Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Probabilidad I

Tarea 5
Variables Aleatorias Discretas II

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

9 de noviembre 2019

1. Si cada persona en una comunidad de 1000 habitantes tiene un 1 % de chances de resultar infectado de un peligroso virus. Suponiendo que una persona resulta infectada independientemente de lo que ocurra con otra persona de la comunidad. Calcula la probabilidad de que:

   Solución: Sea X la variable aleatoria que representa el número de gente infectada.

   Recordando que la f.m.p de una variable aleatoria que se destribuye binomial, ósea $X \sim Bin(n, p)$ con parámetros (n, p) está dada por:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^n (1-p)^{n-i} \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

   - Exactamente haya 10 personas infectadas
     Solución:
$$P(X = 10) = \binom{1000}{10} (0.01)^1 0 (0.99)^{990} \approx 0.12574$$
   - A lo mas haya 16 personas infectadas
     Solución:
$$P(X \leq 16) = \sum_{i=0}^{16} \binom{1000}{i} (0.01)^i (0.99)^{100-i} \approx 0.9736$$
   - Haya entre 12 y 14 personas infectadas
     Solución:
$$P(12 \leq X \leq 14) = \sum_{i=12}^{14} \binom{1000}{i} (0.01)^i (0.99)^{100-i} \approx 0.22023$$
   - Alguien resulte infectado
     Solución:
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{1000}{0} = 1 - 0.99^{1000} \approx 0.9999$$

2. En 1693 Samuel Pepys le escribió una carta a Isaac Newton en donde le planteo el siguiente problema: ¿Cuál de los siguientes tres planteamientos es mas probable que ocurra?

   - Se lanzan 6 dados y aparece al menos un 6's
     Solución: La probabilidad de que aparezca un 6 en un dado es $\frac{1}{6}$ pero si obtenemos el complemento que es $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ que es que no aparezca un 6. Hacemos esto porque nos pide calcular *al menos* $6n$ veces (esto nos ayudará para los demás ejercicios).
     Entonces denotamos a X v.a. como el número de 6's que aparecen en $6n$ dados, entonces $X \sim Bin(n, \frac{1}{6})$. Teniendo una versión generalizada como,
$$P(X = x) = 1 - \binom{6n}{x} (\frac{1}{6})^x (\frac{5}{6})^{6n-x}$$
     Entonces si lanzamos un dado 6 veces, ósea $X \sim Bin(1, \frac{1}{6})$
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} (\frac{1}{6})^0 (\frac{5}{6})^6 \approx 0.6651$$
   - Se lanzan 12 dados y aparecen al menos dos 6's
     Solución: $X \sim Bin(2, \frac{1}{6})$
$$P(X \geq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} P(X = x) \approx 0.6187$$

- Se lanzan 18 dados y aparecen al menos tres 6's
  Solución: $X \sim Bin(3, \frac{1}{6})$

$$P(X \geq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} P(X = x) \approx 0.5973$$

Como dato adicional Sir Isaac Newton ademas de ser uno de los mas grandes científicos de la historia, durante un gran lapso de su vida fue un funcionario publico, manejo digamos el SAT de lo que hoy es el Reino Unido. Y estaba a favor usar la horca o quemar gente si evadian impuestos, eran buenos tiempos.

3. ☹

4. Un viejo juego de dados llamado *Chuck a Luck* popular en el EE.UU. del S XIX. Consiste en que un jugador apuesta a algún número entre el 1 y el 6 entonces se lanzan 3 dados. Si el número al que le aposto el jugador aparece una, dos o tres veces al lanzar los dados el jugador recibe una, dos o tres veces lo que aposto, mas su apuesta inicial y pierde su apuesta inicial en cualquier otro caso. Sea X la variable aleatoria que denota: La ganancia del jugador por unidad del principal apostado inicialmente.

