

# Autómatas y Lenguajes Formales 2016-1

Maestría en Ciencia e Ingeniería de la Computación UNAM

Tema 5: Minimización de autómatas, propiedades de cerradura de lenguajes regulares

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea

[favio@ciencias.unam.mx](mailto:favio@ciencias.unam.mx)

Facultad de Ciencias UNAM

3 de febrero de 2020



# Eliminación de Estados Inaccesibles

- Sea  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un AFD. Decimos que un estado  $q \in Q$  es accesible si y sólo si existe  $w \in \Sigma^*$  tal que  $\delta^*(q_0, w) = q$ .
- Es decir,  $q$  es accesible si y sólo si el procesamiento de alguna cadena termina en el estado  $q$ .
- El conjunto de estados accesibles de un autómata  $M$  se denota  $Acc(M)$ .
- Si un estado no es accesible decimos que es inaccesible.



# Cálculo de estados accesibles

- Es claro que el conjunto  $Acc(M)$  puede construirse de manera algorítmica, por ejemplo como sigue:
  - ▶  $A_N := \{q_0\}$ ,  $A_V := \emptyset$ .
  - ▶ Mientras que  $A_N \neq A_V$ 
    - ★  $A_V := A_N$
    - ★  $A_N := A_N \cup \{q \in Q \mid \delta(p, a) = q \text{ } a \in \Sigma, p \in A_N\}$
  - ▶  $Acc(M) := A_N$ .
- Los estados inaccesibles en un autómata son ínutilles y pueden ser eliminados sin afectar el lenguaje de aceptación



# Eliminación de estados inaccesibles

## Autómata equivalente

- Dado un  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  existe un AFD  $M' = \langle Q', \Sigma', \delta', q'_0, F' \rangle$  equivalente a  $M$  que contiene únicamente a los estados accesibles de  $M$ , es decir,  $Q' = Acc(M)$  y por lo tanto no contiene estados inaccesibles.
- Basta definir  $M'$  como sigue:
  - ▶  $Q' = Acc(M)$
  - ▶  $\Sigma' = \Sigma$
  - ▶  $\delta' = \delta|_{Q'}$
  - ▶  $q'_0 = q_0$
  - ▶  $F' = F \cap Q'$
- La prueba de la equivalencia  $L(M) = L(M')$  es inmediata y se deja como ejercicio.
- Debido a este resultado de ahora en adelante podemos suponer que un autómata no tiene estados inaccesibles.



# Equivalencias de estados

## Minimización

- Decimos que dos estados  $q, q' \in Q$  de un AFD son equivalentes  $q \equiv q'$  si y sólo si:

$$\forall w \in \Sigma^* (\delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q', w) \in F)$$

- Es decir,  $\delta^*(q, w), \delta^*(q', w)$  son ambos finales o ambos no finales.



# $\equiv$ es un relación de equivalencia

## Minimización de AFD

La relación  $\equiv$  entre estados es una relación de equivalencia, es decir cumple lo siguiente:

- Reflexividad:  $q \equiv q$ .
- Simetria: si  $q \equiv q'$  entonces  $q' \equiv q$ .
- Transitividad: si  $q \equiv q'$  y  $q' \equiv q''$  entonces  $q \equiv q''$ .

Adicionalmente la función de transición  $\delta$  es compatible con  $\equiv$ , en el siguiente sentido:

Si  $q \equiv q'$  entonces  $\forall a \in \Sigma (\delta(q, a) \equiv \delta(q', a))$



# Partición del conjunto de estados

## Minimización de AFD

La relación de equivalencia  $\equiv$  genera una **partición** del conjunto de estados dada por las clases de equivalencia de cada estado definidas como:

$$[q] := \{p \in Q \mid q \equiv p\}$$

Es decir, los conjuntos  $[q]$  cumplen lo siguiente:

- $\forall q \in Q ([q] \neq \emptyset)$ .
- $\forall p, q \in Q ([q] = [p] \text{ ó } [q] \cap [p] = \emptyset)$ .
- $\bigcup_{q \in Q} [q] = Q$ .



# El autómata cociente

## Minimización de AFD

Dado un AFD  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  existe un autómata  $M^{\min}$ , equivalente a  $M$  y que tiene un número mínimo de estados. Este autómata se define como  $M^{\min} = \langle Q_m, \Sigma, \delta_m, [q_0], F_m \rangle$  donde:

- $Q_m := Q / \equiv := \{[q] \mid q \in Q^M\}$
- $[q_0]$  es el estado inicial.
- $F_m := \{[q] \mid q \in F\}$
- $\delta_m : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  se define como

$$\delta_m([q], a) = [\delta(q, a)]$$

$M^{\min}$  se conoce también como el autómata cociente de  $M$  denotado también con  $M / \equiv$ .



