# Autómatas y Lenguajes Formales

## Sesión 0: Preliminares

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea

favio@ciencias.unam.mx

Facultad de Ciencias UNAM [1]

27 de abril de 2019

[1] Con el apoyo del proyecto PAPIME PE102117

# Noción Intuitiva de Conjunto

## Teoría de Conjuntos

Para nuestros propósitos de aplicación bastará con dar la siguiente definición:

*Un conjunto es una colección bien determinada de objetos.*

En esta definición con "bien determinado" queremos decir que siempre es posible decidir de manera clara y concisa cuando un objeto dado pertenece o no a la colección que estamos definiendo.

# Definición de Conjuntos

## Teoría de Conjuntos

Existen dos maneras de definir conjuntos:

- Por *extensión*: dando una lista de todos los elementos del conjunto.
  Por ejemplo el conjunto de vocales se define por extensión como $A = \{a, e, i, o, u\}$.
- Por *comprensión o intensión*: dando una propiedad que se cumpla exactamente para los elementos del conjunto.
  Por ejemplo, el conjunto de vocales se define por comprensión como $A = \{x \mid x \text{ es vocal } \}$

# El Universo y el Vacío

## Teoría de Conjuntos

- Conjunto Universo: conjunto distinguido el cual nos servirá para determinar de manera única el tipo de objetos con los que estamos trabajando. Al momento de elegir un universo, denotado $\mathcal{U}$, éste queda fijo y estará prohibido usar objetos que no le pertenezcan.

- Conjunto Vacío: conjunto cuya característica principal es que no contiene elementos. Se denota con $\varnothing$.

# La Relación de Pertenencia $\in$

## Teoría de Conjuntos

La relación básica para manejar conjuntos es la relación de pertenencia

$$x \in A$$

ésta es una relación entre un objeto $x$, el cual podría a su vez ser un conjunto, y un conjunto $A$. Con respecto a los conjuntos universal y vacío se cumple lo siguiente:

- $\forall x(x \in \mathcal{U})$.
- $\forall x(x \notin \varnothing)$.

# La Relación de Inclusión $\subseteq$

## Teoría de Conjuntos

La segunda relación básica para manejar conjuntos es la *inclusión o contención* de conjuntos, la cual es una relación definible como sigue:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Es decir, decimos que $A$ está contenido en $B$ o que $A$ es *subconjunto* de $B$, lo cual denotamos con $A \subseteq B$ si todo elemento de $A$ es también elemento de $B$.
Obsérvese que si $A = B$ entonces en particular $A \subseteq B$. Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$ entonces decimos que $A$ es un subconjunto propio de $B$ y escribimos $A \subset B$

# Propiedades de la Inclusión

## Teoría de Conjuntos

- $A \subseteq \mathcal{U}$
- $\varnothing \subseteq A$

- Extensionalidad $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Reflexividad: $A \subseteq A$

- Transitividad: Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.
- Subconjunto Propio: $A \subset B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

# La Unión

## Operaciones Básicas

La unión de dos conjuntos $A$ y $B$ es el conjunto que cuyos elementos están en $A$ ó en $B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

- Idempotencia: $A \cup A = A$.
- Simetria o Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$.
- Asociatividad: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- Neutro: $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
- Identidad: $A \cup \varnothing = A$.
- $A \subseteq A \cup B, \; B \subseteq A \cup B$.
- $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

# La Intersección

## Operaciones Básicas

La intersección de dos conjuntos $A$ y $B$ es el conjunto que cuyos elementos estaban en $A$ **y** en $B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

- Idempotencia: $A \cap A = A$.
- Simetria o Conmutatividad: $A \cap B = B \cap A$.
- Asociatividad: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- Neutro: $A \cap \varnothing = \varnothing$
- Identidad: $A \cap \mathcal{U} = A$.
- $A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B$.
- $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

# Distributividad

## entre unión e intersección

La unión y la intersección se relacionan mediante las propiedades de distributividad:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

# La Potencia

## Operaciones Básicas

La potencia de un conjunto es el conjunto de todos los subconjuntos de $A$.

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

- $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$.
- $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.
- $A \in \mathcal{P}(A)$.
- Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

# El Complemento

## Otras Operaciones

El complemento de un conjunto $A$ es el conjunto de elementos del universo que **no** pertenecen a $A$.

$$\overline{A} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$$

- Idempotencia: $\overline{\overline{A}} = A$.
- De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $\overline{\mathcal{U}} = \varnothing$
- $\overline{\varnothing} = \mathcal{U}$.
- Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

# La Diferencia

## Otras Operaciones

La diferencia de dos conjuntos $A$ y $B$, denotada $A - B$, es el conjunto de todos los elementos de $A$ que **no** están en $B$.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

- $A - B \subseteq A$
- $A - A = \varnothing$
- $A - \varnothing = A$
- $A - \mathcal{U} = \varnothing$
- $\mathcal{U} - A = \overline{A}$
- $(A - B) \cap B = \varnothing$
- $(A - B) \cup B = A \cup B$
- $A - B = A \cap \overline{B}$

# El Producto Cartesiano

## Otras Operaciones

El producto cartesiano de dos conjuntos $A, B$ se define como

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$$

Es decir, $A \times B$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas cuyo primer elemento pertenece a $A$ y el segundo elemento pertenece a $B$.

$$\langle x, y \rangle \in A \times B \text{ si y sólo si } x \in A \text{ y } y \in B$$

Obsérvese que debido a que las parejas tienen un orden, si $A \neq B$ entonces $A \times B \neq B \times A$.
En general se puede definir el producto cartesiano de $n$ conjuntos, denotado $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ análogamente.

