Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Probabilidad I

Tarea 1
Técnicas de Conteo

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

29 de Agosto 2019

1. Demuestra la version generalizada del Principio Básico del Conteo.
   Hint: Utiliza las Propiedades del Producto Cartesiano de dos conjuntos A, B.

   El Principio Básico del Conteo Generalizado: Si hay r experimentos que se harán, y el primero de ellos tiene n_1 posibles resultados, y por cada uno de estos n_1 resultados hay n_2 posibles resultados del segundo experimento y así sucesivamente, entonces hay un total de $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$ posibles resultados de r experimentos.

   Demostración. Por inducción
   Caso base: Para $r = 1$, como solo un experimento se hace y da n_1 resultados y evidentemente hay n_1 resultados de un experimento.
   Hipótesis de inducción: Para $r = n$ supongamos que la generalización del principio básica del conteo es verdadera para un número r específica de experimentos.
   Paso inductivo: Para $r = n + 1$. Si se hacen r experimentos por hipótesis de inducción hay $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$ resultados. Por el principio básico del conteo entonces para $r = n + 1$ entonces serían $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r \cdot (n_{r+1})$ posibles resultados.
   Por el principio de inducción es verdadera para cualquier $r \in \mathbb{N}$. $\square$

2. Una compañía de telecomunicaciones desea saber cual es la cantidad de números telefónicos de 7 cifras dispone para telefonía fija si:

   a) La primer cifra no puede ser 0 ó 1.
   Solución: Por el principio de las casillas, debemos de tener 7 casillas. En la primera de ellas, sea $E_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $E_i = \{n \mid 0 \leq n \leq 9\}$ con $2 \leq i \leq 9$. Dicho esto hay $\#E_1 \cdot \#E_2 \cdot \ldots \cdot \#E_7 = 8 \cdot 10^6 = 8,000,000$.

   b) Resuelve el ejercicio anterior de nuevo asumiendo que un número telefónico no puede iniciar con 911 ya que esta marcación esta reservada para emergencias
   Solución: Por el princio de las casillas, si fijamos las tres primeras casillas con 9, 9 y 1, entonces quedan 4 casillas restantes con 10 opciones cada una, quedadando así que hay 10^4 opciones de teléfonos que inician con 911, llamemos al experimento anterior E con $\#E = 10^4$. Por el inciso anterior tenemos a F con $\#F = 8,000,000$, lo único que se debe de hacer es restarlos, teniendo así $\#F - \#E = 7,990,000$.

3. Un niño tiene 12 bloques de los cuales 6 son de color negro, 4 son rojos, un blanco y otro azul. Si el niño acomoda los bloques sobre una línea. ¿Cuántos acomodos distintos de los bloques puede hacer?
   Solución: Lo primero que hay que hacer es calcular todas la posibles permutaciones de los bloques, por el momento sin importar los colores, que son 12!. Ahora dividirlo entre el número de bloques que hay de cada color, quedando así:

$$\frac{12!}{6! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 1!} = 27720$$

4. ¿De cuántas maneras podemos acomodar en una repisa, 3 libros de literatura, 2 de matemáticas y otro libro de química si.

   a) los libros pueden ser acomodados en cualquier orden?
   Solución: Si sí nos importa el contenido de los libros hay $6! = 720$ de acomodarlas (sin restricciones), pero si no, ósea solo saber el tipo de libro en específico hay $\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$.

b) los libros de matemáticas tienen que esta juntos y los de literatura también?
Solución: Como los libros de matemáticas tiene que estar juntos, se pueden ver como un lote de libros de matemáticas, y cualquier oreden de ese lote son las permutaciones que es 2!. De manera análoga con los libros de literatura, habíendo 3!. Si vemos los libros de literatura, matemáticas y química como un lote cada uno, se sigue que hay 3! formas de acomodar los lotes.
Con el análisis previo hay $3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1! = 72$ maneras.

c) los de literatura siempre tienen que estar juntos, pero los de los otros temas pueden estar acomodados en cualquier orden?
Solución: Como los libros de literatura deben de estar juntos, los podemos considerar como un lote, teniendo así que las formas de ordenar los libros de ese lote son 4!. Como quedan los otros 3 libros restantes, la formas de ordenarlos son 3!.
Quedando así $4! \cdot 3! = 144$ diferentes maneras.

