

修士論文

2023年度

荷物搬送用二輪ロボットにおける 重心変動を考慮した動作制御

金澤洋岳

(学籍番号：82214806)

指導教員 教授 村上俊之

2024年3月

慶應義塾大学大学院理工学研究科
総合デザイン工学専攻

第 1 章

モデリング

第 1 章では、制御対象である荷物搬送用二輪ロボットのモデリングを行う。本研究で扱うロボットの機構は、ボディの下部に同一軸上に左右車輪を配置した車輪型倒立振子の上部に荷物を搬送するために用いるフォークを接続したものである。まず、1.1 節で座標系および二輪ロボットの位置・姿勢の定義を行い、拘束条件を含めた運動学について説明する。次に、1.2 節で二輪ロボットのエネルギーを導出した後、ラグランジュ法を用いて運動方程式を導く。運動方程式の導出は、拘束条件を考慮しない状態での運動方程式を計算したのち、拘束条件を考慮することで低次元化を行うことで導出を行った。

1.1 運動学

1.1.1 座標系の定義

1.1.1 節では、荷物搬送用二輪ロボットのモデリングにあたり、座標系を定義する。

本研究で用いるロボットの側面図および上面図を Fig. 1-1 に示す。

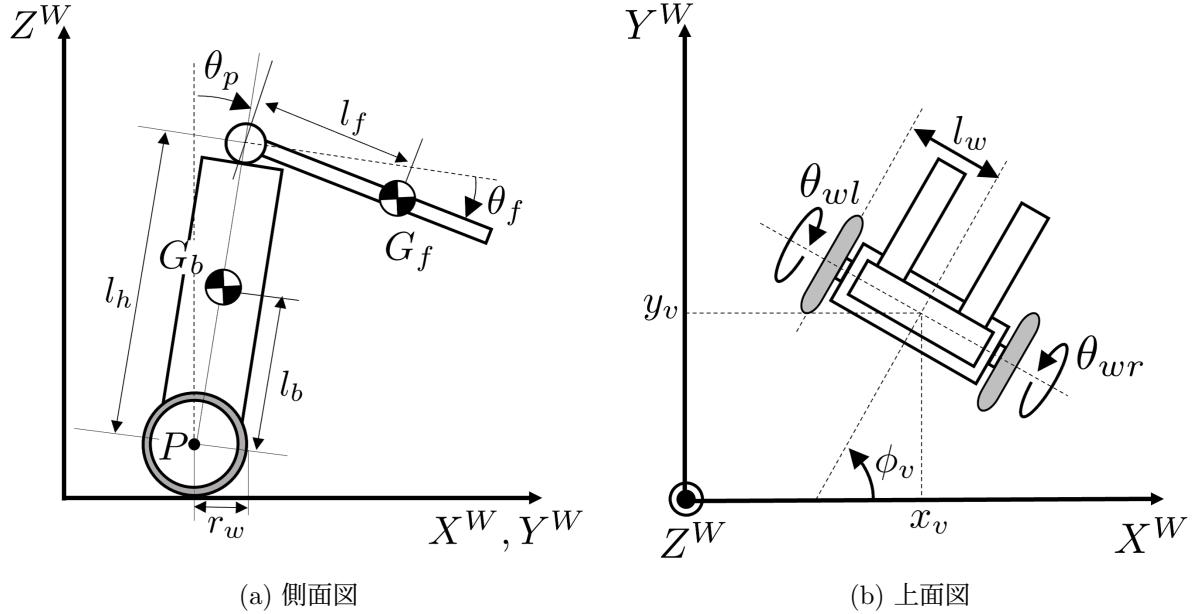


Fig. 1-1: 荷物搬送用二輪ロボットのモデル

Fig. 1-1 中の座標軸 \bigcirc^W はワールド座標系であることを示している。本研究で扱うロボットは、ボディと左右車輪が左右の車輪を別々に駆動する 2 つの車輪モータにより接続されており、ボディの上面にはフォークを駆動するモータを搭載している。左右の車輪、ボディ、フォークをそれぞれ 1 つの剛体と考え、モデリングを行う。図中で使用したパラメータを Tab. 1-1 に示す。

座標系の定義を Fig. 1-2 に示す。

Tab. 1-1: 二輪型歩行器に関するパラメータ.

パラメータ	説明
P	制御参照点
G_b	車体の重心
G_f	フォークの重心
r_w	車輪の半径
l_b	制御参照点と車体重心間の距離
l_h	車体の高さ
l_f	フォークモータとフォーク重心間の距離
l_w	車輪間の半分の距離
ϕ_v	ロボットの旋回角
θ_p	車体のピッチ角
θ_f	フォーク角
θ_{wr}, θ_{wl}	右車輪の回転角, 左車輪の回転角
x_v, y_v	ワールド座標系におけるロボットの位置

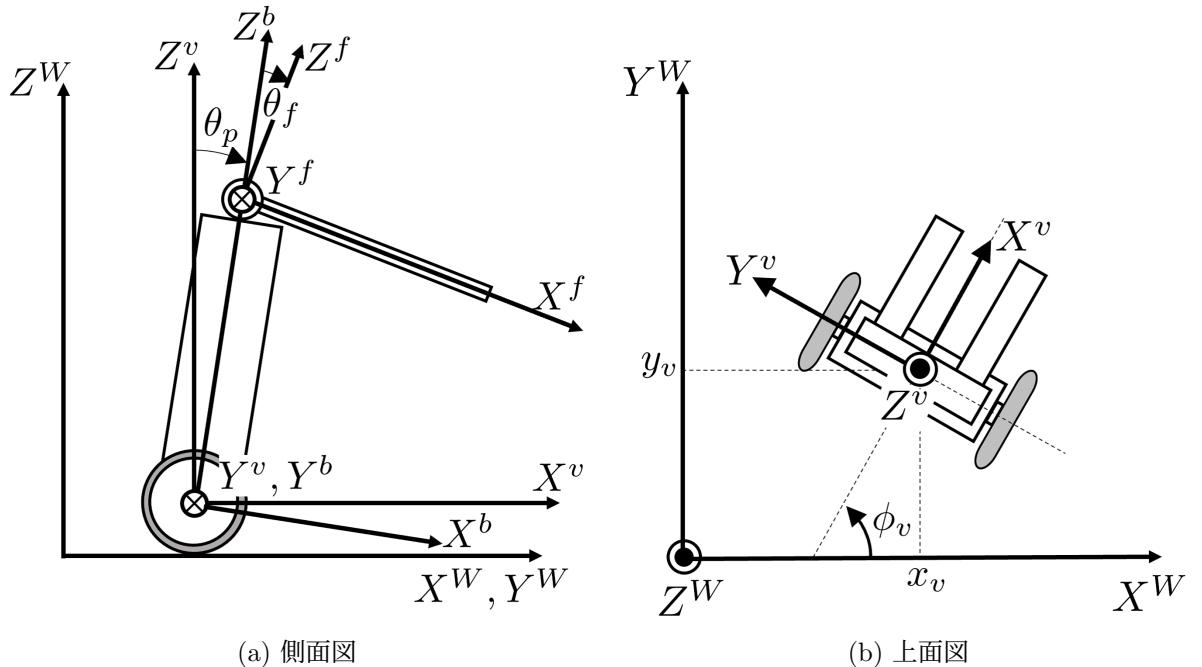


Fig. 1-2: 座標系の定義

荷物搬送用二輪ロボットの車軸中央を原点としたビークル座標系 $\Sigma^v\{X^v, Y^v, Z^v\}$ を定義する。ワールド座標系 $\Sigma^W\{X^W, Y^W, Z^W\}$ からビークル座標系 Σ^v への位置ベクトル p_v^w は式 (1.1) であ

り, Σ^v は Z^v 軸まわりに ϕ_v 回転するものとする.

$$\mathbf{p}_v^w = \begin{bmatrix} x_v & y_v & r_w \end{bmatrix}^\top \quad (1.1)$$

したがって, ワールド座標系を基準としたビーグル座標系の同時変換行列 \mathbf{H}_v^w は, 回転行列 \mathbf{R}_v^w および位置ベクトル \mathbf{p}_v^w を用いて式 (1.2) で表せる.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_v^w &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_v^w & \mathbf{p}_v^w \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi_v & -\sin \phi_v & 0 & x_v \\ \sin \phi_v & \cos \phi_v & 0 & y_v \\ 0 & 0 & 1 & r_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

次に, 車軸中央を原点としボディ鉛直方向を Z^b 軸と一致させたボディ座標系 $\Sigma^b\{X^b, Y^b, Z^b\}$ を定義する. Σ^b は, Σ^v を Y^v 軸まわりに θ_p 傾けた座標系である. ビーグル座標系 Σ^v からボディ座標系 Σ^b への同時変換行列 \mathbf{H}_b^v は, 回転行列 \mathbf{R}_b^v を用いて式 (1.3) となる.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_b^v &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^v & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_p & 0 & \sin \theta_p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_p & 0 & \cos \theta_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.3)$$

したがって, ワールド座標系 Σ^w からボディ座標系 Σ^b への同時変換行列 \mathbf{H}_b^w は式 (1.4) となる.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_b^w &= \mathbf{H}_v^w \cdot \mathbf{H}_b^v \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^w & \mathbf{p}_b^w \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi_v \cos \theta_p & -\sin \phi_v & \cos \phi_v \sin \theta_p & x_v \\ \sin \phi_v \cos \theta_p & \cos \phi_v & \sin \phi_v \sin \theta_p & y_v \\ -\sin \theta_p & 0 & \cos \theta_p & r_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.4)$$

最後に, フォークモータを原点としフォークの方向を X^f 軸と一致させたフォーク座標系 $\Sigma^f\{X^f, Y^f, Z^f\}$ を定義する. Σ^f は, Σ^b から Z^b 軸方向に l_h 並進移動し, Y^b 軸まわりに θ_f 傾けた座標系である. ボディ座標系 Σ^b からフォーク座標系 Σ^f への同時変換行列 \mathbf{H}_f^b は, 回転行列 \mathbf{R}_f^b および位置ベク

トル \mathbf{p}_f^b を用いて式(1.5)となる。

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_b^v &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_f^b & \mathbf{p}_f^b \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_f & 0 & \sin \theta_f & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_f & 0 & \cos \theta_f & l_h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.5)$$

したがって、ワールド座標系 Σ^w からフォーク座標系 Σ^f への同時変換行列 \mathbf{H}_f^w は式(1.6)となる。ここで、 θ_{p+f} は式(1.7)と定義する。

