Álgebra Lineal I

Tarea 02

Profesor: Rivera Torres Francisco de Jesús
Ayudante: Samayoa Donado Víctor Augusto
Ayudante: Vargas Martínez Mario Raúl

Marzo 18, 2020

1. Dar un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $N(T) = R(T)$.

2. Dar un ejemplo de dos transformaciones lineales diferentes T y U tales que $N(T) = N(U)$ y $R(T) = R(U)$.

3. Sea W un subespacio de un espacio vectorial dimensionalemnte finito V. Demostrar que existe una proyección sobre W.

4. Sean V y W espacios vectoriales dimensionalmente finitos y $T : V \longrightarrow W$ lineal.

   (a) Demostrar que si $\dim(V) < \dim(W)$, entonces T no puede ser suprayectiva.

   (b) Demostrar que si $\dim(V) > \dim(W)$, entonces T no puede ser inyectiva.

5. Sea V un espacio vectorial $n-$dimensional con una base ordenada β. Definiendo a $T : V \longrightarrow K^n$ mediante $T(x) = [x]_\beta$ demostrar que T es lineal.

6. Sea g(x) = 3 + x. Defínase

   $$\begin{array}{ll} T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) & U : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(f(x)) = f'(x)g(x) + 2f(x) & U(a + bx + cx^2) = (a + b, c, a - b) \end{array}$$

   Sean $\beta = \{1, x, x^2\}$, y $\gamma = \{e_1, e_2, e_3\}$ bases ordenadas de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

   (a) Calcular directamente $[U]_\beta^\gamma$, $[T]_\beta$ y $[UT]_\beta^\gamma$. Luego utilizar el Teorema visto en clase para verificar el resultado.

(b) Sea $h(x) = 3 - 2x + x^2$. Calcular $[h]_\beta$ y $[U(h)]_\beta^\gamma$. Luego, emplear $[U]_\beta^\gamma$ y utilizar el Teorema para verificar el resultado.

7. Sea A una matriz de $m \times n$. Demostrar que A es una matriz diagonal si y sólo si $A_{ij} = \delta_{ij} A_{ii}$ para toda i y toda j.

8. Sea V un espacio vectorial y sea $T : V \longrightarrow V$ lineal. Dempstrar que $T^2 = T_0$ si y sólo si $R(T) \subseteq N(T)$. Donde $T_0(x) = 0$ para todo $x \in V$.

9. Sean V, W y Z espacios vectoriales, y sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ lineales.

   (a) Si UT es inyectiva, demostrar que T es inyectiva. ¿Es U inyectiva?

   (b) Si UT es suprayectiva, demostrar que U es suprayectiva. ¿Es T suprayectiva?

   (c) Si U y T son biyectivas, demostrar que UT es biyectiva.

10. Sean V y W espacios vectoriales dimensionalmente finitos y sea $T : V \longrightarrow W$ lineal. Supóngase que $\dim(V) = \dim(W)$. Encontrar bases ordenadas β y γ para V y W, respectivamente, tales que $[T]_\beta^\gamma$ sea una matriz diagonal.

11. Sea V un espacio vectorial dimensionalmente finito y sea $T : V \longrightarrow V$ lineal.

    (a) Si $\text{rango}(T) = \text{rango}(T^2)$, demostrar que $R(T) \cap N(T) = 0$. Deducir que $V = R(T) \bigoplus N(T)$.

    (b) Demostrar que existe un entero positivo k tal que $V = R(T^k) \bigoplus N(T^k)$.

12. Sean A y B matrices invertibles de $n \times n$. Demostrar que AB es invertible y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

13. Sea A invertible. Demostrar que A^t es invertible y $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.

14. Demostrar que si A es invertible y $AB = 0$, entonces $B = 0$. Donde 0 representa la matriz cero.

15. Si $A^2 = 0$, demostrar que A no puede ser invertible.