

PRIMER SIMPOSIO DE LAS LICENCIATURAS DE LA DIVISI3N DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERIA

MODELACI3N DE CONSORCIOS BACTERIANOS

Ismael Velázquez Ramírez* y Jorge X. Velasco Hernández**

*Departamento de Matemáticas Aplicadas, veri@correo.cua.uam.mx , **Alumno de Matemáticas Aplicadas, alum@gmail.com

Abstract

El modelo de Ising es un sistema de la Física Estadística el cual se ha usado para entender diversos fen3menos sociales, como conflictos bélicos y comerciales. En en este trabajo se muestra una analogía entre el modelo de Ising y la teoría de juegos. Además este modelo se usa para estudiar un tratado de libre comercio entre dos países. En este ejemplo, los países pueden escoger entre seguir políticas proteccionistas o de libre mercado.

Introducci3n

Ciertos tipos de consorcios bacterianos denominados genéricamente como biopelículas tienen importancia médica e industrial debido a los efectos tanto positivos como negativos que ejercen en el entorno en que se forman. Las biopelículas pueden crecer casi donde quiera, desde tubos de agua, piedras en los ríos, cascos de barcos, dientes, etc. (ver [?] y [?]) Nuestro objetivo es describir un modelo de agregaci3n de un consorcio bacteriano cuando existe sensibilidad de qu3rum y existencia de deterioro ambiental inducido por algún bactericida. La estrategia de modelaci3n que seguiremos consiste en introducir las ecuaciones que describen el crecimiento local de las bacterias, seguidas de la modelaci3n del proceso quimiotáctico considerando el fen3meno de sensibilidad de qu3rum, que es el problema central del presente proyecto. Finalmente se modelar el deterioro ambiental representado por la acci3n de un biocida.

Modelo de Ising

El modelo de Ising es uno de los pocos modelos de partículas interactuantes para el cual se conoce una soluci3n exacta. Es de gran utilidad ya que, aunque originalmente fue formulado para resolver problemas físicos (ferromagnetismo) tiene muchísima aplicaciones en el modelado de problemas de otras áreas como la biología, finanzas, etc.

En una dimensi3n, el Hamiltoniano del modelo de Ising puede ser escrito como

$$\mathbb{H} = -\epsilon \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (3.1)$$

donde $\sigma = \pm 1$ y estos valores indican cada uno de los estados posibles: Si la partícula apunta hacia arriba o hacia abajo. Se usa también la siguiente representaci3n matricial:

Supongamos que las bacterias, además de moverse aleatoriamente en la regi3n, tienden a dirigirse a regiones donde la concentraci3n de sustrato es mas elevada, es decir se presenta taxis. Para modelar este fen3meno, al flujo que dedujimos anteriormente debe añadirsele el efecto quimiotáctico que posee una direcci3n opuesta al del flujo de difusi3n, es decir

$$J(x, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} p_2 + \mu \frac{\partial}{\partial x} p_2.$$

En este caso μ , que representa el movimiento de las bacterias hacia altas concentraciones de recurso, no es una constante pues el flujo inducido por taxis es ciertamente proporcional a la densidad local de bacterias. Es aquí precisamente donde introduciremos la sensibilidad de qu3rum. En general tomaremos $\mu = \mu(p_1, p_2)$. Así la ecuaci3n para la bacteria será

$$\frac{\partial}{\partial t} p_2 = f(p_1) p_2 - \delta p_2 + D_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(p_1, p_2) \frac{\partial p_1}{\partial x} \right)$$

En resumen tenemos

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_1 &= \Lambda - f(p_1) p_2 - e p_1 + D_1 \nabla^2 p_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} p_2 &= f(p_1) p_2 - \delta p_2 + D_2 \nabla^2 p_2 - \\ &\quad \nabla \cdot (\mu(p_1, p_2) \nabla p_1), \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

La forma específica de μ e hip3tesis básicas que nos interesan para el análisis del modelo serán especificados a continuaci3n.

Teoría de Juegos

En fen3meno llamado sensibilidad de qu3rum las bacterias responden de manera colectiva y coordinada a estímulos del medio cuando la agregaci3n poblacional, y el consecuente incremento local en densidad poblacional, alcanzan un cierto umbral. Es posible, en principio, modelar parte de este proceso usando como base las ecuaciones (??). Consideremos la funci3n