5. Dos amigos A y B pasan las tardes jugando FIFA 19 en su PlayStation 4. Ellos jugaran 7 partidos, cada juego tiene 3 posibles resultados: Victoria para A (lo cual es una derrota para B), Empate y Victoria para B (lo cual es una derrota para A). De modo que una victoria para A equivale a 1 punto, un empate equivale a $\frac{1}{2}$ punto mientras que una derrota equivale a 0 puntos. ¿De cuántas maneras

   a) al jugador A le es posible terminar la serie de 7 partidos, con 3 victorias, 2 empates y 2 derrotas?
   Solución: $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$ maneras.

   b) Al jugador A le es posible terminar la serie de 7 partidos con 4 puntos y al jugador B con 3 puntos?
   Solución: De $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ maneras distintas.

6. Un estudiante venderá 2 libros de su coleccion de libros la cual esta integrada por 6 libros de matemáticas, 7 de física y 4 de economía. ¿De cuántas maneras lo puede hacer si:

   a) ambos libros tienen que ser del mismo tema?
   Solución: Si toma dos libros de matemáticas, 2 de física y 4 de economía, en total son:

$$\binom{6}{2} + \binom{7}{2} + \binom{4}{2} = 42$$

   b) los libros son de temas distintos?
   Solución: Tomando cada pareja posible de dos temas de libros posibles se tienen $\binom{3}{2} = 3$ que son: {matemáticas, fisica}, {matemáticas, economía} y {física, economía}. Usando el principio de las casillas (dos casillas por cada experimento) se sigue que son:

$$6 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 94$$

7. Un comité de 3 ingenieros eléctricos y 3 ingenieros mecánicos será elegido de la plantilla total de ingenieros que tiene una fábrica la cual consta de 7 ingenieros eléctricos y 5 ingenieros mecánicos. Obten el número de formas de elegir este comité de ingenieros si:

   a) cualquier ingeniero eléctrico y mecánico puede ser seleccionado.
   Solución: Para obtener de cuantas formas podemos obtener 7 ingerieros eléctricos de 3

formas distintas se tiene que es $\binom{7}{3}$ y para los mecánicos son $\binom{5}{3}$, por el por el principio de las casillas son:

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{3} = 350$$

b) un ingeniero eléctrico en particular debe de ser miembro del comité.
<u>**Solución:**</u> Tomando a un ingeniero eléctrico en particular que tomamos uno y al realizar las posibles combinaciones quitamos a un miembro y solo tomamos 2, que es $\binom{6}{2}$. Depués obtenemos cuantas combinaciones se tienen de los ingenieros mecánicos que son $\binom{5}{3}$. Por último, como al princio dejamos a un ingeniero eléctrico fijo, las posibles combinaciones de éste son 1!. Ergo, las posibles posibles formas son:

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 1! = 150$$

c) dos ingenieros mecanicos en particular no pueden ser miembros del comité.
<u>**Solución:**</u> De manera análoga al inciso anterior, fijamos a dos ingenieros eléctrico, hecho esto nos queda una sola opción para el otro ing. mecánico. Depues para obtener la combinaciones del ingeniero mecánico son $\binom{7}{3}$. Quedadndo así:

$$\binom{3}{3} \cdot \binom{7}{3} = 35$$

8. Determina el número de vectores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que x_i es igual a 0 ó 1 y $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$.
<u>**Solución:**</u> Si cada x_i, es 0 o 1, la suma de las entradas del vector en $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$ es solo el número de entradas que son 1. Se sigue que el el número de vectores donde la suma de las entradas es k es igual al número de vectores que tienen k entradas igual a 1, que es $\binom{n}{k}$. El número de vectores donde la suma es al menos k es igual a la suma del número de vectores donde la suma es exactamente l de k a n. Quedadndo así $\sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l}$.

