uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Grado Universitario Ingeniería informática
(2024-2025)

Heurística y optimización

Primera práctica

Ángel Casado Bellisco

Jorge Francés Fonseca

31/10/2024

Índice

CONTENIDO

MODELIZACIÓN PRIMER PROBLEMA

Para modelar este problema matemáticamente, vamos a definir variables y restricciones que representen las decisiones y limitaciones de la compañía aérea en cuanto a la venta de billetes, así como el objetivo de maximizar el beneficio

Variables de decisión

X_{ij}: Número de billetes de la tarifa j en el avión i. $i \in \{1,2,3,4,5\}$ $j \in \{1,2,3\}$ $X_{ij} \in \mathbb{N}$
Siendo 1 la tarifa "Estandar", 2 la tarifa "Leisure Plus" y 3 la tarifa "Business Plus"

Parámetros

Precios de los billetes y peso del equipaje
P_j: Precio del billete de la tarifa j. $j \in \{1,2,3\}$
E_j: Peso del equipaje que permite cada tarifa j. $P_j, E_j \geq 0$

Asientos y capacidad máxima
S_i: Número de asientos disponibles en el avión i. $i \in \{1,2,3,4,5\}$
C_i: Capacidad máxima equipaje para el avión i. $S_i, C_i \geq 0$

Función objetivo

$$\boldsymbol{Max\ Z} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{5}} \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{3}} \left(\boldsymbol{P_j \cdot X_{ij}}\right)$$

Restricciones

Para cada avión, la suma de los billetes de todas las tarifas no puede superar el número de asientos disponibles:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \leq S_i,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

Para cada avión, el peso total del equipaje no puede superar la capacidad de carga del avión:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \cdot\ E_j \leq C_i,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

Para cada avión, se debe ofertar al menos un mínimo de billetes para las tarifas "Leisure Plus" y "Business plus":

$$x_{i2} \geq 20, \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$
$$x_{i3} \geq 10, \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

La compañía especifica que el número total de billetes estándar debe ser al menos el 60% del total de billetes ofertados para cada avión. Esto se traduce en la siguiente restricción para cada avión:

$$\sum_{i=1}^{5} X_{i1} \geq 0.6 \cdot \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} X_{ij}$$

MODELO COMPLETO

$$\boldsymbol{Max\ Z} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{5}}\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{3}}(\boldsymbol{P_j} \cdot \boldsymbol{X_{ij}})$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \leq S_i,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\},$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \cdot\ E_j \leq C_i,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$x_{i2} \geq 20, \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$x_{i3} \geq 10, \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_{i1} \geq 0.6 \cdot \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{N}$$

$$P_j, E_j, S_i, C_i \geq 0$$

EXPLICACIÓN SOLVER

Estructura

Lo primero que vemos es una tabla en color azul que muestra cuanto peso se puede llevar por billete y el precio de venta. Estas casillas son *C3:E6, es la información del enunciado.*

A la derecha, en las casillas H11:K15 está el total de billetes Leisure plus y Business plus por cada avión además la cantidad mínima que hay que asignar de ellos por cada avión.

Debajo, observamos en la hoja de cálculo es una tabla coloreada de color azul y gris enumeradas por LibreOffice como el conjunto de casillas *H28:K32*. Esta tabla refleja la cantidad de asientos y peso que podemos asignar a cada avión y la suma de peso y asientos que llevamos asignados.

Mas abajo en las casillas G41 y H41 se representa la venta total de billetes *estándar* de todos los aviones y el 60% de la venta del total de todos los billetes vendidos ("Estandar", "Leisure plus", "Business plus").

Esto nos servirá para cumplir con la restricción del problema **"Ademas, al tratarse de una compañia de bajo coste, el número de billetes Estandar total debe ser al menos un 60% de todos los billetes que se ofertan."**

En la casilla J41 está el porcentaje mínimo de billetes que hay que asignar estándar.

Las casillas G41 contiene la formula $E_{29} + E_{34} + E_{39} + E_{44} + E_{49}$. Es decir, la suma de billetes estándar de todos los aviones.

Las casillas H41 contiene la fórmula $\sum_{i=29}^{51} E_i \cdot J41$ donde $i \notin \{32,33,37,38,42,43,47,48\}$ es decir la suma de todas las casillas (excluyendo los espacios huecos de nuestra hoja de cálculo) que contiene en número de billetes que hemos asignado por avión multiplicado por 0.6. Por lo que la casilla H41 refleja el 60% de billetes vendidos (el 60% puede ser cambiado por la casilla J41).

