Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Probabilidad I

Tarea 2
Propiedades Básicas de la Probabilidad

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
`angelgladin@ciencias.unam.mx`

Mario Navarrete Baltazar
No. cuenta: 315218413
`qwertyuiop@ciencias.unam.mx`

13 de Septiembre 2019

1. Imaginemos el siguiente experimento aleatorio. "Se Lanza un dado continuamente hasta que caiga un 6 y en ese momento dejamos de lanzar el dado".

   - Describe el Espacio Muestral asociado a este Experimento Aleatorio
     Solución: El espacio muestral es: $S = (n, x_1, ..., X_n - 1), n \geq 1, x_1 \neq 6, i = 1, ..., n-1$
   - Sea E_n el evento que denota: El número de lanzamientos necesarios hasta completar el experimento. ¿Cuáles puntos del espacio muestral están contenidos en E_n?
     Solución: Supongamos que el resultado es $(n, x_1, ..., x_n, x_{n-1})$ si el primer 6 aparece en el lanzamiento n, y x_i aparece en el lanzamiento, $i, i = 1, ..., n-1$.
   - ¿Qué representa $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ en términos del experimento aleatorio?
     Solución: Representa el evento en el cual el 6 nunca aparece.

2. Tres individuos A, B , C se turnan para lanzar una moneda. Al primero que le salga "Águila" gana. El espacio muestral asociado a este experimento puede ser definido como:

$$S = \begin{cases} 1, 01, 001, 0001, \ldots, \\ 0000\ldots \end{cases}$$

   - Interpreta el Espacio Muestral
     Solución: En este experimento los individuos A, B , C se turnan para tirar una modena y gana el primero que obtenga una "águila". En este espacio el `0` está denotado que salió "sol" y el `1` se denota que salió águila. Viendo los casos de S; en el primero podemos ver los 0's (si hay) precedidos del 1 como cuantas veces (denotado por el número de 0's) se tiraron soles hasta que se obtuvo una águila. En el segundo caso dondee es una cadena de 0's significa que nunca se obtuvo águila.
   - Define los siguientes eventos en terminos de S.
     Asume que A lanza primero la moneda, denoganar lanza B, de no ganarlanza C y en caso de no ganar nadie se repite el proceso.
     Solución: (Asumiendo que A tiró, luego B y al final C y así consecutivamente.)

     a) A gana $= A$
        A gana si y solo si hay $3n$ 0's precedidos de él (un `1`), ósea $\underbrace{0 \cdots 0}_{3n}1$ con $n \in \mathbb{N}$.
     b) B gana $= B$
        B gana si y solo si hay $3n+1$ 0's precedidos de él (un `1`), ósea $\underbrace{0 \cdots 0}_{3n+1}1$ con $n \in \mathbb{N}$.
     c) $(A \cup B)^c$
        Este evento significa que C ganó o nadie ganó. Para definir el evento en el que C ganó sería análogo a los incisos anteriores, ósea $\underbrace{0 \cdots 0}_{3n+2}1$, y para definir que nadie ganó sería $000\cdots$.

3. Si al jugar **Poker** asumimos que las $\binom{52}{2}$ manos son igualmente probables. ¿Cuál es la probabilidad de que nos hayan repartido:

   - una Flor? **Decimos que una mano de poker es una flor si las 5 cartas de la mano son del mismo palo**
     Solución: $4\binom{13}{5}/\binom{52}{5}$.
   - un Par?
     Solución: $13\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}/\binom{52}{5}$.
   - dos Pares?
     Solución: $\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}/\binom{52}{5}$
   - una Tercia?
     Solución: $13\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}/\binom{52}{5}$

- un Poker? **Tenemos un Poker cuando la mano que nos tocaron contiene 4 cartas con la misma denominación y de diferente palo**
  Solución: $13\binom{4}{4}\binom{48}{1}/\binom{52}{5}$

4. Los coeficientes de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c$ están determinados al lanzar un par de dados, el resultado del primer dado determina el valor de b y el del segundo dado el valor de c. Obtén la probabilidad de que la ecuación tenga soluciones reales.

