Lógica Computacional 2017-2
Boletín de ejercicios 1
Repaso Lógica Proposiciones

Lourdes del Carmen González Huesca   Pilar Selene Linares Arévalo

9 de Febrero de 2017

Sintaxis de la Lógica de Proposiciones

1. Elimina los paréntesis innecesarios en las siguientes expresiones:

   a) $((p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((\neg r) \to (\neg(p \vee q)))$

   b) $\neg(((p \wedge (p \to (\neg q))) \wedge q) \wedge p)$

   c) $(p \to (q \wedge (\neg q))) \to ((\neg p) \to p)$

   d) $(\neg s) \to ((\neg t) \wedge \neg(p \vee q))$

2. Define las siguientes funciones, indicando claramente en cada caso el dominio y contradominio de la función definida:

   a) $grado(\phi)$, el número de conectivos lógicos de ϕ

   b) $nonatomsubform(\phi)$, el número de subfórmulas no atómicas de ϕ

   c) $subformulas(\phi)$, el conjunto de subfórmulas de ϕ

3. Prueba que cualquier fórmula proposicional ψ que tiene únicamente disyunciones es verdadera si alguna de sus variables proposicionales es verdadera.

4. Demuestra que para cualquier fórmula proposicional φ, el número de paréntesis izquierdos es igual al número de símbolos de disyunción en φ si la gramática para fórmulas proposicionales es la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \varphi,\ \psi & ::= & VarP \mid \bot \mid \top \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \psi) \\ VarP & ::= & p \mid q \mid r \mid \cdots \mid p_1 \mid p_2 \mid \cdots \end{array}$$

   Debes dar las funciones recursivas para calcular el número de paréntesis izquierdos de una fórmula y el número de símbolos de disyunción de una fórmula de la gramática anterior.

5. Demuestra que $\neg(p_0 \vee p_1 \vee \cdots \vee p_n) \equiv \neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \cdots \wedge \neg p_n$, para todo n natural mayor o igual a 1. [Hint: la inducción es sobre n]

6. Aplica las siguientes sustituciones y al finalizar elimina los paréntesis que sean redundantes. Muestra a detalle los pasos realizados.

   a) $((p \to (s \to q)) \leftrightarrow (((\neg p) \vee q) \vee (\neg s)))[p, q := s \to p, s \vee r]$

b) $(p \lor q) \to ((\neg r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow s))[r, p, q := p, p \land q, p \land q \land r]$

c) $((p \land q)[p, q := p \land q, s] \lor (p \lor s))[s := q \lor r]$

d) $((q \land r)[q, p := \neg p, s] \to (r \land \neg(r \leftrightarrow p)))[r, p := \neg r, s \land p]$

e) $\Big((p \to q \to s)[q := \neg r \land q] \to ((p \to q) \leftrightarrow (p \land r))\Big)[q, r, p := s, q \land p, (r \lor q)]$

7. Decide si la siguiente propiedad de sustituciones es verdadera o falsa. Si es verdadera demuéstralo y proporciona una condición suficiente para que la proposición sea verdadera, si no, da un contra-ejemplo.

$$\phi[p, q := \psi, \gamma] \equiv \phi[p := \psi][q := \gamma]$$

Inducción y recursión en números naturales, listas y árboles

1. Demuestra que $n^2 + n$ es divisible entre 2, para todo n natural positivo.

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demuestra que para todo m natural positivo par, se cumple que

$$A^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 & 0 \\ 0 & b^m & 0 \\ 0 & 0 & a^m \end{pmatrix}$$

3. Para los siguientes incisos, calcula el resultado de aplicar la función al parámetro recibido. Muestra cada paso realizado hasta obtener el resultado final.

a) long(['b','d','f','c'])

b) reversa([4,5,2])

4. Manejo de cadenas de caracteres:

a) Dar una definición recursiva para el conjunto S de cadenas w de ceros y unos definido como

$$S = \{w \mid w = 0^i 1^j \text{ donde } i \geq 1, j = 2i\}.$$

b) Definir la función recursiva *slong* que regresa la longitud (número de caracteres) de una cadena del conjunto S, por ejemplo $slong(001111) = 6$.

c) Dar una definición recursiva de la función *sconc* que recibe una cadena w del conjunto S y un natural n mayor que 0. La función regresa la concatenación de n copias de w, por ejemplo *sconc* 011 3 = 011011011.

5. Dada la operación reversa para listas *rev*, demuestra que para toda lista xs se cumple que:

$$rev(xs + +ys) = rev(ys) + +rev(xs)$$

6. Queremos representar árboles binarios cuyos únicos nodos etiquetados (con elementos del conjunto $\mathcal{A}$) son las hojas. Para ello utilizaremos la siguiente definición recursiva de árboles:

- Si $a \in A$, entonces $hoja(a)$ es un árbol.
- Si t_1, t_2 son árboles, entonces $mkt(t_1, t_2)$ es un árbol.
- Son todos.

