

PRIMER SIMPOSIO DE LAS LICENCIATURAS DE LA DIVISI3N DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA

MODELACI3N DE CONSORCIOS BACTERIANOS

Ilse Beatriz Zubieta MartÍnez* y Juan M. Romero **
Departamento de Matemáticas Aplicadas, werlix@outlook.com* , jromero@correo.cua.uam.mx**

Resumen

Una de las bases fundamentales de las Finanzas está dada por la ecuación de Black-Scholes-Merton. Sin embargo esta ecuación no es válida para diferentes casos importantes. Por ejemplo, no es válida cuando hay arbitraje en el mercado, ni cuando las Fluctuaciones del precio de un activo subyacente dejan de tener una distribución del tipo Gaussiano, tampoco cuando la volatilidad es grande. Por esta razón es importante plantear modificaciones de ésta que contemplen situaciones más realistas.

En este trabajo, usando mecánica cuántica relativista, se plantea una ecuación de Black-Scholes-Merton generalizada para la cual tiene sentido estudiar el caso en que la volatilidad es grande.

Introducción

En 1973 se publicó *Theory of Rational Option Pricing*, aquí se hizo referencia por primera vez al modelo de Black Scholes Merton. Éste pretendía estimar el valor de una opción europea. El modelo se llegó a ampliar para aplicarse a opciones que producen dividendos y se adoptó posteriormente para el mercado monetario. Aunque puede optimizar de manera eficaz el precio de estos activos, la ecuación colapsa en cuanto se consideran volatilidades muy altas.

En Mecánica Cuántica se sabe que la posición ni la velocidad de una partícula pueden ser determinadas a tiempo t de manera exacta, sino que se puede calcular la probabilidad de que ésta esté en cierta posición \vec{x} con cierta velocidad $\vec{\dot{x}}$. Es decir, la partícula se ve como una variable aleatoria, algo que en finanzas podríamos traducir a que el precio de un activo se comporta como una partícula

Nuestro objetivo es encontrar alternativas a las soluciones de diferentes modelos financieros (específicamente de Black Scholes Merton) de manera que se busque minimizar el riesgo de una inversión utilizando herramientas de la Mecánica Cuántica. De igual manera, queremos analizar el modelo (Black Scholes Merton) para volatilidades muy grandes y proponer una solución que no se indetermina con ésto.

Hace algunas décadas se mostró que existe un mapeo que relaciona la ecuación libre de Schrödinger de la mecánica cuántica con la ecuación de Black-Scholes-Merton. Por lo que usando herramientas de la rama se pueden estudiar fenómenos ?nancieros a un menor costo y de manera más precisa.

Cabe señalar que, dentro de ésta, también existe la mecánica cuántica relativista, la cual es gobernada por la ecuación de Klein-Gordon, que es una generalización de la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, usando como método el mapeo que relaciona la ecuación de Schrödinger con la ecuación de Black-Scholes-Merton, construimos una generalización de la misma y mostramos sus consecuencias.

Ecuaciones de Schrödinger y de Black -Scholes -Merton

Tomamos la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{t}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

Si nombramos $\bar{t} = it$, $\sigma^2 = \frac{1}{m}$, $\hbar = 1$ nuestra ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

Aquí, σ es la volatilidad del activo suyacente. Usando esta versión de la ecuación de Schrödinger, veremos que podemos obtener la ecuación de Black-Scholes. Primero consideremos las definiciones

$$\Psi = e^\Delta C(x, t), \quad \Delta = -\left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)x + \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)t\right], \quad (3.2)$$

donde r es la tasa de interés anualizada y C es el precio de una opción. Usando a Ψ encontramos que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = e^\Delta \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2 C(x, t) + \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} \right], \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = e^\Delta \left[\frac{1}{4\sigma^4} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2 - \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] C(x, t), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = e^\Delta \left[-\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) C(x, t) + \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right], \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^\Delta \left[\frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)^2 - \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] C(x, t). \quad (3.6)$$

Ahora usaremos el cambio de variable

$$x = \log S, \quad S = e^x.$$

Usamos S para representar el precio del activo subyacente. Si f es una función, aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = S \frac{\partial f}{\partial S}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = S \frac{\partial f}{\partial S} + S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}. \quad (3.8)$$

Usando estos resultados en (3.6) se llega a

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^\Delta \left[\frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)^2 C + \frac{2r}{\sigma^2} S \frac{\partial C}{\partial S} + S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] \quad (3.9)$$

Considerando esta última ecuación y (3.3) en la ecuación (3.1) se encuentra

$$e^\Delta \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2 C + \frac{\partial C}{\partial t} \right] = -\frac{\sigma^2}{2} e^\Delta \left[\frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)^2 C + \frac{2r}{\sigma^2} S \frac{\partial C}{\partial S} + S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right]. \quad (3.10)$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{\partial C(S, t)}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C(S, t)}{\partial S^2} - rS \frac{\partial C(S, t)}{\partial S} + rC, \quad (3.11)$$

la cual es la ecuación de Black-Scholes.

