Autómatas y Lenguajes Formales

Autómatas de pila

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea
favio@ciencias.unam.mx

Facultad de Ciencias UNAM[1]

27 de abril de 2019

[1] Con el apoyo del proyecto PAPIME PE102117

Introducción

Autómatas de Pila

- Una generalización de los autómatas finitos puede realizarse de diversos modos.
- Permitir que el autómata lea la entrada un número arbitrario de veces, lo cual requiere que la cabeza de lectura se mueva (máquinas bidireccionales con el mismo poder que AF).
- Añadir un dispositivo de conteo (máquinas contadoras)
- Añadir dispositivos de salida (traductores, Mealy y Moore)
- Agregar un dispositivo de memoria, por ejemplo mediante una pila.

Introducción

Autómatas de Pila

- Los autómatas de pila son una generalización de los AF.
- Los parámetros de un AP son:
  - El estado actual.
  - El símbolo actual de entrada.
  - El símbolo en el tope de la pila.
- El funcionamiento de la unidad de control puede ser:
  - Avance de la cabeza de lectura.
  - Cambio de estado de la máquina.
  - Sustitución del símbolo en el tope de la pila por una secuencia de símbolos.
- La diferencia entre determinismo y no-determinismo es importante.

Autómatas de pila

Definición

Un autómata de pila (no determinista) es una septupla:

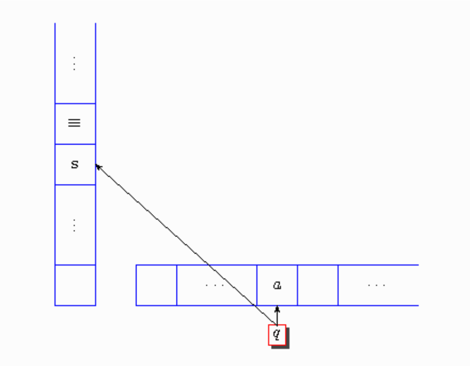
$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$$

- $Q \neq \varnothing$ es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- Γ es el alfabeto de la pila.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^{\star})$ es la función de transición
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $Z_0 \in \Gamma$ es el símbolo inicial de la pila.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Función de transición

Autómatas de pila

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^{\star})$$
$$\delta(q, a, s)$$



Función de transición

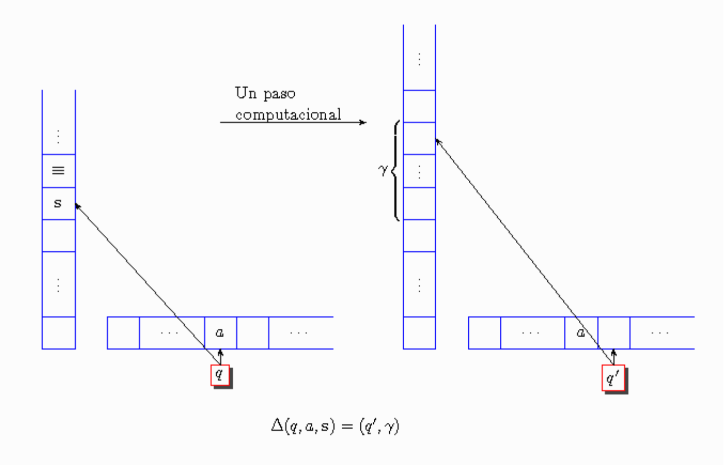
Autómatas de pila

$$(p, \gamma) \in \delta(q, a, s)$$

- Estando en el estado q leyendo a con s en el tope de la pila se hace lo siguiente:
  - Consumir a.
  - Eliminar s (POP s).
  - Escribir γ en el tope de la pila (PUSH γ).
  - Cambiar al estado p.
- Es posible consumir, leer o escribir ε.

Función de transición

Autómatas de pila



Transiciones especiales

Autómatas de pila

- $(q', s) \in \delta(q, a, s)$. En este caso el contenido de la pila no se altera.
- $(q', \varepsilon) \in \delta(q, a, s)$. El símbolo s se borra y el control del autómata lee el nuevo tope de la pila, es decir, el símbolo colocado inmediatamente abajo de s.
- $(q', \gamma) \in \delta(q, \varepsilon, s)$. Esta es una ε-transición, el símbolo de entrada no se procesa ni se mueve el control, pero el tope de la pila s se reemplaza por γ.

Configuraciones

Autómatas de pila

Una configuración o descripción instantanea es una terna

$$\langle q, au, s\beta \rangle$$

que representa lo siguiente:

- El autómata está en el estado q.
- au es la parte aún no procesada de la cadena de entrada, siendo a el siguiente símbolo a leer.
- $s\beta$ es el contenido total de la pila, siendo s el símbolo colocado en el tope.

Tipos de configuración

Configuraciones

- Configuración inicial: $\langle q_0, w, Z_0\rangle$ para cualquier $w \in \Sigma^\star$.
- Configuración de aceptación: $\langle q_f, \varepsilon, \beta\rangle$ con $q_f \in F$.
- Configuración de aceptación por pila vacía: $\langle q_f, \varepsilon, \varepsilon\rangle$.

