U.N.A.M. FACULTAD DE CIENCIAS Semestre 2020-1
9018. PROBABILIDAD I

Tarea 4: Variables Aleatorias Discretas I

1. Supón que la función de distribución acumulada de X esta dada por

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq b < 3 \\ 1 & b \geq 3 \end{cases} \tag{1}$$

   - Obtén $P(X = i) \quad \text{si} \quad i = 1, 2, 3$
   - Calcula $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$

2. Supón que la funcion de masa de probabilidad de la Variable Aleatoria X esta dada por

$$p_X(i) = c\, i \quad \text{donde} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

   - Obtén el valor de c
   - Obtén la probabilidad de que X tome algún valor *"Par"*

3. Sea X una Variable Aleatoria con funcion de masa de probabilidad dada por:

$$P(X = -1) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(X = 0) = \frac{1}{3} \quad , \quad P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

   Encuentra el valor de $\mathbb{E}(|X|)$ de las siguientes maneras

   - Obtén la f.m.p de la Variable Aleatoria $Y = |X|$, usa este resultado para obtener $\mathbb{E}|X|$
   - Usa la *"Ley del Estadistico Inconsiente"* con la función $g(x) = |x|$

4. Natalia coloca 5 cajitas cerradas sobre una mesa durante una reunión familiar. Tres de ellas contienen algún obsequio mientras que las otras dos cajas no tienen nada. Si alguno de sus sobrinos pequeños comienza a abrir las cajas. Sea X la variable aleatoria que denota:

$$X = \text{El número de cajas que abre su sobrino hasta que obtiene el primer regalo}$$

   - Obtén la función de masa de probabilidad asociada a X
   - Obtén $\mathbb{E}(X)$.
   - Obtén $Var(X)$.

5. Una "Baraja Inglesa" tiene 52 cartas. Si un paquete de cartas de este juego es *barajeado* y se van seleccionando cartas una a una hasta el instante que un As aparece . Obtén el número esperado de cartas que se tuvieron que haber volteado una a una, hasta el momento en que un As es seleccionado.

6. En un sorteo de la Loteria Nacional se venden 2,000,000 de *raspaditos* cuyo valor es de \$10 pesos cada uno. Si 4000 de ellos tienen un premio de un valor de \$300 pesos. 500 boletos tienen un premio de \$8000 mientras que solo un boleto tiene un premio de \$10,000,000. Si ningún boleto tiene mas de un premio. ¿ Cual es el valor esperado del premio que ganara un jugador que compra un boleto de este sorteo?

7. Sea X una Variable Aleatoria con función de masa de probabilidad:

$$P(X=1) = p = 1 - P(X=-1)$$

Obtén $c \neq 1$ tal que $\mathbb{E}(c^x) = 1$

8. Sea N una Variable Aleatoria que toma valores enteros no-negativos. Demuestra que

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=0}^{\infty} P(N > i)$$

9. Paulina guarda en su recamara una caja en donde tiene almacenadas 20 pilas. Ella elige 3 pilas al azar para utilizarlas en un nuevo aparato electrónico que ha comprado. Si hay 4 pilas en la caja que ya no tienen energía. ¿ Cual es el número esperado de pilas defectuosas seleccionadas en la muestra?

10. Decimos que la Variable Aleatoria X tiene una distribución de *Yule-Simons*. Si la función de masa de probabilidad asociada a X esta dada por

$$P\{X = n\} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{si} \quad n \geq 1$$

- Prueba que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = 1$$

Hint: Utiliza el hecho que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)}$ luego entonces usa el hecho que $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$

- Prueba que $\mathbb{E}(X) = 2$
- Prueba que $\mathbb{E}(X^2) = \infty$

11. Se lanzan 2 monedas. La primera de ellas cae *Sol* con probabilidad 0.6 mientras que la segunda lo hace con probabilidad 0.7. Sea X la Variable Aleatoria que denota.

$$X = \text{El número de } \textit{Soles} \text{ que ocurren al realizar el experimento}$$

- Obtén $P(X=1)$
- Determina $\mathbb{E}(X)$

12. Michelle lanza un dado 10 veces. Obtén el valor esperado de la suma de los resultados que se obtienen en cada lanzamiento del dado.

13. Un total de n bolas numeradas desde el 1 hasta n, son puestas en n urnas las cuales también están numeradas desde el 1 hasta la n, de tal forma que la i-esima bola puede estar en cualquiera de las urnas $1, 2, \ldots, i$ con igual probabilidad. Obtén:

- El valor esperado de las urnas que están vacías
- La probabilidad de que ninguna de las urnas estén vacías

14. En una cierta región del Bosque de Chapultepec hay r-tipos de ciertas especies de insectos. Un biologo acude al lugar y captura a varios de ellos independientemente del tipo de especie que sean. Denotamos a P_i donde $i = 1, 2, \ldots, r$:

$$P_i = \text{La probabilidad de que un insecto del tipo } i \text{ sea capturado} \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^{r} P_i = 1$$

- Calcula el valor esperado del número de insectos que el biólogo captura antes que un insecto del 1er. tipo sea capturado.
- Obtén el Valor Esperado de los tipos de insectos que son capturados antes que un insecto del 1er. tipo sea capturado.