

Autómatas y Lenguajes Formales

Máquinas de Turing

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea
`favio@ciencias.unam.mx`

Facultad de Ciencias UNAM¹

27 de abril de 2019



¹Con el apoyo del proyecto PAPIME PE102117

Máquinas de Turing

Introducción

- Las máquinas de Turing (MT) son máquinas idealizadas capaces de realizar cálculos cualesquiera.



Máquinas de Turing

Introducción

- Las máquinas de Turing (MT) son máquinas idealizadas capaces de realizar cálculos cualesquiera.
- Una MT consiste de una cinta infinita dividida en sectores (cuadros) y una cabeza de lectoescritura.



Máquinas de Turing

Introducción

- Las máquinas de Turing (MT) son máquinas idealizadas capaces de realizar cálculos cualesquiera.
- Una MT consiste de una cinta infinita dividida en sectores (cuadros) y una cabeza de lectoescritura.
- Cada sector de la cinta contiene un símbolo de cierto alfabeto de entrada o bien el símbolo blanco.



Máquinas de Turing

Introducción

- Las máquinas de Turing (MT) son máquinas idealizadas capaces de realizar cálculos cualesquiera.
- Una MT consiste de una cinta infinita dividida en sectores (cuadros) y una cabeza de lectoescritura.
- Cada sector de la cinta contiene un símbolo de cierto alfabeto de entrada o bien el símbolo blanco.
- La cabeza lee el sector y puede escribir sobre él.



Máquinas de Turing

Introducción

- Las máquinas de Turing (MT) son máquinas idealizadas capaces de realizar cálculos cualesquiera.
- Una MT consiste de una cinta infinita dividida en sectores (cuadros) y una cabeza de lectoescritura.
- Cada sector de la cinta contiene un símbolo de cierto alfabeto de entrada o bien el símbolo blanco.
- La cabeza lee el sector y puede escribir sobre él.
- La cabeza puede moverse a izquierda o derecha.



Máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing es una septupla:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F \rangle$$



Máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing es una septupla:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F \rangle$$

- $Q \neq \emptyset$ es un conjunto finito de estados.



Máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing es una septupla:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F \rangle$$

- $Q \neq \emptyset$ es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.



Máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing es una septupla:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F \rangle$$

- $Q \neq \emptyset$ es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- Γ es el alfabeto de la cinta, el cual incluye a Σ , es decir, $\Sigma \subseteq \Gamma$.



Máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing es una septupla:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F \rangle$$

- $Q \neq \emptyset$ es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- Γ es el alfabeto de la cinta, el cual incluye a Σ , es decir, $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ es la función (parcial) de transición



Máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing es una septupla:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F \rangle$$

- $Q \neq \emptyset$ es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- Γ es el alfabeto de la cinta, el cual incluye a Σ , es decir, $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ es la función (parcial) de transición
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.



Máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing es una septupla:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F \rangle$$

- $Q \neq \emptyset$ es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- Γ es el alfabeto de la cinta, el cual incluye a Σ , es decir, $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ es la función (parcial) de transición
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $\sqcup \in \Gamma$ es el símbolo blanco tal que $\sqcup \notin \Sigma$.



Máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing es una septupla:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F \rangle$$

- $Q \neq \emptyset$ es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- Γ es el alfabeto de la cinta, el cual incluye a Σ , es decir, $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ es la función (parcial) de transición
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $\sqcup \in \Gamma$ es el símbolo blanco tal que $\sqcup \notin \Sigma$.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales. F podría ser vacío.



Función de transición

Máquinas de Turing

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$$

$$\delta(q, a) = (p, b, D)$$



Función de transición

Máquinas de Turing

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$$

$$\delta(q, a) = (p, b, D)$$

- El estado actual es q y el símbolo a leer es a .



Función de transición

Máquinas de Turing

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$$

$$\delta(q, a) = (p, b, D)$$

- El estado actual es q y el símbolo a leer es a .
- La transición es hacia el estado p



Función de transición

Máquinas de Turing

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$$

$$\delta(q, a) = (p, b, D)$$

- El estado actual es q y el símbolo a leer es a .
- La transición es hacia el estado p
- b es el símbolo escrito en lugar de a .



Función de transición

Máquinas de Turing

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$$

$$\delta(q, a) = (p, b, D)$$

- El estado actual es q y el símbolo a leer es a .
- La transición es hacia el estado p
- b es el símbolo escrito en lugar de a .
- La cabeza se mueve una celda según la dirección dada por $D \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$. Dichos movimientos se realizan después de leer a y escribir b .



