Autómatas y Lenguajes Formales

Tema 2: Lenguajes regulares y autómatas finitos

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea

favio@ciencias.unam.mx

Facultad de Ciencias UNAM[1]

27 de abril de 2019

[1] Con el apoyo del proyecto PAPIME PE102117

Lenguajes Regulares

Definición

Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^{\star}$ es regular si es generado a partir de los lenguajes básicos $\varnothing, \{\varepsilon\}, \{a\}$ (donde $a \in \Sigma$) mediante las operaciones de unión, concatenación y estrella de Kleene.

Lenguajes Regulares

Definición

Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^\star$ es regular si es generado a partir de los lenguajes básicos $\varnothing, \{\varepsilon\}, \{a\}$ (donde $a \in \Sigma$) mediante las operaciones de unión, concatenación y estrella de Kleene.
Recursivamente:

- $\varnothing$ y $\{\varepsilon\}$ son lenguajes regulares.

Lenguajes Regulares

Definición

Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^\star$ es regular si es generado a partir de los lenguajes básicos $\varnothing, \{\varepsilon\}, \{a\}$ (donde $a \in \Sigma$) mediante las operaciones de unión, concatenación y estrella de Kleene.
Recursivamente:

- $\varnothing$ y $\{\varepsilon\}$ son lenguajes regulares.
- Si $a \in \Sigma$ entonces $\{a\}$ es regular.

Lenguajes Regulares

Definición

Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^\star$ es regular si es generado a partir de los lenguajes básicos $\varnothing, \{\varepsilon\}, \{a\}$ (donde $a \in \Sigma$) mediante las operaciones de unión, concatenación y estrella de Kleene.
Recursivamente:

- $\varnothing$ y $\{\varepsilon\}$ son lenguajes regulares.
- Si $a \in \Sigma$ entonces $\{a\}$ es regular.
- Si L, M son regulares entonces $L \cup M$, LM y $L^\star$ son regulares.

Lenguajes Regulares

Definición

Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^\star$ es regular si es generado a partir de los lenguajes básicos $\varnothing, \{\varepsilon\}, \{a\}$ (donde $a \in \Sigma$) mediante las operaciones de unión, concatenación y estrella de Kleene.
Recursivamente:

- $\varnothing$ y $\{\varepsilon\}$ son lenguajes regulares.
- Si $a \in \Sigma$ entonces $\{a\}$ es regular.
- Si L, M son regulares entonces $L \cup M$, LM y $L^\star$ son regulares.
- Son todos.

Ejemplos

Lenguajes regulares

- Cualquier lenguaje finito es regular.

Ejemplos

Lenguajes regulares

- Cualquier lenguaje finito es regular.
- En efecto si $L = \{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \Sigma^\star$ entonces $L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$ con $L_i = \{w_i\}$. Cada lenguaje L_i es regular puesto que si $w_i = a_1 \ldots a_{k_i}$ con $a_j \in \Sigma$ entonces $L_i = \{a_1\}\{a_2\} \ldots \{a_{k_i}\}$ y cada $\{a_j\}$ es regular por definición.

Ejemplos

Lenguajes regulares

- Cualquier lenguaje finito es regular.

- En efecto si $L = \{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \Sigma^\star$ entonces $L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$ con $L_i = \{w_i\}$. Cada lenguaje L_i es regular puesto que si $w_i = a_1 \ldots a_{k_i}$ con $a_j \in \Sigma$ entonces $L_i = \{a_1\}\{a_2\}\ldots\{a_{k_i}\}$ y cada $\{a_j\}$ es regular por definición.

- En particular cualquier alfabeto Σ es un lenguaje regular.