$$\mu(p_1, p_2) = \chi(p_1) \phi(p_2) p_2,$$

donde $\chi > 0$ es una funci3n que mide intensidad de atracci3n del sustrato; $\phi(0) > 0$, y existe una $\hat{p}_2 > 0$ tal que $\phi(\hat{p}_2) = 0$. La propiedad de acotamiento impuesta a la funci3n ϕ constituye una manera de simular el umbral de densidad asociado con la sensibilidad de qu3rum: cuando $p_2 = \hat{p}_2$, $\mu = 0$ y la actividad de atracci3n hacia zonas de alta concentraci3n de bacteria o recurso se suspende. Esto no es todavía suficiente para la modelaci3n de sensibilidad de qu3rum. Debido a que el operador de difusi3n permite que una bacteria responda a concentraciones de bacterias muy alejadas del lugar en que se encuentra, de hecho, responde a concentraciones en cualquier regi3n de Ω . Así supondremos que la velocidad de dispersi3n es finita lo que har que la respuesta a la densidad umbral sea de naturaleza esencialmente local.

Para incorporar este proceso primero consideremos una caminata aleatoria para la bacteria en Ω . La bacteria con densidad p_2 tiene una velocidad constante γ y una tasa constante de cambio de direcci3n κ . Si suponemos que $p_2^+(x, t)$ y $p_2^-(x, t)$ son las densidades de las bacterias, cuyo movimiento inicial fue a la derecha o la izquierda, en la posici3n x al tiempo t , respectivamente, estas dos funciones tienen la siguiente dinámica en $n = 1$ (ver [?], [?] y [?]).

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2^+}{\partial t} + \gamma \frac{\partial p_2^+}{\partial x} &= \kappa(p_2^- - p_2^+) + \frac{1}{2} Q_2(p_1, p_2^+ + p_2^-) \\ \frac{\partial p_2^-}{\partial t} - \gamma \frac{\partial p_2^-}{\partial x} &= \kappa(p_2^+ - p_2^-) + \frac{1}{2} Q_2(p_1, p_2^+ + p_2^-) \end{aligned}$$

donde las bacterias creadas escogen cualquiera de las dos direcciones posibles en R con la misma probabilidad. Resolviendo nuestro sistema en términos de p_2 y de q obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} q + q &= -\frac{\gamma^2}{2\kappa} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= Q(p_1, p_2) \end{aligned}$$

Cuando $n = 2$ las ecuaciones tendrán la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial}{\partial t} q + q &= -D \nabla^2 p_2 \\ \frac{\partial}{\partial t} p_2 + \nabla q &= f(p_1) p_2 - \delta p_2 \end{aligned}$$

Para introducir taxis en nuestro modelo, el flujo tendrá que ser $J(x, t) = -D \nabla p_2 + \mu(p_1, p_2) \nabla p_2$ en vez de s3lo $J(x, t) = -D \nabla p_2$ por los que nuestro sistema será

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_1 &= \Lambda - f(p_1) p_2 - e p_1 + D_1 \nabla^2 p_1, \\ \tau \frac{\partial}{\partial t} q + q &= -D_2 \nabla^2 p_2 + \mu(p_1, p_2) \nabla p_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} p_2 + \nabla q &= f(p_1) p_2 - \delta p_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Aplicaciones: un tratado bilateral de libre comercio

S3lo nos resta incorporar la forma en que el biocida (deterioro de hábitat) será añadido. Deterioro significará para nosotros no falta de sustrato, sino la acci3n negativa (inhibitoria de crecimiento) de una variable ambiental sobre la constituci3n de la biopelícula. Denotemos por b a la concentraci3n de algún agente biocida (un antibi3tico por ejemplo). Las modificaciones a los modelos (??) y (??) quedan entonces como sigue para el modelo de reacci3n difusi3n

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_1 &= \Lambda - \theta(b) f(p_1) p_2 - e p_1 + D_1 \nabla^2 p_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} p_2 &= \theta(b) f(p_1) p_2 - \delta p_2 + D_2 \nabla^2 p_2 - \\ &\quad \nabla \cdot (\mu(p_1, p_2) \nabla p_1), \\ \frac{\partial}{\partial t} b &= \lambda - e b + D_b \nabla^2 b. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

y para el modelo de reacci3n transporte

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_1 &= \Lambda - \theta(b) f(p_1) p_2 - e p_1 + \\ &\quad D_1 \nabla^2 p_1, \\ \tau \frac{\partial}{\partial t} q + q &= D_2 \nabla^2 p_2 - \mu(p_1, p_2) \nabla p_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} p_2 + \nabla q &= \theta(b) f(p_1) p_2 - \delta p_2, \\ \frac{\partial}{\partial t} b &= \lambda - e b + D_b \nabla^2 b. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

donde

$$\theta(b) = e^{-ab}.$$

La ecuaci3n para el biocida es simple: Éste es suministrado a una tasa λ que puede depender de la concentraci3n del biocida en el caso de que consideremos una biopelícula en un quimi3stato; se pierde a una tasa e igual a la correspondiente del sustrato y se difunde en el ambiente con coeficiente de difusi3n D_b . El biocida afecta la tasa del consumo de recurso y, por lo tanto, a la tasa de crecimiento de la bacteria a través del término $\theta(b)$. Existen varios tipos de frontera que se ocupan en biología, sin embargo las Neumann son las más indicadas para nuestro sistema pues esperamos que la dinámica de las ecuaciones sea esencialmente producto de las ecuaciones y no la inducida por las condiciones de la frontera; además supondremos que las partículas sean reflejadas al llegar a la frontera.

