Autómatas y Lenguajes Formales

Tema 6: Propiedades avanzadas de cerradura de lenguajes regulares

Favio Ezequiel Miranda Perea
Lourdes del Carmen González Huesca
A. Liliana Reyes Cabello

Facultad de Ciencias UNAM[1]

Octubre 2017

[1] Con el apoyo del proyecto PAPIME PE102117

Minimal de L, $min(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $min(L)$ como sigue:

$$min(L) = \{x \in \Sigma^{\star} \mid \text{ningún prefijo propio de } x \text{ pertenece a } L)\}$$

Minimal de L, $min(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $min(L)$ como sigue:

$$min(L) = \{x \in \Sigma^\star \mid \text{ningún prefijo propio de } x \text{ pertenece a } L)\}$$

- Si L es regular entonces $min(L)$ es regular

Minimal de L, $min(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $min(L)$ como sigue:

$$min(L) = \{x \in \Sigma^\star \mid \text{ningún prefijo propio de } x \text{ pertenece a } L)\}$$

- Si L es regular entonces $min(L)$ es regular
- Idea de la prueba:

Minimal de L, $min(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $min(L)$ como sigue:

$$min(L) = \{x \in \Sigma^\star \mid \text{ningún prefijo propio de } x \text{ pertenece a } L)\}$$

- Si L es regular entonces $min(L)$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Sea M es un AFD que acepta a L

Minimal de L, $min(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $min(L)$ como sigue:

$$min(L) = \{x \in \Sigma^\star \mid \text{ningún prefijo propio de } x \text{ pertenece a } L)\}$$

- Si L es regular entonces $min(L)$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Sea M es un AFD que acepta a L
  - Sea N el AFN obtenido a partir de M de tal forma que todos los estados finales de M ahora están bloqueados.

Minimal de L, $min(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $min(L)$ como sigue:

$$min(L) = \{x \in \Sigma^{\star} \mid \text{ningún prefijo propio de } x \text{ pertenece a } L)\}$$

- Si L es regular entonces $min(L)$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Sea M es un AFD que acepta a L
  - Sea N el AFN obtenido a partir de M de tal forma que todos los estados finales de M ahora están bloqueados.
  - Es decir, se eliminan todas las aristas que salen de estados finales en M.

Minimal de L, $min(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $min(L)$ como sigue:

$$min(L) = \{x \in \Sigma^\star \mid \text{ningún prefijo propio de } x \text{ pertenece a } L)\}$$

- Si L es regular entonces $min(L)$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Sea M es un AFD que acepta a L
  - Sea N el AFN obtenido a partir de M de tal forma que todos los estados finales de M ahora están bloqueados.
  - Es decir, se eliminan todas las aristas que salen de estados finales en M.
  - $min(L)$ es aceptado por N

Cociente de dos lenguajes L_1/L_2

- Sean L_1, L_2 lenguajes, definimos al lenguaje cociente L_1/L_2 como sigue:

$$L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in L_2(xz \in L_1)\}$$

Cociente de dos lenguajes L_1/L_2

- Sean L_1, L_2 lenguajes, definimos al lenguaje cociente L_1/L_2 como sigue:

$$L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in L_2(xz \in L_1)\}$$

- Si L_1 es regular entonces L_1/L_2 es regular

Cociente de dos lenguajes L_1/L_2

- Sean L_1, L_2 lenguajes, definimos al lenguaje cociente L_1/L_2 como sigue:
$$L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in L_2(xz \in L_1)\}$$
- Si L_1 es regular entonces L_1/L_2 es regular
- Idea de la prueba:

Cociente de dos lenguajes L_1/L_2

- Sean L_1, L_2 lenguajes, definimos al lenguaje cociente L_1/L_2 como sigue:
$$L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in L_2(xz \in L_1)\}$$
- Si L_1 es regular entonces L_1/L_2 es regular
- Idea de la prueba:
  - Sea M un AFD que reconoce a L_1.

Cociente de dos lenguajes L_1/L_2

- Sean L_1, L_2 lenguajes, definimos al lenguaje cociente L_1/L_2 como sigue:

$$L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in L_2(xz \in L_1)\}$$

- Si L_1 es regular entonces L_1/L_2 es regular
- Idea de la prueba:
  - Sea M un AFD que reconoce a L_1.
  - Si $x \in L_1/L_2$ entonces existe $z \in L_2$ tal que $\delta^\star(q_0, xz) = \delta^\star(\delta^\star(q_0, x), z) \in F$

Cociente de dos lenguajes L_1/L_2

- Sean L_1, L_2 lenguajes, definimos al lenguaje cociente L_1/L_2 como sigue:
$$L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in L_2(xz \in L_1)\}$$
- Si L_1 es regular entonces L_1/L_2 es regular
- Idea de la prueba:
  - Sea M un AFD que reconoce a L_1.
  - Si $x \in L_1/L_2$ entonces existe $z \in L_2$ tal que $\delta^\star(q_0, xz) = \delta^\star(\delta^\star(q_0, x), z) \in F$
  - Para reconocer a x basta modificar M a un AFD M' tal que
$$F' = \{q \in Q \mid \exists z \in L_2(\delta^\star(q, z) \in F)\}$$