Ejemplos

Lenguajes regulares

- Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ tenemos los siguientes lenguajes regulares infinitos:

Ejemplos

Lenguajes regulares

- Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ tenemos los siguientes lenguajes regulares infinitos:
  - $L_1 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ empieza con } b\} = \{b\}\Sigma^\star$

Ejemplos

Lenguajes regulares

- Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ tenemos los siguientes lenguajes regulares infinitos:
  - $L_1 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ empieza con } b\} = \{b\}\Sigma^\star$
  - $L_2 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene exactamente una } a\} = \{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star$

Ejemplos

Lenguajes regulares

- Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ tenemos los siguientes lenguajes regulares infinitos:
  - $L_1 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ empieza con } b\} = \{b\}\Sigma^\star$
  - $L_2 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene exactamente una } a\} = \{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star$
  - $L_3 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene la subcadena } ba\} = \Sigma^\star\{ba\}\Sigma^\star$

Ejemplos

Lenguajes regulares

- Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ tenemos los siguientes lenguajes regulares infinitos:
  - $L_1 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ empieza con } b\} = \{b\}\Sigma^\star$
  - $L_2 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene exactamente una } a\} = \{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star$
  - $L_3 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene la subcadena } ba\} = \Sigma^\star\{ba\}\Sigma^\star$
  - $L_4 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene exactamente dos bes}\} = \{a\}^\star\{b\}\{a\}^\star\{b\}\{a\}^\star$

Ejemplos

Lenguajes regulares

- Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ tenemos los siguientes lenguajes regulares infinitos:
  - $L_1 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ empieza con } b\} = \{b\}\Sigma^\star$
  - $L_2 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene exactamente una } a\} = \{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star$
  - $L_3 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene la subcadena } ba\} = \Sigma^\star\{ba\}\Sigma^\star$
  - $L_4 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene exactamente dos bes}\} = \{a\}^\star\{b\}\{a\}^\star\{b\}\{a\}^\star$
  - $L_5 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene un número par de aes}\} = \{b\}^\star \cup \left(\{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star\right)^\star$

Ejemplos

Lenguajes regulares

- Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ tenemos los siguientes lenguajes regulares infinitos:
  - $L_1 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ empieza con } b\} = \{b\}\Sigma^\star$
  - $L_2 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene exactamente una } a\} = \{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star$
  - $L_3 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene la subcadena } ba\} = \Sigma^\star\{ba\}\Sigma^\star$
  - $L_4 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene exactamente dos bes}\} = \{a\}^\star\{b\}\{a\}^\star\{b\}\{a\}^\star$
  - $L_5 = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ contiene un número par de aes}\} = \{b\}^\star \cup \left(\{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star\right)^\star$
- No todo lenguaje infinito es regular

Problemas de interés acerca de lenguajes regulares

Dado un lenguaje regular $L \subseteq \Sigma^{\star}$ existen diversas problemas de decisión (es decir, problemas cuya respuesta es sí o no) acerca de L, enunciamos algunos de ellos que tienen solución algorítmica.

1. Problema de vacuidad: ¿ Es L el lenguaje vacío ?

Problemas de interés acerca de lenguajes regulares

Dado un lenguaje regular $L \subseteq \Sigma^\star$ existen diversas problemas de decisión (es decir, problemas cuya respuesta es sí o no) acerca de L, enunciamos algunos de ellos que tienen solución algorítmica.

1. Problema de vacuidad: ¿ Es L el lenguaje vacío ?

2. Problema de finitud: ¿ Es L finito ?

Problemas de interés acerca de lenguajes regulares

Dado un lenguaje regular $L \subseteq \Sigma^\star$ existen diversas problemas de decisión (es decir, problemas cuya respuesta es sí o no) acerca de L, enunciamos algunos de ellos que tienen solución algorítmica.

1. Problema de vacuidad: ¿ Es L el lenguaje vacío ?
2. Problema de finitud: ¿ Es L finito ?
3. Problema de la pertenencia: Dada $w \in \Sigma^\star$, ¿ $w \in L$?

Problemas de interés acerca de lenguajes regulares

Dado un lenguaje regular $L \subseteq \Sigma^\star$ existen diversas problemas de decisión (es decir, problemas cuya respuesta es sí o no) acerca de L, enunciamos algunos de ellos que tienen solución algorítmica.

1. Problema de vacuidad: ¿ Es L el lenguaje vacío ?
2. Problema de finitud: ¿ Es L finito ?
3. Problema de la pertenencia: Dada $w \in \Sigma^\star$, ¿ $w \in L$?
4. Problema de la equivalencia: Dado $M \subseteq \Sigma^\star$, ¿ $M = L$?

