Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra Lineal I

Tarea 1

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

5 de Marzo 2020

1. ¿Es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones acerca de cualquier espacio vectorial V? Justifica tu respuesta.

   (a) Si para algún vector $x \in V$ se cumple que $ax = bx$, entonces se tiene que $a = b$.
   Falso . Tomemos $x \in V$ donde $x = 0$ y $a, b \in F$ arbitrarios donde $a = 1$ y $b = 2$. Se tiene que $0 = 1 \cdot 0 = 2 \cdot 0 = 0$ pero $a \neq b$.

   (b) Si para todo escalar a se cumple que $ax = ay$ con $x, y \in V$, entonces $x = y$.
   Falso . Similar al inciso anterior. Tomando $a \in F$ tal que $a = 0$ y $x, y \in V$ tal que $x \neq y$, siempre se cumple que $ax = ay$ pero se tomaron x, y distintos, por lo tanto es falso.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Demuestre que:

   (a) El neutro aditivo en V es único.

   Demostración. Supongamos que hay dos vectores 0 y $0'$. Usando VS3[1] tenemos entonces que para cualquier vector x se tiene que $x+0 = x = x+0'$, pero ahora lo que tenemos que dementrar es que $0 = 0'$.

   Demostración. (La Ley de la cancelación para la suma de vectores)
   Si x, y y z son vectores en un espacio vectorial V tal que $x + z = y + z$, entonces $x = y$.
   Existe un vector $v \in V$ tal que $z + v = 0$ por VS4[2]. Por tanto

$$\begin{aligned} x &= x + 0 = x + (z + v) = (x + z) + v \\ &= (y + z) + v = y + (z + v) = y + 0 = y \end{aligned}$$

   □

   Entonces se puede concluir que $0 = 0'$, i.e., el netro aditivo es único. □

   (b) Para cada vector $x \in V$ su invierso aditivo es único.

   Demostración. Dado el vector $x \in V$ y sean $y, y' \in V$ tal que satisfacen VS4. Entonces $x + y = 0 = x + y'$, pero por el inciso anterior se demostró "La Ley de la cancelación para la suma de vectores", entonces "cancelando" a x se concluye que $y = y'$. □

[1] Existe un elemento en V denotado como 0 tal que $x + 0 = 0$ para cada $x \in V$.
[2] Para cada elemento $x \in V$ existe un elemento y tal que $x + y = 0$.

3. Sean V un espacio vectorial, $x, y \in V$ y $a, b \in K$. Demuestre que $(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by$.

   Demostración. Usando VS7[3] y VS8[4] se tiene que,

$$\begin{aligned}(a+b)(x+y) &= (a+b)x + (a+b)y && \text{Por VS7}\\ &= ax + ay + bx + by && \text{Por VS8}\end{aligned}$$

   □

4. Demuestre que el conjunto de las funciones pares en $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

   junto con la suma de funciones y el producto por escalar usuales forman un espacio vectorial.

   Demostración. Lo primero que se debe verificar es que si $f, g \in \mathscr{E}$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces $f + g, cf \in \mathscr{E}$ de modod que la suma y multiplicar por un escalar están bien definidas en $\mathscr{E}$ sobre $\mathbb{R}$. Por tanto si $f, g \in \mathscr{E}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\begin{aligned}(f+g)(t) = f(-t) + g(-t) &= f(t) + g(t) = (f+g)(t),\\ (cf)(-t) &= c[f(-t)] = c[f(t)] = (cf)(t)\end{aligned}$$

   para toda $t \in \mathbb{R}$, llo que implica que $f + g$ y cf son funciones pares en $\mathscr{E}$. Por tanto están bien definidas.

   Para provar que es un espacio vectorial debemos de mostrar que se cumplen VS1 - VS8.

