

Autómatas y Lenguajes Formales

Tema 15: Lenguajes de programación equivalentes a la Máquina de Turing

Favio Ezequiel Miranda Perea
Lourdes del Carmen González Huesca
A. Liliana Reyes Cabello

Facultad de Ciencias UNAM¹

Diciembre 2017



¹ Con el apoyo del proyecto PAPIME PE102117

Un programa en máquinas de Turing

Inversión de ceros y unos

```
1: if 1 then goto 2 else goto 5
2: write 0
3: right
4: goto 1
5: if 0 then goto 6 else goto 9
6: write 1
7: right
8: goto 1
9: left
10: if _ then 11 else 9
11: halt
```



Un programa no estructurado

Uso de goto

El siguiente programa `reverse` implementa la función reversa.

```
read X
1: Y := nil;
2: if X then goto 3 else goto 7;
3: Z := hd X;
4: Y := cons Z Y;
5: X := tl X;
6: goto 2;
write Y
```



Un programa estructurado

Uso de secuencias y ciclos

El siguiente programa `reverse` implementa la función reversa.

```
read X;
  Y := nil;
  while X do
    Y := cons (hd X) Y;
    X := tl X;
  end
write Y
```



La máquina de Turing clásica

MT

$$T = \langle \Sigma, Q, q_0, q_f, \delta \rangle,$$

donde

- $\Sigma \neq \emptyset$ es un alfabeto finito que contiene un símbolo distinguido \sqcup , llamado símbolo blanco,



La máquina de Turing clásica

MT

$$T = \langle \Sigma, Q, q_0, q_f, \delta \rangle,$$

donde

- $\Sigma \neq \emptyset$ es un alfabeto finito que contiene un símbolo distinguido \sqcup , llamado símbolo blanco,
- $Q \neq \emptyset$ es el conjunto finito de estados, el cual incluye q_0 y q_f ,



La máquina de Turing clásica

MT

$$T = \langle \Sigma, Q, q_0, q_f, \delta \rangle,$$

donde

- $\Sigma \neq \emptyset$ es un alfabeto finito que contiene un símbolo distinguido \sqcup , llamado símbolo blanco,
- $Q \neq \emptyset$ es el conjunto finito de estados, el cual incluye q_0 y q_f ,
- q_0 es el estado inicial,



La máquina de Turing clásica

MT

$$T = \langle \Sigma, Q, q_0, q_f, \delta \rangle,$$

donde

- $\Sigma \neq \emptyset$ es un alfabeto finito que contiene un símbolo distinguido \sqcup , llamado símbolo blanco,
- $Q \neq \emptyset$ es el conjunto finito de estados, el cual incluye q_0 y q_f ,
- q_0 es el estado inicial,
- q_f es el estado final de aceptación,



La máquina de Turing clásica

MT

$$T = \langle \Sigma, Q, q_0, q_f, \delta \rangle,$$

donde

- $\Sigma \neq \emptyset$ es un alfabeto finito que contiene un símbolo distinguido \sqcup , llamado símbolo blanco,
- $Q \neq \emptyset$ es el conjunto finito de estados, el cual incluye q_0 y q_f ,
- q_0 es el estado inicial,
- q_f es el estado final de aceptación,
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times D$, es la función (parcial) de transición.



La máquina de Turing clásica

MT

$$T = \langle \Sigma, Q, q_0, q_f, \delta \rangle,$$

donde

- $\Sigma \neq \emptyset$ es un alfabeto finito que contiene un símbolo distinguido \sqcup , llamado símbolo blanco,
- $Q \neq \emptyset$ es el conjunto finito de estados, el cual incluye q_0 y q_f ,
- q_0 es el estado inicial,
- q_f es el estado final de aceptación,
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times D$, es la función (parcial) de transición.
- $D = \{\leftarrow, \rightarrow, -\}$ es el conjunto de movimientos



Lenguajes de programación

Modelo teórico

Un lenguaje de programación es una terna

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

donde

- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ es el conjunto de programas de \mathcal{L}



Lenguajes de programación

Modelo teórico

Un lenguaje de programación es una terna

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

donde

- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ es el conjunto de programas de \mathcal{L}
- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ es el conjunto de datos (de entrada y salida) de \mathcal{L}



Lenguajes de programación

Modelo teórico

Un lenguaje de programación es una terna

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

donde

- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ es el conjunto de programas de \mathcal{L}
- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ es el conjunto de datos (de entrada y salida) de \mathcal{L}
- $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}}$ es la función semántica de \mathcal{L} tal que

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$$



Lenguajes de programación

Modelo teórico

Un lenguaje de programación es una terna

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

donde

- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ es el conjunto de programas de \mathcal{L}
- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ es el conjunto de datos (de entrada y salida) de \mathcal{L}
- $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}}$ es la función semántica de \mathcal{L} tal que

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$$

- $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}}$ es una función que le asocia a cada programa $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ una función parcial $\llbracket p \rrbracket_{\mathcal{L}} : \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$.



Semántica operacional

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

Una semántica operacional para \mathcal{L} es una tupla

$$\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}, \cdot \triangleright \cdot \rightarrow \cdot, \text{final}, \text{init}, \text{output} \rangle$$

tal que

- $\mathcal{S} \neq \emptyset$ es el conjunto de memorias



Semántica operacional

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

Una semántica operacional para \mathcal{L} es una tupla

$$\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}, \cdot \triangleright \cdot \rightarrow \cdot, \text{final}, \text{init}, \text{output} \rangle$$

tal que

- $\mathcal{S} \neq \emptyset$ es el conjunto de memorias
- $\mathcal{E} \neq \emptyset$ es el conjunto de estados cuya definición involucra usualmente a \mathcal{S} .



Semántica operacional

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

Una semántica operacional para \mathcal{L} es una tupla

$$\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}, \cdot \triangleright \cdot \rightarrow \cdot, \text{final}, \text{init}, \text{output} \rangle$$

tal que

- $\mathcal{S} \neq \emptyset$ es el conjunto de memorias
- $\mathcal{E} \neq \emptyset$ es el conjunto de estados cuya definición involucra usualmente a \mathcal{S} .
- $\text{final} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$ es la función que define estados finales. Es decir, un estado s es final para el programa p si y sólo si $s \in \text{final}(p)$.



Semántica operacional

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

Una semántica operacional para \mathcal{L} es una tupla

$$\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}, \cdot \triangleright \cdot \rightarrow \cdot, \text{final}, \text{init}, \text{output} \rangle$$

tal que

- $\mathcal{S} \neq \emptyset$ es el conjunto de memorias
- $\mathcal{E} \neq \emptyset$ es el conjunto de estados cuya definición involucra usualmente a \mathcal{S} .
- $\text{final} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$ es la función que define estados finales. Es decir, un estado s es final para el programa p si y sólo si $s \in \text{final}(p)$.
- $\text{init} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{E}$ es la función de inicialización de la ejecución.



Semántica operacional

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

Una semántica operacional para \mathcal{L} es una tupla

$$\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}, \cdot \triangleright \cdot \rightarrow \cdot, \text{final}, \text{init}, \text{output} \rangle$$

tal que

- $\text{output} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ es la función de salida.



Semántica operacional

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

Una semántica operacional para \mathcal{L} es una tupla

$$\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}, \cdot \triangleright \cdot \rightarrow \cdot, \text{final}, \text{init}, \text{output} \rangle$$

tal que

- $\text{output} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ es la función de salida.
- $\cdot \triangleright \cdot \rightarrow \cdot \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ es una relación ternaria de transición entre programas, estados y estados



Semántica operacional

$$\mathcal{L} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} \rangle$$

Una semántica operacional para \mathcal{L} es una tupla

$$\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}, \cdot \triangleright \cdot \rightarrow \cdot, \text{final}, \text{init}, \text{output} \rangle$$

tal que

- $\text{output} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ es la función de salida.
- $\cdot \triangleright \cdot \rightarrow \cdot \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ es una relación ternaria de transición entre programas, estados y estados
- Significado intencional:
 $p \triangleright s \rightarrow s'$ si y sólo si la ejecución del programa $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ causa la transición del estado s al estado s'



El lenguaje LTURING

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \{0, 1, \sqcup\}^*$



El lenguaje LTURING

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \{0, 1, \sqcup\}^*$
- Programas:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m : m + 1 : \text{halt}$$



El lenguaje LTURING

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \{0, 1, \sqcup\}^*$
- Programas:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m : m + 1 : \text{halt}$$

- Instrucciones

$$\mathcal{I} ::= \text{right} \mid \text{left} \mid \text{write } \mathbf{s} \mid \\ \text{if } \mathbf{s} \text{ then goto } \ell \text{ else goto } \ell' \mid \text{goto } \ell$$

donde $\mathbf{s} \in \{0, 1, \sqcup\}$ y $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$.



Semántica operacional

LTURING

$$p = 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m : m + 1 : \text{halt}$$

- Memorias: $\mathcal{S} =_{\text{def}} \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \times \{0, 1, \perp\} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$.



Semántica operacional

LTURING

$$p = 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m : m + 1 : \text{halt}$$

- Memorias: $\mathcal{S} =_{\text{def}} \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \times \{0, 1, \perp\} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$.
- Usualmente escribiremos $L\underline{s}R \in \mathcal{S}$ en vez de $(L, s, R) \in \mathcal{S}$.



