Congreso internacional de Matemáticas y sus aplicaciones.

El modelo de Ising aplicado a la ciencia política

Ángel Cáceres Licona y Juan Manuel Romero Sanpedro
Departamento de Matemáticas Aplicadas, angelcaceres@outlook.com

Casa abierta al tiempo

Abstract

El modelo de Ising es un sistema de la Física Estadística el cual se ha usado para entender diversos fenómenos sociales, como conflictos bélicos y comerciales. En en este trabajo se muestra una analogía entre el modelo de Ising y la teoría de juegos. Además este modelo se usa para estudiar un tratado de libre comercio entre dos países. En este ejemplo, los países pueden escoger entre seguir políticas proteccionistas o de libre mercado.

Introducción

El modelo de Ising es un modelo físico originalmente propuesto para estudiar el comportamiento de materiales ferromagnéticos. El modelo de Ising fue propuesto por Wilhelm Lenz que lo concibió como un problema para su alumno Ernst Ising. Ising logró resolver el modelo unidimensional para su tesis de 1924 y el modelo bidimensional fue resuelto por Lars Onsager hasta 1944. En el modelo de Ising tenemos N partículas en una matriz cuadrada. Cada partícula puede estar apuntando hacia arriba o hacia abajo y a cada una de esas orientaciones se le llama ***espín de la partícula***. El sentido de este espín es determinado por la interaccón de la partícula con sus vecinas.

El modelo de Ising es uno de los pocos modelos de partículas interactuantes para el cual se conoce una solución exacta. Es de gran utilidad ya que, aunque originalmente fue formulado para resolver problemas físicos (ferromagnetismo) tiene muchísima aplicaciones en el modelado de problemas de otras áreas como la biología, finanzas, etc como se mostrará.

Modelo de Ising

En una dimensión, el Hamiltoniano del modelo de Ising, que nos da la energía del sistema, puede ser escrito como

$$\mathbb{H} = -\epsilon \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \tag{3.1}$$

donde $\sigma = \pm 1$ y estos valores indican cada uno de los estados posibles: Si la partícula apunta hacia arriba o hacia abajo. Se usa también la siguiente representación matricial:

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$|\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

y se considera que la red es cíclica, es decir:

$$\sigma_N = \sigma_{N+1},$$

lo cual equivale a resolver el problema en un anillo.
Una función muy útil para describir el sistema es la llamada función de partición. A partir de ella se pueden calcular propiedades del sistema como la energía libre, temperatura del sistema, etc. La función de partición para el modelo de Ising unidimensional es la siguiente:

$$Z_N(T,B) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_{N=\pm 1}} e^{\beta \sum_{i=1}^{N} \left[\epsilon \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{1}{2}\mu\beta(\sigma_i \sigma i+1)\right]}. \tag{3.4}$$

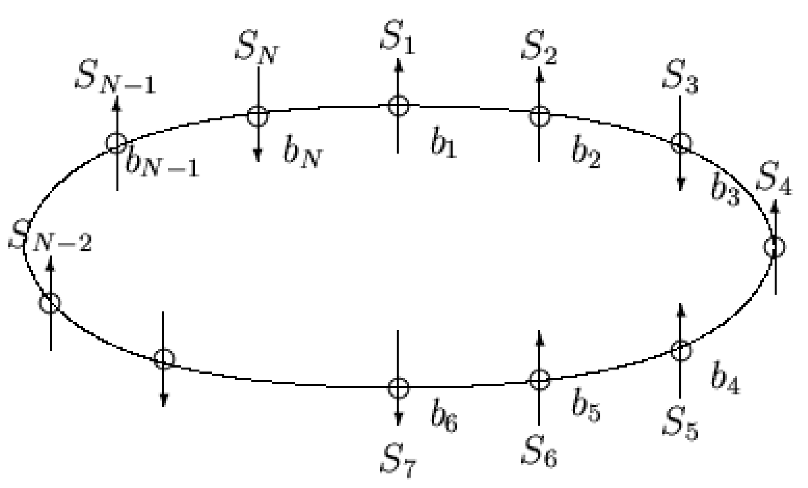

Figura 1: El modelo de ising unidimensional.

Para el caso bidimensional se tiene una matriz como la siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} n+1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & \dots & & n+1 \end{array},$$

donde en cada entrada tenemos una partícula que también puede estar apuntando hacia arriba o hacia abajo. En simulaciones por computadora se puede visualizar como una cuadrícula donde, por ejemplo, una partícula con espín +1 es representada con un cuadrado negro y las que tienen espín -1 con un cuadrado blanco. Así se pueden observar elementos de dominio como en la siguiente imagen.

Figura 2: Elementos de dominio en modelo de ising bidimensional.

Uno de los algoritmos más usado para estas simulaciones es el algoritmo Metrópolis.