Expresiones regulares

Definición

Un mecanismo de suma importancia para denotar lenguajes regulares es por medio de las llamadas expresiones regulares, definidas recursivamente como sigue:

- $\varnothing$ es una expresión regular.

Expresiones regulares

Definición

Un mecanismo de suma importancia para denotar lenguajes regulares es por medio de las llamadas expresiones regulares, definidas recursivamente como sigue:

- $\varnothing$ es una expresión regular.
- ε es una expresión regular.

Expresiones regulares

Definición

Un mecanismo de suma importancia para denotar lenguajes regulares es por medio de las llamadas expresiones regulares, definidas recursivamente como sigue:

- $\varnothing$ es una expresión regular.
- ε es una expresión regular.
- Si $a \in \Sigma$ entonces a es una expresión regular.

Expresiones regulares

Definición

Un mecanismo de suma importancia para denotar lenguajes regulares es por medio de las llamadas expresiones regulares, definidas recursivamente como sigue:

- $\varnothing$ es una expresión regular.
- ε es una expresión regular.
- Si $a \in \Sigma$ entonces a es una expresión regular.
- Si α, β son expresiones regulares entonces $\alpha\beta,\ \alpha + \beta,\ \alpha^\star$ son expresiones regulares.

Expresiones regulares

Definición

Un mecanismo de suma importancia para denotar lenguajes regulares es por medio de las llamadas expresiones regulares, definidas recursivamente como sigue:

- $\varnothing$ es una expresión regular.
- ε es una expresión regular.
- Si *a* $\in \Sigma$ entonces *a* es una expresión regular.
- Si α, β son expresiones regulares entonces $\alpha\beta,\ \alpha + \beta,\ \alpha^{\star}$ son expresiones regulares.
- Son todas.

Significado de una ER

Expresiones Regulares

Dada una expresión regular α, su significado es un lenguaje regular, denotado $L(\alpha)$, definido como sigue:

- $L(\varnothing) = \varnothing$

Significado de una ER

Expresiones Regulares

Dada una expresión regular α, su significado es un lenguaje regular, denotado $L(\alpha)$, definido como sigue:

- $L(\varnothing) = \varnothing$
- $L(\varepsilon) = \varepsilon$

Significado de una ER

Expresiones Regulares

Dada una expresión regular α, su significado es un lenguaje regular, denotado $L(\alpha)$, definido como sigue:

- $L(\varnothing) = \varnothing$
- $L(\varepsilon) = \varepsilon$
- $L(a) = \{a\}$ si $\alpha \in \Sigma$

Significado de una ER

Expresiones Regulares

Dada una expresión regular α, su significado es un lenguaje regular, denotado $L(\alpha)$, definido como sigue:

- $L(\varnothing) = \varnothing$
- $L(\varepsilon) = \varepsilon$
- $L(a) = \{a\} \quad$ si $\alpha \in \Sigma$
- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$

Significado de una ER

Expresiones Regulares

Dada una expresión regular α, su significado es un lenguaje regular, denotado $L(\alpha)$, definido como sigue:

- $L(\varnothing) = \varnothing$
- $L(\varepsilon) = \varepsilon$
- $L(a) = \{a\}$ si $\alpha \in \Sigma$
- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
- $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$

Significado de una ER

Expresiones Regulares

Dada una expresión regular α, su significado es un lenguaje regular, denotado $L(\alpha)$, definido como sigue:

- $L(\varnothing) = \varnothing$
- $L(\varepsilon) = \varepsilon$
- $L(a) = \{a\} \quad$ si $\alpha \in \Sigma$
- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
- $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- $L(\alpha^\star) = L(\alpha)^\star$

Lenguajes y Expresiones Regulares

Se cumple la siguiente relación entre lenguajes y expresiones regulares:

Proposición

Un lenguaje $M \subseteq \Sigma^\star$ *es regular si y sólo si existe una expresión regular* α *tal que* $M = L(\alpha)$.

Lenguajes y Expresiones Regulares

Se cumple la siguiente relación entre lenguajes y expresiones regulares:

Proposición

Un lenguaje $M \subseteq \Sigma^\star$ *es regular si y sólo si existe una expresión regular* α *tal que* $M = L(\alpha)$*.*

Demostración.