Paso de computación

Funcionamiento de un AP

La noción informal de cómputo se formaliza mediante una relación $\vdash_M$ entre configuraciones, llamada paso de computación tal que

$$\langle q, au, s\beta\rangle \vdash_M \langle p, u, \gamma\beta\rangle \text{ si y sólo si } (p, \gamma) \in \delta(q, a, s)$$

La relación $\vdash^\star$ se define de la manera usual.

Lenguaje aceptado por estados finales

Autómatas de pila.

Con la noción de paso de computación se formaliza la noción de lenguaje aceptado por un autómata por estados finales, de manera análoga al caso de los AF:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^\star \mid \langle q_0, w, Z_0 \rangle \vdash_M^\star \langle q_f, \varepsilon, \beta \rangle \ \text{ y } q_f \in F\}$$

Obsérvese que el contenido de la pila β es irrelevante.

Lenguaje aceptado por pila vacía

Autómatas de pila.

El lenguaje aceptado por pila vacía se define como

$$V(M) = \{w \in \Sigma^\star \mid \langle q_0, w, Z_0\rangle \vdash_M^\star \langle p, \varepsilon, \varepsilon\rangle \}$$

- Obsérvese que el estado p es irrelevante.
- Los dos tipos de aceptación son equivalentes como veremos enseguida.

$L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$

Ejemplos

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\} \rangle$$

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\} \quad \delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$
- $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\} \quad \delta(q_0, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
- La aceptación es por estados finales.

$L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$

Ejemplos

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \varnothing \rangle$$

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\} \quad \delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$
- $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, \varepsilon)\} \quad \delta(q_0, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- La aceptación es por pila vacía.

$L = \{a^i b^j \mid i \geq j \geq 0\}$

Ejemplos

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \varnothing \rangle$$

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$ $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$
- $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, \varepsilon)\}$ $\delta(q_0, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- La aceptación es por pila vacía.

$L = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^\star\}$

Ejemplos

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, b, c\}, \{A, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \varnothing \rangle$$

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, AZ_0)\}$ $\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, BZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$ $\delta(q_0, b, A) = \{(q_0, BA)\}$
- $\delta(q_0, a, B) = \{(q_0, AB)\}$ $\delta(q_0, b, B) = \{(q_0, BB)\}$

- $\delta(q_0, c, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$ $\delta(q_0, c, A) = \{(q_1, A)\}$
- $\delta(q_0, c, B) = \{(q_1, B)\}$ $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

- La aceptación es por pila vacía.

$L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid w = w^R\}$

Ejemplos

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, AZ_0),\ (q_1, Z_0)\}$
- $\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, BZ_0), (q_1, Z_0)\}$
- $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$ $\delta(q_0, \varepsilon, A) = \{(q_1, A)\}$
- $\delta(q_0, \varepsilon, B) = \{(q_1, B)\}$
- $\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA),\ (q_1, A)\}$
- $\delta(q_0, a, B) = \{(q_0, AB),\ (q_1, B)\}$
- $\delta(q_0, b, A) = \{(q_0, BA,\ (q_1, A))\}$
- $\delta(q_0, b, B) = \{(q_0, BB),\ (q_1, B)\}$
- $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

De estados finales a pila vacía

Equivalencia de la aceptación

Dado un lenguaje L tal que $L = L(M)$ para algún autómata de pila M, existe un autómata de pila M' tal que $L = V(M')$. Es decir, todo lenguaje aceptado por estados finales es aceptado por pila vacía.

De estados finales a pila vacía

Equivalencia de la aceptación

Si $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ entonces definimos a M' como

$$M' = \langle Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{N_0\}, \delta, p_0, N_0, F \rangle$$

- Se agregan dos estados, p_0, p siendo p_0 el nuevo estado inicial.
- Se agrega un símbolo N_0 a Γ, el cual será el nuevo símbolo inicial de la pila.
- La función de transición conserva todas las transiciones de M y se agregan:
  - $\delta(p_0, \varepsilon, N_0) = \{(q_0, Z_0 N_0)\}$
  - $(p, s) \in \delta(q_f, \varepsilon, s)$, para todo $q_f \in F,\ s \in \Gamma \cup \{N_0\}$
  - $\delta(p, \varepsilon, s) = \{(p, \varepsilon)\}$

De pila vacía a estados finales

Equivalencia de la aceptación

Dado un lenguaje L tal que $L = V(M)$ para un autómata de pila M, existe un autómata de pila M' tal que $L = L(M')$. Es decir, todo lenguaje aceptado por pila vacía es aceptado por estados finales.