9. Una colección de arte en subasta consta de 4 Dali's, 5 Van Gogh's y 6 Picasso's. A la subasta acudieron 5 coleccionistas de arte asi un auditor toma nota del numero de Dali's, Van Gogh's y Picasso's adquiridos por cada coleccionista.
¿Cuántos registros distintos puede realizar el auditor si todos los cuadros fueron vendidos?
<u>**Solución:**</u> Lo primero que hay que obtener es el número de todas las formas que se pueden vender todas las obras de cada uno; que es, todas las formas en que que se pudieron vender las obras 4 obras de Dali, las 5 de Van Gogh y las 6 de Picasso
Para esto hay que recordar que para obener todas las formas[1] que hay de n para k son:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Entonces para obtener todas los posibles de cada obra de Dali, Van Gogh y Picasso se tiene respectivamente que son: $\binom{4+1-1}{5-1}$, $\binom{5+5-1}{5-1}$ y $\binom{6+5-1}{5-1}$.
Ergo, la forma en la que se pueden resgitrar son:

$$\binom{8}{4} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{10}{4} = 1,852,200$$

[1] Proposición 6.2 de la página 13 del libro *A First Course in Probability*, Sheldon Ross.

10. a) Prueba que $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$
Hint: $\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}-\binom{n}{r-1}$

Demostración. TODO □

b) Obten $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}$
Hint: Escribe de manera adecuada $i\binom{n}{i}$

Demostración. Reescribiendo la expresión se tiene que es

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=\sum_{i=1}^{n}k\binom{n}{i}$$

Y también hay una identidad que dice lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n}i\binom{n}{i}=n\cdot 2^{n-1}$$

Se tratará este problema como si fueran comités:
Dadas n personas, se verán de cuantas formas se puede seleccionar un comité de un grupo, donde cada comté tiene un presidente. Lo primero que se hará es fijar un tamaño k de cada comité, tomar k miembros de $\binom{n}{k}$ maneras, y luego nombrar un presidente de entre los miembros seleccionados con k opciones, dando un total de $\sum_{k=1}^{n}k\cdot\binom{n}{k}$ maneras de seleccionar un comité.
O de manera análoga, primero seleccionar al presidente con n posibles opciones, y después seleccionar a lo miembros restantes en 2^{n-1} maneras. Dando un total de $n\cdot 2^{n-1}$ formas de tomar un comité.
Teniendo así la igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$$

□

11. De un grupo de 8 mujeres y 6 hombres que trabajan en una oficina se elegirán un grupo que será integrado por 3 hombres y 3 mujeres para comisión interna de Protección Civil. ¿Cuántos coomités es posible formar si:

a) dos hombres en específico se niegan a pertenecer al comité juntos?
Solución: El comité que no tiene a dos hombres es $\binom{8}{3}\cdot\binom{4}{3}$. Para obtener el número de comités que incluye uno de los hombres que se niega son $\binom{8}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}$.
Por tanto el número de posibilidades que que dos hombre en especifico se nieguen a pertenecer al comité son:

$$\binom{8}{3}\cdot\binom{4}{3}+\binom{8}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}=896$$

b) dos mujeres en específico se niegan a pertenecer al comité juntas?
Solución: Si el comité no incluye a dos mujeres que se nieguen hay $\binom{6}{3}\cdot\binom{6}{3}$. Para obtener el número de comités que incluyen solo a una de las mujeres que se niegan a pertenecer son $\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{6}{3}$.

