

El modelo de Potts aplicado a las neurociencias.

Ángel Cáceres Licona

División de Ciencias Naturales e Ingeniería

2019

Contenido

- ▶ El modelo de Ising
- ▶ El modelo de Potts como una generalización del modelo de Ising
- ▶ La analogía entre el cerebro y el modelo de Potts
- ▶ La aplicación a las neurociencias
- ▶ ¿Funciona el modelo?

El modelo de Ising

El modelo de Ising es uno de los pocos modelos de partículas interactuantes para el cuál se conoce una solución exacta. Es de gran utilidad ya que, aunque originalmente fue formulado para resolver problemas físicos (ferromagnetismo) tiene muchísima aplicaciones en el modelado de problemas de otras áreas como la biología, finanzas, etc.

El modelo de Ising unidimensional

En una dimensión, el Hamiltoniano del modelo de Ising puede ser escrito como

$$\mathbb{H} = -\epsilon \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (1)$$

El modelo de Ising

donde $\sigma = \pm 1$ y estos valores indican cada uno de los estados posibles: Si la partícula apunta hacia arriba o hacia abajo. Se usa también la siguiente representación matricial:

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$|\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

y se considera que la red es cíclica, es decir:

$$\sigma_N = \sigma_{N+1},$$

lo cual equivale a resolver el problema en un anillo.

El modelo de Ising unidimensional

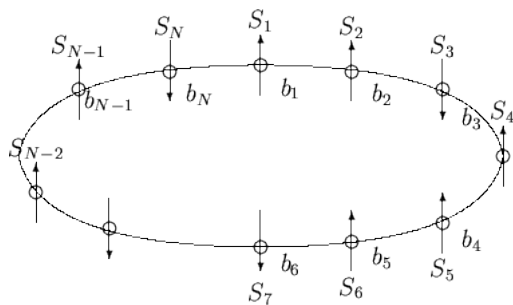


Figure: Modelo de Ising en una dimensión

El modelo de Ising bidimensional

Considere un enrejado bidimensional como el que se muestra

$$\begin{array}{ccccccc} n+1 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \vdots & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 3 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 2 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 1 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 1 & 2 & \dots & & & & & n+1 \end{array},$$

El modelo de Ising bidimensional

El Hamiltoniano se escribe como

$$\mathbb{H} = -J \sum_{i,j} (\sigma_{i,j} \sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1}) - h \sum_{i,j} \sigma_{i,j}, \quad (4)$$

donde los espines ahora son indexados por dos índices que corresponden a las coordenadas de un punto en el enrejado.

El modelo de Ising bidimensional

Una herramienta muy útil es el uso de simulaciones por computadora:

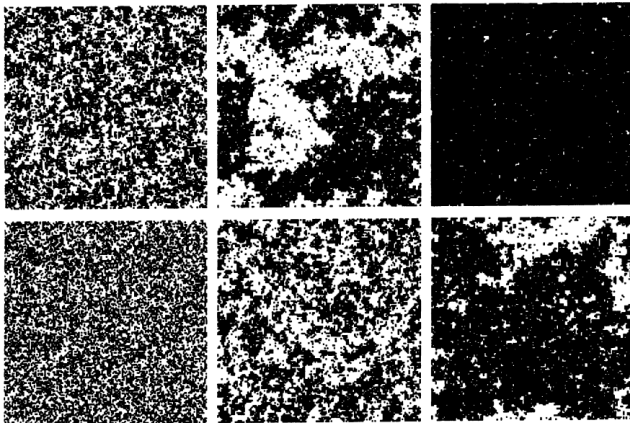


Figure: Simulación de Montecarlo para el modelo de dos dimensiones

El modelo de Potts

El modelo de Potts es una generalización del modelo de Ising.

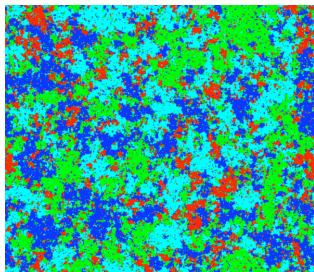


Figure: Simulación de Montecarlo para el modelo de Potts

La aplicación a las Neurociencias

En este caso se estudia al gusano *Caenorhabditis elegans*. Es un gusano que tiene 302 neuronas lo cuál hace muy sencillo su estudio. En este caso se limita al estudio de subconjuntos de 50 neuronas.



Figure: El gusano *Caenorhabditis elegans*

La aplicación a las Neurociencias

En este caso se usa una versión del modelo que tiene 3 estados: Subida, bajada y se mantiene. El Hamiltoniano de este sistema es el siguiente:

$$\mathbb{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} \delta_{\sigma_i \sigma_j} - \sum_i \sum_{r=1}^{p-1} h_r^i \delta_{\sigma_i r} \quad (5)$$

¿Funciona el modelo?

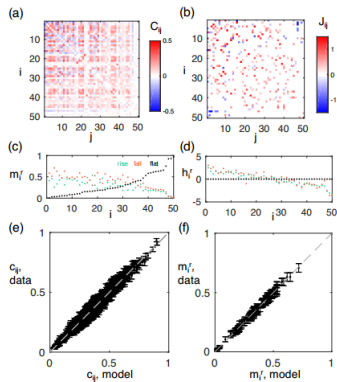


Figure: Simulaciones correspondiente al modelo para el gusano *Caenorhabditis elegans*

¿Funciona el modelo?

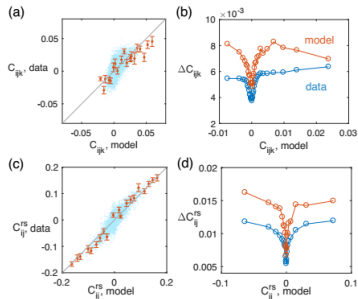


Figure: Simulaciones correspondiente al modelo para el gusano *Caenorhabditis elegans*

¿Funciona el modelo?

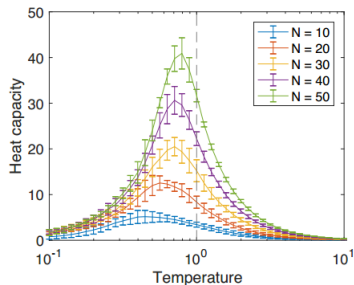


Figure: Simulaciones correspondiente al modelo para el gusano *Caenorhabditis elegans*

Referencias

- [1] L. Onsager, *Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition*, Physical Review, Series II, 65 (3–4): 117–149 (1944).
- [2] P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*, First Edition, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [1] Xiaowen Chen, Francesco Randi, Andrew M. Leifer, y William Bialek¹, *Searching for collective behavior in a small brain*, ArXiv e-prints, arXiv:1810.07623v1