Derivación Completa de las Ecuaciones de Euler-Lagrange para el Péndulo Invertido sobre Carrito

Desarrollo Paso a Paso

1 Descripción del Sistema

Consideramos un péndulo invertido montado sobre un carrito que se mueve horizontalmente:

- **Carrito:** masa M, posición horizontal p
- **Péndulo:** masa m, longitud al centro de masa ℓ, momento de inercia I_{pend}
- **Pivote:** ubicado a altura h_{pivot} sobre el carrito
- **Control:** fuerza horizontal F aplicada al carrito
- **Gravedad:** $g = 9.81\,\text{m/s}^2$

1.1 Coordenadas Generalizadas

$$q_1 = p \quad \text{(posición horizontal del carrito)} \tag{1}$$
$$q_2 = \theta \quad \text{(ángulo del péndulo con la vertical)} \tag{2}$$
$$\dot{q}_1 = v = \dot{p} \quad \text{(velocidad del carrito)} \tag{3}$$
$$\dot{q}_2 = \omega = \dot{\theta} \quad \text{(velocidad angular del péndulo)} \tag{4}$$

2 Cinemática del Sistema

2.1 Posición del Centro de Masa del Péndulo

El centro de masa del péndulo se encuentra a distancia ℓ del pivote. En coordenadas cartesianas:

$$x_{\text{pend}} = p + \ell \sin\theta \tag{5}$$
$$z_{\text{pend}} = h_{\text{pivot}} - \ell \cos\theta \tag{6}$$

Explicación:

- El pivote se mueve horizontalmente con el carrito en p
- El péndulo se desvía horizontalmente $\ell \sin\theta$ desde el pivote
- Verticalmente, el péndulo "cuelga" $\ell \cos\theta$ debajo del pivote

2.2 Velocidad del Centro de Masa del Péndulo

Derivamos las posiciones respecto al tiempo:

2.2.1 Velocidad Horizontal

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{\text{pend}} &= \frac{d}{dt}[p + \ell \sin\theta] && (7)\\
&= \dot{p} + \ell \frac{d}{dt}[\sin\theta] && (8)\\
&= v + \ell \cos\theta \cdot \dot{\theta} && (9)\\
&= v + \ell \cos\theta \cdot \omega && (10)
\end{aligned}
$$

Nota: Usamos la regla de la cadena: $\frac{d}{dt}[\sin\theta] = \cos\theta \cdot \dot{\theta}$

2.2.2 Velocidad Vertical

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_{\text{pend}} &= \frac{d}{dt}[h_{\text{pivot}} - \ell \cos\theta] && (11)\\
&= 0 - \ell \frac{d}{dt}[\cos\theta] && (12)\\
&= -\ell(-\sin\theta) \cdot \dot{\theta} && (13)\\
&= \ell \sin\theta \cdot \omega && (14)
\end{aligned}
$$

Nota: h_{pivot} es constante, y $\frac{d}{dt}[\cos\theta] = -\sin\theta \cdot \dot{\theta}$

3 Energías del Sistema

3.1 Energía Cinética

3.1.1 Energía Cinética del Carrito

El carrito solo tiene movimiento traslacional horizontal:

$$T_{\text{cart}} = \frac{1}{2} M v^2 \tag{15}$$

3.1.2 Energía Cinética del Péndulo

El péndulo tiene dos componentes:

1. Traslación del centro de masa:

$$\begin{align} T_{\text{pend,trans}} &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_{\text{pend}}^2 + \dot{z}_{\text{pend}}^2) \tag{16} \\ &= \frac{1}{2}m[(v + \ell\cos\theta\cdot\omega)^2 + (\ell\sin\theta\cdot\omega)^2] \tag{17} \end{align}$$

Expandiendo el primer término:

$$(v + \ell\cos\theta\cdot\omega)^2 = v^2 + 2v\ell\cos\theta\cdot\omega + \ell^2\cos^2\theta\cdot\omega^2 \tag{18}$$