Observa que en esta definición **no** existe el árbol vacío.

a) Define las funciones recursivas nh, nni que calculan el número de hojas y el número de nodos internos (los que no son hojas) en un árbol respectivamente.

b) Enuncia el principio de inducción estructural para estos árboles.

c) Demuestra que: $nh(t) = nni(t) + 1$

Semántica de Lógica de Proposiciones

1. Defina por medio de los operadores lógicos vistos en clase el operador $\oplus$ (ó exclusivo), cuya propiedad es:
$$\mathcal{I}(\phi * \psi) = 1 \leftrightarrow \mathcal{I}(\psi) \neq \mathcal{I}(\phi)$$
Muestre usando la definición dada que efectivamente se cumple esta propiedad.

2. Decida si los siguientes conjuntos de proposiciones son satisfacibles por medio de interpretaciones:

   a) $\{p \to q,\ (s \vee p) \wedge \neg q,\ \neg s\}$

   b) $\{(p \to r) \vee (\neg s \wedge p),\ s \to \neg(p \wedge r),\ r \vee \neg s\}$

   c) $\{p \vee (q \wedge s),\ (\neg r \vee s) \wedge (s \to t),\ \neg p \vee \neg t\}$

   d) $\{\neg s,\ p \to (q \vee r),\ q \to r,\ r \to s,\ \neg p\}$

3. Pruebe la correctud de los siguientes argumentos de la lógica proposicional. Resuelva por interpretaciones apoyándose del principio de refutación.

   a) $a \vee b, \neg c \to \neg a$ luego $b \to \neg c$

   b) $p \to q \vee r, r \to \neg p, q \to \neg p$ entonces $\neg(p \wedge \neg s)$

4. Demuestre las siguientes propiedades de la consecuencia lógica:

   a) Si $\Gamma \models \phi$ entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible.

   b) Si $\Gamma, \phi \models \psi$ entonces $\Gamma, \neg\psi \models \neg\phi$.

   c) Si $\Gamma, \phi \vee \psi \models \neg\phi$ entonces $\Gamma, \phi \vee \psi \models \psi$.

   d) $\Gamma, \phi \wedge \psi \models \phi$

   e) $\Gamma, \psi \models \psi \vee \phi$

5. Demuestre el lema de sustitución para la lógica proposicional:
Sean φ, ψ fórmulas proposicionales, p una variable e $\mathcal{I}$ una interpretación. Sea $\mathcal{I}^{\#}$ la interpretación que coincide con $\mathcal{I}$ en todas las variables, excepto que $\mathcal{I}^{\#}(p) = \mathcal{I}(\psi)$. Entonces $\mathcal{I}(\varphi[p := \psi]) = \mathcal{I}^{\#}(\varphi)$.

6. Decide si los siguientes pares de proposiciones son equivalentes utilizando interpretaciones:

   a) $p \vee (p \to q) \qquad \bot$

b) $\neg(p \leftrightarrow q) \qquad \neg p \leftrightarrow q$

c) $(p \to q) \wedge (p \to r) \qquad p \to (q \wedge r)$

d) $\neg(p \leftrightarrow q) \qquad (\neg p \wedge q) \vee (q \to p)$

e) $(p \to r) \wedge (q \to r) \qquad (p \vee q) \to r$

f) $p \vee q \qquad \neg p \to q$

g) $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p) \qquad (p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)$

7. Analice la consecuencia lógica en cada caso:

   a) $\{p \to q,\ q \to r \to s,\ p \to q \to r\} \models p \to s$

   b) $\{p \to q,\ q \wedge r \to s,\ r\} \models p \to s$

   c) $\{p \to q \to r,\ p \vee s,\ t \to q,\ \neg s\} \models \neg r \to \neg t$

   d) $\{t \to p \vee q,\ p \to s \wedge u,\ q \to \neg u\} \models t \to s \vee \neg u$

   e) $\{(s \to q) \to s \wedge r,\ p \to \neg\big((r \to \neg q) \wedge (p \to r)\big) \to \neg q\} \models p \wedge \neg s$

   f) $\{p \to q \vee r,\ \neg p \to t,\ (\neg t \vee s) \wedge \neg q\} \models r \vee s$

8. Traduce los siguientes argumentos lógicos indicando el significado de las variables proposicionales usadas. Además decide si son correctos utilizando interpretaciones.

   a) *Raúl está comiendo pastel. Si Raúl está comiendo pastel, no está jugando con su PS4. Si no está jugando con su PS4 entonces su padre no pagará el seguro de la casa. Por tanto el padre de Raúl no pagará el seguro de la casa.*

   b) *Que el auditorio esté lleno es condición necesaria y suficiente para que la banda de rock toque. Si la banda de rock toca entonces todos están cantando. Nadie canta. Por tanto el auditorio no está lleno.*

   c) *Sólo si llego pronto no se me enfriará el café. No llego pronto a menos que el tránsito vaya bien, suene el despertador y no me quede dormido. Pero o no suena el despertador o estoy sordo. Oigo bien, luego se me enfía el café.*

   d) *Cuando el perro no ladra y el gallo canta, siempre bala la oveja. Sólo si canta la calandria, sucede que o ladra el perro o maúlla el gato. He visto que, o canta el gallo o canta la calandria, así que o bala la oveja o canta la calandria.*