con casi cien años de haberse propuesto. Como en todas las ciencias, siempre se buscan nuevas maneras de resolver viejos problemas. En este trabajo tratamos de hacer ver la aplicación en el estudio financiero; si bien, hasta ahorita solo hemos trabajado en ubicar de dónde se puede partir para la aplicación de ésta, esperamos seguir indagando de manera de hacer posible el uso de instrumentos cuánticos para cálculos financieros.

Podemos igual ver que si, en un futuro próximo, podemos interpretar bien nuestras nuevas propuestas y/o variables, determinaremos una manera con un costo más bajo de calcular Black-Scholes-Merton para volatilidades muy altas.

Referencias

[1] F. Black and M. Scholes, *The pricing options and corporate liabilities,* Journal of Political Economy **81**, 637 (1973).

[2] R.C. Merton, *Theory of Rational Option Pricing,* Bell J. Econ. and Management Sci. **4**, 141 (1973).

[3] B. E. Baaquie, *Quantum Finance,* Cambridge University Press (2004).