   Solución: Como cada dado en cada una de sus caras tiene valores del 1 al 6, y el valor de b está determinado por el valor del dado y lo mismo para c, entonces se tiene que $|\Omega| = 36$. Por otro lado, la ecuación tiene raíces reales si y solo si $b^2 - 4c \geq 0$, entonces los valores (b, c) que satisfacen esa condición son

   $$(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1)(5,2),(5,3),(5,4),$$
   $$(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$$

   siendo 19 parejas. Ergo la probabilidad es $\frac{19}{36}$.

5. Dos números m y n son llamados "primos relativos" si el 1 es el único divisor común positivo entre ambos. Así por ejemplo el 8 y el 5 son primos relativos, mientras el 8 y 6 no lo son. Si un nuúmero es seleccionado al azar del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 63\}$. Obtén la probabilidad de que este número sea primo relativo con el 63.

   Solución: Los unicos divisores primos de 63 son 3 y 7. Entonces, el numero seleccionado es primero relativo a 63 si y solo si no es divisible por 3 o 7.

   Sean los eventos.

   A:El resultado es divisible entre 3.

   B:El resultado es divisible entre 7.

   AB:El resultado es divisible entre 3 y 7.

   Entonces, A=$\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63\} = 21 numeros$

   B=$\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63\} = 9 numeros$

   y AB =$\{21, 42, 63\} = 3 numeros$

   Por lo tanto, $P(A) = 21/63$, $P(B) = 9/63$ y $P(AB) = 3/63$.

   Para encontrar la probabilidad de que un numero es primo relativo a 63, tenemos que encontrar la probabilidad que un numero no es disible por 3 esto es $P(AB)^c$

   En general, $P(A^cB^c) = P(AUB)$

   Como

   $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(AB)$

   Entonces

   $P(A^cB^c) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

   Sustituyendo

   $P(A) = 21/63, P(B) = 9/63 y P(AB) = 2/63 en P(A^cB^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

   Obtenemos

   $P(A^cB^c) = 1 - 21/63 - 9/63 + 3/63 = 63 - 21 - 9 + 3/63 = 36/63 = 4/7$

   Por lo tanto:

   La probababilidad de que el numero sea primo relativo a 63 es 11/7.

6. Una clase de Biología tiene 33 alumnos inscritos. Si 17 de ellos sacaron 10's en el primer examen parcial y 14 de ellos sacaron 10's en el segundo examen parcial mientras 11 alumnos no obtuvieron un 10's en ninguno de estos dos exámenes. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta clase haya sacado 10's en ambos exámenes?

   Solución: TODO

7. Una terapeuta acomodara al azar a 5 matrimonios sobre una fila para realizar una actividad. Obtén la probabilidad de que no haya algun esposo sentado junto a su mujer sobre la fila.

   Solución: Hay $\binom{10}{5}$ resultados. Podemos pensar en un experimento de 6 fases, en la prier fase, 5 personas de las 5 parejas son seleccionadas, en los 5 que faltan, 1 de los 2 miembros son seleccionados.

   Por lo tanto

   Hay $\binom{5}{5}2^5$ posibles resultados en el cual los 5 miembros seleccionados no estan relacionados.Obteniendo la probabilidad de: $P(N) = \binom{5}{5}2^5/\binom{10}{5}$

8. Cinco personas A, B, C, D, E serán acomodados en una fila de sillas para hacer una actividad conjunta. Asume que cualquier acomodo de los personas es igualmente probable. ¿Cuál es la probabilidad de que:

   (Solución con orden)

   - haya exactamente una persona entre A y B?

     Solución: Si fijamos a A, hay 3 posiciones puede ser acomodada y el lugar de B es el $i+2$. Y las otras personas C, D, E pueden ser acomodadas en 3! maneras distintas. Análogamente cuando primero sea B y luego A (razón por la cual se multiplica por 2). Como hay 5! posibles acomodos. Ergo la probabilidad de que haya exactamente una persona entre A y B es $\frac{2\cdot3\cdot3!}{5!} = \frac{3}{10}$.
   - hayan exactamente dos personas entre A y B?

     Solución: Análogo al inciso anterior, hay 2 posiciónes para seleccionar a A (sin perdida de generalidad) y C, D, E pueden ser acomodadas en 3! maneras distintas. Por tanto hay $2\cdot2\cdot3!$ acomodos posibles de la maneras que se nos pide. Como hay 5! posibles acomodos, ergo la probabiliad de que hayan exactamente dos personas entre A y B es $\frac{2\cdot2\cdot3!}{5!} = \frac{1}{5}$.
   - hayan exactamente tres personas entre A y B?