Con el título de "Billete asignados" tenemos nuestras variables de decisión del problema, es decir, los billetes asignados a cada avión de todos los tipos ("Estandar", "Leisure plus", "Business plus"). Las celdas usadas para ello son las C29:E51.

A la derecha, en verde, encontramos nuestra función objetivo que consiste en la suma del número de cada tipo de billete vendido por avión, multiplicado por su precio de venta, en otras palabras, cuánto dinero hemos conseguido. La fórmula en nuestra hoja de cálculo queda tal que así:

$$\sum_{i\in\{29,34,39.44.49\}} E_i \cdot E_4 + \sum_{i\in\{30,35,40.45.50\}} E_i \cdot E_5 + \sum_{i\in\{31,36,41,46,51\}} E_{(30+i\cdot 5)} \cdot E_6$$

Cada sumatorio refleja el precio de cada billete de "Estandar", "Leisure plus" y "Business plus" por la cantidad de billetes vendidos. En este caso E, es la columna de nuestra hoja de cálculo y su subíndice la fila.

E_4, E_5, E_6 son los precios de los billetes respectivamente de cada clase;

$E_i,\ i \in [29,51] \setminus \{32,33,37,38,42,43,47,48\}$ son la cantidad de billetes por tipo vendidos de cada clase.

Restricciones solver

Al abrir la herramienta de solver (**Herramientas > Solver**), encontramos lo siguiente:

Como podemos ver la función objetivo está en la casilla C19:

$$\boldsymbol{Max\ z} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{P_j} \cdot \boldsymbol{X_{ij}})$$

y las celdas que cambiamos son las variables decisión, es decir, las casillas E29:E51.

$$X_{ij}, \forall i \in \{1,2,3,4,5\}, \forall j \in \{1,2,3\}$$

Siendo j la clase a la que pertenece el billete.

La restricción \$G\$41 ≥ \$H\$41 recordamos que nos ayuda para cumplir con que el 60% de las entradas vendidas sean "Estandar".

$$\sum_{i=1}^{5} X_{i1} \geq 0.6 \cdot \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}$$

La restricción \$H\$28:\$I\$32≤ \$J\$28:\$K\$32 expresa que el número de billetes vendidos y peso sean menor a los que nos permite el avión.

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \leq S_i,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \cdot\ E_j \leq C_i,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

\$H\$11:\$I\$15≥ \$J\$11:\$K\$15 expresa la restricción en el que se pide un mínimo de venta de billetes "Leisure plus" y "Business plus".

$$x_{i2} \geq 20, \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$x_{i3} \geq 10, \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

PRUEBAS DEL SOLVER

Solución inicial

	Estandar	Leisure plus	Business plus
AV1	38	21	31
AV2	19	68	33
AV3	160	23	17
AV4	100	20	30
AV5	133	21	36
	450		

	Billetes totales	Peso total
AV1	90	1698
AV2	120	2699
AV3	200	1300
AV4	150	1700
AV5	190	1993

Función Objetivo = 26190

Como podemos observar ninguno de los aviones supera el límite de billetes vendidos ni el peso por avión además los billetes "Estandar" superan el 60% del total (450). También cumplimos con el mínimo de billetes "Leisure plus" y "Business plus".

Relajación de restricciones

Vamos a eliminar la restricción que exige 20 y 10 billetes por avión de "Leisure plus" y "Business plus".

	Estandar	Leisure plus	Business plus
AV1	10	60	12
AV2	40	27	53
AV3	172	0	28
AV4	80	59	11
AV5	140	7	43
	450		

	Billetes totales	Peso total
AV1	90	1698
AV2	120	2700
AV3	200	1292
AV4	150	1700
AV5	190	2000

Función Objetivo = 26190

Como podemos ver la función objetivo da igual debido a:
• Distribución **similar de beneficios**: Aunque el número de billetes por tarifa varía entre las dos soluciones, el total de billetes y la capacidad de los aviones siguen siendo prácticamente iguales. Esto significa que la optimización logra la misma cantidad de ingresos (Función Objetivo=26190) porque no se afecta significativamente la combinación de tarifas que maximiza el beneficio.