Semántica operacional

LTURING

$$p = 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m : m + 1 : \text{halt}$$

- Memorias: $\mathcal{S} =_{\text{def}} \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \times \{0, 1, \perp\} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$.
- Usualmente escribiremos $L\underline{s}R \in \mathcal{S}$ en vez de $(L, s, R) \in \mathcal{S}$.
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$



Semántica operacional

LTURING

$$p = 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m : m + 1 : \text{halt}$$

- Memorias: $\mathcal{S} =_{\text{def}} \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \times \{0, 1, \perp\} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$.
- Usualmente escribiremos $L\underline{s}R \in \mathcal{S}$ en vez de $(L, s, R) \in \mathcal{S}$.
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$
- Estados finales: $\text{final}(p) = \{\langle m + 1, \sigma \rangle \mid \sigma \in \mathcal{S}\}$.



Semántica operacional

LTURING

$$p = 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m : m + 1 : \text{halt}$$

- Memorias: $\mathcal{S} =_{\text{def}} \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \times \{0, 1, \perp\} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$.
- Usualmente escribiremos $L\underline{s}R \in \mathcal{S}$ en vez de $(L, s, R) \in \mathcal{S}$.
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$
- Estados finales: $\text{final}(p) = \{\langle m + 1, \sigma \rangle \mid \sigma \in \mathcal{S}\}$.
- Función de inicialización: $\text{init} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{E}$, $\text{init}(x) = \langle 1, \underline{\perp}x \rangle$



Semántica operacional

LTURING

$$p = 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m : m + 1 : \text{halt}$$

- Memorias: $\mathcal{S} =_{\text{def}} \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \times \{0, 1, \perp\} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$.
- Usualmente escribiremos $L\underline{s}R \in \mathcal{S}$ en vez de $(L, s, R) \in \mathcal{S}$.
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$
- Estados finales: $\text{final}(p) = \{\langle m + 1, \sigma \rangle \mid \sigma \in \mathcal{S}\}$.
- Función de inicialización: $\text{init} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{E}$, $\text{init}(x) = \langle 1, \underline{\perp}x \rangle$
- Función de salida: $\text{output} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$,

$$\text{output}(\langle \ell, L\underline{s}R \rangle) = R$$



Relación de transición

LTURING

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{L}ss'R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{L}ss'R \rangle$



Relación de transición

LTURING

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{L}ss'R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{L}ss'R \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{L}s \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{L}s \rangle$



Relación de transición

LTURING

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Lss'R} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{Lss'R} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Ls} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{Ls} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Lss'R} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{Lss'R} \rangle$



Relación de transición

LTURING

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s}s'R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, L\underline{s}s'R \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, L\underline{s} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s}s'R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, L\underline{s}s'R \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{s}R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{s}R \rangle$



Relación de transición

LTURING

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s}s'R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, Ls\underline{s}'R \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, Ls\underline{} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, Ls\underline{s}'R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, L\underline{s}s'R \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{s}R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{}sR \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{write } s$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s}'R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, L\underline{s}R \rangle$



Relación de transición

LTURING

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s}s'R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, L\underline{s}s'R \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, L\underline{s} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s}s'R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, L\underline{s}s'R \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{s}R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{s}R \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{write } s$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s}'R \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, L\underline{s}R \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{goto } \ell'$ entonces $p \triangleright \langle \ell, L\underline{s}R \rangle \rightarrow \langle \ell', L\underline{s}R \rangle$



Relación de transición

LTURING

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Lss'R} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{Lss'R} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Ls} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{Ls} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Lss'R} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{Lss'R} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{sR} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{sR} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{write } s$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Ls'R} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{LsR} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{goto } \ell'$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{LsR} \rangle \rightarrow \langle \ell', \underline{LsR} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{if } s \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{LsR} \rangle \rightarrow \langle \ell', \underline{LsR} \rangle$



Relación de transición

LTURING

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Lss'R} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{Lss'R} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{right}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Ls} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{Ls} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Lss'R} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{Lss'R} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{left}$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{sR} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{sR} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{write } s$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Ls'R} \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \underline{LsR} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{goto } \ell'$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{LsR} \rangle \rightarrow \langle \ell', \underline{LsR} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{if } s \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{LsR} \rangle \rightarrow \langle \ell', \underline{LsR} \rangle$
- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{if } s \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ entonces $p \triangleright \langle \ell, \underline{Ls'R} \rangle \rightarrow \langle \ell'', \underline{Ls'R} \rangle$



De \mathcal{MT} a LTURING

Sea $T = \langle \Sigma, Q, q_0, q_f, \delta \rangle$ con $\Sigma = \{0, 1, \sqcup\}$ una máquina de Turing clásica.



De \mathcal{MT} a LTURING

Sea $T = \langle \Sigma, Q, q_0, q_f, \delta \rangle$ con $\Sigma = \{0, 1, \sqcup\}$ una máquina de Turing clásica.

- Existe un programa p_T del lenguaje LTURING tal que

$$L(T) \subseteq \{x \in \Sigma^* \mid \llbracket p_T \rrbracket(x) \text{ existe}\}$$



De \mathcal{MT} a LTURING

Sea $T = \langle \Sigma, Q, q_0, q_f, \delta \rangle$ con $\Sigma = \{0, 1, \sqcup\}$ una máquina de Turing clásica.

- Existe un programa p_T del lenguaje LTURING tal que

$$L(T) \subseteq \{x \in \Sigma^* \mid \llbracket p_T \rrbracket(x) \text{ existe}\}$$

- Más aún, si $(q_0, \sqcup x) \rightarrow^* (q_f, w \sqcup y)$ entonces

$$\llbracket p_T \rrbracket(x) = y.$$



De LTURING a \mathcal{MT}

Sea p un programa en LTURING



De LTURING a \mathcal{MT}

Sea p un programa en LTURING

- Existe una máquina de Turing clásica T_p tal que:

si $\llbracket p \rrbracket(x) = y$ entonces $x \in L(T)$.



De LTURING a \mathcal{MT}

Sea p un programa en LTURING

- Existe una máquina de Turing clásica T_p tal que:

si $\llbracket p \rrbracket(x) = y$ entonces $x \in L(T)$.

- Más aún, si $p \triangleright_{LTuring} (1, \underline{x}) \rightarrow^* (m+1, w\underline{s}y)$ entonces

$(q_1, \underline{x}) \vdash^* (q_f, w\underline{s}y)$.



Árboles binarios

Tipo de datos

El conjunto de árboles \mathbb{T} se define recursivamente como:

- `nil` es un elemento de \mathbb{T} .



Árboles binarios

Tipo de datos

El conjunto de árboles \mathbb{T} se define recursivamente como:

- nil es un elemento de \mathbb{T} .
- Si $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ entonces $(t_1.t_2) \in \mathbb{T}$.



Árboles binarios

Tipo de datos

El conjunto de árboles \mathbb{T} se define recursivamente como:

- nil es un elemento de \mathbb{T} .
- Si $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ entonces $(t_1.t_2) \in \mathbb{T}$.
- Son todos.



Árboles binarios

Codificación de booleanos y naturales

- Los valores de verdad `true` y `false` se definen como:



Árboles binarios

Codificación de booleanos y naturales

- Los valores de verdad `true` y `false` se definen como:
 - ▶ `false = nil`



Árboles binarios

Codificación de booleanos y naturales

- Los valores de verdad `true` y `false` se definen como:
 - ▶ `false = nil`
 - ▶ `true = (nil.nil)`



Árboles binarios

Codificación de booleanos y naturales

- Los valores de verdad `true` y `false` se definen como:
 - ▶ `false = nil`
 - ▶ `true = (nil.nil)`
- El número natural n se codifica mediante un árbol de tamaño $n + 1$, construido de la siguiente forma:



Árboles binarios

Codificación de booleanos y naturales

- Los valores de verdad `true` y `false` se definen como:
 - ▶ `false = nil`
 - ▶ `true = (nil.nil)`
- El número natural n se codifica mediante un árbol de tamaño $n + 1$, construido de la siguiente forma:
 - ▶ Definimos $\underline{n} = \text{nil}^n$ donde

$$\begin{aligned}\text{nil}^0 &= \text{nil} \\ \text{nil}^{n+1} &= (\text{nil}.\text{nil}^n)\end{aligned}$$



Árboles binarios

Codificación de booleanos y naturales

- Los valores de verdad `true` y `false` se definen como:
 - ▶ `false = nil`
 - ▶ `true = (nil.nil)`
- El número natural n se codifica mediante un árbol de tamaño $n + 1$, construido de la siguiente forma:
 - ▶ Definimos $\underline{n} = \text{nil}^n$ donde

$$\begin{aligned}\text{nil}^0 &= \text{nil} \\ \text{nil}^{n+1} &= (\text{nil}.\text{nil}^n)\end{aligned}$$

- ▶ $\mathcal{N} = \{\underline{n} | n \in \mathbb{N}\}.$



Árboles binarios

Codificación de booleanos y naturales

- Los valores de verdad `true` y `false` se definen como:
 - ▶ `false = nil`
 - ▶ `true = (nil.nil)`
- El número natural n se codifica mediante un árbol de tamaño $n + 1$, construido de la siguiente forma:
 - ▶ Definimos $\underline{n} = \text{nil}^n$ donde

$$\begin{aligned}\text{nil}^0 &= \text{nil} \\ \text{nil}^{n+1} &= (\text{nil}.\text{nil}^n)\end{aligned}$$

- ▶ $\mathcal{N} = \{\underline{n} | n \in \mathbb{N}\}$.
- ▶ Por ejemplo, el numeral correspondiente al número natural 4 es $\underline{4} = (\text{nil}.\text{nil}.\text{nil}.\text{nil}.\text{nil}))$.



