Lógica Computacional 2017-2
Boletín de ejercicios 4
Lógica de Predicados: Semántica y Consecuencia Lógica

Lourdes del Carmen González Huesca   Pilar Selene Linares Arévalo

16 de marzo de 2017

Semántica formal

1. Para cada una de las siguientes parejas de proposiciones, determine si la negación propuesta es la correcta. Si es correcta, determine cuál es verdadera: la proposición original o la negación propuesta. Si la negación propuesta es incorrecta, escriba una versión corregida de la negación y determine a continuación si la proposición original o la versión corregida de la negación es verdadera.

   a) Proposición: Para todos los números reales x, y si $x^2 > y^2$, entonces $x > y$.
   Negación propuesta: Existen números reales x, y tales que $x^2 > y^2$ pero $x \leq y$.

   b) Proposición: Existen números reales x, y tales que ambos son racionales pero $x+y$ es irracional.
   Negación propuesta: Para todos los números reales x, y si $x+y$ es racional, entonces x e y son racionales.

   c) Proposición: Para todo número real x, si no es 0, entonces x tiene un inverso multiplicativo.
   Negación propuesta: Existe un número real distinto de cero que no tiene un inverso multiplicativo.

   d) Proposición: Existen enteros impares cuyo producto es impar.
   Negación propuesta: El producto de cualesquiera dos números enteros impares es impar.

2. Decide si los siguientes enunciados son satisfacibles, verdaderos o falsos utilizando en cada caso la interpretación definida. Primero deberás proporcionar una fórmula que represente al enunciado.

$\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$	donde M son los números enteros y
$\mathcal{I}(P^1)$	es la relación de los números que son mayores a 0
$\mathcal{I}(Q^1)$	es la propiedad de ser par
$\mathcal{I}(R^1)$	es la propiedad de ser un cuadrado perfecto
$\mathcal{I}(S^1)$	es la propiedad de ser divisible entre 4
$\mathcal{I}(T^1)$	es la propiedad de ser divisible entre 5

   a) Al menos un entero es par.

   b) Existe al menos un entero positivo que es par.

   c) Para cualquier entero que es par, entonces éste no es divisible entre 5.

   d) Ningún entero par es divisible entre 5 y entre 4 (simultáneamente).

   e) Existe al menos un entero par divisible entre 5.

   f) Para cualquier entero que es par y es un cuadrado perfecto, entonces es divisible entre 4.

3. Considere el universo de todos los polígonos con tres o cuatro lados y las siguientes proposiciones para este universo.

$A(x)$	todos los ángulos internos de x son iguales
$E(x)$	x es un triángulo equilátero
$H(x)$	todos los lados de x son iguales
$I(x)$	x es un triángulo isóceles
$P(x)$	x tiene un ángulo interno mayor que 180°.
$Q(x)$	x es un cuadrilátero
$R(x)$	x es un rectángulo
$S(x)$	x es un cuadrado
$T(x)$	x es un triángulo

Traduzca cada una de las siguientes fórmulas en una frase en español y determine si es verdadera o falsa:

a) $\exists x(R(x) \land \neg S(x))$

b) $\forall x((H(x) \land Q(x)) \to S(x))$

c) $\forall x(T(x) \to \neg P(s))$

d) $\forall x(S(x) \leftrightarrow (A(x) \land H(x)))$

e) $\forall x(H(x) \to E(x))$

f) $\exists x(Q(x) \land P(x))$

g) $\forall x(A(x) \to (E(x) \oplus R(x)))$

h) $\forall x(T(x) \to (A(x) \leftrightarrow H(x)))$

4. Considere la interpretación $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ tal que:

$$M = \{0, 1, 2, 3\} \qquad R^{\mathcal{I}} = \{(0,0), (1,1), (0,2), (0,3)\} \qquad c^{\mathcal{I}} = 3$$

Para cada una de las siguientes fórmulas decida si es o no satisfacible. Si lo es, dé el estado de las variables correspondientes, si no, explicar por qué.

a) $(R(x, y) \to R(y, x)) \land x \neq y$

b) $(R(x, y) \land R(y, x)) \to x = y$

c) $x = y \leftrightarrow R(x, y)$

d) $\exists z R(x, z) \to \exists w R(y, w)$

e) $\forall z R(x, z) \to \neg \forall w R(y, w)$

f) $\forall u \forall w((R(u, x) \land R(w, x)) \to \exists z R(z, y))$

g) $\forall x(x = c \to \exists y R(x, y))$

Modelos

1. Genere un modelo para cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\Gamma = \{P(a),\ Q(a),\ R(a),\ \exists x\Big(P(x) \land \neg\big(Q(x) \lor R(x)\big)\Big),\ \forall x\,(R(x) \to P(x))\}$

