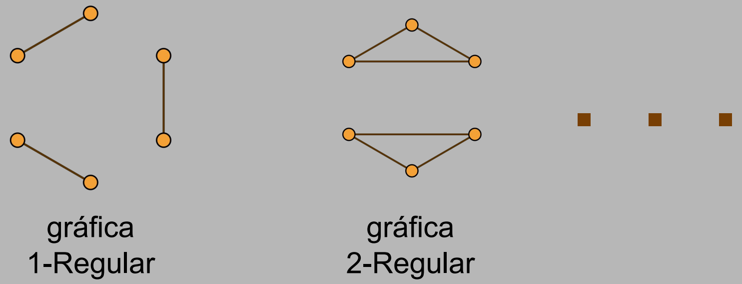
Coloración de aristas en una gráfica cúbica (CGEC)

Conceptos Básicos

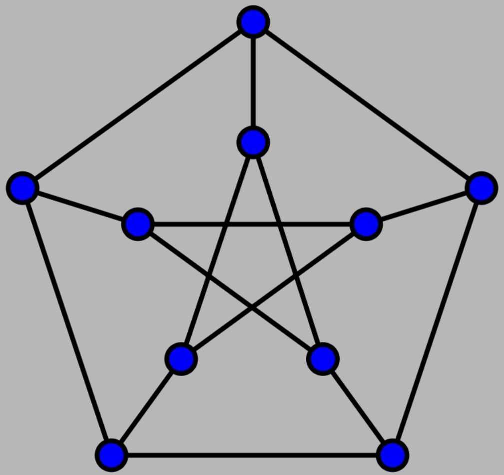
- Gráfica Regular
- Gráfica Cúbica
- Coloración por arista
- Índice Cromático
- 3 SAT

Gráfica Regular

Es una gráfica donde cada vertice tiene el mismo grado.



Gráfica Cúbica

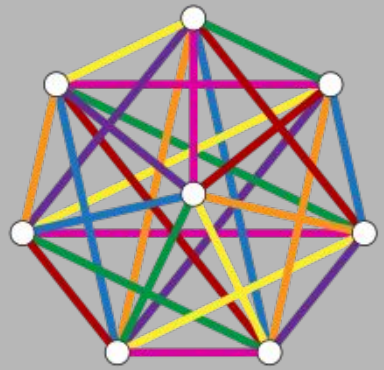


Es una gráfica la cual la todos sus vértices son de grado 3.

Es decir es una grafica 3-Regular

Coloración Por Arista

Consiste en colorear las aristas de la gráfica de tal modo que para cualquier par de aristas adyacentes no tengan colores repetidos.



Índice Cromatico

$$\Delta \leq \Psi(G) \leq \Delta + 1$$

Es el mínimo número de colores necesarios para una coloración correcta de las aristas de una gráfica

La 3-satisfactibilidad (o 3-SAT) es un caso especial del problema SAT. En la que cada cláusula contiene exactamente 3 literales.

3-SAT

$(u_1 \lor u_2 \lor u_3) \land (u_4 \lor u_5 \lor u_6)$

Definición del Problema (CGEQ)

Ejemplar: Sea G ={V,E} | G es 3-Regular

Pregunta: ¿Existe una coloración de aristas de G usando tres colores?

¿CGEC esta en NP?

Para demostrar que CGEC esta en NP se procede a encontrar un algoritmo no deterministico polinomial que lo resuelva.

$CGEC \in NP$

¿CGEC esta en NP?

- Algoritmo No-Deterministico polinomial:
    - Parte Adivinadora:
        1. Tomamos una grafica 3-regular G(V,E), donde V es un cnjunto de vertices (con cardianlidad 3) y E es un conjunto de aristas. Y tomamos un conjunto C con tres colores distintos.
        2. Se toma una arista del conjunto E y se le asigna un color del conjunto C de manera aleatoria lanzando un dado y tomando el valor modulo 3.
        3. Continua este proceso para todas las aristas de la grafica.
        4. Al finalizar este proceso todas nuestras aristas estan coloreadas y se procede a la parte verificadora.

¿CGEC esta en NP?

- Algoritmo No-Deterministico polinomial:

  - Parte Verificadora:
    1. Tomamos un vertice de nuestra grafica y revisamos todos las aristas adyacentes a el.
    2. Si todas las aristas tienen un color distinto procedemos a revisar a los vecinos de ese vertice.
    3. Así procedemos con todos los vecinos hasta haber revisado todos los vertices de la grafica.
    4. Si terminamos con todos los vertices de la grafica quiere decir que ya tenemos una 3-coloracion.
    5. En caso contrario quiere decir que para algun vertice sus aristas adyacentes no son de distinto color, lo que llevo a un estado de no-aceptación.

Teorema

CGEC es NPC

¿Qué debemos de hacer?