   - **VS1**. Si $f, g \in \mathscr{E}$ y para toda $t \in \mathbb{R}$, entonces la suma es conmutativa, teniendo así que,

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = g(t) + f(t) = (g+f)(t)$$

     lo que implica que $f + g = g + f$.
   - **VS2** Si $f, g, h \in \mathscr{E}$, entonces la suma es asosiativa, teniendo

$$\begin{aligned}[(f+g)+h](t) &= (f+g)(t) + h(t) = (f(t)+g(t)) + h(t)\\ &= f(t) + (g(t)+h(t)) = [f+(g+h)](t)\end{aligned}$$

     para toda $t \in \mathbb{R}$, teniendo así que $(f+g)+h = f+(h+g)$.
   - **VS3** Sea 0 la función constante $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $0 \in \mathscr{E}$ definida como $0(t) = 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces $0(-t) = 0 = 0(t)$. Sea $f \in \mathscr{E}$ entonces se cumple que,

$$(f+0)(t) = f(t) + 0(t) = f(t) + 0 = f(t)$$

     Teniendo así qiie $f + 0 = f$.
   - **VS4** Sean $f, g \in \mathscr{E}$ donde $g(t) = -f(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$, como $f \in \mathscr{E}$ y $g(-t) = -f(-t) = -f(t)$ y así $f + g = 0$ porque

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = f(t) - f(t) = 0 = 0t$$

   - **VS5** Sea $f \in \mathscr{E}$, se tiene que $1f = f$ y para toda $t \in \mathbb{R}$, dado que $(1f)(t) = 1[f(t)] = f(t)$.

[3] Para cada elemento $a \in F$ y cadapar de elementos $x, y \in V$, $a(x+y) = ax + ay$.
[4] Para cada par de ementos $a, b \in F$ y cada elemento $x \in V$, $(a+b)x = ax + bx$.

- **VS6** Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathscr{R}$ y para toda $t \in \mathbb{R}$, se tiene, $(ab)f = a(bf)$ porque

$$[(ab)f](t) = (ab)[f(t)] = a[bf(t)] = a[(bf)(t)]$$

- **VS7** Para cada $a \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathscr{E}$ y para toda $t \in \mathbb{R}$, se tiene $a(f+g) = af + ag$ porque

$$\begin{aligned}[a(f+g)](t) &= a[(f+g)(t)] = a(f(t)+g(t)) = a[f(t)] + a[g(t)] \\ &= (af)(t) + (ag)(t) = (af+ag)(t)\end{aligned}$$

- **VS8** Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathscr{E}$ y para toda $t \in \mathbb{R}$, se tiene $(a+b)f = af + bf$ porque

$\square$

¿Qué se puede decir del conjunto de las funciones impares, forman o no un espacio vectorial? Justifique su respuesta.

Verdadero Sí forman un espacio vectorial, denotando así

$$\mathscr{E}'(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Demostración. Sea $\mathscr{E}' \subset V$ donde V está definido como el espacio vectorial de todos los funciones evaluadas en valores reales en la línea real. Como V es un espacio vectorial basta con probar que $\mathscr{E}'$ es un subespacio de V.

La función 0 es impar, $0_V(-x) = -0_V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora sea $c \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathscr{E}'$ entonces $(cf+g)(-x) = cf(-x) + g(-x) = -cf(x) - g(x) = -(cf+g)(x)$ y por tanto $cf + g \in \mathscr{E}'$. Como $\mathscr{E}'$ es un subespacio de sigue que es un espacio vectorial. $\square$

5. Considere el espacio vectorial $\mathscr{F}(S, \mathbb{R})$ y $f, g, h \in \mathscr{F}(S, \mathbb{R})$ definidos como $f(s) = 2s + 1$, $g(s) = 1 + 4s - 2s^2$ y $h(t) = 5^t + 1$.

   (a) Demuestre que las tres funciones son diferentes cuando $S = \mathbb{R}$.

   Demostración. Basta con tomar valores diferentes a los valores de S. $\square$

   (b) Demuestre que $f = g$ y $f + g = h$ cuando $S = \{0, 1\}$

   Demostración. 1) $f = g$
   Se debe mostrar que $f(t) = g(t)$ para $t \in S$. Esto se cumple porque $f(0) = 2(0) + 1 = 1 = 1 + 4(0) - 2(0)^2 = g(0)$ y $f(1) = 2(1) + 1 = 3 = 1 + 4(1) - 2(1)^2 = g(1)$.
   2) $f + g = h$
   Se debe mostrar que $f(t) + g(t) = h(t)$ para $t \in S$. Igual se cumple porque $f(1) + g(1) = 3 + 3 = 6 = 5^{(1)} + 1 = h(1)$ y $f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2 = 5^{(0)} + 1 = h(0)$.