     Solución: Con la misma idea de los incisos anteriores, entonces se tiene que es $\frac{2\cdot1\cdot3!}{5!} = \frac{1}{10}$.

9. Una mujer tiene n llaves de as cuales solo una abre la puerta de su casa.

   - Si ella elige las llaves al azar y va descartando una a una las que no funcionan.¿Cuál sera la probabilidad de que ella abra la puerta en el k-enesimo intento? **Solución:** La probabilidad es 1/n.
   - Obten la probabilidad anterior si ella no descarta ninguna llave al intentar abrir la puerta **Solución:** $(n-1)^k - 1/n^k$

10. Michelle juega al Blackjack en un casino. El "dealer" le reparte 2 cartas de la baraja. ¿Cuál es la probabilidad de que ella gane en el primer intento?. Esto es que ella haya recibido un A's y algún 10's, J, Q, K de cualquier palo?

    Solución: El número de escoger un A's es $\binom{4}{1}$, y el número de escoger un 10's, J, Q, K de cualquier palo $\binom{16}{1}$ (esto es porque hay 4 de cada uno, que son espadas, corazones, rombos y tréboles). Por otro lado hay $\binom{52}{2}$ formas de tomar dos cartas de la baraja. Ergo la probabiliad es:

    $$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{16}{1}}{\binom{52}{2}} \approx 0{,}04826$$

11. Para cualquier sucesión de eventos $E_1, E_2, \ldots$ prueba que es posible definir una nueva sucesión de eventos $F_1, F_2, \ldots$ "disjunto" (Esto es que $F_iF_j = \emptyset$ si $i \neq$ j) tal que:

    $$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

    Solución:

Demostración. Se construirá F progresivamente, la idea intuitiva será construir a F_i como una unión disjunta, *exempli gratia*, con $n = 1$ $F_1 = E_1$, con $n = 2$ el evento $E_1 \cup E_2$ puede ser particionado en eventos E_1 y $E_1^1 \cap E_2$, y $F_2 = E_2 \cap E_1^c = E_2 \setminus E_1$. Así viendo ese patrón, generalizándolo queda como:

$$\begin{aligned} F_1 &= E_1 \\ F_2 &= E_2 \setminus E_1 \\ F_3 &= E_3 \setminus (E_1 \cup E_2) \\ &\vdots \\ F_n &= E_n \setminus (\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j) \end{aligned}$$

□

12. Sean P_1 y P_2 dos funciones de probabilidad definidas en Ω. Si Definimos una nueva función P dada por:

$$P(A) = \frac{P_1(A) + P_2(A)}{2} \quad \text{si} \quad A \in \Omega$$

Demuestra que P es una función de probabilidad sobre Ω.

Demostración. TODO □

13. Sea P una función de probabilidad en $\Omega = \{A, B\}$, tal que: $P(A) = p$ y $P(B) = 1 - p$ donde $0 \leq p \leq 1$. Definimos $\mathbb{Q}$ otra función en Ω:

$$\mathbb{Q}(\omega) = [P(\omega)]^2 \quad \text{si} \quad \omega \in \Omega$$

¿Para qué valores de p la función $\mathbb{Q}$ es una probabilidad?

Solución: TODO

14. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_k$ funciones de probabilidad en Ω. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ una sucesión de números. ¿Qué condiciones deben de satisfacer las $a_i's$ para que: $\sum_{i=1}^{k} a_i P_i$ sea una función de probabilidad?

15. Sean $A, B, C \in S$ eventos. Prueba que:

La probabilidad de que exactamente dos de estos eventos ocurra es:

$$P(AB) + P(AC) + P(BC) - 3P(ABC)$$

16. Prueba que $P(A_i) = 1$ para toda $i \geq 1$ entonces $P(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i) = 1$.

Hint: Usa la Desigualdad de Boole

Solución:

Demostración. Recordando la desigualdad de Boole que es:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$
\begin{aligned}
P(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i) &= 1 - (P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c) && \text{(Def. complemento)}\\
&= 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c) && \text{(De Morgan)}\\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^c) && \text{(Desigualdad de Boole)}\\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty}(1 - P(A_i)) && \text{(Def. complemento)}\\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty}(1 - 1) && \text{(Por hipótesis)}\\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} 0 && \text{(Aritmética)}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

$\square$

17. Sean $E, F \in S$ dos eventos. Decimos que: $E \sim$F si $P(A \triangle B) = 0$. Prueba que $(\sim)$ es de equivalencia.

