Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra Moderna I

Tarea 2

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
`angelgladin@ciencias.unam.mx`

5 de Febrero 2019

Ejercicio 1.

Sea G un grupo tal que $x^2 = e$ para cualquier $x \in G$, entonces G es abeliano.

Demostración. Sean $a, b \in G$, por hipótesis entonces $a^2 = e$ y $b^2 = e$. Si tomamos $(a*b)^2 = (a*b)*(a*b) = a*b*a*b$ se tiene así la siguiente igualdad,

$$a*b*a*b = e \tag{1}$$

Si en (1) multiplicamos por a a la derecha y por b a la izquierda se obtiene,

$$\begin{aligned} a*a*b*a*b*b &= a*e*b && \text{Multiplicando por } a \text{ y } b \text{ en (1)} \\ a^2*b*a*b^2 &= a*e*b && \text{Por def. de potencia} \\ e*b*a*e &= a*e*b && \text{Por hipótesis} \\ b*a &= a*b && \text{Simplificando} \end{aligned}$$

Ergo G es abeliano. □

Ejercicio 2.

a) Sea G un grupo abeliano finito que no contiene elementos $a \neq e$ tal que $a^2 = e$. Evalúa $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ es una lista sin repeticiones, de todos los elementos de G.

Demostración. <u>**Afirmación**</u>**:**

$$\prod_{a \in G} a = e$$

Como por hipótesis los elementos $a \in G$ que no son el neutro cumplen que $a^2 = e$ que se puede reescribir como $a = a^{-1} \iff a^{-1} * a^2 = a^{-1} * e \iff a^{-1} * a * a = a^{-1} \iff e * a = a^{-1}$. También como en $a_1, a_2, \cdots, a_n$ todos los elementos son distintos (y también su inverso es único) podemos descomponerlo en dos productos[1] $(a_1 * a_2 * \ldots * a_n)$ y $(a_1^{-1} * a_2^{-1} * \ldots * a_n^{-1})$ teniendo así,

$$(a_1 * a_2 * \ldots * a_n) = (a_1 * a_2 * \ldots * a_n) * (a_1^{-1} * a_2^{-1} * \ldots * a_n^{-1}) = (a_1 * a_2 * \ldots * a_n)^2 = e$$

□

[1] Se puede "reacomodar" los elementos del producto por ser un grupo abeliano.

b) Pruebe el ***Teorema de Wilson***: Si p es primo, entonces

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p$$

Sugerencia: Los elementos no cero de $\mathbb{Z}_p$ forma un grupo multiplicativo.

Demostración. Consideremos el grupo G de elementos no cero de $\mathbb{Z}_p$ forma un grupo multiplicativo como $G = ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ donde $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \{[1], [2], \ldots, [p-1]\}$ y $(\cdot)$ como el producto en $\mathbb{Z}$, también se tiene que G es abeliano por $\mathbb{Z}$.

Como p es primo, tenemos que solo tiene un solo elemento de orden 2, esto es que $a^2 = 1$ teniendo así que $a = \pm 1$. Lo denotaremos como $[-1]$.

Considerando a $(p-1)!$ como el producto de los elementos de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ tenemos dos posibles productos,

$$\prod_{g \in G} g \tag{1}$$

$$\prod_{g \in G,\ g^2=1} g \tag{2}$$

En (1) tenemos que $\forall g \in G\ \exists! g^{-1} \in G$, lo que se hace es ir "emparejando" cada elemento con su inverso. En (2) justo indica que el elemento es idempotente (su propio inverso), pero por la observación previo solo tenemos un elemento en G.

Por lo tanto,

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p$$
$$\prod_{g \in G} g = \prod_{g \in G,\ g^2=1} g = \equiv [-1] \mod p$$

$\square$

Ejercicio 3.

a) Si $\alpha = (1\ 2\ \cdots\ r-1\ r)$, entonces $\alpha^{-1} = (r\ r-1\ \cdots\ 2\ 1)$.

