Autómatas y Lenguajes Formales 2016-1

Maestría en Ciencia e Ingeniería de la Computación UNAM
Tema 13: Máquinas de Turing y computabilidad

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea
favio@ciencias.unam.mx

Facultad de Ciencias UNAM

29 de enero de 2020

Máquinas de Turing

Introducción

- Las máquinas de Turing (MT)son máquinas idealizadas capaces de realizar cómputos.
- Una MT consiste de una cinta infinita dividida en sectores (cuadros) y una cabeza de lectoescritura.
- Cada sector de la cinta contiene un símbolo de cierto alfabeto de entrada o bien el símbolo blanco.
- La cabeza lee el sector y puede escribir sobre él.
- La cabeza puede moverse a izquierda o derecha.

Máquinas de Turing

Definición

Una máquina de Turing es una septupla:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F \rangle$$

- $Q \neq \varnothing$ es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- Γ es el alfabeto de la cinta, el cual incluye a Σ, es decir, $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ es la función de transición
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $\sqcup \in \Gamma$ es el símbolo blanco tal que $\sqcup \notin \Sigma$.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales. F podría ser vacío.

Función de transición

Máquinas de Turing

$$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \to\}$$

$$\delta(q, a) = (p, b, D)$$

- El estado actual es q y el símbolo a leer es a.
- La transición es hacia el estado p
- b es el símbolo escrito en lugar de a.
- La cabeza se mueve una celda según la dirección dada por $D \in \{\leftarrow, \to\}$. Dichos movimientos se realizan después de leer a y escribir b.

Ejemplos

Máquinas de Turing

$$\delta(q, a) = (p, b, \rightarrow)$$

- Estado actual: q
- Símbolo a leer: a.
- La cabeza borra a y escribe b.
- El nuevo estado es p.
- La cabeza se mueve una celda a la derecha.

Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \{q_1\} \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_0, b, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, b) = (q_0, b, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_1, \sqcup, \leftarrow)$$

$L = \{w \in \{0,1\}^\star \mid w$ tiene un número par de ceros $\}$

Ejemplos

δ	0	1	$\sqcup$
q_0	$(q_1, 0, \rightarrow)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$(q_f, \sqcup, -)$
q_1	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$(q_1, 1, \rightarrow)$	
q_f			

Ejemplos

Máquinas de Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \varnothing \rangle$$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, a, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, b) = (q_1, b, \rightarrow)$$

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_1, \sqcup, \rightarrow)$$

$$\delta(q_1, a) = (q_0, a, \leftarrow)$$

$$\delta(q_1, b) = (q_0, b, \leftarrow)$$

$$\delta(q_1, \sqcup) = (q_0, \sqcup, \leftarrow)$$

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Ejemplos

δ	a	b	X	Y	$\sqcup$
q_0	$(q_1, X, \rightarrow)$			$(q_3, Y, \rightarrow)$	
q_1	$(q_1, a, \rightarrow)$	$(q_2, Y, \leftarrow)$		$(q_1, Y, \rightarrow)$	
q_2	$(q_2, a, \leftarrow)$		$(q_0, X, \rightarrow)$	$(q_2, Y, \leftarrow)$	
q_3				$(q_3, Y, \rightarrow)$	$(q_4, \sqcup, \rightarrow)$
q_4					

Máquina Estándar de Turing

Máquinas de Turing

- La cinta es infinita en ambas direcciones.
- Se permite un número arbitrario de movimientos en cualquier dirección.
- La máquina es determinista, δ define a lo más un movimiento para cada configuración posible.
- No hay transiciones desde estados finales, es decir, $\delta(q, a)$ no está definida si $q \in F$.
- No hay un archivo especial de entrada o salida, se asume que la máquina contiene algo al final y al principio del proceso.

