Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Probabilidad I

Tarea 4
Variables Aleatorias Discretas I

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

22 de octubre 2019

1. Supón que la función de distribución acumulada X está dada por:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \le b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \le b < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \le b < 3 \\ 1 & b \ge 3 \end{cases}$$

- Obtén $P(X = i)$ si $i = 1, 2, 3$
  Solución: Primero hay que recordar que gracias a la función de distribución acumulada de la variables aleatoria X nos permite calcular $P(X = a)$ como:

  $$P(x = a) = P(x \le a) - P(x < a) = F(a) - F(a_-)$$

  Lo que significa que a_- es el siguiente valor más pequeño posible de a.

  - $i = 1$.

  $$\begin{aligned} P(x = 1) &= P(x \le 1) - P(x < 1) \\ &= F(1) - \lim_{n \to \infty} F(1 - \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

  - $i = 2$.

  $$\begin{aligned} P(x = 1) &= P(x \le 2) - P(x < 2) \\ &= F(2) - \lim_{n \to \infty} F(2 - \frac{1}{n}) \\ &= \frac{11}{12} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

  - $i = 3$.

  $$\begin{aligned} P(x = 3) &= P(x \le 3) - P(x < 3) \\ &= F(3) - \lim_{n \to \infty} F(3 - \frac{1}{n}) \\ &= 1 - \frac{11}{12} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- Calcula $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$
  Solución: Recordando que[1]:

  $$P(a < x < b) = P(x < b) - P(x \le a) = F(b_-) - F(a)$$

[1]Propiedad de un evento en términos de $F(x)$, página 140 *Introducción a la probabilidad*, Luis Rincón, 2016.

$$
\begin{aligned}
P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) &= P(x < \frac{3}{2}) - P(x \leq \frac{1}{2}) \\
&= \lim_{n\to\infty} F(\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}-1}{4}) - \frac{\frac{1}{2}}{4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2. Supón que la función de masa de probabilidad de la Variable Aleatoria X está dada por

$$p_X(i) = ci \text{ donde } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Obtén el valor de c.

  <u>Solución</u>: Recordando que para una variables aleatoria discreta X, definimos la función de masa de probabilidad $p(a)$ de X por $p(a) = P\{X = a\}$. Como X debe tomar valores x_i, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

  Entonces:

$$\sum_{i=1}^{6} P_X(i) = c(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = c \cdot 21 = 1$$

  Por tanto, $c = \frac{1}{21}$.

- Obtén la probabilidad de que X tome algún valor "Par".

  <u>Solución</u>: $P\{X \text{ es par}\} = P_X(2) + P_X(4) + P_X(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}$.

3. Sea X una Variable Aleatoria con función de masa de probabilidad dada por:

$$P(X = -1) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 0) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

Encuentra el valor de $\mathbb{E}(|X|)$ de las siguientes maneras:

- Obtén la f.m.p de la Variable Aleatoria $Y = |X|$, usa este resultado para obtener $\mathbb{E}(|X|)$.

  <u>Solución</u>: Recordando la definición de $\mathbb{E}$:

  Definicion 1. *Sea X una variables aleatoria discreta con función de probabilidad $f(x)$. La esperanza de X de define como el número*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x} x f(x)$$

  suponiendo que esta suma es absolutamente convergente, es decir, cuando la suma de los valores absolutos es convergente.

  Los valores que puede tomar la variable aleatoria $Y = |X|$ son 1 y 0. Entonces: Obteniendo $Y = 1$:

$$P(Y = 1) = P(X = -1 \vee X = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

  Obteniendo $Y = 0$:

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

  Finalmente obteniendo $\mathbb{E}(|X|)$:

$$\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in \{0,1\}} x f(x) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

- Usa la Ley del "Estadistico Inconsiente" con la función $g(x) = |x|$.
  <u>Solución</u>:

  Definicion 2. *La ley del estadístico inconsiente*[2] *dice lo siguiente*[3].
  Si X es una variable discreta aleatoria que toma en unos de sus valores x_i, $i \geq 1$, con respectivas probabilidades $p(x_i)$, entonces para cualquier valor real evaluado en la función g,

  $$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

  Entonces,

  $$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x |x|p(x) = |-1| \cdot \frac{1}{2} + |0| \cdot \frac{1}{3} + |1| \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Figura 1: Mi cara cuando vi la tarea por primera vez.