• Límites **de capacidad**: Los aviones están siendo usados casi al máximo de su capacidad, tanto en términos de asientos como de peso. Esto limita cuánta redistribución es posible sin cambiar el número total de billetes vendidos por avión.

• Equilibrio **de tarifas**: El hecho de que los billetes "Estándar" siguen siendo más del 60% (como exige la restricción global) mantiene un equilibrio similar en ambas soluciones, y dado que los billetes estándar son los de menor precio, la variación de ingresos por otros tipos de billetes no compensa lo suficiente para cambiar el valor total.

Vamos a quitar además de la restricción de exigir 20 y 10 billetes por avión de "Leisure plus" y "Business plus", vamos a quitar la restricción que exige el 60% de los billetes sea "Estandar".

	Estandar	Leisure plus	Business plus
AV1	6	84	0
AV2	0	105	15
AV3	143	57	0
AV4	69	81	0
AV5	95	95	0

	Billetes totales	Peso total
AV1	90	1686
AV2	120	2700
AV3	200	1283
AV4	150	1689
AV5	190	1995

Función Objetivo = 27660

Como podemos ver, la venta de los billetes de la tarifa "Business plus" no sale rentable ya que el equipaje ocupa mucho para la cantidad de dinero que recibimos. Como no tenemos restricción de venta mínima el solver escoge las de "Estandar" y "Leisure plus" por esa razón.

Cambio condiciones

Vamos a cambiar por ejemplo el equipaje permitido de "Estandar", ahora va a pasar de 1kg a 5kg.

	Estandar	Leisure plus	Business plus
AV1	20	60	10
AV2	44	28	48
AV3	100	20	10
AV4	108	26	16
AV5	136	42	12

	Billetes totales	Peso total
AV1	90	1700
AV2	120	2700
AV3	130	1300
AV4	150	1700
AV5	190	2000

Función Objetivo = 23000

Como era previsible hemos sacado menos dinero ya que limita la capacidad de la "Estandar".

MODELIZACIÓN SEGUNDO PROBLEMA

Para modelar este problema matemáticamente, vamos a definir variables y restricciones que representan las decisiones y limitaciones de la compañía aérea en cuanto a la asignación de pistas para el aterrizaje de los aviones, así como el objetivo de maximizar el beneficio. En la modelización reutilizaremos los parámetros, variables y restricciones que ya definimos en el primer problema.

Variables de decisión parte 2

Y_{ikt}: Indica si el avión i está asignado a la pista k en el slot de tiempo t. $y_{ikt} \in \{0,1\}$

- $Y_{ikt} = 1$ si el avión i usa la pista k en el slot t. $i \in \{1,2,3,4,5\}$
- $Y_{ikt} = 0$ si el avión i no usa la pista k en el slot t. $k \in \{1,2,3,4\}$ $t \in \{1,2,3,4,5,6\}$

Utilizaremos una variable auxiliar:
R_i: Retraso en minutos para el avión i. $i \in \{1,2,3,4,5\}$ $R_i \geq 0$

Parámetros parte 2

Hora de llegada y hora límite
H_i: Hora de llegada del avión i. $i \in \{1,2,3,4,5\}$
L_i: Hora límite de llegada del avión i.

Coste del retraso
CR_i: Coste de retraso de cada avión i. $i \in \{1,2,3,4,5\}$ $CR_i \geq 0$

Inicio del slot de tiempo $k \in \{1,2,3,4\}$
T_{kt}: La hora de inicio del slot de tempo t en cada pista k. $t \in \{1,2,3,4,5,6\}$ $T_{kt} \geq 0$

Pista disponible
D_{kt}: Indica si el slot t en la pista k está disponible $D_{kt} \in \{0,1\}$

- $D_{kt} = 1$ si el slot t en la pista k está disponible $k \in \{1,2,3,4\}$
- $D_{kt} = 0$ si el slot t en la pista k no está disponible $t \in \{1,2,3,4,5,6\}$

Función objetivo

$$\boldsymbol{Max\ z} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{5}} \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{3}} (\boldsymbol{P_j \cdot X_{ij}}) - \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{5}} (\boldsymbol{R_i \cdot CR_i})$$

Restricciones parte 2

Todos los aviones deben tener asignado un slot de tiempo para efectuar el aterrizaje:

$$\sum_{k=1}^{4} \sum_{t=1}^{6} y_{ikt} = 1,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

