

# Autómatas y Lenguajes Formales 2016-1

## Maestría en Ciencia e Ingeniería de la Computación UNAM

### Tema 4: AFN con $\varepsilon$ -transiciones, Teorema de Kleene I

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea  
[favio@ciencias.unam.mx](mailto:favio@ciencias.unam.mx)

Facultad de Ciencias UNAM

29 de enero de 2020



# AFN $\Rightarrow$ AFD

## Construcción de subconjuntos

Dado un AFN  $M = \langle Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F \rangle$  definimos un AFD  $M^d = \langle Q^d, \Sigma^d, \delta, q_0^d, F^d \rangle$  como sigue:

- $Q^d = \mathcal{P}(Q)$ .
- $\Sigma^d = \Sigma$ .
- $\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_N(q, a)$
- $q_0^d = \{q_0\}$
- $F^d = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$
- Ambos autómatas son equivalentes, es decir,  $L(M) = L(M^d)$ .



# Autómatas No-deterministas con $\varepsilon$ -transiciones

## Definición

Un autómata finito **no** determinista con  $\varepsilon$ -transiciones (AFN $\varepsilon$ ) es una quintupla

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$$

donde

- $Q$  es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma$  es el alfabeto de entrada.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  es la función de transición.
- $q_0 \in Q$  es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$  es el conjunto de estados finales.



# AFN $_{\varepsilon}$

## Observaciones

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

- Obsérvese que la única diferencia está en el dominio de  $\delta$ .
- Transiciones de la forma  $\delta(q, \varepsilon) = a$  están definidas.
- Tales transiciones indican que la máquina puede cambiar de estado **sin** leer ningún símbolo.
- Esto causa un no-determinismo más complicado de modelar matemáticamente pero tiene grandes ventajas.



# AFN $\varepsilon$

## Observaciones

- Se permiten múltiples cómputos para una cadena de entrada.
- Pueden existir cómputos bloqueados.
- A diferencia de los AFD y AFN pueden existir cómputos infinitos, es decir, surge la no-terminación.
- La presencia de  $\varepsilon$ -transiciones permite mayor libertad en el diseño.



# $\varepsilon$ -cerradura de un estado

## AFN $\varepsilon$

Dado un estado  $q$ , definimos la  $\varepsilon$ -cerradura de  $q$  como el conjunto de estados alcanzables desde  $q$  mediante cero o más  $\varepsilon$ -transiciones. Es decir

$$Cl_{\varepsilon}(q) = \{s \in Q \mid \exists p_1, \dots, p_n \text{ con } p_1 = q, p_n = s, p_i \in \delta(p_{i-1}, \varepsilon)\}$$

Tal definición se puede dar recursivamente:

- $q \in Cl_{\varepsilon}(q)$
- Si  $r \in Cl_{\varepsilon}(q)$  y  $\delta(r, \varepsilon) = s$  entonces  $s \in Cl_{\varepsilon}(q)$
- La definición de  $\varepsilon$ -cerradura se extiende a conjuntos de estados como sigue:

$$Cl_{\varepsilon}(S) = \bigcup_{q \in S} Cl_{\varepsilon}(q)$$



# Función $\delta^*$

AFN $\varepsilon$

Sea  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un AFN $\varepsilon$ . La función de transición  $\delta$  se extiende a cadenas mediante una función

$$\delta^* : Q \times (\Sigma^* \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

definida recursivamente como sigue:

$$\delta^*(q, \varepsilon) = Cl_\varepsilon(q)$$

$$\delta^*(q, wa) = Cl_\varepsilon \left( \bigcup_{p \in \delta^*(q, w)} \delta(p, a) \right)$$



# Eliminación de $\varepsilon$ -transiciones

AFN  $\Rightarrow$  AFN $_{\varepsilon}$

Cualquier AFN $_{\varepsilon}$  es inmediatamente un AFN $_{\varepsilon}$  con la particularidad de que no existen  $\varepsilon$ -transiciones.



# Eliminación de $\varepsilon$ -transiciones

$\text{AFN}_\varepsilon \Rightarrow \text{AFN}$

Dado un  $\text{AFN}_\varepsilon M_1 = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{10}, F_1 \rangle$  existe un  $\text{AFN}$  equivalente  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , definido mediante:

- $Q := Q_1$
- $q_0 := q_{10}$
- $\delta(q, a) = \delta_1^*(q, a) = CI_\varepsilon \left( \bigcup_{p \in CI_\varepsilon(q)} \delta_1(p, a) \right)$
- $F := F_1 \cup \{q_{10}\}$  si  $CI_\varepsilon(q_{10}) \cap F_1 \neq \emptyset$
- $F := F_1$  en caso contrario.



# Autómatas Finitos

AFD  $\Leftrightarrow$  AFN  $\Leftrightarrow$  AFN $_{\varepsilon}$

- Con la equivalencia AFN  $\Leftrightarrow$  AFN $_{\varepsilon}$  hemos cerrado el ciclo de equivalencias de autómatas finitos.
- Cualquier tipo de autómata finito puede convertirse en un AFD y viceversa, es decir:

$$AFD \Leftrightarrow AFN \Leftrightarrow AFN_{\varepsilon}$$

- Nuestra siguiente meta es probar el teorema de Kleene, el cual es uno de los resultados más importantes en la teoría de la computación pues asegura la equivalencia entre dos de nuestros tres conceptos fundamentales, los autómatas finitos y los lenguajes regulares.



# Teorema de Kleene

## Teorema (Kleene)

*Un lenguaje es regular si y sólo si es aceptado por un autómata finito.*

### Demostración.

La prueba es en dos partes:

- I Síntesis: Dado un lenguaje regular  $L$  existe un autómata finito  $M$  tal que  $L = L(M)$ .
- II Análisis: Dado un autómata finito  $M$  existe una expresión regular  $\alpha$  tal que  $L(M) = L(\alpha)$ . Es decir,  $L(M)$  es regular.



