

Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Probabilidad I

**Tarea-Examen**  
**Probabilidad Condicional e Independencia de Eventos**

Ángel Iván Gladín García  
No. cuenta: 313112470  
`angelgladin@ciencias.unam.mx`

27 de Septiembre 2019

1. Prueba los siguientes resultados:

- Sean  $E, F \in S$  eventos mutuamente excluyentes entonces:

$$\mathbb{P}(E|E \cup F) = \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)}$$

**Solución:**

*Demostración.* Al ser  $E, F$  mutuamente excluyentes, *il est*, su  $\mathbb{P}(E \cap F) = 0$ .

Usando el hecho de que sean  $A, B \in S$  si  $\mathbb{P}(A) > 0$ , entonces

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} \quad (\heartsuit)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E|E \cup F) &= \frac{\mathbb{P}(E \cap (E \cup F))}{\mathbb{P}(E \cup F)} && \text{Por } (\heartsuit) \\ &= \frac{\mathbb{P}((E \cap E) \cup (E \cap F))}{\mathbb{P}(E \cup F)} && \text{Por distributividad de conjuntos} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E \cup (E \cap F))}{\mathbb{P}(E \cup F)} && \text{Por idempotencia de conjuntos} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E \cup \emptyset)}{\mathbb{P}(E \cup F)} && \text{Por hipótesis de ser eventos mutuamente excluyentes} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(E \cup F)} && \text{Por identidad en conjuntos} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)} && \text{Obteniendo la unión de las probabilidades} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)} && \text{Por hipótesis de ser eventos mutuamente excluyentes} \end{aligned}$$

□

- Sea  $\{E_i\}_{i=0}^{\infty} \subseteq S$  sucesión de eventos mutuamente excluyentes entonces:

$$\mathbb{P}(E_j | \cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \frac{\mathbb{P}(E_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)}$$

**Solución:**

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_j | \cup_{i=1}^{\infty} E_i) &= \frac{\mathbb{P}(E_j \cap (\cup_{i=1}^{\infty} E_i))}{\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)} && \text{Por } (\heartsuit) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} (E_j \cap E_i))}{\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)} && \text{Por distributividad de conjuntos} \\ &= \frac{\mathbb{P}((\cup_{i=1}^{j-1} (E_j \cap E_i)) \cup (E_j \cap E_j) \cup (\cup_{i=j+1}^{\infty} (E_j \cap E_i)))}{\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)} && \text{Separando la unión} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cup E_j \cup \emptyset)}{\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)} && \text{Por hipótesis} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E_j)}{\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)} && \text{Por identidad en conjuntos} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)} && \text{Por hipótesis} \end{aligned}$$

□

2. Sean  $E_1, E_2, \dots, E_n \in S$  eventos independientes. Prueba que:

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - \mathbb{P}(E_i)]$$

**Solución:**

*Demostración.*

$$\begin{aligned} 1 - \prod_{i=1}^n [1 - \mathbb{P}(E_i)] &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i^c) && \text{Def. complemento} \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i^c\right) && \text{Por hipótesis de ser eventos independientes} \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)^c\right) && \text{Aplicando leyes de De Morgan} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) && \text{Def. complemento} \\ &= \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) && \text{Notación} \end{aligned}$$

□

3. Una serie Experimentos Aleatorios Independientes cuyos posibles resultados pueden ser clasificados como *Éxitos* ó *Fracasos*. Donde ocurre un éxito con probabilidad  $p$  y un fracaso con probabilidad  $1 - p$  en cada ensayo son llamados *Ensayos de Bernoulli*  $p \in [0, 1]$ . Si  $P_n$  denota la probabilidad de que si se realizan  $n$  ensayos de bernoulli ocurran un número par de éxitos (0 será considerado como un número par). Prueba que:

$$P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1} \quad \text{si } n \geq 1 \quad (1)$$

Usa esta fórmula para demostrar (por inducción) que:

$$P_n = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2} \quad (2)$$

**Solución:**

*Demostración.* Para demostrar  $P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1}$ , lo que haremos será tener dos eventos,  $A, B \in S$ , donde  $A$  es que hubo éxito en el primer ensayo y  $B$  que en lo demás  $n - 1$  ensayos se produjo un número par de éxitos.