4. Natalia coloca 5 cajitas cerradas sobre una mesa durante una reunión familiar. Tres de ellas contienen algún obsequio mientras que las otras dos cajas no tienen nada. Si alguno de sus sobrinos pequeños comienza a abrir las cajas. Sea X la variable aleatoria que denota:

   $$X = \text{El número de cajas que abre su sobrino hasta que obtiene el primer regalo.}$$

   - Obtén la función de masa de probabilidad asociada a X
     <u>Solución</u>: Obteniendo la probabilidad el premio esté en la primera caja es $P(X = 1) = \frac{3}{5}$.
     La probabilidad de que la segunda caja contenga el premio, es la probabilidad de que la primera caja no contenga el premio por la probabilidad de que la segunda caja contenga el premio que es: $P(X = 2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$.
     La probabilidad de que la tercera caja contenga el premio, es la probabilidad de que la primera caja no contenga el premio, por la probabilidad de que la segunda no tenga el premio y que la tercera sí la tenga, que es: $P(X = 3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{10}$.
     Por tanto la fucnión de masa de probabilidad es:

     $$P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{5} & x = 1 \\ \frac{3}{10} & x = 2 \\ \frac{1}{10} & x = 3 \end{cases}$$

   - Obtén $\mathbb{E}(X)$.
     <u>Solución</u>: Recordando la fórmula de la esperanza, entonces:

     $$\mathbb{E}(X) = (1 \cdot \frac{3}{5}) + (2 \cdot \frac{3}{10}) + (3 \cdot \frac{1}{10}) = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

[2] En inglés *Law of The Unconscious Statistician (LOTUS)*
[3] Definición obtenida de *A First Course in Pobability*, Sheldon Ross, 8va edición.

- Obtén $Var(X)$.

  <u>Solución</u>:

  Definicion 3. *Sea X una variable aleatoria con esperanza μ, entonces la varianza de X denotada por $Var(X)$, está definida por:*[4]

  $$Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$$

  Una fórmula alternativa para $Var(X)$ se deriva como sigue:

  $$\begin{aligned}
  Var(X) &= \mathbb{E}[(X-\mu)^2] \\
  &= \sum_x (x-\mu)^2 p(x) \\
  &= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) p(x) \\
  &= \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x x p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) \\
  &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
  &= \mathbb{E}[X^2] - \mu^2
  \end{aligned}$$

  Que es,

  $$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

  Con la definición previa,

  $$\begin{aligned}
  Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\
  &= (1^2 \cdot \frac{3}{5}) + (2^2 \cdot \frac{3}{10}) + (3^2 \cdot \frac{1}{10}) - (\frac{3}{2})^2 \\
  &= \frac{27}{10} - \frac{9}{4} \\
  &= \frac{108-90}{40} \\
  &= \frac{9}{20}
  \end{aligned}$$

5. Una “Baraja Inglesa” tiene 52 cartas. Si un paquete de cartas de este juego es barajeado y se van seleccionando cartas una a una hasta el instante que un A’s aparece. Obtén el número esperado de cartas que se tuvieron que haber volteado una a una, hasta el momento en que un A’s es seleccionado.

   <u>Solución</u>: La baraja Inglesa tiene 4 A’s y 48 de las demás. Sea X_i que representa a la función indicadora para la carta en la posición i con valores 1 si todas las A’s están detrás de esa carta ó 0 en otro caso.

   $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si todas las A's están atrás del índice } i \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

   Teniendo así que el número de formas de retirar son $1 + \sum_{i=1}^{48} X_i$.

   El 1 que se sumó al principio es el caso cuando en la primera vez que se retiró una carta salió una A.

   Sea X la variable aleatoria que indica el número de cartas que fueron volteadas hasta que apareció un A’s.

   Ahora considerando la primera vez que sacamos (pero no salió una A la primera vez que se retiró una carta, ósea el caso inicial), la probabilidad es $\frac{1}{5}$ porque hay 6 posibles escenarios. Denotaremos a O como cualquier otra carta que no sea un A’s y A como un A’s posible, entonces se tienen:

[4] Definición obtenida de *A First Course in Pobability*, Sheldon Ross, 8va edición. página 133.

- $\{O, A, A, A, A\}$
- $\{A, O, A, A, A\}$
- $\{A, A, O, A, A\}$
- $\{A, A, A, O, A\}$
- $\{A, A, A, A, O\}$

Con el análisis previo, le podemos sacar la esperanza a cada término:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1 + \sum_{i=1}^{48} X_i \\ &= 1 + \frac{48}{5} = \frac{53}{5} \\ &= 10.6\end{aligned}$$

6. En un sorteo de la Loteria Nacional se venden 2,000,000 de raspaditos cuyo valor es de \$10 pesos cada uno. Si 4,000 de ellos tienen un premio de un valor de \$300 pesos. 500 boletos tienen un premio de \$8,000 mientras que solo un boleto tiene un premio de \$10,000,000. Si ningún boleto tiene mas de un premio. ¿Cuál es el valor esperado del premio que ganará un jugador que compra un boleto de este sorteo?