Cociente de dos lenguajes L_1/L_2

- Sean L_1, L_2 lenguajes, definimos al lenguaje cociente L_1/L_2 como sigue:

$$L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in L_2(xz \in L_1)\}$$

- Si L_1 es regular entonces L_1/L_2 es regular
- Idea de la prueba:
  - Sea M un AFD que reconoce a L_1.
  - Si $x \in L_1/L_2$ entonces existe $z \in L_2$ tal que $\delta^\star(q_0, xz) = \delta^\star(\delta^\star(q_0, x), z) \in F$
  - Para reconocer a x basta modificar M a un AFD M' tal que

$$F' = \{q \in Q \mid \exists z \in L_2(\delta^\star(q, z) \in F)\}$$

- Obsérvese que L_2 no tiene porqué ser regular.

Conjugado o desplazamiento cíclico de un lenguaje $cyc(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $cyc(L)$ como sigue:

$$cyc(L) = \{x_1 x_2 \in \Sigma^\star \mid x_2 x_1 \in L)\}$$

Conjugado o desplazamiento cíclico de un lenguaje $cyc(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $cyc(L)$ como sigue:

$$cyc(L) = \{x_1 x_2 \in \Sigma^\star \mid x_2 x_1 \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $cyc(L)$ es regular

Conjugado o desplazamiento cíclico de un lenguaje $cyc(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $cyc(L)$ como sigue:

$$cyc(L) = \{x_1 x_2 \in \Sigma^\star \mid x_2 x_1 \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $cyc(L)$ es regular
- Idea de la prueba:

Conjugado o desplazamiento cíclico de un lenguaje $cyc(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $cyc(L)$ como sigue:

$$cyc(L) = \{x_1x_2 \in \Sigma^\star \mid x_2x_1 \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $cyc(L)$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Dividir de forma no determinista una cadena $w \in \Sigma^\star$ en dos partes x_1x_2.

Conjugado o desplazamiento cíclico de un lenguaje $cyc(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $cyc(L)$ como sigue:

$$cyc(L) = \{x_1 x_2 \in \Sigma^\star \mid x_2 x_1 \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $cyc(L)$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Dividir de forma no determinista una cadena $w \in \Sigma^\star$ en dos partes $x_1 x_2$.
  - Saltar de forma no determinista a q_i y simular x_1 en M desde q_i

Conjugado o desplazamiento cíclico de un lenguaje $cyc(L)$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $cyc(L)$ como sigue:

$$cyc(L) = \{x_1 x_2 \in \Sigma^\star \mid x_2 x_1 \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $cyc(L)$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Dividir de forma no determinista una cadena $w \in \Sigma^\star$ en dos partes $x_1 x_2$.
  - Saltar de forma no determinista a q_i y simular x_1 en M desde q_i
  - Si $\delta^\star(q_i, x_1) = q_j$ y $q_j \notin F$ la simulación falla.

Conjugado o desplazamiento cíclico de un lenguaje *cyc*(L)

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $cyc(L)$ como sigue:

$$cyc(L) = \{x_1 x_2 \in \Sigma^\star \mid x_2 x_1 \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $cyc(L)$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Dividir de forma no determinista una cadena $w \in \Sigma^\star$ en dos partes $x_1 x_2$.
  - Saltar de forma no determinista a q_i y simular x_1 en M desde q_i
  - Si $\delta^\star(q_i, x_1) = q_j$ y $q_j \notin F$ la simulación falla.
  - En otro caso $q_j \in F$ y simulamos M en x_2, aceptando si $\delta^\star(q_0, x_2) = q_i$

Mitad de un lenguaje $L_{1/2}$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $L_{1/2}$ como sigue:

$$L_{1/2} = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in \Sigma^\star(|x| = |z| \text{ y } xz \in L)\}$$

Mitad de un lenguaje $L_{1/2}$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $L_{1/2}$ como sigue:

$$L_{1/2} = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in \Sigma^\star(|x| = |z| \text{ y } xz \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $L_{1/2}$ es regular

Mitad de un lenguaje $L_{1/2}$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $L_{1/2}$ como sigue:

$$L_{1/2} = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in \Sigma^\star(|x| = |z| \text{ y } xz \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $L_{1/2}$ es regular
- Idea de la prueba:

Mitad de un lenguaje $L_{1/2}$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $L_{1/2}$ como sigue:

$$L_{1/2} = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in \Sigma^\star (|x| = |z| \text{ y } xz \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $L_{1/2}$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Adivinar de forma no determinista una cadena z y un estado $q_j \in F$ con $|x| = |z|$

Mitad de un lenguaje $L_{1/2}$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $L_{1/2}$ como sigue:

$$L_{1/2} = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in \Sigma^\star(|x| = |z| \text{ y } xz \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $L_{1/2}$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Adivinar de forma no determinista una cadena z y un estado $q_j \in F$ con $|x| = |z|$
  - Simular M, en paralelo, procesando x desde q_0 y z hacia atras desde q_j.

