Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra Lineal I

Tarea-Examen 4

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

18 de junio de 2020

1. Sea V el espacio vectorial generado por $S = \{\sin(t), \cos(t), 1, t\}$ con el producto interior definido por:

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$$

Usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt[1] construya una base ortonormal.

Solución. *Tomemos la base $\beta = S$. Lo que sea es usar el procesos de ortogonalización de Gram-Schmidt para remplazar a β por una base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ para V, y seguido usar esa base ortogonal para construir la base ortonormal.*

- *Tomemos $v_1 = \sin(t)$. Entonces $\|v_1\|^2 = \frac{\pi}{2}$, y $\langle \cos(t), v_1\rangle = \displaystyle\int_0^\pi \cos(t)\sin(t)dt = 0$.*
- *De ahí que,*

$$v_2 = \cos(t) - \frac{\langle v_1, \cos(t)\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 = \cos(t)$$

Entonces $\|v_2\|^2 = \frac{\pi}{2}$.

- *Se sigue que,*

$$v_3 = 1 - \frac{\langle v_1, 1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{\langle v_2, 1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 = 1 - \frac{4\sin(t)}{\pi}$$

Donde

$$\langle v_1, 1\rangle = \int_0^\pi \sin(t)dt = 2, \quad \langle v_2, 1\rangle = \int_0^\pi \cos(t)dt = 0$$

Entonces $\|v_3\|^2 = \pi - \frac{8}{\pi}$.

- *Por consiguiente,*

$$v_4 = t - \frac{\langle v_1, t\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{\langle v_2, t\rangle}{\|v_2\|^2}v_2 - \frac{\langle v_3, t\rangle}{\|v_3\|^2}v_3 = t + \frac{4\cos(t)}{\pi} - \frac{\pi}{2}$$

Donde

$$\langle v_1, t\rangle = \int_0^\pi \sin(t)dt = 2, \quad \langle v_2, t\rangle = \int_0^\pi \cos(t)dt = 0, \quad \langle v_3, t\rangle = \int_0^\pi \cos(t)dt = 0$$

Entonces $\|v_4\|^2 = \frac{\pi^4 - 96}{12\pi}$.

[1] **Teorema 6.4.** *Sea V un espacio de producto interno y $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ un subconjunto linealmente independiente de V. Definimos $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, donde $v_1 = w_1$ y*

$$v_k = w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_k, v_j\rangle}{\|v_j\|}v_j \quad \textit{para } 2 \le k \le n$$

Entonces S' es un conjunto ortogonal de vectores no ceros tales que $\operatorname{span}(S') = \operatorname{span}(S)$.

Concluyendo así que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *es una base ortogonal para* V.

Para obtener una base ortonormal, normalizamos v_1, v_2, v_3 *y* v_4 *para obtenerl*[2]

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{\sin(t)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(t)$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\cos(t)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(t)$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1 - \frac{4\sin(t)}{\pi}}{\sqrt{\pi - \frac{8}{\pi}}} = \frac{\pi - 4\sin(t)}{\sqrt{\pi(\pi^2 - 8)}}$$

$$u_4 = \frac{v_4}{\|v_4\|} = \frac{t + \frac{4\cos(t)}{\pi} - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi^4 - 96}{12\pi}}} = \sqrt{\frac{3}{\pi(\pi^4 - 96)}}(\pi(2t - \pi) + 8\cos(t))$$

Teniendo así $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *la base ortonormal deseada para* V.

2. Sea V un espacio con producto interior y sea T un operador lineal sobre V. Demuestre que:

   (a) $R(T^*)^{\perp} = N(T)$

   Demostración.

   ($\subseteq$) Sea $x \in R(T^*)^{\perp}$. Para cualquier $y \in V$, se tiene que $0 = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle$. Así $T(x) = 0$. Por tanto $x \in N(T)$.

   ($\supseteq$) Sea $x \in N(T)$. Para cualquier $y \in V$, se tiene que $0 = \langle 0, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. Por tanto $x \in R(T^*)^{\perp}$.

   □

   (b) Si V es dimensionalmente finito, entonces $R(T^*) = N(T)^{\perp}$.

   Demostración.

   ($\subseteq$) Sea $x \in N(T)$, entonces hay un $y \in W$ y $z \in W^{\perp}$ tales que $x = y + z$. De ahí que $0 = T(x) = y$, entonces $x = x \in W^{\perp}$.

   ($\supseteq$) Sea $x \in W^{\perp}$, de ahí que $T(x) = 0$, entonces $x \in N(T)$.

   □

3. Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante $T(f(x)) = f(x) + xf'(x)$. Encontrar todos los valores propios de T y encontrar una base β para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal.

