Tarea 5
Álgebra Moderna I

12 de Marzo de 2020

Esta es una tarea de 100 puntos. Cada ejercicio tiene marcado su valor. Si la respuesta es correcta y completa tendrás el total de puntos. En caso de estar incompleto o incorrecto, se asignará los puntos proporcionales a la parte correcta de la respuesta.

Ejercicio 1. *(25 puntos) Pruebe que un homomorfismo* $f\colon G \to H$ *es inyectivo si y sólo si* $\ker f = 1$.

Solución. Supongamos que f es inyectivo. Tenemos que mostrar que $\ker f = \{1\}$, puesto que $\{1\} \subset \ker f$, resta probar que $\ker f \subset \{1\}$. Sea $x \in \ker f$, es decir, $f(x) = 1$, entonces $f(x) = f(1)$, así por la inyectividad de f obtenemos que $x = 1$.
Inversamente supangamos que $\ker f = 1$. Si $f(x) = f(y)$ con $x, y \in G$, entonces

$$\begin{aligned} f(x)f(y)^{-1} &= 1 \\ f(x)f(y^{-1}) &= 1 \\ f(xy^{-1}) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

así $xy^{-1} = 1$ porque por hipótesis $\ker f = 1$, se sigue que $x = y$. Por lo tanto f es inyectivo.

Ejercicio 2. *(25 puntos)*

1. *Muestre que el 4-grupo de Klein* $V = \{1;\ (12)(34);\ (13)(24);\ (14)(23)\}$ *es un subgrupo normal de* S_4.
2. *Si* $K = \langle (12)(34) \rangle$, *muestre que* K *es un subgrupo normal de* V *y que* K *no es un subgrupo normal de* S_4. *Concluya que la normalidad no necesariamente es transitiva, esto es: si* K *es subgrupo normal de* H *y* H *subgrupo normal de* G *no necesariamente implica que* K *es subgrupo normal de* G.

1. Consideremos el conjunto de 3 elementos

$$\{P_1 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}, P_2 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}, P_3 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}\}$$

construimos una función $\varphi\colon S_4 \to \Gamma$, donde Γ es el grupo de permutaciones de $\{P_1, P_2, P_3\}$ la función esta dada por $\varphi(\sigma)$ es la permutación de $\{P_1, P_2, P_3\}$ dada por

$P_1 \mapsto \sigma P_1 = \{\{\sigma(1), \sigma(2)\}, \{\sigma(3), \sigma(4)\}\}$,$P_2 \mapsto \sigma P_2 = \{\{\sigma(1), \sigma(3)\}, \{\sigma(2), \sigma(4)\}\}$,
$P_3 \mapsto \sigma P_3 = \{\{\sigma(1), \sigma(4)\}, \{\sigma(2), \sigma(3)\}\}$.

Notemos que φ es un homomorfismo de grupos. Por último mostremos que $\ker\varphi = V$. Por inspención notemos que $V \subset \ker\varphi$, así solo resta ver que $\ker\varphi \subset V$. Sea $\sigma \in \ker\varphi$ así:
$\sigma P_1 = P_1 \leftrightarrow \{\{\sigma(1), \sigma(2)\}, \{\sigma(3), \sigma(4)\}\} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
$\leftrightarrow \sigma \in \{1, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,
$\sigma P_2 = P_2 \leftrightarrow \{\{\sigma(1), \sigma(3)\}, \{\sigma(2), \sigma(4)\}\} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$
$\leftrightarrow \sigma \in \{1, (13), (24), (13)(24), (12)(34), (14)(32)\}$. Intersectando los dos conjuntos resultantes obtenemos que $\sigma \in V$.

Concluimos que V es subgrupo normal de S_4 pues el kernel de cualquier morfismo es normal.

2. Proposición. Si G es un grupo abeliano entonces todo subgrupo H de G es normal.

   Demostración. Sea $g \in G$, tenemos que mostrar que $gHg^{-1} = H$. Sea $x \in gHg^{-1}$, entonces $x = ghg^{-1}$, usando que G es abeliano obtenemos que $x = ghg^{-1} = gg^{-1}h = 1.h = h$. Por otro lado si $h \in H$ entonces $h = ghg^{-1}$ pues G es abeliano. □

   De la proposición anterior obtenemos que $K = \langle(12)(34)\rangle$ es un subgrupo normal de V porque V es abeliano.

   K no es normal en S_4, en efecto sea $(14)(13)(12) \in S_4$ el inverso de esta permutación es $(12)(13)(14)$, luego notemos que

$$[(14)(13)(12)][(12)(34)][(12)(13)(14)] = (14)(13)(34)(12)(13)(14)$$

   esta permutación resultante envía 1 al 4 entonces es distinto de $(12)(34)$ así

$$(14)(13)(12)K(12)(13)(14) \neq K$$

   Por lo tanto K no es normal en S_4.

Ejercicio 3. *(25 puntos) Sea N un subgrupo normal de G y $f\colon G \to H$ un homomorfismo tal que su kernel contiene a N. Muestre que f induce un homomorfismo $f_*\colon G/N \to H$ dado por $f_*(Na) = f(a)$.*

Solución. Como N es un subgrupo normal de G, tenemos que el cociente G/N es un grupo con la operación $(Na)(Nb) = Nab$. Veamos primero que f^* está bien definida, es decir, no depende del representante de la clase. Sea $b \in Na$, entonces, b esta relacionado con a, así $ab^{-1} \in N$, como N esta contenido en el kernel de f obtenemos que $f(ab^{-1}) = 1$, luego

$$\begin{aligned} f(a)f(b^{-1}) &= 1 \\ f(a)f(b)^{-1} &= 1 \\ f(a) &= f(b) \end{aligned} \tag{2}$$

así f^* esta bien definida.
Ahora veamos que f^* es un homomorfismo. Sean $Na, Nb \in G/N$,

$$\begin{aligned} f^*((Na)(Nb)) &= f^*(Nab) \\ &= f(ab) \\ &= f(a)f(b) \\ &= f^*(Na)f^*(Nb) \end{aligned} \tag{3}$$

Por lo tanto f^* es un homomorfimo de grupos.

Ejercicio 4. *(25 puntos) Pruebe que el grupo del círculo T es isomorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Solución. En la tarea 3, mostramos que la función $e^{2\pi ix}$ es un homomorfismo de grupos de $\mathbb{R}$ a T. Notemos que la función $e^{2\pi ix}$ es sobreyectiva, esto es así porque todo número complejo z es de la forma $z = re^{i\theta}$ donde $r = |z|$ y θ es el ángulo de inclinación de z. En particular todo número complejo $w \in S^1$ es de la forma $e^{i\theta}$, así $e^{2\pi ix}$ es sobreyectiva, porque es la composición de las funciones

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "2\pi"] \arrow[rr, bend right, "e^{2\pi ix}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "e^{ix}"] & T \end{tikzcd} .$$

Ahora calculemos el el kernel de $e^{2\pi x}$, por definición $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$ entonces $e^{2\pi ix} = 1$ si y sólo si $\cos(2\pi x) = 1$ y $\mathrm{sen}(2\pi x) = 0$ si y sólo si $x \in \mathbb{Z}$. Entonces el kernel de $e^{2\pi ix}$ es $\mathbb{Z}$. Por el primer Teorema de isomorfismo tenemos que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isomorfo a T.