Árboles binarios

Codificación de booleanos y naturales

- Los valores de verdad `true` y `false` se definen como:
 - ▶ `false = nil`
 - ▶ `true = (nil.nil)`
- El número natural n se codifica mediante un árbol de tamaño $n + 1$, construido de la siguiente forma:
 - ▶ Definimos $\underline{n} = \text{nil}^n$ donde

$$\begin{aligned}\text{nil}^0 &= \text{nil} \\ \text{nil}^{n+1} &= (\text{nil}.\text{nil}^n)\end{aligned}$$

- ▶ $\mathcal{N} = \{\underline{n} | n \in \mathbb{N}\}$.
- ▶ Por ejemplo, el numeral correspondiente al número natural 4 es $\underline{4} = (\text{nil}.\text{nil}.\text{nil}.\text{nil}.\text{nil}))$.
- ▶ Por simplicidad escribiremos $0, 1, 2, \dots$ en vez de $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots$ o $\text{nil}^0, \text{nil}^1, \text{nil}^2, \dots$



El lenguaje WHILE

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$.



El lenguaje WHILE

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$.
- Programas:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; C_1, \dots, C_m; \text{write } Y$$



El lenguaje WHILE

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$.
- Programas:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; C_1, \dots, C_m; \text{write } Y$$

- Comandos:

$$C ::= X := e \mid \text{while } e \text{ do } \vec{C} \text{ end}$$



El lenguaje WHILE

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$.
- Programas:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; C_1, \dots, C_m; \text{write } Y$$

- Comandos:

$$C ::= X := e \mid \text{while } e \text{ do } \vec{C} \text{ end}$$

- Expresiones:

$$e, f ::= X \mid d \mid \text{cons } ef \mid \text{hd } e \mid \text{tl } e \mid =? ef$$



El lenguaje WHILE

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$.
- Programas:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; C_1, \dots, C_m; \text{write } Y$$

- Comandos:

$$C ::= X := e \mid \text{while } e \text{ do } \vec{C} \text{ end}$$

- Expresiones:

$$e, f ::= X \mid d \mid \text{cons } ef \mid \text{hd } e \mid \text{tl } e \mid =? ef$$

- Longitud o número de líneas en una secuencia de comandos, denotada



El lenguaje WHILE

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$.
- Programas:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; C_1, \dots, C_m; \text{write } Y$$

- Comandos:

$$C ::= X := e \mid \text{while } e \text{ do } \vec{C} \text{ end}$$

- Expresiones:

$$e, f ::= X \mid d \mid \text{cons } ef \mid \text{hd } e \mid \text{tl } e \mid =? ef$$

- Longitud o número de líneas en una secuencia de comandos, denotada
 - ▶ $|X := e| = 1$



El lenguaje WHILE

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$.
- Programas:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; C_1, \dots, C_m; \text{write } Y$$

- Comandos:

$$C ::= X := e \mid \text{while } e \text{ do } \vec{C} \text{ end}$$

- Expresiones:

$$e, f ::= X \mid d \mid \text{cons } e f \mid \text{hd } e \mid \text{tl } e \mid =? e f$$

- Longitud o número de líneas en una secuencia de comandos, denotada
 - ▶ $|X := e| = 1$
 - ▶ $|\text{while } e \text{ do } \vec{C} \text{ end}| = |\vec{C}| + 1$



El lenguaje WHILE

- Datos: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$.
- Programas:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; C_1, \dots, C_m; \text{write } Y$$

- Comandos:

$$C ::= X := e \mid \text{while } e \text{ do } \vec{C} \text{ end}$$

- Expresiones:

$$e, f ::= X \mid d \mid \text{cons } e f \mid \text{hd } e \mid \text{tl } e \mid =? e f$$

- Longitud o número de líneas en una secuencia de comandos, denotada

- ▶ $|X := e| = 1$
- ▶ $|\text{while } e \text{ do } \vec{C} \text{ end}| = |\vec{C}| + 1$
- ▶ $|C_1; \dots; C_n| = |C_1| + \dots + |C_n|$



Ejemplo

WHILE

El siguiente programa realiza la suma dos numerales. Aquí XY es una variable que recibe a un dato de entrada el cual debe ser de la forma $(n.m)$ para devolver $n + m$.

```
read XY;    (* add X Y *)
  X := hd XY;
  Y := tl XY;
  while X do
    Y := cons nil Y;
    X := tl X;
  end
write Y
```



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: la relación de transición se servirá de la siguiente función $ev : \mathcal{E} \rightarrow \text{Expr} \rightarrow \mathbb{T}$



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: la relación de transición se servirá de la siguiente función $ev : \mathcal{E} \rightarrow \text{Expr} \rightarrow \mathbb{T}$
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$ donde $s = \langle \ell, \sigma \rangle$.



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: la relación de transición se servirá de la siguiente función $ev : \mathcal{E} \rightarrow Expr \rightarrow \mathbb{T}$
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$ donde $s = \langle \ell, \sigma \rangle$.
 - ▶ $ev_s(d) = d$



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: la relación de transición se servirá de la siguiente función $ev : \mathcal{E} \rightarrow \text{Expr} \rightarrow \mathbb{T}$
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$ donde $s = \langle \ell, \sigma \rangle$.
 - ▶ $ev_s(d) = d$
 - ▶ $ev_s(\text{cons } e f) = ((ev_\sigma e).(ev_\sigma f))$



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: la relación de transición se servirá de la siguiente función $ev : \mathcal{E} \rightarrow Expr \rightarrow \mathbb{T}$
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$ donde $s = \langle \ell, \sigma \rangle$.
 - ▶ $ev_s(d) = d$
 - ▶ $ev_s(\text{cons } e f) = ((ev_\sigma e).(ev_\sigma f))$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } e) = nil$, si $ev_\sigma e = nil$



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: la relación de transición se servirá de la siguiente función $\text{ev} : \mathcal{E} \rightarrow \text{Expr} \rightarrow \mathbb{T}$
 - ▶ $\text{ev}_s(X) = \sigma(X)$ donde $s = \langle \ell, \sigma \rangle$.
 - ▶ $\text{ev}_s(d) = d$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{cons } e f) = ((\text{ev}_\sigma e).(\text{ev}_\sigma f))$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{hd } e) = \text{nil}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{nil}$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{hd } e) = t$, si $\text{ev}_\sigma e = (t.r)$



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: la relación de transición se servirá de la siguiente función $\text{ev} : \mathcal{E} \rightarrow \text{Expr} \rightarrow \mathbb{T}$
 - ▶ $\text{ev}_s(X) = \sigma(X)$ donde $s = \langle \ell, \sigma \rangle$.
 - ▶ $\text{ev}_s(d) = d$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{cons } e f) = ((\text{ev}_\sigma e).(\text{ev}_\sigma f))$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{hd } e) = \text{nil}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{nil}$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{hd } e) = t$, si $\text{ev}_\sigma e = (t.r)$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{tl } e) = \text{nil}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{nil}$



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: la relación de transición se servirá de la siguiente función $\text{ev} : \mathcal{E} \rightarrow \text{Expr} \rightarrow \mathbb{T}$
 - ▶ $\text{ev}_s(X) = \sigma(X)$ donde $s = \langle \ell, \sigma \rangle$.
 - ▶ $\text{ev}_s(d) = d$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{cons } e f) = ((\text{ev}_\sigma e).(\text{ev}_\sigma f))$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{hd } e) = \text{nil}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{nil}$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{hd } e) = t$, si $\text{ev}_\sigma e = (t.r)$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{tl } e) = \text{nil}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{nil}$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{tl } e) = r$, si $\text{ev}_\sigma e = (t.r)$



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: la relación de transición se servirá de la siguiente función $\text{ev} : \mathcal{E} \rightarrow \text{Expr} \rightarrow \mathbb{T}$
 - ▶ $\text{ev}_s(X) = \sigma(X)$ donde $s = \langle \ell, \sigma \rangle$.
 - ▶ $\text{ev}_s(d) = d$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{cons } e f) = ((\text{ev}_\sigma e).(\text{ev}_\sigma f))$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{hd } e) = \text{nil}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{nil}$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{hd } e) = t$, si $\text{ev}_\sigma e = (t.r)$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{tl } e) = \text{nil}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{nil}$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{tl } e) = r$, si $\text{ev}_\sigma e = (t.r)$
 - ▶ $\text{ev}_s(=? e f) = \text{true}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{ev}_\sigma f$



Semántica Operacional

WHILE

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: la relación de transición se servirá de la siguiente función $\text{ev} : \mathcal{E} \rightarrow \text{Expr} \rightarrow \mathbb{T}$
 - ▶ $\text{ev}_s(X) = \sigma(X)$ donde $s = \langle \ell, \sigma \rangle$.
 - ▶ $\text{ev}_s(d) = d$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{cons } e f) = ((\text{ev}_\sigma e).(\text{ev}_\sigma f))$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{hd } e) = \text{nil}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{nil}$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{hd } e) = t$, si $\text{ev}_\sigma e = (t.r)$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{tl } e) = \text{nil}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{nil}$
 - ▶ $\text{ev}_s(\text{tl } e) = r$, si $\text{ev}_\sigma e = (t.r)$
 - ▶ $\text{ev}_s(=? e f) = \text{true}$, si $\text{ev}_\sigma e = \text{ev}_\sigma f$
 - ▶ $\text{ev}_s(=? e f) = \text{false}$, si $\text{ev}_\sigma e \neq \text{ev}_\sigma f$



Relación de transición

WHILE

- Si $\mathcal{I}_\ell = X := e$ y $\text{ev}_{\langle \ell, \sigma \rangle}(e) = d$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \sigma[X/d] \rangle$$

donde $\sigma[X/d]$ denota a la actualización de σ en X por d .