La dirección $\Leftarrow$ es directa. Para la otra dirección hacemos inducción estructural. $\square$

Equivalencia de Expresiones regulares

Definición

Dadas dos expresiones regulares α, β, decimos que son equivalentes y escribimos $\alpha = \beta$, si y sólo si α y β tienen el mismo significado, es decir, si y sólo si $L(\alpha) = L(\beta)$.

Propiedades

Expresiones Regulares

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Propiedades

Expresiones Regulares

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha + \varnothing = \alpha \qquad \alpha + \alpha = \alpha$$

Propiedades

Expresiones Regulares

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha + \varnothing = \alpha \qquad \alpha + \alpha = \alpha$$

$$\alpha\varepsilon = \alpha \qquad \alpha\varnothing = \varnothing$$

Propiedades

Expresiones Regulares

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha + \varnothing = \alpha \qquad \alpha + \alpha = \alpha$$

$$\alpha\varepsilon = \alpha \qquad \alpha\varnothing = \varnothing$$

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

Propiedades

Expresiones Regulares

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

Propiedades

Expresiones Regulares

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

$$\varepsilon^\star = \varepsilon \qquad \varnothing^\star = \varepsilon$$

Propiedades

Expresiones Regulares

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

$$\varepsilon^\star = \varepsilon \qquad \varnothing^\star = \varepsilon$$

$$\alpha\alpha^\star = \alpha^\star\alpha \qquad \alpha^\star = \alpha^\star\alpha^\star = (\alpha^\star)^\star$$

Propiedades

Expresiones Regulares

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

$$\varepsilon^\star = \varepsilon \qquad \varnothing^\star = \varepsilon$$

$$\alpha\alpha^\star = \alpha^\star\alpha \qquad \alpha^\star = \alpha^\star\alpha^\star = (\alpha^\star)^\star$$

$$\alpha^\star = \varepsilon + \alpha\alpha^\star \qquad (\alpha+\beta)^\star = (\alpha^\star + \beta^\star)^\star$$

Propiedades

Expresiones Regulares

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

$$\varepsilon^\star = \varepsilon \qquad \varnothing^\star = \varepsilon$$

$$\alpha\alpha^\star = \alpha^\star\alpha \qquad \alpha^\star = \alpha^\star\alpha^\star = (\alpha^\star)^\star$$

$$\alpha^\star = \varepsilon + \alpha\alpha^\star \qquad (\alpha+\beta)^\star = (\alpha^\star + \beta^\star)^\star$$

Si $L(\alpha) \subseteq L(\beta)$ entonces $\alpha + \beta = \beta$

Propiedades de cerradura

Lenguajes regulares

Las propiedades de cerradura nos permiten construir nuevos lenguajes regulares a partir de lenguajes ya conocidos por medio de algunas operaciones entre lenguajes.

Propiedades de cerradura

Lenguajes regulares

Las propiedades de cerradura nos permiten construir nuevos lenguajes regulares a partir de lenguajes ya conocidos por medio de algunas operaciones entre lenguajes.
Si L, M son lenguajes regulares entonces:

- $L \cup M$ es regular.

Propiedades de cerradura

Lenguajes regulares

Las propiedades de cerradura nos permiten construir nuevos lenguajes regulares a partir de lenguajes ya conocidos por medio de algunas operaciones entre lenguajes.
Si L, M son lenguajes regulares entonces:

- $L \cup M$ es regular.
- LM es regular.

Propiedades de cerradura

Lenguajes regulares

Las propiedades de cerradura nos permiten construir nuevos lenguajes regulares a partir de lenguajes ya conocidos por medio de algunas operaciones entre lenguajes.
Si L, M son lenguajes regulares entonces:

- $L \cup M$ es regular.
- LM es regular.
- $L^{\star}$ es regular.

Propiedades de cerradura

Lenguajes regulares

Las propiedades de cerradura nos permiten construir nuevos lenguajes regulares a partir de lenguajes ya conocidos por medio de algunas operaciones entre lenguajes.
Si L, M son lenguajes regulares entonces:

- $L \cup M$ es regular.
- LM es regular.
- $L^\star$ es regular.
- L^+ es regular.

