Tarea

Probabilidad I - 9018

Probabilidad Condicional e Independencia de Eventos

Fecha de Entrega : Martes 24 de Septiembre 2019

Notas Adicionales:

- La entrega de esta Tarea deberá ser en Hojas Blancas, Caratula y en parejas.
- La calificación obtenida en esta tarea contará como la evaluación correspondiente al 2do. Examen Parcial y la Tarea correspondiente a dicho periodo.
- No habrá reposición correspondiente a este Examen Parcial.

Lista de Problemas

1. Prueba los siguientes resultados

   - Sean $E, F \in S$ eventos mutuamente excluyentes entonces:

   $$\mathbb{P}(E|E \cup F) = \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)}$$

   - Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq S$ una sucesión de eventos mutuamente excluyentes entonces:

   $$\mathbb{P}(E_j|\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \frac{\mathbb{P}(E_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)}$$

2. Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n \in S$ eventos independientes. Prueba que:

   $$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - \mathbb{P}(E_i)]$$

3. Una serie Experimentos Aleatorios Independientes cuyos posibles resultados pueden ser clasificados como *Exitos* ó *Fracasos*. Donde ocurre un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $1 - p$ en cada ensayo son llamados *Ensayos de Bernoulli*. $p \in [0, 1]$

   Si P_n denota la probabilidad de que si se realizan n ensayos de bernoulli ocurran un número par de éxitos (0 sera considerado como un numero par). Prueba que:

   $$P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1} \quad \text{si} \quad n \geq 1$$

   Usa esta formula para demostrar (por inducción) que:

   $$P_n = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$$

4. Imagina que tenemos una sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\; 0 \leq a_i \leq 1 \;$ para toda $\; i \geq 1$
Demuestra lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \, (\prod_{j=1}^{i-1}(1-a_i)) + \prod_{i=1}^{\infty}(1-a_i) = 1$$

Hint: Supón que se realizan una infinidad de "Volados". Sea a_i la probabilidad de que en el i-esimo lanzamiento cae por primera vez *Águila*.

5. Valería tiene 2 bolsas de dulces. La primera de ellas contiene 2 paquetes de *Kranky's* y 3 paquetes de *Panditas*. La segunda bolsa contiene 4 paquetes de *Kranky's* y 2 paquetes de *Panditas*. Si ella elige al azar una bolsa y elige un paquete de dulces. ¿Cual es la probabilidad de que Valeria haya elegido un paquete de *Panditas*?.
Muestra el Diagrama de Arbol asociado a este problema.

6. Se realizo una encuesta en la Facultad de Ciencias. Se encontro que la probabilidad de seleccionar una persona al azar y que esta sea fumadora es del 20 %. La probabilidad de que al menos la persona tenga un familiar que fume es del 30 %. Ademas si esta persona al menos tiene un familiar fumador la probabilidad de que ella misma fume se eleva hasta 35 %. Obten la probabilidad de que la persona elegida sea fumadora pero que no tenga ningún familiar que fume.

7. De acuerdo con un estudio realizado por la Secretaría de Salud. La probabilidad de que una mujer de entre 50 y 59 años sea diagnosticada con *Cancer de Mama* es de 2.38 %. Se sabe que si una mujer bajo estas condiciones se realiza una *Mamografía* esta prueba tiene un nivel de sensitividad tumoral del 85 % para mujeres de este rango de edad. Si el nivel de confianza de esta prueba es del 95 %. Esto es la tasa de Falsos-Negativos es del 15 % y la de Falsos-Positivos es de 5 %. Si una mujer en este rango de edad se realiza una *Mamografía* y esta resulta positiva para Cáncer. ¿Cual es la probabilidad de que ella realmente tenga la enfermedad?

8. Un *Polígrafo* (Detector de Mentiras) decimos que es 90 % confiable en el siguiente sentido: Hay un 90 % de chances de que una persona que está diciendo la verdad pase la prueba del polígrafo y hay un 90 % de chances que una persona que este mintiendo falle la prueba del polígrafo.

   - En la CDMX se estima que el 5 % de las personas miente. Si una persona seleccionada al azar en la ciudad realiza la prueba del polígrafo la cual dice que persona esta mintiendo. ¿Cual es la probabilidad de que esta persona verdaderamente este mintiendo?
   - ¿Que tan confiable deberia ser la prueba del poligrafo para que la probabilidad de que una persona que verdaderamente este mintiendo dado que la prueba del poligrafo resulto positiva sea de al menos 80 %?

9. Una persona en Los Angeles California observa que un Taxi atropella a una persona. Si en L.A. el 95 % de los Taxis son amarillos y el 5 % son azules. Un perito de la L.A.P.D.(Policía) cree que una persona que atestigua un accidente es 80 % confiable. Esto es que la persona identifica el color del Taxi el 80 % de las veces. ¿Cual es la probabilidad de que el Taxi que participo en este accidente haya sido azul?