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_f^w &= \mathbf{H}_b^w \cdot \mathbf{H}_f^b \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi_v \cos \theta_{p+f} & -\sin \phi_v & \cos \phi_v \sin \theta_{p+f} & x_v + l_h \cos \phi_v \sin \theta_p \\ \sin \phi_v \cos \theta_{p+f} & \cos \phi_v & \sin \phi_v \sin \theta_{p+f} & y_v + l_h \sin \phi_v \sin \theta_p \\ -\sin \theta_{p+f} & 0 & \cos \theta_{p+f} & r_w + l_h \cos \theta_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$\theta_{p+f} = \theta_p + \theta_f \quad (1.7)$$

1.1.2 二輪ロボットの位置・速度

1.1.2節では、ワールド座標系における荷物搬送用二輪ロボットの位置・速度について考える。まず、左右車輪の位置および速度を導出する。ビーグル座標系における左右車輪位置の同次表現 $\bar{\mathbf{p}}_{wl}^v, \bar{\mathbf{p}}_{wr}^v$ は、それぞれ式(1.8), 式(1.9)である。

$$\bar{\mathbf{p}}_{wl}^v = \begin{bmatrix} 0 & l_w & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (1.8)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_{wr}^v = \begin{bmatrix} 0 & -l_w & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (1.9)$$

ワールド座標系における左右車輪位置の同次表現 $\bar{\mathbf{p}}_{wl}^w, \bar{\mathbf{p}}_{wr}^w$ は、式(1.2)の同時変換行列 \mathbf{H}_v^w と式(1.8), (1.9)の左右車輪位置の同次表現 $\bar{\mathbf{p}}_{wl}^v, \bar{\mathbf{p}}_{wr}^v$ を用いて、それぞれ式(1.10), (1.11)となる。

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{p}}_{wl}^w &= \mathbf{H}_v^w \cdot \bar{\mathbf{p}}_{wl}^v \\ &= \begin{bmatrix} x_v + l_w \sin \phi_v & y_v - l_w \cos \phi_v & r_w & 1 \end{bmatrix}^\top\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{p}}_{wr}^w &= \mathbf{H}_v^w \cdot \bar{\mathbf{p}}_{wr}^v \\ &= \begin{bmatrix} x_v - l_w \sin \phi_v & y_v + l_w \cos \phi_v & r_w & 1 \end{bmatrix}^\top\end{aligned}\quad (1.11)$$

式(1.10), 式(1.11)の第1成分から第3成分までを抜き出した左右車輪位置 $\mathbf{p}_{wl}^w, \mathbf{p}_{wr}^w$ はそれぞれ式(1.12), 式(1.13)となり, 式(1.12), 式(1.13)を微分することで, ワールド座標系における左右車輪の速度 $\mathbf{v}_{wl}^w, \mathbf{v}_{wr}^w$ はそれぞれ式(1.14), 式(1.15)となる.

$$\mathbf{p}_{wl}^w = \begin{bmatrix} x_v + l_w \sin \phi_v & y_v - l_w \cos \phi_v & r_w \end{bmatrix}^\top \quad (1.12)$$

$$\mathbf{p}_{wr}^w = \begin{bmatrix} x_v - l_w \sin \phi_v & y_v + l_w \cos \phi_v & r_w \end{bmatrix}^\top \quad (1.13)$$

$$\mathbf{v}_{wl}^w = \begin{bmatrix} \dot{x}_v + l_w \dot{\phi}_v \cos \phi_v & \dot{y}_v + l_w \dot{\phi}_v \sin \phi_v & 0 \end{bmatrix}^\top \quad (1.14)$$

$$\mathbf{v}_{wr}^w = \begin{bmatrix} \dot{x}_v - l_w \dot{\phi}_v \cos \phi_v & \dot{y}_v - l_w \dot{\phi}_v \sin \phi_v & 0 \end{bmatrix}^\top \quad (1.15)$$

次に, ボディの重心位置および速度を導出する. ボディ座標系におけるボディ重心位置の同次表現 $\bar{\mathbf{p}}_{Gb}^b$ は, 式(1.16)である.

$$\bar{\mathbf{p}}_{Gb}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_b & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (1.16)$$

ワールド座標系におけるボディ重心位置の同次表現 $\bar{\mathbf{p}}_{Gb}^w$ は, 式(1.4)の同時変換行列 \mathbf{H}_b^w と式(1.16)のボディ重心位置の同次表現 $\bar{\mathbf{p}}_{Gb}^b$ を用いて, 式(1.17)となる.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}_{Gb}^w &= \mathbf{H}_b^w \cdot \bar{\mathbf{p}}_{Gb}^b \\ &= \begin{bmatrix} x_v + l_b \sin \theta_p \cos \phi_v & y_v + l_b \sin \theta_p \sin \phi_v & r_w + l_b \cos \theta_p & 1 \end{bmatrix}^\top \end{aligned} \quad (1.17)$$

式(1.17)の第1成分から第3成分までを抜き出したボディ重心位置 \mathbf{p}_{Gb}^w は式(1.18)となり, 式(1.18)を微分することで, ワールド座標系におけるボディ重心の速度 \mathbf{v}_{Gb}^w は, 式(1.19)となる.

$$\mathbf{p}_{Gb}^w = \begin{bmatrix} x_v + l_b \sin \theta_p \cos \phi_v & y_v + l_b \sin \theta_p \sin \phi_v & r_w + l_b \cos \theta_p & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (1.18)$$

$$\mathbf{v}_{Gb}^w = \begin{bmatrix} \dot{x}_v + l_b \dot{\theta}_p \cos \theta_p \cos \phi_v - l_b \dot{\phi}_v \sin \theta_p \sin \phi_v \\ \dot{y}_v + l_b \dot{\theta}_p \cos \theta_p \sin \phi_v + l_b \dot{\phi}_v \sin \theta_p \cos \phi_v \\ -l_b \dot{\theta}_p \sin \theta_p \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

次に, フォークの重心位置および速度を導出する. フォーク座標系におけるフォーク重心位置の同次表現 $\bar{\mathbf{p}}_{Gf}^f$ は, 式(1.20)である.

$$\bar{\mathbf{p}}_{Gf}^f = \begin{bmatrix} l_f & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (1.20)$$

ワールド座標系におけるフォーク重心位置の同次表現 $\bar{\mathbf{p}}_{Gf}^w$ は, 式(1.6)の同時変換行列 \mathbf{H}_f^w と式(1.20)のボディ重心位置の同次表現 $\bar{\mathbf{p}}_{Gf}^f$ を用いて, 式(1.21)となる.

$$\bar{\mathbf{p}}_{Gf}^w = \mathbf{H}_f^w \cdot \bar{\mathbf{p}}_{Gf}^f$$

$$= \begin{bmatrix} x_v + (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f}) \cos \phi_v \\ y_v + (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f}) \sin \phi_v \\ r_w + l_h \cos \theta_p - l_f \sin \theta_{p+f} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

式(1.21)の第1成分から第3成分までを抜き出したフォーク重心位置 \mathbf{p}_{Gf}^w は式(1.22)となり、式(1.22)を微分することで、ワールド座標系におけるフォーク重心の速度 \mathbf{v}_{Gf}^w は、式(1.23)となる。

$$\mathbf{p}_{Gf}^w = \begin{bmatrix} x_v + (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f}) \cos \phi_v \\ y_v + (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f}) \sin \phi_v \\ r_w + l_h \cos \theta_p - l_f \sin \theta_{p+f} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{v}_{Gf}^w = \begin{bmatrix} \dot{x}_v + \left(l_h \dot{\theta}_p \cos \theta_p - l_f \dot{\theta}_{p+f} \sin \theta_{p+f} \right) \cos \phi_v - (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f}) \dot{\phi}_v \sin \phi_v \\ \dot{y}_v + \left(l_h \dot{\theta}_p \cos \theta_p - l_f \dot{\theta}_{p+f} \sin \theta_{p+f} \right) \sin \phi_v + (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f}) \dot{\phi}_v \cos \phi_v \\ -l_h \dot{\theta}_p \sin \theta_p - l_f \dot{\theta}_{p+f} \cos \theta_{p+f} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

1.1.3 二輪ロボットの回転角速度

1.1.3節では、ワールド座標系における荷物搬送用二輪ロボットの各要素の回転角速度について考える。

まず、ボディの回転角速度を導出する。ワールド座標系から見たボディの回転角速度 $\boldsymbol{\omega}_b^w$ は、式(1.4)の左上 3×3 行列を抽出した回転行列 \mathbf{R}_b^w を用いて式(1.24)で表せる。

$$\boldsymbol{\omega}_b^w = (\dot{\mathbf{R}}_b^w \mathbf{R}_b^{w\top})^\vee \quad (1.24)$$

ここで、 \circlearrowright は、歪対称行列 $\tilde{\mathbf{a}}$ から式(1.25)の関係を用いてベクトルを取り出す操作である。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}^\vee &= \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}^\vee \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.25)$$

歪対称行列 $\tilde{\mathbf{a}}$ は、ある2つのベクトル $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^\top$, $\mathbf{r} = [r_1, r_2, r_3]^\top$ に対して式(1.26)の関係で定義される行列である。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{r} &\equiv \mathbf{a} \times \mathbf{r} \\ &= \begin{bmatrix} a_2 r_3 - a_3 r_2 \\ a_3 r_1 - a_1 r_3 \\ a_1 r_2 - a_2 r_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

式(1.24)の右辺の歪対称行列を計算すると式(1.27)となる。ここで、回転行列 \mathbf{R}_b^w の微分、および転置をそれぞれ式(1.28)、式(1.29)に示す。

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_b^w = \dot{\mathbf{R}}_b^w \mathbf{R}_b^{w\top}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi}_v & \dot{\theta}_p \cos \phi_v \\ \dot{\phi}_v & 0 & \dot{\theta}_p \sin \phi_v \\ -\dot{\theta}_p \cos \phi_v & -\dot{\theta}_p \sin \phi_v & 0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_b^w = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}_v \sin \phi_v \cos \theta_p - \dot{\theta}_p \cos \phi_v \sin \theta_p & -\dot{\phi}_v \cos \phi_v & -\dot{\phi}_v \sin \phi_v \sin \theta_p + \dot{\theta}_p \cos \phi_v \cos \theta_p \\ \dot{\phi}_v \cos \phi_v \cos \theta_p - \dot{\theta}_p \sin \phi_v \sin \theta_p & -\dot{\phi}_v \sin \phi_v & \dot{\phi}_v \cos \phi_v \sin \theta_p + \dot{\theta}_p \sin \phi_v \cos \theta_p \\ -\dot{\theta}_p \cos \theta_p & 0 & -\dot{\theta}_p \sin \theta_p \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{R}_b^{w\top} = \begin{bmatrix} \cos \phi_v \cos \theta_p & \sin \phi_v \cos \theta_p & -\sin \theta_p \\ -\sin \phi_v & \cos \phi_v & 0 \\ \cos \phi_v \sin \theta_p & \sin \phi_v \sin \theta_p & \cos \theta_p \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

