Autómatas y Lenguajes Formales 2016-1

Maestría en Ciencia e Ingeniería de la Computación UNAM
Sesión 0: Introducción y Preliminares

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea

favio@ciencias.unam.mx

Facultad de Ciencias UNAM

3 de febrero de 2020

Noción Intuitiva de Conjunto

Teoría de Conjuntos

Para nuestros propósitos de aplicación bastará con dar la siguiente definición:

Un conjunto es una colección bien determinada de objetos.

En esta definición con "bien determinado" queremos decir que siempre es posible decidir de manera clara y concisa cuando un objeto dado pertenece o no a la colección que estamos definiendo.

Definición de Conjuntos

Teoría de Conjuntos

Existen dos maneras de definir conjuntos:

- Por *extensión*: dando una lista de todos los elementos del conjunto.
  Por ejemplo el conjunto de vocales se define por extensión como $A = \{a, e, i, o, u\}$.
- Por *comprensión o intensión*: dando una propiedad que se cumpla exactamente para los elementos del conjunto.
  Por ejemplo, el conjunto de vocales se define por comprensión como $A = \{x \mid x \text{ es vocal }\}$

El Universo y el Vacío

Teoría de Conjuntos

- Conjunto Universo: conjunto distinguido el cual nos servirá para determinar de manera única el tipo de objetos con los que estamos trabajando. Al momento de elegir un universo, denotado $\mathcal{U}$, éste queda fijo y estará prohibido usar objetos que no le pertenezcan.
- Conjunto Vacío: conjunto cuya característica principal es que no contiene elementos. Se denota con $\varnothing$.

La Relación de Pertenencia $\in$

Teoría de Conjuntos

La relación básica para manejar conjuntos es la relación de pertenencia

$$x \in A$$

ésta es una relación entre un objeto x, el cual podría a su vez ser un conjunto, y un conjunto A. Con respecto a los conjuntos universal y vacío se cumple lo siguiente:

- $\forall x(x \in \mathcal{U})$.
- $\forall x(x \notin \varnothing)$.

La Relación de Inclusión $\subseteq$

Teoría de Conjuntos

La segunda relación básica para manejar conjuntos es la *inclusión o contención* de conjuntos, la cual es una relación definible como sigue:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$$

Es decir, decimos que A está contenido en B o que A es *subconjunto* de B, lo cual denotamos con $A \subseteq B$ si todo elemento de A es también elemento de B.
Obsérvese que si $A = B$ entonces en particular $A \subseteq B$. Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$ entonces decimos que A es un subconjunto propio de B y escribimos $A \subset B$

Propiedades de la Inclusión

Teoría de Conjuntos

- $A \subseteq \mathcal{U}$
- $\varnothing \subseteq A$

- Extensionalidad $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Reflexividad: $A \subseteq A$

- Transitividad: Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.
- Subconjunto Propio: $A \subset B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

La Unión

Operaciones Básicas

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto que cuyos elementos están en A ó en B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

- Idempotencia: $A \cup A = A$.
- Simetria o Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$.
- Asociatividad: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- Neutro: $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
- Identidad: $A \cup \varnothing = A$.
- $A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B$.
- $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

La Intersección

Operaciones Básicas

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto que cuyos elementos estaban en A **y** en B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

- Idempotencia: $A \cap A = A$.
- Simetria o Conmutatividad: $A \cap B = B \cap A$.
- Asociatividad: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- Neutro: $A \cap \varnothing = \varnothing$
- Identidad: $A \cap \mathcal{U} = A$.
- $A \cap B \subseteq A, \; A \cap B \subseteq B$.
- $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

Distributividad

entre unión e intersección

La unión y la intersección se relacionan mediante las propiedades de distributividad:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

La Potencia

Operaciones Básicas

La potencia de un conjunto es el conjunto de todos los subconjuntos de A.

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

- $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$.
- $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.
- $A \in \mathcal{P}(A)$.
- Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

El Complemento

Otras Operaciones

El complemento de un conjunto A es el conjunto de elementos del universo que **no** pertenecen a A.

$$\overline{A} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$$

- Idempotencia: $\overline{\overline{A}} = A$.
- De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $\overline{\mathcal{U}} = \varnothing$
- $\overline{\varnothing} = \mathcal{U}$.
- Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

La Diferencia

Otras Operaciones

La diferencia de dos conjuntos A y B, denotada $A - B$, es el conjunto de todos los elementos de A que **no** están en B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

- $A - B \subseteq A$
- $A - A = \varnothing$
- $A - \varnothing = A$
- $A - \mathcal{U} = \varnothing$
- $\mathcal{U} - A = \overline{A}$
- $(A - B) \cap B = \varnothing$
- $(A - B) \cup B = A \cup B$
- $A - B = A \cap \overline{B}$

El Producto Cartesiano

Otras Operaciones

El producto cartesiano de dos conjuntos A, B se define como

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$$

Es decir, $A \times B$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas cuyo primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B.

$$\langle x, y\rangle \in A \times B \text{ si y sólo si } x \in A \text{ y } y \in B$$

Obsérvese que debido a que las parejas tienen un orden, si $A \neq B$ entonces $A \times B \neq B \times A$.
En general se puede definir el producto cartesiano de n conjuntos, denotado $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ análogamente.