Un slot de tiempo puede estar asignado como máximo a un avión:

$$\sum_{i=1}^{5} y_{ikt} \leq 1,\ \forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall t \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

El slot que se asigna a un avión debe ser un slot libre:

$$y_{ikt} \leq D_{kt},\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}, \forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall t \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

El inicio del slot de aterrizaje debe ser igual o posterior a la hora de llegada del avión:

$$T_{kt} \cdot y_{ikt} \geq H_i \cdot y_{ikt},\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}, \forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall t \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

El inicio del slot de aterrizaje debe ser igual o anterior a la hora límite de aterrizaje del avión:

$$T_{kt} \cdot y_{ikt} \leq L_i \cdot y_{ikt},\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}, \forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall t \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

Por cuestiones de seguridad, no se pueden asignar dos slots consecutivos en la misma pista:

$$y_{ikt} + y_{i_2 k(t+1)} \leq 1,\ \forall i, i_2 \in 1,2,3,4,5, \forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall t \in \{1,2,3,4,5,6\}:\ i \neq i_2 \wedge t < 6$$

Calculamos el retraso de cada avión:

$$R_i = \sum_{k=1}^{4} \sum_{t=1}^{6} (T_{kt} - H_i) \cdot y_{ikt},\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

MODELO COMPLETO

$$\boldsymbol{MaxZ} = \sum_{i=1}^{5}\left(\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{Clase\ 1}} \cdot \boldsymbol{x}_i^{\boldsymbol{Clase\ 1}} + \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{Clase\ 2}} \cdot \boldsymbol{x}_i^{\boldsymbol{Clase\ 2}} + \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{Clase\ 3}} \cdot \boldsymbol{x}_i^{\boldsymbol{Clase\ 3}}\right) - \sum_{i=1}^{5}(\boldsymbol{R}_i \cdot \boldsymbol{CR}_i)$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \leq S_i,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \cdot E_j \leq C_i,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$x_{i2} \geq 20,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$x_{i3} \geq 10,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_{i1} \geq 0.6 \cdot \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}$$

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{t=1}^{6} y_{ikt} = 1,\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_{ikt} \leq 1,\ \forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall t \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$y_{ikt} \leq D_{kt},\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}, \forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall t \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$T_{kt} \cdot y_{ikt} \geq H_i \cdot y_{ikt},\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}, \forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall t \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$T_{kt} \cdot y_{ikt} \leq L_i \cdot y_{ikt},\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}, \forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall t \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$y_{ikt} + y_{i_2 k(t+1)} \leq 1,\ \forall i, i_2 \in \{1,2,3,4,5\}, \forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall t \in \{1,2,3,4,5,6\}:\ i \neq i_2 \wedge t < 6$$

$$R_i = \sum_{k=1}^{4}\sum_{t=1}^{6} (T_{kt} - H_i) \cdot y_{ikt},\ \ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{N}$$

$$y_{ikt}, D_{kt} \in \{0,1\}$$

$$P_j, E_j, S_i, C_i, R_i, CR_i, T_{kt} \geq 0$$

ACLARACIONES GLPK

Para calcular las horas sencillamente hemos hecho una conversión a minutos partiendo desde 0, que pasa a ser las 9:00. Cuando no son horas punta, aplicaremos la siguiente conversión: las 9:15 pasan a ser 15, puesto que $0 + 15 = 15$. Si tenemos una hora anterior a las 9:00 restaremos: las 8:55 pasan a ser -5, puesto que $0 - 5 = -5$.

A la hora de poner el mínimo de billetes “Leisure” y “Business” hemos usado 2 parámetros para que sea más visual a la hora de leer el código.

Para calcular los slots consecutivos, hemos definido un parámetro para saber cuántos slots tiene nuestro problema.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Resultados obtenidos

Después de calcular la función objetivo, obtenemos un total de 21690. Que será el beneficio total que obtengan, esto se debe a la resta del beneficio que obtuvieron vendiendo billetes (26190 €) y el coste del retraso de los aviones que tuvieron que abonar (4500€). En la verificación de restricciones veremos los resultados que hemos obtenido detalladamente.