Relación de transición

WHILE

- Si $\mathcal{I}_\ell = X := e$ y $\text{ev}_{\langle \ell, \sigma \rangle}(e) = d$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \sigma[X/d] \rangle$$

donde $\sigma[X/d]$ denota a la actualización de σ en X por d .

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{while } e \text{ do } \vec{D} \text{ end}$ con $|\vec{D}| = k$ y $\text{ev}_s(e) = \text{nil}$, entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + k + 1, \sigma \rangle$$



Relación de transición

WHILE

- Si $\mathcal{I}_\ell = X := e$ y $\text{ev}_{\langle \ell, \sigma \rangle}(e) = d$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \sigma[X/d] \rangle$$

donde $\sigma[X/d]$ denota a la actualización de σ en X por d .

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{while } e \text{ do } \vec{D} \text{ end}$ con $|\vec{D}| = k$ y $\text{ev}_s(e) = \text{nil}$, entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + k + 1, \sigma \rangle$$

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{while } e \text{ do } \vec{D} \text{ end}$ con $|\vec{D}| = k$ y $\text{ev}_s(e) \neq \text{nil}$, entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + k + 1, \sigma'' \rangle,$$

donde



Relación de transición

WHILE

- Si $\mathcal{I}_\ell = X := e$ y $\text{ev}_{\langle \ell, \sigma \rangle}(e) = d$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \sigma[X/d] \rangle$$

donde $\sigma[X/d]$ denota a la actualización de σ en X por d .

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{while } e \text{ do } \vec{D} \text{ end}$ con $|\vec{D}| = k$ y $\text{ev}_s(e) = \text{nil}$, entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + k + 1, \sigma \rangle$$

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{while } e \text{ do } \vec{D} \text{ end}$ con $|\vec{D}| = k$ y $\text{ev}_s(e) \neq \text{nil}$, entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + k + 1, \sigma'' \rangle,$$

donde

- ▶ $p \triangleright \langle \ell + 1, \sigma \rangle \rightarrow^* \langle \ell + k, \sigma' \rangle$



Relación de transición

WHILE

- Si $\mathcal{I}_\ell = X := e$ y $\text{ev}_{\langle \ell, \sigma \rangle}(e) = d$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \sigma[X/d] \rangle$$

donde $\sigma[X/d]$ denota a la actualización de σ en X por d .

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{while } e \text{ do } \vec{D} \text{ end}$ con $|\vec{D}| = k$ y $\text{ev}_s(e) = \text{nil}$, entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + k + 1, \sigma \rangle$$

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{while } e \text{ do } \vec{D} \text{ end}$ con $|\vec{D}| = k$ y $\text{ev}_s(e) \neq \text{nil}$, entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + k + 1, \sigma'' \rangle,$$

donde

- ▶ $p \triangleright \langle \ell + 1, \sigma \rangle \rightarrow^* \langle \ell + k, \sigma' \rangle$
- ▶ $p \triangleright \langle \ell, \sigma' \rangle \rightarrow \langle \ell + k + 1, \sigma'' \rangle$



Semántica Operacional

WHILE

$$p = \text{read } X; \vec{C}; \text{write } Y$$

- Estados finales: $\text{final}(p) = \{ \langle m + 1, \sigma \rangle \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$, donde $m = |\vec{C}|$.



Semántica Operacional

WHILE

$$p = \text{read } X; \vec{C}; \text{write } Y$$

- Estados finales: $\text{final}(p) = \{\langle m+1, \sigma \rangle \mid \sigma \in \mathcal{S}\}$, donde $m = |\vec{C}|$.
- Función de inicialización: $\text{init} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{E}$,

$$\text{init}(p, d) = \langle 1, [X \mapsto d, Y \mapsto \text{nil}, Z_1 \mapsto \text{nil}, \dots, Z_n \mapsto \text{nil}] \rangle$$

donde $\text{Vars}(p) = \{X, Y, Z_1, \dots, Z_n\}$.



Semántica Operacional

WHILE

$$p = \text{read } X; \vec{C}; \text{write } Y$$

- Estados finales: $\text{final}(p) = \{\langle m+1, \sigma \rangle \mid \sigma \in \mathcal{S}\}$, donde $m = |\vec{C}|$.
- Función de inicialización: $\text{init} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{E}$,

$$\text{init}(p, d) = \langle 1, [X \mapsto d, Y \mapsto \text{nil}, Z_1 \mapsto \text{nil}, \dots, Z_n \mapsto \text{nil}] \rangle$$

donde $\text{Vars}(p) = \{X, Y, Z_1, \dots, Z_n\}$.

- Función de salida: $\text{output} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$,

$$\text{output}(p, \sigma) = \sigma(Y)$$



El lenguaje GOTO

- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$



El lenguaje GOTO

- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ se define mediante la siguiente gramática



El lenguaje GOTO

- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ se define mediante la siguiente gramática
$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$$



El lenguaje GOTO

- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ se define mediante la siguiente gramática
$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$$
$$\mathcal{I} ::= X := e \mid \text{if } X \text{ then goto } \ell \text{ else goto } \ell' \mid \text{goto } \ell$$



El lenguaje GOTO

- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ se define mediante la siguiente gramática
$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$$
$$\mathcal{I} ::= X := e \mid \text{if } X \text{ then goto } \ell \text{ else goto } \ell' \mid \text{goto } \ell$$
$$e, f ::= X \mid d \mid \text{cons } Y Z \mid \text{hd } X \mid \text{tl } X \mid =? Y Z$$



El lenguaje GOTO

- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ se define mediante la siguiente gramática
$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$$
$$\mathcal{I} ::= X := e \mid \text{if } X \text{ then goto } \ell \text{ else goto } \ell' \mid \text{goto } \ell$$
$$e, f ::= X \mid d \mid \text{cons } Y Z \mid \text{hd } X \mid \text{tl } X \mid =? Y Z$$
donde $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$.



El lenguaje GOTO

- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ se define mediante la siguiente gramática
$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$$
$$\mathcal{I} ::= X := e \mid \text{if } X \text{ then goto } \ell \text{ else goto } \ell' \mid \text{goto } \ell$$
$$e, f ::= X \mid d \mid \text{cons } Y Z \mid \text{hd } X \mid \text{tl } X \mid =? Y Z$$
donde $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$.
- Obsérvese que, a diferencia de WHILE , en este lenguaje en cada expresión e hay exactamente una presencia de operador



El lenguaje GOTO

- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{T}$
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ se define mediante la siguiente gramática
$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \ni p ::= \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$$
$$\mathcal{I} ::= X := e \mid \text{if } X \text{ then goto } \ell \text{ else goto } \ell' \mid \text{goto } \ell$$
$$e, f ::= X \mid d \mid \text{cons } Y Z \mid \text{hd } X \mid \text{tl } X \mid =? Y Z$$
donde $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$.
- Obsérvese que, a diferencia de WHILE , en este lenguaje en cada expresión e hay exactamente una presencia de operador
- Además la longitud $|\vec{\mathcal{I}}|$ de una secuencia de instrucciones es simplemente el número de instrucciones que la componen.



Suma de dos numerales

GOTO

```
read XY;  
1: X:= hd XY;  
2: Y:= tl XY;  
3: if X then goto 4 else goto 7;  
4: Y:= cons nil Y;  
5: X:= tl X;  
6: goto 3;  
write Y.
```



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$
 - ▶ $ev_s(d) = d$



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$
 - ▶ $ev_s(d) = d$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$
 - ▶ $ev_s(d) = d$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = d$, si $\sigma(X) = (d.e)$



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$
 - ▶ $ev_s(d) = d$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = d$, si $\sigma(X) = (d.e)$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$
 - ▶ $ev_s(d) = d$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = d$, si $\sigma(X) = (d.e)$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = e$, si $\sigma(X) = (d.e)$



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$
 - ▶ $ev_s(d) = d$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = d$, si $\sigma(X) = (d.e)$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = e$, si $\sigma(X) = (d.e)$
 - ▶ $ev_s(\text{cons } X \ Y) = (d.e)$ si $\sigma(X) = d$, $\sigma(Y) = e$



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$
 - ▶ $ev_s(d) = d$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = d$, si $\sigma(X) = (d.e)$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = e$, si $\sigma(X) = (d.e)$
 - ▶ $ev_s(\text{cons } X \ Y) = (d.e)$ si $\sigma(X) = d$, $\sigma(Y) = e$
 - ▶ $ev_s(=?X \ Y) = \text{true}$ si $\sigma(X) = \sigma(Y)$.



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$
 - ▶ $ev_s(d) = d$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = d$, si $\sigma(X) = (d.e)$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = e$, si $\sigma(X) = (d.e)$
 - ▶ $ev_s(\text{cons } X \ Y) = (d.e)$ si $\sigma(X) = d$, $\sigma(Y) = e$
 - ▶ $ev_s(=?X \ Y) = \text{true}$ si $\sigma(X) = \sigma(Y)$.
 - ▶ $ev_s(=?X \ Y) = \text{false}$ si $\sigma(X) \neq \sigma(Y)$.



Semántica operacional

GOTO

- Memorias: $\mathcal{S} = \{\sigma \mid \sigma : \text{Var} \rightarrow \mathbb{T}\}$
- Estados: $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathcal{S}$.
- Evaluación de expresiones: si $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ entonces definimos la función de evaluación $ev_s : \text{Expr} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ como sigue:
 - ▶ $ev_s(X) = \sigma(X)$
 - ▶ $ev_s(d) = d$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{hd } X) = d$, si $\sigma(X) = (d.e)$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = \text{nil}$, si $\sigma(X) = \text{nil}$
 - ▶ $ev_s(\text{tl } X) = e$, si $\sigma(X) = (d.e)$
 - ▶ $ev_s(\text{cons } X \ Y) = (d.e)$ si $\sigma(X) = d$, $\sigma(Y) = e$
 - ▶ $ev_s(=?X \ Y) = \text{true}$ si $\sigma(X) = \sigma(Y)$.
 - ▶ $ev_s(=?X \ Y) = \text{false}$ si $\sigma(X) \neq \sigma(Y)$.
- Obsérvese que la función ev_s no es recursiva a diferencia de la función correspondiente en el lenguaje WHILE .