Por tanto el número de comités a formar son:

$$\binom{6}{3}\cdot\binom{6}{3}+\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{6}{3}=1000$$

c) una mujer y un hombre en específico se niegan a pertenecer al comité juntos?
<u>Solución</u>: Hay $\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{3}$ posibles comités cuando ninguno de los 2 quieren. Cuando una mujer en específico se niega a participar hay $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}$. Cuando un hombre en específico se niega a participar hay $\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2}$.
Por lo tanto el número de comités que se pueden formar son:

$$\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{3}+\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}+\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2}=910$$

12. En una reunión del Consejo de Seguridad de la O.N.U. delegados de 10 países donde están incluidos: Rusia, China, Estados Unidos e Irán serán ubicados en una fila de silla para dar una conferencia de prensa conjunta. ¿De cuántas maneras los pueden acomodar si los delegados de Rusia e Irán siempre tienen que estar juntos y el representante de China y EE.UU. no pueden estar juntos?

<u>Solución</u>: Hay 10 delegados, los delegados de Irán y Rusia siempre van a estar juntos, considerandolos como una sola entidad (un solo delegado) hay en total 9 "delegados" que puedesn ser acomodados de 9! maneras, ahora bien, las posibles arreglos de delegados de Irán y Rusia son 2!.

Teniendo así $9!\cdot 2!$.

Los delegados de China y EE.UU. no pueden estar sentados juntos. Para calcularlo, primero se calculará el número de formas de que los delegados de China y EE.UU. se sienten juntos y luego restarlo.

Con los delegados de de Irán y Rusia sentados juntos, se tienen a 9 "delegados". Fuera de esto, lo que queremos es encontrar de cuantas maneras China y EE.UU. delegados se pueden sentar juntos. Siguiendo la misma idea, tomamos al delgado de China y EE.UU. como una sola entidad ("delegado"). Ahora tenemos a 8 entidades que pueden ser acomodadas de 8! maneras. Los delegados de China y EE.UU. pueden ser acomodados de 2! maneras posibles. También considerando a los delegados de Rusia e Irán pueden ser acomodados de 2! maneras.

Finalmente restando el número de acomodos posibles de China y EE.UU sentados juntos y, Rusia e Irán sentados juntos, del número de acomodos en el cual Rusia e Irán se sientas juntos son:

$$9!\cdot 2!-8!\cdot 2!\cdot 2!=564,480$$

13. Sean A, B, C conjuntos. Prueba que

a) Conmutatividad.

Demostración. Por demostrar $A\cup B=B\cup A$.
Suponemos que $x\in A\cup B$. Entonces $x\in A$ o $x\in B$ o $x\in A\cap B$ lo cual escribimos $x\in B\cup A$. Por tanto $A\cup B=B\cup A$. $\square$

Demostración. Por demostrar $A\cap B=B\cap A$.
Suponemos que $x\in A\cap B$. Si x está en ambos A y B, entonces podemos decir que x está en ambos B y A o $x\in B\cap A$. Por tanto $A\cap B=B\cap A$. $\square$

b) Asociatividad.

Demostración. Por demostrar que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
Suponemos que $x \in (A \cup B) \cup C$. Entonces se sigue que $x \in A \cup B$ (lo que significa que $x \in A$ o $x \in B$) o $x \in C$. Por tanto podemos decir que $x \in A$ o $x \in B \cup C$ o en mejor $x \in A \cup (B \cup C)$. Por tanto $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (A \cup C)$.
Para mostrar que $(A \cup B) \cup C \supseteq A \cup (B \cup C)$ es análogo. $\square$

Demostración. Por demostrar que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
Suponemos que $x \in (A \cap B) \cap C$. Entonces $x \in A \cap B$ y $x \in C$. Así que $x \in A$ y $x \in B \cap C$ o mejor $x \in A \cup (B \cup C)$. Por tanto $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (A \cup C)$.
Para mostrar que $(A \cap B) \cap C \supseteq A \cap (B \cap C)$ es análogo. $\square$

c) Distributividad.

