Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Complejidad Computacional

Tarea 5
Algoritmos de aproximación

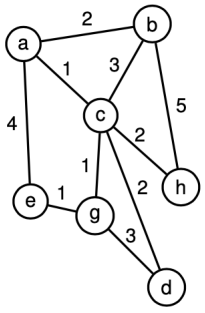
Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

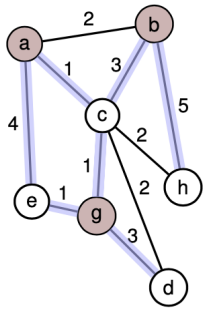
29 de octubre 2019

1. MAX-CUT Problem

Defínción del problema: Dada una gráfica no dirigida $G = (V, E)$ la meta es encontrar un subconjunto $S \subseteq V$ tal que $|E(S, V \setminus S)|$ sea maximizado.

MAX-CUT con peso para cada arista $E \in E$ que tiene un peso no negativo $w(e)$. Dada una gráfica no dirigida $G = (V, E)$ la meta es encontrar un subconjunto $S \subseteq V$ tal que $|E(S, V \setminus S)|$ sea maximizado. Maximixar el peso de las aristas que cruzan en el corte, i.e., maximizar $w(S) := \sum_{\{u,v\} \in E(S, V \setminus S)} w(\{u, v\})$





$S = \{a, b, g\}$
$w(S) = 18$

1.1. Muestreo aleatorio

Soponer que para cada vértice v, escogemos aleatoriamente e independientemente ponemos v en S con probabilidad $1/2$ y en $V \setminus S$ con probabilidad $1/2$. Entonces este algoritmos es un algoritmo de aleatorio de dos aproximaciones.

Demostración. Expresamos la esperanza del peso de un corte aleatorio $(S, V \setminus S)$ como:

$$\begin{aligned} E[w(S, V \setminus S)] &= E[\sum_{\{u,v\} \in E(S, V \setminus S)} w(\{u, v\})] \\ &= \sum_{\{u,v\} \in E} Pr[\{u \in S \cap c \in (V \setminus S)\} \cup \{u \in (V \setminus S) \cap v \in S\}] \cdot w(\{u, v\}) \\ &= \sum_{\{u,v\} \in E} (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) \cdot w(\{u, v\}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \in E} w(\{u, v\}) \geq \frac{1}{2} w^*. \end{aligned}$$

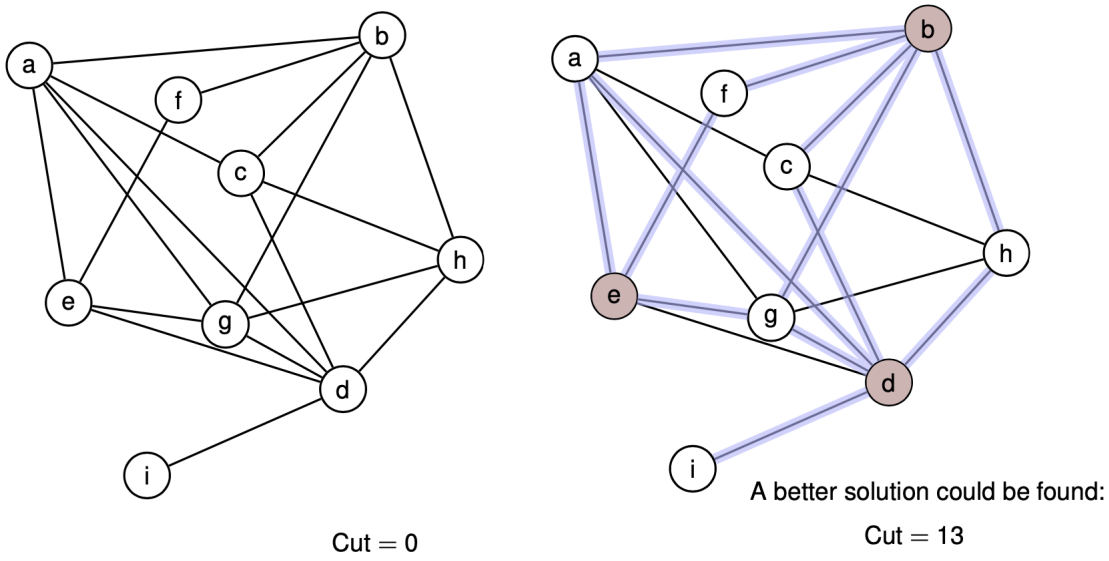
□

Búsqueda local

Algorithm 1 Búsqueda local (G, w)

