Lógica Computacional 2017-2
Práctica 7: Deducción natural y lógica ecuacional.

Lourdes del Carmen González Huesca
Roberto Monroy Argumedo
Fernando A. Galicia Mendoza

Facultad de Ciencias, UNAM

Fecha de entrega: Miércoles, 31 de mayo del 2017

La práctica podrá ser entregada en equipos de a lo mas dos personas.

Crea un archivo llamado `Ultima.v` y realiza los ejercicios indicados en las secciones siguientes:

1. Lógica ecuacional

1.1. Primera definición

En el artículo *Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic* el matemático Edward V. Huntington define la siguiente estructura algébrica:

Definición 1 (Álgebra de Bool)**.** *Sea K una conjunto no vacío, $+, \circ$ dos operadores binarios y $\neg$ un operador unario sobre K y $0, 1$ dos elementos de K. Se dice que $(K, +, \circ, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Bool si se satisfacen las siguientes propiedades:*

- *Para cualquier $a \in K$, se tiene que $a + 0 = a$.*
- *Para cualquier $a \in K$, se tiene que $a \circ 1 = a$.*
- *Para cualesquiera $a, b \in K$, se tiene que $a + b = b + a$.*
- *Para cualesquiera $a, b \in K$, se tiene que $a \circ b = b \circ a$.*
- *Para cualesquiera $a, b, c \in K$, se tiene que $a + (b \circ c) = (a + b) \circ (a + c)$.*

- *Para cualesquiera $a, b, c \in K$, se tiene que $a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c)$.*
- *Para cualquier $a \in K$, se tiene que $a + \neg a = 1$.*
- *Para cualquier $a \in K$, se tiene que $a \circ \neg a = 0$.*

Utilizando el vernáculo `Axiom` define una estructura de Bool y demuestra los siguientes hechos: Sea $(K, +, \circ, \neg, 0, 1)$ un álgebra de Bool, entonces se cumple lo siguiente:

1. Para cualquier $a \in K$, se tiene que $a + a = a$.
2. Para cualquier $a \in K$, se tiene que $a \circ a = a$.
3. Para cualquier $a \in K$, se tiene que $a + 1 = 1$.
4. Para cualquier $a \in K$, se tiene que $a \circ 0 = 0$.
5. Para cualesquiera $a, b \in K$, se tiene que $a + (a \circ b) = a$.
6. Para cualesquiera $a, b \in K$, se tiene que $a \circ (a + b) = a$.
7. Los elementos 0 y 1 son duales, es decir, $\neg 1 = 0$ y $\neg 0 = 1$.
8. Para cualesquiera $a, b \in K$, se tiene que $a + b = \neg(\neg a \circ \neg b)$.
9. Para cualesquiera $a, b \in K$, se tiene que $a \circ b = \neg(\neg a + \neg b)$.

1.2. Álgebras de Bool con orden

Una de las formas en que Huntington define una relación de orden utilizando los operadores de la estructura, es:

Definición 2. *Sea $(K, +, \circ, \neg, 0, 1)$ un álgebra de Bool, dados $x, y \in K$ decimos que $x < y$ syss $x + y = y$.*

Se observa en el artículo que brinda otras ecuaciones para definir el orden, resulta que estas definiciones son equivalentes. Tu trabajo es demostrar los siguientes resultados:

1. Para cualesquiera $x, y \in K$, si $x < y$ entonces $x \circ y = x$.
2. Para cualesquiera $x, y \in K$, si $x < y$ entonces $\neg x + y = 1$.
3. Para cualesquiera $x, y \in K$, si $x < y$ entonces $\neg x \circ y = 0$.

Demostrar el resto de teoremas necesarios para la equivalencia de definiciones, quedan como tarea moral.

