

# Autómatas y Lenguajes Formales 2016-1

## Maestría en Ciencia e Ingeniería de la Computación UNAM

### Sesión 0: Preliminares

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea  
`favio@ciencias.unam.mx`

Facultad de Ciencias UNAM

29 de enero de 2020



# Noción Intuitiva de Conjunto

## Teoría de Conjuntos

Para nuestros propósitos de aplicación bastará con dar la siguiente definición:

*Un conjunto es una colección bien determinada de objetos.*

En esta definición con “bien determinado” queremos decir que siempre es posible decidir de manera clara y concisa cuando un objeto dado pertenece o no a la colección que estamos definiendo.



# Definición de Conjuntos

## Teoría de Conjuntos

Existen dos maneras de definir conjuntos:

- Por *extensión*: dando una lista de todos los elementos del conjunto.  
Por ejemplo el conjunto de vocales se define por extensión como  $A = \{a, e, i, o, u\}$ .
- Por *comprensión o intensión*: dando una propiedad que se cumpla exactamente para los elementos del conjunto.  
Por ejemplo, el conjunto de vocales se define por comprensión como  $A = \{x \mid x \text{ es vocal} \}$



# El Universo y el Vacío

## Teoría de Conjuntos

- Conjunto Universo: conjunto distinguido el cual nos servirá para determinar de manera única el tipo de objetos con los que estamos trabajando. Al momento de elegir un universo, denotado  $\mathcal{U}$ , éste queda fijo y estará prohibido usar objetos que no le pertenezcan.
- Conjunto Vacío: conjunto cuya característica principal es que no contiene elementos. Se denota con  $\emptyset$ .



# La Relación de Pertenencia $\in$

## Teoría de Conjuntos

La relación básica para manejar conjuntos es la relación de pertenencia

$$x \in A$$

ésta es una relación entre un objeto  $x$ , el cual podría a su vez ser un conjunto, y un conjunto  $A$ . Con respecto a los conjuntos universal y vacío se cumple lo siguiente:

- $\forall x(x \in \mathcal{U})$ .
- $\forall x(x \notin \emptyset)$ .



# La Relación de Inclusión $\subseteq$

## Teoría de Conjuntos

La segunda relación básica para manejar conjuntos es la *inclusión o contención* de conjuntos, la cual es una relación definible como sigue:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

Es decir, decimos que  $A$  está contenido en  $B$  o que  $A$  es *subconjunto* de  $B$ , lo cual denotamos con  $A \subseteq B$  si todo elemento de  $A$  es también elemento de  $B$ .

Obsérvese que si  $A = B$  entonces en particular  $A \subseteq B$ . Si  $A \subseteq B$  y  $A \neq B$  entonces decimos que  $A$  es un subconjunto propio de  $B$  y escribimos  $A \subset B$



# Propiedades de la Inclusión

## Teoría de Conjuntos

- $A \subseteq \mathcal{U}$
- $\emptyset \subseteq A$
- Extensionalidad  $A = B$  si y sólo si  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ .
- Reflexividad:  $A \subseteq A$
- Transitividad: Si  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq C$  entonces  $A \subseteq C$ .
- Subconjunto Propio:  $A \subset B$  si y sólo si  $A \subseteq B$  y  $A \neq B$ .



# La Unión

## Operaciones Básicas

La unión de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto que cuyos elementos están en  $A$  ó en  $B$ .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

- Idempotencia:  $A \cup A = A$ .
- Simetria o Conmutatividad:  $A \cup B = B \cup A$ .
- Asociatividad:  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ .
- Neutro:  $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
- Identidad:  $A \cup \emptyset = A$ .
- $A \subseteq A \cup B$ ,  $B \subseteq A \cup B$ .
- $A \subseteq B$  si y sólo si  $A \cup B = B$ .