Sea S un conjunto arbitrario de V

```
while flag = 1 do
  flag = 0
  if ∃u ∈ S con w(S \ {u}, (V \ S) ∪ {u}) ≥ w(S, V \ S) then
    S = S \ {u}
    flag = 1
  end if
  if ∃u ∈ S con w(S ∪ {u}, (V \ S) \ {u}) ≥ w(S, V \ S) then
    S = S ∪ {u}
    flag = 1
  end if
end while
return S
```



Teorema 1. *El corte regresado por la búsqueda local satisface* $W \geq (1/2)W^*$.

Demostración. En el momento en el que acaba, para cada vértice $u \in S$:

$$\sum_{v \in V \setminus S, v \sim u} w(\{u, v\}) \geq \sum_{v \in S, v \sim u} w(\{u, v\}), \tag{1}$$

Similarmente, para cada vértice $u \in V \setminus S$:

$$\sum_{v \in S, v \sim u} w(\{u,v\}) \geq \sum_{v \in V \setminus S, v \sim u} w(\{u,v\}), \tag{2}$$

Sumando la ecuación (1) para todos los vértives en S y en la ecuación (2) para todos los vértives en $V \setminus S$,

$$w(S) \geq 2 \cdot \sum_{v \in S, u \in S, u \sim v} w(\{u,v\}) \wedge w(S) \geq 2 \cdot \sum_{v \in V \setminus S, u \in V \setminus S, u \sim v} w(\{u,v\}).$$

Sumando las dos desigualdades, y dividiéndolas entre 2 genera:

$$w(S) \geq 2 \cdot \sum_{v \in S, u \in S, u \sim v} w(\{u,v\}) + \sum_{v \in V \setminus S, u \in V \setminus S, u \sim v} w(\{u,v\}).$$

Cada arista aparece en uno de los dos lados □

¿Cuál es el tiempo de ejecición de la búsqueda local?

- **Gráficas sin peso:** El corte incremente por al menos una en cada iteración entonces a lo más dos n^2 iteraciones.
- **Gráficas con peso:** puede tomar tiempo exponencial en n.

1.2. Solución basada en programación *semidefinida*

Acercamiento de alto nivel

1. Describir al problema Max-Cut como un problema cuadrático de optimización.
2. Resolver un porgrama correspondiente semidefinitivo que es una relajación del problema original.
3. Recuperar una aproximación del problema original de la aproximación del programa semidefinitivo.

Maximizar

$$\frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in E} w_{i,j} \cdot (1 - y_i y_j)$$

Sujeto a

$$y_i \in \{-1, +1\}, \qquad i = 1, \ldots n.$$

Relajación de programación del vector

$$\frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in E} w_{i,j} \cdot (1 - v_i v_j)$$

Sujeto a

$$v_i \cdot v_j = 1 \qquad i = 1, \ldots n.$$
$$v_i \in \mathbb{R}^n$$

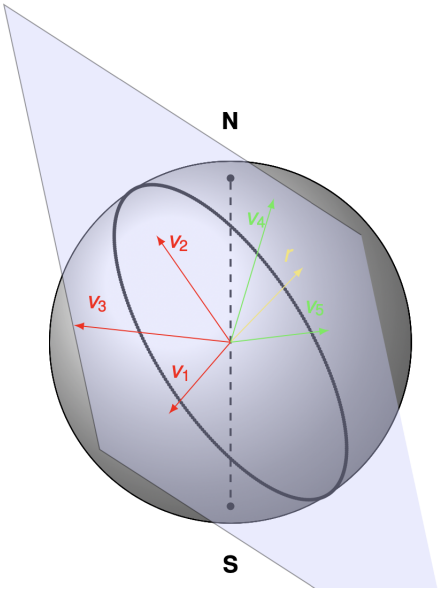
Definicion 1. *Una matriz $A \in R^{n \times n}$ es semidefinitivo positivo si y solo si $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$y^T \cdot A \cdot y \geq 0.$$

- A es simétrica y definido positivo sii existe una matriz B $n \times n$ con $B^T \cdot B = A$
- Si A es simétrica y definida positiva, entonces la matriz B de arriba puede ser
- calculada en tiempo polinomial.

