Congreso internacional de Matemáticas y sus aplicaciones.

El modelo de Ising aplicado a la ciencia política

Juan Manuel Romero Sanpedro* y Ángel Cáceres Licona**

*Departamento de Matemáticas Aplicadas, veri@correo.cua.uam.mx , **Alumno de Matemáticas Aplicadas, angelcaceres@outlook.com

Abstract

El modelo de Ising es un sistema de la Física Estadística el cual se ha usado para entender diversos fenómenos sociales, como conflictos bélicos y comerciales. En en este trabajo se muestra una analogía entre el modelo de Ising y la teoría de juegos. Además este modelo se usa para estudiar un tratado de libre comercio entre dos países. En este ejemplo, los países pueden escoger entre seguir políticas proteccionistas o de libre mercado.

Introducción

El modelo de Ising es un modelo físico originalmente propuesto para estudiar el comportamiento de materiales ferromagnéticos. El modelo de Ising fue propuesto por Wilhelm Lenz que lo concibió como un problema para su alumno Ernst Ising. Ising logró resolver el modelo unidimensional para su tesis de 1924 y el modelo bidimensional fue resuelto por Lars Onsager hasta 1944. En el modelo de Ising tenemos N partículas en una matriz cuadrada. Cada partícula puede esyat apuntando hacia arriba o hacia abajo y a cada una de esas orientaciones se le llama ***espín de la partícula***. El sentido de este espín es determinado por la interaccón de la partícula con sus vecinas.

El modelo de Ising es uno de los pocos modelos de partículas interactuantes para el cual se conoce una solución exacta. Es de gran utilidad ya que, aunque originalmente fue formulado para resolver problemas físicos (ferromagnetismo) tiene muchísima aplicaciones en el modelado de problemas de otras áreas como la biología, finanzas, etc como se mostrará.

Modelo de Ising

En una dimensión, el Hamiltoniano del modelo de Ising puede ser escrito como

$$\mathbb{H} = -\epsilon \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \tag{3.1}$$

donde $\sigma = \pm 1$ y estos valores indican cada uno de los estados posibles: Si la partícula apunta hacia arriba o hacia abajo. Se usa también la siguiente representación matricial:

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$|\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

y se considera que la red es cíclica, es decir:

$$\sigma_N = \sigma_{N+1},$$

lo cual equivale a resolver el problema en un anillo.
Una función muy útil para describir el sistema, y que a partir de ella se pueden calcular propiedades del sistema como la energía libre, temperatura del sistema, etc. En el caso del modelo de Ising la función de partición está dada por:

$$Z_N(T,B) = \sum_{\sigma_1=\pm1} \cdots \sum_{\sigma_{N=\pm1}} e^{\beta \sum i=1^N \left[\epsilon \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{1}{2}\mu\beta(\sigma_i \sigma i+1)\right]}. \tag{3.4}$$

La función de partición puede ser escrita en términos de la siguiente matriz, que es conocida como matriz de transferencia:

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} e^{\beta(\epsilon+\mu\beta)} & e^{-\beta\epsilon} \\ e^{-\beta\epsilon} & e^{\beta(\epsilon-\mu\beta)} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

Se puede mostrar, de manera análitica que

$$Z_N(T,B) = Tr(\bar{P}^N). \tag{3.6}$$

Un resultado muy útil para calcular propiedades del sistema. Por ejemplo, si calculamos los valores propios:

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta\epsilon}\left[\cosh(\beta\mu B) \pm \sqrt{\cosh^2(\beta\mu B) - 2e{-}2\beta\epsilon \sinh(2\beta\epsilon)}\right], \tag{3.7}$$

de ahí podemos obtener la energía libre:

$$g(T,B) = -\frac{1}{\beta}\log e^{\beta\epsilon}\cosh(\beta B) + \left[e^{2\beta\epsilon}\cosh^2(\beta B) - 2\sinh(2\beta B)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

La magnetización por spin está dada por

$$m(T,B) = -\frac{\partial g}{\partial B} = \frac{\sinh(\beta B)}{[\sin^2(\beta B) + e^{-4B\epsilon}]\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

Figura 1: Elementos de dominio en modelo de ising bidimensional.