## Minimalidad de $M^{min}$

- Dado un AFD  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  el autómata cociente  $M/\equiv$  es el autómata mínimo equivalente a  $M$ . Es decir, se tiene  $L(M) = L(M/\equiv)$  y no existe un autómata equivalente a  $M$  con menos estados que  $M/\equiv$ .
- La equivalencia entre  $M$  y  $M^{min}$  se sigue de la siguiente propiedad:

Sean  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un AFD y  $M^{min}$  su autómata cociente. Para cualesquiera  $q \in Q$ ,  $w \in \Sigma^*$  se cumple

$$\delta_m^*([q], w) = [\delta^*(q, w)]$$

La prueba es por inducción sobre  $w$ .



# $k$ -equivalencia

## Minimización de AFD

- Definimos la relación de  $k$ -equivalencia para cualquier  $k \in \mathbb{N}$  como sigue:

$$\forall w \in \Sigma^*, |w| \leq k (\delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q', w) \in F)$$

- Es decir, para cualquier cadena  $w$  de longitud menor o igual que  $k$ , los estados  $\delta^*(q, w), \delta^*(q', w)$  son ambos finales o ambos no finales.
- $\equiv_k$  es una relación de equivalencia cuyas clases se denotan con  $[q]_k$ , es decir  $[q]_k = \{p \in Q \mid q \equiv_k p\}$



# Propiedades

## $k$ -equivalencia

La relación de  $k$ -equivalencia cumple las siguientes propiedades:

P1  $q \equiv q'$  si y sólo si  $\forall k \in \mathbb{N}(q \equiv_k q')$ .

P2  $q \equiv_0 q'$  si y sólo si  $q, q' \in F$  ó  $q, q' \in Q - F$

P3  $[q]_0 = F$  si y sólo si  $q \in F$ .

P4 Si  $q \equiv_k q'$  entonces  $q \equiv_{k-1} q'$

P5  $[q]_k \subseteq [q]_{k-1}$



# Propiedades

## $k$ -equivalencia

P6 Si  $q \equiv_k q'$  entonces  $\forall a \in \Sigma (\delta(q, a) \equiv_{k-1} \delta(q', a))$

P7  $q \equiv_k q'$  si y sólo si  $q \equiv_{k-1} q'$  y  $\forall a \in \Sigma (\delta(q, a) \equiv_{k-1} \delta(q', a))$

P8 Sea  $P_k = \{[q]_k \mid q \in Q\}$  la partición dada por la relación  $\equiv_k$  para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ .

Si  $P_k = P_{k-1}$  para alguna  $k$  entonces  $P_k = P_m$  para toda  $m \geq k$ .



# Construcción del autómata mínimo

## Minimización de AFD

Dado un AFD  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  el AFD mínimo asociado puede construirse como sigue:

- $Q := Q - \text{estados inaccesibles desde } q_0.$
- $k := 0$  Construir la partición  $P_0 = \{F, Q - F\}.$

### Repetir

- ▶  $k := k + 1$
- ▶ Construir  $P_k$  a partir de  $P_{k-1}$  manteniendo a dos estados  $q, q'$  en la misma clase si y sólo si para toda  $a \in \Sigma$ , los estados  $\delta(q, a)$  y  $\delta(q', a)$  estaban en la misma clase en  $P_{k-1}$ .

**hasta** que  $P_k = P_{k-1}$ .

- En tal caso  $P_k$  es la partición generada por  $\equiv$ ,  
 $P_k = Q / \equiv = \{[q] \mid q \in Q\}.$



# Correctud del algoritmo de minimización

- La correctud del algoritmo anterior es consecuencia de la siguiente propiedad:

Si  $M$  es un AFD entonces la sucesión de particiones  $P_0, P_1, \dots, P_k, \dots$  generadas por las clases de  $k$ -equivalencia de estados se estaciona,

es decir, existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall k \geq n, P_k = P_n$ .

Más aún  $n \leq |Q|$ , es decir,  $n$  es a lo más el número de estados de  $M$ .



# Propiedades de cerradura

## Lenguajes regulares

Las propiedades de cerradura nos permiten construir nuevos lenguajes regulares a partir de lenguajes ya conocidos por medio de algunas operaciones entre lenguajes.

Si  $L, M$  son lenguajes regulares entonces:

- $L \cup M$  es regular.
- $LM$  es regular.
- $L^*$  es regular.
- $L^+$  es regular.
- $\bar{L}$  es regular
- $L \cap M$  es regular.
- $L - M$  es regular.



$$L = \{a^i b^j \mid i \neq j\}$$

Lenguajes no-regulares

- Supongamos que  $L$  es regular.
- $a^*b^*$  claramente es regular.
- Por propiedades de cerradura  $a^*b^* - L$  también es regular.
- Pero  $a^*b^* - L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  que no es regular.
- Por lo tanto  $L$  no puede ser regular.



$$L = \{wb^n \mid |w| = n, n \geq 1\}$$

Lenguajes no-regulares

- Supongamos que  $L$  es regular.
- $a^*b^*$  claramente es regular.
- Por propiedades de cerradura  $L \cap a^*b^*$  también es regular.
- Pero  $L \cap a^*b^* = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  que no es regular.
- Por lo tanto  $L$  no puede ser regular.

