Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Probabilidad I

Tarea 2
Propiedades Básicas de la Probabilidad

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

Mario Navarrete Baltazar
No. cuenta: 315218413
qwertyuiop@ciencias.unam.mx

13 de Septiembre 2019

1. Imaginemos el siguiente experimento aleatorio. "Se Lanza un dado continuamente hasta que caiga un 6 y en ese momento dejamos de lanzar el dado".

   - Describe el Espacio Muestral asociado a este Experimento Aleatorio

     Solución: El espacio muestral es: $S = (x_1, ..., x_i)$ con $i \geq 1$, $x_i \neq 6$, con i que significa que hasta ese momento salió un 6.

   - Sea E_n el evento que denota: El número de lanzamientos necesarios hasta completar el experimento. ¿Cuáles puntos del espacio muestral están contenidos en E_n?

     Solución: Las veces que han tirado un dado y no ha salido un 6.

   - ¿Qué representa $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ en términos del experimento aleatorio?

     Solución: Representa el evento en el cual el 6 nunca aparece.

2. Tres individuos A, B , C se turnan para lanzar una moneda. Al primero que le salga "Águila" gana. El espacio muestral asociado a este experimento puede ser definido como:

$$S = \begin{cases} 1, 01, 001, 0001, \ldots, \\ 0000\ldots \end{cases}$$

   - Interpreta el Espacio Muestral

     Solución: En este experimento los individuos A, B , C se turnan para tirar una modena y gana el primero que obtenga una "águila". En este espacio el `0` está denotado que salió "sol" y el `1` se denota que salió águila. Viendo los casos de S; en el primero podemos ver los 0's (si hay) precedidos del 1 como cuantas veces (denotado por el número de 0's) se tiraron soles hasta que se obtuvo una águila. En el segundo caso dondee es una cadena de 0's significa que nunca se obtuvo águila.

   - Define los siguientes eventos en terminos de S.

     Asume que A lanza primero la moneda, denoganar lanza B, de no ganarlanza C y en caso de no ganar nadie se repite el proceso.

     Solución: (Asumiendo que A tiró, luego B y al final C y así consecutivamente.)

     a) A gana $= A$
        A gana si y solo si hay $3n$ 0's precedidos de él (un `1`), ósea $\underbrace{0\cdots0}_{3n}1$ con $n \in \mathbb{N}$.

     b) B gana $= B$
        B gana si y solo si hay $3n+1$ 0's precedidos de él (un `1`), ósea $\underbrace{0\cdots0}_{3n+1}1$ con $n \in \mathbb{N}$.

     c) $(A \cup B)^c$
        Este evento significa que C ganó o nadie ganó. Para definir el evento en el que C ganó sería análogo a los incisos anteriores, ósea $\underbrace{0\cdots0}_{3n+2}1$, y para definir que nadie ganó sería $000\cdots$.

3. Si al jugar **Poker** asumimos que las $\binom{52}{2}$ manos son igualmente probables. ¿Cuál es la probabilidad de que nos hayan repartido:

   - una Flor? **Decimos que una mano de poker es una flor si las 5 cartas de la mano son del mismo palo**

     Solución: $\frac{4\cdot\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

   - un Par?

     Solución: $\frac{13\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

   - dos Pares?

     Solución: $\frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}$

- una Tercia?
  Solución: $\frac{13\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$
- un Poker? **Tenemos un Poker cuando la mano que nos tocaron contiene 4 cartas con la misma denominación y de diferente palo**
  Solución: $\frac{13\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$

4. Los coeficientes de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c$ están determinados al lanzar un par de dados, el resultado del primer dado determina el valor de b y el del segundo dado el valor de c. Obtén la probabilidad de que la ecuación tenga soluciones reales.

   Solución: Como cada dado en cada una de sus caras tiene valores del 1 al 6, y el valor de b está determinado por el valor del dado y lo mismo para c, entonces se tiene que $|\Omega| = 36$. Por otro lado, la ecuación tiene raíces reales si y solo si $b^2 - 4c \geq 0$, entonces los valores (b, c) que satisfacen esa condición son

   $$(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1)(5,2),(5,3),(5,4),\\ (5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$$

   siendo 19 parejas. Ergo la probabilidad es $\frac{19}{36}$.