Propiedades del Producto Cartesiano

Otras Operaciones

- Si $A = \varnothing$ entonces $A \times B = B \times A = \varnothing$.
- Si $A \times B = B \times A$ entonces $A = \varnothing$ ó $B = \varnothing$ ó $A = B$.
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

Relaciones Binarias

Definición

- Una relación binaria R de A a B es un conjunto de parejas ordenadas donde el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B.
- Formalmente una relación binaria R de A a B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir $R \subseteq A \times B$.
- Si $\langle a, b\rangle \in R$ escribimos a veces también $a\ R\ b$.
- Si $A = B$ entonces $R \subseteq A \times A$ y decimos simplemente que R es una relación binaria sobre A.

Operaciones con Relaciones

Como las relaciones son también conjuntos entonces podemos aplicarles todas las operaciones ya conocidas de conjuntos. En particular son mas usadas la unión, intersección, complemento y diferencia de relaciones.
Recordemos las definiciones en el caso particular de relaciones, si $R, S \subseteq A \times B$ son dos relaciones de A a B entonces

- $R \cup S = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ ó } \langle x, y\rangle \in S\}$
- $R \cap S = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ y } \langle x, y\rangle \in S\}$
- $\overline{R} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \notin R\}$
- $R - S = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ y } \langle x, y\rangle \notin S\}$

Operaciones con Relaciones

Inversa y Composición

Adicionalmente tenemos dos operaciones para relaciones que NO se definen para conjuntos en general, la relación inversa y la composición de relaciones, la cual sólo se define bajo condiciones especiales.

- Si $R \subseteq A \times B$ entonces la inversa de R, denotada R^{-1} es una relación de B a A, es decir, $R^{-1} \subseteq B \times A$, definida como sigue:

$$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$$

Operaciones con Relaciones

Inversa y Composición

- Si $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ entonces la composición de R y S denotada $R \circ S$ es una relación de A a C, es decir, $R \circ S \subseteq A \times C$ definida como sigue:

$$R \circ S = \{\langle x, z\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ y } \langle y, z\rangle \in S, \text{para algún } y \in B\}$$

Tipos de Relaciones

Relaciones Binarias

Si R es una relación binaria sobre un conjunto A podemos hablar de las siguientes propiedades de R:

- R es reflexiva si $\forall x \in A\, (\langle x, x \rangle \in R)$
- R es simétrica si $\forall x, y \in A\, (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$
- R es transitiva si $\forall x, y, z \in A\, (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$
- R es relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Tipos de Relaciones

Relaciones Binarias

- R es antirreflexiva si $\forall x \in A\,(\langle x, x\rangle \notin R)$
- R es antisimétrica si $\forall x, y \in A\,(\langle x, y\rangle \in A \ \wedge \langle y, x\rangle \in A \to x = y)$
- R es asimétrica si $\forall x, y \in A\,(\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \notin R)$

Funciones

Definición

Una función f de A en B, denotada $f : A \to B$ es una relación $f \subseteq A \times B$ tal que para cualquier $x \in A$ existe **un único** $y \in B$ tal que $\langle x, y \rangle \in f$. En tal caso decimos que y es la imagen de x bajo f y escribimos $y = f(x)$.
Dada una función $f : A \to B$ definimos los siguientes conjuntos:

- El dominio de f, denotado $dom(f)$ es:

$$dom(f) = A$$

  El dominio de f es el conjunto de primeras componentes de los pares de f.

Funciones
Definición

- El codominio, contradominio o rango de f, denotado $codom(f)$ o $ran(f)$ es el conjunto B.

$$codom(f) = B$$

- La imagen de f, denotada $Im(f)$ es el subconjunto de B que consta de las segundas componentes de f:

$$\begin{aligned} Im(f) = &\ \{y \in B \mid \exists x \in A\, (\langle x, y\rangle \in f)\} \\ = &\ \{y \in B \mid \exists x \in A\, (f(x) = y))\} \end{aligned}$$

Tipos de Funciones

De acuerdo a ciertas propiedades del dominio o codominio una función $f : A \to B$ se puede clasificar como sigue:

- f es una función *parcial* si algún elemento de $dom(f) = A$ no tiene imagen en B.
  Por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
  $$f(x) = \frac{1}{x}$$
  es una función parcial pues $f(0)$ no está definida.

Tipos de Funciones

- f es una función *inyectiva* o *"uno a uno"* si elementos distintos del dominio de f van a dar a imagenes distintas, o equivalentemente si dos elementos del dominio tienen la misma imagen entonces es que son el mismo elemento. Formalmente, f es inyectiva si:

$$\forall x \forall z\ (f(x) = f(z) \to x = z)$$

Tipos de Funciones

- f es *suprayectiva* o *sobre* si $codom(f) = Im(f)$ es decir,si cualquier elemento del codominio es imagen bajo f de algun elemento del dominio. Formalmente, f es sobre si:

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\ (f(x) = y)$$

- f es *biyectiva* si f es a la vez inyectiva y suprayectiva.