Relación de transición

GOTO

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ y $\text{ev}_{\langle \ell, \sigma \rangle}(e) = d$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \sigma[X/d] \rangle$$



Relación de transición

GOTO

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ y $\text{ev}_{\langle \ell, \sigma \rangle}(e) = d$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \sigma[X/d] \rangle$$

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{if } X \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ y $\sigma(X) = \text{nil}$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell'', \sigma \rangle$$



Relación de transición

GOTO

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ y $\text{ev}_{\langle \ell, \sigma \rangle}(e) = d$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \sigma[X/d] \rangle$$

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{if } X \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ y $\sigma(X) = \text{nil}$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell'', \sigma \rangle$$

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{if } X \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ y $\sigma(X) \neq \text{nil}$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell', \sigma \rangle$$



Relación de transición

GOTO

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ y $\text{ev}_{\langle \ell, \sigma \rangle}(e) = d$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell + 1, \sigma[X/d] \rangle$$

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{if } X \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ y $\sigma(X) = \text{nil}$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell'', \sigma \rangle$$

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{if } X \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ y $\sigma(X) \neq \text{nil}$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell', \sigma \rangle$$

- Si $\mathcal{I}_\ell = \text{goto } \ell'$ entonces

$$p \triangleright \langle \ell, \sigma \rangle \rightarrow \langle \ell', \sigma \rangle$$



Semántica operacional

GOTO

$$p = \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y.$$

- Estados finales: $\text{final}(p) = \{\langle m + 1, \sigma \rangle \mid \sigma \in \mathcal{S}\}.$



Semántica operacional

GOTO

$$p = \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y.$$

- Estados finales: $\text{final}(p) = \{\langle m + 1, \sigma \rangle \mid \sigma \in \mathcal{S}\}.$
- Función de inicialización: $\text{init} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{E}$

$$\text{init}(p, d) = \langle 1, [X \mapsto d, Z_1 \mapsto \text{nil}, \dots, Z_n \mapsto \text{nil}] \rangle$$

donde $\text{Vars}(p) = \{X, Y, Z_1, \dots, Z_n\}.$



Semántica operacional

GOTO

$$p = \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y.$$

- Estados finales: $\text{final}(p) = \{\langle m + 1, \sigma \rangle \mid \sigma \in \mathcal{S}\}.$
- Función de inicialización: $\text{init} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{E}$

$$\text{init}(p, d) = \langle 1, [X \mapsto d, Z_1 \mapsto \text{nil}, \dots, Z_n \mapsto \text{nil}] \rangle$$

donde $\text{Vars}(p) = \{X, Y, Z_1, \dots, Z_n\}.$

- Función de salida: $\text{output} : \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \text{output}(p, \sigma) = \sigma(Y)$



Compilador

Equivalencia de lenguajes de programación

Sean $\mathcal{S} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{S}}, \mathcal{D}_{\mathcal{S}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}} \rangle$ y $\mathcal{T} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}}, \mathcal{D}_{\mathcal{T}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{T}} \rangle$ dos lenguajes de programación.

- Un compilador de \mathcal{S} en \mathcal{T} es un par de funciones $\mathcal{C} = \langle F, c \rangle$ tal que $F : \mathcal{P}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$, $c : \mathcal{D}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ y



Compilador

Equivalencia de lenguajes de programación

Sean $\mathcal{S} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{S}}, \mathcal{D}_{\mathcal{S}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}} \rangle$ y $\mathcal{T} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}}, \mathcal{D}_{\mathcal{T}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{T}} \rangle$ dos lenguajes de programación.

- Un compilador de \mathcal{S} en \mathcal{T} es un par de funciones $\mathcal{C} = \langle F, c \rangle$ tal que $F : \mathcal{P}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$, $c : \mathcal{D}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ y
- se cumple que

$$\forall p \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}} \forall x \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}} (c(\llbracket p \rrbracket_{\mathcal{S}}(x)) = \llbracket F(p) \rrbracket_{\mathcal{T}}(c(x)))$$



Compilador

Equivalencia de lenguajes de programación

Sean $\mathcal{S} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{S}}, \mathcal{D}_{\mathcal{S}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}} \rangle$ y $\mathcal{T} = \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}}, \mathcal{D}_{\mathcal{T}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{T}} \rangle$ dos lenguajes de programación.

- Un compilador de \mathcal{S} en \mathcal{T} es un par de funciones $\mathcal{C} = \langle F, c \rangle$ tal que $F : \mathcal{P}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$, $c : \mathcal{D}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ y
- se cumple que

$$\forall p \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}} \forall x \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}} (c(\llbracket p \rrbracket_{\mathcal{S}}(x)) = \llbracket F(p) \rrbracket_{\mathcal{T}}(c(x)))$$

- o equivalentemente: $\forall p \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}} \forall x \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}} \forall y \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$

$$\llbracket p \rrbracket_{\mathcal{S}}(x) = y \text{ si y sólo si } \llbracket F(p) \rrbracket_{\mathcal{T}}(c(x)) = c(y)$$



De *While* a *Goto*

- *While*₁: restricción de *While* de modo que cada expresión contiene un único operador.



De *While* a *Goto*

- *While1*: restricción de *While* de modo que cada expresión contiene un único operador.
- *While1* es equivalente a *While*.



De *While* a *Goto*

- *While1*: restricción de *While* de modo que cada expresión contiene un único operador.
- *While1* es equivalente a *While*.
- Basta transformar instrucciones que contengan expresiones con más de un operador mediante el uso de variables auxiliares.



De *While* a *Goto*

- *While1*: restricción de *While* de modo que cada expresión contiene un único operador.
- *While1* es equivalente a *While*.
- Basta transformar instrucciones que contengan expresiones con más de un operador mediante el uso de variables auxiliares.
- Por ejemplo $X := \text{cons } X(\text{hd } Y)$ se convierte en

$$W := \text{hd } Y; X := \text{cons } X W$$



Traducción de comandos de WHILE1 a GOTO

$$C \mapsto \hat{\ell} : C^*$$

Sea C un comando del lenguaje WHILE1 y ℓ una etiqueta. Definimos la secuencia de comandos etiquetados del lenguaje GOTO $\hat{\ell} : C^*$ como sigue:

- Si $C =_{\text{def}} X := e$ entonces $\hat{\ell} : C^* =_{\text{def}} X := e$.



Traducción de comandos de WHILE1 a GOTO

$$C \mapsto \widehat{\ell} : C^*$$

Sea C un comando del lenguaje WHILE1 y ℓ una etiqueta. Definimos la secuencia de comandos etiquetados del lenguaje GOTO $\widehat{\ell} : C^*$ como sigue:

- Si $C =_{\text{def}} X := e$ entonces $\widehat{\ell} : C^* =_{\text{def}} X := e$.
- Si $C =_{\text{def}} \text{while } X \text{ do } D_1; \dots; D_k \text{ end}$ entonces

$$\begin{aligned} C^* &=_{\text{def}} \widehat{\ell} : \text{if } X \text{ then goto } \widehat{\ell} + 1 \text{ else goto } \widehat{\ell}_{k+1} + 1; \\ &\quad \widehat{\ell} + 1 : D_1^*; \\ &\quad \widehat{\ell}_2 : D_2^*; \\ &\quad \vdots \\ &\quad \widehat{\ell}_k : D_k^* \\ &\quad \widehat{\ell}_{k+1} : \text{goto } \widehat{\ell}; \end{aligned}$$



Traducción de programas de WHILE1 a GOTO

$p \mapsto p_G$

- Dado p en WHILE1 :

$p =_{\text{def}} \text{read } X; C_1; \dots; C_m; \text{write } Y$



Traducción de programas de WHILE1 a GOTO

$$p \mapsto p_G$$

- Dado p en WHILE1 :

$$p =_{\text{def}} \text{read } X; C_1; \dots; C_m; \text{write } Y$$

- Definimos el programa p_G en GOTO como:

$$p_G =_{\text{def}} \text{read } X; 1 : C_1^*; \widehat{\ell}_2 : C_2^*; \dots; \widehat{\ell}_m : C_m^*; \text{write } Y$$



Traducción de programas de WHILE1 a GOTO

$$p \mapsto p_G$$

- Dado p en WHILE1 :

$$p =_{\text{def}} \text{read } X; C_1; \dots; C_m; \text{write } Y$$

- Definimos el programa p_G en GOTO como:

$$p_G =_{\text{def}} \text{read } X; 1 : C_1^*; \widehat{\ell}_2 : C_2^*; \dots; \widehat{\ell}_m : C_m^*; \text{write } Y$$

- donde $\widehat{\ell}_2 = |C_1^*| + 1$ y $\widehat{\ell}_{j+1} = \widehat{\ell}_j + |C_j^*|$ para $1 < j < m$.



