U.N.A.M. FACULTAD DE CIENCIAS — Semestre 2020-1
9018. PROBABILIDAD I

Tarea 4: Variables Aleatorias Discretas II
Fecha de entrega: 5 de Noviembre 2019

1. Si cada persona en una comunidad de 1000 habitantes tiene un 1 % de chances de resultar infectado de un peligroso virus. Suponiendo que una persona resulta infectada independientemente de lo que ocurra con otra persona de la comunidad. Calcula la probabilidad de que:
   - Exactamente haya 10 personas infectadas
   - A lo mas haya 16 personas infectadas
   - Haya entre 12 y 14 personas infectadas
   - Alguien resulte infectado

2. En 1693 Samuel Pepys le escribió una carta a Isaac Newton en donde le planteo el siguiente problema: ¿ Cual de los siguientes tres planteamientos es mas probable que ocurra?
   - Se lanzan 6 dados y aparece al menos un 6's
   - Se lanzan 12 dados y aparecen al menos dos 6's
   - Se lanzan 18 dados y aparecen al menos tres 6's

   Como dato adicional Sir Isaac Newton ademas de ser uno de los mas grandes científicos de la historia, durante un gran lapso de su vida fue un funcionario publico, manejo digamos el SAT de lo que hoy es el Reino Unido. Y estaba a favor usar la horca o quemar gente si evadian impuestos, eran buenos tiempos.

3. Tenemos 2 dados 'A' y 'B', uno de los cuales es standard y el otro tiene 3 caras con 1's y 4 caras con 4's. Se lanza una moneda: Si cae *Águila* lanzamos el dado 'A' 5 veces mientras que si cae *Sol* lanzamos el dado 'B' 5 veces. Sea X la variable aleatoria que denota: El número de veces que el '4' aparece
   - Obtén $\mathbb{P}(X = 3)$
   - ¿ Tendrá X una Distribución Binomial?

4. Un viejo juego de dados llamado *Chuck a Luck* popular en el EE.UU. del S XIX. Consiste en que un jugador apuesta a algún número entre el 1 y el 6 entonces se lanzan 3 dados. Si el número al que le aposto el jugador aparece una, dos o tres veces al lanzar los dados el jugador recibe una, dos o tres veces lo que aposto, mas su apuesta inicial y pierde su apuesta inicial en cualquier otro caso. Sea X la variable aleatoria que denota: La ganancia del jugador por unidad del principal apostado inicialmente.
   - Obtén la función de masa de probabilidad asociada a X
   - Calcula el Valor esperado de la ganancia del jugador por unidad apostada.

5. Si $X \sim Bin(n, p)$.
   Prueba que. $\mathbb{E}(\frac{1}{X+1}) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$

6. Supón que se realizan n volados donde la probabilidad de que caiga '*Sol*' es igual a p. Prueba que la probabilidad de que ocurran un número par de '*Soles*' al realizar la serie de lanzamientos es igual a $\frac{1}{2}[1 + (q - p)^n]$ donde $q = 1 - p$. Primero demuestra y luego utiliza la siguiente identidad

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} p^{2i} q^{n-2i} = \frac{1}{2}[(p+q)^n + (q-p)^n]$$

   Donde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ es el mayor entero menor igual que $\frac{n}{2}$

7. Sea X una variable aleatoria Poisson con parámetro λ.

   - Prueba que: $\mathbb{P}(\text{X es 'Par'}) = \frac{1}{2}[1 + e^{-2\lambda}]$
     Utiliza el ejercicio anterior y la relación que existe entre una Variable Aleatoria Poisson y la Binomial.
   - Prueba el resultado anterior directamente haciendo uso de la expansión en Serie de Taylor de $e^{-\lambda} + e^{\lambda}$

8. Si $X \sim Poisson(\lambda)$

   - Para que valores de λ el valor de $\mathbb{P}(X = i), \;\; i \geq 0$ es máximo
   - Prueba que: $\mathbb{E}(X^n) = \lambda \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}]$ y utiliza este resultado para calcular el valor de $\mathbb{E}(X^3)$

9. Se sabe que en una caseta de la Autopista 'México-Queretaro' los vehículos pasan a razón de 16 carros por minuto. ¿ Cual es la probabilidad de que 1000 vehículos atraviesen la caseta en la siguiente hora?
   Hint: ¿ Cual es la razón por hora?