Propiedades de cerradura

Lenguajes regulares

Las propiedades de cerradura nos permiten construir nuevos lenguajes regulares a partir de lenguajes ya conocidos por medio de algunas operaciones entre lenguajes.
Si L, M son lenguajes regulares entonces:

- $L \cup M$ es regular.
- LM es regular.
- $L^{\star}$ es regular.
- L^{+} es regular.
- $\overline{L}$ es regular

Propiedades de cerradura

Lenguajes regulares

Las propiedades de cerradura nos permiten construir nuevos lenguajes regulares a partir de lenguajes ya conocidos por medio de algunas operaciones entre lenguajes.

Si L, M son lenguajes regulares entonces:

- $L \cup M$ es regular.
- LM es regular.
- $L^{\star}$ es regular.
- L^{+} es regular.
- $\overline{L}$ es regular
- $L \cap M$ es regular.

Propiedades de cerradura

Lenguajes regulares

Las propiedades de cerradura nos permiten construir nuevos lenguajes regulares a partir de lenguajes ya conocidos por medio de algunas operaciones entre lenguajes.
Si L, M son lenguajes regulares entonces:

- $L \cup M$ es regular.
- LM es regular.
- $L^\star$ es regular.
- L^+ es regular.
- $\overline{L}$ es regular
- $L \cap M$ es regular.
- $L - M$ es regular.

Aplicaciones de las expresiones regulares

- Búsqueda y sustitución en editores de texto (vi, emacs, etc.)

Aplicaciones de las expresiones regulares

- Búsqueda y sustitución en editores de texto (vi, emacs, etc.)
- Caza de patrones (pattern matching) y procesamiento de textos y conjuntos de datos, por ejemplo en minería de datos (grep, sed, awk, perl, etc.)

Aplicaciones de las expresiones regulares

- Búsqueda y sustitución en editores de texto (vi, emacs, etc.)
- Caza de patrones (pattern matching) y procesamiento de textos y conjuntos de datos, por ejemplo en minería de datos (grep, sed, awk, perl, etc.)
- Implementación de lenguajes de programación (fase de análisis léxico): conversión del programa fuente en una sucesión de elementos léxicos (lexemas o tokens), en esta sucesión se identifican las distintas componentes de un programa, como son palabras reservadas, identificadores, tipos de datos, etc. (lex, flex, etc.)

¿Cuando no es L regular?

Lenguajes Regulares

No todos los lenguajes son regulares, por ejemplo:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

no es definible mediante una expresión regular.

¿Cuando no es L regular?

Lenguajes Regulares

No todos los lenguajes son regulares, por ejemplo:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

no es definible mediante una expresión regular.

- ¿Cómo decidir cuando un lenguaje no es regular?

¿Cuando no es L regular?

Lenguajes Regulares

No todos los lenguajes son regulares, por ejemplo:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

no es definible mediante una expresión regular.

- ¿Cómo decidir cuando un lenguaje no es regular?
- Mediante propiedades de cerradura.

¿Cuando no es L regular?

Lenguajes Regulares

No todos los lenguajes son regulares, por ejemplo:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

no es definible mediante una expresión regular.

- ¿Cómo decidir cuando un lenguaje no es regular?
- Mediante propiedades de cerradura.
- Mediante el lema del bombeo (pendiente).

Autómatas

Introducción

- Un autómata es una representación abstracta de una máquina.

Autómatas

Introducción

- Un autómata es una representación abstracta de una máquina.
- Los aspectos relevantes para nosotros son diseño y especificación de autómatas.

Autómatas

Introducción

- Un autómata es una representación abstracta de una máquina.
- Los aspectos relevantes para nosotros son diseño y especificación de autómatas.
- La abstracción captura únicamente el comportamiento de una máquina, es decir, las secuencias de eventos que ocurren.

Autómatas

Aplicaciones

- Diseño de circuitos digitales.

Autómatas

Aplicaciones

- Diseño de circuitos digitales.
- Analizadores léxicos para compiladores.

Autómatas

Aplicaciones

- Diseño de circuitos digitales.
- Analizadores léxicos para compiladores.
- Búsqueda de palabras clave en internet.

