Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra Moderna I

Tarea 8

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

28 de Abril 2020

Ejercicio 1. (40 puntos)

Demuestre que S_n[1] no tiene subgrupos de índice t con $2 < t < n$.

Demostración. Sea $G = S_n$ y A_n el grupo alternante de grado n (el cual es simple). Sabemos que el único subgrupo no trivial de G es A_n. Sea $H \leq G$ y G/H el conjunto de las clases laterales izquierdas de H. Sea $S_{G/H}$ el grupo simétrico en G/H y $f : G \to S_{G/H}$ el homomorfismo inducido por los donjugados de G en G/H. Sea N el kernel de f, entones N es un subgrupo de H. Ya que $|G| = n!$ y $S_{G/H} = m!$, f no puede ser inyectiva. Entonces el único grupo normal no tricial de G es A_n, entonces $N = A_n$. Por tanto $[G : N] = 2$ y $H = N$ y de ahí que $t = 2$. □

Ejercicio 2. (30 puntos)

Demuestre que A_6 no tiene subgrupos de índice primo.

Demostración. Sea A_6 es un grupo simple[2] de orden $360 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Si H fuera un subgrupo de índice primo entonces $[A_6 : H] = 2, 3, 5$. Por la generalización del teorema de Cailey[3] entonces hay un homomorfismo $\varphi : A_6 \to S_n$ con $n = 2, 3, 5$ con $\varphi \subset H$, en particular $\ker \varphi$ es un subgrupo normal de A_6 con $\ker \varphi \neq A_6$. Como A_6 es simple, $\ker \varphi = 1$ y φ es inyectiva. Pero esto es imposible porque $|S_5| = 120 < 360$. □

Ejercicio 3. (30 puntos)

Sea G un grupo simple *infinito*. Demuestre que

1. Todo $x \in G$ con $x \neq 1$ tiene una cantidad infinita de conjugados.

   Demostración. Por contrapositiva. Si tiene una cantidad finita de conjugados, entonces G no es simple.

   Sea X denotado como el conjunto finito de conjugados de x y sea S_X el grupo simétrico de X. Sea $\phi : G \to S_n$ el homomorfismo definido como sigue. Para $g \in G$, $\phi(g)$ es la permutación de X que toma $y \in X$ a gyg^{-1}. Verifiquemos que es inyectiva y que ϕ sea un homomorfismo.

   Sea $H = \ker \phi$. Entonces H es un subrupo normal de G. Si $H \neq 1$ y $H \neq G$, entonces G no es simple. Si $H = 1$, entonces ϕ es inyectiva de un grupo infinito G a un grupo finito S_X, lo cual es imposible. Si $H = G$, entonces implica que $x \in Z(G)$. Como $x \neq e$, implica que $Z(G)$ es no trivial. Ya que $Z(G)$ es un subrupo normal de de G, si $Z(G) \neq G$ entonces G no es simple. De lo contrario, G sería conmutativo y un grupo conmutativo infinito no es simple. □

2. Todo subgrupo propio $H \neq 1$ tiene una cantidad infinita de conjugados.

   Demostración. ☹ □

---

[1] Con $n > 4$.
[2] Se demostró en la tarea pasada.
[3] ***Teorema 3.14***. *Si $H \leq G$ y $[G : H] = n$, entonces hay un homomorfismo $\rho : G \to S_n$ con $\ker \rho \leq H$.*