10. Imagina que un amigo tuyo tiene 3 dados. Uno de ellos es standard, el segundo de ellos solo tiene 5's en cada uno de sus lados y el otro tiene 5's en tres caras y 4's en las 3 caras restantes. Si un dado de ellos es seleccionado al azar y se lanza y cae un 5. ¿Cual es la probabilidad de que el dado elegido haya sido el dado standard?

11. Sean $A, B, C \in S$ eventos relacionados con el lanzamiento de un par de dados.
    - Si $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)$ y $\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c)$ Demuestra que: $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$ ó exhibe un contra-ejemplo definiendo eventos A, B, C en donde dicha afirmación no se cumpla
    - Si $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(A|C^c)$ y $\mathbb{P}(B|C) > \mathbb{P}(B|C^c)$ Demuestra que: $\mathbb{P}(AB|C) > \mathbb{P}(AB|C^c)$ ó exhibe un contra-ejemplo definiendo eventos A, B, C en donde dicha afirmación no se cumpla.
      Hint:
      Sean $A, B, C \in S$ los eventos que definen si al lanzar un par de dados ocurre
      $C = \{\textit{La suma de ambos dados es igual a 10}\}$
      $A = \{\textit{El Primer Dado cayo 6}\}$
      $B = \{\textit{El Segundo Dado cayo 6}\}$

12. Jenny tiene ciertos criterios para elegir a su siguiente Novio. Ella tiene n pretendientes y compara entre si a cualquier par de chicos con los que sale y los clasifica. Ella puede decidir tener una "Cita" con algún pretendiente en cualquier instante al azar. Cuando ella conoce bien a algún pretendiente puede aceptar ser su novia ó bien lo rechaza (*No sin antes...*)

    Si ella acepta ser Novia de algún pretendiente ella no intentara a los pretendientes con los que aun no ha tenido una cita(*En la vida real ... Whatsapp, Facebook, SNAPCHAT, etc. ¿Verdad?*). Si ella ha rechazado a algún pretendiente ella nunca mas lo podría considerar como opción para ser su novio. La chica en el proceso de la búsqueda de su novio no elegirá a un pretendiente que comparado con los chicos que anteriormente ha salido considere sea "peor". El objetivo de ella es maximizar la probabilidad de elegir al "mejor" pretendiente para ser su novio. Y para ello sigue la siguiente estrategia:

    Para alguna m, $0 \leq m < n$ ella descarta a los primeros m pretendientes. Ella acepta salir con ellos y después de conocerlos los descarta sin importarle cual de ellos es mejor. Entonces tomara como Novio, al siguiente pretendiente que considere mejor que los chicos a los que descarto. En términos de n ¿Cual es el valor de m que maximiza la probabilidad de que la chica elija al mejor pretendiente ?
    Hint:
    Sean $E_m \in S$, $\{B_i\}_{i=1}^{n} \subseteq S$ los eventos que definen
    $E_m = \{\textit{Jenny elige al mejor pretendiente}\}$
    $B_i = \{\textit{El mejor pretendiente es la i-esima cita de Jenny}\}$
    Por la ley de la Probabilidad Total se sigue que

    $$\mathbb{P}(E_m) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_m|B_i)\mathbb{P}(B_i) \quad \text{donde} \quad \mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{n}$$

    Es evidente que $\mathbb{P}(E_m|B_i) = 0$ si $1 \leq i \leq m$, ahora si $i > m$ el i-esimo pretendiente es el mejor entonces Jenny lo elegirá a el si y solo si el mejor de los anteriores esta dentro de los primeros m pretendientes que inicialmente descarto. De modo que

$$\mathbb{P}(E_m|B_i) = \frac{m}{i-1} \quad \text{si} \quad i > m$$

Ademas utiliza el hecho que

$$\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i+1} \approx \int_{m}^{n} \frac{1}{x} dx$$

Ahora obtén el valor aproximado de m para el cual $\mathbb{P}(E_m)$ es máxima.

13. Una mujer llamada Paulina tiene 2 pretendientes: Ernesto y Luis. Ella esta decidida a ser novia de alguno de ellos. Ernesto tiene una probabilidad de 0.7 de ser el elegido y Luis una de 0.3. Si Ernesto es novio de Paulina hay una probabilidad de 0.4 de que terminen en matrimonio y si es Luis, una de 0.3. Si despues de unos años hay reportes de que Paulina se caso con alguno de los ellos. ¿Cual es la probabilidad de que haya sido con Luis?

14. Investiga y resuelve el problema de Regla de la Sucesión de Laplace.
    Hint: Ver **[Ross]** Ejemplo 5e, Capitulo 3

FIN