5. Dos números m y n son llamados "primos relativos" si el 1 es el único divisor común positivo entre ambos. Así por ejemplo el 8 y el 5 son primos relativos, mientras el 8 y 6 no lo son. Si un nuúmero es seleccionado al azar del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 63\}$. Obtén la probabilidad de que este número sea primo relativo con el 63.

   Solución: Los unicos divisores primos de 63 son 3 y 7. Entonces, el numero seleccionado es primero relativo a 63 si y solo si no es divisible por 3 o 7.

   Sean los eventos.

   A := El resultado es divisible entre 3

   B := El resultado es divisible entre 7

   AB := El resultado es divisible entre 3 y 7

   Entonces, A=$\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63\} = 21$ numeros

   B=$\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63\} = 9$ numeros

   y AB =$\{21, 42, 63\} = 3$ numeros

   Por lo tanto, $P(A) = 21/63$, $P(B) = 9/63$ y $P(AB) = \frac{3}{63}$.

   Para encontrar la probabilidad de que un numero es primo relativo a 63, tenemos que encontrar la probabilidad que un numero no es disible por 3 esto es $P(AB)^c$

   En general, $P(A^cB^c) = P(AUB)$

   Como

   $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(AB)$

   Entonces

   $P(A^cB^c) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

   Sustituyendo

   $P(A) = \frac{21}{63}$, $P(B) = \frac{9}{63}$ y $P(AB) = \frac{2}{63}$ en $P(A^cB^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

   Obtenemos

   $P(A^cB^c) = \frac{1-21}{63-9}\frac{63+3}{63} = \frac{63-21-9+3}{63} = \frac{36}{63} = \frac{4}{7}$

   Por lo tanto:

   La probababilidad de que el numero sea primo relativo a 63 es 11/7.

6. Una clase de Biología tiene 33 alumnos inscritos. Si 17 de ellos sacaron 10's en el primer examen parcial y 14 de ellos sacaron 10's en el segundo examen parcial mientras 11 alumnos no obtuvieron un 10's en ninguno de estos dos exámenes. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta clase haya sacado 10's en ambos exámenes?

   Solución: Sean los eventos:

$$
\begin{aligned}
A &:= \{17 \text{ alumnos sacaron 10 en el primer parcial}\} \\
B &:= \{14 \text{ alumnos sacaron 10 en el segundo parcial}\} \\
C &:= \{11 \text{ alumnos no obtuvieron 10 en el primer ni segundo parcial}\}
\end{aligned}
$$

   Usando el principio de inclusión-exclusión para dos eventos que es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

   El evento C lo podemos ver como $(A \cup B)^c$ y posteriormente se ocupará las Leyes de Morgan. Lo que queda por hacer ahora es obtener la probabilidad de cada uno y sustituir.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{17}{36} \approx 0.4722 \\
P(B) &= \frac{14}{36} \approx 0.3888 \\
P(C) &= P((A \cap B)^c) = P(A^c \cup B^c) = \frac{11}{36} \approx 0.3055
\end{aligned}
$$

   Susituyendo queda como:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= P(A) + P(B) - (1 - P((A \cap B)^c)) \\
&= P(A) + P(B) - (1 - P(A^c \cup B^c)) \\
&= 0.4722 + 0.3888 - (1 - 0.3055) \\
&\approx 0.1664
\end{aligned}
$$

   Ergo la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta clase haya sacado 10's en ambos exámenes es ≈ 0.1664.

7. Una terapeuta acomodará al azar a 5 matrimonios sobre una fila para realizar una actividad. Obtén la probabilidad de que no haya algun esposo sentado junto a su mujer sobre la fila.

   Solución: Hay $\binom{10}{5}$ resultados. Podemos pensar en un experimento de 6 fases, en la prier fase, 5 personas de las 5 parejas son seleccionadas, en los 5 que faltan, 1 de los 2 miembros son seleccionados.

   Por lo tanto

   Hay $\binom{5}{5}2^5$ posibles resultados en el cual los 5 miembros seleccionados no estan relacionados.Obteniendo la probabilidad de: $P(N) = \frac{\binom{5}{5}2^5}{\binom{10}{5}}$

8. Cinco personas A, B, C, D, E serán acomodados en una fila de sillas para hacer una actividad conjunta. Asume que cualquier acomodo de los personas es igualmente probable. ¿Cuál es la probabilidad de que:

   (Solución con orden)

   - haya exactamente una persona entre A y B?