式(1.25)、式(1.27)を比較することで、ワールド座標系から見たボディの回転角速度 $\boldsymbol{\omega}_b^w$ は式(1.30)と求まる。

$$\boldsymbol{\omega}_b^w = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_p \sin \phi_v & \dot{\theta}_p \cos \phi_v & \dot{\phi}_v \end{bmatrix}^\top \quad (1.30)$$

次に、左右の車輪およびロータの回転角速度を導出する。二輪ロボットのボディと車輪の関係をFig. 1-3に示す。

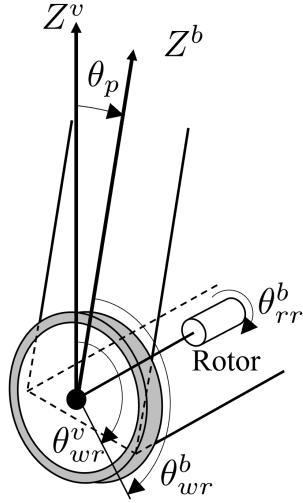


Fig. 1-3: ボディと車輪の関係

二輪ロボットはボディと車輪が直接接続されている。したがって、 Z^v から見た左右の車輪の回転角度 θ_{wl}^v , θ_{wr}^v は、ビーカル座標系 Σ^v の Z^v からのボディの傾き角度であるピッチ角 θ_p , ボディ座標系 Σ^b の Z^b における左右の車輪の回転角度 θ_{wl}^b , θ_{wr}^b を用いて、それぞれ式(1.31), 式(1.32)となる。

$$\theta_{wl}^v = \theta_{wl}^b + \theta_p \quad (1.31)$$

$$\theta_{wr}^v = \theta_{wr}^b + \theta_p \quad (1.32)$$

ビーカル座標系 Σ^v の Z^v から見た各車輪の回転速度 ω_{wl}^v , ω_{wr}^v は式(1.31), 式(1.32)を時間微分することにより、式(1.33), 式(1.34)と求まる。

$$\omega_{wl}^v = \dot{\theta}_{wl}^v = \dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_p \quad (1.33)$$

$$\omega_{wr}^v = \dot{\theta}_{wr}^v = \dot{\theta}_{wr}^b + \dot{\theta}_p \quad (1.34)$$

式(1.33), 式(1.34)により、ビーカル座標系における車輪の回転角速度が得られたが、ワールド座標系からみた車輪の回転速度 ω_{wl}^w , ω_{wr}^w は式(1.30)から、それぞれ式(1.35), 式(1.36)となる。これは、車輪の回転が行われるビーカル座標系の Y_v 軸と、ボディの回転が行われるボディ座標系の Y_b 軸が同じであるからである。

$$\boldsymbol{\omega}_{wl}^w = \begin{bmatrix} -\sin \phi_v (\dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_p) & \cos \phi_v (\dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_p) & \dot{\phi}_v \end{bmatrix}^\top \quad (1.35)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{wr}^w = \begin{bmatrix} -\sin \phi_v (\dot{\theta}_{wr}^b + \dot{\theta}_p) & \cos \phi_v (\dot{\theta}_{wr}^b + \dot{\theta}_p) & \dot{\phi}_v \end{bmatrix}^\top \quad (1.36)$$

また、ビーカル座標系における各車輪のロータの回転角 $\theta_{rl}^v, \theta_{rr}^v$ は、ギアによる減速比を考慮して、それぞれ式(1.37), 式(1.38)で表される。ここで、 n_w は車輪モータのギア比である。

$$\theta_{rl}^v = n_w \theta_{wl}^b + \theta_p \quad (1.37)$$

$$\theta_{rr}^v = n_w \theta_{wr}^b + \theta_p \quad (1.38)$$

同様に、ビーカル座標系における各車輪のロータの回転角速度 $\omega_{rl}^v, \omega_{rr}^v$ は、それぞれ式(1.39), 式(1.40)で表される。

$$\omega_{rl}^v = n_w \dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_p \quad (1.39)$$

$$\omega_{rr}^v = n_w \dot{\theta}_{wr}^b + \dot{\theta}_p \quad (1.40)$$

式(1.40), 式(1.39)により、ビーカル座標系におけるロータの回転速度が得られたが、ワールド座標系からみたロータの回転速度 $\omega_{rl}^w, \omega_{rr}^w$ は、車輪のときと同様に式(1.30)を用いることで、それぞれ式(1.41), 式(1.42)と求まる。

$$\boldsymbol{\omega}_{rl}^w = \begin{bmatrix} -\sin \phi_v (n_w \dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_p) & \cos \phi_v (n_w \dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_p) & \dot{\phi}_v \end{bmatrix}^\top \quad (1.41)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{rr}^w = \begin{bmatrix} -\sin \phi_v (n_w \dot{\theta}_{wr}^b + \dot{\theta}_p) & \cos \phi_v (n_w \dot{\theta}_{wr}^b + \dot{\theta}_p) & \dot{\phi}_v \end{bmatrix}^\top \quad (1.42)$$

最後に、フォークの回転角速度を導出する。式(1.30)の θ_p を θ_{p+f} と置き換えることで、フォークの回転角速度 ω_f^w は、式(1.43)となる。

$$\boldsymbol{\omega}_f^w = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_{p+f} \sin \phi_v & \dot{\theta}_{p+f} \cos \phi_v & \dot{\phi}_v \end{bmatrix}^\top \quad (1.43)$$

フォークモータのロータの回転角速度 ω_{rf}^w は車輪のローターと同様にギアによる減速比を考慮して、式(1.44)で表される。ここで、 n_f はフォークモータのギア比である。

$$\boldsymbol{\omega}_{rf}^w = \begin{bmatrix} -(\dot{\theta}_p + n_f \dot{\theta}_f) \sin \phi_v & (\dot{\theta}_p + n_f \dot{\theta}_f) \cos \phi_v & \dot{\phi}_v \end{bmatrix}^\top \quad (1.44)$$

1.1.4 拘束条件

1.1.4節では、二輪型歩行器における拘束条件について考える。二輪ロボットのもつ拘束条件として、以下に示す2つの仮定を用いる。

- 車軸方向に移動しない

- 左右の車輪は滑らない

Fig. 1-4 に拘束条件を表す図を示す.

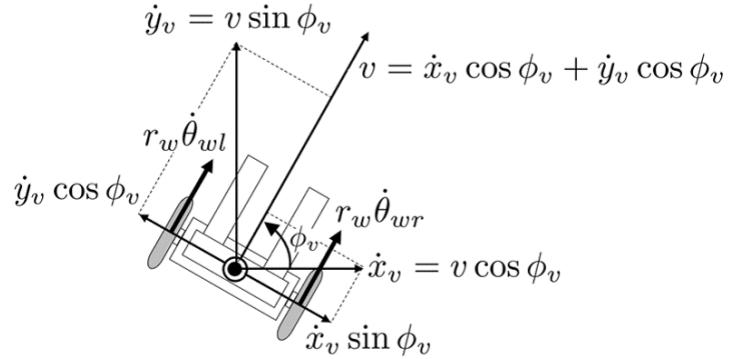


Fig. 1-4: 二輪ロボットの拘束条件

x 方向および y 方向の速度は、進行速度 v を用いてそれぞれ式 (1.45), 式 (1.46) と表せる.

$$\dot{x}_v = v \cos \phi_v \quad (1.45)$$

$$\dot{y}_v = v \sin \phi_v \quad (1.46)$$

二輪ロボットは車軸方向に移動しないことから、速度拘束条件は式 (1.47) で表される.

$$\dot{x}_v \sin \phi_v - \dot{y}_v \cos \phi_v = 0 \quad (1.47)$$

また、左右の車輪が滑ないことから、進行速度 v に関して、式 (1.48) の関係式が成り立つ.

$$v = \dot{x}_v \cos \phi_v + \dot{y}_v \sin \phi_v \quad (1.48)$$

$$= \frac{r_w (\dot{\theta}_{wr}^v + \dot{\theta}_{wl}^v)}{2} \quad (1.49)$$

また、左右の車輪の進行速度について、車輪間の半分の距離 l_w を用いて、式 (1.50), 式 (1.51) が成り立つ.

$$v - l_w \dot{\phi}_v = r_w \dot{\theta}_{wl}^v \quad (1.50)$$

$$v + l_w \dot{\phi}_v = r_w \dot{\theta}_{wr}^v \quad (1.51)$$

式(1.31), 式(1.32)の関係式, および式(1.48)から式(1.51)より, 速度拘束に関する式(1.52), 式(1.53)が成り立つ.

$$\dot{x}_v \cos \phi_v + \dot{y}_v \sin \phi_v - l_w \dot{\phi}_v - r_w (\dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_p) = 0 \quad (1.52)$$

$$\dot{x}_v \cos \phi_v + \dot{y}_v \sin \phi_v + l_w \dot{\phi}_v - r_w (\dot{\theta}_{wr}^b + \dot{\theta}_p) = 0 \quad (1.53)$$

式(1.47), 式(1.52), および式(1.53)からボディ座標系における左右車輪の回転速度は, それぞれ式(1.54)および式(1.55)となる.

$$\dot{\theta}_{wl}^b = \frac{1}{r_w} v - \frac{l_w}{r_w} \dot{\phi}_v - \dot{\theta}_p \quad (1.54)$$

$$\dot{\theta}_{wr}^b = \frac{1}{r_w} v + \frac{l_w}{r_w} \dot{\phi}_v - \dot{\theta}_p \quad (1.55)$$

1.2 動力学

1.2.1 二輪ロボットの運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギー

1.2.1節では, ラグランジュ法を用いた運動方程式の導出で用いる, 二輪ロボットの運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーを導出する. ここで導出するエネルギーは, 全並進運動エネルギー K_t , 全回転運動エネルギー K_r , およびポテンシャルエネルギー U の3項目である.