Verificación de Restricciones

Restricción 1: Máximo número de billetes igual al número de asientos

Para cada avión, el número total de billetes ofertados coincide con el número de asientos disponibles. Así, la solución cumple esta restricción:

- **AV1**: 90 asientos, 90 billetes vendidos.
- **AV2**: 120 asientos, 120 billetes vendidos.
- **AV3**: 200 asientos, 200 billetes vendidos.
- **AV4**: 150 asientos, 150 billetes vendidos.
- **AV5**: 190 asientos, 190 billetes vendidos.

Restricción 2: Peso total del equipaje no debe exceder la capacidad de cada avión

Cada avión tiene un peso máximo de carga que debe respetarse. Evaluemos los pesos obtenidos frente a la capacidad de cada avión:

- **AV1**: Capacidad de 1700 kg, peso total calculado es de 1698 kg.
- **AV2**: Capacidad de 2700 kg, peso total calculado es de 2699 kg.
- **AV3**: Capacidad de 1300 kg, peso total calculado es de 1300 kg.
- **AV4**: Capacidad de 1700 kg, peso total calculado es de 1700 kg.
- **AV5**: Capacidad de 2000 kg, peso total calculado es de 1993 kg.

Cada avión cumple con la restricción de peso máximo, estando los valores calculados en el límite o apenas por debajo de la capacidad máxima.

Restricción 3: Mínimo de 20 billetes para "Leisure Plus" y 10 para "Business Plus"

La solución asegura que cada avión cumpla con los requisitos mínimos para estas tarifas:

- **AV1**: 21 billetes "Leisure Plus" y 31 billetes "Business Plus".
- **AV2**: 68 billetes "Leisure Plus" y 33 billetes "Business Plus".
- **AV3**: 23 billetes "Leisure Plus" y 17 billetes "Business Plus".
- **AV4**: 20 billetes "Leisure Plus" y 30 billetes "Business Plus".
- **AV5**: 21 billetes "Leisure Plus" y 36 billetes "Business Plus".

Restricción 4: Mínimo de un 60% de billetes de tarifa "Estandar" en cada avión

El total de billetes de estándar es de $38 + 19 + 160 + 100 + 133 = 450$
$(90 + 120 + 200 + 150 + 190) * 0.6 = 450$, es decir, el número de billetes vendidos estándar es del 60%, por lo que cumple la restricción.

Restricción 5: Restricción de Asignación de Slots de Aterrizaje

Cada avión debe tener asignado un slot de tiempo para aterrizar en una de las pistas:

Comprobamos que para cada avión i, existe exactamente un slot asignado en alguna pista k durante un tiempo t en el modelo. Esta asignación se cumple para todos los aviones considerados en el modelo.

Restricción 6: Restricción de Asignación Única de un Slot de Tiempo a un Solo Avión

Cada slot de tiempo en cada pista sólo pueda estar asignado a un avión a la vez. Así se evita que dos aviones intenten aterrizar en el mismo slot de tiempo en la misma pista:

Comprobamos que la suma de y_{ikt} para cada k y t no sea mayor que 1. Si alguna suma es mayor que 1, significa que más de un avión tiene asignado el mismo slot en esa pista.

- **AV1:** asignado a la pista P3 en el slot de tiempo 2
- **AV2:** asignado a la pista P4 en el slot de tiempo 1
- **AV3:** asignado a la pista P2 en el slot de tiempo 4
- **AV4:** asignado a la pista P4 en el slot de tiempo 5
- **AV5:** asignado a la pista P1 en el slot de tiempo 6

Restricción 7: Restricción de Disponibilidad de Slots

Un slot de tiempo solo puede asignarse a un avión si el slot está libre, evitando conflictos con el uso de slots:

Para cada slot t en la pista k, verificamos que el valor asignado de y_{ikt} esté de acuerdo con D_{kt}, es decir, que el slot esté disponible cuando un avión necesita aterrizar.

- $\boldsymbol{D_{kt} = 1}$ en la pista P3 en el slot de tiempo 2
- $\boldsymbol{D_{kt} = 1}$ en la pista P4 en el slot de tiempo 1
- $\boldsymbol{D_{kt} = 1}$ en la pista P2 en el slot de tiempo 4
- $\boldsymbol{D_{kt} = 1}$ en la pista P4 en el slot de tiempo 5
- $\boldsymbol{D_{kt} = 1}$ en la pista P1 en el slot de tiempo 6

Restricción 8: Restricción de Inicio de Slot

El inicio del slot asignado debe coincidir con la hora de llegada o ser posterior a esta para cada avión. Comprobamos que el slot de aterrizaje asignado para cada avión i cumpla $T_{kt} \geq H_i$.