     Solución: Si fijamos a A, hay 3 posiciones puede ser acomodada y el lugar de B es el $i+2$. Y las otras personas C, D, E pueden ser acomodadas en 3! maneras distintas. Análogamente cuando primero sea B y luego A (razón por la cual se multiplica por 2). Como hay 5! posibles acomodos. Ergo la probabilidad de que haya exactamente una persona entre A y B es $\frac{2 \cdot 3 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$.

- hayan exactamente dos personas entre A y B?

  <u>Solución</u>: Análogo al inciso anterior, hay 2 posiciónes para seleccionar a A (sin perdida de generalidad) y C, D, E pueden ser acomodadas en 3! maneras distintas. Por tanto hay $2 \cdot 2 \cdot 3!$ acomodos posibles de la maneras que se nos pide. Como hay 5! posibles acomodos, ergo la probabilidad de que hayan exactamente dos personas entre A y B es $\frac{2 \cdot 2 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{5}$.
- hayan exactamente tres personas entre A y B?

  <u>Solución</u>: Con la misma idea de los incisos anteriores, entonces se tiene que es $\frac{2 \cdot 1 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$.

9. Una mujer tiene n llaves de Las cuales solo una abre la puerta de su casa.

   - Si ella elige las llaves al azar y va descartando una a una las que no funcionan. ¿Cuál será la probabilidad de que ella abra la puerta en el k-enésimo intento?

     <u>Solución</u>: La probabilidad es $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.
   - Obten la probabilidad anterior si ella no descarta ninguna llave al intentar abrir la puerta

     <u>Solución</u>: $\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k} = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^{k-1}$.

10. Michelle juega al Blackjack en un casino. El "dealer" le reparte 2 cartas de la baraja. ¿Cuál es la probabilidad de que ella gane en el primer intento?. Esto es que ella haya recibido un A's y algún 10's, J, Q, K de cualquier palo?

    <u>Solución</u>: El número de escoger un A's es $\binom{4}{1}$, y el número de escoger un 10's, J, Q, K de cualquier palo $\binom{16}{1}$ (esto es porque hay 4 de cada uno, que son espadas, corazones, rombos y tréboles). Por otro lado hay $\binom{52}{2}$ formas de tomar dos cartas de la baraja. Ergo la probabilidad es:

    $$\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{16}{1}}{\binom{52}{2}} \approx 0.04826$$

11. Para cualquier sucesión de eventos $E_1, E_2, \ldots$ prueba que es posible definir una nueva sucesión de eventos $F_1, F_2, \ldots$ "disjunto" (Esto es que $F_i F_j = \emptyset$ si $i \neq$ j) tal que:

    $$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

    <u>Solución</u>:

    Demostración. Se construirá F progresivamente, la idea intuitiva será construir a F_i como una unión disjunta, *exempli gratia*, con $n = 1$ $F_1 = E_1$, con $n = 2$ el evento $E_1 \cup E_2$ puede ser particionado en eventos E_1 y $E_1^1 \cap E_2$, y $F_2 = E_2 \cap E_1^c = E_2 \setminus E_1$. Así viendo ese patrón, generalizándolo queda como:

    $$\begin{aligned}
    F_1 &= E_1 \\
    F_2 &= E_2 \setminus E_1 \\
    F_3 &= E_3 \setminus (E_1 \cup E_2) \\
    &\vdots \\
    F_n &= E_n \setminus (\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j)
    \end{aligned}$$

    □

12. Sean P_1 y P_2 dos funciones de probabilidad definidas en Ω. Si Definimos una nueva función P dada por:

    $$P(A) = \frac{P_1(A) + P_2(A)}{2} \quad \text{si} \quad A \in \Omega$$

    Demuestra que P es una función de probabilidad sobre Ω.

Demostración. NO SUPE COMO HACERLA. □

13. Sea P una función de probabilidad en $\Omega = \{A, B\}$, tal que: $P(A) = p$ y $P(B) = 1 - p$ donde $0 \leq p \leq 1$. Definimos $\mathbb{Q}$ otra función en Ω:

$$\mathbb{Q}(\omega) = [P(\omega)]^2 \quad \text{si} \quad \omega \in \Omega$$

¿Para qué valores de p la función $\mathbb{Q}$ es una probabilidad?

Solución: Recordando el primer axioma de la probabilidad, donde S es el espacio muestral y sea E un evento, la probabilidad del evento está acotada por $0 \geq P(E) \geq 1$. Sabiendo eso, lo aplicaremos a la función $\mathbb{Q}$.

