Primer Simposio de las Licenciaturas de la División de Ciencias Naturales e Ingeniería

Aplicación de la Mecánica Cuántica a las Finanzas

Juan Diego Hernández
Departamento de Matemáticas Aplicadas, werlix@outlook.com*

Abstract

Poner el abstract enviado

Introducción

Bachelier,

Mandelbrot

Ecuaciones de Schrödinger y de Black -Scholes -Merton

Tomamos la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

Si nombramos $\tilde{t} = it$, $\sigma^2 = \frac{1}{m}$, $\hbar = 1$ nuestra ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}. \tag{3.1}$$

Aquí, σ es la volatilidad del activo suyacente. Usando esta versión de la ecuación de Schrödinger, veremos que podemos obtener la ecuación de Black-Scholes. Primero consideremos las definiciones

$$\Psi = e^{\triangle}C(x,t), \quad \triangle = -[\frac{1}{\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} - r)x + \frac{1}{2\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} + r)^2 t], \tag{3.2}$$

donde r es la tasa de interés anualizada y C es el precio de una opción. Usando a Ψ encontramos que

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = e^{\triangle}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} + r)^2 C(x,t) + \frac{\partial C(x,t)}{\partial t}\right], \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = e^{\triangle}\left[\frac{1}{4\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2 - \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]C(x,t), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = e^{\triangle}\left[-\frac{1}{\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} - r)C(x,t) + \frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right], \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = e^{\triangle}\left[\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)^2 - \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]C(x,t). \tag{3.6}$$

Ahora usaremos el cambio de variable

$$x = \log S, \qquad S = e^x.$$

Usamos S para representar el precio del activo subyacente. Si f es una función, aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = S\frac{\partial f}{\partial S}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = S\frac{\partial f}{\partial S} + S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}. \tag{3.8}$$

Usando estos resultados en (3.6) se llega a

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = e^{\triangle}\left[\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)^2 C + \frac{2r}{\sigma^2}S\frac{\partial C}{\partial S} + S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right] \tag{3.9}$$

Considerando esta última ecuación y (3.3) en la ecuación (3.1) se encuentra

$$\begin{aligned} &e^{\triangle}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} + r)^2 C + \frac{\partial C}{\partial t}\right] \\ &= -\frac{\sigma^2}{2}e^{\triangle}\left[\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)^2 C + \frac{2r}{\sigma^2}S\frac{\partial C}{\partial S} + S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{\partial C(S,t)}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} - rS\frac{\partial C(S,t)}{\partial S} + rC, \tag{3.11}$$

la cual es la ecuación de Black-Scholes. Para opciones Europeas se tiene la solución

$$C(S,t) = SN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-), \tag{3.12}$$

que es la fórmula de Black-Scholes.

USDMXN

Ahora, usando el mapeo

Conclusiones

RESUMEN

Referencias

[1] F. Black and M. Scholes, *The pricing options and corporate liabilities,* Journal of Political Economy **81**, 637 (1973).

[2] R.C. Merton, *Theory of Rational Option Pricing,* Bell J. Econ. and Management Sci. **4**, 141 (1973).

[3] B. E. Baaquie, *Quantum Finance,* Cambridge University Press (2004).