Si denotamos al evento  $A \cap B^c$  como el evento de que en el primer ensayo hubo éxito y número non de éxitos en el evento  $B^c$ . Y el evento en  $A^c \cap B$ , donde  $A^c$  no hubo éxitos y en  $B^c$  hubo una cantidad par de éxitos.

Como  $A$  y  $B$  son ensayos independentientes, entonces se puede ver al  $n$ -ésimo ensayo como:

$$\begin{aligned} P_n &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) && \text{Expresando probas de los eventos} \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) && \text{Por ser eventos indep. y aplicando la regla de la multiplicación} \\ &= p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1} && \text{Obteniendo la proba de cada evento} \end{aligned}$$

□

Demostración. Por inducción:

Primero se procederá a simplificar (1):

$$P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1} = p - pP_{n-1} + P_{n-1} - pP_{n-1} = p + (1 - 2p)P_{n-1} \quad (3)$$

Teniendo (3), ahora se procederá a hacer inducción sobre  $P_n$ . **Daremos por hecho que  $P_0 = 1$  para demostrarlo.**

Caso base:  $n = 1$ .

$$\begin{aligned} P_1 &= p + (1 - 2p)P_0 \\ &= p + 1 - 2p \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción: Es válida para  $n$ .

Paso inductivo:  $n = n + 1$ .

$P_{n+1} = p + (1 - 2p)P_n$	Usando (3)
$= p + (1 - 2p)\left(\frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}\right)$	Sustituyendo $P_n$ por (2)
$= p + \left(\frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}\right) - \left(\frac{2p + 2p(1 - 2p)^n}{2}\right)$	Aritmética
$= p + \left(\frac{1 + (1 - 2p)^n - 2p - 2p(1 - 2p)^n}{2}\right)$	Aritmética
$= \frac{2p + 1 + (1 - 2p)^n - 2p - 2p(1 - 2p)^n}{2}$	Aritmética
$= \frac{2p + 1 + (1 - 2p)^n - 2p - 2p(1 - 2p)^n}{2}$	Aritmética
$= \frac{1 + (1 - 2p)^n(1 - 2p)}{2}$	Aritmética
$= \frac{1 + (1 - 2p)^{n+1}}{2}$	Leyes exponentes

□

4. Imagina que tenemos una sucesión  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq a_i \leq 1$  para toda  $i \geq 1$ .

Demuestra lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \left( \prod_{j=1}^{i-1} (1 - a_j) \right) + \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i) = 1$$

*Hint:* Supón que se realizan una infinidad de “Volados”. Sea  $a_i$  la probabilidad de que en el  $i$ -ésimo lanzamiento cae por primera vez Águila.

**Solución:**

*Demostración.* Sea  $a_i$  la la probabilidad de que cayó Águila en el  $i$ -ésimo lanzamiento y su complemento como:

- $\mathbb{P}(\text{Cayó águila en el } i\text{-ésimo lanzamiento}) = a_i$
- $\mathbb{P}(\text{No águila en el } i\text{-ésimo lanzamiento}) = (1 - a_i)$

Al ser eventos independientes, podemos expresar a  $a_i$  como el producto de ésa probabilidad por las anteriores que no cayó águila:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Cayó águila en 1er volado:} & a_1 \\
 \text{Cayó águila en 2do volado:} & (1 - a_1)a_2 \\
 \text{Cayó águila en 3er volado:} & (1 - a_1)(1 - a_2)a_3 \\
 \vdots & \\
 \text{Cayó águila en i-ésimo volado:} & (1 - a_1) \cdots (1 - a_{i-1})a_i
 \end{array}$$

Teniendo así de forma general:

$$\prod_{j=1}^{i-1} (1 - a_j) \cdot a_i \quad (1)$$

Y para obtener la probabilidad haya salido águila, siendo  $A \in S$  ése evento, se expresa como:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left( \prod_{j=1}^{i-1} (1 - a_j) \right)$$

Obteniendo la probabilidad de que nunca haya salido un águila lo podemos denotar como  $A^c$ :

$$\mathbb{P}(A^c) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i) \quad (2)$$