De WHILE1 a GOTO

- Traducción de estados: sea $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ un estado en WHILE1 . Definimos el estado \bar{s} en GOTO como $\bar{s} =_{def} \langle \hat{l}, \sigma \rangle$



De WHILE1 a GOTO

- Traducción de estados: sea $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ un estado en WHILE1 . Definimos el estado \bar{s} en GOTO como $\bar{s} =_{def} \langle \hat{l}, \sigma \rangle$
- Simulación:

Si $p \triangleright_{WHILE1} s \rightarrow s'$ entonces $p_G \triangleright_{GOTO} \bar{s} \rightarrow^* \bar{s}'$



De WHILE1 a GOTO

- Traducción de estados: sea $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ un estado en WHILE1 . Definimos el estado \bar{s} en GOTO como $\bar{s} =_{def} \langle \hat{l}, \sigma \rangle$

- Simulación:

Si $p \triangleright_{\text{WHILE1}} s \rightarrow s'$ entonces $p_G \triangleright_{\text{GOTO}} \bar{s} \rightarrow^* \bar{s}'$

- Compilación: Sea $\mathcal{C} = \langle F, c \rangle$ con $F : \mathcal{P}_{\text{WHILE1}} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{GOTO}}$ tal que $F(p) = p_G$ y $c = id$ la función identidad. \mathcal{C} es un compilador de WHILE1 a GOTO .



Transformación de Böhm-Jacopini $\ell : \mathcal{I}_\ell \mapsto \mathcal{I}_\ell^*$

De GOTO a WHILE

Dada una instrucción etiquetada $\ell : \mathcal{I}_\ell$ del lenguaje GOTO . Definimos la secuencia de comandos \mathcal{I}_ℓ^* del lenguaje WHILE de acuerdo a los siguientes casos:

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ entonces

$$\mathcal{I}_\ell^* =_{\text{def}} X := e; PC := \ell + 1$$



Transformación de Böhm-Jacopini $\ell : \mathcal{I}_\ell \mapsto \mathcal{I}_\ell^*$

De GOTO a WHILE

Dada una instrucción etiquetada $\ell : \mathcal{I}_\ell$ del lenguaje GOTO . Definimos la secuencia de comandos \mathcal{I}_ℓ^* del lenguaje WHILE de acuerdo a los siguientes casos:

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ entonces

$$\mathcal{I}_\ell^* =_{\text{def}} X := e; PC := \ell + 1$$

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{if } X \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ entonces

$$\mathcal{I}_\ell^* =_{\text{def}} \text{if } X \text{ then } PC := \ell' \text{ else } PC := \ell''$$



Transformación de Böhm-Jacopini $\ell : \mathcal{I}_\ell \mapsto \mathcal{I}_\ell^*$

De GOTO a WHILE

Dada una instrucción etiquetada $\ell : \mathcal{I}_\ell$ del lenguaje GOTO . Definimos la secuencia de comandos \mathcal{I}_ℓ^* del lenguaje WHILE de acuerdo a los siguientes casos:

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ entonces

$$\mathcal{I}_\ell^* =_{\text{def}} X := e; PC := \ell + 1$$

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{if } X \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ entonces

$$\mathcal{I}_\ell^* =_{\text{def}} \text{if } X \text{ then } PC := \ell' \text{ else } PC := \ell''$$

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{goto } \ell'$ entonces $\mathcal{I}_\ell^* =_{\text{def}} PC := \ell'$



Transformación de Böhm-Jacopini $\ell : \mathcal{I}_\ell \mapsto \mathcal{I}_\ell^*$

De GOTO a WHILE

Dada una instrucción etiquetada $\ell : \mathcal{I}_\ell$ del lenguaje GOTO . Definimos la secuencia de comandos \mathcal{I}_ℓ^* del lenguaje WHILE de acuerdo a los siguientes casos:

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ entonces

$$\mathcal{I}_\ell^* =_{\text{def}} X := e; PC := \ell + 1$$

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{if } X \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ entonces

$$\mathcal{I}_\ell^* =_{\text{def}} \text{if } X \text{ then } PC := \ell' \text{ else } PC := \ell''$$

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{goto } \ell'$ entonces $\mathcal{I}_\ell^* =_{\text{def}} PC := \ell'$

- Aquí PC es una variable nueva



Traducción de GOTO a WHILE

Si p es un programa en GOTO ,

$$p =_{\text{def}} \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$$

definimos el programa p_W en WHILE como:



Traducción de GOTO a WHILE

Si p es un programa en GOTO ,

$$p =_{\text{def}} \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1; \dots; m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$$

definimos el programa p_W en WHILE como:

```
 $p_W$   =def  read  $X$ ;  
           $PC := 1$ ;  
          while  $PC$  do  
            case  $PC$  of  
              1  $\Rightarrow \mathcal{I}_1^*$ ;  
               $\vdots$   
               $m \Rightarrow \mathcal{I}_m^*$ ;  
              otherwise  $\Rightarrow PC := 0$ ;  
          end;  
          write  $Y$ 
```



Ejemplo

Reversa

```
read X;
  PC := 1;
  while PC do
    case PC of
      1 => Y:=nil; PC:=2;
      2 => if X then PC:=3 else PC:=7;
      3 => Z:=hd x; PC:=4;
      4 => Y:=cons Z Y; PC:=5;
      5 => X:=tl X; PC:= 6;
      6 => PC:=2;
      otherwise => PC:=0
    end
  write Y
```



De GOTO a WHILE1

- Traducción de estados: Sean $p = \text{read } X, 1 : \mathcal{I}_1, \dots, m : \mathcal{I}_m, \text{write } Y$ un programa y $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ un estado en GOTO. Definimos el estado \bar{s} en WHILE como $\bar{s} =_{\text{def}} \langle \tilde{\ell}, \tilde{\sigma} \rangle$ donde $\tilde{1} = 4$, $\tilde{\ell} + 1 = \tilde{\ell} + |\tilde{\mathcal{I}}_{\ell}|$ para $1 < \ell \leq m$ y $\tilde{\sigma} = \sigma[PC/n]$ donde n es un valor único que queda determinado hasta el momento de la ejecución.



De GOTO a WHILE1

- Traducción de estados: Sean $p = \text{read } X, 1 : \mathcal{I}_1, \dots, m : \mathcal{I}_m, \text{write } Y$ un programa y $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ un estado en GOTO. Definimos el estado \bar{s} en WHILE como $\bar{s} =_{\text{def}} \langle \tilde{\ell}, \tilde{\sigma} \rangle$ donde $\tilde{1} = 4$, $\tilde{\ell} + 1 = \tilde{\ell} + |\tilde{\mathcal{I}}_{\ell}|$ para $1 < \ell \leq m$ y $\tilde{\sigma} = \sigma[PC/n]$ donde n es un valor único que queda determinado hasta el momento de la ejecución.
- Simulación: Si $p \triangleright_{\text{GOTO}} s \rightarrow s'$ entonces $p_W \triangleright_{\text{WHILE}} \bar{s} \rightarrow^+ \bar{s}'$



De GOTO a WHILE1

- Traducción de estados: Sean $p = \text{read } X, 1 : \mathcal{I}_1, \dots, m : \mathcal{I}_m, \text{write } Y$ un programa y $s = \langle \ell, \sigma \rangle$ un estado en GOTO. Definimos el estado \bar{s} en WHILE como $\bar{s} =_{\text{def}} \langle \tilde{\ell}, \tilde{\sigma} \rangle$ donde $\tilde{1} = 4$, $\tilde{\ell} + 1 = \tilde{\ell} + |\tilde{\mathcal{I}}_{\ell}|$ para $1 < \ell \leq m$ y $\tilde{\sigma} = \sigma[PC/n]$ donde n es un valor único que queda determinado hasta el momento de la ejecución.
- Simulación: Si $p \triangleright_{\text{GOTO}} s \rightarrow s'$ entonces $p_W \triangleright_{\text{WHILE}} \bar{s} \rightarrow^+ \bar{s}'$
- Compilación: Sea $\mathcal{C} = \langle F, c \rangle$ con $F : \mathcal{P}_{\text{GOTO}} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{WHILE1}}$ tal que $F(p) = p_W$ y $c = \text{id}$ es la función identidad. \mathcal{C} es un compilador de GOTO a WHILE1



Teorema de la programación estructurada

Böhm-Jacopini

Cualquier programa no estructurado puede implementarse en un lenguaje estrictamente secuencial que contenga las siguientes instrucciones: secuencia (;), condicional (`if`) e iteración (`while`)



De LTURING a GOTO

Codificación de datos

La función de codificación $(\cdot)^\dagger : \{0, 1, \sqcup\}^* \rightarrow \mathbb{T}$ se define como $w^\dagger = s_1^\dagger s_2^\dagger \dots s_n^\dagger$, donde $w = s_1 s_2 \dots s_n$ y

$$\sqcup^\dagger = \text{nil}, 0^\dagger = \text{nil.nil}, 1^\dagger = \text{nil.}(\text{nil.nil})$$



Traducción de instrucciones de LTURING a GOTO

$$\ell : \mathcal{I}_\ell \mapsto \widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell$$

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{right}$ entonces

$$\begin{aligned}\widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell &=_{\text{def}} \widehat{\ell} : A_1 := \text{nil} \\ \widehat{\ell} + 1 &: A_2 := (= ? \text{ Rt } A_1) \\ \widehat{\ell} + 2 &: \text{if } A_2 \text{ then goto } \widehat{\ell} + 3 \text{ else goto } \widehat{\ell} + 6 \\ \widehat{\ell} + 3 &: Lf := \text{cons } C \text{ } Lf \\ \widehat{\ell} + 4 &: C := \sqcup \\ \widehat{\ell} + 5 &: \text{goto } \widehat{\ell} + 1 \\ \widehat{\ell} + 6 &: Lf := \text{cons } C \text{ } Lf \\ \widehat{\ell} + 7 &: C := \text{hd } Rt \\ \widehat{\ell} + 8 &: Rt := \text{tl } Rt\end{aligned}$$

donde las variables A_1, A_2 son nuevas.



