Tarea 5: Herramientas matemáticas con aplicaciones en Física (7%)

Marlon Brenes*

PARTE I: ESPECTRO Y RECONSTRUCCIÓN USANDO FFT (3.5%)

Estudiemos la transformada de Fourier de una onda sinusoidal **cuadrada**. La onda está definida por

$$g(t) = \mathrm{sgn}[\sin(2\pi f t)], \tag{1}$$

donde la función sgn[] significa la **positividad de la función**. Es decir, si la función $s(x) = \sin(2\pi f t)$ es positiva para cierto valor de x, entonces $g(x) = 1$. De lo contrario, si la función $s(t) = \sin(2\pi f t)$ es negativa para cierto valor de x, entonces $g(x) = -1$. De esta forma obtenemos una oscilación cuadrada con frecuencia f.

Sus tareas son las siguientes:

1. Realice un gráfico de solamente un periodo de la función cuadrada (0.5%)
2. Utilizando solamente un periodo de la función $g(t)$ y $N = 1000$ puntos de muestreo, evalúe la FFT (0.5%)
3. Realice un gráfico del espectro de $g(t)$ (0.5%)
4. Que conclusiones obtiene del espectro de la función $g(t)$, a nivel intuitivo con respecto a los modos de oscilación? (0.5%)
5. Reconstruya la señal original $g(t)$. Para esto, utilice solamente la mitad del espectro (ya sea el espectro negativo o positivo de frecuencias). (0.5%)
6. Realice un gráfico de la reconstrucción de la señal. Para esto se requiere la DFT inversa, usando la Ecuación (28) del `jupyter-notebook` llamado **DFT.ipynb** ubicado en el Tema_12 del repositorio del curso. En el gráfico, utilice distintas aproximaciones en las cuales el parámetro k regular el orden de la aproximación. Utilice $k = 2, 4, 8, 60$ y en el mismo gráfico muestre estas cuatro curvas junto con la señal original. Con respecto a su intuición del punto 4), que conclusiones obtiene con respecto a los modos de oscilación de la señal original? (1.0%)

PARTE II: ECUACIONES PARABÓLICAS (3.5%)

Resuelva la ecuación de Laplace en dos dimensiones para el potencial electrostático $\phi = \phi(x, y)$

$$\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y^2} = -\frac{\rho(x, y)}{\epsilon_0} \tag{2}$$

para una placa cuadrada de 100cm $\times$ 100cm como se muestra en la Fig. 1. El problema modela la forma del potencial electrostático en una placa con cargas localizadas. Utilice los parámetros $\epsilon_0 = 1$ y los valores de densidad de cargas $\rho_\pm = \pm 1$ cm^{-2}.

1. Explique matemáticamente la diferencia que existe en la metodología numérica al incluir densidades de carga (1.0%)
2. Utilice el método de relajación de Jacobi hasta converger con una tolerancia de 10^{-5}, con la tolerancia definida como lo hicimos en clase (i.e., hasta que el valor máximo de la diferencia entre cada valor de ϕ en la grilla con respecto a la iteración anterior sea menor que 10^{-5}). Este problema se resuelve de la misma forma en que lo hicimos en clase, con la diferencia de la distinta condición de frontera como se muestra en la figura y la presencia de las cargas locales. Resuelva el problema en una grilla 100 $\times$ 100 (i.e., la distancia entre cada punto en la grilla es de 1cm). El resultado es un gráfico de ϕ en dos dimensiones como lo hicimos en clase. (1.5%)
3. Realice el mismo procedimiento utilizando el método de Gauss-Seidel. Existe una diferencia en el número de iteraciones requeridas? (1.0%)

* marlon.brenes@utoronto.ca

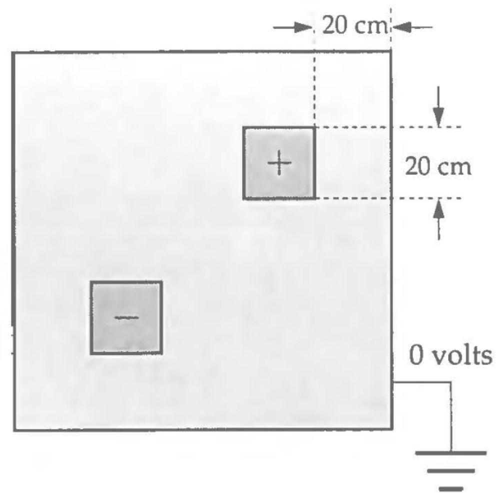

FIG. 1. Placa con cargas localizadas.