# La Intersección

## Operaciones Básicas

La intersección de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto que cuyos elementos estaban en  $A$  y en  $B$ .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

- Idempotencia:  $A \cap A = A$ .
- Simetría o Conmutatividad:  $A \cap B = B \cap A$ .
- Asociatividad:  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ .
- Neutro:  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Identidad:  $A \cap \mathcal{U} = A$ .
- $A \cap B \subseteq A$ ,  $A \cap B \subseteq B$ .
- $A \subseteq B$  si y sólo si  $A \cap B = A$ .



# Distributividad

## entre unión e intersección

La unión y la intersección se relacionan mediante las propiedades de distributividad:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$



# La Potencia

## Operaciones Básicas

La potencia de un conjunto es el conjunto de todos los subconjuntos de  $A$ .

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

- $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$ .
- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ .
- $A \in \mathcal{P}(A)$ .
- Si  $A \subseteq B$  entonces  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ .



# El Complemento

## Otras Operaciones

El complemento de un conjunto  $A$  es el conjunto de elementos del universo que **no** pertenecen a  $A$ .

$$\overline{A} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$$

- Idempotencia:  $\overline{\overline{A}} = A$ .
- De Morgan:  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ .
- De Morgan:  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .
- $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$
- $\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$ .
- Si  $A \subseteq B$  entonces  $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ .



# La Diferencia

## Otras Operaciones

La diferencia de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , denotada  $A - B$ , es el conjunto de todos los elementos de  $A$  que **no** están en  $B$ .

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

- $A - B \subseteq A$
- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- $A - \mathcal{U} = \emptyset$
- $\mathcal{U} - A = \overline{A}$
- $(A - B) \cap B = \emptyset$
- $(A - B) \cup B = A \cup B$
- $A - B = A \cap \overline{B}$



# El Producto Cartesiano

## Otras Operaciones

El producto cartesiano de dos conjuntos  $A, B$  se define como

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$$

Es decir,  $A \times B$  es el conjunto de todas las parejas ordenadas cuyo primer elemento pertenece a  $A$  y el segundo elemento pertenece a  $B$ .

$$\langle x, y \rangle \in A \times B \text{ si y sólo si } x \in A \text{ y } y \in B$$

Obsérvese que debido a que las parejas tienen un orden, si  $A \neq B$  entonces  $A \times B \neq B \times A$ .

En general se puede definir el producto cartesiano de  $n$  conjuntos, denotado  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  análogamente.



# Propiedades del Producto Cartesiano

## Otras Operaciones

- Si  $A = \emptyset$  entonces  $A \times B = B \times A = \emptyset$ .
- Si  $A \times B = B \times A$  entonces  $A = \emptyset$  ó  $B = \emptyset$  ó  $A = B$ .
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$



# Relaciones Binarias

## Definición

- Una relación binaria  $R$  de  $A$  a  $B$  es un conjunto de parejas ordenadas donde el primer elemento pertenece a  $A$  y el segundo elemento pertenece a  $B$ .
- Formalmente una relación binaria  $R$  de  $A$  a  $B$  es un subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ , es decir  $R \subseteq A \times B$ .
- Si  $\langle a, b \rangle \in R$  escribimos a veces también  $a R b$ .
- Si  $A = B$  entonces  $R \subseteq A \times A$  y decimos simplemente que  $R$  es una relación binaria sobre  $A$ .





# Operaciones con Relaciones

Como las relaciones son también conjuntos entonces podemos aplicarles todas las operaciones ya conocidas de conjuntos. En particular son mas usadas la unión, intersección, complemento y diferencia de relaciones.

Recordemos las definiciones en el caso particular de relaciones, si  $R, S \subseteq A \times B$  son dos relaciones de  $A$  a  $B$  entonces

- $R \cup S = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ ó } \langle x, y \rangle \in S\}$
- $R \cap S = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ y } \langle x, y \rangle \in S\}$
- $\overline{R} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \notin R\}$
- $R - S = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ y } \langle x, y \rangle \notin S\}$



# Operaciones con Relaciones

## Inversa y Composición

Adicionalmente tenemos dos operaciones para relaciones que NO se definen para conjuntos en general, la relación inversa y la composición de relaciones, la cual sólo se define bajo condiciones especiales.