まず, 全並進運動エネルギー K_t を導出する. 全並進運動エネルギーは, 車輪の並進運動エネルギー K_{tw} , ボディの並進運動エネルギー K_{tb} , フォークの並進運動エネルギー K_{tf} を足し合わせた式(1.56)で表せる.

$$K_t = K_{tw} + K_{tb} + K_{tf} \quad (1.56)$$

車輪1つあたりの質量, モータを含むボディの質量, フォークの質量をそれぞれ m_w , m_b , m_f とし, それぞれの質量行列を式(1.57)から式(1.59)と定義する.

$$\mathbf{M}_w = \begin{bmatrix} M_w & 0 & 0 \\ 0 & M_w & 0 \\ 0 & 0 & M_w \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

$$\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} M_b & 0 & 0 \\ 0 & M_b & 0 \\ 0 & 0 & M_b \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

$$\mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} M_f & 0 & 0 \\ 0 & M_f & 0 \\ 0 & 0 & M_f \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

車輪の並進運動エネルギー K_{tw} は、左右の車輪の並進運動エネルギーの和である。左右車輪の並進運動エネルギー K_{twl} , K_{twr} は、式(1.14), 式(1.15), および式(1.57)を用いて導出すると、それぞれ式(1.60), 式(1.61)となる。

$$\begin{aligned} K_{twl} &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_{wl}^w \top \mathbf{M}_w \mathbf{v}_{wl}^w \\ &= \frac{1}{2} m_w \left\{ \dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + l_w^2 \dot{\phi}_v^2 + 2l_w \dot{\phi}_v (\dot{x}_v \cos \phi_v + \dot{y}_v \sin \phi_v) \right\} \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} K_{twr} &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_{wr}^w \top \mathbf{M}_w \mathbf{v}_{wl}^w \\ &= \frac{1}{2} m_w \left\{ \dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + l_w^2 \dot{\phi}_v^2 - 2l_w \dot{\phi}_v (\dot{x}_v \cos \phi_v + \dot{y}_v \sin \phi_v) \right\} \end{aligned} \quad (1.61)$$

したがって、車輪の並進運動エネルギー K_{tw} は、式(1.62)となる。

$$\begin{aligned} K_{tw} &= K_{twl} + K_{twr} \\ &= m_w \left(\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + l_w^2 \dot{\phi}_v^2 \right) \end{aligned} \quad (1.62)$$

ボディの並進運動エネルギー K_{tb} は、式(1.19)および式(1.58)を用いて導出すると、式(1.63)となる。

$$\begin{aligned} K_{tb} &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_{Gb}^w \top \mathbf{M}_b \mathbf{v}_{Gb}^w \\ &= \frac{1}{2} m_b \left(\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + l_b^2 \dot{\theta}_p^2 + l_b^2 \dot{\phi}_v^2 \sin^2 \theta_p \right) + m_b l_b \dot{\theta}_p \cos \theta_p (\dot{x}_v \cos \phi_v + \dot{y}_v \sin \phi_v) \\ &\quad + m_b l_b \dot{\phi}_v \sin \theta_p (-\dot{x}_v \sin \phi_v + \dot{y}_v \cos \phi_v) \end{aligned} \quad (1.63)$$

フォークの並進運動エネルギー K_{tf} は、式(1.23)および式(1.59)を用いて導出すると、式(1.64)となる。

$$\begin{aligned} K_{tf} &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_{Gf}^w \top \mathbf{M}_f \mathbf{v}_{Gf}^w \\ &= \frac{1}{2} m_f \left[\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + l_h^2 \dot{\theta}_p^2 + l_f^2 \dot{\theta}_{p+f}^2 - 2l_h l_f \dot{\theta}_p \dot{\theta}_{p+f} \sin \theta_f + (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f})^2 \dot{\phi}_v^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{x}_v \left\{ (l_h \dot{\theta}_p \cos \theta_p - l_f \dot{\theta}_{p+f} \sin \theta_{p+f}) \cos \phi_v - (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f}) \dot{\phi}_v \sin \phi_v \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{y}_v \left\{ (l_h \dot{\theta}_p \cos \theta_p - l_f \dot{\theta}_{p+f} \sin \theta_{p+f}) \sin \phi_v + (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f}) \dot{\phi}_v \cos \phi_v \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.64)$$

次に、全回転運動エネルギー K_r を導出する。全回転運動エネルギーは、車輪および車輪ロータの回転運動エネルギー K_{rw} , ボディの回転運動エネルギー K_{rb} , フォークおよびフォークロータの回転運動エネルギー K_{rf} を足し合わせた式(1.65)で表せる。

$$K_r = K_{rw} + K_{rb} + K_{rf} \quad (1.65)$$

車輪および車輪ロータの回転運動エネルギー K_{rw} は、左右車輪の回転運動エネルギーと左右のロータの回転運動エネルギーの和である。ボディ座標系に対する車輪の慣性テンソル \mathbf{I}_w^b を式(1.66)で定義する。ここで、 I_{wx} , I_{wy} , I_{wz} は車輪座標系の各座標軸まわりの車輪の慣性モーメントである。

$$\mathbf{I}_w^b = \begin{bmatrix} I_{wx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{wy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{wz} \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

ワールド座標系における車輪の慣性テンソル \mathbf{I}_w^w は、回転行列を用いて式(1.67)と表せる。ただし、車輪の形状から車輪の回転テンソルはボディ座標系とビーグル座標系において同様となることを利用した。

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_w^w &= \mathbf{R}_b^w \mathbf{I}_w^b \mathbf{R}_b^{w\top} \\ &= \mathbf{R}_v^w \left(\mathbf{R}_b^v \mathbf{I}_w^b \mathbf{R}_b^{v\top} \right) \mathbf{R}_v^{w\top} \\ &= \mathbf{R}_v^w \mathbf{I}_w^v \mathbf{R}_v^{w\top} \\ &= \mathbf{R}_v^w \mathbf{I}_w^b \mathbf{R}_v^{w\top} \end{aligned} \quad (1.67)$$

式(1.2)の左上 3×3 行列を抽出した回転行列 \mathbf{R}_v^w 、式(1.66)を用いて式(1.67)を計算することにより、ワールド座標系における車輪の慣性テンソル \mathbf{I}_w^w は、式(1.68)と求まる。

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_w^w &= \mathbf{R}_v^w \mathbf{I}_w^b \mathbf{R}_v^{w\top} \\ &= \begin{bmatrix} I_{wx} \cos^2 \phi_v + I_{wy} \sin^2 \phi_v & (I_{wx} - I_{wy}) \sin \phi_v \cos \phi_v & 0 \\ (I_{wx} - I_{wy}) \sin \phi_v \cos \phi_v & I_{wx} \sin^2 \phi_v + I_{wy} \cos^2 \phi_v & 0 \\ 0 & 0 & I_{wz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.68)$$

ワールド座標系におけるロータの慣性テンソル \mathbf{I}_r^w は、ボディ座標系における車輪の各座標軸まわりの慣性モーメント I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} をそれぞれロータの各座標軸まわりの慣性モーメント I_{rx} , I_{ry} , I_{rz} に置き換えることで式(1.69)と求まる。

$$\mathbf{I}_r^w = \begin{bmatrix} I_{rx} \cos^2 \phi_v + I_{ry} \sin^2 \phi_v & (I_{rx} - I_{ry}) \sin \phi_v \cos \phi_v & 0 \\ (I_{rx} - I_{ry}) \sin \phi_v \cos \phi_v & I_{rx} \sin^2 \phi_v + I_{ry} \cos^2 \phi_v & 0 \\ 0 & 0 & I_{rz} \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

以上から、左車輪の回転エネルギー K_{rwl} 、右車輪の回転エネルギー K_{rwr} 、左車輪のロータの回転エネルギー K_{rrl} 、右車輪のロータの回転エネルギー K_{rrr} はそれぞれ式(1.70)から式(1.73)のように求められる。

$$K_{rwl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{wl}^w \top \mathbf{I}_w^w \boldsymbol{\omega}_{wl}^w$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ I_{wy} (\dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_p)^2 + I_{wz} \dot{\phi}_v^2 \right\} \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} K_{rwr} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{wr}^w \top \mathbf{I}_w^w \boldsymbol{\omega}_{wr}^w \\ &= \frac{1}{2} \left\{ I_{wy} (\dot{\theta}_{wr}^b + \dot{\theta}_p)^2 + I_{wz} \dot{\phi}_v^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} K_{rrl} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{rl}^{w\top} \mathbf{I}_r^w \boldsymbol{\omega}_{rl}^w \\ &= \frac{1}{2} \left\{ I_{ry} (n_w \dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_p)^2 + I_{rz} \dot{\phi}_v^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} K_{rrr} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{rr}^w \top \mathbf{I}_r^w \boldsymbol{\omega}_{rr}^w \\ &= \frac{1}{2} \left\{ I_{ry} (n_w \dot{\theta}_{wr}^b + \dot{\theta}_p)^2 + I_{rz} \dot{\phi}_v^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.73)$$

式(1.70)から式(1.73)で導出されたエネルギーより、車輪およびロータの回転運動エネルギー K_{rw} は式(1.74)で表せる。

$$\begin{aligned} K_{rw} &= K_{rwl} + K_{rwr} + K_{rrl} + K_{rrr} \\ &= \frac{1}{2} (I_{wy} + n_w^2 I_{ry}) (\dot{\theta}_{wl}^b)^2 + (I_{wy} + n_w I_{ry}) \dot{\theta}_p (\dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_{wr}^b) \\ &\quad + (I_{wy} + I_{ry}) \dot{\theta}_p^2 + (I_{wz} + I_{rz}) \dot{\phi}_v^2 \end{aligned} \quad (1.74)$$

次に、ボディの回転運動エネルギー K_{rb} の導出を行う。まず、ワールド座標系から見たボディの角速度 $\boldsymbol{\omega}_b^w$ で回転するときの、重心まわりの慣性テンソル \mathbf{I}_b^w を導出する。ボディ座標系における重心まわりの慣性テンソル \mathbf{I}_b^b を式(1.75)で定義する。ここで、 $I_{bxx}, I_{byy}, I_{bzz}$ はボディ座標系のそれぞれの座標軸まわりの慣性モーメントである。

$$\mathbf{I}_b^b = \begin{bmatrix} I_{bxx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{byy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{bzz} \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

ワールド座標系から見たボディの角速度 $\boldsymbol{\omega}_b^w$ でボディが回転するときの、ボディ重心まわりの慣性テンソル \mathbf{I}_b^w は式(1.76)となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_b^w &= \mathbf{R}_b^w \mathbf{I}_b^b \mathbf{R}_b^{w\top} \\ &= \begin{bmatrix} I_{b11}^w & I_{b12}^w & I_{b13}^w \\ I_{b21}^w & I_{b22}^w & I_{b23}^w \\ I_{b31}^w & I_{b32}^w & I_{b33}^w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.76)$$

ただし、行列の各要素は式(1.77)から式(1.82)である。

$$I_{b11}^w = I_{bxx} \cos^2 \phi_v \cos^2 \theta_p + I_{byy} \sin^2 \phi_v + I_{bzz} \cos^2 \phi_v \sin^2 \theta_p \quad (1.77)$$

$$I_{b12}^w = I_{b21}^w = \sin \phi_v \cos \phi_v (I_{bxx} \cos^2 \theta_p - I_{byy} + I_{bzz} \sin^2 \theta_p) \quad (1.78)$$

$$I_{b13}^w = I_{b31}^w = (-I_{bxx} + I_{bzz}) \cos \phi_v \sin \theta_p \cos \theta_p \quad (1.79)$$

$$I_{b22}^w = I_{bxx} \sin^2 \phi_v \cos^2 \theta_p + I_{byy} \cos^2 \phi_v + I_{bzz} \sin^2 \phi_v \sin^2 \theta_p \quad (1.80)$$

$$I_{b23}^w = I_{b32}^w = (-I_{bxx} + I_{bzz}) \sin \phi_v \sin \theta_p \cos \theta_p \quad (1.81)$$

$$I_{b33}^w = I_{bxx} \sin^2 \theta_p + I_{bzz} \cos^2 \theta_p \quad (1.82)$$

式(1.30), 式(1.76)から, ボディの回転エネルギー K_{rb} は式(1.83)となる.