   Solución. *Sea* T *el operador lineal en* $\mathbb{P}_2$ *y sea* β *la base ordenada para* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$*, sea* $A = [T]_\beta$*. Entonces*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Donde el polinomio característico de T *es*

$$\begin{aligned} \det(A - tI_3) &= \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} \\ &= -t^3 + 6t^2 - 11t + 6 \\ &= -(t-1)(t-2)(t-3) \end{aligned}$$

   Teniendo así que λ *es un valor propio de* T *(o* A*) si y solo si* $\lambda = 1, 2, 3$.

   Considermeos cada valor propio de forma separado

[2] Me apoye con la herramienta `https://www.wolframalpha.com/` para las operaciones.

- *Sea* $\lambda_1 = 1$ *y definamos*
$$B_1 = A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Teniendo que el vector propio de A *correpondiente a* $\lambda_1 = 1$ *es de la forma* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

- *Sea* $\lambda_2 = 2$ *y definamos*
$$B_2 = A - \lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Teniendo que el vector propio de A *correpondiente a* $\lambda_2 = 2$ *es de la forma* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

- *Sea* $\lambda_3 = 3$ *y definamos*
$$B_3 = A - \lambda_3 I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Teniendo que el vector propio de A *correpondiente a* $\lambda_3 = 3$ *es de la forma* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Observémos que $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *es una base de* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *que consiste de vectores propio de* T. *Por tanto* T *es diagonalizable.*

Definición. *Una matriz escalar es una matriz cuadrada de la forma* λI *para algún escalar* λ*; o sea, una matriz escalar es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal son iguales.*

4. Considere una matriz A de $n \times n$. Demostrar lo siguiente:

(a) Si A es similar a una matriz escalar λI, entonces:
$$A = \lambda I$$
Demostración. Sea $A \in M_{n\times n}$ tal que $A = QSQ^{-1}$ para alguna matriz invertible Q y S matriz escalar, donde $S = \lambda I_3$ para algún $\lambda \in F$. Entonces
$$A = Q(\lambda I_3)Q^{-1} = \lambda QQ^{-1} I_3 = \lambda I_3$$
□

(b) Si A es una matriz diagonalizable que sólo tiene un valor propio entonces es una matriz escalar.

Demostración. Sea $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ una matriz diagonal. El polinomio característico de D es
$$\det(D - \lambda I_3) = (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)\cdots(a_n - \lambda)$$
Pero como por hipótesis solo tiene un valor propio, llamémosle a se tiene que
$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} = aI_3$$
Por tanto D es una matriz escalar. □

(c) Concluir que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable.

Solución. *Tomando su polinomio característico $(1-\lambda)(1-\lambda)$, se sigue que solo tiene un valor propio. Pero si fuera diagonalizable, tendría que ser la matriz escalar, pero cláramente no lo es. Por tanto no es diagonalizable.*

(d) Considere la matriz A en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

justificar si A es diagonalizable o no y, en caso de serlo, encontrar una matriz Q, tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal.

Solución. *Calculando el polinomio característico*

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ 8 & -5-l\lambda & 0 \\ 6 & -6 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda+1)$$

Teniendo que sus vectores propios son $\lambda = -1, 3$.
Resolviendo el sistema de ecuaciones con cada vector propio de la forma $(A-\lambda I) = 0$ se llega a que los vectores propios de $\lambda = 3$ son $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. De igual manero con el valor propio $\lambda = 1$ se tiene el vector propio $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Obteniendo así, Q y A' tal que $A = QA'Q^{-1}$,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto A es diagonalizable.

5. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V dimensionalmente finito para el cual los distintos valores propios de T son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Demostrar que

$$L(\{x \in V \ : \ x \text{ es un eigenvector de } T\}) = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$$

Demostración. Tomemos a T_W como una restricción de T en W. Considermeos $W_{\lambda_i} = W \cap E_{\lambda_i}$. Para cada $w \in W$, notemos que w también está en V, así w puede ser expresadodo como combinación lineal de eigenvectores de diferentes eigenvectores.

$$w = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k \quad \text{donde } u_i \in E_{\lambda_i}$$

Así u_i está en W y E_{λ_i}, que es a su vez, $u_i \in W \cap E_{\lambda_i} = W_{\lambda_i}$. De ahí que W es una suma directa de W_{λ_i}. Teniendo así que $W_{\lambda_1} \oplus W_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_k}$. Pero para cada W_{λ_i} se puede encontrar una base β_{λ_i} para W_{λ_i}. Entonces $\cup_i \beta_{\lambda_i}$ es una base de eigenvectores de T_W. $\square$