Primer Simposio de las Licenciaturas de la División de Ciencias Naturales e Ingeniería

10 años
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa
2005 — 2015

Modelación de consorcios bacterianos

Ilse Beatriz Zubieta Martínez* y Juan M. Romero **
Departamento de Matemáticas Aplicadas, werlix@outlook.com* , jromero@correo.cua.uam.mx**

Resumen

Una de las bases fundamentales de las Finanzas está dada por la ecuación de Black-Scholes-Merton. Sin embargo esta ecuación no es válida para diferentes casos importantes. Por ejemplo, no es válida cuando hay arbitraje en el mercado, ni cuando las Fluctuaciones del precio de un activo subyacente dejan de tener una distribución del tipo Gaussiano, tampoco cuando la volatilidad es grande. Por esta razón es importante plantear modificaciones de ésta que contemplen situaciones más realistas.

En este trabajo, usando mecánica cuántica relativista, se plantea una ecuación de Black-Scholes-Merton generalizada para la cual tiene sentido estudiar el caso en que la volatilidad es grande.

Introducción

En 1973 se publicó *Theory of Rational Option Pricing*, aquí se hizo referencia por primera vez al modelo de Black Scholes Merton. Éste pretendía estimar el valor de una opción europea. El modelo se llegó a ampliar para aplicarse a opciones que producen dividendos y se adoptó posteriormente para el mercado monetario. Aunque puede optimizar de manera eficaz el precio de estos activos, la ecuación colapsa en cuanto se consideran volatilidades muy altas.
En Mecánica Cuántica se sabe que la posición ni la velocidad de una partícula pueden ser determinadas a tiempo t de manera exacta, sino que se puede calcular la probabilidad de que ésta esté en cierta posición $\vec{x}$ con cierta velocidad $\dot{\vec{x}}$. Es decir, la partícula se ve como una variable aleatoria, algo que en finanzas podríamos traducir a que el precio de un activo se comporta como una partícula
Nuestro objetivo es encontrar alternativas a las soluciones de diferentes modelos financieros (específicamente de Black Scholes Merton) de manera que se busque minimizar el riesgo de una inversión utilizando herramientas de la Mecánica Cuántica. De igual manera, queremos analizar el modelo (Black Scholes Merton) para volatilidades muy grandes y proponer una solución que no se indetermine con ésto.
Hace algunas décadas se mostró que existe un mapeo que relaciona la ecuación libre de Schrödinger de la mecánica cuántica con la ecuación de Black-Scholes-Merton. Por lo que usando herramientas de la rama se pueden estudiar fenómenos ?nancieros a un menor costo y de manera más precisa.
Cabe señalar que, dentro de ésta, también existe la mécanica cuántica relativista, la cual es gobernada por la ecuación de Klein-Gordon, que es una generalización de la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, usando como método el mapeo que relaciona la ecuación de Schrödinger con la ecuación de Black-Scholes-Merton, construimos una generalización de la misma y mostramos sus consecuencias.

Modelos preliminares

La ecuación de Schrödinger describe la evolución temporal de una partícula masiva no relativista. Es de importancia central en la teoría de la mecánica cuántica, donde representa para las partículas microscópicas un papel análogo a la segunda ley de Newton en la mecánica clásica.
En Mecánica Cuántica, la posición de una partícula cuántica es una variable aleatoria. En finanzas, el precio de un activo es una variable aleatoria. El precio de una opción $|C>$ es directamente observable y no necesita una interpretación probabilística. De ahí que, a diferencia de la condición $<\Psi|\Psi>=1$, requerida por las interpretaciones probabilísticas en mecánica cuántica, el valor de $<C|C>$ es arbotrario. La ecuación de Schrödinger requiere una función de estado compleja $|\Psi(t)>$, mientras que la de la ecuación de Black-Scholes-Merton es una ecuación real diferenciable que siempre da una expresión real-valuada para el precio de la opción C. Se puede pensar la ecuación de BSM como la ecuación de Schrödinger para tiempo imaginario. Todos los hamiltonianos en mecánica cuántica son hermíticos, ésto asegura que todos los eigenvalores sean reales. Otros hamiltonianos junto con BSM que determinan el precio de una opción no son hermíticos, ésto conlleva a que sus eigenvalores son complejos. Eigenvalores complejos de hamiltonianos en finanzas conllevan a análisis más complicados que uno de mecánica cuántica; en partícular, no hay un proceso bien definido aplicable a todos los hamiltonianos para escoger un conjunto de eigenfunciones que de la ecuación completa. Los casos especiales donde una transformación similar llega a un hamiltoniano hermítico equivalente da una alternativa natural para el conjunto de eigenfunciones completas.