$$\begin{aligned} K_{rb} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_b^{w\top} \mathbf{I}_b^w \boldsymbol{\omega}_b^w \\ &= \frac{1}{2} I_{bxx} \dot{\phi}_v^2 \sin^2 \theta_p + \frac{1}{2} I_{byy} \dot{\theta}_p^2 + \frac{1}{2} I_{bzz} \dot{\phi}_v^2 \cos^2 \theta_p \end{aligned} \quad (1.83)$$

続いて, フォークおよびフォークロータの回転運動エネルギー K_{rf} の導出を行う. フォークおよびフォークロータの回転運動エネルギー K_{rf} は, フォークの回転運動エネルギー K_{rff} とフォークのロータの回転運動エネルギー K_{rfr} を用いて式(1.84)となる.

$$K_{rf} = K_{rff} + K_{rfr} \quad (1.84)$$

フォーク座標系における重心まわりのフォークの慣性テンソル \mathbf{I}_f^f を式(1.85)で定義する. ここで, $I_{fxz}, I_{fyx}, I_{fyz}$ はボディ座標系のそれぞれの座標軸まわりの慣性モーメントである.

$$\mathbf{I}_f^f = \begin{bmatrix} I_{fxz} & 0 & 0 \\ 0 & I_{fyx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{fyz} \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

ワールド座標系から見たフォークの角速度 $\boldsymbol{\omega}_f^w$ でフォークが回転するときの, フォーク重心まわりの慣性テンソル \mathbf{I}_f^w は式(1.86)となる.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_f^w &= \mathbf{R}_f^w \mathbf{I}_f^f \mathbf{R}_f^{w\top} \\ &= \begin{bmatrix} I_{f11}^w & I_{f12}^w & I_{f13}^w \\ I_{f21}^w & I_{f22}^w & I_{f23}^w \\ I_{f31}^w & I_{f32}^w & I_{f33}^w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.86)$$

ただし, 行列の各要素は式(1.87)から式(1.92)である.

$$I_{f11}^w = I_{fxz} \cos^2 \phi_v \cos^2 \theta_{p+f} + I_{fyx} \sin^2 \phi_v + I_{fyz} \cos^2 \phi_v \sin^2 \theta_{p+f} \quad (1.87)$$

$$I_{f12}^w = I_{f21}^w = \sin \phi_v \cos \phi_v (I_{fxz} \cos^2 \theta_{p+f} - I_{fyx} + I_{fyz} \sin^2 \theta_{p+f}) \quad (1.88)$$

$$I_{f13}^w = I_{f31}^w = (-I_{fxz} + I_{fzz}) \cos \phi_v \sin \theta_{p+f} \cos \theta_{p+f} \quad (1.89)$$

$$I_{f22}^w = I_{fxz} \sin^2 \phi_v \cos^2 \theta_{p+f} + I_{fyx} \cos^2 \phi_v + I_{fzz} \sin^2 \phi_v \sin^2 \theta_{p+f} \quad (1.90)$$

$$I_{f23}^w = I_{f32}^w = (-I_{fxz} + I_{fzz}) \sin \phi_v \sin \theta_{p+f} \cos \theta_{p+f} \quad (1.91)$$

$$I_{f33}^w = I_{fxz} \sin^2 \theta_{p+f} + I_{fzz} \cos^2 \theta_{p+f} \quad (1.92)$$

式(1.43), 式(1.86)から, フォークの回転エネルギー K_{rff} は式(1.93)となる.

$$\begin{aligned} K_{rff} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_f^w \top \mathbf{I}_f^w \boldsymbol{\omega}_f^w \\ &= \frac{1}{2} I_{fxz} \dot{\phi}_v^2 \sin^2 \theta_{p+f} + \frac{1}{2} I_{fyx} \dot{\theta}_{p+f}^2 + \frac{1}{2} I_{fzz} \dot{\phi}_v^2 \cos^2 \theta_{p+f} \end{aligned} \quad (1.93)$$

フォーク座標系における重心まわりのフォークロータの慣性テンソル \mathbf{I}_{fr}^f を式(1.94)で定義する. ここで, $I_{frxx}, I_{fryy}, I_{frzz}$ はボディ座標系のそれぞれの座標軸まわりの慣性モーメントである.

$$\mathbf{I}_{fr}^f = \begin{bmatrix} I_{frxx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{fryy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{frzz} \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

フォークの回転運動エネルギーと同様にフォークロータの回転運動エネルギーを導出すると, 式(1.95)となる.

$$\begin{aligned} K_{rfr} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{rf}^w \top \mathbf{I}_{fr}^w \boldsymbol{\omega}_{rf}^w \\ &= \frac{1}{2} I_{frxx} \dot{\phi}_v^2 \sin^2 (\theta_p + n_f \theta_f) + \frac{1}{2} I_{fryy} (\dot{\theta}_p + n_f \dot{\theta}_f)^2 + \frac{1}{2} I_{frzz} \dot{\phi}_v^2 \cos^2 (\theta_p + n_f \theta_f) \end{aligned} \quad (1.95)$$

最後に, 荷物搬送用二輪ロボットのポテンシャルエネルギーについて示す. ポテンシャルの基準平面を制御参照点を含む水平面に設定すると, 求めるポテンシャルエネルギー U は, 式(1.96)と表せる.

$$U = m_b g l_b \cos \theta_p + m_f g (l_h \cos \theta_p - l_f \sin \theta_{p+f}) \quad (1.96)$$

以上からラグランジュ関数 L は式(1.97)となる.

$$\begin{aligned} L &= K_t + K_r - U \\ &= m_w \left(\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + l_w^2 \dot{\phi}_v^2 \right) + \frac{1}{2} m_b \left(\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + l_b^2 \dot{\theta}_p^2 + l_b^2 \dot{\phi}_v^2 \sin^2 \theta_p \right) \\ &\quad + m_b l_b \dot{\theta}_p \cos \theta_p (\dot{x}_v \cos \phi_v + \dot{y}_v \sin \phi_v) + m_b l_b \dot{\phi}_v \sin \theta_p (-\dot{x}_v \sin \phi_v + \dot{y}_v \cos \phi_v) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_f \left[\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + l_h^2 \dot{\theta}_p^2 + l_f^2 \dot{\theta}_{p+f}^2 - 2 l_h l_f \dot{\theta}_p \dot{\theta}_{p+f} \sin \theta_f + (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f})^2 \dot{\phi}_v^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\dot{x}_v \left\{ (l_h \dot{\theta}_p \cos \theta_p - l_f \dot{\theta}_{p+f} \sin \theta_{p+f}) \cos \phi_v - (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f}) \dot{\phi}_v \sin \phi_v \right\} \\
 & + 2\dot{y}_v \left\{ (l_h \dot{\theta}_p \cos \theta_p - l_f \dot{\theta}_{p+f} \sin \theta_{p+f}) \sin \phi_v + (l_h \sin \theta_p + l_f \cos \theta_{p+f}) \dot{\phi}_v \cos \phi_v \right\} \\
 & + \frac{1}{2} (I_{wy} + n_w^2 I_{ry}) (\dot{\theta}_{wl}^b)^2 + (I_{wy} + n_w I_{ry}) \dot{\theta}_p (\dot{\theta}_{wl}^b + \dot{\theta}_{wr}^b) \\
 & + (I_{wy} + I_{ry}) \dot{\theta}_p^2 + (I_{wz} + I_{rz}) \dot{\phi}_v^2 + \frac{1}{2} I_{bxx} \dot{\phi}_v^2 \sin^2 \theta_p + \frac{1}{2} I_{byy} \dot{\theta}_p^2 + \frac{1}{2} I_{bzz} \dot{\phi}_v^2 \cos^2 \theta_p \\
 & + \frac{1}{2} I_{fxx} \dot{\phi}_v^2 \sin^2 \theta_{p+f} + \frac{1}{2} I_{fyx} \dot{\theta}_{p+f}^2 + \frac{1}{2} I_{fzz} \dot{\phi}_v^2 \cos^2 \theta_{p+f} \\
 & + \frac{1}{2} I_{frxx} \dot{\phi}_v^2 \sin^2 (\theta_p + n_f \theta_f) + \frac{1}{2} I_{fryy} (\dot{\theta}_p + n_f \dot{\theta}_f)^2 + \frac{1}{2} I_{frzz} \dot{\phi}_v^2 \cos^2 (\theta_p + n_f \theta_f) \\
 & - m_b g l_b \cos \theta_p - m_f g (l_h \cos \theta_p - l_f \sin \theta_{p+f})
 \end{aligned} \tag{1.97}$$

1.2.2 拘束条件を考慮する前の運動方程式

1.2.2 節では、二輪型歩行器の拘束条件がない場合の動力学をラグランジュ法を用いて求める。1.2.1 節で導出したラグランジュ関数 L を式(1.98)のラグランジュ方程式に代入することで荷物搬送用二輪ロボットの運動方程式を導出する。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{1.98}$$

ここで、 \mathbf{q} は式(1.99)で定義される一般化座標を表し、 \mathbf{Q} は一般化力を表している。なお、下付き文字の i は自由度を表しており、 \mathbf{q} , \mathbf{Q} におけるそれぞれの番号に対応する要素を示している。

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_v & y_v & \phi_v & \theta_p & \theta_{wl}^b & \theta_{wr}^b & \theta_f \end{bmatrix}^\top \tag{1.99}$$

まず、ラグランジュ方程式の右辺である一般化力 \mathbf{Q} について考える。二輪ロボットにおいて左右のモータの駆動トルク τ_l , τ_r およびフォークモータの駆動トルク τ_f から生成される仕事 W は、式(1.100)となる。

$$W_w = \theta_{wl}^b n_w \tau_l + \theta_{wr}^b n_w \tau_r + \theta_f n_f \tau_f \tag{1.100}$$

一般化力 \mathbf{Q} は式(1.101)と表せる。ただし、 \mathbf{E} , $\boldsymbol{\tau}$ はそれぞれ式(1.102), 式(1.103)である。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \theta_{wl}^b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial W}{\partial \theta_{wr}^b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial W}{\partial \theta_f} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ n_w & 0 & 0 \\ 0 & n_w & 0 \\ 0 & 0 & n_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_l \\ \tau_r \\ \tau_f \end{bmatrix} = \mathbf{E}\boldsymbol{\tau} \quad (1.101)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & n_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_f \end{bmatrix}^T \quad (1.102)$$

