# Álgebra Lineal I

Tarea 01

*Profesor: Rivera Torres Francisco de Jesús*
*Ayudante: Samayoa Donado Víctor Augusto*

*Febrero 01, 2020*

1. ¿Es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones acerca de cualquier espacio vectorial $V$? Justifica tu respuesta.

   (a) Si para algún vector $x \in V$ se cumple que $ax = bx$, entonces se tiene que $a = b$.

   (b) Si para todo escalar $a$ se cumple que $ax = ay$ con $x, y \in V$, entonces $x = y$.

2. Sea $V$ un espacio vectorial sobre un campo $K$. Demuestre que:

   (a) El neutro aditivo en $V$ es único.

   (b) Para cada vector $x \in V$ su invierso aditivo es único.

3. Sean $V$ un espacio vectorial, $x, y \in V$ y $a, b \in K$. Demuestre que $(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$.

4. Demuestre que el conjunto de las funciones pares en $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

   junto con la suma de funciones y el producto por escalar usuales forman un espacio vectorial.

   ¿Qué se puede decir del conjunto de las funciones impares, forman o no un espacio vectorial? Justifique su respuesta.

5. Considere el espacio vectorial $\mathscr{F}(S, \mathbb{R})$ y $f, g, h \in \mathscr{F}(S, \mathbb{R})$ definidos como $f(s) = 2s + 1, g(s) = 1 + 4s - 2s^2$ y $h(t) = 5^t + 1$.

   (a) Demuestre que las tres funciones son diferentes cuando $S = \mathbb{R}$.

   (b) Demuestre que $f = g$ y $f + g = h$ cuando $S = \{0, 1\}$

6. Demuestre o de un contraejemplo para las siguinetes afirmaciones:

(a) La intersección de dos subespacioes vectoriales es un subespacio vectorial

(b) La suma de dos subespacios vectoriales forma un subespacio vectorial.

(c) La suma de dos subconjuntos de un espacio vectorial siempre es un subespacio vectorial

(d) El conjunto $\{f \in \mathscr{E} | f(1) = 1\}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{E}$.

7. ¿Es posible expresar al vector $(5, 1, -5)$ como combinación lineal de elementos en $S = \{(1, -2, -3), (-2, 3, -4)\}$.

8. ¿Es el vector $6x^3 - 3x^2 + x + 2$ una combinación lineal de los vectores $x^3 - x^2 + 2x + 3$ y $2x^3 - 3x + 3$. (Recuerde que los polinomios $\mathbb{P}[x]$ forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y producto por un escalar usuales).

9. Considera el espacio vectorial de las matrices simétricas de $2 \times 2$. Exhiba una base para este espacio vectorial y justifique su respuesta.

10. Sean $V$ un espacio vectorial y $S, T \subset V$ tales que $S \subseteq T$. Si $S$ es linealmente independiente ¿es $T$ linealmente independiente?

11. Sean $V$ un espacio vectorial y $S, T \subset V$ tales que $S \subseteq T$. Si $T$ es linealmente dependiente ¿es $S$ linealmente dependiente?

12. Sean $V$ un espacio vectorial y $x, y \in V$. Demuestre que el conjunto $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si uno es múltiplo del otro.

13. Considere espacios vectoriales $V$ y $W$ sobre un campo $K$ y una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$. Demuestre que:

    (a) $T(0_v) = 0_w$.

    (b) $T$ es una transformación lineal si y sólo si $T(ax + y) = aT(x) + T(y)$ para cualesquiera $x, y \in V$ y $a \in K$.

    (c) Para cualesquiera $x, y \in V$ se cumple que $T(x-y) = T(x) - T(y)$.

    (d) $T$ es una transformación lineal si y sólo si $T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$, para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in V$ y $a_1, \ldots, a_n \in K$.