Expandiendo el segundo término:

$$(\ell\sin\theta\cdot\omega)^2 = \ell^2\sin^2\theta\cdot\omega^2 \tag{19}$$

Sumando ambos:

$$\begin{align} \dot{x}_{\text{pend}}^2 + \dot{z}_{\text{pend}}^2 &= v^2 + 2v\ell\cos\theta\cdot\omega + \ell^2\cos^2\theta\cdot\omega^2 + \ell^2\sin^2\theta\cdot\omega^2 \tag{20} \\ &= v^2 + 2v\ell\cos\theta\cdot\omega + \ell^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\omega^2 \tag{21} \\ &= v^2 + 2v\ell\cos\theta\cdot\omega + \ell^2\omega^2 \tag{22} \end{align}$$

Identidad trigonométrica usada: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
Por lo tanto:

$$T_{\text{pend,trans}} = \frac{1}{2}m[v^2 + 2v\ell\cos\theta\cdot\omega + \ell^2\omega^2] \tag{23}$$

2. Rotación sobre su centro de masa:

$$T_{\text{pend,rot}} = \frac{1}{2}I_{\text{pend}}\omega^2 \tag{24}$$

Energía cinética total del péndulo:

$$\begin{align} T_{\text{pend}} &= T_{\text{pend,trans}} + T_{\text{pend,rot}} \tag{25} \\ &= \frac{1}{2}m[v^2 + 2v\ell\cos\theta\cdot\omega + \ell^2\omega^2] + \frac{1}{2}I_{\text{pend}}\omega^2 \tag{26} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + mv\ell\cos\theta\cdot\omega + \frac{1}{2}(m\ell^2 + I_{\text{pend}})\omega^2 \tag{27} \end{align}$$

3.1.3 Energía Cinética Total del Sistema

$$
\begin{aligned}
T &= T_{\text{cart}} + T_{\text{pend}} && (28)\\
&= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mv\ell\cos\theta\cdot\omega + \frac{1}{2}(m\ell^2 + I_{\text{pend}})\omega^2 && (29)\\
&= \frac{1}{2}(M+m)v^2 + mv\ell\cos\theta\cdot\omega + \frac{1}{2}J\omega^2 && (30)
\end{aligned}
$$

donde definimos el **momento de inercia efectivo** del péndulo sobre el pivote:

$$J = m\ell^2 + I_{\text{pend}} \tag{31}$$

Nota: Este es el teorema de los ejes paralelos (Steiner).

3.2 Energía Potencial

3.2.1 Energía Potencial del Carrito

Si el centro de masa del carrito está a altura constante h_c:

$$U_{\text{cart}} = Mgh_c \tag{32}$$

Esta es una **constante**, por lo que no afectará las ecuaciones de movimiento.

3.2.2 Energía Potencial del Péndulo

La altura del centro de masa del péndulo es:

$$U_{\text{pend}} = mg\cdot z_{\text{pend}} = mg(h_{\text{pivot}} - \ell\cos\theta) \tag{33}$$

El término mgh_{pivot} es constante, así que podemos escribir:

$$U_{\text{pend}} = -mg\ell\cos\theta + \text{constante} \tag{34}$$

3.2.3 Energía Potencial Total

Ignorando las constantes:

$$U = -mg\ell\cos\theta \tag{35}$$

4 Lagrangiano del Sistema

El Lagrangiano se define como:

$$\mathcal{L} = T - U \tag{36}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(M+m)v^2 + mv\ell\cos\theta\cdot\omega + \frac{1}{2}J\omega^2 - (-mg\ell\cos\theta) && (37)\\ &= \frac{1}{2}(M+m)v^2 + mv\ell\cos\theta\cdot\omega + \frac{1}{2}J\omega^2 + mg\ell\cos\theta && (38)\end{aligned}$$

Forma final del Lagrangiano:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + mv\ell\cos\theta\cdot\omega + \frac{1}{2}J\omega^2 + mg\ell\cos\theta} \tag{39}$$

5 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \tag{40}$$

donde Q_i son las fuerzas generalizadas.