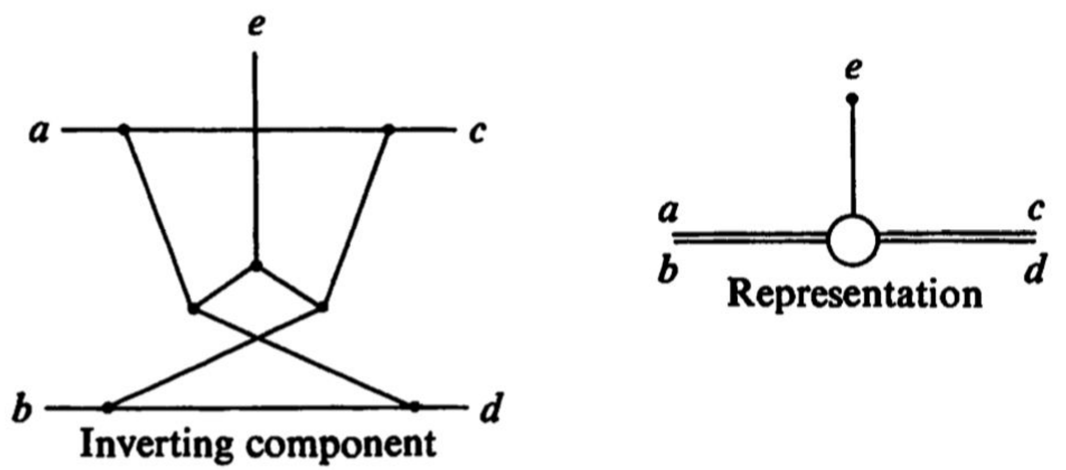
$$3SAT \propto CGEC$$

Exhibir cómo construir de un ejemplar de 3SAT, una gráfica G 3-regular que sea 3 coloreable si y sólo si el ejemplar de 3SAT es satisfacible.

Construimos G con un número de componentes cada una diseñada a hacer una tarea en específico.

Componente clave de G es una componente de inversión

Fig. 8.9



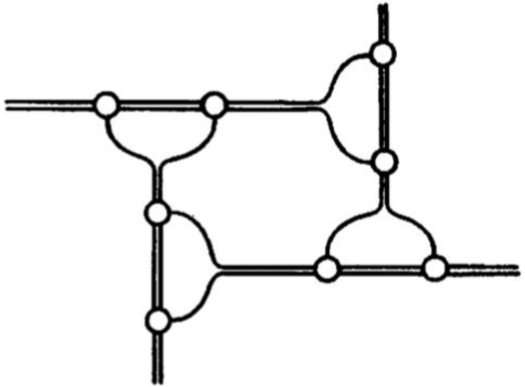
Lema

En una 3-arista-coloración de una *componente de inversión, las aristas* en una de las parejas de aristas (a,b) ó (c,d) son similarmente coloreadas, mientras las restantes aristas etiquetadas tienen tiene colores distintos.

Si para la componente inversa consideramos el par de aristas (a,b) como la entrada y el par (c,d) como la salida, entonces puede ser considerada por cambiar la representación de verdadero a una falsa y vceversa.

Variable-setting component de G

Fig. 8.10. A variable-setting component.



Cada una de esas componente existe para cada variable v_i del ejemplar de 3SAT.

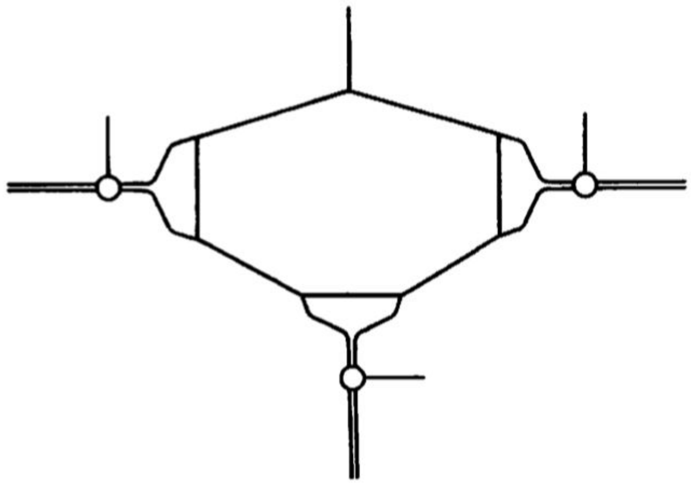
En general debe haber tantas parejas de salidas como como apariciones de v_i o si complemento $\bar{v_i}$ en las cláusulas de de un ejemplar de 3SAT.

Lema

En cualquier 3-artista-coloración es una "variable-setting component ", todas las parejas de salida están forzadas a tener el mismo valor.

“Satisfaction-testing component” de G

Fig. 8.11. A satisfaction-testing component.



Lema

Una 3-gráfica-coloración de una "satisfaction-testing" componente es posible si y solo si un par de aristas representa el valor de verdadero.

Dado un ejemplar I de 3STA ahora se mostrará como contruir una g´rafica 3-regular que es 3-coloreable si y solo si I es satifacible.

Para cada varibale v_i, construimos una “variable-setting” component V_i el cual tiene una salida de un par de aristas par cada aparición de la variable v_i o su complemento $\bar{v_i}$ entre las cláusulas de I.

Para cada clásula c_j de I tenemos una “satisfaction-testing” componente C_j. Sea $l_{j,k}$ la k-ésima literal de c_j. Si $l_{j,k}$ es una variable v_i entonces identificando la k-ésima pareja de entrada de C_j con una de las componentes de salida de V_i.

De otra form, a si $l_{j,k}$ es $\bar{v_i}$ entonces ponemos una componente inversa entre la k-ésima pareja de entrada de C_j y la pareja de salida de V_i

Sea H la gráfica resultante de esta construcción. H tendrá algunas aristas no conectadas de C_j. Para construir una gráfica 3-regular, tomamos dos copias de de H y las unimos identificando las aristas no conectadas.

G se contruye en tiempo polinomial. Se completa esta prueba notando que las propiedades de las componentes descritos en los lemas anteriiores, asegura que la gráfica G es 3-arista coloreable syss un ejemplar de I es satisfacible.

Aplicaciones En La Vida Real

- Calendarización de Juegos.
    - No todos contra todos
    - Round Robin