- **AV1:** 9:10 hora programada de llegada y llega a las 9:15.
- **AV2:** 8:55 hora programada de llegada y llega a las 9:00.
- **AV3:** 9:40 hora programada de llegada y llega a las 9:45.
- **AV4:** 9:55 hora programada de llegada y llega a las 10:00.
- **AV5:** 10:10 hora programada de llegada y llega a las 10:15.

Restricción 9: Restricción de Límite de Tiempo de Aterrizaje

El slot asignado para el aterrizaje debe comenzar antes del límite de tiempo establecido para cada avión:

Para cada avión i, verificamos que el slot asignado cumpla $T_{kt} \leq L_i$. Esta condición evita que el avión aterrice fuera del tiempo permitido.

- **AV1:** 10:15 hora límite de llegada y llega a las 9:15.
- **AV2:** 9:30 hora límite de llegada y llega a las 9:00.
- **AV3:** 10:00 hora límite de llegada y llega a las 9:45.
- **AV4:** 10:15 hora límite de llegada y llega a las 10:00.
- **AV5:** 10:30 hora límite de llegada y llega a las 10:15.

Restricción 10: Restricción de Seguridad entre Slots Consecutivos

Por motivos de seguridad, dos slots consecutivos en la misma pista no deben asignarse a aviones diferentes:

Para cada pista k y slots consecutivos t y $t+1$, verificamos que no existan asignaciones seguidas, es decir, si el slot t está ocupado por el avión i, entonces $t+1$ no debe estar ocupado por otro avión i, para $i \neq i_2$. Esto garantiza la separación adecuada en las pistas. Y cómo podemos comprobar no hay ningún slot consecutivo.

Restricción 11: Cálculo del Retraso

Calculamos el retraso R_i como la diferencia entre la hora de inicio del slot asignado T_{kt} y la hora de llegada H_i de cada avión i. Nos aseguramos de que esta diferencia sea la mínima posible, para así obtener mayor beneficio.

- **AV1:** el avión se retrasa 5 minutos.
- **AV2:** el avión se retrasa 5 minutos.
- **AV3:** el avión se retrasa 5 minutos.
- **AV4:** el avión se retrasa 5 minutos.
- **AV5:** el avión se retrasa 5 minutos.

Restricciones que limitan el problema

Las cinco restricciones que limitan el número de billetes vendidos, las restricciones que limitan la capacidad de equipaje permitido en los aviones 3 y 4 únicamente, la restricción que limita la venta de billetes "Leisure" en el avión 4, la restricción que limita la venta de billetes estándar, las restricciones que limitan que los aviones tengan un slot asignado, las cinco restricciones que limitan la asignación única de un slot por avión, las cinco restricciones que limitan la disponibilidad de los cinco slots usados y las restricciones que limitan el uso de slots consecutivos son todas las restricciones que limitan nuestro problema.

Variables y restricciones definidas

En la parte 1 hemos definido 15 variables y 21 restricciones, en la parte 2 hemos definido 125 variables y 794 restricciones y, por último, en la parte 2 fusionada hemos definido 140 variables y 815 restricciones.

Modificaciones del problema

1º Modificación: Añadimos un avión

Para esta modificación hemos añadido un sexto avión con las siguientes características:

190 asientos, 2500 kg de capacidad máxima de equipaje, hora programada de llegada a las 10:15, hora límite de llegada a las 10:30 y coste de retraso de 150€.

Al añadir todos estos parámetros a nuestro modelo, la función objetivo nos da un valor de 28440, añadiendo el nuevo avión en la pista 3 en el slot de tiempo 6. Cómo podemos observar el valor de nuestra función objetivo ha aumentado, esto se debe a la vente de más billetes. Sin penalización por retraso el problema nos da 32940.

2º Modificación: Añadimos un avión y eliminamos una pista

En esta ocasión hemos añadido el anterior avión con las mismas características y además hemos eliminado la pista 4.

Al llevar a cabo estas modificaciones, cuando intentamos obtener el resultado, obtenemos "LP HAS NO PRIMAL FEASIBLE SOLUTION", porque nuestro problema no tiene una solución factible.