Afirmación: Los únicos valores que puede tomar p son 0 ó 1.

Demostración. Por casos sobre ω:

- $\mathbb{Q}(A) = [P(A)]^2 = p^2$
  Si evaluamos p, para que satifaga el primer axioma de la probabilidad solamente podrían ser los valores 0, $\frac{a}{b}$ donde $a \leq b$ o un número q tal que al elevarlo al cuadrado sea menor o igual que 1.
- $\mathbb{Q}(B) = [P(B)]^2 = (1 - p)^2$
  Desarrollando el binomio queda como $p^2 - 2p + 1$, para que $0 \leq [P(B)]^2 \leq 1$, los únicos valores que pueden tomar son 0 ó 1.

Por tanto, los únicos valores que puede tomar p son 0 ó 1. □

14. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_k$ funciones de probabilidad en Ω. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ una sucesión de números. ¿Qué condiciones deben de satisfacer las $a_i's$ para que: $\sum_{i=1}^{k} a_i P_i$ sea una función de probabilidad?

Solución: (NO SÉ SI ESTÉ BIEN)

Que cumpla los tres axiomas de la probabilidad, que cada $a_i P_i$ se pueda ver como $n_i = a_i P_i$ tal que $0 \leq n_i \leq 1$ y que la suma de las $n_i's$ sea 1.

15. Sean $A, B, C \in S$ eventos. Prueba que: la probabilidad de que exactamente dos de estos eventos ocurra es:

$$P(AB) + P(AC) + P(BC) - 3P(ABC)$$

Solución:

Demostración. Observando los tres eventos, se pueden ver como:

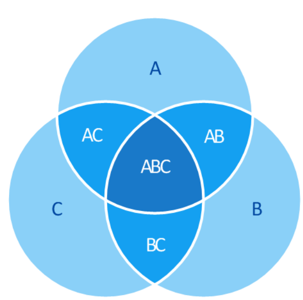

Figura 1: Diagrama de Venn

Sin pérdida de generalidad, definiendo los eventos $E_1 = A \cup B \cup C^c = ABC$, $E_2 = A \cup B^c \cup C = AB^cC$ y $E_3 = A^c \cup B \cup C = A^cBC$, cada uno de ellos solo ocurren dos de A, B, C. Cada evento definida previamente no tiene intersecciones, *id est*, son disjuntos, entonces podemos verlos como:

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(AB) - P(ABC) \\ P(E_2) &= P(AC) - P(ABC) \\ P(E_3) &= P(BC) - P(ABC) \end{aligned}$$

Sea el evento $E := \{\text{Solamente ocurran dos de } A, B, C\}$, ergo su probabilidad es:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(AB) - P(ABC) + P(AC) - P(ABC) + P(BC) - P(ABC) \\ &= P(AB) + P(AC) + P(BC) - 3P(ABC) \end{aligned}$$

□

16. Prueba que $P(A_i) = 1$ para toda $i \geq 1$ entonces $P(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i) = 1$.

    Hint: Usa la Desigualdad de Boole

    Solución:

    Demostración. Recordando la desigualdad de Boole que es:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i) &= 1 - (P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c) && \text{(Def. complemento)} \\ &= 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c) && \text{(De Morgan)} \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^c) && \text{(Desigualdad de Boole)} \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} (1 - P(A_i)) && \text{(Def. complemento)} \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} (1 - 1) && \text{(Por hipótesis)} \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} 0 && \text{(Aritmética)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

17. Sean $A, B \in S$ dos eventos. Decimos que: $A \sim B$ si $P(A \triangle B) = 0$. Prueba que $(\sim)$ es de equivalencia.

    Solución:

    Demostración. Recordando las propiedades que debe de cumplir para que sea una relación de equivalencia.

    - Reflexiva

      Por demostrar que $P(A \triangle A) = 0$. Por definición de diferencia simétrica tenemos que $P(A \triangle B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A)$ pero tenemos que $P(A \setminus A) + P(A \setminus A) = 0$, entonces cumple con ser reflexiva. Así $P(AB^c) = P(BA^c)$, por otro lado se tiene

- Simétrica
  Por conmutatividad de definición de diferencia simetrica que es:

$$\begin{aligned} P(A \triangle B) &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) \\ &= P(B \setminus A) + P(A \setminus B) \\ &= P(B \triangle A) \end{aligned}$$