Y ahora podemos obtener la probabilidad total con (1) y (2) como:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) &= 1 \\
 \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left( \prod_{j=1}^{i-1} (1 - a_j) \right) + \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i) &= 1
 \end{aligned}$$

□

5. Valería tiene 2 bolsas de dulces. La primera de ellas contiene 2 paquetes de Kranky's y 3 paquetes de Panditas. La segunda bolsa contiene 4 paquetes de Kranky's y 2 paquetes de Panditas. Si ella elige al azar una bolsa y elige un paquete de dulces. ¿Cuál es la probabilidad de que Valeria haya elegido un paquete de Panditas?.

Muestra el Diagrama de Arbol asociado a este problema.

**Solución:**

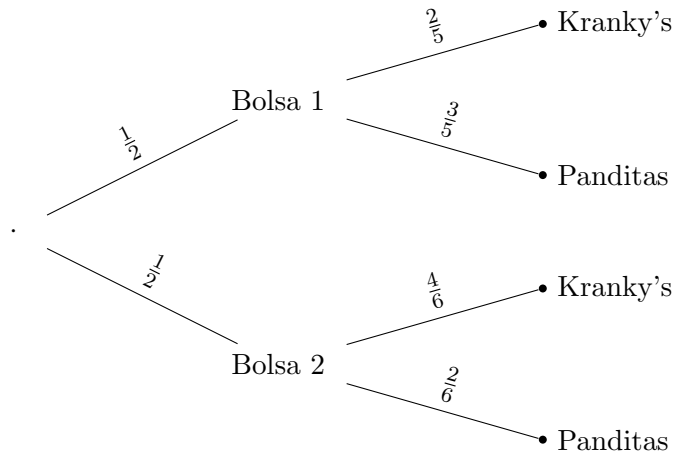


Figura 1: Diagrama de árbol

Para obtener la probabilidad de *que Valeria haya elegido un paquete de Panditas* se hará uso de la probabilidad total.

Lo primero que hay que hacer es definir los eventos, teniendo así:

- $\mathbb{P}(B_1) := \{\text{La probabilidad de que haya tomado un dulce de la 1era bolsa}\}$
- $\mathbb{P}(B_2) := \{\text{La probabilidad de que haya tomado un dulce de la 2da bolsa}\}$
- $\mathbb{P}(P) := \{\text{La probabilidad de que la han salido Panditas}\}$
- $\mathbb{P}(K) := \{\text{La probabilidad de que la han salido Kranky's}\}$

Teniendo así que la probabilidad de que le haya salido panditas es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P | B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(P | B_2)\mathbb{P}(B_2) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} \\ &\approx 0.4666\end{aligned}$$

6. Se realizó una encuesta en la Facultad de Ciencias. Se encontró que la probabilidad de seleccionar una persona al azar y que ésta sea fumadora es del 20 %. La probabilidad de que al menos la persona tenga un familiar que fume es del 30 %. Además si esta persona al menos tiene un familiar fumador la probabilidad de que ella misma fume se eleva hasta 35 %. Obtén la probabilidad de que la persona elegida sea fumadora pero que no tenga ningún familiar que fume.

**Solución:** Sean los eventos  $S, F \in \Omega$ , tales que,  $S := \{\text{Es fumador}\}$  y  $F := \{\text{Tiene un familiar que fuma}\}$ . Por hipótesis se tiene que  $\mathbb{P}(S) = 0.2$ ,  $\mathbb{P}(F) = 0.3$  y  $\mathbb{P}(S|F) = 0.35$ .

Entonces lo que nos pide el problema *la probabilidad de que la persona elegida sea fumadora pero que no tenga ningún familiar que fume* que se traduce como  $\mathbb{P}(S|F^c)$ .

Por el teorema de Bayes se tienen que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S|F^c) &= \frac{\mathbb{P}(F^c|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(F^c)} && \text{Definición} \\ &= \frac{(1 - \mathbb{P}(F|S))\mathbb{P}(S)}{(1 - \mathbb{P}(F))} && \text{Complemento} \\ &= \frac{0.4750 \cdot 0.2}{0.7} && \text{Sustituyendo} \\ &\approx 0.1357\end{aligned}$$

Para obtener  $\mathbb{P}(F|S)$ , se hizo lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|S) &= \frac{\mathbb{P}(S|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(S)} && \text{Definición} \\ &= \frac{0.35 \cdot 0.3}{0.2} && \text{Sustituyendo} \\ &\approx 0.5249\end{aligned}$$

Por tanto,  $\mathbb{P}(S|F^c) \approx 0.1357$ .

