

Autómatas y Lenguajes Formales 2016-1

Maestría en Ciencia e Ingeniería de la Computación UNAM

Sesión 0: Introducción y Preliminares

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea

`favio@ciencias.unam.mx`

Facultad de Ciencias UNAM

29 de enero de 2020



Noción Intuitiva de Conjunto

Teoría de Conjuntos

Para nuestros propósitos de aplicación bastará con dar la siguiente definición:

Un conjunto es una colección bien determinada de objetos.

En esta definición con “bien determinado” queremos decir que siempre es posible decidir de manera clara y concisa cuando un objeto dado pertenece o no a la colección que estamos definiendo.



Definición de Conjuntos

Teoría de Conjuntos

Existen dos maneras de definir conjuntos:

- Por *extensión*: dando una lista de todos los elementos del conjunto.
Por ejemplo el conjunto de vocales se define por extensión como $A = \{a, e, i, o, u\}$.
- Por *comprensión o intensión*: dando una propiedad que se cumpla exactamente para los elementos del conjunto.
Por ejemplo, el conjunto de vocales se define por comprensión como $A = \{x \mid x \text{ es vocal} \}$



El Universo y el Vacío

Teoría de Conjuntos

- Conjunto Universo: conjunto distinguido el cual nos servirá para determinar de manera única el tipo de objetos con los que estamos trabajando. Al momento de elegir un universo, denotado \mathcal{U} , éste queda fijo y estará prohibido usar objetos que no le pertenezcan.
- Conjunto Vacío: conjunto cuya característica principal es que no contiene elementos. Se denota con \emptyset .



La Relación de Pertenencia \in

Teoría de Conjuntos

La relación básica para manejar conjuntos es la relación de pertenencia

$$x \in A$$

ésta es una relación entre un objeto x , el cual podría a su vez ser un conjunto, y un conjunto A . Con respecto a los conjuntos universal y vacío se cumple lo siguiente:

- $\forall x(x \in \mathcal{U})$.
- $\forall x(x \notin \emptyset)$.



La Relación de Inclusión \subseteq

Teoría de Conjuntos

La segunda relación básica para manejar conjuntos es la *inclusión o contención* de conjuntos, la cual es una relación definible como sigue:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

Es decir, decimos que A está contenido en B o que A es *subconjunto* de B , lo cual denotamos con $A \subseteq B$ si todo elemento de A es también elemento de B .

Obsérvese que si $A = B$ entonces en particular $A \subseteq B$. Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$ entonces decimos que A es un subconjunto propio de B y escribimos $A \subset B$



Propiedades de la Inclusión

Teoría de Conjuntos

- $A \subseteq \mathcal{U}$
- $\emptyset \subseteq A$
- Extensionalidad $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Reflexividad: $A \subseteq A$
- Transitividad: Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.
- Subconjunto Propio: $A \subset B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $A \neq B$.



La Unión

Operaciones Básicas

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto que cuyos elementos están en A ó en B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

- Idempotencia: $A \cup A = A$.
- Simetria o Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$.
- Asociatividad: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- Neutro: $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
- Identidad: $A \cup \emptyset = A$.
- $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$.
- $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.



La Intersección

Operaciones Básicas

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto que cuyos elementos estaban en A y en B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

- Idempotencia: $A \cap A = A$.
- Simetría o Conmutatividad: $A \cap B = B \cap A$.
- Asociatividad: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- Neutro: $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Identidad: $A \cap \mathcal{U} = A$.
- $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$.
- $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.



Distributividad

entre unión e intersección

La unión y la intersección se relacionan mediante las propiedades de distributividad:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$



La Potencia

Operaciones Básicas

La potencia de un conjunto es el conjunto de todos los subconjuntos de A .

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

- $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$.
- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
- $A \in \mathcal{P}(A)$.
- Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.



El Complemento

Otras Operaciones

El complemento de un conjunto A es el conjunto de elementos del universo que **no** pertenecen a A .

$$\overline{A} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$$

- Idempotencia: $\overline{\overline{A}} = A$.
- De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$
- $\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$.
- Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.



La Diferencia

Otras Operaciones

La diferencia de dos conjuntos A y B , denotada $A - B$, es el conjunto de todos los elementos de A que **no** están en B .

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

- $A - B \subseteq A$
- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- $A - \mathcal{U} = \emptyset$
- $\mathcal{U} - A = \overline{A}$
- $(A - B) \cap B = \emptyset$
- $(A - B) \cup B = A \cup B$
- $A - B = A \cap \overline{B}$



El Producto Cartesiano

Otras Operaciones

El producto cartesiano de dos conjuntos A, B se define como

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$$

Es decir, $A \times B$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas cuyo primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B .

$$\langle x, y \rangle \in A \times B \text{ si y sólo si } x \in A \text{ y } y \in B$$

Obsérvese que debido a que las parejas tienen un orden, si $A \neq B$ entonces $A \times B \neq B \times A$.

En general se puede definir el producto cartesiano de n conjuntos, denotado $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ análogamente.