Teoría de Juegos

La teoría de juegos estudia modelos matemáticos de conflicto y cooperación entre tomadores de decisiones racionales. Los problemas en teoría de juegos son descritos generalmente con N jugadores que tienen un conjunto $s_x = 1, 2, 4, ..., N$ estrategias disponibles. Cada jugador adoptará una estrategia que maximizará su ganancia u_x en el siguiente paso. En casos especiales existe un estado estacionario en el que a ningún jugador le favorece cambiar de estrategia. Matemáticamente este estado satisface la siguiente condición.

$$u_x\{s_1^*, s_2^*, ..., s_N^*\} \leq u_x\{s_1^*, s_2^*, ...s_x', ..., s_N^*\} \qquad \forall x, \forall s_x' \neq s_x * (4.1)$$

Esto se conoce como el equilibrio de Nash y cuando la desigualdad es estricta se le llama equilibrio puro de Nash.

Un problema básico en teoría de juegos es aquel en el que se tienen dos jugadores y dos estrategias: Cooperación (C) y deserción (D). La ganancia en esta situación puede ser representada usando esta matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R & S \\ T & P \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.2}$$

donde la fila (C, D) demnota las opciones de estrategia del jugador que estamos intentando determinar y la columna (C, D) las de el otro jugador. R es la recompensa obtenida cuando ambos cooperan, S es el costo que se paga por un jugador cuando éste coopera y el otro no, T es la ganancia por desertar cuando el otro jugador si coopera y P es el castigo que se paga cuando ambos jugadores desertan.

Figura 3: La teoría de juegos estudia la competencia entre agentes racionales que tienen varias opciones de estrategia disponibles.

Aplicaciones: un tratado bilateral de libre comercio

Muchas situaciones en la ciencia política pueden ser vistas como agentes jugando el mismo juego una y otra vez. Es de interés estudiar como ciertas prácticas, convenciones y cooperación se sostienen cuando los involucrados pueden tener algún inventivo en el corto plazo por desviarse de el comportamiento esperado. Por ejemplo: Los tratados de libre comercio. Muchas veces se cree que la economía global mejoraría si todos los países accedieran a el libre comercio, pero que individulmeante les iría mejor si adoptan medidas proteccionistas. Por ejemplo, se considera la siguiente representación de las políticas de comercio entre México y Estados Unidos:

MX/EU	Libre Mercado	Proteccionismo
Libre Mercado	10,10	1,12
Proteccionismo	12,1	4,4

(5.1)

En este caso, si el juego es jugado sólo una vez, el equilibrio de Nash se da cuando los dos países eligen las políticas proteccionistas.
La forma de generalizar esto es mediante el modelo de Ising. En este caso, cada uno de los espines representa una estrategia que puede seguir cada uno de los agentes. En este caso las estrategias son: libre comercio y proteccionismo. Se ve que, como es sabido, el equilibrio de Nash para N iteraciones corresponde al caso en el que ambos países escogen las poíticas proteccionistas.

Figura 4: Hay muchos ejemplos en la vida real de países que adoptan medidas proteccionistas buscando un beneficio a corto plazo.

Conclusiones

La analogía entre la teoría de juegos y el modelo de Ising ya ha sido estudiada y a estos sistemas se le llaman Juegos de Ising. Se puede resolver analíticamente ya que las soluciones exactas para el modelo de Ising de hasta dos dimensiones son conocidas. También pueden ser resueltos numéricamente mediante simulaciones por computadora usando el algoritmo Metropolis. Los resultados obtenidos usando el modelo de ising coincoden con los resultados ya conocidos para el equilibrio de Nash obtenidas mediante métodos tradicionales.

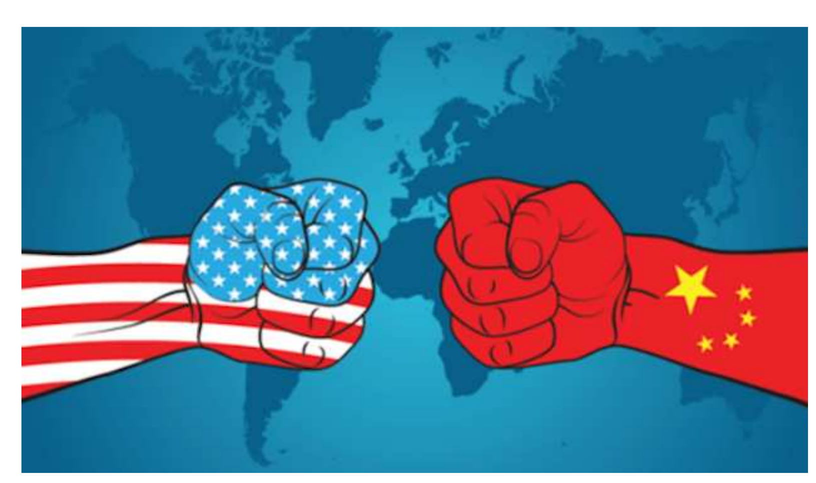

Figura 5: El modelo de ising puede ser usado para estudiar relaciones bilaterales como las de EEUU y China.

[1] S. Sarkar y C. Benjamin *Emergence of Cooperation in the thermodynamic limit,* ArXiv e-prints, arXiv:1803.10083 (2018).

[2] L. Onsager, *Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition*, Physical Review, Series II, 65 (3–4): 117–149 (1944).

[3] N. McCarty, A. Meirowitz, *Political Game Theory: An Introduction (Analytical Methods for Social Research),* First Edition, (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).

[4] P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics,* First Edition, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).