Sensibilidad de quórum

Se puede observar que si $m \rightarrow 0$ la ecuación de Schrödinger no tiene ningún sentido, mientras que si en Black Scholes σ^2 es muy grande tampoco sirve. En física, el caso $m \rightarrow 0$ no es estudiado en la mecánica no relativista cuántica, pero lo es en la parte relativista. En esta teoría, la ecuación de Schrödinger es cambiada por la de Klein-Gordon

$$-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - m^2 c^2 \psi(x, t) = 0$$

donde c es la velocidad de la luz.

Nótese que cuando $m \rightarrow 0$ la ecuación de Klein Gordon tiene sentido. De igual manera se puede demostrar que cuando $c \rightarrow \infty$ la ecuación de Klein Gordon se vuelve la de Schrödinger.

Ahora, usando el mapeo

$$\bar{t} = it, \quad \bar{h} = 1, \quad m = \frac{1}{\sigma^2}, \quad x = \ln S$$

$$c^2 = q, \quad \psi(x, t) = e^{-\left(\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)x - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)t\right)} C_R(x, t)$$

la ecuación de Klein Gordon se vuelve:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q} \frac{\partial C_R(S, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{q\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2 \frac{\partial C_R(S, t)}{\partial t} \\ &= -S^2 \frac{\partial^2 C_R(S, t)}{\partial S^2} - \frac{2r}{\sigma^2} S \frac{\partial C_R(S, t)}{\partial S} + \left(\frac{q}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\right) C_R(S, t). \end{aligned}$$

Ésta es una ecuación de Black Scholes Merton generalizada, nótese que ésta ahora tiene un nuevo parámetro q . En base a esto, podemos ver que cuando

$$C_R(S, t) = e^{\frac{q}{\sigma^2} t} C(S, t)$$

obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{2q} \frac{\partial^2 C(S, t)}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{1}{2q} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2\right) \frac{\partial C(S, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C(S, t)}{\partial S^2} - rS \frac{\partial C(S, t)}{\partial S} + rC(S, t) \end{aligned}$$

Cuando $q \rightarrow \infty$ obtenemos la ecuación de Black Scholes:

$$\frac{\partial C(S, t)}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C(S, t)}{\partial S^2} - rS \frac{\partial C(S, t)}{\partial S} + rC(S, t).$$

Biocida

Sólo nos resta incorporar la forma en que el biocida (deterioro de hábitat) será añadido. Deterioro significará para nosotros no falta de sustrato, sino la acción negativa (inhibitoria de crecimiento) de una variable ambiental sobre la constitución de la biopelícula. Denotemos por b a la concentración de algún agente biocida (un antibiótico por ejemplo). Las modificaciones a los modelos (??) y (??) quedan entonces como sigue para el modelo de reacción difusión

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} p_1 = \Lambda - \theta(b)f(p_1)p_2 - ep_1 + D_1 \nabla^2 p_1, \\ & \frac{\partial}{\partial t} p_2 = \theta(b)f(p_1)p_2 - \delta p_2 + D_2 \nabla^2 p_2 - \\ & \quad \nabla \cdot (\mu(p_1, p_2) \nabla p_1), \\ & \frac{\partial}{\partial t} b = \lambda - eb + D_b \nabla^2 b. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

y para el modelo de reacción transporte

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} p_1 = \Lambda - \theta(b)f(p_1)p_2 - ep_1 + \\ & \quad D_1 \nabla^2 p_1, \\ & \tau \frac{\partial}{\partial t} q + q = D_2 \nabla p_2 - \mu(p_1, p_2) \nabla p_1, \\ & \frac{\partial}{\partial t} p_2 + \nabla q = \theta(b)f(p_1)p_2 - \delta p_2, \\ & \frac{\partial}{\partial t} b = \lambda - eb + D_b \nabla^2 b. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

donde

$$\theta(b) = e^{-\alpha b}.$$

La ecuación para el biocida es simple: éste es suministrado a una tasa λ que puede depender de la concentración del biocida en el caso de que consideremos una biopelícula en un quimi3stato; se pierde a una tasa e igual a la correspondiente del sustrato y se difunde en el ambiente con coeficiente de difusión D_b . El biocida afecta la tasa del consumo de recurso y, por lo tanto, a la tasa de crecimiento de la bacteria a través del termino $\theta(b)$.

