Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra Lineal I

Tarea-Examen 3

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
`angelgladin@ciencias.unam.mx`

5 de junio de 2020

1. Considere matrices A, B y C de $n \times n$. Demuestre lo siguiente:

   (a) El $\det(A) = \det\left(A^T\right)$

   Demostración. Si A no es invertible, entonces $\operatorname{rank}(a) < n$. Pero $\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A)$, y así A^T no es invertible. Por tanto $\det(A^T) = \det(A)$ en este caso.
   Por otro lado, si A es invertible, entonces A es un producto de matrices elementales, digamos $A = E_m \cdots E_2 E_1$. Como $\det(E_i) = \det(E_i^T)$ para cada i, se tiene que.

$$
\begin{aligned}
\det(A^T) &= \det(E_1^T E_2^T \cdots E_M^T) \\
&= \det(E_1^T) \cdot \det(E_2^T) \cdots \det(E_m^T) \\
&= \det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdots \det(E_m) \\
&= \det(E_m) \cdot \det(E_2) \cdot \det(E_1) \\
&= \det(E_m \cdots E_2 E_1) \\
&= \det(A)
\end{aligned}
$$

□

   (b) Si C se obtuvo de A al cambiar el i-ésimo renglón (columna) por lo j-ésimo renglón (columna). Muestre que $\det(C) = -\det(A)$.

   Demostración. Sean los renglones de A de la forma $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y sea C la matriz obtenida de A de intercambiar los renglones r y s, donde $r < s$. Así

$$
A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
$$

   Consideremos la matriz obtenida de A de remplazar los renglones r y s por $a_r + a_s$.
   Se tiene que,

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= 0 + \det(A) + \det(C) + 0$$

Por tanto $\det(C) = -\det(A)$. □

(c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demostración. Si A no es invertible, entonces AB no es invertible, entonces se sigue cumpliendo la igualdad $0 = \det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$. Supongamos que A es invertible, entonces existen operaciones elementales de renglones $E_k, \dots, E_1$ tal que $A = E_k \cdots E_1$.
Entonces,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_k \cdots E_1 B) \\ &= \det(E_k)\det(E_{k-1} \cdots E_1 B) \\ &= \det(E_k) \cdots \det(E_1)\det(B) \\ &= \det(E_k \cdots E_1)\det(B) \\ &= \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

□

(d) Sea C una matriz obtenida a partir de A al multiplicar por $c \in F$ un renglón. Muestre que $\det(C) = c \cdot \det(A)$.

Demostración. TODO[1] □

2. Demuestre que un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene solución si y sólo si $b \in R(L_A)$.

Demostración.

($\Longrightarrow$) Sea $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ una matriz donde a_i es la i-ésima columna. Sea s una solución,

$$s = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sea $b = As = A_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_n s_n$, así $b \in R(L_A)$.

($\Longleftarrow$) Supongamos $b \in R(L_A)$, entonces existe $b = As$, donde s es una solución de $Ax = b$.

[1] No me dio tiempo porque tenía otras tareas.

$\square$

3. Calcule el rango y la inversa (en caso de que exista) de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución. *Por medio de operaciones elementales en los renglones veremos si podemos obtener su inversa. Observando que el renglón 1, 2 y 4 son combinación lineal del renglón 4. Verficándolo explícitamente,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando el hecho que el rango es igual al número máximo de renglones linealmente independientes, siendo este $\operatorname{rank}(A) = 3$*. Por tanto, la matriz* A *no tiene inversa.*

4. Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(f(x)) = f(x) + f'(x) + f''(x)$:

   (a) Usando el concepto del rango de una matriz demuestre que la transformación T es invertible.

   Solución. *Tomemos* β *la base estandar ordenada de* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$*. Teniendo así que:*

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x^2) &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 \end{aligned}$$

   De ahí que,

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Como las columnas son todos linealmente independientes se sigue que,

$$\operatorname{rank}([T]_\beta) = \dim\left(\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)\right) = 3$$

   Lo que implica que T *es invertible.*

   (b) Usando la matriz inversa obtenga la transformación inversa de T.

   Solución. *Se tratará por medio de operaciones elementales de renglones transformar* $([T]_\beta | I_3)$ *en una matriz de la forma* $(I_3 | [T]_\beta^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Se sigue que,

$$([T]_\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además se tiene que,

$$[T^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_0 - a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$T^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)x + a_2x^2$$

(c) Verifique que la transformación obtenida en el paso anterior es efectivamente la transformación inversa.

Solución. *Es invertible porque*

$$[T]_\beta([T]_\beta)^{-1} = ([T]_\beta)^{-1}[T]_\beta = I_3$$

5. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones encuentre la base y la dimensión del subespacio de soluciones para el sistema homogéneo y luego encuentre todas las soluciones para el sistema de ecuaciones no homogéneo:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 10 \end{aligned}$$

Solución. *Consideremos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales y sea A su forma de matriz,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Se observar fácilmente que sus renglones son linealmente dependiente porque el segundo renglón se puede expresar como combinación lineal del primero,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tendiendo así que $\text{rank}(A) = 1$.
Usando un teorema[2] *podemos concluir que el subespacio de soluciones K su* $\dim(K) = 2 - 1 = 1$.
Consideremos a $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *una solución del sistema de ecuaciones, siendo esta una base para K.*
De ahí que $K = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\}$ *son las soluciones para el sistem a de ecuaciones homogéneo.*

Para el sistema no homogéneo, consideromos a $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ *una solución particular pero por otro teorema*[3] *podemos concluir que el conjunto de soluciones es:*

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

[2] **Teorema 3.8** *Sea $Ax = 0$ sea un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre un campo F. Sea K que denota el conjunto de otdas las soluciones de $Ax = 0$. Entonces $K = N(L_A)$; de ahí que K es el subespacio de F^n de dimensión* $n - \text{rank}(L_A) = n - \text{rank}(A)$.

[3] **Teorema 3.9** *Sea K el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$*, y sea K_H una conjunto de solucinoes del sistema homogéneo correspondiente $Ax = 0$. Entonces cualquier solución s a $Ax = b$ es de la forma

$$K = \{s\} + K_H = \{s + k \,:\, k \in K_H\}.$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Solución. *Consideremos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales y sea A su forma de matriz,*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Se observar fácilmente que la segunda columna de la matriz es una combinación lineal de la tercera columna,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tendiendo así que $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Concluyendo así que $\dim(K) = 3 - 2 = 1$.

Consideremos a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *una solución del sistema de ecuaciones, siendo esta una base para K.*

De ahí que $K = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$ *son las soluciones para el sistem a de ecuaciones homogéneo.*

Para el sistema no homogéneo, consideromos a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *una solución particular.*

Podemos concluir que el conjunto de soluciones es:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$