5.1 Ecuación para la Coordenada p (Posición del Carrito)

5.1.1 Paso 1: Calcular $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}$

El Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + mv\ell\cos\theta\cdot\omega + \frac{1}{2}J\omega^2 + mg\ell\cos\theta \tag{41}$$

Los términos que contienen v son:

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 \quad \text{y} \quad mv\ell\cos\theta\cdot\omega \tag{42}$$

Derivando parcialmente con respecto a v:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{2}(M+m)v^2\right] + \frac{\partial}{\partial v}[mv\ell\cos\theta\cdot\omega] && (43)\\ &= (M+m)v + m\ell\cos\theta\cdot\omega && (44)\end{aligned}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} = (M+m)v + m\ell\cos\theta\cdot\omega} \tag{45}$$

5.1.2 Paso 2: Calcular $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\right)$

Derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\right) = \frac{d}{dt}[(M+m)v + m\ell\cos\theta\cdot\omega] \tag{46}$$

Aplicando la derivada término a término:
Primer término:

$$\frac{d}{dt}[(M+m)v] = (M+m)\dot{v} = (M+m)a \tag{47}$$

donde $a = \ddot{p}$ es la aceleración del carrito.
Segundo término:

$$\frac{d}{dt}[m\ell\cos\theta\cdot\omega] = m\ell\frac{d}{dt}[\cos\theta\cdot\omega] \tag{48}$$

Usando la regla del producto: $\frac{d}{dt}[f\cdot g] = \dot{f}\cdot g + f\cdot\dot{g}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\cos\theta\cdot\omega] &= \frac{d}{dt}[\cos\theta]\cdot\omega + \cos\theta\cdot\frac{d}{dt}[\omega] && (49)\\
&= (-\sin\theta\cdot\dot{\theta})\cdot\omega + \cos\theta\cdot\dot{\omega} && (50)\\
&= -\sin\theta\cdot\omega^2 + \cos\theta\cdot\alpha && (51)
\end{aligned}$$

donde $\alpha = \ddot{\theta}$ es la aceleración angular.
Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}[m\ell\cos\theta\cdot\omega] = m\ell(-\sin\theta\cdot\omega^2 + \cos\theta\cdot\alpha) \tag{52}$$

Sumando ambos términos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\right) = (M+m)a + m\ell\cos\theta\cdot\alpha - m\ell\sin\theta\cdot\omega^2 \tag{53}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\right) = (M+m)a + m\ell\cos\theta\cdot\alpha - m\ell\sin\theta\cdot\omega^2} \tag{54}$$

5.1.3 Paso 3: Calcular $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}$

Revisamos el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + mv\ell\cos\theta\cdot\omega + \frac{1}{2}J\omega^2 + mg\ell\cos\theta \tag{55}$$

Ningún término depende explícitamente de p, por lo tanto:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = 0} \tag{56}$$

5.1.4 Paso 4: Fuerza Generalizada Q_p

La fuerza externa F actúa horizontalmente sobre el carrito, por lo que:

$$Q_p = F \tag{57}$$

5.1.5 Paso 5: Aplicar Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = Q_p \tag{58}$$

Sustituyendo:

$$(M+m)a + m\ell\cos\theta\cdot\alpha - m\ell\sin\theta\cdot\omega^2 - 0 = F \tag{59}$$

Primera ecuación del sistema:

$$\boxed{(M+m)\ddot{p} + m\ell\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - m\ell\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 = F} \tag{60}$$

O reordenando:

$$\boxed{(M+m)\ddot{p} + m\ell\cos\theta\cdot\ddot{\theta} = F + m\ell\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2} \tag{61}$$

5.2 Ecuación para la Coordenada θ (Ángulo del Péndulo)

5.2.1 Paso 1: Calcular $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}$

Los términos que contienen $\omega = \dot{\theta}$ son:

$$mv\ell\cos\theta\cdot\omega \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{62}$$