Demostración. Por demostrar $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Primero se demostrará que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Sea $x \in A \cup (B \cap C)$

$$\begin{aligned} & x \in A \quad \vee \quad x \in B \cap C \\ & \implies x \in A \quad \vee \quad (x \in B \wedge x \in C) \\ & \implies (x \in A \vee x \in B) \quad \wedge \quad (x \in A \vee x \in C) \\ & \implies (x \in A \cup B) \quad \wedge \quad (x \in A \cup C) \\ & \implies x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \tag{1}$$

Por lo tanto $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
La otra contención es $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset (A \cup C)$ Sea $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\begin{aligned} & x \in A \cup B \quad \wedge \quad x \in B \cup C \\ & \implies (x \in A \quad \vee \quad x \in B) \quad \wedge \quad (x \in A \quad \vee \quad x \in C) \\ & \implies x \in A \quad \vee \quad (x \in B \wedge x \in C) \\ & \implies x \in A \quad \vee \quad (x \in B \cap C) \\ & \implies x \in A(B \cup C) \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo tanto $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (A \cap C)$
De (1) y (2) se tiene que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $\square$

Demostración. Por demostrar $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Análogo al anterior. $\square$

d) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

Demostración. TODO $\square$

e) $A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$

Demostración. TODO $\square$

f) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$

Demostración. TODO ∎

g) $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$

Demostración. TODO ∎

h) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ entonces $A \cup B \subseteq C$

Demostración. TODO ∎

i) Si $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$ entonces $C \subseteq A \cap B$

Demostración. TODO ∎

j) Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$

Demostración. TODO ∎

k) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$

Demostración. TODO ∎

l) Si $A \subset C$ y $B \subseteq C$ ¿Será cierto que $A \subset C$?

Demostración. TODO ∎

m) Si $x \in A$ y $A \subseteq B$. ¿Será necesariamente que $x \in B$?

Demostración. TODO ∎

n) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Demostración. Por contención:
Por demostrar que $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$ Sea $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Entonces $x \in A \setminus B$ o $x \in A \setminus B$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $x \in A \setminus B$. Entonces $x \in A$ y $X \notin B$. Por tanto, $x \in A$ y $x \notin B \cap C$. Ergo $x \in A \setminus (B \cap C)$.
Por demostrar que $A \setminus (B \cap C) \subset (A \subseteq B) \cup (A \setminus C)$. Sea $x \in A \setminus (B \cap C)$. Entonces $x \in A$ y $x \notin (B \cap C)$. Por tanto $x \in A$, y $x \notin B$ o $x \notin C$. Sin perdida de generalidad, asumimos que $x \notin B$. Entonces se tiene que $x \in A$ y $x \notin B$ y así $x \in A \setminus B$. Por tanto $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
Ergo $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

∎

14. Prueba las leyes de De Morgan

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Demostración. Sea $x \in (A \cup B)^c$. Entonces $x \notin A \cup B$. Así $x \notin A$ y $x \notin B$, es decir, $x \in A^c \cap B^c$ así $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. Ahora sea $x \in A^c \cap B^c$. Entonces $x \in A^c$ y $x \in B^c$. Así $x \notin A$ y $x \notin B$, es decir, $x \notin A \cap B$ así $x \in (A \cap B)^c$. Por tanto $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. Dado que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ y $(A \cap B)^c \supseteq A^c \cap B^c$. Ergo $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. ∎

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración. Sea $x \in (A \cap B)^c$. Entonces $x \notin A \cap B$. Así $x \notin A$ y $x \notin B$. Por lo tanto $x \in A^c$ o $x \in B^c$, es decir, $x \in A^c \cup B^c$ así $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. Ahora sea $x \in A^c \cup B^c$. Entonces $x \in A^c$ o $x \in B^c$ así $x \notin A$ y $x \notin B$, es decir, $x \notin A \cap B$ así $x \in (A \cap B)^c$. Por tanto $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$. Dado que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ y $(A \cap B)^c \supseteq A^c \cup B^c$. Ergo $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. □

15. Prueba

    a) $A \setminus B = B^c \setminus A^c$

    Demostración. TODO □

    b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

    Demostración. TODO □

16. Prueba el Teorema del Binomio. Sean x, $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Demostración. Tomando el lado izquierdo de la igualdad, el producto de $(x+y)$ son n copias de ella.