Autómatas

Aplicaciones

- Diseño de circuitos digitales.
- Analizadores léxicos para compiladores.
- Búsqueda de palabras clave en internet.
- Verificación de sistemas de estados finitos. (por ejemplo protocolos de comunicación).

Autómatas

Aplicaciones

- Diseño de circuitos digitales.
- Analizadores léxicos para compiladores.
- Búsqueda de palabras clave en internet.
- Verificación de sistemas de estados finitos. (por ejemplo protocolos de comunicación).
- Modelado de sistemas discretos en general.

Tipos de Autómatas

- Autómatas finitos: deterministas, no deterministas.

Tipos de Autómatas

- Autómatas finitos: deterministas, no deterministas.
- Autómatas de Pila.

Tipos de Autómatas

- Autómatas finitos: deterministas, no deterministas.
- Autómatas de Pila.
- Autómatas Linealmente Acotados.

Tipos de Autómatas

- Autómatas finitos: deterministas, no deterministas.
- Autómatas de Pila.
- Autómatas Linealmente Acotados.
- Máquinas de Turing.

Tipos de Autómatas

- Autómatas finitos: deterministas, no deterministas.
- Autómatas de Pila.
- Autómatas Linealmente Acotados.
- Máquinas de Turing.
- Otros: probabilísticos, celulares, paralelos,etc.

Tipos de Autómatas

¿Cómo se diferencian?

- Detalles particulares del modelo.

Tipos de Autómatas

¿Cómo se diferencian?

- Detalles particulares del modelo.
- Complejidad.

Tipos de Autómatas

¿Cómo se diferencian?

- Detalles particulares del modelo.
- Complejidad.
- Funciones que pueden calcular.

Tipos de Autómatas

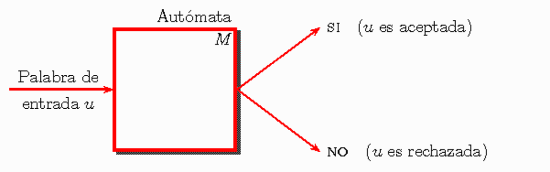
¿Cómo se diferencian?

- Detalles particulares del modelo.
- Complejidad.
- Funciones que pueden calcular.
- Lenguajes que pueden reconocer o aceptar.

Modelo General

Autómatas

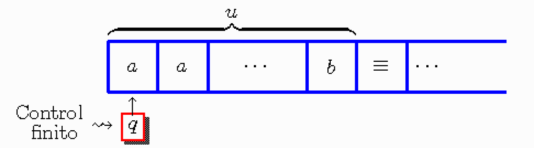
Un autómata finito es una máquina abstracta que procesa cadenas aceptándolas o rechazándolas.



Lectura y unidad de control

Autómatas

Las cadenas de entrada se escriben sobre una cinta potencialmente infinita hacia la izquierda dividida en casillas y posee una unidad de control o cabeza lectora que lee desde la primera casilla y puede cambiar el estado interno de la máquina dependiendo del símbolo leido.



Autómatas Finitos Deterministas

Definición

Un autómata finito determinista (AFD) es una quintupla

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$$

Autómatas Finitos Deterministas

Definición

Un autómata finito determinista (AFD) es una quintupla

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$$

donde

- Q es un conjunto finito de estados.

Autómatas Finitos Deterministas

Definición

Un autómata finito determinista (AFD) es una quintupla

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$$

donde

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.

Autómatas Finitos Deterministas

Definición

Un autómata finito determinista (AFD) es una quintupla

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$$

donde

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es la función de transición.

Autómatas Finitos Deterministas

Definición

Un autómata finito determinista (AFD) es una quintupla

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$$

donde

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es la función de transición.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.