7. No lo haré.

8. Un Polígrafo (Detector de Mentiras) decimos que es 90 % confiable en el siguiente sentido: Hay un 90 % de chances de que una persona que está diciendo la verdad pase la prueba del polígrafo y hay un 90 % de chances que una persona que este mintiendo falle la prueba del polígrafo.

- En la CDMX se estima que el 5 % de las personas miente. Si una persona seleccionada al azar en la ciudad realiza la prueba del polígrafo la cual dice que persona está mintiendo. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona verdaderamente esté mintiendo?

**Solución:** Sean  $V, F, A \subset S$  eventos tales que,  $V := \{\text{Sea verdad}\}$ ,  $F := \{\text{Sea mentira}\}$  y  $A := \{\text{Esté diciendo la verdad}\}$ . Y los otros eventos como:

- $\mathbb{P}(A|V) = 0.9$ . La probabilidad de que esté diciendo la verdad y pase la prueba.
- $\mathbb{P}(A^c|F) = 0.9$ . La probabilidad de que esté mintiendo y falle la prueba.

Ahora lo que debemos de obtener es la probabilidad de que *la persona verdaderamente esté mintiendo*, ósea,  $\mathbb{P}(F|A^c)$  desarrollándola queda como:

$$\mathbb{P}(F|A^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c|F) \cdot \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(A^c)} \quad (1)$$

Sabemos que  $\mathbb{P}(F) = 0.05$  por hipótesis y su complemento, que es que sea verdad es  $\mathbb{P}(V) = 0.95$ . Para obtener  $\mathbb{P}(A^c|F)$ , se hará uso de la probabilidad total, quedando así.

$$\mathbb{P}(A^c|F) = \mathbb{P}(A^c|F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(A^c|V) \cdot \mathbb{P}(V) \quad (2)$$

La única probabilidad que debemos calcular por ahora es  $\mathbb{P}(A^c|V)$ .

**Afirmación:** Sean  $A, B \subset S$  eventos, entonces  $\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B)$ .

*Demostración.* Expresando a  $A$  en términos de una unión disjunta, tenemos:

$$\begin{aligned}A &= A \cap \Omega && \text{Identidad} \\ &= A \cap (B \cup B^c) && \text{Complemento} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) && \text{Distributividad}\end{aligned}$$

Sacando la probabilidad se sigue que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AB^c) && \text{Suma de dos probabilidades disjuntas} \\ 1 &= \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(AB^c)}{\mathbb{P}(A)} && \text{Definición} \\ &= \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A^c|B) && \text{Definición}\end{aligned}$$

Ergo  $\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B)$ . □

Regresadon al problema, lo que queremos obtener es  $\mathbb{P}(A^c|V)$  que es,  $\mathbb{P}(A^c|V) = 1 - \mathbb{P}(A|V) = 1 - 0.9 = 0.1$ .

Sustituyendo en (2) tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c|F) &= \mathbb{P}(A^c|F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(A^c|V) \cdot \mathbb{P}(V) \\ &= 0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.95 \\ &= 0.14\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1) usando (2), se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|A^c) &= \frac{\mathbb{P}(A^c|F) \cdot \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(A^c)} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.14} \\ &\approx 0.3214\end{aligned}$$

Por tanto la probabilidad de que esta persona verdaderamente esté mintiendo es  $\approx 0.3214$ .

- ¿Qué tan confiable debería ser la prueba del polígrafo para que la probabilidad de que una persona que verdaderamente esté mintiendo dado que la prueba del polígrafo resulto positiva sea de al menos 80 %?