Derivando parcialmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega}[mv\ell\cos\theta\cdot\omega] + \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\frac{1}{2}J\omega^2\right] && (63)\\ &= mv\ell\cos\theta + J\omega && (64) \end{aligned}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = mv\ell\cos\theta + J\omega} \tag{65}$$

5.2.2 Paso 2: Calcular $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}\right) = \frac{d}{dt}[mv\ell\cos\theta + J\omega] \tag{66}$$

Primer término:

$$\frac{d}{dt}[mv\ell\cos\theta] = m\ell\frac{d}{dt}[v\cos\theta] \tag{67}$$

Usando la regla del producto:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[v\cos\theta] &= \dot{v}\cos\theta + v\frac{d}{dt}[\cos\theta] && (68)\\
&= a\cos\theta + v(-\sin\theta\cdot\omega) && (69)\\
&= a\cos\theta - v\sin\theta\cdot\omega && (70)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}[mv\ell\cos\theta] = m\ell(a\cos\theta - v\sin\theta\cdot\omega) \tag{71}$$

Segundo término:

$$\frac{d}{dt}[J\omega] = J\dot{\omega} = J\alpha \tag{72}$$

Sumando:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}\right) = m\ell a\cos\theta - m\ell v\sin\theta\cdot\omega + J\alpha \tag{73}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}\right) = m\ell\cos\theta\cdot a - m\ell\sin\theta\cdot v\omega + J\alpha} \tag{74}$$

5.2.3 Paso 3: Calcular $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$

Los términos que contienen θ (no ω) son:

$$mv\ell\cos\theta\cdot\omega \quad \text{y} \quad mg\ell\cos\theta \tag{75}$$

Derivando parcialmente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}[mv\ell\cos\theta\cdot\omega] + \frac{\partial}{\partial \theta}[mg\ell\cos\theta] && (76)\\
&= mv\ell(-\sin\theta)\cdot\omega + mg\ell(-\sin\theta) && (77)\\
&= -m\ell\sin\theta(v\omega + g) && (78)
\end{aligned}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -m\ell \sin\theta \cdot v\omega - mg\ell \sin\theta} \tag{79}$$

5.2.4 Paso 4: Fuerza Generalizada Q_θ

No hay par externo aplicado directamente al péndulo:

$$Q_\theta = 0 \tag{80}$$

5.2.5 Paso 5: Aplicar Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_\theta \tag{81}$$

Sustituyendo:

$$m\ell \cos\theta \cdot a - m\ell \sin\theta \cdot v\omega + J\alpha \tag{82}$$

$$- (-m\ell \sin\theta \cdot v\omega - mg\ell \sin\theta) = 0 \tag{83}$$

Simplificando:

$$m\ell \cos\theta \cdot a - m\ell \sin\theta \cdot v\omega + J\alpha \tag{84}$$

$$+ m\ell \sin\theta \cdot v\omega + mg\ell \sin\theta = 0 \tag{85}$$

Los términos $m\ell \sin\theta \cdot v\omega$ se cancelan:

$$m\ell \cos\theta \cdot a + J\alpha + mg\ell \sin\theta = 0 \tag{86}$$

Segunda ecuación del sistema:

$$\boxed{m\ell \cos\theta \cdot \ddot{p} + J\ddot{\theta} + mg\ell \sin\theta = 0} \tag{87}$$

O reordenando:

$$\boxed{J\ddot{\theta} + m\ell \cos\theta \cdot \ddot{p} = -mg\ell \sin\theta} \tag{88}$$

6 Sistema de Ecuaciones Acopladas

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas ($\ddot{p}$ y $\ddot{\theta}$):

$$(M+m)\ddot{p} + m\ell \cos\theta \cdot \ddot{\theta} = F + m\ell \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 \tag{Ec. 1}$$

$$m\ell \cos\theta \cdot \ddot{p} + J\ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta \tag{Ec. 2}$$

6.1 Forma Matricial

$$\begin{bmatrix} M+m & m\ell\cos\theta \\ m\ell\cos\theta & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + m\ell\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 \\ -mg\ell\sin\theta \end{bmatrix} \tag{89}$$