b) $\Gamma = \Big\{\exists x\big(P(x) \land \neg Q(x)\big),\ \exists x\big(Q(x) \land \neg P(x)\big),\ \exists z\big(P(z) \land Q(z)\big),$
$\forall x\Big(P(x) \to \exists y\ \big(Q(y) \land R(x,y)\big)\Big),\ \forall x\Big(Q(x) \to \exists y\big(P(y) \land R(x,y)\big)\Big)\Big\}$

c) $\Gamma = \{\forall u \forall v \forall w\big(R(u,v) \land R(v,w) \to R(u,w)\big),\ \neg\exists x \exists y\big(R(x,y) \land R(y,x)\big),\ \forall x \exists u R(x,u)\}$

d) $\Gamma = \Big\{\exists x \forall y \neg R(y,x),\ \forall x(\neg R(x,x) \land V(x)),$
$\forall x \forall y(R(x,y) \to Q(x,y)),\ \exists x \exists y(R(x,y) \land R(y,x)),\ \exists x \forall y(A(x) \land \neg Q(x,y))\Big\}$

e) $\Gamma = \{\forall u \forall v \forall w\big(R(u,v) \land R(v,w) \to R(u,w)\big),\ \neg\exists x \exists y\big(R(x,y) \land R(y,x)\big),\ \forall x \exists u R(x,u)\}$

Validez universal y Equivalencia lógica

1. Demuestra que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

   a) $\exists x(Q(x) \land \forall y(P(y) \to R(x,y))) \leftrightarrow \forall x(P(x) \to \exists y(R(y,x) \land Q(y)))$
   b) $\exists x \forall y Rxy \to \forall y \exists x Rxy$
   c) $(\exists x Q(x) \to \exists x R(x)) \to \exists x(Q(x) \to R(x))$
   d) $\forall x(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(y,x))) \leftrightarrow \exists x(Q(x) \land \forall y(P(y) \to R(x,y))$

2. Demuestra las siguientes equivalencias, donde φ y ψ son cualesquiera dos fórmulas:

   a) $\exists x Px \to \forall x Qx \equiv \forall x(Px \to Qx)$
   b) $\varphi \land \forall x \psi \equiv \forall x(\varphi \land \psi)$, si $x \notin Vl(\varphi)$.
   c) $\forall x \varphi \to \psi \equiv \exists x(\varphi \to \psi)$, si $x \notin Vl(\psi)$.
   d) $\exists x \psi \to \varphi \equiv \forall x(\psi \to \varphi)$, si $x \notin FV(\varphi)$
   e) $\exists x Px \land \exists x Qx \equiv \exists x \exists y(Px \land Qy)$
   f) $\neg\varphi \to \forall x \neg\psi \equiv \forall x(\psi \to \varphi)$

Consecuencia lógica

1. Demostrar la consecuencia lógica en cada caso:

   a) $\{\forall x \forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x))\} \models \forall x \neg R(x,x)$

   b) $\{\forall x \forall y(D(x) \land M(y) \to T(x,y))\} \models \forall z(D(z) \land M(z) \to T(z,z))$

   c) $\{\forall x(C(x) \land \neg\exists y\ P(y,x) \to O(x)),\ C(a),\ \forall z \neg P(z,a)\} \models O(a)$

   d) $\{\neg\forall x(F(x) \to \forall y(G(y) \to H(x))),\ \exists x F(x) \land \exists x \neg(F(x) \lor G(x))\} \models \forall x(F(x) \to H(x))$

   e) $\{\forall x(G(x) \lor \exists y H(y)),\ \neg\exists x G(x)\} \models \neg\exists x \neg H(x)$

   f) $\{\exists x(F(x) \land \neg G(x)),\ \forall x(F(x) \to H(x)),\ \forall x(J(x) \land (K(x) \to F(x))),\ \exists x(H(x) \land \neg G(x)) \to \forall x(K(x) \to \neg H(x))\} \models \forall x(J(x) \to \neg K(x))$

2. Sean φ_1, φ_2 y φ fórmulas. Demostrar o dar un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

   a) Si $\{\varphi_1 \wedge \varphi_2\} \models \varphi$, entonces $\{\varphi_1\} \models \varphi$ y $\{\varphi_2\} \models \varphi$.

   b) Si $\{\varphi_1\} \models \varphi$ ó $\{\varphi_2\} \models \varphi$ entonces $\{\varphi_1 \vee \varphi_2\} \models \varphi$.

   c) Si $\varphi_1 \to \varphi_2$ es una fórmula válida, entonces $\{\varphi_1\} \models \varphi_2$.

   d) Si $\{\varphi_1\} \models \varphi_2$, entonces $\{\neg\varphi_1\} \not\models \varphi_2$.