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$\delta(q, a) = (p, b, \rightarrow)$$

- Estado actual: q



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$\delta(q, a) = (p, b, \rightarrow)$$

- Estado actual: q
- Símbolo a leer: a .



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$\delta(q, a) = (p, b, \rightarrow)$$

- Estado actual: q
- Símbolo a leer: a .
- La cabeza borra a y escribe b .



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$\delta(q, a) = (p, b, \rightarrow)$$

- Estado actual: q
- Símbolo a leer: a .
- La cabeza borra a y escribe b .
- El nuevo estado es p .



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$\delta(q, a) = (p, b, \rightarrow)$$

- Estado actual: q
- Símbolo a leer: a .
- La cabeza borra a y escribe b .
- El nuevo estado es p .
- La cabeza se mueve una celda a la derecha.



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \{q_1\} \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_0, b, \rightarrow)$$



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \{q_1\} \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_0, b, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, b) = (q_0, b, \rightarrow)$$



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \{q_1\} \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_0, b, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, b) = (q_0, b, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_1, \sqcup, \leftarrow)$$



$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ tiene un número par de ceros} \}$

Ejemplos

δ	0	1	\sqcup
q_0	$(q_1, 0, \rightarrow)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$(q_f, \sqcup, -)$
q_1	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$(q_1, 1, \rightarrow)$	
q_f			



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \emptyset \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, a, \rightarrow)$$



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \emptyset \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, a, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, b) = (q_1, b, \rightarrow)$$



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \emptyset \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, a, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, b) = (q_1, b, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_1, \sqcup, \rightarrow)$$



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \emptyset \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, a, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, b) = (q_1, b, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_1, \sqcup, \rightarrow)$$

$$\delta(q_1, a) = (q_0, a, \leftarrow)$$



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \emptyset \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, a, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, b) = (q_1, b, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_1, \sqcup, \rightarrow)$$

$$\delta(q_1, a) = (q_0, a, \leftarrow)$$

$$\delta(q_1, b) = (q_0, b, \leftarrow)$$



Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \emptyset \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, a, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, b) = (q_1, b, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_1, \sqcup, \rightarrow)$$

$$\delta(q_1, a) = (q_0, a, \leftarrow)$$

$$\delta(q_1, b) = (q_0, b, \leftarrow)$$

$$\delta(q_1, \sqcup) = (q_0, \sqcup, \leftarrow)$$



$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

Ejemplos

δ	a	b	X	Y	\sqcup
q_0	(q_1, X, \rightarrow)			(q_3, Y, \rightarrow)	
q_1	(q_1, a, \rightarrow)	(q_2, Y, \leftarrow)		(q_1, Y, \rightarrow)	
q_2	(q_2, a, \leftarrow)		(q_0, X, \rightarrow)	(q_2, Y, \leftarrow)	
q_3				(q_3, Y, \rightarrow)	$(q_4, \sqcup, \rightarrow)$
q_4					



Más allá del reconocimiento de lenguajes

Máquinas de Turing

La siguiente máquina de Turing verifica que exista un número par de ceros en la cadena de entrada.

δ	0	1	\sqcup
0	—	—	$(1, \sqcup, \rightarrow)$
1	$(2, 0, \rightarrow)$	$(1, 1, \rightarrow)$	$(3, \sqcup, -)$
2	$(1, 0, \rightarrow)$	$(2, 1, \rightarrow)$	—
3	—	—	—

donde 0 es el estado inicial y 3 el estado final.



Más allá del reconocimiento de lenguajes

Máquinas de Turing

La siguiente máquina verifica la paridad de los unos en una cadena, devolviendo 0 si hay un número impar de unos y 1 en otro caso.

δ	0	1	\sqcup
1	-	-	$(2, \sqcup, \rightarrow)$
2	$(2, 0, \rightarrow)$	$(3, 1, \rightarrow)$	$(4, 0, \rightarrow)$
3	$(3, 0, \rightarrow)$	$(2, 1, \rightarrow)$	$(4, 1, \leftarrow)$

siendo 1 el estado inicial y 4 el estado final.



Máquina Estandar de Turing

Máquinas de Turing

- La cinta es infinita en ambas direcciones.



Máquina Estandar de Turing

Máquinas de Turing

- La cinta es infinita en ambas direcciones.
- Se permite un número arbitrario de movimientos en cualquier dirección.