O de forma compacta:

$$\mathbf{M}(\theta)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\theta, \dot{\theta}, F) \tag{90}$$

7 Solución del Sistema (Regla de Cramer)

7.1 Determinante de la Matriz de Masa

$$\det(\mathbf{M}) = (M+m)\cdot J - (m\ell\cos\theta)^2 \tag{91}$$

$$= (M+m)J - m^2\ell^2\cos^2\theta \tag{92}$$

Definimos:

$$\boxed{\Delta = (M+m)J - m^2\ell^2\cos^2\theta} \tag{93}$$

7.2 Solución para $\ddot{p}$

Usando la regla de Cramer:

$$\ddot{p} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} F + m\ell\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 & m\ell\cos\theta \\ -mg\ell\sin\theta & J \end{vmatrix} \tag{94}$$

Calculando el determinante:

$$= \frac{1}{\Delta}\left[J(F + m\ell\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2) - m\ell\cos\theta\cdot(-mg\ell\sin\theta)\right] \tag{95}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[JF + Jm\ell\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 + m^2g\ell^2\sin\theta\cos\theta\right] \tag{96}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[JF + m\ell\sin\theta(J\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta)\right] \tag{97}$$

Resultado:

$$\boxed{\ddot{p} = \frac{JF + m\ell\sin\theta(J\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta)}{(M+m)J - m^2\ell^2\cos^2\theta}} \tag{98}$$

7.3 Solución para $\ddot{\theta}$

Usando la regla de Cramer:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} M+m & F + m\ell \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 \\ m\ell\cos\theta & -mg\ell\sin\theta \end{vmatrix} \tag{99}$$

Calculando el determinante:

$$= \frac{1}{\Delta}\Big[(M+m)(-mg\ell\sin\theta) - m\ell\cos\theta(F + m\ell\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2)\Big] \tag{100}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\Big[-(M+m)mg\ell\sin\theta - m\ell\cos\theta\cdot F - m^2\ell^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2\Big] \tag{101}$$

Resultado:

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{-m\ell\cos\theta\cdot F - (M+m)mg\ell\sin\theta - m^2\ell^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2}{(M+m)J - m^2\ell^2\cos^2\theta}} \tag{102}$$

8 Forma Explícita de las Ecuaciones Dinámicas

8.1 Notación Simplificada

Definimos:

$$s = \sin\theta \tag{103}$$

$$c = \cos\theta \tag{104}$$

$$\Delta = (M+m)J - m^2\ell^2c^2 \tag{105}$$

8.2 Ecuaciones Finales

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{p} &= \frac{JF + m\ell s(J\dot{\theta}^2 + mg\ell c)}{\Delta} \\ \ddot{\theta} &= \frac{-m\ell c\cdot F - (M+m)mg\ell s - m^2\ell^2 sc\cdot\dot{\theta}^2}{\Delta} \end{aligned}} \tag{106}$$

Estas son las ecuaciones que implementas en tu modelo de Acados.

9 Sistema de Estados

Para implementación numérica, definimos el vector de estados:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{107}$$

Y el sistema de primer orden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{p} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \\ \frac{JF+m\ell\sin\theta(J\omega^2+mg\ell\cos\theta)}{\Delta} \\ \frac{-m\ell\cos\theta\cdot F-(M+m)mg\ell\sin\theta-m^2\ell^2\sin\theta\cos\theta\cdot\omega^2}{\Delta} \end{bmatrix} \tag{108}$$

10 Resumen de Parámetros

- M: masa del carrito [kg]
- m: masa del péndulo [kg]
- ℓ: distancia del pivote al centro de masa del péndulo [m]
- I_{pend}: momento de inercia del péndulo sobre su centro de masa [kg·m^2]
- $J = m\ell^2 + I_{\text{pend}}$: momento de inercia efectivo sobre el pivote [kg·m^2]
- $g = 9.81$: aceleración gravitacional [m/s^2]
- F: fuerza de control aplicada al carrito [N]