Configuraciones

Máquinas de Turing

Una configuración o descripción instantanea

$$a_1 a_2 \ldots a_{k-1} q a_k a_{k+1} \ldots a_n$$

está determinada por:

- El estado actual de la unidad de control (cabeza).
- El contenido de la cinta.
- La posición de la unidad de control.
- Configuración inicial: $q_0 w$

Cómputos

Máquinas de Turing

Un cómputo o paso de computación es el cambio de una descripción instantanea a otra mediante una transición dada por δ.

$$uqav \vdash ubpv$$

si y sólo si $\delta(q, a) = (p, b, \rightarrow)$

$$ucqav \vdash upcbv$$

si y sólo si $\delta(q, a) = (p, b, \leftarrow)$

$\vdash^\star$ se define de la manera usual.

Cómputos

Casos especiales con ε

$$uqa \vdash ubp\sqcup$$

si y sólo si $\delta(q,a) = (p,b,\rightarrow)$

$$qav \vdash p\sqcup bv$$

si y sólo si $\delta(q,a) = (p,b,\leftarrow)$

Situaciones especiales

Cómputos

- Cómputos bloqueados: el cómputo se bloquea porque la siguiente transición no está definida.

$$uqv \not\vdash^{\star}$$

- Cómputos infinitos: el cómputo entra en un ciclo infinito.

$$uqv \vdash^{\star} \infty$$

Lenguaje de aceptación

Máquinas de Turing

El lenguaje de aceptación se define como todas aquellas cadenas de entrada con las cuales la máquina se detiene en un estado final.

$$L(M) = \{w \in \Sigma^\star \mid q_0 w \vdash^\star w_1 q_f w_2 \;\; q_f \in F\}$$

Observaciones:

- A diferencia con los autómatas se acepta una cadena en el momento en que el proceso llega a un estado final.
- No es necesario consumir toda la cadena.
- Si no hay estados finales se acepta una cadena en el momento en que la máquina se detiene.

Variaciones
MT

- Existen diversas variaciones en la definición de MT.
- Todas ellas resultan equivalentes, es decir, el poder de computación de cualquier modelo resulta equivalente al de la máquina estandar.
- Las variaciones son útiles para simplificar la presentación o programación de diversos problemas.

MT con cabeza lectora estacionaria

Variaciones

- Se permite que al leer y escribir un símbolo la cabeza no realice movimiento alguno.
- El conjunto de direcciones se amplia a $\{\leftarrow, \rightarrow, -\}$.
- La transición

$$\delta(q, a) = (p, b, -)$$

significa que la cabeza lee a, escribe b y no se mueve

- Tales transiciones pueden simularse mediante un nuevo estado y movimientos consecutivos a la izquierda y a la derecha.

MT con múltiples pistas
Variaciones

- Idea: la cinta se divide en multiples pistas.
- La función de transición es:

$$\delta : Q \times \Gamma^n \to Q \times \Gamma^n \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$$

$$\delta(q, \langle a_1, \ldots, a_n \rangle) = (p, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle, D)$$

MT con múltiples cintas

Variaciones

- Idea: se agregan más cintas a la máquina.
- La función de transición es:

$$\delta : Q \times \Gamma^n \to Q \times (\Gamma \times \{\leftarrow, \to\})^n$$

$$\delta(q, \langle a_1, \ldots, a_n \rangle) = (p, \langle b_1, D_1 \rangle, \ldots, \langle b_n, D_n \rangle)$$

MT No-determinista

Variaciones

- La función de transición es:

$$\delta : Q \times \Gamma^n \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\})$$

$$\delta(q, \langle a_1, \ldots, a_n \rangle) = \{\langle b_1, D_1 \rangle, \ldots, \langle b_n, D_n \rangle\}$$

- Las máquinas no-deterministas juegan un papel central en la teoría de la complejidad.

Generación de lenguajes

Máquinas de Turing

- Las MT tienen suficiente poder como para generar lenguajes y calcular funciones.
- Una MT M genera al lenguaje $L \subseteq \Sigma^\star$ si
  - M comienza a operar con la cinta en blanco en q_0.
  - Cada vez que M regresa a q_0 hay una cadena de L escrita sobre la cinta.
  - Eventualmente se generan todas las cadenas de L.

Cálculo de funciones

Máquinas de Turing

La máquina de Turing $M = \langle\{q_0, q_f\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, \varnothing\rangle$ calcula una función $f : \Sigma^\star \to \Gamma^\star$ si

$$q_0 w \vdash^\star q_f v \quad \text{donde } f(w) = v$$

Observaciones:

- No hay estados finales, el estado q_f se usa para detener la máquina, es decir, no hay transiciones desde q_f.
- El proceso se termina en $q_f v$, es decir la cabeza debe estar leyendo el primer símbolo de la salida v.