Máquina Estandar de Turing

Máquinas de Turing

- La cinta es infinita en ambas direcciones.
- Se permite un número arbitrario de movimientos en cualquier dirección.
- La máquina es determinista, δ define a lo más un movimiento para cada configuración posible.



Máquina Estandar de Turing

Máquinas de Turing

- La cinta es infinita en ambas direcciones.
- Se permite un número arbitrario de movimientos en cualquier dirección.
- La máquina es determinista, δ define a lo más un movimiento para cada configuración posible.
- No hay transiciones desde estados finales, es decir, $\delta(q, a)$ no está definida si $q \in F$.



Máquina Estandar de Turing

Máquinas de Turing

- La cinta es infinita en ambas direcciones.
- Se permite un número arbitrario de movimientos en cualquier dirección.
- La máquina es determinista, δ define a lo más un movimiento para cada configuración posible.
- No hay transiciones desde estados finales, es decir, $\delta(q, a)$ no está definida si $q \in F$.
- No hay un archivo especial de entrada o salida, se asume que la máquina contiene algo al final y al principio del proceso.



Configuraciones

Máquinas de Turing

Una configuración o descripción instantanea es un par

$$\langle q, \underline{lsr} \rangle$$



Configuraciones

Máquinas de Turing

Una configuración o descripción instantanea es un par

$$\langle q, \underline{lsr} \rangle$$

donde:

- q es el estado actual de la unidad de control (cabeza).



Configuraciones

Máquinas de Turing

Una configuración o descripción instantanea es un par

$$\langle q, \underline{lsr} \rangle$$

donde:

- q es el estado actual de la unidad de control (cabeza).
- lsr es el contenido de la cinta.



Configuraciones

Máquinas de Turing

Una configuración o descripción instantanea es un par

$$\langle q, l\underline{s}r \rangle$$

donde:

- q es el estado actual de la unidad de control (cabeza).
- $l\underline{s}r$ es el contenido de la cinta.
- \underline{s} indica la posición de la unidad de control (el símbolo actual es s).



Configuraciones

Máquinas de Turing

Una configuración o descripción instantanea es un par

$$\langle q, \underline{lsr} \rangle$$

donde:

- q es el estado actual de la unidad de control (cabeza).
- lsr es el contenido de la cinta.
- \underline{s} indica la posición de la unidad de control (el símbolo actual es s).
- Configuración inicial: $(q_0, \underline{}x)$



Cómputos

Máquinas de Turing

- Un cómputo o paso de computación es el cambio de una descripción instantánea a otra mediante una transición dada por δ .



Cómputos

Máquinas de Turing

- Un cómputo o paso de computación es el cambio de una descripción instantánea a otra mediante una transición dada por δ .
- Por ejemplo, si $\delta(q, s) = (p, s', \leftarrow)$ entonces

$$(q, l s' \underline{s} r) \vdash (p, l \underline{s'} s r)$$



Cómputos

Máquinas de Turing

- Un cómputo o paso de computación es el cambio de una descripción instantánea a otra mediante una transición dada por δ .
- Por ejemplo, si $\delta(q, s) = (p, s', \leftarrow)$ entonces

$$(q, l s' \underline{s} r) \vdash (p, l \underline{s'} s r)$$

- \vdash^* se define de la manera usual.



Lenguaje de aceptación

Máquinas de Turing

El lenguaje de aceptación se define como todas aquellas cadenas de entrada con las cuales la máquina se detiene en un estado final $q_f \in F$.

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, \sqcup x) \vdash^* (q_f, lsr)\}$$



Lenguaje de aceptación

Máquinas de Turing

El lenguaje de aceptación se define como todas aquellas cadenas de entrada con las cuales la máquina se detiene en un estado final $q_f \in F$.

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, \underline{x}) \vdash^* (q_f, l\underline{s}r)\}$$

Observaciones:

- A diferencia de los autómatas se acepta una cadena en el momento en que el proceso llega a un estado final.



Lenguaje de aceptación

Máquinas de Turing

El lenguaje de aceptación se define como todas aquellas cadenas de entrada con las cuales la máquina se detiene en un estado final $q_f \in F$.

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, \underline{x}) \vdash^* (q_f, \underline{sr})\}$$

Observaciones:

- A diferencia de los autómatas se acepta una cadena en el momento en que el proceso llega a un estado final.
- No es necesario consumir toda la cadena.