- Si  $R \subseteq A \times B$  entonces la inversa de  $R$ , denotada  $R^{-1}$  es una relación de  $B$  a  $A$ , es decir,  $R^{-1} \subseteq B \times A$ , definida como sigue:

$$R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}$$



# Operaciones con Relaciones

## Inversa y Composición

- Si  $R \subseteq A \times B$  y  $S \subseteq B \times C$  entonces la composición de  $R$  y  $S$  denotada  $R \circ S$  es una relación de  $A$  a  $C$ , es decir,  $R \circ S \subseteq A \times C$  definida como sigue:

$$R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ y } \langle y, z \rangle \in S, \text{ para algún } y \in B \}$$



# Tipos de Relaciones

## Relaciones Binarias

Si  $R$  es una relación **binaria** sobre un conjunto  $A$  podemos hablar de las siguientes propiedades de  $R$ :

- $R$  es reflexiva si  $\forall x \in A (\langle x, x \rangle \in R)$
- $R$  es simétrica si  $\forall x, y \in A (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$
- $R$  es transitiva si  
 $\forall x, y, z \in A (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$
- $R$  es relación de equivalencia si  $R$  es reflexiva, simétrica y transitiva.



# Tipos de Relaciones

## Relaciones Binarias

- $R$  es antirreflexiva si  $\forall x \in A (\langle x, x \rangle \notin R)$
- $R$  es antisimétrica si  $\forall x, y \in A (\langle x, y \rangle \in A \wedge \langle y, x \rangle \in A \rightarrow x = y)$
- $R$  es asimétrica si  $\forall x, y \in A (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$



# Funciones

## Definición

Una función  $f$  de  $A$  en  $B$ , denotada  $f : A \rightarrow B$  es una relación  $f \subseteq A \times B$  tal que para cualquier  $x \in A$  existe **un único**  $y \in B$  tal que  $\langle x, y \rangle \in f$ . En tal caso decimos que  $y$  es la imagen de  $x$  bajo  $f$  y escribimos  $y = f(x)$ .

Dada una función  $f : A \rightarrow B$  definimos los siguientes conjuntos:

- El dominio de  $f$ , denotado  $\text{dom}(f)$  es:

$$\text{dom}(f) = A$$

El dominio de  $f$  es el conjunto de primeras componentes de los pares de  $f$ .



# Funciones

## Definición

- El codominio, contradominio o rango de  $f$ , denotado  $\text{codom}(f)$  o  $\text{ran}(f)$  es el conjunto  $B$ .

$$\text{codom}(f) = B$$

- La imagen de  $f$ , denotada  $\text{Im}(f)$  es el subconjunto de  $B$  que consta de las segundas componentes de  $f$ :

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \{y \in B \mid \exists x \in A (\langle x, y \rangle \in f)\} \\ &= \{y \in B \mid \exists x \in A (f(x) = y)\}\end{aligned}$$



# Tipos de Funciones

De acuerdo a ciertas propiedades del dominio o codominio una función  $f : A \rightarrow B$  se puede clasificar como sigue:

- $f$  es una función *parcial* si algún elemento de  $\text{dom}(f) = A$  no tiene imagen en  $B$ .

Por ejemplo la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es una función parcial pues  $f(0)$  no está definida.





# Tipos de Funciones

- $f$  es una función *inyectiva* o “*uno a uno*” si elementos distintos del dominio de  $f$  van a dar a imágenes distintas, o equivalentemente si dos elementos del dominio tienen la misma imagen entonces es que son el mismo elemento. Formalmente,  $f$  es inyectiva si:

$$\forall x \forall z (f(x) = f(z) \rightarrow x = z)$$



# Tipos de Funciones

- $f$  es *suprayectiva* o *sobre* si  $\text{codom}(f) = \text{Im}(f)$  es decir, si cualquier elemento del codominio es imagen bajo  $f$  de algun elemento del dominio. Formalmente,  $f$  es sobre si:

$$\forall y \in B \exists x \in A (f(x) = y)$$

- $f$  es *biyectiva* si  $f$  es a la vez inyectiva y suprayectiva.