Propiedades del Producto Cartesiano

Otras Operaciones

- Si $A = \emptyset$ entonces $A \times B = B \times A = \emptyset$.
- Si $A \times B = B \times A$ entonces $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$ ó $A = B$.
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$



Relaciones Binarias

Definición

- Una relación binaria R de A a B es un conjunto de parejas ordenadas donde el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B .
- Formalmente una relación binaria R de A a B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir $R \subseteq A \times B$.
- Si $\langle a, b \rangle \in R$ escribimos a veces también $a R b$.
- Si $A = B$ entonces $R \subseteq A \times A$ y decimos simplemente que R es una relación binaria sobre A .



Operaciones con Relaciones

Como las relaciones son también conjuntos entonces podemos aplicarles todas las operaciones ya conocidas de conjuntos. En particular son mas usadas la unión, intersección, complemento y diferencia de relaciones.

Recordemos las definiciones en el caso particular de relaciones, si $R, S \subseteq A \times B$ son dos relaciones de A a B entonces

- $R \cup S = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ ó } \langle x, y \rangle \in S\}$
- $R \cap S = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ y } \langle x, y \rangle \in S\}$
- $\overline{R} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \notin R\}$
- $R - S = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ y } \langle x, y \rangle \notin S\}$



Operaciones con Relaciones

Inversa y Composición

Adicionalmente tenemos dos operaciones para relaciones que NO se definen para conjuntos en general, la relación inversa y la composición de relaciones, la cual sólo se define bajo condiciones especiales.

- Si $R \subseteq A \times B$ entonces la inversa de R , denotada R^{-1} es una relación de B a A , es decir, $R^{-1} \subseteq B \times A$, definida como sigue:

$$R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}$$



Operaciones con Relaciones

Inversa y Composición

- Si $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ entonces la composición de R y S denotada $R \circ S$ es una relación de A a C , es decir, $R \circ S \subseteq A \times C$ definida como sigue:

$$R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ y } \langle y, z \rangle \in S, \text{ para algún } y \in B \}$$



Tipos de Relaciones

Relaciones Binarias

Si R es una relación **binaria** sobre un conjunto A podemos hablar de las siguientes propiedades de R :

- R es reflexiva si $\forall x \in A (\langle x, x \rangle \in R)$
- R es simétrica si $\forall x, y \in A (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$
- R es transitiva si
 $\forall x, y, z \in A (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$
- R es relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva.



Tipos de Relaciones

Relaciones Binarias

- R es antirreflexiva si $\forall x \in A (\langle x, x \rangle \notin R)$
- R es antisimétrica si $\forall x, y \in A (\langle x, y \rangle \in A \wedge \langle y, x \rangle \in A \rightarrow x = y)$
- R es asimétrica si $\forall x, y \in A (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$



Funciones

Definición

Una función f de A en B , denotada $f : A \rightarrow B$ es una relación $f \subseteq A \times B$ tal que para cualquier $x \in A$ existe **un único** $y \in B$ tal que $\langle x, y \rangle \in f$. En tal caso decimos que y es la imagen de x bajo f y escribimos $y = f(x)$.

Dada una función $f : A \rightarrow B$ definimos los siguientes conjuntos:

- El dominio de f , denotado $\text{dom}(f)$ es:

$$\text{dom}(f) = A$$

El dominio de f es el conjunto de primeras componentes de los pares de f .



Funciones

Definición

- El codominio, contradominio o rango de f , denotado $\text{codom}(f)$ o $\text{ran}(f)$ es el conjunto B .

$$\text{codom}(f) = B$$

- La imagen de f , denotada $\text{Im}(f)$ es el subconjunto de B que consta de las segundas componentes de f :

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \{y \in B \mid \exists x \in A (\langle x, y \rangle \in f)\} \\ &= \{y \in B \mid \exists x \in A (f(x) = y)\}\end{aligned}$$



Tipos de Funciones

De acuerdo a ciertas propiedades del dominio o codominio una función $f : A \rightarrow B$ se puede clasificar como sigue:

- f es una función *parcial* si algún elemento de $\text{dom}(f) = A$ no tiene imagen en B .

Por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es una función parcial pues $f(0)$ no está definida.



Tipos de Funciones

- f es una función *inyectiva* o “*uno a uno*” si elementos distintos del dominio de f van a dar a imágenes distintas, o equivalentemente si dos elementos del dominio tienen la misma imagen entonces es que son el mismo elemento. Formalmente, f es inyectiva si:

$$\forall x \forall z (f(x) = f(z) \rightarrow x = z)$$



Tipos de Funciones

- f es *suprayectiva* o *sobre* si $\text{codom}(f) = \text{Im}(f)$ es decir, si cualquier elemento del codominio es imagen bajo f de algun elemento del dominio. Formalmente, f es sobre si:

$$\forall y \in B \exists x \in A (f(x) = y)$$

- f es *biyectiva* si f es a la vez inyectiva y suprayectiva.