18. Prueba el principio de inclusión-exclusión.

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \quad (\heartsuit)$$

Hint: Ver libro [DeGroot]-pp 48

Solución: (Por inducción)

Demostración. Caso base:

- Para $n = 1$. Trivial.
- Para $n = 2$.

  Para esta prueba se utilizara el teorema que dice lo siguiente: Para cualesquiera dos eventos A y B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \quad (*)$$

Demostración. **Partición de un conjunto:** Para cualesquiera dos conjuntos A y B, $A \cap B$ y $A \cap B^c$ son conjuntos disjuntos y $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$. En adición, B y $A \cap B^c$ son disjuntos y $A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$. Sabiendo eso, se tiene:

$$A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$$

Como los dos eventos de la derecha son dusjuntos, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(B) - P(A \cap B^c) && (1)\\
&= P(B) - P(A) - P(A \cap B) && (2)
\end{aligned}
$$

Pero en (1) se sustiyuye $P(A \cap B^c)$ por $P(A) - P(A \cap B)$ en (2)porque hay un teorema que dice que sean dos eventos A y B se cumple que:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$\square$

Teniendo la igualdad del teorema previo demostrado, se tiene que $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$.

Hipótesis de inducción: Existe m tal que es verdadero para toda $n \leq m$.

Paso inductivo: Para $n = m+1$.

Sean $A_1, \ldots, A_{m+1}$ eventos. Definimos $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ y $B = A_{m+1}$ y usando el teorema previo $(*)$, podemos decir que:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) \tag{3}$$

Se ha asumido que $P(A)$ es igual a $(\heartsuit)$ con $n = m$. Se necesita mostrar que cuando sumamos $P(A)$ a $P(B) - P(A\cap B)$ se obtiene $(\heartsuit)$ con $n = m+1$. La diferencia entre $(\heartsuit)$ con $n = m+1$ y $P(A)$ son todos los términos en que cada uno de los índices $(i, j, k, \ldots)$ son iguales a $m+1$. Esos términos son los siguientes

$$P(A_{m+1}) - \sum_{i=1}^{m} P(A_i \cap A_{m+1}) + \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j \cap A_{m+1}) + \ldots + (-1)^{m+2} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{m+1}) \tag{4}$$

El primer término en (4) es $P(B) = P(A_{m+1})$. Todo lo que queda es mostrar que $-P(A\cup B)$ es igual a todos, pero el primer término en (4).

Usando la generalización de la propiedad distributiva, para escribir que:

$$A\cap B = (\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \cap A_{m+1} = \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \cap A_{m+1}) \tag{5}$$

La unión en (5) contiene m eventos, y por tanto podemos aplicar $(\heartsuit)$ con $n = m$ y cada A_i reemplazada por $A_i \cap A_{m+1}$. El resultado es que $-P(A\cap B)$ es igual a todos, excepto el primer término en (4). $\square$

19. Leer y desarrollar el problema "(6a)- **Probabilidad y una Paradoja" [Ross-8th. Ed]- pp 46-48**

20. Dado un conjunto S. Si para alguna $k \geq 1$. Se tiene que $S_1, S_2, \ldots, S_k$ son subconjuntos mutuamente excluyetes de S de S talque $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = S$ entonces decimos que la clase $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ es una **Partición** de S. Sea T_n el número de diferentes particiones de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Así por ejemplo tenemos que $T_1 = 1$ (La única partición posible es $S_1 = \{1\}$ y $T_2 = 2$ (Las dos particiones posibles de un conjunto de dos elementos son $\{\{1,2\}, \{\{1\},\{2\}\}\}$).

    - Exhibe las particiones y muestra que $T_3 = 5$, $T_4 = 15$.
    - Demuestra que
    $$T_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T_k$$
    Usar este resultado para culcular T_{10}

      A esta serie de números $T_i's$ se les conoces como **Números de Bell**.
    - Exhibe las primeras 5 filas del **Triángulo de Bell**.
    - Realiza una breve semblanza de dos de los mas grandes matemáticos del Siglo XX. **Srinivasa Ramanujuan** y **Eric Bell**.