**Solución:** 0.987

9. Una persona en Los Angeles California observa que un Taxi atropella a una persona. Si en L.A. el 95 % de los Taxis son amarillos y el 5 % son azules. Un perito de la L.A.P.D.(Policía) cree que una persona que atestigua un accidente es 80 % confiable. Esto es que la persona identifica el color del Taxi el 80 % de las veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el Taxi que participó en este accidente haya sido azul?

**Solución:** Sean los eventos  $A := \{ \text{El taxi es azul} \}$  y  $B := \{ \text{El taxi es identificado como azul} \}$ . Donde por hipótesis  $\mathbb{P}(A^c) = .95$  (la probabilidad de que el taxi es amarillo),  $\mathbb{P}(A) = .5$  y dice que la persona identifica el color del taxi el 80 % de las veces, que es:

- $\mathbb{P}(B|A) = 0.8$ , que es que el testigo haya identificado al taxi azul dado que es azul.
- $\mathbb{P}(B^c|A^c) = 0.8$ , que es que el testigo haya identificado al taxi amarillo dado que es amarillo.

Una vez teniendo los eventos definidos, lo que se buscar es *la probabilidad de que el Taxi que participó en este accidente haya sido azul*, que es  $\mathbb{P}(A|B)$ .

Para ellos se hará uso del Teorema de Bayes. Pero necesitamos obtener  $\mathbb{P}(B)$  para hacer uso de ella, y la forma de obtenerla es obtener la probabilidad total.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} && \text{Teorema de Bayes} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)} && \text{Obteniendo la probabilidad total de } B \\ &= \frac{0.8 \cdot 0.05}{0.8 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.95} && \text{Sustituyendo} \\ &\approx 0.1739\end{aligned}$$



10. Imagina que un amigo tuyo tiene 3 dados. Uno de ellos es standard, el segundo de ellos solo tiene 5's en cada uno de sus lados y el otro tiene 5's en tres caras y 4's en las 3 caras restantes. Si un dado de ellos es seleccionado al azar y se lanza y cae un 5. ¿Cual es la probabilidad de que el dado elegido haya sido el dado standard?

**Solución:**

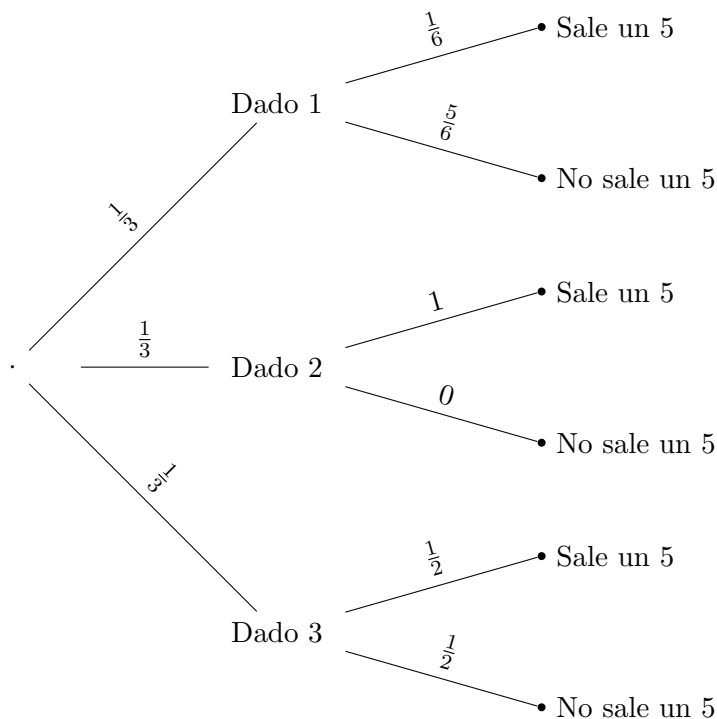


Figura 2: Diagrama de árbol

Sean los eventos,  $F, D_1, D_2, D_3 \in \Omega$ , tales que:

- $F := \{ \text{Se lanza un dado al azar y cae 5} \}$
- $D_1 := \{ \text{Se tiró el dado 1} \}$
- $D_2 := \{ \text{Se tiró el dado 2} \}$
- $D_3 := \{ \text{Se tiró el dado 3} \}$