   $\square$

6. Demuestre o de un contraejemplo para las siguinetes afirmaciones:

   (a) La intersección de dos subespacioes vectoriales es un subespacio vectorial

   Demostración. TODO $\square$

   (b) La suma de dos subespacios vectoriales forma un subespacio vectorial.
   TODO

   (c) La suma de dos subconjuntos de un espacio vectorial siempre es un subespacio vectorial.
   TODO

(d) El conjunto $\{f \in \mathscr{E} \mid f(1) = 1\}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{E}$.
TODO

7. ¿Es posible expresar al vector $(5, 1, -5)$ como combinación lineal de elementos en $S = \{(1, -2, -3), (-2, 3, -4)\}$.

   Para ver si es posible expresarlo como combinación lineal de elemntos de S basta encontrar un $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que:

   $$(5, 1, -5) = \alpha(1, -2, -2) + \beta(-2, 3, 4)$$

   Teniendo así que $(5, 1, -5) = (\alpha - 2\beta, -2\alpha + 3\beta, -\alpha - 4\beta)$.

   Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones,

   $$\begin{cases} 5 = \alpha - 2\beta \\ 1 = -2\alpha + 3\beta \\ \text{-}5 = -\alpha - 4\beta \end{cases}$$

   Multiplicando la primera ecuación por dos y sumándola a la segunda se tiene,

   $$\begin{cases} 5 = \alpha - 2\beta \\ 11 = -\beta \\ 5 = -\alpha - 4\beta \end{cases}$$

   Multiplinado la primera ecuación por 3 y sumándola a la tercera se tiene,

   $$\begin{cases} 5 = \alpha - 2\beta \\ 11 = -\beta \\ 10 = -10\beta \end{cases}$$

   Pero no hay un valor que pueda tomar β para que satisfaga el sistema de ecuaciones, por lo tanto el vector $(5, 1, -5)$ **no puede ser expresado** como combinación lineal de los elementos de S.

8. ¿Es el vector $6x^3 - 3x^2 + x + 2$ una combinación lineal de los vectores $x^3 - x^2 + 2x + 3$ y $2x^3 - 3x + 3$. (Recuerde que los polinomios $\mathbb{P}[x]$ forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y producto por un escalar usuales).

   Para provar si el primer polinomio se puede expresar como combinación lineal de los otros dos debemos de encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que,

   $$6x^3 - 3x^2 + x + 2 = \alpha(^3 - x^2 + 2x + 3) + \beta(2x^3 - 3x + 3)$$

   Teniendo así que,

   $$\begin{aligned} 6x^3 - 3x^2 + x + 2 &= \alpha x^3 - \alpha x^2 + 2\alpha x + 3\alpha + 2\beta x^3 - 3\beta x + \beta \\ &= (\alpha + 2\beta)x^3 - \alpha x^2 + (2\alpha - 3\beta)x + 3\alpha + \beta \end{aligned}$$

   Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones (agrupando con resecto a cada coeficiente del polinomio)

   $$\begin{cases} 6 = \alpha + 2\beta \\ \text{-}3 = -\alpha \\ 1 = 2\alpha - 3\beta \\ 2 = 3\alpha + \beta \end{cases}$$

Sumando la primera ecuación a la segunda se tiene,

$$\begin{cases} 6 = \alpha + 2\beta \\ 3 = 2\beta \\ 1 = 2\alpha - 3\beta \\ 2 = 3\alpha + \beta \end{cases}$$

Multiplicando por (-2) la primera ecuación y sumándosela a la tercera se tiene,

$$\begin{cases} 6 = \alpha + 2\beta \\ 3 = 2\beta \\ \text{-11} = -7\beta \\ 2 = 3\alpha + \beta \end{cases}$$

Multiplicando por (-3) la primera ecuación y sumándosela a la tercera se tiene,

$$\begin{cases} 6 = \alpha + 2\beta \\ 3 = 2\beta \\ \text{-11} = -7\beta \\ \text{-16} = -5\beta \end{cases}$$

Como no hay un valor β que satisfaga la ecuación se concluye que el vector $6x^3 - 3x^2 + x + 2$ **no puede ser expresado como combinación lineal de los vectores** $x^3 - x^2 + 2x + 3$ y $2x^3 - 3x + 3$.