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_l \ \tau_r \ \tau_f]^T \quad (1.103)$$

式(1.97)のラグランジュ関数 L , 式(1.101)の一般化力からラグランジュ方程式を解く.
 x_v に関するラグランジュ方程式は式(1.104)である.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_v} = 0 \quad (1.104)$$

式(1.104)の各要素を計算すると, 式(1.105)から式(1.107)となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_v} &= (m_b + 2m_w + m_f)\ddot{x}_v + (m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \cos \phi_v \dot{\theta}_p \\ &\quad - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_{p+f} - (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \sin \phi_v \dot{\phi}_v \\ &\quad - m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v \dot{\phi}_v \end{aligned} \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_v} \right) &= (m_b + m_f + 2m_w)\ddot{x}_v - \{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \ddot{\phi}_v \\ &\quad \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \cos \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \ddot{\theta}_p \\ &\quad - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \ddot{\theta}_f - m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_f^2 \\ &\quad - \{m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v + (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \cos \phi_v\} (\dot{\theta}_p^2 + \dot{\phi}_v^2) \\ &\quad - 2 \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \dot{\theta}_p \dot{\phi}_v \\ &\quad - 2m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_p \dot{\theta}_f + 2m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v \dot{\theta}_f \dot{\phi}_v \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_v} = 0 \quad (1.107)$$

式(1.105)から式(1.107)より, x_v に関する運動方程式は式(1.108)となる.

$$(m_b + m_f + 2m_w)\ddot{x}_v - \{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \ddot{\phi}_v$$

$$\begin{aligned}
 & \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \cos \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \ddot{\theta}_p \\
 & - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \ddot{\theta}_f - m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_f^2 \\
 & - \{m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v + (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \cos \phi_v\} (\dot{\theta}_p^2 + \dot{\phi}_v^2) \\
 & - 2 \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \dot{\theta}_p \dot{\phi}_v \\
 & - 2 m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_p \dot{\theta}_f + 2 m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v \dot{\theta}_f \dot{\phi}_v \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{1.108}$$

次に, y_v に関するラグランジュ方程式は式 (1.109) である.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_v} = 0 \tag{1.109}$$

式 (1.109) の各要素を計算すると, 式 (1.110) から式 (1.112) となる.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_v} &= (m_b + 2m_w + m_f) \dot{y}_v + (m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \sin \phi_v \dot{\theta}_p \\
 &- m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_{p+f} + (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \cos \phi_v \dot{\phi}_v \\
 &+ m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\phi}_v
 \end{aligned} \tag{1.110}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_v} \right) &= (m_b + 2m_w + m_f) \ddot{y}_v + \{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \cos \phi_v + m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \ddot{\phi}_v \\
 &\{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \ddot{\theta}_p \\
 &- m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v \ddot{\theta}_f - m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v \dot{\theta}_f^2 \\
 &- \{m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v + (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \sin \phi_v\} (\dot{\theta}_p^2 + \dot{\phi}_v^2) \\
 &+ 2 \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \cos \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \dot{\theta}_p \dot{\phi}_v \\
 &- 2 m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v \dot{\theta}_p \dot{\theta}_f - 2 m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_f \dot{\phi}_v
 \end{aligned} \tag{1.111}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_v} = 0 \tag{1.112}$$

式 (1.110) から式 (1.112) より, y_v に関する運動方程式は式 (1.113) となる.

$$\begin{aligned}
 &(m_b + 2m_w + m_f) \ddot{y}_v + \{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \cos \phi_v + m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \ddot{\phi}_v \\
 &\{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \ddot{\theta}_p \\
 &- m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v \ddot{\theta}_f - m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v \dot{\theta}_f^2 \\
 &- \{m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v + (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \sin \phi_v\} (\dot{\theta}_p^2 + \dot{\phi}_v^2) \\
 &+ 2 \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \cos \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \dot{\theta}_p \dot{\phi}_v
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v \dot{\theta}_p \dot{\theta}_f - 2m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_f \dot{\phi}_v \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{1.113}$$

次に ϕ_v に関するラグランジュ方程式は式 (1.114) となる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_v} = 0 \tag{1.114}$$

式 (1.114) の各要素を計算すると、式 (1.115) から式 (1.117) となる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_v} &= -\{(l_b m_b + l_h m_f) \sin \theta_p + l_f m_f \cos \theta_{p+f}\} (\sin \phi_v \dot{x}_v - \cos \phi_v \dot{y}_v) \\
 &\quad + \{2(I_{rz} + I_{wz} + l_w^2 m_w) + (I_{bxx} + l_b^2 m_b + l_h^2 m_f) \sin^2 \theta_p + I_{fxz} \sin^2 \theta_{p+f} \\
 &\quad + I_{frxz} \sin^2 (\theta_p + n_f \theta_f) + I_{bzz} \cos^2 \theta_p + (I_{fzz} + l_f^2 m_f) \cos^2 \theta_{p+f} \\
 &\quad + I_{frzz} \cos^2 (\theta_p + n_f \theta_f) + 2l_f l_h m_f \sin \theta_p \cos \theta_{p+f}\} \dot{\phi}_v
 \end{aligned} \tag{1.115}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_v} \right) &= -\{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \sin \phi_v + m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \ddot{x}_v \\
 &\quad + \{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \cos \phi_v + m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \ddot{y}_v \\
 &\quad + \{2(I_{rz} + I_{wz} + m_w l_w^2) + I_{bzz} \cos^2 \theta_p + (I_{fzz} + m_f l_f^2) \cos^2 \theta_{p+f} \\
 &\quad + I_{frzz} \cos^2 (\theta_p + n_f \theta_f) + 2m_f l_f l_h \cos \theta_{p+f} \sin \theta_p + (I_{bxx} + m_b l_b^2 + m_f l_h^2) \sin^2 \theta_p \\
 &\quad + I_{fxz} \sin^2 \theta_{p+f} + I_{frxz} \sin^2 (\theta_p + n_f \theta_f)\} \ddot{\phi}_v
 \end{aligned} \tag{1.116}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad + \{2m_f l_f l_h \cos (\theta_{p+f} + \theta_p) + (I_{bxx} - I_{bzz} + m_b l_b^2 + m_f l_h^2) \sin 2\theta_p \\
 &\quad + (I_{fxz} - I_{fzz} - m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} + (I_{frxz} - I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f)\} \dot{\theta}_p \dot{\phi}_v \\
 &\quad - \{2m_f l_f l_h \sin \theta_p \sin \theta_{p+f} + (-I_{fxz} + I_{fzz} + m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} \\
 &\quad + n_f (-I_{frxz} + I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f)\} \dot{\theta}_f \dot{\phi}_v \\
 &\quad + \{-(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \dot{\theta}_p + m_f l_f \sin \theta_{p+f} \dot{\theta}_p + m_f l_f \sin \theta_{p+f} \dot{\theta}_f\} \\
 &\quad (\sin \phi_v \dot{x}_v - \cos \phi_v \dot{y}_v) \\
 &\quad - \{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \dot{\phi}_v + m_f l_f \cos \theta_{p+f} \dot{\phi}_v\} (\cos \phi_v \dot{x}_v + \sin \phi_v \dot{y}_v)
 \end{aligned} \tag{1.116}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \phi_v} &= \{-(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \dot{\theta}_p + m_f l_f \sin \theta_{p+f} \dot{\theta}_p + m_f l_f \sin \theta_{p+f} \dot{\theta}_f\} \\
 &\quad (\sin \phi_v \dot{x}_v - \cos \phi_v \dot{y}_v) \\
 &\quad - \{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \dot{\phi}_v + m_f l_f \cos \theta_{p+f} \dot{\phi}_v\} (\cos \phi_v \dot{x}_v + \sin \phi_v \dot{y}_v)
 \end{aligned} \tag{1.117}$$

式 (1.115) から式 (1.117) より、 ϕ_v に関する運動方程式は式 (1.118) となる。

$$-\{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \sin \phi_v + m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \ddot{x}_v$$

$$\begin{aligned}
 & + \{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \cos \phi_v + m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \ddot{y}_v \\
 & + \{2(I_{rz} + I_{wz} + m_w l_w^2) + I_{bzz} \cos^2 \theta_p + (I_{fzz} + m_f l_f^2) \cos^2 \theta_{p+f} \\
 & + I_{frzz} \cos^2 (\theta_p + n_f \theta_f) + 2m_f l_f l_h \cos \theta_{p+f} \sin \theta_p + (I_{bxx} + m_b l_b^2 + m_f l_h^2) \sin^2 \theta_p \\
 & + I_{fxz} \sin^2 \theta_{p+f} + I_{frxz} \sin^2 (\theta_p + n_f \theta_f)\} \ddot{\phi}_v \\
 & + \{2m_f l_f l_h \cos (\theta_{p+f} + \theta_p) + (I_{bxx} - I_{bzz} + m_b l_b^2 + m_f l_h^2) \sin 2\theta_p \\
 & + (I_{fxz} - I_{fzz} - m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} + (I_{frxz} - I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f)\} \dot{\theta}_p \dot{\phi}_v \\
 & - \{2m_f l_f l_h \sin \theta_p \sin \theta_{p+f} + (-I_{fxz} + I_{fzz} + m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} \\
 & + n_f (-I_{frxz} + I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f)\} \dot{\theta}_f \dot{\phi}_v \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{1.118}$$

次に, θ_p に関するラグランジュ方程式は式 (1.119) となる.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_p} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_p} = 0 \tag{1.119}$$