- Transitiva
  TODO

□

18. Prueba el principio de inclusión-exclusión.

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \qquad (\heartsuit)$$

Hint: Ver libro [DeGroot]-pp 48

Solución: (Por inducción)

Demostración. Caso base:

- Para $n = 1$. Trivial.
- Para $n = 2$.
  Para esta prueba se utilizara el teorema que dice lo siguiente: Para cualesquiera dos eventos A y B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \qquad (*)$$

Demostración. **Partición de un conjunto:** Para cualesquiera dos conjuntos A y B, $A \cap B$ y $A \cap B^c$ son conjuntos disjuntos y $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$. En adición, B y $A \cap B^c$ son disjuntos y $A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$. Sabiendo eso, se tiene:

$$A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$$

Como los dos eventos de la derecha son dusjuntos, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(B) - P(A \cap B^c) & (1) \\ &= P(B) - P(A) - P(A \cap B) & (2) \end{aligned}$$

Pero en (1) se sustiyuye $P(A \cap B^c)$ por $P(A) - P(A \cap B)$ en (2)porque hay un teorema que dice que sean dos eventos A y B se cumple que:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

□

Teniendo la igualdad del teorema previo demostrado, se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Hipótesis de inducción: Existe m tal que es verdadero para toda $n \le m$.

Paso inductivo: Para $n = m + 1$.

Sean $A_1, \ldots, A_{m+1}$ eventos. Definimos $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ y $B = A_{m+1}$ y usando el teorema previo $(*)$, podemos decir que:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \qquad (3)$$

Se ha asumido que $P(A)$ es igual a ($\heartsuit$) con $n = m$. Se necesita mostrar que cuando sumamos $P(A)$ a $P(B) - P(A \cap B)$ se obtiene ($\heartsuit$) con $n = m + 1$. La diferencia entre ($\heartsuit$) con $n = m + 1$ y $P(A)$ son todos los términos en que cada uno de los índices $(i, j, k, \ldots)$ son iguales a $m + 1$. Esos términos son los siguientes

$$P(A_{m+1}) - \sum_{i=1}^{m} P(A_i \cap A_{m+1}) + \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j \cap A_{m+1}) + \ldots + (-1)^{m+2} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{m+1}) \quad (4)$$

El primer término en (4) es $P(B) = P(A_{m+1})$. Todo lo que queda es mostrar que $-P(A \cup B)$ es igual a todos, pero el primer término en (4).

Usando la generalización de la propiedad distributiva, para escribir que:

$$A \cap B = (\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \cap A_{m+1} = \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \cap A_{m+1}) \quad (5)$$

La unión en (5) contiene m eventos, y por tanto podemos aplicar ($\heartsuit$) con $n = m$ y cada A_i reemplazada por $A_i \cap A_{m+1}$. El resultado es que $-P(A \cap B)$ es igual a todos, excepto el primer término en (4). $\square$

19. Leer y desarrollar el problema "(6a)- **Probabilidad y una Paradoja" [Ross-8th. Ed]- pp 46-48**

Solución: Suponemos que tenemos una urna infinitamente grande y una colección infinita de pelotas etiquetadas. Se considera el experimento como sigue: a un minuto de las 12 p.m. las pelotas numeradas del 1 al 10 son puestas en la urna y la pelota número 10 es recogida. (Suponer que la acción de recoger una pelota no toma tiempo). A $\frac{1}{2}$ minuto para laras las 12 p.m. las pelotas de la 11 a las 20 son puestas en la urna y la pelota número 20 es recogida de la urna. A $\frac{1}{4}$ minuto para laras las 12 p.m. las pelotas de la 21 a la 30 son puestas en la urna y la pelota número 30 es recogida de la urna. Y así sucesivamente. La pregunta aquí es ¿cuántas pelotas hay en la urna a las 12 p.m.?

La resupuesta es que hay un número infinito de pelotas en la urna a las 12 p.m., esto es porque toda aquella pelota que no es de la forma $10n$, con $n \geq 1$ será puesta en la urna. Por tanto el problema está resuelto a como está descrito.

Sin embargo, ahora se cambiará el experimento y se supondrá que a 1 minuto de las 12 p.m. las pelotas numeradas del 1 al 10 serán puestas en la urna y se removerá la pelota número 1. A $\frac{1}{2}$ de las 12 p.m. las pelotas números del 11 al 20 serán puestas en la urna y será removida la pelota número 2 y así sucesivamente. Para este nuevo experimento, se pregunta ¿Cuántas pelotas hay en la urna a las 12 p.m.?