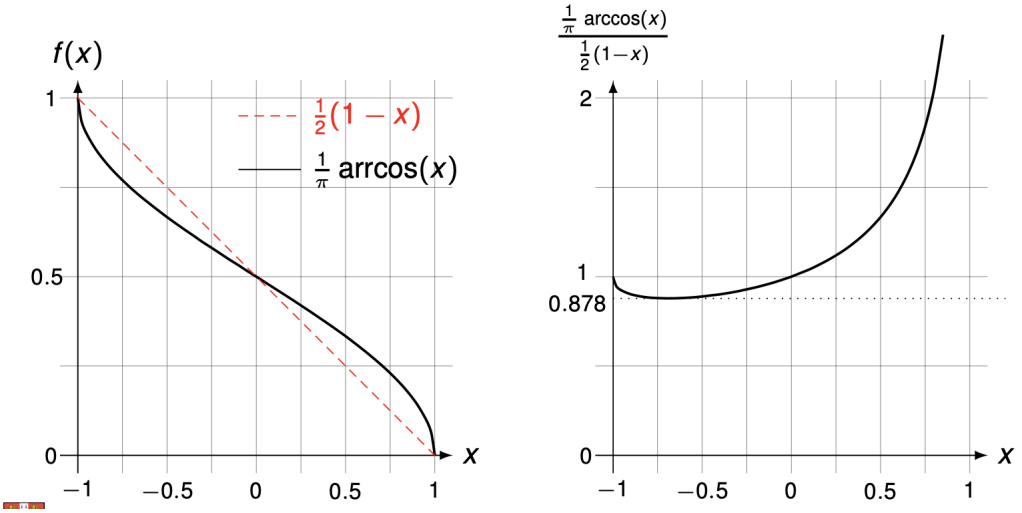
Redondeo por un hiperplano aleatorio:

- Escoger un vector aleatorio $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ dibujando cada componente de $\mathcal{N}(0,1)$
- Poner $i \in V$ si $v_i \cdot r \geq 0$ y $i \in V \setminus S$ de otra forma.



Lemma 1. *Para cualquier* $x \in [-1, 1]$,

$$\frac{1}{\pi} \arccos(x) \geq 0.878 \cdot \frac{1}{2}(1 - x).$$



Teorema 2. *El algoritmo tiene una proporción de aproximación de* $\frac{1}{0.878} \approx 1.139$.

2. k-Coloring

Dada una gráfica simpe $G = (V, E)$ con un conjunto de vértives V y un conjunto de aristas E, una coloración de G is una asignación de colores a cada vértives donde cada vértice adyacente tiene diferentes colores. Una coloración óptimas de una gráfica arbitraria, i.e., el problema de determinar el mínimo número de colores usaados para una gráfica arbitraria, es un problema NP-C bien conocido. Aceptación por umbrales y búsqueda Tabú han sido adaptados para encontrar una k-coloración de una gráfica dada para un número fijo k.

Definimos el problema de la k-coloración más formalmente como sigue. Una partición de color de una gráfica es una partición de su conjunto de vértices V e subconjuntos llamados clases de colores, $V = V_1 \cup V2 \cup \ldots \cup V_k$, donde los subconjuntos V_i $(1 \geq i \geq k)$ son no vacíos y mutamente disjuntos, y cada uno no contiene nungun par de vértices adyacentes. El conjunto de las aristas "malas" B estñas definido como $B = \{a \in E | a \in \cup_{i=1}^{k} V_i \times V_i\}$. Que es, el entero $|B|$ el número total de aristas teniendo el mismo color en ambas de sus vértices incidentes. El conjunto de

todas las las aristas "buenas" es definido como $E \setminus B$. Definimos el problema de la k-coloración como el problema de encontrar el número mñas grande de aristas "buenas" (o el número más pequeño de aristas "malas") incidentes al conjunto de vértices el cual puede ser coloreado con k-colores en una gráfica dada G.

Más formalmente, nos preguntamos por una partición de un conjunto de vértices V en k subconjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$ tal que:

$$\sum_{x \in \bigcup_{i=1}^{k} V_i \times V_i} weight(x)$$

sea mínima. Observamos que el problema se convierte en el problema de maxcut cuando $k = 2$.

