Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra Lineal I

Tarea-Examen 2

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

4 de Mayo 2020

1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrando/justificando sus afirmaciones. Para lo siguiente, V y W son espacios vectoriales con bases ordenadas finitas α y β, respectivamente, y $T : V \to W$ será lineal. A es una matriz.

   (a) $\left([T]_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{\alpha}^{\beta}$
   Falso. De hecho hay un teorema que dice lo siguiente,

   Teorema. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas β y γ respectivamente. Sea $T : V \to W$ lineal. Entonces T es invertible si y solo si $[T]_{\beta}^{\gamma}$ es invertible. Además $[T^{-1}]_{\gamma}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\gamma}\right)^{-1}$.*

   (b) T es invertible si y sólo si T es inyectiva y suprayectiva.
   Verdadero.

   Demostración. Una función es invertible si y solo si es inyectiva y suprayectiva. Una transformación lineal es una función, y es por eso que es invertible si y solo si es invertible y suprayectiva. ☐

   (c) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
   Verdadero. [1]

   Demostración. Supongamos que A es una matriz de invertible de $n \times n$. Entonces $A^{-1}B = BA^{-1}$, donde $B = A$. De este modo, por definición de *invertibilidad*, la matriz B es la inversa de A^{-1}, es decir, $\left(A^{-1}\right)^{-1} = B = A$. ☐

   (d) A es invertible si y sólo si L_A es invertible.
   Verdadero. De hecho sale de un corolario que dice lo siguiente

   Corolario. *A es invertible si y sólo si L_A es invertible. Además, $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$.*

   Demostración. Sean α y β bases ordenadas de V y W respectivamente, entonces $[L_A]_{\alpha}^{\beta}$. También se tiene que

   $$[L_A^{-1}]_{\beta}^{\alpha} = \left([L_A]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1} = A^{-1} = [L_{A^{-1}}]_{\beta}^{\alpha}$$

   y de ahí que $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$. ☐

   (e) A debe ser cuadrada para poder tener una inversa.
   Verdadero. Se sigue de de la definición,

   Definición. *Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si existe una matríz B de $n \times n$ tal que $AB = BA = I$.*
   *Si A es invertible, entonces la matriz B tal que $AB = BA = I$ es única. La matriz B es llamada la **inversa** de A y es denotada como A^{-1}.*

[1] Hace falta la observación de que A sea invertible.

2. Sean A y B matrices invertibles de $n \times n$. Demostrar que AB es invertible y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   Demostración. Como hay a los más una inversa de AB, todo lo que debemos desmotrar es que $B^{-1}A^{-1}$ tiene la propiedad requerida de ser inversa de AB, nombrémosla,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

   Pero esto se sigue por la asociatividad de la multiplicación de matrices y por el hecho de que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ y $BB^{-1} = B^{-1}B = I$. □

Definición. *Sean V y W espacios vectoriales. Decimos que V es **isomorfo** a W si existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que es invertible. A dicha transformación lineal se le conoce como **isomorfismo** de V en W.*

3. Sean V y W espacios vectoriales dimensionalmente finitos y sea $T : V \to W$ un isomorfismo. Sea V_0 un subespacio de V:

   (a) Demuestre que $T(V_0)$ es un subespacio de W.

   Demostración. El vector cero está en $T(V_0)$ porque $T(0) = 0$. Ahora tomemos $x, y \in T(V_0)$, entonces $x = T(x')$, $y = T(y')$ para $x', y' \in V_0$, pero notemos que $T(x' + y') = T(x') + T(y') = x + y$. Por tanto, $x + y \in T(V_0)$ ya que $x' + y' \in V_0$. Se sigue los mismo con la multiplicación por escalar, si $c \in F$ y $x \in T(V_0)$, entonces $cx = c(T(x')) = T(cx')$ para algún $x' \in V_0$. Por tanto $cx \in T(v_0)$. □

   (b) Demuestre que $\dim(V_0) = \dim(T(V_0))$.

   Demostración. Restrinjamos T al subespacio V_0. Llamemos a esta restricción $T_{V_0} : V_0 \to T(V_0)$. Entonces por definición T_{V_0} es suprayectiva y también inyectiva, ya que $N(T) = \{0\}$. Entonces T_{V_0} sigue siendo un isomorfismo y por el teorema[2] se sigue que $\dim(V_0) = \dim(T(V_0))$. □

Definición. *Sea β una base ordenada de un espacio vectorial n-dimensional V sobre un campo F. La **representación estandar de** V **respecto a** β se define como la función $\phi_\beta : V \to F^n$ dada por $\phi_\beta(x) = [x]_\beta$, para cada $x \in V$.*