Traducción de instrucciones de LTURING a GOTO

$$\ell : \mathcal{I}_\ell \mapsto \widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell$$

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{right}$ entonces

$$\begin{aligned}\widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell &=_{\text{def}} \widehat{\ell} : A_1 := \text{nil} \\ \widehat{\ell} + 1 &: A_2 := (= ? \text{Rt } A_1) \\ \widehat{\ell} + 2 &: \text{if } A_2 \text{ then goto } \widehat{\ell} + 3 \text{ else goto } \widehat{\ell} + 6 \\ \widehat{\ell} + 3 &: Lf := \text{cons } C \ Lf \\ \widehat{\ell} + 4 &: C := \sqcup \\ \widehat{\ell} + 5 &: \text{goto } \widehat{\ell} + 1 \\ \widehat{\ell} + 6 &: Lf := \text{cons } C \ Lf \\ \widehat{\ell} + 7 &: C := \text{hd } Rt \\ \widehat{\ell} + 8 &: Rt := \text{tl } Rt\end{aligned}$$

donde las variables A_1, A_2 son nuevas.

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{left}$ entonces $\widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell$ se define análogamente al caso anterior.



Traducción de instrucciones de LTURING a GOTO

$$\ell : \mathcal{I}_\ell \mapsto \widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell$$

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{write } s$ entonces $\widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell =_{\text{def}} \widehat{\ell} : C := s$



Traducción de instrucciones de LTURING a GOTO

$$\ell : \mathcal{I}_\ell \mapsto \widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell$$

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{write } s$ entonces $\widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell =_{\text{def}} \widehat{\ell} : C := s$
- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{if } s \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell &=_{\text{def}} \widehat{\ell} : A_1 := s \\ &\quad \widehat{\ell} + 1 : A_2 := (= ? C A_1) \\ &\quad \widehat{\ell} + 2 : \text{if } A_2 \text{ then goto } \widehat{\ell}' \text{ else goto } \widehat{\ell}'' \end{aligned}$$

donde las variables A_1, A_2 son nuevas.



Traducción de instrucciones de LTURING a GOTO

$$\ell : \mathcal{I}_\ell \mapsto \widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell$$

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{write } s$ entonces $\widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell =_{\text{def}} \widehat{\ell} : C := s$
- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{if } s \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\ell} : \widetilde{\mathcal{I}}_\ell &=_{\text{def}} \widehat{\ell} : A_1 := s \\ &\quad \widehat{\ell} + 1 : A_2 := (= ? C A_1) \\ &\quad \widehat{\ell} + 2 : \text{if } A_2 \text{ then goto } \widehat{\ell}' \text{ else goto } \widehat{\ell}'' \end{aligned}$$

donde las variables A_1, A_2 son nuevas.

- Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{goto } \ell'$ entonces $\widetilde{\mathcal{I}}_\ell =_{\text{def}} \text{goto } \widehat{\ell}'$



Traducción de LTURING a GOTO

Dado un programa p en LTURING

$$p =_{\text{def}} 1 : \mathcal{I}_1, 2 : \mathcal{I}_2, \dots, m : \mathcal{I}_m; m + 1 : \text{halt}$$



Traducción de LTURING a GOTO

Dado un programa p en LTURING

$$p =_{\text{def}} 1 : \mathcal{I}_1, 2 : \mathcal{I}_2, \dots, m : \mathcal{I}_m; m+1 : \text{halt}$$

definimos el programa p_G en GOTO como sigue:

$$p_G =_{\text{def}} \text{read } Rt; 1 : \tilde{\mathcal{I}}_1, \hat{2} : \tilde{\mathcal{I}}_2, \dots, \hat{m} : \tilde{\mathcal{I}}_m; \text{write } Rt$$

donde $\hat{2} = 1 + |\tilde{\mathcal{I}}_1|$ y $\widehat{j+1} = |\tilde{\mathcal{I}}_j| + j$, $1 < j < m$.



De LTURING a GOTO

- Traducción de estados: Dado un estado $s =_{\text{def}} \langle \ell, \underline{LsR} \rangle$ en LTURING definimos el estado \bar{s} en GOTO como $\bar{s} =_{\text{def}} \langle \widehat{\ell}, \sigma \rangle$ donde

$$\sigma =_{\text{def}} [Lf \mapsto (L^{rev})^\dagger, C \mapsto s^\dagger, Rt \mapsto R^\dagger]$$

y L^{rev} denota a la reversa de la cadena L .



De LTURING a GOTO

- Traducción de estados: Dado un estado $s =_{\text{def}} \langle \ell, L\underline{s}R \rangle$ en LTURING definimos el estado \bar{s} en GOTO como $\bar{s} =_{\text{def}} \langle \widehat{\ell}, \sigma \rangle$ donde

$$\sigma =_{\text{def}} [Lf \mapsto (L^{\text{rev}})^{\dagger}, C \mapsto s^{\dagger}, Rt \mapsto R^{\dagger}]$$

y L^{rev} denota a la reversa de la cadena L .

- Simulación: Si $p \triangleright_{\text{LTURING}} s \rightarrow s'$ entonces $p_G \triangleright_{\text{GOTO}} \bar{s} \rightarrow^+ \bar{s}'$



De LTURING a GOTO

- Traducción de estados: Dado un estado $s =_{\text{def}} \langle \ell, LsR \rangle$ en LTURING definimos el estado \bar{s} en GOTO como $\bar{s} =_{\text{def}} \langle \widehat{\ell}, \sigma \rangle$ donde

$$\sigma =_{\text{def}} [Lf \mapsto (L^{\text{rev}})^{\dagger}, C \mapsto s^{\dagger}, Rt \mapsto R^{\dagger}]$$

y L^{rev} denota a la reversa de la cadena L .

- Simulación: Si $p \triangleright_{\text{LTURING}} s \rightarrow s'$ entonces $p_G \triangleright_{\text{GOTO}} \bar{s} \rightarrow^+ \bar{s}'$
- Compilación: Sea $\mathcal{C} = \langle F, c \rangle$ con

$$F(p) = p_G \text{ y } c(x) = x^{\dagger}.$$

\mathcal{C} es un compilador de LTURING a GOTO



De GOTO a \mathcal{MT}

Codificación de datos

Sea $\Sigma = \{0, (,), \cdot, \sqcup\}$ El conjunto de datos de GOTO, $\mathcal{D}_{Goto} = \mathbb{T}$ se codifica en Σ mediante la función $(\cdot)^{\ddagger} : \mathbb{T} \rightarrow \Sigma^*$ como sigue:

- $nil^{\ddagger} = 0$



De GOTO a \mathcal{MT}

Codificación de datos

Sea $\Sigma = \{0, (,), \cdot, \sqcup\}$ El conjunto de datos de GOTO, $\mathcal{D}_{Goto} = \mathbb{T}$ se codifica en Σ mediante la función $(\cdot)^\ddagger : \mathbb{T} \rightarrow \Sigma^*$ como sigue:

- $nil^\ddagger = 0$
- $(x.y)^\ddagger = (x^\ddagger . y^\ddagger)$



De GOTO a \mathcal{MT}

Codificación de datos

Sea $\Sigma = \{0, (,), \cdot, \sqcup\}$ El conjunto de datos de GOTO, $\mathcal{D}_{Goto} = \mathbb{T}$ se codifica en Σ mediante la función $(\cdot)^\dagger : \mathbb{T} \rightarrow \Sigma^*$ como sigue:

- $nil^\dagger = 0$
- $(x.y)^\dagger = (x^\dagger . y^\dagger)$
- Por ejemplo el árbol $(nil.(nil.nil))$ se codifica con la cadena $(0.(0.0))$



Macros en \mathcal{MT} multicinta

Sea M una máquina de Turing multicinta cuyo alfabeto codifica expresiones del lenguaje GOTO . Los siguientes macros son implementables.

- 1 $C.E$: mover la cabeza de todas las cintas al primer blanco a la izquierda de la cadena actual (configuración estandar).



Macros en \mathcal{MT} multicinta

Sea M una máquina de Turing multicinta cuyo alfabeto codifica expresiones del lenguaje GOTO . Los siguientes macros son implementables.

- 1 $C.E$: mover la cabeza de todas las cintas al primer blanco a la izquierda de la cadena actual (configuración estandar).
- 2 $\text{copy } C \text{ to } D$: copia a la cinta D el contenido de la cinta C .



Macros en \mathcal{MT} multicinta

Sea M una máquina de Turing multicinta cuyo alfabeto codifica expresiones del lenguaje GOTO . Los siguientes macros son implementables.

- 1 $C.E$: mover la cabeza de todas las cintas al primer blanco a la izquierda de la cadena actual (configuración estandar).
- 2 $copy\ C\ to\ D$: copia a la cinta D el contenido de la cinta C .
- 3 $erase\ C$: borra el contenido de la cinta C .



Macros en \mathcal{MT} multicinta

Sea M una máquina de Turing multicinta cuyo alfabeto codifica expresiones del lenguaje GOTO . Los siguientes macros son implementables.

- 1 $C.E$: mover la cabeza de todas las cintas al primer blanco a la izquierda de la cadena actual (configuración estandar).
- 2 $\text{copy } C \text{ to } D$: copia a la cinta D el contenido de la cinta C .
- 3 $\text{erase } C$: borra el contenido de la cinta C .
- 4 $\text{compute } e \text{ in } C$: calcula el valor de la GOTO-expresión e (codificada), escribiendo el resultado en la cinta C



Macros en \mathcal{MT} multicinta

Sea M una máquina de Turing multicinta cuyo alfabeto codifica expresiones del lenguaje GOTO . Los siguientes macros son implementables.