Lenguaje de aceptación

Máquinas de Turing

El lenguaje de aceptación se define como todas aquellas cadenas de entrada con las cuales la máquina se detiene en un estado final $q_f \in F$.

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, \underline{x}) \vdash^* (q_f, lsr)\}$$

Observaciones:

- A diferencia de los autómatas se acepta una cadena en el momento en que el proceso llega a un estado final.
- No es necesario consumir toda la cadena.
- Si no hay estados finales se acepta una cadena en el momento en que la máquina se detiene.



Variaciones

MT

- Existen diversas variaciones en la definición de MT.



Variaciones

MT

- Existen diversas variaciones en la definición de MT.
- Todas ellas resultan equivalentes, es decir, el poder de computación de cualquier modelo resulta equivalente al de la máquina estandar.



Variaciones

MT

- Existen diversas variaciones en la definición de MT.
- Todas ellas resultan equivalentes, es decir, el poder de computación de cualquier modelo resulta equivalente al de la máquina estandar.
- Las variaciones son útiles para simplificar la presentación o programación de diversos problemas.



MT con cabeza lectora estacionaria

Variaciones

- Se permite que al leer y escribir un símbolo la cabeza no realice movimiento alguno.



MT con cabeza lectora estacionaria

Variaciones

- Se permite que al leer y escribir un símbolo la cabeza no realice movimiento alguno.
- El conjunto de direcciones se amplía a $\{\leftarrow, \rightarrow, -\}$.



MT con cabeza lectora estacionaria

Variaciones

- Se permite que al leer y escribir un símbolo la cabeza no realice movimiento alguno.
- El conjunto de direcciones se amplía a $\{\leftarrow, \rightarrow, -\}$.
- La transición

$$\delta(q, a) = (p, b, -)$$

significa que la cabeza lee a , escribe b y no se mueve



MT con cabeza lectora estacionaria

Variaciones

- Se permite que al leer y escribir un símbolo la cabeza no realice movimiento alguno.
- El conjunto de direcciones se amplía a $\{\leftarrow, \rightarrow, -\}$.
- La transición

$$\delta(q, a) = (p, b, -)$$

significa que la cabeza lee a , escribe b y no se mueve

- Tales transiciones pueden simularse mediante un nuevo estado y movimientos consecutivos a la izquierda y a la derecha.



MT con múltiples pistas

Variaciones

- Idea: la cinta se divide en multiples pistas.



MT con múltiples pistas

Variaciones

- Idea: la cinta se divide en múltiples pistas.
- La función de transición es:

$$\delta : Q \times \Gamma^n \rightarrow Q \times \Gamma^n \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$$

$$\delta(q, \langle a_1, \dots, a_n \rangle) = (p, \langle b_1, \dots, b_n \rangle, D)$$



MT con múltiples cintas

Variaciones

- Idea: se agregan más cintas a la máquina.



MT con múltiples cintas

Variaciones

- Idea: se agregan más cintas a la máquina.
- La función de transición es:

$$\delta : Q \times \Gamma^n \rightarrow Q \times (\Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\})^n$$

$$\delta(q, \langle a_1, \dots, a_n \rangle) = (p, \langle b_1, D_1 \rangle, \dots, \langle b_n, D_n \rangle)$$



MT No-determinista

Variaciones

- La función de transición es:

$$\delta : Q \times \Gamma^n \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\})$$

$$\delta(q, \langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \{ \langle b_1, D_1 \rangle, \dots, \langle b_n, D_n \rangle \}$$



MT No-determinista

Variaciones

- La función de transición es:

$$\delta : Q \times \Gamma^n \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\})$$

$$\delta(q, \langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \{ \langle b_1, D_1 \rangle, \dots, \langle b_n, D_n \rangle \}$$

- Las máquinas no-deterministas juegan un papel central en la teoría de la complejidad.



Lenguajes recursivos y recursivamente enumerables

Aceptación en MT

- Un lenguaje L es **recursivamente enumerable** si es reconocido por una máquina de Turing, es decir, si existe una máquina de Turing M tal que $L = L(M)$.



Lenguajes recursivos y recursivamente enumerables

Aceptación en MT

- Un lenguaje L es **recursivamente enumerable** si es reconocido por una máquina de Turing, es decir, si existe una máquina de Turing M tal que $L = L(M)$.
- un lenguaje L es **recursivo** si es reconocido por una máquina de Turing que siempre se detiene, es decir, si existe una máquina de Turing M que se detiene con todas las cadenas de entrada y $L = L(M)$.