10. Jennifer en una visita al Otorrinorrinolaringologo, el medico le recomienda tomar unos suplementos para evitar que ella enferme de las vías respiratorias durante el próximo año. Le recomienda seguir una terapia experimental en donde ella consumirá alguno de 2 suplementos disponibles durante un tiempo.

    Si toma el Suplemento A , El número de veces que Jenny enfermara se espera que sea 1 vez al año posterior a terminar el tratamiento mientras que si toma el suplemento B, ella se espera que enferme en 4 ocasiones. El medico tiene igual numero de cajas del Suplemento A y B. Y puede elegir cualquiera de ellos con igual probabilidad para darselos a su paciente. Si ella se enfermo 3 veces durante el año siguiente a seguir alguno de los tratamientos. ¿ Cual es la probabilidad de que ella haya tomado el suplemento B?

11. Schneider una conocida manufacturera produce componentes eléctricos de los cuales aproximadamente el 1 % de ellos son defectuosos. Si el departamento de control de calidad elige una gran cantidad de ellos de manera independiente uno de otros. ¿ Cual es la probabilidad de que:

    - Hayan revisado 110 componentes antes de que hayan encontrado uno defectuoso?
    - Hayan revisado a lo mas 110 componentes antes de que hayan encontrado uno defectuoso?
    - Obtén el Numero esperado de componentes que tengan que revisar para que encuentren un componente defectuoso?

12. Una Caja tiene r pelotas rojas y b pelotas azules. Si elegimos una pelota a la vez y sin reemplazo. Sea X la variable aleatoria que denota el número de extracciones que tenemos que hacer de la urna hasta que la primer bola roja es seleccionada.

    - Explica por que X no tiene una distribución geométrica
    - Demuestra que la $p_X(i)$ esta dada por: $p_X(i) = \dfrac{\binom{r+b-i}{r-1}}{\binom{r+b}{r}}$ si $i = 1, 2, \ldots b+1$

13. Si la función generadora de momentos de una Variable Aleatoria Discreta esta definida como:

    $$M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tX} p(x)$$

    Si $X \sim Geometrica(p)$ Prueba que:

    - $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
    - Utiliza lo anterior para demostrar que: $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ y $\text{Var}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

14. Si se lanza una moneda "honesta"hasta que sale *Sol* por 10ma. Vez. Sea X la variable aleatoria que denota: El número de lanzamientos necesarios hasta que salen 10 "Soles". Obtén la función de masa de probabilidad asociada a X y el Número de lanzamientos que se espera tengamos que realizar para obtener dicho resultado.

15. Supón que una muestra de tamaño n es seleccionada al azar y sin reemplazo de una urna que contiene N pelotas de las cuales m son blancas y $M - N$ son negras . Sea X la variable aleatoria que denota: El número de pelotas blancas seleccionadas.

    - Obtén la función de masa de probabilidad de la Variable Aleatoria X
    - Calcula $\mathbb{E}(X)$ y $\text{Var}(X)$

16. Una escuela compra un lote de 100 focos de los cuales hay 6 defectuosos y los 94 restantes del lote funcionan correctamente, Si el personal de intendencia elige un foco al azar de este lote para reparar una lampara del plantel y para ello elige 10 focos de la caja y va probando uno a uno cuales de ellos sirven. Sea X la variable aleatoria que denota: El número de focos defectuosos encontrados en la muestra. Obten

    - $\mathbb{P}(X = 0)$
    - $\mathbb{P}(X > 2)$