Algorithm 2 Algoritmo $\mathcal{B}$: k-coloración

Input $G = (V, E)$
Output k particiones $V_1, V_2, \ldots, V_k$ tal que el número de aristas "malas" en G sea mínimo

```
ncut = 1; (* el número de cortes *)
ncol = 0; (* el número de colores *)
initqueue(Q); (* inicializa la cola Q *)
inqueue(Q, G); (* inserta G en Q *)
while ncut < k do
  g = dequeue(Q); (* quita un elemento de Q *)
  if ∃ aristas en g then
    Simmax(g,a,b);
    ncut = ncut + 1;
    inqueue(Q, a);
    inqueue(Q, b);
  else
    ncol = ncol + 1;
    C[ncol] = g;
  end if
end while
while empty(Q) ≠ TRUE do
  ncol = ncol + 1;
  C[ncol] = dequeue(Q);
end while
```

En esta sección, presentamos un tiempreo aproximado del algoritmos de $O((e+n)\log k)$ para colorear una gráfica usando k-colores tal que el número de malas aristas no exceda $(e/k)((n-1)/n)^{\log k}$, cuando $k = 2^h$ donde h es un entero positivo. La cota es un poco menor que e/k. Por tanto, nuestro algoritmo mejora tanto la cota e/k y el tiempo de complejidad $O(enk)$ sabido antes cuando $k = 2^h$. Se empleará una descomposición de arbol binaria para particionar la gráfica en dos subgráficas recursivamente. En cada paso, generamos un corte máximo entre dos subgráficas usando nuestro algoritmo Simmax propuesto. Las subgráficas obtenidas serán posteriormente particionadas hasta que tengamos un total de $k = 2^h$ subgráficas. Notar que una subgráfica no será pasticionada si no continiene ninguna arista mala. Podemos llamar al árbol binario generado un árbol de color corte máximo. Minimizando el corte a cada nivel de arriba para abajo del color del árbol, el número de malas aristas será gradualmente reducido. Ahora , basado en la construcción de la descomposición del árbol binario, una implementación detallada del llamado k-coloración $(k - C)$ algoritmo es mostrada en el algoritmo de arriba.

Por tanto, podemos concluir que:

Teorema 3. *Existe un algoritmo en tiempo $O((e+n)\log k)$ para el problema de la k-coloración tal que el número totral de aristas en la $k(= 2^h)$ subgráficas es a lo más $(e/k)((n-1)/n)^{\log k}$ (para el caso con pesos, $(w(E)/k)((n-1)/n)^{\log k}$), donde h es la altura del árbol de color maxcut.*

Demostración. El número total de aristas en V_1 más el número total de aristas en V_2 son a lo más $|B_i| = e(G)(1 - (n+1)/2n) = \frac{e(G)(n-1)}{2n}$. Por tanto en el nivel 2 del árbol de color maxcut, las subgráficas definidas por V_1 y V_2 serán posteriormente divididas en V_a y V_b, V_c y V_d respectivamente, y de nuevo tenemos:

$$|B_2| = e(V_a) + e(V_b) + e(V_c) + e(V_d) \geq |B_1|(1 - (n+1)/2n) = e(G)(\frac{n-1}{2n})^2.$$

Pariciones similares nos dan el número de malas aristas en el nivel $h = \log k$,

$$|B_{\log k}| = e(V_1) + e(V_2) + \ldots + e(V_k) \geq e(G)(\frac{n-1}{2n})^{\log k} = \frac{e(G)}{k}(\frac{n-1}{2n})^{\log k}.$$

□

Referencias

[1] Fast approximation algorithms on maxcut, k-coloring and k-color ordering for vlsi applications. `https://pdfs.semanticscholar.org/b4d1/de5fd3ad7e62b1ca1922bb2243d76f08ffe6.pdf`. (Accessed on 10/29/2019).

[2] Viii. approximation algorithms: Max-cut problem (outlook). `https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1617/AdvAlgo/maxcut.pdf`. (Accessed on 10/29/2019).

[3] Widgersonalgorithm.pdf. `https://www.ics.uci.edu/~goodrich/teach/graph/notes/WidgersonAlgorithm.pdf`. (Accessed on 10/29/2019).

[4] Dorit S. Hochbaum, editor. *Approximation Algorithms for NP-hard Problems*. PWS Publishing Co., Boston, MA, USA, 1997.