式 (1.119) の各要素を計算すると, 式 (1.120) から式 (1.122) となる.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_p} &= \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p - m_f l_f \sin \theta_{p+f}\} (\cos \phi_v \dot{x}_v + \sin \phi_v \dot{y}_v) \\
 &+ (m_b l_b^2 + m_f l_f^2 + m_f l_h^2 + I_{byy} + 2I_{wy} + 2I_{ry} + I_{fy} + I_{fryy}) \dot{\theta}_p \\
 &+ (m_f l_f^2 + I_{fy} + n_f I_{fryy}) \dot{\theta}_f - m_f l_f l_h \sin \theta_f (\dot{\theta}_{p+f} + \dot{\theta}_p) \\
 &+ (I_{wy} + n_w I_{ry}) \dot{\theta}_{wl} + (I_{wy} + n_w I_{ry}) \dot{\theta}_{wr}
 \end{aligned} \tag{1.120}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_p} \right) &= \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \cos \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \ddot{x}_v \\
 &+ \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \ddot{y}_v \\
 &+ \{I_{byy} + I_{fy} + I_{fryy} + 2I_{wy} + 2I_{ry} + m_b l_b^2 + m_f (l_h^2 + l_f^2) - 2m_f l_h l_f \sin \theta_f\} \ddot{\theta}_p \\
 &+ (I_{wy} + n_w I_{ry}) \ddot{\theta}_{wl} + (I_{wy} + n_w I_{ry}) \ddot{\theta}_{wr} \\
 &+ (I_{fy} + n_f I_{fryy} + m_f l_f^2 - m_f l_f l_h \sin \theta_f) \ddot{\theta}_f - m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_f (\dot{\theta}_{p+f} + \dot{\theta}_p) \\
 &- \{(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p + m_f l_f \cos \theta_{p+f}\} (\cos \phi_v \dot{x}_v + \sin \phi_v \dot{y}_v) \dot{\theta}_p \\
 &- \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p - m_f l_f \sin \theta_{p+f}\} (\sin \phi_v \dot{x}_v - \cos \phi_v \dot{y}_v) \dot{\phi}_v \\
 &- m_f l_f \cos \theta_{p+f} (\cos \phi_v \dot{x}_v + \sin \phi_v \dot{y}_v) \dot{\theta}_f
 \end{aligned} \tag{1.121}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_p} = (m_b l_b + m_f l_h) g \sin \theta_p + m_f l_f g \cos \theta_{p+f}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ m_f l_f \cos \theta_{p+f} (\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_p) + (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \dot{\theta}_p \right\} (\cos \phi_v \dot{x}_v + \sin \phi_v \dot{y}_v) \\
 & - \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p - m_f l_f \sin \theta_{p+f}\} (\sin \phi_v \dot{x}_v - \cos \phi_v \dot{y}_v) \dot{\phi}_v \\
 & + m_f l_f l_h \cos (\theta_{p+f} + \theta_p) \dot{\phi}_v^2 + \frac{1}{2} (I_{bxx} - I_{bzz} + m_b l_b^2 + m_f l_h^2) \sin 2\theta_p \dot{\phi}_v^2 \\
 & + \frac{1}{2} (I_{fxx} - I_{fzz} - m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} \dot{\phi}_v^2 \\
 & + \frac{1}{2} (I_{frxx} - I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f) \dot{\phi}_v^2
 \end{aligned} \tag{1.122}$$

式(1.120)から式(1.122)より、 θ_p に関する運動方程式は式(1.123)となる。

$$\begin{aligned}
 & \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \cos \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \ddot{x}_v \\
 & + \{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \ddot{y}_v \\
 & + \{I_{byy} + I_{fyy} + I_{fryy} + 2I_{wy} + 2I_{ry} + m_b l_b^2 + m_f (l_h^2 + l_f^2) - 2m_f l_h l_f \sin \theta_f\} \ddot{\theta}_p \\
 & + (I_{wy} + n_w I_{ry}) \ddot{\theta}_{wl}^b + (I_{wy} + n_w I_{ry}) \ddot{\theta}_{wr}^b \\
 & + (I_{fyy} + n_f I_{fryy} + m_f l_f^2 - m_f l_f l_h \sin \theta_f) \ddot{\theta}_f \\
 & - m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_f^2 - 2m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_p \dot{\theta}_f \\
 & - \left\{ m_f l_f l_h \cos (\theta_{p+f} + \theta_p) + \frac{1}{2} (I_{bxx} - I_{bzz} + m_b l_b^2 + m_f l_h^2) \sin 2\theta_p \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} (I_{fxx} - I_{fzz} - m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} + \frac{1}{2} (I_{frxx} - I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f) \right\} \dot{\phi}_v^2 \\
 & - (m_b l_b + m_f l_h) g \sin \theta_p - m_f l_f g \cos \theta_{p+f} \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{1.123}$$

次に、 θ_{wl}^b に関するラグランジュ方程式は式(1.124)となる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{wl}^b} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{wl}^b} = n_w \tau_l \tag{1.124}$$

式(1.124)の各要素を計算すると、式(1.125)から式(1.127)となる。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{wl}^b} = (I_{wy} + n_w I_{ry}) \dot{\theta}_p + (I_{wy} + n_w^2 I_{ry}) \dot{\theta}_{wl}^b \tag{1.125}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{wl}^b} \right) = (I_{wy} + n_w I_{ry}) \ddot{\theta}_p + (I_{wy} + n_w^2 I_{ry}) \ddot{\theta}_{wl}^b \tag{1.126}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{wl}^b} = 0 \tag{1.127}$$

式(1.125)から式(1.127)より、 θ_{wl}^b に関する運動方程式は式(1.128)となる。

$$(I_{wy} + n_w I_{ry}) \ddot{\theta}_p + (I_{wy} + n_w^2 I_{ry}) \ddot{\theta}_{wl}^b = n_w \tau_l \quad (1.128)$$

次に、 θ_{wr}^b に関するラグランジュ方程式は式(1.129)となる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{wr}^b} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{wr}^b} = n_w \tau_r \quad (1.129)$$

式(1.129)の各要素を計算すると、式(1.130)から式(1.132)となる。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{wr}^b} = (I_{wy} + n_w I_{ry}) \dot{\theta}_p + (I_{wy} + n_w^2 I_{ry}) \dot{\theta}_{wr}^b \quad (1.130)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{wr}^b} \right) = (I_{wy} + n_w I_{ry}) \ddot{\theta}_p + (I_{wy} + n_w^2 I_{ry}) \ddot{\theta}_{wr}^b \quad (1.131)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{wr}^b} = 0 \quad (1.132)$$

式(1.130)から式(1.132)より、 θ_{wr}^b に関する運動方程式は式(1.133)となる。

$$(I_{wy} + n_w I_{ry}) \ddot{\theta}_p + (I_{wy} + n_w^2 I_{ry}) \ddot{\theta}_{wr}^b = n_w \tau_r \quad (1.133)$$

最後に、 θ_f に関するラグランジュ方程式は式(1.134)となる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_f} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_f} = n_f \tau_f \quad (1.134)$$

式(1.134)の各要素を計算すると、式(1.135)から式(1.137)となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_f} &= -m_f l_f \sin \theta_{p+f} (\cos \phi_v \dot{x}_v + \sin \phi_v \dot{y}_v) + (I_{fy} + n_f^2 I_{fryy} + m_f l_f^2) \dot{\theta}_f \\ &\quad + (I_{fy} + n_f I_{fryy} + m_f l_f^2 - m_f l_f l_h \sin \theta_f) \dot{\theta}_p \end{aligned} \quad (1.135)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_f} \right) &= -m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \ddot{x}_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v \ddot{y}_v \\ &\quad + (I_{fy} + n_f I_{fryy} + m_f l_f^2 - m_f l_f l_h \sin \theta_f) \ddot{\theta}_p + (I_{fy} + n_f^2 I_{fryy} + m_f l_f^2) \ddot{\theta}_f \\ &\quad - m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_f \dot{\theta}_p - m_f l_f \cos \theta_{p+f} (\dot{\theta}_p + \dot{\theta}_f) (\cos \phi_v \dot{x}_v + \sin \phi_v \dot{y}_v) \\ &\quad + m_f l_f \sin \theta_{p+f} \dot{\phi}_v (\sin \phi_v \dot{x}_v - \cos \phi_v \dot{y}_v) \end{aligned} \quad (1.136)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_f} &= m_f l_f g \cos \theta_{p+f} - m_f l_f l_h \sin \theta_p \sin \theta_{p+f} \dot{\phi}_v^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (I_{fx} - I_{fz} - m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} \dot{\phi}_v^2 + \frac{1}{2} n_f (I_{frxx} - I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f) \dot{\phi}_v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -m_f l_f \cos \theta_{p+f} (\dot{\theta}_p + \dot{\theta}_f) (\cos \phi_v \dot{x}_v + \sin \phi_v \dot{y}_v) - m_f l_f l_h \cos \theta_f (\dot{\theta}_p + \dot{\theta}_f) \dot{\theta}_p \\
 & + m_f l_f \sin \theta_{p+f} (\sin \phi_v \dot{x}_v - \cos \phi_v \dot{y}_v) \dot{\phi}_v
 \end{aligned} \tag{1.137}$$

式(1.135)から式(1.137)より、 θ_f に関する運動方程式は式(1.138)となる。

$$\begin{aligned}
 & -m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \ddot{x}_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v \ddot{y}_v \\
 & + (I_{fy} + n_f I_{fryy} + m_f l_f^2 - m_f l_f l_h \sin \theta_f) \ddot{\theta}_p + (I_{fy} + n_f^2 I_{fryy} + m_f l_f^2) \ddot{\theta}_f \\
 & + m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_p^2 + \left\{ m_f l_f l_h \sin \theta_p \sin \theta_{p+f} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} (I_{fx} - I_{fz} - m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} - \frac{1}{2} n_f (I_{frxx} - I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f) \right\} \dot{\phi}_v^2 \\
 & - m_f l_f g \cos \theta_{p+f} \\
 & = n_f \tau_f
 \end{aligned} \tag{1.138}$$

以上から、運動方程式をまとめると、荷物搬送用二輪ロボットの運動方程式は式(1.139)のように行列表記できる。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{E}\boldsymbol{\tau} \tag{1.139}$$

ここで、 $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ は慣性行列、 $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ は遠心力・コリオリ力、 $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ は重力項を表し、それぞれ式(1.140)、式(1.141)、式(1.142)である。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 & 0 & m_{17} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 & 0 & m_{27} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & 0 & m_{44} & m_{45} & m_{46} & m_{47} \\ 0 & 0 & 0 & m_{54} & m_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{64} & 0 & m_{66} & 0 \\ m_{71} & m_{72} & 0 & m_{74} & 0 & 0 & m_{77} \end{bmatrix} \tag{1.140}$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & v_7 \end{bmatrix}^T \tag{1.141}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_4 & 0 & 0 & g_7 \end{bmatrix}^T \tag{1.142}$$

$$\tag{1.143}$$

ただし、各行列の各要素は以下の通りである。

$$m_{11} = m_{22} = m_b + 2m_w + m_f \tag{1.144}$$

$$m_{13} = m_{31} = -(m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v \tag{1.145}$$

$$m_{14} = m_{41} = (m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \cos \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \quad (1.146)$$

$$m_{17} = m_{71} = -m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \quad (1.147)$$

$$m_{23} = m_{32} = (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \cos \phi_v + m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v \quad (1.148)$$

$$m_{24} = m_{42} = (m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v \quad (1.149)$$

$$m_{27} = m_{72} = -m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v \quad (1.150)$$