   Solución: Denotaremos a la variable aleatoria X como la ganancia en pesos que tendrá un jugador escogido aleatoriamente en el juego.

   Como cada "raspaditos" tiene un precio de \$10 pesos entonces si gana o no el jugador se le descontará del premio (en caso de ganar) ó solo habrá sido dinero que gasto el jugador sin ganancia alguna. Se hace esta observación porque se le restará el precio al valor x que toma la variable aleatoria.

   El número de "raspaditos" sin premio es $2,000,000 - 4,000 - 500 - 1 = 1,995,499$.

   Teniendo preestablecido eso, podemos dar la función de masa de probabilidad con su imagen; en este caso siguiendo el enfoque probabilidad clásica, donde es el número de boletos que queremos sobre el número total de "raspaditos" (2,000,000). Entonces:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1,995,499}{2,000,000} = 0.9977495 & x = -10 \\ \frac{4,000}{2,000,000} = 0.002 & x = 300 - 10 = 290 \\ \frac{500}{2,000,000} = 0.00025 & x = 8,000 = 7,990 \\ \frac{1}{2,000,000} = 0.0000005 & x = 10,000,000 - 10 = 9,999,990 \end{cases}$$

   Obteniendo la esperanza:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= -10 \cdot 0.9977495 + 290 \cdot 0.002 + 7,990 \cdot 0.00025 + 9,999,990 \cdot 0.0000005 \\ &= -2.4\end{aligned}$$

7. Sea X una Variable Aleatoria con función de masa de probabilidad:

$$P(X = 1) = p = 1 - P(X = -1)$$

   Obtén $c \neq 1$ tal que $\mathbb{E}(c^x) = 1$

   Solución: Sabemos que para toda $c \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\mathbb{E}(c^x) = 1 = cp + \frac{1-p}{c}$$

Entonces si tenemos $1 = cp + \frac{1-p}{c}$ y multiplicamos por c ambos lados, se obtiene:

$$c = c^2 p + 1 - p$$

Reacomodando la expresión previa se tiene:

$$c^2 p - c + (1-p) = 0$$

Teniendo así una ecuación de cuadrática, utilizando la fórmula general para resolverla $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Entonces:

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p}$$

Fijándonos en el discriminate $\Delta = 1 - 4p(1-p) = (4p-1)^2$. Entonces

$$c = \frac{1 \pm 4p - 1}{2p} = 1 \quad \wedge \quad \frac{1-p}{p}$$

Pero como por hipótesis $c \neq 1$. Por tanto $c = \frac{1-p}{p}$.

8. Sea N una Variable Aleatoria que toma valores enteros no-negativos. Demuestra que:

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=0}^{\infty} P(N > i)$$

Primero hay que notar que $\sum_{i=0}^{\infty} P(N > i)$ puede ser vista como $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P(N = i)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} P(N > i) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P(N = i) && \text{Observación previa} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{j} P(N = i) && \text{Conmutatividad de la suma} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} i \cdot P(N = i) && \text{Evaluando la función de probabilidad en } i \\
&= \mathbb{E}(N) && \text{Definición de esperanza}
\end{aligned}$$

□

9. Paulina guarda en su recámara una caja en donde tiene almacenadas 20 pilas. Ella elige 3 pilas al azar para utilizarlas en un nuevo aparato electrónico que ha comprado. Si hay 4 pilas en la caja que ya no tienen energía. ¿Cuál es el número esperado de pilas defectuosas seleccionadas en la muestra?

Solución: Sea X la variable aleatoria asociada con el número de pilas defectuosas seleccionadas en la muestra, entonces:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{560}{1140}, & x = 0 \\ \\ \frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{480}{1140}, & x = 1 \\ \\ \frac{\binom{16}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{96}{1140}, & x = 2 \\ \\ \frac{\binom{4}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{4}{1140}, & x = 3 \end{cases}$$

Número esperado de pilas defectuosas seleccionadas de la muestra:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0\cdot\frac{560}{1140} + 1\cdot\frac{480}{1140} + 2\frac{96}{1140} + 3\frac{4}{1140}\\ &= \frac{480+192+12}{1140} = \frac{684}{1140}\end{aligned}$$

10. Decimos que la Variable Aleatoria X tiene una distribución de *Yule-Simons*. Si la función de masa de probabilidad asociada a X esta dada por:

$$P\{X=n\} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \text{ si } n \geq 1$$

- Prueba que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = 1$$

Hint: Utiliza el hecho que: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)}$ luego entonces usa el hecho que $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$.