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ veces}}$$

Ahora expandiendo esta expresión y multiplicando todos los términos. Como hay n factores, cada monomío va a tener un variable en cada factor, y por tanto el grado va a ser de n. Más específico, cada monomío será de la forma $x^i y^{n-i}$ para alguna $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ representando cuantas veces x fue escogido.

El coeficiente $x^k y^{n-i}$ es el número de maneras de escoger x exactamente i veces. Esto es equivalente a escoger un subconjunto de k de los n factores de los cuales se escogen x (con y siendo escogida del resto). Por definición, hay $\binom{n}{i}$ subconjuntos, y por tanto el coeficiente de $x^k y^{n-i}$ es $\binom{n}{i}$.

Ergo, sumando sobre todos los diferente monomíos se tiene que:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

□

17. Prueba $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
A \times (B \cup C) &= \{(x,y) : (x \in A) \land (y \in B \cup C)\} && \text{Def. produto cartesiano} \\
&= \{(x,y) : (x \in A) \land (y \in B) \lor (y \cap C)\} && \text{Def. de } \cup \\
&= \{(x,y) : (x \in A) \land (x \in A) \land (y \in B) \lor (y \in C)\} && P = P \lor P \\
&= \{(x,y) : ((x \in A) \land (y \in B)) \lor ((x \in A) \land (y \in C))\} && \text{Reacomodo} \\
&= \{(x,y) : (x \in A) \land (y \in B)\} \cup \{(x,y) : (x \in A) \land (y \in C)\} && \text{Def. de } \cup \\
&= (A \times B) \cup (A \ \times C) && \text{Def. de } \times
\end{aligned}$$

□

18. Si $A = B \cap C$. Determina si es cierto o no

    a) $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$
    Cierto.

    b) $A \times A = (B \times C) \cap (C \times B)$
    Falso.

19. Prueba que una de las dos identidades siguientes es siempre correcta y la otra algunas veces es falsa:

    a) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$
    TODO

    b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
    TODO

20. Sea Λ una clase de conjuntos. Prueba que

$$B \setminus \bigcup_{A \in \Lambda} A = \bigcap_{A \in \Lambda} (B \setminus A)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
& x \in B \setminus \bigcup_{A \in \Lambda} A \\
& \iff x \in B \quad \wedge \quad x \notin \bigcup_{A \in \Lambda} A \\
& \iff x \in B \quad \wedge \quad x \notin A, \forall A \in \Lambda \\
& \iff x \in B \setminus A, \quad \forall A \in \Lambda \\
& \iff x \in \bigcap_{A \in \Lambda} (B \setminus A) \\
& \therefore B \setminus \bigcup_{A \in \Lambda} A = \bigcap_{A \in \Lambda} (B \setminus A)
\end{aligned}$$

□

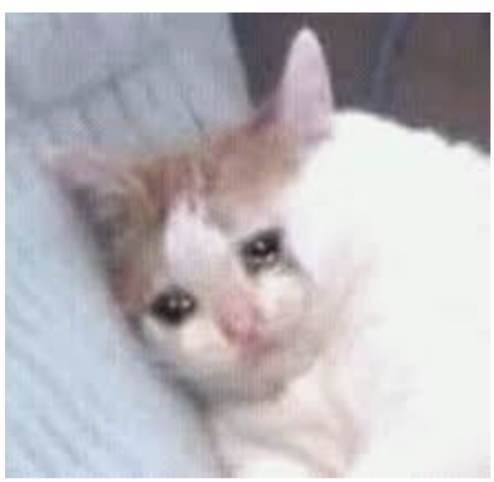

Figura 1: No la acabé toda la tarea :(