Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra Moderna I

Tercer examen parcial

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

16 de Mayo 2020

1. Demuestre que si $G \leq S_n$ contiene permutaciones impares, entonces $|G|$ es par y exactamente la mitad de los elementos de G son permutaciones impares.

   Demostración. Sea E un subrupo de todas las permutaciones pares de G. Sea β una permutación impar de G (por hipótesis), entonces cada elemento de la clases lateral izquiera βE es una permutación impar (porque el producto de permutaciones impares con permutaciones pares da una permutación impar). Sea α una permutación impar de G, como G es un subgrupo, entonces hay un elemento $\gamma \in E$ tal que $\alpha = \beta\gamma$. Como α y β son impares, concluimos que γ es par y por tanto $\gamma \in E$. De ahí que $\alpha \in \beta E$. Por tanto βE contiene todas las permutaciones impares de G.

   Como $|\beta E| = |E|$, se concluye que exactamente la mitad de los elementos son permutaciones pares y la otra mitad impar, lo cual implica que G es par. □

2. Sea G un grupo finito que contiene un subgrupo H de índice p, donde p es el primo más pequeño que divide al orden de G. Demuestre que H es normal en G.

   Demostración. Sea H el subgrupo de ínidce p, donde p es el primo más pequeño que divide al orden de $|G|$. Entonces G actúa en el conjunto de las clases laterales izquierdas de H, $\{gH \mid g \in G\}$ por la multiplicación izquierda, $x \cdot (gH) = xgH$.

   Esa acción induce un homomorfismo $\rho : G \to S_p$, con su kernel que está contenido en H[1]. Sea K el kernel. Entonces G/K es isomorfa al subgrupo de S_p y entonces tiene un orden que divide a $p!$. Pero también tiene que tener orden que divida a G, y como p es el primo más pequeño que divide a $|G|$ se sigue que $|G/K| = p$. Como $|G/K| = [G : K] = [G : H][H : K] = p[H : K]$, se sigue que $[H : K] = 1$, y de ahí que $K = H$. Como K es normal, H también era normal. □

   Definicion 1. *Un G-conjunto es transitivo, si tiene una sola órbita, es decir, para cualesquiera $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $x = gy$.*

3. Si X es un G-conjunto, demuestre que cada una de sus órbitas es un G-conjunto transitivo.

   Demostración. Sea $\mathcal{O}$ una órbita del G-conjunto, se tiene por definición que si $g \in G$ y $x \in \mathcal{O}$ entonces $gx \in \mathcal{O}$, y así $\mathcal{O}$ es cerrado bajo producto. Además por definición, para cualqier $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$ existe un $g \in G$ tal que $gx_1 = x_2$, teniendo así que cada órbita es un G-conjunto transitivo. □

4. Demuestre que A_5 no tiene subgrupos de orden 30.

   Demostración. Supongamos que A_5 tiene un subgrupo de orden 30, digamos H. Entonces $[A_5 : H] = 2$ lo que implica que H es normal[2]. Pero como A_5 es simple[3], lo cual nos lleva a una contradicción. □

[1] **Teorema 3.14** *Si $H \leq G$ y $[G : H] = n$, entonces hay un homomorfismo $\rho : G \to S_n$ con $\ker \rho \leq H$.*
[2] En la tarea 4 se demostró que si *G un grupo y H un subgrupo de G de índice igual a 2, entonces H es un subgrupo normal de G.*
[3] **Teorema 3.11** *A_n es simple para toda $n \geq 5$.*