Demostración. Simplificando la expresión para $P(X=n)$:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)} = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$$

Ahora las sumas parciales pueden ser calculadas directamente:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} P(X=n) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n(n+1)(n+2)}\\ &= \sum_{n=1}^{N} 4(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) - 2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})\\ &= 4(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}) - 2(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2})\\ &= 4(1 - \frac{1}{N+1}) - 2(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2})\\ &= 1 - \frac{2}{N+1} + \frac{2}{N+2}\end{aligned}$$

Para terminar, la suma infinita está dada por el límite de las sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P(X=n) = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{2}{N+1} + \frac{2}{N+2} = 1$$

$\square$

- Prueba que $\mathbb{E}(X) = 2$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)} \\
&= \lim_{N\to\infty} 4 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&= \lim_{N\to\infty} 4(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}) = \lim_{N\to\infty} 2 - \frac{2}{N+2} = 2
\end{aligned}
$$

□

- Prueba que $\mathbb{E}(X^2) = \infty$.

  Demostración. Para el segundo momento, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

  Y eso diverge, por lo tanto $\mathbb{E}(X^2) = \infty$. □

11. Se lanzan 2 monedas. La primera de ellas cae *Sol* con probabilidad 0.6 mientras que la segunda lo hace con probabilidad 0.7. Sea X la Variable Aleatoria que denota.

$$X = \text{El número de Soles que ocurren al realizar el experimento}$$

- Obtén $P(X = 1)$

  <u>Solución</u>: Definamos a los eventos A la primera moneda salió Sol, B la segunda moneda salió Sol. Para encontrar $P(X = 1)$ debemos tener en cuenta los siguientes casos, en el primer lanzamiento la primera moneda salío Sol y la segunda águila, ó, lo opuesto. Entonces:

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(AB^c \cup A^cB) && \text{De los posibles casos} \\
&= P(AB^c) + P(A^cB) && \text{Por ser eventos disjuntos} \\
&= P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) && \text{Por ser eventos independientes} \\
&= 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 && \text{Hipótesis y obteniendo complemento} \\
&= 0.46
\end{aligned}
$$

- Determina $\mathbb{E}(X)$

  <u>Solución</u>: Para deterinar la esperanza nos faltan obtener los otros dos posibles casos; cuando se lanzan las dos monedas y las dos caen en Águila ($P(X = 0)$) y cuando se lanzan las monedas y en las dos cae Sol ($P(X = 2)$).

$$P(X=0) = P(A^cB^c) = P(A^c)P(B^c) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$$

$$P(X=2) = P(AB) = P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_x xP(X=x)\\ &= 0\cdot 0.12 + 1\cdot 0.46 + 2\cdot 0.42\\ &= 1.3\end{aligned}$$

12. Michelle lanza un dado 10 veces. Obtén el valor esperado de la suma de los resultados que se obtienen en cada lanzamiento del dado.

<u>**Solución:**</u> Sea X la variable aleatoria que indica el lado que salió en el lanzamiento de un dado. Donde $P(X=x)=\frac{1}{6}$ con $x\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Entonces la esperanza es:

$$\mathbb{E}(X) = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{3}{6}+4\cdot\frac{4}{6}+5\cdot\frac{5}{6}+6\cdot\frac{6}{6}=\frac{21}{6}$$

Al ser la esperanza lineal entonces podemos decir que la esperanza es $\frac{21}{6}\cdot 10 = 35$, porque:

$$\begin{aligned} & 10\cdot\mathbb{E}(X) = 10\cdot\frac{21}{6} = 35\\ \iff & 10\cdot\mathbb{E}(\sum_x xP(X=x)) = 10\cdot\mathbb{E}(1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{3}{6}+4\cdot\frac{4}{6}+5\cdot\frac{5}{6}+6\cdot\frac{6}{6})\\ \iff & \mathbb{E}(10\cdot\frac{1}{6}+20\cdot\frac{2}{6}+30\cdot\frac{3}{6}+40\cdot\frac{4}{6}+50\cdot\frac{5}{6}+60\cdot\frac{6}{6})\\ \iff & \mathbb{E}(\frac{10}{6})+\mathbb{E}(\frac{20}{6})+\mathbb{E}(\frac{30}{6})+\mathbb{E}(\frac{40}{6})+\mathbb{E}(\frac{50}{6})+\mathbb{E}(\frac{60}{6})=\frac{21}{6}\end{aligned}$$