Mitad de un lenguaje $L_{1/2}$

- Sea L un lenguaje, definimos el lenguaje $L_{1/2}$ como sigue:

$$L_{1/2} = \{x \in \Sigma^{\star} \mid \exists z \in \Sigma^{\star}(|x| = |z| \text{ y } xz \in L)\}$$

- Si L es regular entonces $L_{1/2}$ es regular
- Idea de la prueba:
  - Adivinar de forma no determinista una cadena z y un estado $q_j \in F$ con $|x| = |z|$
  - Simular M, en paralelo, procesando x desde q_0 y z hacia atras desde q_j.
  - Aceptamos si las dos simulaciones anteriores terminan en un mismo estado q_k.

Particiones racionales de L, L_q con $q \in \mathbb{Q}$

- Sean L un lenguaje y $q \in \mathbb{Q}$, definimos el lenguaje L_q como sigue:

$$L_q = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in \Sigma^\star(|x| = q|xz| \text{ y } xz \in L)\}$$

Particiones racionales de L, L_q con $q \in \mathbb{Q}$

- Sean L un lenguaje y $q \in \mathbb{Q}$, definimos el lenguaje L_q como sigue:

$$L_q = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in \Sigma^\star (|x| = q|xz| \text{ y } xz \in L)\}$$

- Si L es regular entonces L_q es regular

Particiones racionales de L, L_q con $q \in \mathbb{Q}$

- Sean L un lenguaje y $q \in \mathbb{Q}$, definimos el lenguaje L_q como sigue:

$$L_q = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists z \in \Sigma^\star(|x| = q|xz| \text{ y } xz \in L)\}$$

- Si L es regular entonces L_q es regular
- La idea de la prueba consiste en generalizar el caso de $q = 1/2$.

Derivada de un lenguaje L con respecto a una cadena u, $\partial_u(L)$

- Sean L es un lenguaje y $u \in \Sigma^\star$. La derivada de L con respecto a u se define como

$$\partial_u(L) = \{v \in \Sigma^\star \mid uv \in L\}$$

Derivada de un lenguaje L con respecto a una cadena u, $\partial_u(L)$

- Sean L es un lenguaje y $u \in \Sigma^\star$. La derivada de L con respecto a u se define como

$$\partial_u(L) = \{v \in \Sigma^\star \mid uv \in L\}$$

- $\partial_u(L)$ es el lenguaje de aquellas cadenas v tales que al agregar u como prefijo a v, el resultado pertenece a L.

Derivada de un lenguaje L con respecto a una cadena u, $\partial_u(L)$

- Sean L es un lenguaje y $u \in \Sigma^\star$. La derivada de L con respecto a u se define como

$$\partial_u(L) = \{v \in \Sigma^\star \mid uv \in L\}$$

- $\partial_u(L)$ es el lenguaje de aquellas cadenas v tales que al agregar u como prefijo a v, el resultado pertenece a L.
- Si L es regular entonces $\partial_u(L)$ es regular.

Derivada de un lenguaje L con respecto a una cadena u, $\partial_u(L)$

- Si L es regular entonces $\partial_u(L)$ es regular.

Derivada de un lenguaje L con respecto a una cadena u, $\partial_u(L)$

- Si L es regular entonces $\partial_u(L)$ es regular.
- Idea de la prueba:

Derivada de un lenguaje L con respecto a una cadena u, $\partial_u(L)$

- Si L es regular entonces $\partial_u(L)$ es regular.
- Idea de la prueba:
  - Sea M un AFD que reconoce a L.

Derivada de un lenguaje L con respecto a una cadena u, $\partial_u(L)$

- Si L es regular entonces $\partial_u(L)$ es regular.
- Idea de la prueba:
  - Sea M un AFD que reconoce a L.
  - Si $uv \in L$ entonces $\delta^\star(q_0, uv) = \delta^\star(\delta^\star(q_0, u), v) \in L$

Derivada de un lenguaje L con respecto a una cadena u, $\partial_u(L)$

- Si L es regular entonces $\partial_u(L)$ es regular.
- Idea de la prueba:
  - Sea M un AFD que reconoce a L.
  - Si $uv \in L$ entonces $\delta^\star(q_0, uv) = \delta^\star(\delta^\star(q_0, u), v) \in L$
  - Para reconocer a $\partial_u(L)$, basta definir M' únicamente cambiando el estado inicial de M a $q_0' = \delta^\star(q_0, u)$

Derivada de un lenguaje L con respecto a una cadena u, $\partial_u(L)$

- Si L es regular entonces $\partial_u(L)$ es regular.
- Idea de la prueba:
  - Sea M un AFD que reconoce a L.
  - Si $uv \in L$ entonces $\delta^\star(q_0, uv) = \delta^\star(\delta^\star(q_0, u), v) \in L$
  - Para reconocer a $\partial_u(L)$, basta definir M' únicamente cambiando el estado inicial de M a $q_0' = \delta^\star(q_0, u)$
- El concepto de derivada permite definir un algoritmo para el problema $ER \Rightarrow AFD$ sin pasar por un AFN.