Conclusiones

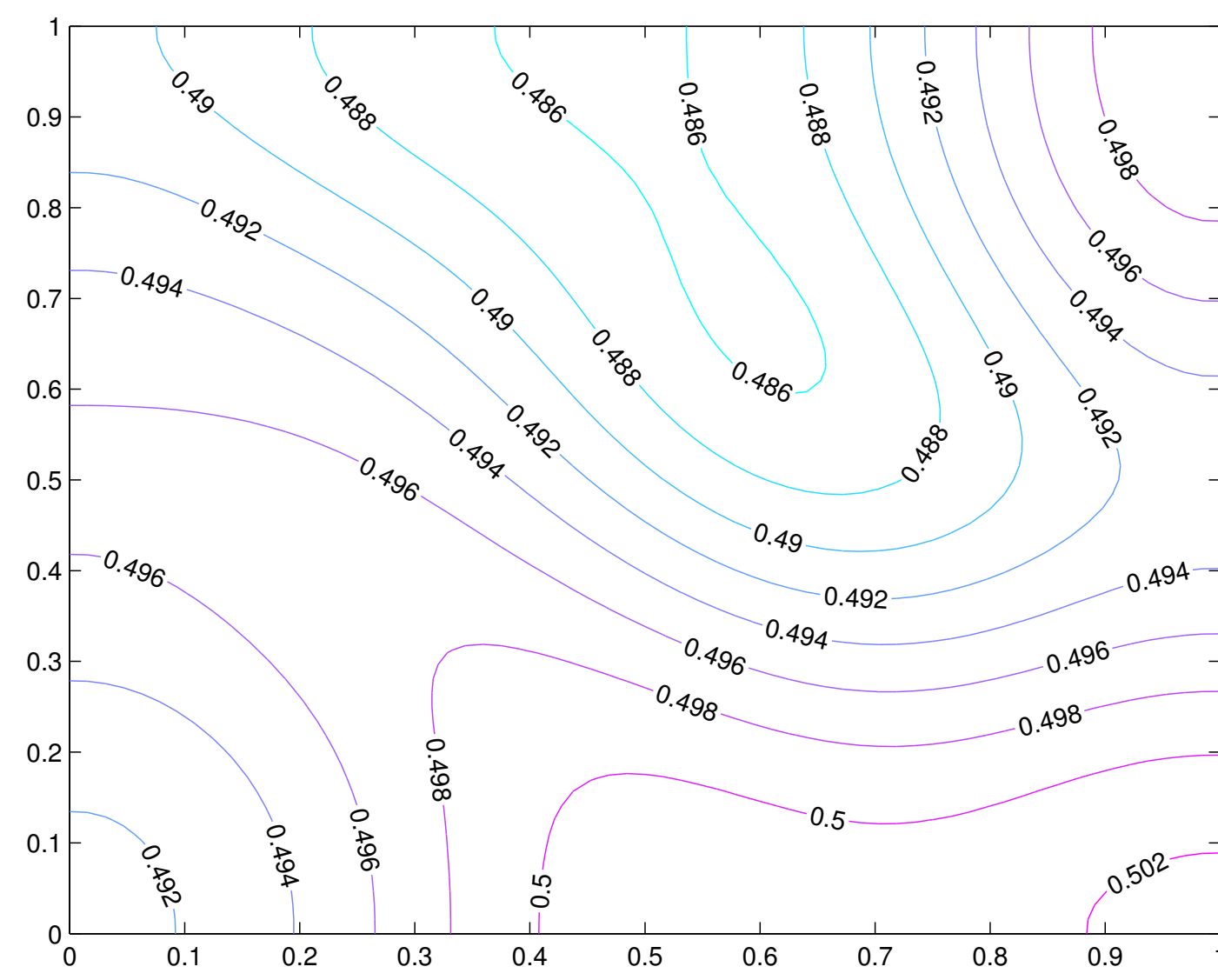


FIGURA 1: Densidad de bacterias en un cuadrado con los parámetros Lambda=300, e=.001 y delta=10

AAA