4. Demuestre que para cualquier espacio vectorial dimensionalmente finito V con base ordenada β, ϕ_β es un isomorfismo.

   Demostración. Para mostrar que ϕ_β es una isomorfismo debemos demostrar que ϕ_β es lineal, inyectiva y suprayectiva. Supongamos que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ se una base ordenada para V. Tomemos $x, y \in V$ tal que $x = a_1v_1, a_2v_2, \ldots, a_nv_n$ y $y = b_1v_1, b_2v_2, \ldots, b_nv_n$. Consideremos la función $\phi_\beta : V \to V$ definida como

$$\phi_\beta(x) = \phi_\beta(a_1v_1, a_2v_2, \ldots, a_nv_n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

   Entonces ϕ_β es lineal si $\phi_\beta(cx + y) = c\phi_\beta(x) + \phi_\beta(y)$. Se tiene que,

$$\begin{aligned}
\phi_\beta(cx + y) &= \phi_\beta(c(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n) + (b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n)) \\
&= \phi_\beta(ca_1v_1 + ca_2v_2 + \ldots + ca_nv_n + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n) \\
&= \phi_\beta((ca_1 + b_1)v_1 + (ca_2 + b_2)v_2 + \ldots + (ca_n + b_n)v_n) \\
&= \begin{bmatrix} ca_1 + b_1 \\ ca_1 + b_1 \\ \vdots \\ ca_n + b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\
&= c\phi_\beta(x) + \phi_\beta(y)
\end{aligned}$$

[2] Sean V y W espacios vectoriales dimensionalmente finitos (sobre el mismo campo). Entonces V es isomorfo a W si y solo si $\dim(V) = \dim(W)$.

Ahora para probar que ϕ_β es inyectiva si y solo si $N(\phi_\beta) = 0$. Tomemos $x \in N(\phi_\beta)$ tal que $x = \sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$. Pero se tiene que

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = 0$$

lo cual implica que $a_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Y así $N(\phi_\beta) = 0$, entonces ϕ_β es inyectiva. Pero por un teorema[3] tenemos que T es inyectiva si y solo si T es suprayectiva. $\square$

5. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de un espacio n-dimensional V a un espacio m-dimensional W. Sean β y γ bases ordenadas de V y W, respectivamente. Y sea $A = [T]_\beta^\gamma$. Demuestre que:

   (a) $\text{rank}(T) = \text{rank}(L_A)$.

   Demostración. Consideremos $\phi_\beta : V \to F^n$ la transformación lineal definida como $\phi_\beta(v) = [v]_\beta$ y $\phi_\gamma : V \to F^m$ la transformaciónl lineal definida como $\phi_\gamma(w) = [w]_\gamma$. Estas transformaciones son isomorfismos entre sus respectivos espacios.

   Por demostrar que $\phi_\beta(N(T)) = N(L_A)$,

   ($\subseteq$) Sea $x \in \phi_\beta(N(T))$. Como ϕ_β es isomorfa entre V y F^n existe un único $v \in N(T)$ tal que $\phi_\beta(v) = [v]_\beta = x$. Ahora como $v \in N(T)$, $T(v) = 0_W$. Se tiene que $0_{F^m} = [0_W]_\gamma = [T(v)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [v]_\beta = Ax$. Por tanto $x \in N(L_A)$.

   ($\supseteq$) Sea $x \in N(L_A)$. Sea $v \in V$ sea el único vector tal que $\phi_\beta(v) = [v]\beta = x$. Entonces se tiene que $0_{F^m} = Ax = [T]_\beta^\gamma [v]_\beta = [T(v)]_\gamma = \phi_\gamma(T(v))$. Como ϕ_γ es un isomorfismo, $T(v) = 0_W$. Por tanto $v \in N(T)$, lo que implica que $x \in \phi_\beta(N(T))$.

   $\square$

   (b) $\text{nulidad}(T) = \text{nulidad}(L_A)$.

   Demostración. Usando la demostración de (3.a) se sigue que,

   $$\text{nulidad}(T) = \dim(N(T)) = \dim(\phi_\beta(N(T))) = \dim(N(L_A)) = \text{nulidad}(L_A)$$

   Aplicando el teorema de la dimensión

   $$n = \dim(V) = \text{nulidad}(T) + \text{rank}(T)$$

   $$n = \dim(F^n) = \text{nulidad}(L_A) + \text{rank}(L_A)$$

   Por tanto, $\text{nulidad}(T) = \text{nulidad}(L_A)$. $\square$

[3] Sean V y W espacios vectoriales de la misma dimensión (finita), y sea $T : V \to W$ lineal. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

- T es inyectiva.
- T es suprayectiva.
- $\text{rank}(T) = \dim(T)$.