Propiedades de Cerradura

Lenguajes recursivos y R.E.

- Si L es recursivo entonces \bar{L} es recursivo.



Propiedades de Cerradura

Lenguajes recursivos y R.E.

- Si L es recursivo entonces \bar{L} es recursivo.
- Si L, M son recursivos entonces $L \cup M$ es recursivo.



Propiedades de Cerradura

Lenguajes recursivos y R.E.

- Si L es recursivo entonces \bar{L} es recursivo.
- Si L, M son recursivos entonces $L \cup M$ es recursivo.
- Si L, M son rec. enumerables entonces $L \cup M$ es rec. enumerable.



Propiedades de Cerradura

Lenguajes recursivos y R.E.

- Si L es recursivo entonces \bar{L} es recursivo.
- Si L, M son recursivos entonces $L \cup M$ es recursivo.
- Si L, M son rec. enumerables entonces $L \cup M$ es rec. enumerable.
- L es recursivo si y sólo si L y \bar{L} son rec. enumerables.



Autómatas Linealmente Acotados

Definición

- Un autómata linealmente acotado (ALA) es una máquina de Turing que satisface las siguientes condiciones:



Autómatas Linealmente Acotados

Definición

- Un autómata linealmente acotado (ALA) es una máquina de Turing que satisface las siguientes condiciones:
- El alfabeto de entrada Σ incluye dos símbolos especiales $[,]$ que sirven como marcas de fin de cinta izquierda y derecha respectivamente.



Autómatas Linealmente Acotados

Definición

- Un autómata linealmente acotado (ALA) es una máquina de Turing que satisface las siguientes condiciones:
- El alfabeto de entrada Σ incluye dos símbolos especiales $[,]$ que sirven como marcas de fin de cinta izquierda y derecha respectivamente.
- La cabeza lectora no puede desplazarse más allá de dichos límites y no puede sobrecribir tales sectores.



Autómatas Linealmente Acotados

Definición

- Formalmente tenemos

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, [,], F \rangle$$

con $[,] \in \Sigma$.



Autómatas Linealmente Acotados

Definición

- Formalmente tenemos

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqsubseteq, [,], F \rangle$$

con $[,] \in \Sigma$.

- El lenguaje de aceptación es

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* - \{[,]\} \mid (q_0, \sqsubseteq[w]) \vdash^* (q_f, w_1 \sqsubseteq w_2) \text{ y } q_f \in F\}$$

Las marcas $[,]$ no son consideradas como parte de la cadena a procesar.



Autómatas Linealmente Acotados

Definición

- Formalmente tenemos

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, [,], F \rangle$$

con $[,] \in \Sigma$.

- El lenguaje de aceptación es

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* - \{[,]\} \mid (q_0, \sqcup[w]) \vdash^* (q_f, w_1 \sqcup w_2) \text{ y } q_f \in F\}$$

Las marcas $[,]$ no son consideradas como parte de la cadena a procesar.

- Un ALA no puede moverse fuera de la cadena de entrada.



ALA y Gramáticas

Equivalencia

- Dada una gramática sensible al contexto G , existe un autómata linealmente acotado M tal que $L(G) = L(M)$. Es decir, los lenguajes sensibles al contexto son reconocidos por autómatas linealmente acotados.



ALA y Gramáticas

Equivalencia

- Dada una gramática sensible al contexto G , existe un autómata linealmente acotado M tal que $L(G) = L(M)$. Es decir, los lenguajes sensibles al contexto son reconocidos por autómatas linealmente acotados.
- Si $L = L(M)$ es un lenguaje reconocido por un autómata linealmente acotado M entonces existe una gramática sensible al contexto G tal que $L(M) = L(G)$. Es decir, los lenguajes reconocidos por ALA son sensibles al contexto.



Máquinas de Turing y gramáticas irrestrictas

Equivalencia

- Para toda gramática G de tipo 0 existe una máquina de Turing M tal que $L(M) = L(G)$. Es decir, los lenguajes tipo 0 son recursivamente enumerables.



Máquinas de Turing y gramáticas irrestrictas

Equivalencia

- Para toda gramática G de tipo 0 existe una máquina de Turing M tal que $L(M) = L(G)$. Es decir, los lenguajes tipo 0 son recursivamente enumerables.
- Para toda máquina de Turing M existe una gramática G de tipo 0 tal que $L(G) = L(M)$. Es decir, los lenguajes recursivamente enumerables son lenguajes tipo 0.