- Obtén la función de masa de probabilidad asociada a X.
  Solución: Asumiendo que el dado es *justo* y cada evento es independiente del otro, entonces el número de veces que el número de apuesta que aparece es una **variable aleatoria binomial** con parámetros $(3, \frac{1}{6})$. Por lo tanto la f.m.p. es: (evaluando con los valores).

$$p(i) = \binom{3}{i} p^i (1 - \frac{1}{6})^{3-i}$$

- Calcula el Valor esperado de la ganancia del jugador por unidad apostada.
  Solución: Obteniendo la probabilidad de que pierda una unidad y que gane 1,2 y unidades,

$$\begin{aligned}
P(X = -1) &= \binom{3}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216} \\
P(X = 1) &= \binom{3}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^2 = \frac{75}{216} \\
P(X = 2) &= \binom{3}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^1 = \frac{15}{216} \\
P(X = 3) &= \binom{3}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^0 = \frac{1}{216}
\end{aligned}$$

Obteniendo el valor esperado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= -1 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} \\
&= \frac{-17}{216}
\end{aligned}$$

5. Si $X \sim Bin(n, p)$.
   Prueba que $\mathbb{E}(\frac{1}{X+1}) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\frac{1}{X+1}) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} f(k) && \text{Def. esperanza}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} && \text{Por hip. } X \sim Bin\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} && \text{Reescribiendo coef. binomial}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} && \text{Álgebra}\\
&= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k} && \text{Multip. por } 1 = \frac{(n+1)p}{(n+1)p}\\
&= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} p^{k+1} (1-p)^{(n+1)-(k+1)} && \text{Reescribiendo } n-k\\
&= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!((n-1)-k)!} p^{k} (1-p)^{(n+1)k} && \text{Cambiando límites de la suma}\\
&= \frac{1}{(n+1)p} \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!((n-1)-k)!} p^{k} (1-p)^{(n+1)k}}_{\text{Consideramos } Bin(n+1,k) \text{ teniendo así } 1-(1-p)^n} && \text{Observación previa}\\
&= \frac{1}{(n+1)p} \cdot (1-(1-p)^{n+1}) && \text{Sustituyendo}\\
&= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}
\end{aligned}
$$

□

Figura 1: Siempre que veo una nueva tarea de proba ☹

6. Supón que se realizan n volados donde la probabilidad de que caiga 'Sol' es igual a p. Prueba que la probabilidad de que ocurran un número par de 'Soles' al realizar la serie de lanzamientos es igual a

$\frac{1}{2}[1+(q-p)^n]$ donde $q = 1-p$. Primero demuestra y luego utiliza la siguiente identidad

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} p^{2i} q^{n-2i} = \frac{1}{2}[(p+q)^n + (q-p)^n]$$

Donde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ es el mayor entero menor igual que $\frac{n}{2}$

Demostración. Consideremos las siguientes dos igualdades:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

$$(p-q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} \tag{2}$$

Si sumamos (1) y (2), entonces todos los términos k son de la forma $k = 2i$, teniendo así,

$$(p+q)^n + (p-q)^n = 2 \sum_{k \text{ par}}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k}$$

Reescribiéndola como,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} p^{2i} q^{n-2i} = \frac{1}{2}[(p+q)^n + (q-p)^n]$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(X = \text{ número par de Soles}) &= \frac{1}{2}[(p+q)^n + (q-p)^n] \\ &= \frac{1}{2}[(1+(q-p)^n] \end{aligned}$$

□

7. Sea X una variable aleatoria Poisson con parámetro λ.

 - Prueba que: $P(X \text{ es 'Par'}) = \frac{1}{2}[1+e^{-2\lambda}]$
 Utiliza el ejercicio anterior y la relación que existe entre una Variable Aleatoria Poisson y la Binomial.

 Demostración. Recordando que una variable aleatoria X que tomar valores $0, 1, 2 \ldots$ se dice que se distribuye *Poisson* con parámetro λ, si para alguna $\lambda > 0$,

 $$p(i) = P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

 Sea $p \in [0,1]$ y $\lambda = np$ (tomando los parámetros n y p de la Binomial) y tomando la ecuación del inciso anterior, tenemos que

 $$P(X \text{ es 'Par'}) = \frac{1}{2}(1+(1-2p)^n) = \frac{1}{2}(1+(1-2\frac{\lambda}{n})^n)$$

 Y si aplicamos el límite cuando $n \to \infty$, entonces,

 $$\lim_{n\to\infty} P(X \text{ es 'Par'}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1+(1-2\frac{\lambda}{n})^n) = \frac{1}{2}(1+e^{2\lambda})$$

 □

- Prueba el resultado anterior directamente haciendo uso de la expansión en Serie de Taylor de $e^{-\lambda} + e^{\lambda}$.