Lenguajes recursivos y recursivamente enumerables

Aceptación en MT

- Un lenguaje L es recursivamente enumerable si es reconocido por una máquina de Turing, es decir, si existe una máquina de Turing M tal que $L = L(M)$.
- un lenguaje L es recursivo si es reconocido por una máquina de Turing que siempre se detiene, es decir, si existe una máquina de Turing M que se detiene con todas las cadenas de entrada y $L = L(M)$.

Propiedades de Cerradura

Lenguajes recursivos y R.E.

- Si L es recursivo entonces $\overline{L}$ es recursivo.
- Si L, M son recursivos entonces $L \cup M$ es recursivo.
- Si L, M son rec. enumerables entonces $L \cup M$ es rec. enumerable.
- L es recursivo si y sólo si L y $\overline{L}$ son rec. enumerables.

Jerarquía de Chomsky

su relación con autómatas

- Las gramáticas tipo 3 (regulares) son equivalentes a los autómatas finitos.
- Las gramáticas tipo 2 (libres de contexto) son equivalentes a los autómatas de pila (no-determinísticos).
- ¿Qué pasa con las gramáticas tipo 1 (sensibles al contexto)?
- ¿Qué pasa con las gramáticas tipo 0 (irrestrictas)?

$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}$
Gramática sensible al contexto

- $S \rightarrow A$
- $A \rightarrow aABC \mid abC$
- $CB \rightarrow BC$
- $bB \rightarrow bb$
- $bC \rightarrow bc$
- $cC \rightarrow cc$

Autómatas Linealmente Acotados

Definición

- Un autómata linealmente acotado (ALA) es una máquina de Turing que satisface las siguientes condiciones:
- El alfabeto de entrada Σ incluye dos símbolos especiales $[,]$ que sirven como marcas de fin de cinta izquierda y derecha respectivamente.
- La cabeza lectora no puede desplazarse más allá de dichos límites y no puede sobreescribir tales sectores.

Autómatas Linealmente Acotados

Definición

- Formalmente tenemos

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, [,], F \rangle$$

  con $[,] \in \Sigma$.

- El lenguaje de aceptación es

$$L(M) = \{w \in \Sigma^\star - \{[,]\} \mid q_0[w] \vdash^\star w_1 q_f w_2 \;\; q_f \in F\}$$

  Las marcas $[,]$ no son consideradas como parte de la cadena a procesar.

- Un ALA no puede moverse fuera de la cadena de entrada.

ALA y Gramáticas

Equivalencia

- Dada una gramática sensible al contexto G, existe un autómata linealmente acotado M tal que $L(G) = L(M)$. Es decir, los lenguajes sensibles al contexto son reconocidos por autómatas linealmente acotados.
- Si $L = L(M)$ es un lenguaje reconocido por un autómata linealmente acotado M entonces existe una gramática sensible al contexto G tal que $L(M) = L(G)$. Es decir, los lenguajes reconocidos por ALA son sensibles al contexto.

Máquinas de Turing y gramáticas irrestrictas

Equivalencia

- Para toda gramática G de tipo 0 existe una máquina de Turing M tal que $L(M) = L(G)$. Es decir, los lenguajes tipo 0 son recursivamente enumerables.

- Para toda máquina de Turing M existe una gramática G de tipo 0 tal que $L(G) = L(M)$. Es decir, los lenguajes recursivamente enumerables son lenguajes tipo 0.

Jerarquía de Chomsky

su relación con autómatas

- Las gramáticas tipo 3 (regulares) son equivalentes a los autómatas finitos.
- Las gramáticas tipo 2 (libres de contexto) son equivalentes a los autómatas de pila (no-determinísticos).
- Las gramáticas tipo 1 (sensibles al contexto) son equivalentes a los autómatas linealmente acotados.
- Las gramáticas tipo 0 (irrestrictas) son equivalentes a las máquinas de Turing.