Sensibilidad de quórum

En fenómeno llamado sensibilidad de quórum las bacterias responden de manera colectiva y coordinada a estímulos del medio cuando la agregación poblacional, y el consecuente incremento local en densidad poblacional, alcanzan un cierto umbral. Es posible, en principio,

Biocida

Sólo nos resta incorporar la forma en que el biocida (deterioro de hábitat) será añadido. Deterioro significará para nosotros no falta de sustrato, sino la acción negativa (inhibitoria de crecimiento) de una variable ambiental sobre la constitución de la biopelícula. Denotemos por b a la concentración de algún agente biocida (un antibiótico por ejemplo). Las modificaciones a los modelos (**??**) y (4.1) quedan entonces como sigue para el modelo de reacción difusión

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}p_1 = \Lambda - \theta(b)f(p_1)p_2 - ep_1 + D_1\nabla^2 p_1,\\ &\frac{\partial}{\partial t}p_2 = \theta(b)f(p_1)p_2 - \delta p_2 + D_2\nabla^2 p_2 -\\ &\quad \nabla\cdot\left(\mu(p_1,p_2)\nabla p_1\right),\\ &\frac{\partial}{\partial t}b = \lambda - eb + D_b\nabla^2 b. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

y para el modelo de reacción transporte

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}p_1 &= \Lambda - \theta(b)f(p_1)p_2 - ep_1 +\\ &\quad D_1\nabla^2 p_1,\\ \tau\frac{\partial}{\partial t}q + q &= D_2\nabla p_2 - \mu(p_1,p_2)\nabla p_1,\\ \frac{\partial}{\partial t}p_2 + \nabla q &= \theta(b)f(p_1)p_2 - \delta p_2,\\ \frac{\partial}{\partial t}b &= \lambda - eb + D_b\nabla^2 b. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

donde

$$\theta(b) = e^{-\alpha b}.$$

La ecuación para el biocida es simple: éste es suministrado a una tasa λ que puede depender de la concentración del biocida en el caso de que consideremos una biopelícula en un quimióstato; se pierde a una tasa e igual a la correspondiente del substrato y se difunde en el ambiente con coeficiente de difusión D_b. El biocida afecta la tasa del consumo de recurso y, por lo tanto, a la tasa de crecimiento de la bacteria a través del termino $\theta(b)$.
Existen varios tipos de frontera que se ocupan en biología, sin embargo las Neumann son las más indicadas para nuestro sistema pues esperamos que la dinámica de las ecuaciones sea esencialmente producto de las ecuaciones y no la inducida por las condiciones de la frontera; además supondremos que las partículas sean reflejadas al llegar a la frontera.

Simulación

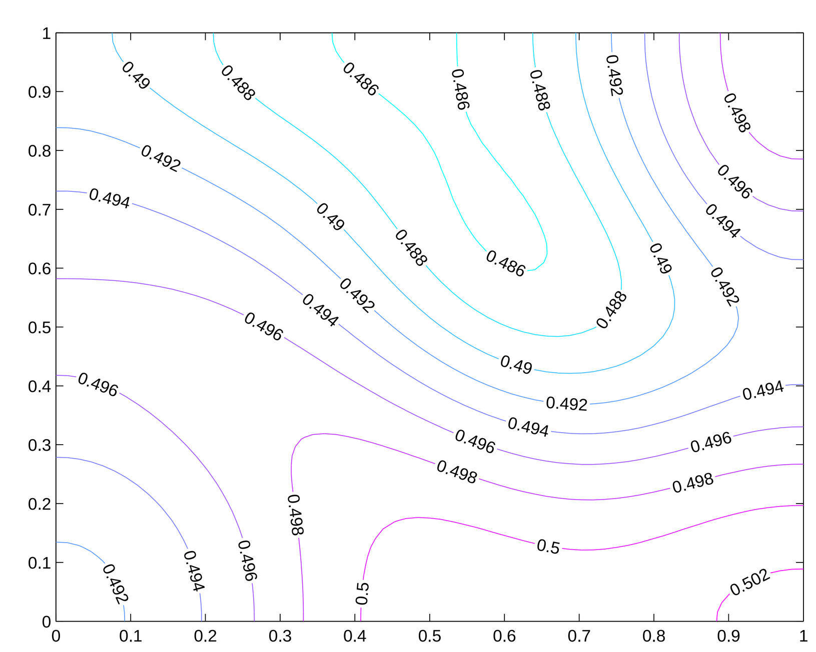

Figura 1: Densidad de bacterias en un cuadrado con los parámetros Lambda=300, e=.001 y delta=10