9. Considera el espacio vectorial de las matrices simétricas de 2×2. Exhiba una base para este espacio vectorial y justifique su respuesta.

   Expresando la base canónica se tiene entonces,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Sea $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ entonces se puede expresar como,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Sean V un espacio vectorial y $S, T \subset V$ tales que $S \subseteq T$. Si S es linealmente independiente ¿es T linealmente independiente?

    <u>Falso</u>

    Lo que sí se cumple es: **Si T es linealmente independiente, entonces S el linealmente independiente**.

    Demostración. Sean $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$ y $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k\}$. Como T es linealmente independiente, entonces $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0$, lo que por definición de independia lineal pasa si y sólo si $a_i = 0$ con $1 \leq i \leq k$. Como $a_{j+1} = a_{j+1} = \ldots = a_k = 0$, entonces $\sum_{i=j+1}^{k} a_i x_i = 0$, teniendo así que $\sum_{i=1}^{j} a_i x_i = 0$ si y sólo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$. Por tanto S es linealmente independiente. □

11. Sean V un espacio vectorial y $S, T \subset V$ tales que $S \subseteq T$. Si T es linealmente dependiente ¿es S linealmente dependiente?

    Falso

    Lo que sí se cumple es: **Si S es linealmente dependiente, entonces T el linealmente dependiente**.

    Demostración. Sean $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$ y $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k\}$. Como S es linealmente dependiente, entonces por definición se tiene que existe una constante $a_1, a_2, \ldots, a_j$ no todos cero tal que $\sum_{i=1}^{j} a_i v_i = 0$. Entonces tomemos $a_{j+1} = a_{j+1} = \ldots = a_k = 0$, se sigue que $\sum_{i=i}^{k} a_i v_i = 0$ y al menos un $a_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq k$. Por tanto S es linealmente dependiente. □

12. Sean V un espacio vectorial y $x, y \in V$. Demuestre que el conjunto $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si uno es múltiplo del otro.

    Demostración.

    $\Longrightarrow$) Como $\{x, y\}$ son linealmente independientes. Entonces $\alpha x + \beta y = 0$ cuando α, β no son 0. Supongamos que $\alpha \neq 0$, entonces $x = -\frac{\beta}{\alpha} y$ y por lo tanto x es múltiplo de y.

    $\Longleftarrow$) Como $\{x, y\}$ son múltiplos, i.e., $x = \alpha y$, entonces donde $x = 1x$ y como está siendo multiplicado por 1, entonces puede que α sea o no 0, pero como al menos un coeficiente no es cero, entonces cumple con la definición de ser linealmente dependiente.

    □

13. Considere espacios vectoriales V y W sobre un campo K y una transformación lineal $T : V \to W$. Demuestre que:

    (a) $T(0_V) = 0_W$.

    Demostración.

    $$T(0 \cdot 0_V) = 0T(0_V) = 0_W$$

    □

    (b) T es una transformación lineal si y sólo si $T(ax + y) = aT(x) + T(y)$ para cualesquiera $x, y \in V$ y $a \in K$.

    Demostración.

    $\Longrightarrow$) Como T es lineal y sean $x, y \in V$ y $a \in K$, entonces $T(ax + y) = aT(x) + T(y)$. Por pura definición.

    $\Longleftarrow$) Como $T(ax + y) = aT(x) + T(y)$ para cualesquiera $x, y \in V$ y $a \in K$. Entonces,

    - $T(x + y) = T(1x + y) = 1T(x) + T(y) = T(x) + T(y)$.
    - $T(cx) = T(cx + 0_V) = cT(x) + T(0_V) = cT(x) + 0_W = cT(x)$.

    □

    (c) Para cualesquiera $x, y \in V$ se cumple que $T(x - y) = T(x) - T(y)$.

    Demostración.

    $$T(x - y) = T(x + (-y)) = T(x) + T(-y) = T(x) - T(y)$$

    □

(d) T es una transformación lineal si y sólo si $T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$, para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in V$ y $a_1, \ldots \in K$.

Demostración. q

$$\begin{aligned}
T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) &= T(a_1x_1) + T\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\right) \\
&= T(a_1x_1) + T(a_2x_2) + \ldots + T(a_nx_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} T(a_i x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)
\end{aligned}$$

□

Figura 1: Solo me faltó la 6 :(