Instrucciones generales

Macros en MT

- Existen diversos procedimientos de utilidad general que pueden implementarse mediante una MT para después ser llamadas por otra.



Instrucciones generales

Macros en MT

- Existen diversos procedimientos de utilidad general que pueden implementarse mediante una MT para después ser llamadas por otra.
- Estos procedimientos se llaman subrutinas o macros. Por ejemplo:



Instrucciones generales

Macros en MT

- Existen diversos procedimientos de utilidad general que pueden implementarse mediante una MT para después ser llamadas por otra.
- Estos procedimientos se llaman subrutinas o macros. Por ejemplo:
 - ▶ Mover la unidad de control n celdas a la izquierda o derecha.



Instrucciones generales

Macros en MT

- Existen diversos procedimientos de utilidad general que pueden implementarse mediante una MT para después ser llamadas por otra.
- Estos procedimientos se llaman subrutinas o macros. Por ejemplo:
 - ▶ Mover la unidad de control n celdas a la izquierda o derecha.
 - ▶ Sustituir un símbolo por otro sin mover la unidad de control.



Instrucciones generales

Macros en MT

- Existen diversos procedimientos de utilidad general que pueden implementarse mediante una MT para después ser llamadas por otra.
- Estos procedimientos se llaman subrutinas o macros. Por ejemplo:
 - ▶ Mover la unidad de control n celdas a la izquierda o derecha.
 - ▶ Sustituir un símbolo por otro sin mover la unidad de control.
 - ▶ Sustituir una cadena por otra de la misma longitud.



Instrucciones generales

Macros en MT

- Existen diversos procedimientos de utilidad general que pueden implementarse mediante una MT para después ser llamadas por otra.
- Estos procedimientos se llaman subrutinas o macros. Por ejemplo:
 - ▶ Mover la unidad de control n celdas a la izquierda o derecha.
 - ▶ Sustituir un símbolo por otro sin mover la unidad de control.
 - ▶ Sustituir una cadena por otra de la misma longitud.
 - ▶ Insertar un símbolo en una cadena (moviendo un fragmento a la derecha o izq).



Instrucciones generales

Macros en MT

- Existen diversos procedimientos de utilidad general que pueden implementarse mediante una MT para después ser llamadas por otra.
- Estos procedimientos se llaman subrutinas o macros. Por ejemplo:
 - ▶ Mover la unidad de control n celdas a la izquierda o derecha.
 - ▶ Sustituir un símbolo por otro sin mover la unidad de control.
 - ▶ Sustituir una cadena por otra de la misma longitud.
 - ▶ Insertar un símbolo en una cadena (moviendo un fragmento a la derecha o izq).
 - ▶ Eliminar un símbolo en una cadena (eliminando el espacio del mismo)



Instrucciones generales

Macros en MT

- Existen diversos procedimientos de utilidad general que pueden implementarse mediante una MT para después ser llamadas por otra.
- Estos procedimientos se llaman subrutinas o macros. Por ejemplo:
 - ▶ Mover la unidad de control n celdas a la izquierda o derecha.
 - ▶ Sustituir un símbolo por otro sin mover la unidad de control.
 - ▶ Sustituir una cadena por otra de la misma longitud.
 - ▶ Insertar un símbolo en una cadena (moviendo un fragmento a la derecha o izq).
 - ▶ Eliminar un símbolo en una cadena (eliminando el espacio del mismo)
 - ▶ Duplicar o copiar una cadena.



Instrucciones generales

Macros en MT

- Existen diversos procedimientos de utilidad general que pueden implementarse mediante una MT para después ser llamadas por otra.
- Estos procedimientos se llaman subrutinas o macros. Por ejemplo:
 - ▶ Mover la unidad de control n celdas a la izquierda o derecha.
 - ▶ Sustituir un símbolo por otro sin mover la unidad de control.
 - ▶ Sustituir una cadena por otra de la misma longitud.
 - ▶ Insertar un símbolo en una cadena (moviendo un fragmento a la derecha o izq).
 - ▶ Eliminar un símbolo en una cadena (eliminando el espacio del mismo)
 - ▶ Duplicar o copiar una cadena.
 - ▶ Decidir si dos cadenas son la misma.



Un programa en máquinas de Turing

```
1: if 1 then goto 2 else goto 5
2: write 0
3: right
4: goto 1
5: if 0 then goto 6 else goto 9
6: write 1
7: right
8: goto 1
9: left
10: if _ then 11 else 9
11: halt
```