Obteniendo  $\mathbb{P}(F)$  con probabilidad total, que significa que un dado seleccionado al azar cayó 5:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F | D_1)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(F | D_2)\mathbb{P}(D_2) + \mathbb{P}(F | D_3)\mathbb{P}(D_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.5555$$

Lo que nos pide el problema es calcular  $\mathbb{P}(F|D_1)$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F|D_1) &= \frac{\mathbb{P}(D_1|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(D_1)} \\ &= \frac{.06 \cdot 0.5555}{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

11. Sean  $A, B, C \in S$  eventos relacionados con el lanzamiento de un par de dados.

- Si  $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)$  y  $\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c)$ . Demuestra que  $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$  ó exhibe un contraejemplo definiendo eventos  $A, B, C$  en donde dicha afirmación no se cumpla.

**Solución:**

*Demostración.*  $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$

Por hipótesis tenemos que:

$$\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C) \quad (1)$$

$$\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c) \quad (2)$$

Suponiendo que  $\mathbb{P}(C) > 0$ , entonces multiplicando las igualdades (1) y (2) por  $\mathbb{P}(C)$  y  $\mathbb{P}(C^c)$  respectivamente, se obtiene:

$$\mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(C) > \mathbb{P}(B|C) \cdot \mathbb{P}(C) \quad (3)$$

$$\mathbb{P}(A|C^c) \cdot \mathbb{P}(C^c) > \mathbb{P}(B|C^c) \cdot \mathbb{P}(C^c) \quad (4)$$

Escribiendo la probabilidad total de  $A$  y  $B$ , se sigue que:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A|C^c)\mathbb{P}(C^c) \quad (5)$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B|C^c)\mathbb{P}(C^c) \quad (6)$$

Si nos fijamos en el primer sumando de (5) y (6), por (3) sabemos que es mayor el primero, de la misma manera con el segundo sumando de (5) y (6) usando (4).

Ergo  $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$ . □

- Si  $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(A|C^c)$  y  $\mathbb{P}(B|C) > \mathbb{P}(B|C^c)$ . Demuestra que  $\mathbb{P}(AB|C) > \mathbb{P}(AB|C^c)$  ó exhibe un contraejemplo definiendo eventos  $A, B, C$  en donde dicha afirmación no se cumpla.

*Hint:* Sean  $A, B, C \in S$  los eventos que definen si al lanzar un par de dados ocurre:

- $C$  = La suma de ambos dados es igual a 10
- $A$  = El Primer Dado cayó 6
- $B$  = El Segundo Dado cayó 6

**Solución: Contraejemplo:** Se mostrará que  $\mathbb{P}(AB|C) \not\geq \mathbb{P}(AB|C^c)$ .

Primero se obtendrá  $\mathbb{P}(AB|C)$  que significa que el primer y segundo dado cayeron en 6, dado que la suma de ambos de 10, y eso obviamente nunca se puede cumplir, por lo que  $\mathbb{P}(AB|C) = 0$ .

Ahora bien, obteniendo  $\mathbb{P}(AB|C^c)$  que significa que el primer y segundo dado cayeron en 6, dado que la suma de ambos no es 10. Obteniendo la probabilidad de  $\mathbb{P}(C^c) = \frac{33}{36}$  (porque las únicas parejas que no cumplen eso son (4, 6), (5, 5), (6, 4)), la probabilidad de  $\mathbb{P}(A|C^c) = \frac{5}{33}$  y  $\mathbb{P}(B|C^c) = \frac{5}{33}$ . Entonces  $\mathbb{P}(AB|C^c) = \frac{1}{33}$ .

Por tanto  $\mathbb{P}(AB|C) \not\geq \mathbb{P}(AB|C^c)$ .

12. No la haré.

13. No la haré.

14. No la haré.

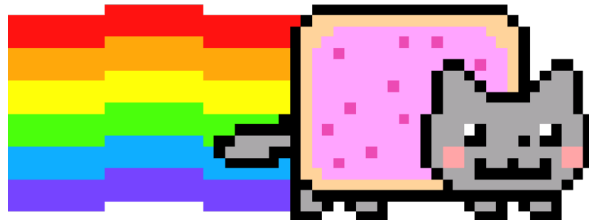


Figura 3: Nyan cat