Sorprendentemente a las 12 p.m. la urna está vacía. Considerando cualquier pelota, digamos, la pelota n. En un punto antes de las 12 p.m. (en particular a $(\frac{1}{2})^{n-1}$ antes de las 12 p.m.) pudo haber sido removida de la urna. Por tanto, para cada n, la pelota n no está en la urna a las 12 p.m., por lo tanto, la urna tuvo que haber estado vacía a este tiempo.

Entonces **vemos que la manera en que las pelotas son removidas hace la diferencia**. Supongamos que cualquier pelota puede ser removida, que la pelota sea aleatoriamente seleccionada y sacada de la urna, y así sucesivamente. En este caso la preguntas es ¿Cuántas preguntas hay en la urna a las 12 p.m.?

Lo que queremos mostrar es que con probabilidad 1, la urna está vacía a las 12 p.m. Consideremos primero la pelota número 1. Definamos E_n al evento que la pelota número 1 siga estando en la urna después de n que se hayan hecho n extracciones de la urna. Claramente

$$P(E_n) = \frac{9 \cdot 18 \cdot 27 \cdots (9n)}{10 \cdot 19 \cdot 19 \cdots (9n + 1)}$$

Ahora, el evento que la pelota número 1 esté en la urna a las 12 p.m. es el evento $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$. Porque los eventos E_n, $n \geq 1$, son eventos decrecientes, que es $P(E) = P\{$La pelota número 1 está en la urna a las 12 p.m.$\}$.

$$P(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n \to \infty} P(E_n) = \prod_{n=1}^{\infty} (\frac{9n}{9n + 1})$$

Y lo que queremos mostrar es que $\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{9n}{9n+1}) = 0$.

Dado que:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{9n}{9n+1}) = [\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{9n+1}{9n})]^{-1}$$

Es equivalente a mostrar que:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{9n}) = \infty$$

Ahora, para toda $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{9n}) &= \prod_{n=1}^{m}(1+\frac{1}{9n}) \\
&= (1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{18})(1+\frac{1}{27})\cdots(1+\frac{1}{9m}) \\
&> \frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{9m} \\
&= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}
\end{aligned}$$

Por tanto, haciendo $m \to \infty$ y usando el hecho de que $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i} = \infty$ genera:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{9n}) = \infty$$

Por lo tanto, haciendo que F_i denote el evento que la pelota número i esté en la urna a las 12 p.m., hemos mostrado que $P(F_1) = 0$. Similarmente, podemos mostrar que $P(F_i) = 1$ para toda i.

Por lo tanto, la probabiliad de que la urna no esté vacía a las 12 p.m., $P(\bigcup_1^{\infty} F_i)$, satisface que:

$$P(\bigcup_1^{\infty} F_i) \leq \sum_1^{\infty} P(F_i) = 0$$

Por lo tanto, con probabilidad 1, la urna va a estras vacía a las 12 p.m.

20. Dado un conjunto S. Si para alguna $k \geq 1$. Se tiene que $S_1, S_2, \ldots, S_k$ son subconjuntos mutuamente excluyetes de S talque $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = S$ entonces decimos que la clase $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ es una **Partición** de S. Sea T_n el número de diferentes particiones de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Así por ejemplo tenemos que $T_1 = 1$ (La única partición posible es $S_1 = \{1\}$ y $T_2 = 2$ (Las dos particiones posibles de un conjunto de dos elementos son $\{\{1,2\}, \{\{1\},\{2\}\}\}$).

    - Exhibe las particiones y muestra que $T_3 = 5$, $T_4 = 15$.

      <u>Solución</u>:

      - $T_3 = 5$

        Primero podemos tener a los subconjuntos $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$.

        Después, podemos tener un subconjunto con un subconjunto de un elemento y otro subconjunto con otro de 2 elementos. Quedando tres formas de hacerlos como:

        $$\{1\}, \{2,3\}$$
        $$\{2\}, \{1,3\}$$
        $$\{3\}, \{1,2\}$$

        Al final, tenemos un conjunto con tres elemntos en un subconjunto el cual es $\{1,2,3\}$.

        Por tanto, hay 5 formas de particionar al conjunto.