- 1 $C.E$: mover la cabeza de todas las cintas al primer blanco a la izquierda de la cadena actual (configuración estandar).
- 2 $\text{copy } C \text{ to } D$: copia a la cinta D el contenido de la cinta C .
- 3 $\text{erase } C$: borra el contenido de la cinta C .
- 4 $\text{compute } e \text{ in } C$: calcula el valor de la GOTO-expresión e (codificada), escribiendo el resultado en la cinta C
- 5 $\text{if } C \text{ then goto } q_1 \text{ else goto } q_2$: verifica si el contenido de la cinta C no es 0 (el código de nil) en cuyo caso se cambia el estado a q_1 y en caso contrario se cambia el estado a q_2 .



Macros en MT multicinta

Sea M una máquina de Turing multicinta cuyo alfabeto codifica expresiones del lenguaje GOTO . Los siguientes macros son implementables.

- 1 $C.E$: mover la cabeza de todas las cintas al primer blanco a la izquierda de la cadena actual (configuración estandar).
- 2 $copy\ C\ to\ D$: copia a la cinta D el contenido de la cinta C .
- 3 $erase\ C$: borra el contenido de la cinta C .
- 4 $compute\ e\ in\ C$: calcula el valor de la GOTO-expresión e (codificada), escribiendo el resultado en la cinta C
- 5 $if\ C\ then\ goto\ q_1\ else\ goto\ q_2$: verifica si el contenido de la cinta C no es 0 (el código de nil) en cuyo caso se cambia el estado a q_1 y en caso contrario se cambia el estado a q_2 .
- 6 $goto\ q$: cambia el estado a q



Traducción de LTURING a \mathcal{MT}

Sea $p = \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1, \dots, m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$ un programa en GOTO tal que $\text{Vars}(p) = \{X, Y, Z_1, \dots, Z_n\}$. Definimos la máquina de Turing multicinta $T_p = \langle \Sigma, Q, q_1, q_f, \delta \rangle$ como sigue:

- Existen $n + 3$ cintas, una por cada variable de p , denotada exactamente igual, más una cinta auxiliar denotada \mathcal{A} .



Traducción de LTURING a \mathcal{MT}

Sea $p = \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1, \dots, m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$ un programa en GOTO tal que $\text{Vars}(p) = \{X, Y, Z_1, \dots, Z_n\}$. Definimos la máquina de Turing multicinta $T_p = \langle \Sigma, Q, q_1, q_f, \delta \rangle$ como sigue:

- Existen $n + 3$ cintas, una por cada variable de p , denotada exactamente igual, más una cinta auxiliar denotada \mathcal{A} .
- $\Sigma = \{ (,), \cdot, 0, \sqcup \}$



Traducción de LTURING a \mathcal{MT}

Sea $p = \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1, \dots, m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$ un programa en GOTO tal que $\text{Vars}(p) = \{X, Y, Z_1, \dots, Z_n\}$. Definimos la máquina de Turing multicinta $T_p = \langle \Sigma, Q, q_1, q_f, \delta \rangle$ como sigue:

- Existen $n + 3$ cintas, una por cada variable de p , denotada exactamente igual, más una cinta auxiliar denotada \mathcal{A} .
- $\Sigma = \{ (,), \cdot, 0, \sqcup \}$
- $Q = \{ q_1, \dots, q_m, q_f \} \cup Q'$ donde existe un estado q_ℓ para cada instrucción \mathcal{I}_ℓ del programa GOTO y Q' es un conjunto de estados auxiliares utilizados únicamente en los macros anteriores.



Traducción de LTURING a \mathcal{MT}

Sea $p = \text{read } X; 1 : \mathcal{I}_1, \dots, m : \mathcal{I}_m; \text{write } Y$ un programa en GOTO tal que $\text{Vars}(p) = \{X, Y, Z_1, \dots, Z_n\}$. Definimos la máquina de Turing multicinta $T_p = \langle \Sigma, Q, q_1, q_f, \delta \rangle$ como sigue:

- Existen $n + 3$ cintas, una por cada variable de p , denotada exactamente igual, más una cinta auxiliar denotada \mathcal{A} .
- $\Sigma = \{ (,), \cdot, 0, \sqcup \}$
- $Q = \{ q_1, \dots, q_m, q_f \} \cup Q'$ donde existe un estado q_ℓ para cada instrucción \mathcal{I}_ℓ del programa GOTO y Q' es un conjunto de estados auxiliares utilizados únicamente en los macros anteriores.
- El estado inicial es q_1 y el estado final es q_f .



Traducción de LTURING a \mathcal{MT}

- Las acciones de la máquina al llegar a un estado correspondiente a una instrucción del programa GOTO son las siguientes:



Traducción de LTURING a \mathcal{MT}

- Las acciones de la máquina al llegar a un estado correspondiente a una instrucción del programa GOTO son las siguientes:

- ▶ Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ entonces

q_ℓ : compute e in \mathcal{A} ; erase X ; copy \mathcal{A} to X ; C.E; goto $q_{\ell+1}$



Traducción de LTURING a \mathcal{MT}

- Las acciones de la máquina al llegar a un estado correspondiente a una instrucción del programa GOTO son las siguientes:

- ▶ Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ entonces

q_ℓ : compute e in \mathcal{A} ; erase X ; copy \mathcal{A} to X ; C.E; goto $q_{\ell+1}$

- ▶ Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{if } X \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ entonces

q_ℓ : compute X in \mathcal{A} ; C.E; if \mathcal{A} then goto $q_{\ell'}$ else goto $q_{\ell''}$



Traducción de LTURING a \mathcal{MT}

- Las acciones de la máquina al llegar a un estado correspondiente a una instrucción del programa GOTO son las siguientes:

- ▶ Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} X := e$ entonces

q_ℓ : compute e in \mathcal{A} ; erase X ; copy \mathcal{A} to X ; C.E; goto $q_{\ell+1}$

- ▶ Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{if } X \text{ then goto } \ell' \text{ else goto } \ell''$ entonces

q_ℓ : compute X in \mathcal{A} ; C.E; if \mathcal{A} then goto $q_{\ell'}$ else goto $q_{\ell''}$

- ▶ Si $\mathcal{I}_\ell =_{\text{def}} \text{goto } q_{\ell'}$ entonces

q_ℓ : goto $q_{\ell'}$



Ejemplo

MT

La máquina T_{reverse} asociada al programa goto para REVERSE se describe como sigue:

```
q1: compute nil in A; erase Y; copy A to Y;  
    C.E.; goto q2  
q2: if X then goto q3 else goto q7  
q3: compute hd X in A; erase Z; copy A to Z;  
    C.E.; goto q4  
q4: compute cons Z Y in A; erase Y; copy A to Y;  
    C.E.; goto q5  
q5: compute tl X in A; erase X; copy A to X;  
    C.E.; goto q6  
q6: goto q2
```



Corrección de la transformación de LTURING a \mathcal{MT}

- Si p es un programa en $LTuring$ tal que $\llbracket p \rrbracket(x) = y$ entonces $y \in L(T_p)$.



Corrección de la transformación de LTURING a \mathcal{MT}

- Si p es un programa en $LTuring$ tal que $\llbracket p \rrbracket(x) = y$ entonces $y \in L(T_p)$.
- Más aún, si la tupla

$$(q, w_X, w_Y, w_{Z_1}, \dots, w_{Z_n}, w_A)$$

es una configuración de T_p indicando que T_p se encuentra en el estado q siendo w_V el contenido de la cinta correspondiente a cada variable V entonces

$$(q_1, (x^\dagger, 0, \dots, 0)) \vdash^* (q_f, (w_X, y^\dagger, \dots, w_{Z_n}, w_A))$$



Equivalencia de nociones de computabilidad

Proposición

Los lenguajes WHILE , GOTO y LTURING son equivalentes a \mathcal{MT} .



Equivalencia de nociones de computabilidad

Proposición

Los lenguajes WHILE , GOTO y LTURING son equivalentes a \mathcal{MT} .

Demostración.

Hemos mostrado que:



Equivalencia de nociones de computabilidad

Proposición

Los lenguajes WHILE , GOTO y LTURING son equivalentes a \mathcal{MT} .

Demostración.

Hemos mostrado que:

- $\text{WHILE} \Leftrightarrow \text{GOTO}$



Equivalencia de nociones de computabilidad

Proposición

Los lenguajes WHILE , GOTO y LTURING son equivalentes a \mathcal{MT} .

Demostración.

Hemos mostrado que:

- $\text{WHILE} \Leftrightarrow \text{GOTO}$
- $\text{GOTO} \Rightarrow \mathcal{MT}$



Equivalencia de nociones de computabilidad

Proposición

Los lenguajes WHILE , GOTO y LTURING son equivalentes a \mathcal{MT} .

Demostración.

Hemos mostrado que:

- $\text{WHILE} \Leftrightarrow \text{GOTO}$
- $\text{GOTO} \Rightarrow \mathcal{MT}$
- $\text{LTURING} \Rightarrow \text{GOTO}$.



Equivalencia de nociones de computabilidad

Proposición

Los lenguajes WHILE , GOTO y LTURING son equivalentes a \mathcal{MT} .

Demostración.

Hemos mostrado que:

- $\text{WHILE} \Leftrightarrow \text{GOTO}$
- $\text{GOTO} \Rightarrow \mathcal{MT}$
- $\text{LTURING} \Rightarrow \text{GOTO}$.
- $\text{LTURING} \Leftrightarrow \mathcal{MT}$. De donde también tenemos que $\text{GOTO} \Leftrightarrow \mathcal{MT}$.