# Teorema de Kleene I

ER  $\Rightarrow$  AF

- El teorema de síntesis de Kleene se probará construyendo un autómata finito para un lenguaje regular dado analizando la forma de la expresión regular que genera al lenguaje.
- La demostración es constructiva y se hará mediante inducción sobre las expresiones regulares.



# Teorema de Kleene I

Base de la Inducción,  $\alpha = \emptyset$

Si  $\alpha = \emptyset$  entonces el siguiente autómata reconoce a  $L(\alpha)$ :



# Teorema de Kleene I

Base de la Inducción,  $\alpha = \varepsilon$

Si  $\alpha = \varepsilon$  entonces el siguiente autómata reconoce a  $L(\alpha)$ :



# Teorema de Kleene I

Base de la Inducción,  $\alpha = a$

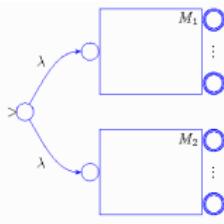
Si  $\alpha = a$  entonces el siguiente autómata reconoce a  $L(\alpha)$ :



# Teorema de Kleene I

Paso Inductivo,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

Si  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  entonces el siguiente autómata reconoce a  $L(\alpha)$ :



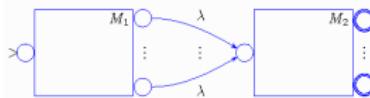
donde  $M_1, M_2$  son autómatas que reconocen a  $L(\alpha_1), L(\alpha_2)$  dados por la hipótesis de inducción.



# Teorema de Kleene I

Paso Inductivo,  $\alpha = \alpha_1\alpha_2$

Si  $\alpha = \alpha_1\alpha_2$  entonces el siguiente autómata reconoce a  $L(\alpha)$ :



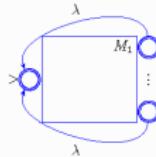
donde  $M_1, M_2$  son autómatas que reconocen a  $L(\alpha_1), L(\alpha_2)$  dados por la hipótesis de inducción.



# Teorema de Kleene I

Paso Inductivo,  $\alpha = \alpha_1^*$

Si  $\alpha = \alpha_1^*$  entonces el siguiente autómata reconoce a  $L(\alpha)$ :



donde  $M_1$  es un autómata que reconoce a  $L(\alpha_1)$  dados por la hipótesis de inducción.



# Teorema de Análisis de Kleene

$AF \Rightarrow ER$

## Teorema (Análisis de Kleene)

Dado un autómata finito  $M$  existe una expresión regular  $\alpha$  tal que  $L(M) = L(\alpha)$ . Es decir,  $L(M)$  es regular.

## Demostración.

Existen diversas demostraciones, nosotros usaremos el método de ecuaciones características usando el lema de Arden.



# Ecuaciones de lenguajes

## Kleene II

Sean  $A, B \subseteq \Sigma^*$  y  $X$  una variable:

- Una ecuación lineal derecha para  $X$  es una expresión de la forma:

$$X = AX + B$$

- Análogamente, una ecuación lineal izquierda es una expresión de la forma:

$$X = XA + B$$

- Donde el símbolo  $+$  denota a la unión de lenguajes.



## Lema de Arden

Sean  $A, B \subseteq \Sigma^*$  dos lenguajes y  $X = AX + B$  una ecuación lineal derecha. Entonces

- $A^*B$  es una solución de la ecuación, es decir,  $A^*B = A(A^*B) + B$ .
- Si  $C$  es otra solución entonces  $A^*B \subseteq C$ , es decir,  $A^*B$  es la solución mínima.
- Si  $\varepsilon \notin A$  entonces  $A^*B$  es la única solución.



# El sistema de ecuaciones de un AFN

$AF \Rightarrow ER$

Dado un AFN  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  tal que  $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$ . Definimos los siguientes conjuntos:

- El conjunto de cadenas que se aceptan desde el estado  $q_i$ , para cualquier  $1 \leq i \leq n$ :

$$L_i = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_i, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

- $L_0$  es el lenguaje aceptado por  $M$ , es decir,  $L_0 = L(M)$ .
- En general no es sencillo calcular directamente los conjuntos  $L_i$ .



# El sistema de ecuaciones de un AFN

$AF \Rightarrow ER$

- El conjunto de símbolos de  $\Sigma$  tal que existe una transición del estado  $q_i$  al estado  $q_j$ , para cualesquiera  $1 \leq i, j \leq n$ .

$$X_{i,j} = \{a \in \Sigma \mid q_j \in \delta(q_i, a)\}$$

- El conjunto auxiliar  $Y_i$  que indica si  $\varepsilon$  es aceptada desde  $q_i$

$$Y_i = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } q_i \in F \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$



# El sistema de ecuaciones de un AFN

AF  $\Rightarrow$  ER

La siguiente propiedad es fácil de demostrar para cualquier  $1 \leq i \leq n$ .

$$L_i = \sum_{j=0}^n X_{i,j} L_j + Y_i$$

- Dicha propiedad genera el llamado sistema de ecuaciones características de una AFN.
- El lema de Arden nos indica como calcular los conjuntos  $L_i$ .



# Teorema de Análisis de Kleene

## Idea de la demostración

- Dado el autómata  $M$  construir los conjuntos

$$X_{i,j}, \quad Y_i$$

- Resolver el sistema de ecuaciones características mediante el Lema de Arden.
- La solución para  $L_0$  genera una expresión regular para  $L(M)$ .