Demostración. Sea $\alpha \in S_n$ su composición son su inversa es (i), es decir, $\alpha \circ \alpha^{-1} = id = \alpha^{-1} \circ \alpha$. Ahora tomando $(1\ 2\ \cdots\ r-1\ r)(r\ r-1\ \cdots\ 2\ 1)$, fija cada elemento entre 1 y n. La composición tiene siguiente regla de correspondencia $1 \mapsto r \mapsto 1$ y para $2 \leq j \leq n$ $j \mapsto j-1 \mapsto j$ **fijando** a cada elemento, por tanto es (1). $\square$

b) Encuentre el inverso de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Para encontrar su inverso primero mencionaremos una proposición que nos será de utilidad,

Proposicion 1. *Si $\gamma \in S_n$ y $\gamma = \beta_i \cdots \beta_k$, entonces*

$$\gamma^{-1} = \beta_k^{-1} \cdots \beta_1^{-1}$$

Demostración. **Por inducción** para $k \geq 2$.

$$(\beta_1\beta_2)(\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}) = \beta_1(\beta_2\beta_2^{-1})\beta_1^{-1} = \beta_1\beta^{-1} = (1)$$

De manera análoga para $(\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}) = (\beta_1\beta_2) = (1)$.

Para el caso inductivo, dea $\delta = \beta_1 \cdots \beta_k$, de modo que $\beta_1 \cdots \beta_k\beta k + 1 = \delta\beta_{k+1}$. Entonces

$$\begin{aligned}(\beta_1 \cdots \beta_k\beta k + 1)^1 &= (\delta\beta_{k+1})^{-1} \\ &= \beta_{k+1}^{-1}\delta^{-1} \\ &= \beta_{k+1}^{-1}(\beta_1 \cdots \beta_k)^{-1} \qquad = \beta_{k+1}^{-1}\beta_k^{-1} \cdots \beta_1{-1}\end{aligned}$$

□

Entonces, escribiendo la permutación como $\alpha = (1\ 6\ 3)(2\ 4)(7\ 8\ 9)$, y aplicando la proposición anterior se tiene que

$$\alpha^{-1} = (7\ 8\ 9)^{-1}(2\ 4)^{-1}(1\ 6\ 3)^{-1} = (9\ 8\ 7)(4\ 2)(3\ 6\ 1) = (7\ 9\ 8)(2\ 4)(1\ 3\ 6)$$

Ejercicio 4.

Leyes de cancelación. En un grupo G, cualquiera de las ecuaciones $a*b = a*c$ y $b*a = c*a$ implica $b = c$.

Demostración. Tomando la ecuación $a*b = a*c$, teniendo que $a \in G$ entonces existe a^{-1} tal que $a*a^{-1} = e$. Multiplicando por la izquierda la ecuación anterior por a^{-1} se obtiene,

$$\begin{aligned} a*b &= a*c && \text{Por hipótesis} \\ a^{-1}*a*b &= a^{-1}*a*c && \text{Multiplicando por } a^{-1} \text{ por la izq.} \\ (a^{-1}*a)*b &= (a^{-1}*a)*c && \text{Asociando} \\ e*b &= e*c && \text{Neutro} \\ b &= c \end{aligned}$$

□

Ejercicio 5.

Pruebe que los siguientes cuatro permutaciones forman un grupo **V** (que es llamado el 4-grupo de Klein):

$$1; \qquad (1\ 2)(3\ 4); \qquad (1\ 3)(2\ 4); \qquad (1\ 4)(2\ 3);$$

Demostración. **V** es un grupo. Para ello usaremos la tabla de Cayley.

	1	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
1	1	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
(1 2)(3 4)	(1 2)(3 4)	1	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)
(1 3)(2 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)	1	(1 2)(3 4)
(1 4)(2 3)	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)	1

Y observando que en efecto está bien porque satisface la tabla de Cayley del 4-grupo de Klein K_4,

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

□