Tarea 1
Álgebra Moderna I

31 de Enero de 2020

Esta es una tarea de 100 puntos. Cada ejercicio tiene marcado su valor. Si la respuesta es correcta y completa tendrás el total de puntos. En caso de estar incompleto o incorrecto, se asignará los puntos proporcionales a la parte correcta de la respuesta.

Ejercicio 1. *(60 puntos)*

a) Sea $\alpha = (i_0 i_1 \cdots i_{r-1})$ un r-ciclo. Para cualquier $k, j \geq 0$, pruebe que $\alpha^k(i_j) = i_{k+j}$.

b) Pruebe que si α es un r-ciclo, entonces $\alpha^r = 1$, pero que $\alpha^k \neq 1$ para cualquier entero positivo $k < r$.

c) Si $\alpha = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$ es un producto de r_i-ciclos β_i disjuntos, entonces el mas pequeño entero positivo l con $\alpha^l = 1$ es el mínimo común múltiplo de $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$.

Solución:

a) Sean $k, j \geq 0$

$$\begin{aligned}
\alpha^k(i_j) &= \underbrace{\alpha \circ \cdots \circ \alpha(i_j)}_{k-veces} \\
&= \underbrace{\alpha \circ \cdots \circ \alpha(i_{j+1})}_{(k-1)-veces} \\
&\vdots \\
&= \alpha(i_{j+(k-1)}) \\
&= i_{j+k}.
\end{aligned} \tag{1}$$

b) Primero vamos a mostrar que $\alpha^r = 1$. Sea $s \in S_n$, si $s = i_k$ para algún $k = 0, \cdots r-1$, aplicamos el ejercicio anterior varias veces

$$
\begin{aligned}
\alpha^r(s) &= \alpha^r(i_k) \\
&= \alpha^r(\alpha^k(i_0)) \\
&= \alpha^{r+k}(i_0) \\
&= \alpha^k(\alpha^r(i_0)) \\
&= \alpha^k(\alpha(i_{r-1})) \\
&= \alpha^k(i_0) \\
&= i_k \\
&= s.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Si $s \neq i_k$ para todo $k = 0, \cdots, r-1$, entonces

$$
\begin{aligned}
\alpha^r(s) &= \underbrace{\alpha \circ \cdots \circ \alpha(s)}_{r-veces} \\
&= \underbrace{\alpha \circ \cdots \circ \alpha(s)}_{(r-1)-veces} \\
&\vdots \\
&= \alpha(s) \\
&= s.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Así $\alpha = 1$. Ahora vamos a mostrar que si $k < r$ entonces $\alpha^k \neq 1$.

Notemos que $\alpha^k(i_0) = i_k$, y como $\alpha = (i_0 \cdots i_k \cdots i_{r-1})$ (aquí usamos que $k < r$)tenemos que $i_0 \neq i_k$ por definición de ciclo. Así $\alpha^k \neq 1$.

c) Sea $t = mcm\{r_1, \cdots, r_m\}$, vamos a mostrar que $t \geq l$ y $t \leq l$. Notemos que $\beta_i^t = 1$ para todo $i = 0, \cdots, m$, en efecto, por hipótesis t es múltiplo de r_i, es decir, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $t = r_i n$, luego

$$\beta_i^t = \beta_i^{r_i n} = \underbrace{\beta_i^{r_i} \cdots \beta_i^{r_i}}_{n-veces} = 1 \cdots 1 = 1.$$

Así $\alpha^t = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m)^t = \beta_1^t \beta_2^t \cdots \beta_m^t = 1 \cdots 1 = 1$ en la segunda igualdad usamos que los ciclos son disjuntos. Puesto que l es el mínimo con la propiedad $\alpha^l = 1$ obtenemos que $t \geq l$. Resta probar que $t \leq l$, para ello basta probar que l es múltiplo de r_i para todo $i = 0, \cdots m$.

Notemos que $\beta_i^l = 1$, esto se sigue del ejercicio 1.7. y la siguiente igualdad

$$\beta_1^l \beta_2^l \cdots \beta_m^l = 1.$$

De inciso b) deducimos que l es necesariamente un múltiplo de r_i.

Ejercicio 2. *(40 puntos) Sea p un primo y sea $\alpha \in S_n$. Si $\alpha^p = 1$, entonces o bien $\alpha = 1$, α es un p-ciclo, o α es un producto de p-ciclos disjuntos. En particular, si $\alpha^2 = 1$, entonces o bien $\alpha = 1$, α es una transposición o α es un producto de transposiciones disjuntas.*

Solución: α se puede escribir como un producto de ciclos disjuntos(teorema demostrado en clase)digamos $\alpha = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_m$, utilizando la hipótesis $\alpha^p = 1$ y y que los ciclos β_i son disjuntos obtenemos que $\beta_1^p\beta_2^p \cdots \beta_m^p = 1$

En la demostración de c) mostramos que p es necesariamente un múltiplo de r_i para todo $i = 0, \cdots, m$. Como p es primo obtenemos que β_i es necesariamente es un p-ciclo o un 1-ciclo. Por lo tanto o bien α es la identidad, α es un p-ciclo o un producto de p-ciclos.