$$\begin{aligned} m_{33} = & 2(I_{rz} + I_{wz} + m_w l_w^2) + I_{bzz} \cos^2 \theta_p + (I_{fzz} + m_f l_f^2) \cos^2 \theta_{p+f} \\ & + I_{frzz} \cos^2 (\theta_p + n_f \theta_f) + 2m_f l_f l_h \cos \theta_{p+f} \sin \theta_p + (I_{bxx} + m_b l_b^2 + m_f l_h^2) \sin^2 \theta_p \\ & + I_{fxz} \sin^2 \theta_{p+f} + I_{frxz} \sin^2 (\theta_p + n_f \theta_f) \end{aligned} \quad (1.151)$$

$$m_{44} = I_{byy} + I_{fyg} + I_{fryy} + 2I_{wy} + 2I_{ry} + m_b l_b^2 + m_f (l_h^2 + l_f^2) - 2m_f l_h l_f \sin \theta_f \quad (1.152)$$

$$m_{45} = m_{46} = m_{54} = m_{64} = I_{wy} + n_w I_{ry} \quad (1.153)$$

$$m_{47} = m_{74} = I_{fyg} + n_f I_{fryy} + m_f l_f^2 - m_f l_f l_h \sin \theta_f \quad (1.154)$$

$$m_{55} = m_{66} = I_{wy} + n_w^2 I_{ry} \quad (1.155)$$

$$m_{77} = I_{fyg} + n_f^2 I_{fryy} + m_f l_f^2 \quad (1.156)$$

$$\begin{aligned} v_1 = & -\{m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v + (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \cos \phi_v\} \left(\dot{\theta}_p^2 + \dot{\phi}_v^2 \right) \\ & -m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_f^2 \\ & -2\{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \sin \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v\} \dot{\theta}_p \dot{\phi}_v \\ & -2m_f l_f \cos \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_p \dot{\theta}_f + 2m_f l_f \sin \theta_{p+f} \sin \phi_v \dot{\theta}_f \dot{\phi}_v \end{aligned} \quad (1.157)$$

$$\begin{aligned} v_2 = & -\{m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v + (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \sin \phi_v\} \left(\dot{\theta}_p^2 + \dot{\phi}_v^2 \right) \\ & -m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v \dot{\theta}_f^2 \\ & +2\{(m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p \cos \phi_v - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v\} \dot{\theta}_p \dot{\phi}_v \\ & -2m_f l_f \cos \theta_{p+f} \sin \phi_v \dot{\theta}_p \dot{\theta}_f - 2m_f l_f \sin \theta_{p+f} \cos \phi_v \dot{\theta}_f \dot{\phi}_v \end{aligned} \quad (1.158)$$

$$\begin{aligned} v_3 = & +\{2m_f l_f l_h \cos (\theta_{p+f} + \theta_p) + (I_{bxx} - I_{bzz} + m_b l_b^2 + m_f l_h^2) \sin 2\theta_p \\ & +(I_{fxz} - I_{fzz} - m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} + (I_{frxz} - I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f)\} \dot{\theta}_p \dot{\phi}_v \\ & -\{2m_f l_f l_h \sin \theta_p \sin \theta_{p+f} + (-I_{fxz} + I_{fzz} + m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} \\ & +n_f (-I_{frxz} + I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f)\} \dot{\theta}_f \dot{\phi}_v \end{aligned} \quad (1.159)$$

$$v_4 = -m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_f^2 - 2m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_p \dot{\theta}_f \quad (1.160)$$

$$-\left\{m_f l_f l_h \cos(\theta_{p+f} + \theta_p) + \frac{1}{2}(I_{bxx} - I_{bzz} + m_b l_b^2 + m_f l_h^2) \sin 2\theta_p + \frac{1}{2}(I_{fxx} - I_{fzz} - m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} + \frac{1}{2}(I_{frxx} - I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f)\right\} \dot{\phi}_v^2 \quad (1.161)$$

$$v_7 = m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_p^2 + \{m_f l_f l_h \sin \theta_p \sin \theta_{p+f} - \frac{1}{2}(I_{fxx} - I_{fzz} - m_f l_f^2) \sin 2\theta_{p+f} - \frac{1}{2}n_f(I_{frxx} - I_{frzz}) \sin 2(\theta_p + n_f \theta_f)\} \dot{\phi}_v^2 \quad (1.162)$$

$$g_4 = -(m_b l_b + m_f l_h) g \sin \theta_p - m_f l_f g \cos \theta_{p+f} \quad (1.163)$$

$$g_7 = -m_f l_f g \cos \theta_{p+f} \quad (1.164)$$

1.2.3 拘束条件を考慮した運動方程式

1.2.3節では、1.2.2節で導出した拘束条件を考慮する前の運動方程式に対し、1.1.4節で述べた拘束条件を考慮して低次元化する。1.1.4節で導出した速度拘束条件に関する式(1.47)，式(1.52)，式(1.53)をまとめることで、式(1.166)で表される係数行列 $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ を用いた式(1.165)が成り立つ。

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (1.165)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin \phi_v & -\cos \phi_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi_v & \sin \phi_v & -l_w & -r_w & -r_w & 0 & 0 \\ \cos \phi_v & \sin \phi_v & l_w & -r_w & 0 & -r_w & 0 \end{bmatrix} \quad (1.166)$$

式(1.165)の拘束条件があるとき、ラグランジュの未定乗数 λ を用いて、運動方程式は式(1.167)と書き換えられる。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{A}^T(\dot{\mathbf{q}}) \lambda = \mathbf{E} \boldsymbol{\tau} \quad (1.167)$$

ここで、新たな一般化座標 $\boldsymbol{\nu}$ を式(1.168)で定義する。

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} v & \dot{\phi}_v & \dot{\theta}_p & \dot{\theta}_f \end{bmatrix}^T \quad (1.168)$$

1.2.2節で用いてきた一般化座標 \mathbf{q} と新たに1.2.3節で導入した一般化座標 $\boldsymbol{\nu}$ との間には、式(1.45)，式(1.46)，式(1.54)，および式(1.55)をまとめて式(1.169)の関係が成り立つ。ただし、行列 $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ は、式(1.170)で表される。

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\nu} \quad (1.169)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \phi_v & 0 & 0 & 0 \\ \sin \phi_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{r_w} & -\frac{l_w}{r_w} & -1 & 0 \\ \frac{1}{r_w} & \frac{l_w}{r_w} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.170)$$

このとき、 $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ および $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ の間には、式 (1.171) の関係が成り立つ。

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = 0 \quad (1.171)$$

式 (1.169) の両辺を微分すると式 (1.172) が成り立つ。

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q})\dot{\nu} + \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q})\nu \quad (1.172)$$

式 (1.172) を式 (1.167) に代入することで、一般化座標を新たに定義したものに置き換えた式 (1.173) を得る。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) (\mathbf{S}(\mathbf{q})\dot{\nu} + \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q})\nu) + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{A}^T(\dot{\mathbf{q}})\lambda = \mathbf{E}\tau \quad (1.173)$$

式 (1.173) の左から $\mathbf{S}^T(\mathbf{q})$ を乗じ、式 (1.171) の関係から未定乗数項を消去することで、式 (1.174) が得られる。

$$\mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q}) (\mathbf{S}(\mathbf{q})\dot{\nu} + \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q})\nu) + \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{E}\tau \quad (1.174)$$

式 (1.174)において、新たに定義する行列 $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{H}}$, $\bar{\mathbf{V}}$, $\bar{\mathbf{G}}$, $\bar{\mathbf{E}}$ を用いて書き換えることで、拘束条件を考慮した二輪型歩行器の運動方程式は式 (1.175) となる。

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\nu} + \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\nu + \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{E}}\tau \quad (1.175)$$

ただし、各行列は式 (1.176) から式 (1.191) である。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) \\ &= \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \text{[Redacted]} & \bar{m}_{13} & \bar{m}_{14} \\ \text{[Redacted]} & \text{[Redacted]} & \text{[Redacted]} & \text{[Redacted]} \\ \bar{m}_{31} & \text{[Redacted]} & \bar{m}_{33} & \bar{m}_{43} \\ \bar{m}_{41} & \text{[Redacted]} & \bar{m}_{43} & \bar{m}_4 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (1.176)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \{m_f l_f \cos \theta_{p+f} + (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p\} \dot{\phi}_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.177)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \left[\bar{v}_1 \ \boxed{} \ \bar{v}_3 \ \bar{v}_4 \right]^T \end{aligned} \quad (1.178)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{} \\ -(m_b l_b + m_f l_h) g \sin \theta_p - m_f l_f g \cos \theta_{p+f} \\ -m_f l_f g \cos \theta_{p+f} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.179)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{E} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{n_w}{r_w} & \frac{n_w}{r_w} & 0 \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ -n_w & -n_w & 0 \\ 0 & 0 & n_f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.180)$$

$$\bar{m}_{11} = m_b + 2 \left(m_w + \frac{I_{wy} + n_w^2 I_{ry}}{r_w^2} \right) + m_f \quad (1.181)$$

$$\bar{m}_{13} = \bar{m}_{31} = -\frac{2I_{ry}(n_w^2 - n_w)}{r_w} + (m_b l_b + m_f l_h) \cos \theta_p - m_f l_f \sin \theta_{p+f} \quad (1.182)$$

$$\bar{m}_{14} = \bar{m}_{41} = -m_f l_f \sin \theta_{p+f} \quad (1.183)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{m}_{21} &= m_b l_b \sin \theta_p + m_f l_f \sin \theta_{p+f} \\ \bar{m}_{22} &= m_b l_b^2 + m_f l_f^2 + m_f l_f l_h \sin \theta_f \\ \bar{m}_{23} &= m_b l_b \cos \theta_p + m_f l_f \cos \theta_{p+f} \\ \bar{m}_{24} &= m_b l_b \sin \theta_p + m_f l_f \sin \theta_{p+f} \end{aligned}}$$

$$\bar{m}_{33} = I_{byy} + I_{fyy} + I_{fryy} + 2(n_w - 1)^2 I_{ry} + m_b l_b^2 + m_f(l_f^2 + l_h^2) - 2m_f l_f l_h \sin \theta_f \quad (1.185)$$

$$\bar{m}_{34} = \bar{m}_{43} = I_{fyy} + n_f I_{fryy} + m_f l_f^2 - m_f l_f l_h \sin \theta_f \quad (1.186)$$

$$\bar{m}_{44} = I_{fyy} + n_f^2 I_{fryy} + m_f l_f^2 \quad (1.187)$$

$$\bar{v}_1 = (m_b l_b + m_f l_h) \sin \theta_p \left(\dot{\theta}_p^2 + \boxed{} \right) - m_f l_f \cos \theta_{p+f} \left(\dot{\theta}_{p+f}^2 + \boxed{} \right) \quad (1.188)$$

$$\bar{v}_3 = -m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_f^2 - 2m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_f \dot{\theta}_p +$$

(1.190)

$$\bar{v}_4 = m_f l_f l_h \cos \theta_f \dot{\theta}_p^2 +$$

(1.191)