1.3. Segunda definición

Tiempo después el mismo Huntington en *New Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic, with special reference to Whitehead and Russell's Principia Mathematica* redefine un álgebra de Bool de la siguiente forma:

Definición 3 (Álgebra de Bool)**.** *Sea K una conjunto no vacío, $+$ un operador binario y $\neg$ un operador unario sobre K. Se dice que $(K, +, \neg)$ es un álgebra de Bool si se satisfacen las siguientes propiedades:*

- *Para cualesquiera $a, b \in K$, se tiene que $a + b = b + a$.*
- *Para cualesquiera $a, b, c \in K$, se tiene que $(a + b) + c = a + (b + c)$.*
- *Para cualesquier $a \in K$, se tiene que $a + a = a$.*
- *Para cualesquiera $a, b \in K$, se tiene que $\neg(\neg a + \neg b) + \neg(\neg a + b) = a$.*

Definamos los siguientes operadores y constantes sobre un álgebra de Bool $(K, +, \neg)$:

- Sean $a, b \in K$, definimos a $a \circ b$ como $\neg(\neg a + \neg b)$.
- Sea $a \in K$, definimos a 1 como $a + \neg a$.
- Sea $a \in K$, definimos a 0 como $a \circ \neg a$.

Resulta que ambas definiciones de la estructura son equivalentes, como últimos ejercicios de esta sección tu trabajo será demostrar algunas propiedades para poder llegar a este hecho, es decir, no deberás demostrar su equivalencia. Sea $(K, +, \neg)$ un álgebra de Bool, entonces se cumple lo siguiente:

1. Para cualesquiera $a, b \in K$, se tiene que $(a \circ b) + (a \circ \neg b) = a$.
2. Para cualquier $a \in K$, se tiene que $a + \neg a = \neg a + \neg\neg a$.
3. Para cualquier $a \in K$, se tiene que $\neg\neg a = a$.
4. Para cualesquiera $a, b \in K$, se tiene que $a + \neg a = b + \neg b$.
5. Para cualquier $a \in K$, $\neg a + a = 1$.
6. Para cualquier $a \in K$, $\neg a \circ a = 0$.
7. Los elementos 0 y 1 son duales, es decir, $\neg 1 = 0$ y $\neg 0 = 1$.

2. Deducción natural

Las definiciones anteriores claramente hacen referencia a las ecuaciones que conocemos de la lógica proposicional, por ejemplo: $a + 0 = a$ se traduce a $a \vee \bot \leftrightarrow a$. Es decir, mientras que la ecuación $a + 0 = a$ es cierta en la lógica ecuacional [1], la fórmula $a \vee \bot \leftrightarrow a$ es cierta en la teoría de la lógica matemática.

Esta propiedad nos permite deducir algo muy importante para la computación: Hacer cuentas es lo mismo que demostrar formalmente en lógica proposicional.

Tu trabajo es demostrar las ecuaciones que se indican en la sección 1.1. con la siguiente restricción: Primero intentar demostrarlas utilizando deducción natural para lógica constructivista, si eso no funciona, entonces indicarlo en un comentario y utilizar alguno(s) de los axiomas de lógica clásica.

Los juicios para deducción natural (tanto lógica constructivista y lógica clásica) están dados en las **notas del curso número 14**.

Si llegas a utilizar lógica clásica y no era necesario, se considerará errónea la demostración, es decir, primero intentar hacerlo con lógica constructivista, si no se llega a un resultado entonces utilizar lógica clásica.

Por ejemplo si indica que $a \circ 1 = a$, entonces deberás demostrar que $\vdash (a \wedge \top) \leftrightarrow a$.

Para poder hacer uso de la lógica clásica deberás ingresar el siguiente axioma:

```
Axiom clasica: forall (p:Prop), p \/ ~ p.
```

En clase se vieron algunos teoremas utilizando el axioma anterior, puedes hacer uso de estos en tu archivo, es decir, puedes copiarlos y pegarlos.

3. Reglas

- Únicamente se podrá importar a biblioteca `Utf8` para la impresión agradable de símbolos.
- Queda estrictamente prohibido utilizar `auto` (o sus derivados), `intuition`, `omega`, `ring`, etc. Es decir, solamente podrán utilizar las tácticas que se vieron en el laboratorio.

La última y nos vamos. `^_^`

[1] Axiomatizando la definición de álgebra de Bool