Existen varios tipos de frontera que se ocupan en biología, sin embargo las Neumann son las más indicadas para nuestro sistema pues esperamos que la dinámica de las ecuaciones sea esencialmente producto de las ecuaciones y no la inducida por las condiciones de la frontera; además supondremos que las partículas sean reflejadas al llegar a la frontera.

Simulación

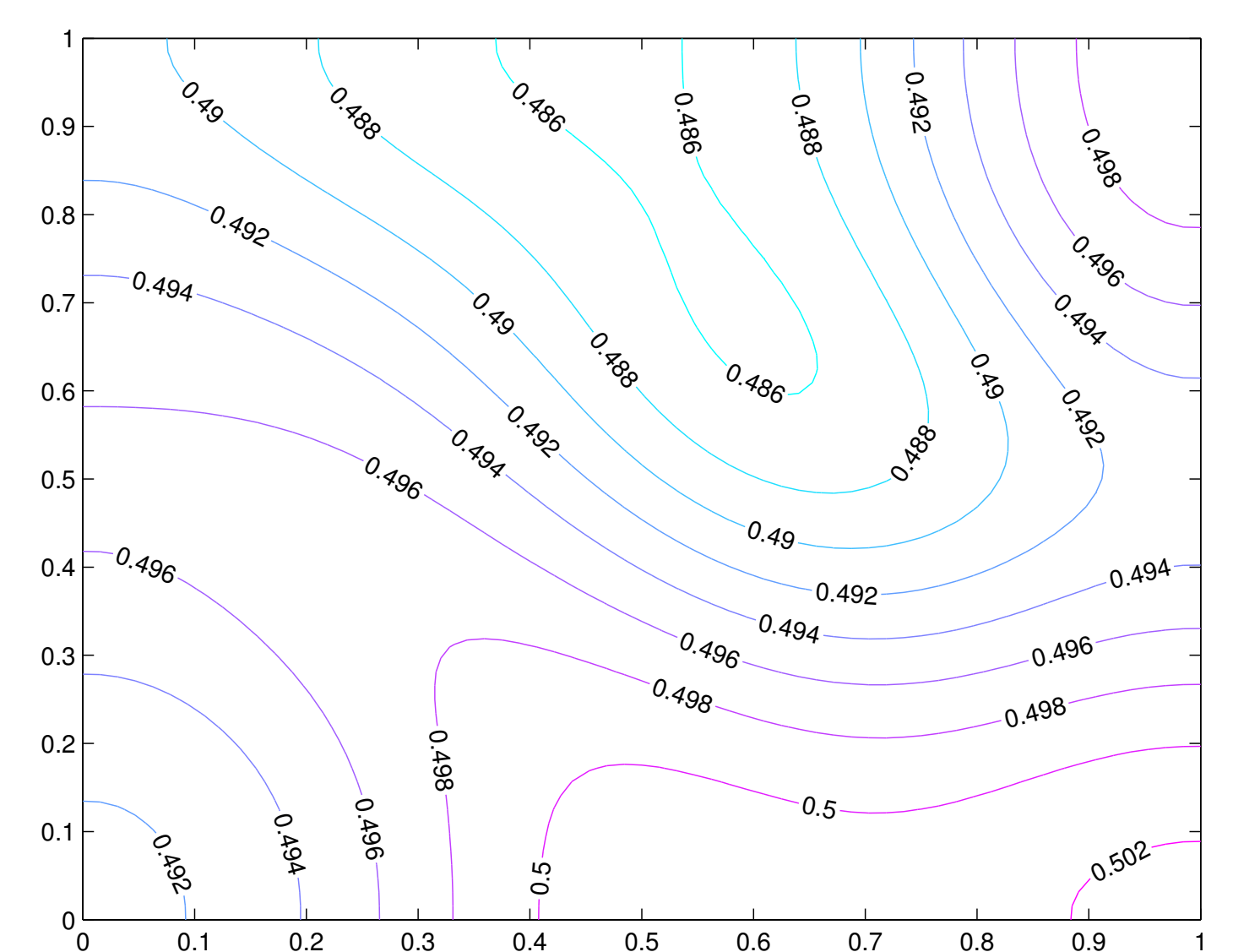


FIGURA 1: Densidad de bacterias en un cuadrado con los parámetros Lambda=300, e=.001 y delta=10