Lógica Computacional 2017-2
Nota: Inducción sobre la estructura de una relación.

Lourdes del Carmen González Huesca
Roberto Monroy Argumedo
Fernando A. Galicia Mendoza

Facultad de Ciencias, UNAM

Martes 9 de mayo de 2017.

En la especificación de la práctica 6 se define de la siguiente forma la relación menor o igual:

Definición 1. *La relación menor o igual se define recursivamente de la siguiente forma:*

1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n \leq n$.*
2. *Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que si $n \leq m$, entonces $n \leq m+1$.*

Al igual que los números naturales la definición anterior también tiene un esquema recursivo (caso base y caso recursivo):

Principio de inducción 1. *Sea una relación $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ donde:*

- *<u>Caso base:</u> Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $(n, n) \in P$.*
- *<u>Paso inductivo:</u> Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, si $n \leq m$ y $(n, m) \in P$ entonces $(n, m+1) \in P$.*

Si se cumplen las dos condiciones anteriores, entonces para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que si $n \leq m$ entonces $(n, m) \in P$. Es decir, el par (n, m) tal que $n \leq m$ entonces cumplen la propiedad P.[1]

Sin embargo, el principio de inducción que está basado en la relación menor o igual nos da un poder de especificación más refinado con el cual trabajar, esto se traduce en una hipótesis de inducción mas fuerte.
Veamos un par de resultados:

[1] En pocas palabras: La relación menor o igual es una condición necesaria para que se cumpla P.

Teorema 1. *Para cualesquiera* $n, m \in \mathbb{N}$ *se tiene que si* $n \leq m$*, entonces* $n+1 \leq m+1$*.*

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \leq m$. Por demostrar que $n+1 \leq m+1$.
Se procede por inducción sobre $n \leq m$.

- Caso base: Hay que demostrar que $n+1 \leq n+1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, esto se cumple por construcción. Ya que la primera regla de nuestra definición indica que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $m \leq m$; en particular $n+1$.
- Hipótesis de inducción: Supongamos válido que $n+1 \leq m+1$.
- Paso inductivo: Por demostrar que $n+1 \leq (m+1)+1$.
  Por hipótesis de inducción $n+1 \leq m+1$ y por construcción sabemos que para cualesquiera $r, s \in \mathbb{N}$ si $r \leq s$, entonces $r \leq s+1$. Por lo que $n+1 \leq (m+1)+1$.

Con esto queda demostrado que si $n \leq m$, entonces $n+1 \leq m+1$.

$$\therefore \text{Para cualesquiera } n, m \in \mathbb{N},\ n \leq m,\ \text{entonces } n+1 \leq m+1.$$

□

Teorema 2. *Para cualesquiera* $n, m \in \mathbb{N}$ *se tiene que si* $n+1 \leq m+1$*, entonces* $n \leq m$*.*

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n+1 \leq m+1$. Por demostrar que $n \leq m$.
Considerando el predecesor en números naturales podemos cambiar lo que queremos demostrar, es decir: cambiar $n \leq m$ a $(n+1)-1 \leq (m+1)-1$.
Entonces si $n+1 \leq m+1$, por demostrar que $(n+1)-1 \leq (m+1)-1$.

- Caso base: Hay que demostrar que $n-1 \leq n-1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, esto se cumple por construcción. Ya que la primera regla de nuestra definición indica que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $m \leq m$; en particular $n-1$.
- Hipótesis de inducción: Supongamos válido que $n-1 \leq m-1$.
- Paso inductivo: Por demostrar que $n-1 \leq (m+1)-1$, es decir, $n-1 \leq m$.
  Afirmamos que $n-1 \leq n$, esto se demuestra fácilmente con un análisis da casos sobre n.
  También afirmamos que para cualesquiera $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, si $n_1 \leq n_2$ y $n_2 \leq n_3$, entonces $n_1 \leq n_3$. Esto se demuestra haciendo inducción sobre $n_2 \leq n_3$.
  Entonces tenemos que $n-1 \leq n$ y por hipótesis tenemos que $n \leq m$, entonces por transitividad tenemos que $n-1 \leq m$, es decir, $n-1 \leq (m+1)-1$.

Con esto queda demostrado que si $n+1 \leq m+1$, entonces $n \leq m$.

$$\therefore \text{Para cualesquiera } n, m \in \mathbb{N},\ n+1 \leq m+1,\ \text{entonces } n \leq m.$$

□

Con lo anterior podemos concluir el siguiente corolario:

Corolario 1. *Para cualesquiera* $n, m \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $n \leq m$ *syss* $n+1 \leq m+1$*.*

Hemos visto dos resultados bastante intuitivos en aritmética de números naturales, sin embargo, no es posible demostrarlos de una manera sencilla utilizando únicamente inducción matemática, la forma de atacarlos es definir de otra forma la relación $\leq$ o bien utilizando la definición de $\leq$ dada en teoría de conjuntos.

Desde un punto de vista de ciencias de la computación vamos a preferir la primera opción (darle una definición recursiva a las relaciones), ya que, se está haciendo un análisis **sintáctico** sobre las relaciones y observamos que no estamos utilizando su semántica de forma directa. Esto con el único fin de que si solicitamos que una computadora nos apoye con el proceso de demostración, esta solo se puede guiar por símbolos, nosotros le daremos significado una vez terminado el trabajo de la computadora.

En pocas palabras: La computadora en esencia sigue siendo el aparato que permite hacer cuentas símbolicas de una forma eficiente y efectiva, en pocas palabras es una calculadora. Una calculadora cada vez mas especializada.