Teoría de Juegos

La teoría de juegos estudia modelos matemáticos de conflicto y cooperación entre tomadores de decisiones racionales. Los problemas en teoría de juegos son descritos generalmente con N jugadores que tienen un conjunto $s_x = 1, 2, 4, ..., N$ estrategias disponibles. Cada jugador adoptará una estrategia que maximizará su ganancia u_x en el siguiente paso. En casos especiales existe un estado estacionario en el que a ningún jugador le favorece cambiar de estrategia. Matemáticamente este estado satisface la siguiente condición.

$$u_x\{s_1^*, s_2^*, ..., s_N^*\} \leq u_x\{s_1^*, s_2^*, ...s_x', ..., s_N^*\} \qquad \forall x, \forall s_x' \neq s_x * \tag{4.1}$$

Esto se conoce como el equilibrio de Nash y cuando la desigualdad es estricta se le llama equilibrio puro de Nash.

Un problema básico en teoría de juegos es aquel en el que se tienen dos jugadores y dos estrategias: Cooperación (C) y deserción (D). La ganancia en esta situación puede ser representada usando esta matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R & S \\ T & P \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.2}$$

donde la fila (C, D) demnota las opciones de estrategia del jugador que estamos intentando determinar y la columna (C, D) las de el otro jugador. R es la recompensa obtenida cuando ambos cooperan, S es el costo que se paga por un jugador cuando éste coopera y el otro no, T es la ganancia por desertar cuando el otro jugador si coopera y P es el castigo que se paga cuando ambos jugadores desertan. En un sistema probabilístico con N participantes el interés principal es saber cuántos participantes desertan comparado con el número de participantes. Esto está dado por:

$$m = \frac{P_C - P_D}{N}, \tag{4.3}$$

En este sistema, al convertir a os agentes en partículas, cada uno de las estrategias se convierte en un estado del espín: $\sigma = +1$ para la cooperación y $\sigma = -1$ para la deserción.
La ecuación (4.3) se convierte en la ecuación de la magnetización promedio del sistema.
Para ésto, Sarkar y Benjamin [?] desarrollaron el siguiente meétodo.
La premisa es que el equilibrio de Nash se mantiene intacto si transformamos la matriz (4.3) de esta forma:

$$U = \begin{bmatrix} R & S \\ T & P \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R-\lambda & S-\mu \\ T-\lambda & P-\mu \end{bmatrix} = U' \tag{4.4}$$

EL Hamiltoniano para este sistema está dado por:

$$\mathbb{H} = -\sum_{i=1}^{N} J\sigma_i\sigma_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}(\sigma_i\sigma_{i+1}). \tag{4.5}$$

La función de partición está dada por

$$Z = e^{N\beta J}(\cosh(\beta h) + \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}}). \tag{4.6}$$

Aplicaciones: un tratado bilateral de libre comercio

Muchas situaciones en la ciancia política pueden ser vistas como agentes jugando el mismo juego una y otra vez. Es de interés estudiar como ciertas prácticas, convenciones y cooperación se sostienen cuando los involucrados pueden tener algún inventivo en el corto plazo por desviarse de el comportamiento esperado. Por ejemplo: Los tratados de libre comercio. Muchas veces se cree que la economía global mejoraría si todos los países accedieran a el libre comercio, pero que individulmeante les iría mejor si adoptan medidas proteccionistas. Por ejemplo, se considera la siguiente representación de las políticas de comercio entre México y Estados Unidos:

MX/EU	Libre Mercado	Proteccionismo
Libre Mercado	10,10	1,12
Proteccionismo	12,1	4,4

(5.1)

En este caso, si el juego es jugado sólo una vez, el equilibrio de Nash se da cuando los dos países eligen las políticas proteccionistas. Al generalizar para un número infinito de juegos podemos ver que se repite el patrón en el que cada país elige las políticas proteccionistas.

Conclusiones

Vemos que el modelo de Ising es muy útil para resolver problemas incluso en las ciencias sociales.
AAA