3º Modificación: Añadimos un avión, eliminamos una pista y quitamos la restricción de slots consecutivos

Para esta modificación estamos teniendo en cuenta las anteriores, pero con la novedad de quitar la restricción que no permite ocupar slots consecutivos. En este caso la función objetivo nos da un valor de 28440, igual que en la primera modificación. El avión 2 pasa a estar en la pista 3 en el slot de tiempo 1 y el avión 4 pasa a estar en la pista 1 en el slot de tiempo 5. Ambos aviones cambiaron la pista, pero mantuvieron el mismo slot de tiempo, por lo tanto, el resultado de la función objetivo es el mismo.

4º Modificación: Eliminamos 2 slots de tiempo

Para realizar esta modificación, únicamente eliminaremos los slots de tiempo 5 y 6. Nuevamente, cuando intentamos obtener el resultado, obtenemos "LP HAS NO PRIMAL FEASIBLE SOLUTION", porque nuestro problema no tiene una solución factible.

5º Modificación: Quitamos el mínimo de billetes de "Leisure" y "Business"

Para esta modificación utilizaremos únicamente la parte 1, ya que de la parte 2 no varía nada. De esta forma compararemos que la solución sea la misma que con la relajación de restricciones que hicimos en el solver. Al realizar esta modificación obtenemos como resultado 26190, que coincide con el resultado que teníamos exigiendo un mínimo para ambas categorías. Lo que nos muestra que estas restricciones no limitan tanto el problema. La solución es la misma que obtuvimos usando el solver.

6º Modificación: Quitamos el mínimo de billetes de "Leisure" y "Business" y el 60% de "Estandar"

Al aplicar estos cambios el resultado aumenta a 27660, nos fijamos que la venta de la tarifa "Business" es prácticamente nula, se venden más billetes de las otras tarifas ya que su venta es mejor para obtener un mayor beneficio. La solución es la misma a la obtenida usando el solver.

7º Modificación: Aumentamos el equipaje de la tarifa “Estandar” a 5 kg

Al aplicar este cambio obtenemos un resultado de 23000, es el más bajo obtenido hasta ahora, y es el resultado del aumento de peso del equipaje permitido. De esta forma se aprovecha mucho menos el espacio de los aviones y el beneficio es menor. La solución es la misma a la obtenida usando el solver.

8º Modificación: Aumentamos el coste de retraso de los aviones

Aumentamos el coste de retraso de todos los aviones a 300 €. Como resultado obtenemos 18690, el beneficio ha caído por la subida en la penalización de los retrasos.

Comparación Libre Office y GLPK

Desde nuestra experiencia usando el solver de LibreOffice y GLPK, hemos notado que ambos tienen sus ventajas y desventajas. El solver de LibreOffice es fácil de usar y está integrado en Calc, lo que lo hace muy accesible para tareas cotidianas de optimización. Su interfaz es bastante más amigable y permite realizar ajustes rápidamente, aunque es limitado en cuanto a las capacidades y tipos de problemas que puede resolver.

Por otro lado, GLPK es una herramienta más robusta y eficiente. Sin embargo, su uso a través de la línea de comandos puede ser menos intuitiva y requiere más conocimientos técnicos, lo que lo hace menos accesible para quienes no están familiarizados con la programación.

Cabe destacar que Calc suele cerrarse con frecuencia por errores internos borrando así los cambios no guardados.

En resumen, el solver de LibreOffice es ideal para tareas diarias y sencillas, mientras que GLPK es más eficiente y adecuado para análisis complejos que demandan una mayor capacidad de resolución.

CONCLUSIÓN

Como conclusión queremos expresar que hemos hecho un gran esfuerzo en esta entrega y creemos que este documento refleja bien el esfuerzo del que hablamos. No podemos decir que hemos obtenido una gran habilidad para trabajar con las herramientas de LibreOffice y GLPK ya que no es la primera vez que cursamos la asignatura. Lo que si hemos mejorado ha sido nuestra manera de redactar lo trabajado y la seriedad que hemos aplicado en todo el proceso. Al no ser la primera vez que trabajamos con estas herramientas podemos decir que ahora nos sentimos más cómodos trabajando con ellas y ahora sentimos la posibilidad de trabajar con estas mismas fuera del entorno universitario, tanto para el mundo laboral como el personal.