Autómatas Finitos Deterministas

Definición

Un autómata finito determinista (AFD) es una quintupla

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$$

donde

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es la función de transición.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Autómatas Finitos Deterministas

Ejemplo

$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
q_0 : estado inicial
$F = \{q_0, q_2\}$, estados de aceptación.
Función de transición δ:

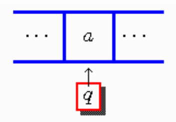
δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_1

$\delta(q_0, a) = q_0$ $\quad$ $\delta(q_0, b) = q_1$
$\delta(q_1, a) = q_1$ $\quad$ $\delta(q_1, b) = q_2$
$\delta(q_2, a) = q_1$ $\quad$ $\delta(q_2, b) = q_1$

Determinismo

Autómatas finitos

Los autómatas finitos descritos arriba se denominan **autómatas finitos deterministas** ya que para cada estado q y para cada símbolo $a \in \Sigma$, la función de transición $\delta(q, a)$ siempre está definida. Es decir, la función de transición δ *determina unívocamente* la acción que el autómata realiza cuando el control finito se encuentra en un estado q leyendo un símbolo a sobre la cinta:



Lenguaje de aceptación

Autómatas Finitos

Dado un autómata M, el lenguaje aceptado o reconocido por M se denota $L(M)$ y se define por

$$\boxed{\begin{aligned} L(M) \quad := \quad \{u \in \Sigma^* : M \text{ se detiene al procesar} \\ u \text{ en un estado } q \in F\}. \end{aligned}}$$

Diagrama de estados

Autómatas finitos

Un autómata finito se puede representar por medio de un grafo dirigido y etiquetado.

Diagrama de estados

Autómatas finitos

Un autómata finito se puede representar por medio de un grafo dirigido y etiquetado. El grafo de un autómata se obtiene como sigue:

- Los vértices o nodos son los estados del autómata.

Diagrama de estados

Autómatas finitos

Un autómata finito se puede representar por medio de un grafo dirigido y etiquetado. El grafo de un autómata se obtiene como sigue:

- Los vértices o nodos son los estados del autómata.
- El estado q se representa por:

Diagrama de estados

Autómatas finitos

Un autómata finito se puede representar por medio de un grafo dirigido y etiquetado. El grafo de un autómata se obtiene como sigue:

- Los vértices o nodos son los estados del autómata.
- El estado q se representa por:

- El estado inicial q_0 se representa por:

Diagrama de estados

Autómatas finitos

- Un estado final q se representa por:

Diagrama de estados

Autómatas finitos

- Un estado final q se representa por:

- La transición $\delta = (q, a) = p$ se representa en la forma:

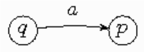
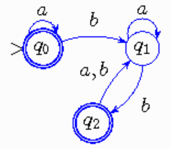


Diagrama de estados

Ejemplo

$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
q_0 : estado inicial
$F = \{q_0, q_2\}$, estados de aceptación.
Función de transición δ:

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_1



Estado de error

Diagrama de estados

Para autómatas deterministas se adopta la siguiente convención adicional con respecto a los diagramas de estados:

Estado de error

Diagrama de estados

Para autómatas deterministas se adopta la siguiente convención adicional con respecto a los diagramas de estados:

- Se asume que las aristas no dibujadas explícitamente conducen a un estado de no-aceptación llamado estado de error.

Estado de error

Diagrama de estados

Para autómatas deterministas se adopta la siguiente convención adicional con respecto a los diagramas de estados:

- Se asume que las aristas no dibujadas explícitamente conducen a un estado de no-aceptación llamado estado de error.
- Es decir, en el diagrama de estados se indican únicamente las aristas que conduzcan a trayectorias de aceptación. Esto permite simplificar considerablemente los diagramas.

Problemas de interés

Autómatas finitos

Los problemas que nos interesa resolver son:

Problemas de interés

Autómatas finitos

Los problemas que nos interesa resolver son:

- Dado un autómata M determinar el lenguaje aceptado por M.

Problemas de interés

Autómatas finitos

Los problemas que nos interesa resolver son:

- Dado un autómata M determinar el lenguaje aceptado por M.
- Dado un lenguaje regular L diseñar un autómata finito determinista M que acepte o reconozca a L, es decir, tal que $L(M) = L$.

Problemas de interés

Autómatas finitos

Los problemas que nos interesa resolver son:

- Dado un autómata M determinar el lenguaje aceptado por M.
- Dado un lenguaje regular L diseñar un autómata finito determinista M que acepte o reconozca a L, es decir, tal que $L(M) = L$.
- Más adelante se demostrará que estos problemas siempre tienen solución.