  Demostración. Usando la expansión de Taylor de una función exponencial se tiene:

$$P(X \text{ es 'Par'}) = P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$$

  La serie de Taylor de e^{λ} es:

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \tag{1}$$

  La serie de Taylor de $e^{-\lambda}$ es:

$$e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \tag{2}$$

  Sumando (1) y (2), se tiene,

$$e^{\lambda} + e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$$

  Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(X \text{ es 'Par'}) &= e^{-\lambda} (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}) \\ &= e^{-\lambda} (\frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}}{2}) \\ &= e^{-\lambda} (\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}) \end{aligned}$$

  □

8. ☹

9. Se sabe que en una caseta de la Autopista 'México-Queretaro' los vehículos pasan a razón de 16 carros por minuto. ¿Cual es la probabilidad de que 1000 vehículos atraviesen la caseta en la siguiente hora?

   Hint: ¿Cuál es la razón por hora?

   Solución: Dice que pasa 16 autos por minuto pero nos interesa tener cuantos pasan por hora, entonces lo multiplicqmos por 60, teniendo así que la razón es de 960 autos por hora. Y justamente esa razón de cambio es nuestro parámetro $\lambda = 960$.

   Sea X la v.a. que denota el número de autos que atraviesan la caseta por hora.
   Teniendo así $X \sim Poi(960)$.

   Entonces lo que buscamos es $P(X >= 1000)$, como no es *fácil* de calcular por medios convencionales, usaré una calculadora[1].

   Por lo tanto $P(X \geq 1000) = 0.10175$

10. ☹

[1] `https://stattrek.com/online-calculator/poisson.aspx`

11. ☹

12. ☹

13. ☹

14. ☹

15. ☹

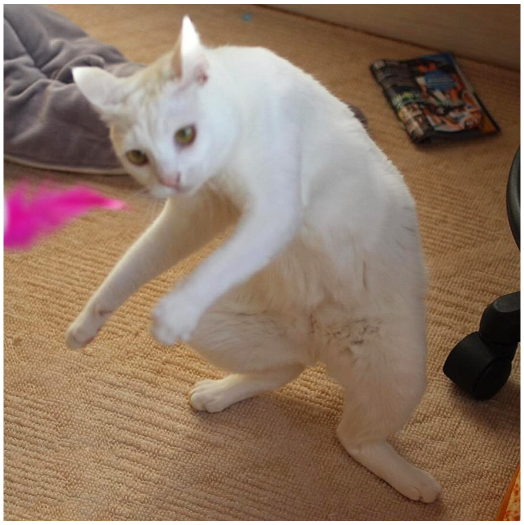

Figura 2: Yo había *ponido* las demás respuestas aquí ☹

16. Una escuela compra un lote de 100 focos de los cuales hay 6 defectuosos y los 94 restantes del lote funcionan correctamente, Si el personal de intendencia elige un foco al azar de este lote para reparar una lampara del plantel y para ello elige 10 focos de la caja y va probando uno a uno cuales de ellos sirven. Sea X la variable aleatoria que denota: El número de focos defectuosos encontrados en la muestra. Obten

    Solución: Recordando la distribución Hipergeométrica, $X \sim Hip(N, n, m)$, entonces,

    $$P(X = i) = \frac{\binom{m}{i} \cdot \binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

    - $P(X = 0)$
      Solución:
      $$P(X = 0) = \frac{\binom{6}{0}\binom{94}{100}}{\binom{100}{10}} \approx 0.522$$

    - $P(X > 2)$
      Solución:
      $$\begin{aligned} P(X = 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - [0.522 - \frac{\binom{6}{1}\binom{94}{9}}{\binom{100}{10}} - \frac{\binom{6}{2}\binom{94}{8}}{\binom{100}{10}}] \\ &= 0.0125 \end{aligned}$$