U.N.A.M. FACULTAD DE CIENCIAS Semestre 2020-1
9018. PROBABILIDAD I

Tarea 2: Propiedades Básicas de la Probabilidad

1. Imaginemos el siguiente experimento aleatorio. "Se Lanza un dado continuamente hasta que caiga un 6 y en ese momento dejamos de lanzar el dado".
   - Describe el Espacio Muestral asociado a este Experimento Aleatorio
   - Sea E_n el evento que denota: El número de lanzamientos necesarios hasta completar el experimento. ¿Cuales puntos del espacio muestral están contenidos en E_n ?
   - ¿ Que representa $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ en términos del experimento aleatorio?

2. Tres individuos A, B , C se turnan para lanzar una moneda. Al primero que le salga "Águila" gana. El espacio muestral asociado a este experimento puede ser definido como

$$S = \begin{cases} 1, 01, 001, 0001, \ldots, \\ 0000\ldots \end{cases}$$

   - Interpreta el Espacio Muestral
   - Define los siguientes eventos en terminos de S
     a) A gana = A
     b) B gana = B
     c) $(A \cup B)^c$
     Asume que A lanza primero la moneda, de no ganar lanza B , de no ganar lanza C y en caso de no ganar nadie se repite el proceso

3. Si al jugar **Poker** asumimos que las $\binom{52}{5}$ manos son igualmente probables. ¿ Cual es la probabilidad de que nos hayan repartido :
   - Una Flor? **Decimos que una mano de poker es una flor si las 5 cartas de la mano son del mismo palo** $\spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit$
   - Un Par?
   - Dos Pares?
   - Una Tercia?
   - Un Poker? **Tenemos un Poker cuando la mano que nos tocaron contiene 4 cartas con la misma denominación y de diferente palo**

4. Los coeficientes de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c$ están determinados al lanzar un par de dados, el resultado del primer dado determina el valor de b y el del segundo dado el valor de c. Obtén la probabilidad de que la ecuación tenga soluciones reales

5. Dos números m y n son llamados "primos relativos" si el 1 es el único divisor común positivo entre ambos. Así por ejemplo el 8 y el 5 son primos relativos, mientras el 8 y 6 no lo son . Si un número es seleccionado al azar del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 63\}$. Obtén la probabilidad de que este número sea primo relativo con el 63

6. Una clase de Biología tiene 33 alumnos inscritos. Si 17 de ellos sacaron 10's en el primer examen parcial y 14 de ellos sacaron 10's en el segundo examen parcial mientras 11 alumnos no obtuvieron un 10's en ninguno de estos dos exámenes. ¿ Cual es la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta clase haya sacado 10's en ambos exámenes?

7. Una terapeuta acomodara al azar a 5 matrimonios sobre una fila para realizar una actividad. Obtén la probabilidad de que no haya algun esposo sentado junto a su mujer sobre la fila

8. Cinco Personas A,B,C,D,E serán acomodados en una fila de sillas para hacer una actividad conjunta. Asume que cualquier acomodo de los personas es igualmente probable. ¿ Cual es la probabilidad de que:
   - Haya exactamente una persona entre A y B ?
   - Hayan exactamente dos personas entre A y B ?
   - Hayan exactamente tres personas entre A y B ?
9. Una mujer tiene n llaves de las cuales solo uno abre la puerta de su casa.
   - Si ella elige las llaves al azar y va descartando una a una las que no funcionan. ¿ Cual sera la probabilidad de que ella abra la puesta en el k-esimo intento?
   - Obtén la probabilidad anterior si ella no descarta ninguna llave al intentar abrir la puerta?
10. Michelle juega al **Blackjack** en un casino. El dealer le reparte 2 cartas de la baraja. ¿ Cual es la probabilidad de que ella gane en el primer intento?. Esto es que ella haya recibido un As y algun 10's, J, Q, K de cualquier palo?
11. Para cualquier sucesión de eventos $E_1, E_2, \ldots$ prueba que es posible definir una nueva sucesión de eventos $F_1, F_2, \ldots$ "disjuntos" (Esto es que $F_iF_j = \emptyset$ si $i \neq j$) tal que:
$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}$$
12. Sean $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ dos funciones de probabilidad definidas en Ω. Si Definimos una nueva función $\mathbb{P}$ dada por:
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}_1(A) + \mathbb{P}_2(A)}{2} \quad \text{si} \quad A \in \Omega$$
   Demuestra que $\mathbb{P}$ es una función de probabilidad sobre Ω
13. Sea $\mathbb{P}$ una función de probabilidad en $\Omega = \{A, B\}$, tal que : $\mathbb{P}(A) = p$ y $\mathbb{P}(B) = 1 - p$ donde $0 \leq p \leq 1$. Definimos $\mathbb{Q}$ otra función en Ω:
$$\mathbb{Q}(\omega) = [\mathbb{P}(\omega)]^2 \quad \text{si} \quad \omega \in \Omega$$
   ¿ Para que valores de p la función $\mathbb{Q}$ es una probabilidad?
14. Sean $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}_k$ funciones de probabilidad en Ω. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ una sucesión de números . ¿ Que condiciones deben de satisfacer las a_i's para que: $\sum_{i=1}^{k} a_i\mathbb{P}_i$ sea una función de probabilidad?
15. Sean A,B,$C \in S$ eventos. Prueba que :
   La probabilidad de que exactamente dos de estos eventos ocurra es
$$\mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AC) + \mathbb{P}(BC) - 3\mathbb{P}(ABC)$$
16. Prueba que $\mathbb{P}(A_i) = 1$ para toda $i \geqslant 1$ entonces $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$
   Hint: Usa la Desigualdad de Boole
17. Sean E,$F \in S$ dos eventos. Decimos que : $E \sim F$ si $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$. Prueba que ($\sim$) es de equivalencia
18. Prueba el principio de inclusión-exclusión.
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$
   Hint: Ver libro **[DeGroot]-pp 48**
19. Leer y desarrollar el problema "(6a)- **Probabilidad y una Paradoja**" **[Ross-8th. Ed]- pp 46-48**

20. Dado un conjunto S. Si para alguna $k \geq 1$ Se tiene que $S_1, S_2, \ldots, S_k$ son subconjuntos mutuamente excluyentes de S tal que $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = S$ entonces decimos que la clase $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ es una **Partición** de S . Sea T_n el número de diferentes particiones de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Asi por ejemplo tenemos que $T_1 = 1$ (La única partición posible es $S_1 = \{1\}$ y $T_2 = 2$ (Las dos particiones posibles de un conjunto de dos elementos son $\{\{1,2\}, \{\{1\}, \{2\}\}\}$).

- Exhibe las particiones y muestra que $T_3 = 5, T_4 = 15$
- Demuestra que

  $$T_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T_k$$

  Usa este resultado para calcular T_{10}

  A esta serie de números T_i's se les conoce como **Números de Bell**
- Exhibe las primeras 5 filas del **Triángulo de Bell**
- Realiza una breve semblanza de dos de los mas grandes matemáticos del Siglo XX.
  Srinivasa Ramanujuan y **Eric Bell**