# Propiedades del Producto Cartesiano

## Otras Operaciones

- Si $A = \varnothing$ entonces $A \times B = B \times A = \varnothing$.
- Si $A \times B = B \times A$ entonces $A = \varnothing$ ó $B = \varnothing$ ó $A = B$.
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

# Relaciones Binarias

## Definición

- Una relación binaria $R$ de $A$ a $B$ es un conjunto de parejas ordenadas donde el primer elemento pertenece a $A$ y el segundo elemento pertenece a $B$.
- Formalmente una relación binaria $R$ de $A$ a $B$ es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir $R \subseteq A \times B$.
- Si $\langle a, b\rangle \in R$ escribimos a veces también $a\ R\ b$.
- Si $A = B$ entonces $R \subseteq A \times A$ y decimos simplemente que $R$ es una relación binaria sobre $A$.

# Operaciones con Relaciones

Como las relaciones son también conjuntos entonces podemos aplicarles todas las operaciones ya conocidas de conjuntos. En particular son mas usadas la unión, intersección, complemento y diferencia de relaciones.
Recordemos las definiciones en el caso particular de relaciones, si $R, S \subseteq A \times B$ son dos relaciones de $A$ a $B$ entonces

- $R \cup S = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ ó } \langle x, y\rangle \in S\}$
- $R \cap S = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ y } \langle x, y\rangle \in S\}$
- $\overline{R} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \notin R\}$
- $R - S = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ y } \langle x, y\rangle \notin S\}$

# Operaciones con Relaciones

## Inversa y Composición

Adicionalmente tenemos dos operaciones para relaciones que NO se definen para conjuntos en general, la relación inversa y la composición de relaciones, la cual sólo se define bajo condiciones especiales.

- Si $R \subseteq A \times B$ entonces la inversa de $R$, denotada $R^{-1}$ es una relación de $B$ a $A$, es decir, $R^{-1} \subseteq B \times A$, definida como sigue:

$$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$$

# Operaciones con Relaciones

## Inversa y Composición

- Si $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ entonces la composición de $R$ y $S$ denotada $R \circ S$ es una relación de $A$ a $C$, es decir, $R \circ S \subseteq A \times C$ definida como sigue:

$$R \circ S = \{\langle x, z\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ y } \langle y, z\rangle \in S, \text{para algún } y \in B\}$$

# Tipos de Relaciones

## Relaciones Binarias

Si $R$ es una relación binaria sobre un conjunto $A$ podemos hablar de las siguientes propiedades de $R$:

- $R$ es reflexiva si $\forall x \in A\,(\langle x, x\rangle \in R)$
- $R$ es simétrica si $\forall x, y \in A\,(\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \in R)$
- $R$ es transitiva si $\forall x, y, z \in A\,(\langle x, y\rangle \in R \land \langle y, z\rangle \in R \to \langle x, z\rangle \in R)$
- $R$ es relación de equivalencia si $R$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

# Tipos de Relaciones

## Relaciones Binarias

- $R$ es antirreflexiva si $\forall x \in A\,(\langle x, x\rangle \notin R)$
- $R$ es antisimétrica si $\forall x, y \in A\,(\langle x, y\rangle \in A\ \wedge \langle y, x\rangle \in A \to x = y)$
- $R$ es asimétrica si $\forall x, y \in A\,(\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \notin R)$

# Funciones

## Definición

Una función $f$ de $A$ en $B$, denotada $f : A \to B$ es una relación $f \subseteq A \times B$ tal que para cualquier $x \in A$ existe **un único** $y \in B$ tal que $\langle x, y \rangle \in f$. En tal caso decimos que $y$ es la imagen de $x$ bajo $f$ y escribimos $y = f(x)$.

Dada una función $f : A \to B$ definimos los siguientes conjuntos:

- El dominio de $f$, denotado $dom(f)$ es:

$$dom(f) = A$$

  El dominio de $f$ es el conjunto de primeras componentes de los pares de $f$.

# Funciones

## Definición

- El codominio, contradominio o rango de $f$, denotado $codom(f)$ o $ran(f)$ es el conjunto $B$.

$$codom(f) = B$$

- La imagen de $f$, denotada $Im(f)$ es el subconjunto de $B$ que consta de las segundas componentes de $f$:

$$\begin{aligned} Im(f) = & \{y \in B \mid \exists x \in A\, (\langle x, y\rangle \in f)\} \\ = & \{y \in B \mid \exists x \in A\, (f(x) = y)\} \end{aligned}$$

# Tipos de Funciones

De acuerdo a ciertas propiedades del dominio o codominio una función $f : A \to B$ se puede clasificar como sigue:

- $f$ es una función *parcial* si algún elemento de $dom(f) = A$ no tiene imagen en $B$.
  Por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

  $$f(x) = \frac{1}{x}$$

  es una función parcial pues $f(0)$ no está definida.

# Tipos de Funciones

- $f$ es una función *inyectiva* o *"uno a uno"* si elementos distintos del dominio de $f$ van a dar a imagenes distintas, o equivalentemente si dos elementos del dominio tienen la misma imagen entonces es que son el mismo elemento. Formalmente, $f$ es inyectiva si:

$$\forall x \forall z\ (f(x) = f(z) \rightarrow x = z)$$

# Tipos de Funciones

- $f$ es *suprayectiva* o *sobre* si $codom(f) = Im(f)$ es decir,si cualquier elemento del codominio es imagen bajo $f$ de algun elemento del dominio. Formalmente, $f$ es sobre si:

$$\forall y \in B\, \exists x \in A\, (f(x) = y)$$

- $f$ es *biyectiva* si $f$ es a la vez inyectiva y suprayectiva.