Figura 2: Gato triste con sombrero :(

13. Un total de n bolas numeradas desde el 1 hasta n, son puestas en n urnas las cuales también están numeradas desde el 1 hasta la n, de tal forma que la i-ésima bola puede estar en cualquiera de las urnas $1,2,\ldots,i$ con igual probabilidad. Obtén:

- El valor esperado de las urnas que están vacías

  <u>**Solución:**</u> Denotamos a la variable aleatoria $X := \{\text{El número de urnas vacías}\}$ y a la función indicadora $\mathbb{1}_{X_i} := \begin{cases} 1 & \text{Si la urna } i \text{ está vacía}\\ 0 & e.o.c\end{cases}$.

  Como en la en urna i está vacía, las otras pelotas son depositadas en las otra urnas (en las $i-1$ restantes) y esto se va a hacer para cada posible lanzamiento. Como por hipótesis nos dice que la i-ésima bola puede estar en cualquiera de las urnas $1,2,\ldots,i$ con igual probabilidad, pero justo lo que queremos es que no caiga en esa urna, obtenemos el complemento que es $1-\frac{1}{i}$.

Entonces ahora lo que debemos hacer es obtener $P(X_i = 1)$ sobre el número de las pelotas.

$$\begin{aligned}
P(X_i) &= \prod_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{i} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i-1}{i} \\
&= (\frac{i-1}{i}) \cdot (\frac{i}{i+1}) \cdot (\frac{i+1}{i+2}) \cdot \ldots \cdot (\frac{n-1}{n}) \\
&= (\frac{i-1}{\cancel{i}}) \cdot (\frac{\cancel{i}}{\cancel{i+1}}) \cdot (\frac{\cancel{i+1}}{\cancel{i+2}}) \cdot \ldots \cdot (\frac{\cancel{n-1}}{n}) \\
&= \frac{i-1}{n}
\end{aligned}$$

Recordando que la probabilidad de la función indicadora es igual la esperanza, i.e.

$$P(X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_X)$$

Entonces podemos decir que $P(X_i) = E(X_i = 1)$ que igual es sencillo demostrar.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i - 1 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} i \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n-1}{2}
\end{aligned}$$

- La probabilidad de que ninguna de las urnas estén vacías

  <u>Solución</u>: Tenemos que para cada urna tener al menos un bola en ella la tenemos que la n-ésima bola debe estar en la n-ésima urna con probabilidad $\frac{1}{n}$. Y así con todas las demás pelotas y urnas con una probabilidad $\frac{1}{n-i}$ con $1 \leq i < n$. Entonces las probabilidad de que ninguna de las urnas esté vacía es:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}$$

14. En una cierta región del Bosque de Chapultepec hay r-tipos de ciertas especies de insectos. Un biólogo acude al lugar y captura a varios de ellos independientemente del tipo de especie que sean. Denotamos a P_i donde $i = 1, 2, \ldots, r$:

$$Pi = \text{La probabilidad de que un insecto del tipo } i \text{ sea capturado donde } \sum_{i=1}^{r} P_i = 1$$

- Calcula el valor esperado del número de insectos que el biólogo captura antes que un insecto del 1er. tipo sea capturado.

  <u>Solución</u>: Sea X la variable aleatoria que denota el número de insectors capturado antes de que un insecto del 1er tipo sea capturado. Entonces

$$P(X = x) = (1 - P_1)^x P_1$$

Se sigue que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x(1-P_1)^x P_1 \\
&= P_1 \sum_{x=0}^{\infty} x(1-P_1)^x \\
&= P_1 \cdot \frac{1-P_1}{P_1^2} && \text{Por la serie geométrica } \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad |z|<1 \\
&= \frac{1-P_1}{P_1}
\end{aligned}
$$

- Obtén el Valor Esperado de los tipos de insectos que son capturados antes que un insecto del 1er. tipo sea capturado.

  <u>Solución</u>: Para $i = 2, \ldots, r$, sea $Y_i = 1$ si hay un tipo i capturado antes del primer insecto del 1er tipo y $Y_i = 0$ en otro caso. Entonces $\sum_{i=2}^{r} Y_i$ es el número total de tipos de insectos que son capturados antes del primero del tipo 1. Para cualquier $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$
\mathbb{E}(Y_i) = P(Y_i = 1) = \frac{p_i}{p_1 + p_i}
$$

  Por lo tanto

$$
\mathbb{E}(\sum_{i=2}^{r} Y_i) = \sum_{i=2}^{r} \frac{p_i}{p_1 + p_i}
$$