- $T_4 = 15$

$$\{\{1,2,3,4\}\}$$
$$\{\{1,2,3\},\{4\}\}$$
$$\{\{1,2,4\},\{3\}\}$$
$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$$
$$\{\{1,3,4\},\{2\}\}$$
$$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$$
$$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$$
$$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$$
$$\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$$
$$\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$$
$$\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$$
$$\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$$
$$\{\{1\},\{2,4\},\{3\}\}$$
$$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$$
$$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$$

- Demuestra que

$$T_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T_k$$

Usar este resultado para culcular T_{10}
A esta serie de números $T_i' s$ se les conoces como **Números de Bell**.

Demostración.

$$T_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} T_{n-i} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} T_{n-i} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T_{n-k}$$

□

Para calcular el T_{10} se procedió a hacer un programa en *Python* haciendo uso de programación dinámica, con la siguiente función.

```
def bell_bumber(n):

    bell = [[0 for i in range(n+1)] for j in range(n+1)]
    bell[0][0] = 1
    for i in range(1, n+1):

        bell[i][0] = bell[i-1][i-1]

        for j in range(1, i+1):
            bell[i][j] = bell[i-1][j-1] + bell[i][j-1]

    return bell[n][0]

print(bell_bumber(10))

```

Dando como resultado $T_{10} = 115975$.

- Exhibe las primeras 5 filas del **Triángulo de Bell**.

<u>Solución:</u>

```
1
1␣2
2␣3␣5
5␣7␣10␣15
15␣20␣27␣37␣52
```

- Realiza una breve semblanza de dos de los mas grandes matemáticos del Siglo XX. **Srinivasa Ramanujuan** y **Eric Bell**.

  <u>**Solución:**</u>

  Srinivasa Ramunajam, matemático indio (1987 – 1920). Fue un matemático de excepción. Durante su breve vida llegó a publicar más de 3000 resultados entre demostraciones e identidades. Decía que su inspiración era la visita de la diosa Namagiri durante sueños. La mayor incógnita acerca de este hombre era el mismo. Su falta de educación formal y sus múltiples carencias económicas y todo tipo no fueron impedimento para que este hombre nacido en la india llegara a transformarse sólo de manera autodidacta en el más grande matemático de su país. Ramanujan era un apasionado de las secuencias y las series infinitas, las que aparecen desparramadas en todas sus notas. Junto con Hardy, emprendió el estudio de una secuencia de extrema importancia:

  1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627, 792, 1002, 1255, 1575, 1958, 2436, 3010, 3718, ...

  En ella, el término que aparece en la posición corresponde al número de maneras de escribir como suma de enteros positivos. En otras palabras, es la cantidad de maneras distintas de "partir" el número en piezas aditivas, sin distinguir particiones en las que aparecen los mismos sumandos pero dispuestos en distinto orden.

  Ramanujan fue galardonado con una licenciatura en Ciencias (este grado fue más tarde renombrado PhD) en marzo de 1916 por su trabajo de investigación en números altamente compuestos, la primera parte de la cual fue publicada como un documento en las Actas de la London Mathematical Society.

  El artículo tenía más de 50 páginas con la demostración de diferentes propiedades de tales números. Hardy comentó que este fue uno de los artículos más inusuales surgidos en la investigación matemática de esa época y que Ramanujan mostró un extraordinario ingenio en su manejo.

  Eric Temple Bell nació un 7 de febrero de 1883 en Escocia. Tras una fructífera y extensa carrera profesional muere a la de edad de 77 años el día 21 de diciembre de 1960 en Watsonville pueblo americano del estado de California al que se mudó años atrás. Se le conoce sobretodo por ser un brillante matemático y autor de novelas de ciencia ficción. Como ya se ha comentado nació en Escocia pero vivió la mayor parte de su vida en los EE.UU.

  Sus principales logros se basan en las investigaciones sobre la teoría de los números. Intentó también pero sin éxito explicar el llamado cálculo tradicional umbral también conocido como el "método simbólico" de Blissard. Se le considera que fue él quien postuló, y por eso recibe su nombre, el método de la Campana de los polinomios y números de Bell. En 1924 se le concedió el prestigioso Premio Bôcher Memorial por su exitosa labor en el análisis matemático.

  Su mayor éxito fue un libro titulado "Los hombres de las matemáticas" que inspiró a muchas personas a interesarse por las matemáticas, aunque a posteriori algunos historiadores han cuestionado la precisión a la hora de escribir de Bell. Otro de sus últimos libros fue "El desarrollo de las matemáticas" que aunque ha sido menos famoso se considera que tiene muchos menos puntos débiles en su precisión.