De pila vacía a estados finales

Equivalencia de la aceptación

Si $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ entonces definimos a M' como

$$M' = \langle Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{N_0\}, \delta, p_0, N_0, \{p_f\} \rangle$$

- Se agregan dos estados, p_0, p_f siendo p_0 el nuevo estado inicial y p_f el único estado final.
- Se agrega un símbolo N_0 a Γ, el cual será el nuevo símbolo inicial de la pila.
- La función de transición conserva todas las transiciones de M y se agregan:
  - $\delta(p_0, \varepsilon, N_0) = \{(q_0, Z_0 N_0)\}$
  - $(p_f, s) \in \delta(q, \varepsilon, N_0)$, para todo $q \in Q$.

Autómatas de Pila Deterministas

Definición

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^{\star}$$

- Hay a lo más una transición en un estado y símbolo dados, es decir, $\delta(q, a, s) = (p, \gamma)$ para p, γ únicos o bien $\delta(q, a, s)$ no está definida, es decir, δ es una función parcial.
- Como se permiten ε-transiciones necesitamos la siguiente convención para mantener el determinismo:
- Si $\delta(q, a, s)$ está definida entonces $\delta(q, \varepsilon, s)$ está indefinida y viceversa. Es decir, ambas transiciones no pueden estar definidas al mismo tiempo.

Determinismo vs. No-determinismo

Autómatas de pila

- Obviamente un AP determinista es un caso particular de un AP no-determinista.
- A diferencia de los autómatas finitos, en el caso de los autómatas de pila no hay equivalencia entre los autómatas deterministas y los no-deterministas.
- Existen lenguajes que sólo pueden ser reconocidos mediante una AP no-determinista.
- Por ejemplo $L = \{w \in \{a, b\}^{\star} \mid w = w^R\}$
- Esto implica que hay lenguajes libres de contexto que no pueden ser reconocidos por un AP determinista.

AP y lenguajes libres de contexto

Autómatas de pila

Teorema

Un lenguaje es libre de contexto si y sólo si es aceptado por un autómata de pila (no-determinista).

Demostración.

La prueba es en dos partes:

I Síntesis: Dado un lenguaje libre de contexto L existe un autómata de pila M tal que $L = L(M)$.

II Análisis: Dado un autómata de pila M existe una gramática libre de contexto G tal que $L(M) = L(G)$. Es decir, $L(M)$ es libre de contexto.

□

GLC $\Rightarrow$ AP

Gramáticas y lenguajes libres de contexto

Dada una gramática libre de contexto $G = \langle V, T, S, P \rangle$ definimos un autómata de pila M_G como sigue:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = T, \ \Gamma = V \cup \{Z_0\}$
- $F = \{q_2\}$.
- δ se define mediante:

$$
\begin{array}{l}
\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{(q_1, \alpha) \mid A \to \alpha \in P\} \\
\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\} \ \ \forall a \in \Sigma \\
\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}
\end{array}
$$

- Se cumple $L(G) = L(M_G)$.

Ejemplos

GLC $\Rightarrow$ AP

Dada G mediante

$$S \to aSb \quad S \to cSb \quad S \to a$$

el autómata de pila correspondiente es:

- $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
- $\delta(q_1, \varepsilon, S) = \{(q_1, aSb),\ (q_1, cSb),\ (q_1, a)\}$
- $\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, c, c) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

AP $\Rightarrow$ GLC

Gramáticas y lenguajes libres de contexto

- Dado un autómata de pila M que acepta por pila vacía, vamos a construir una GLC G_M tal que $L(M) = L(G_M)$.
- Este método genera gramáticas bastante complejas, con un gran número de variables y producciones.
- Además pueden generarse variables inútiles.
- Las variables de la gramática serán S y las expresiones de la forma

$$[p, X, q] \quad \text{con } p, q \in Q, \; X \in \Gamma$$

- La idea básica es simular con derivaciones los cómputos de M.
- La variable $[p, X, q]$ debe generar todas las cadenas que llevan al autómata de p a q al eliminar X de la pila.

AP $\Rightarrow$ GLC

Gramáticas y lenguajes libres de contexto

- Producciones iniciales: $S \rightarrow [q_0, Z_0, p]$ para todo $p \in Q$.
- Si $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, X)$ entonces leyendo a el autómata pasa de q a p y elimina a X de la pila. Se agrega

$$[q, X, p] \rightarrow a$$

  Esto incluye el caso $a = \varepsilon$.

AP $\Rightarrow$ GLC

Gramáticas y lenguajes libres de contexto

- Si $(p, Y_1 Y_2 \ldots Y_m) \in \delta(q, a, X)$ entonces leyendo a el autómata pasa de q a p y sustituye a X por $Y_1 Y_2 \ldots Y_m$ en la pila. Se agrega

$$[q, X, p_m] \to a[p, Y_1, p_1][p_1, Y_2, p_2] \ldots [p_{m-1} Y_m p_m]$$

para todas las elecciones posibles de $p_1, \ldots, p_m \in Q$.
Esto incluye el caso $a = \varepsilon$.

Ejemplo

AP $\Rightarrow$ GLC

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$$

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\} \quad \delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$$
$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, \varepsilon)\} \quad \delta(q_0, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

Producciones iniciales:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & [q_0, Z_0, q_0] \\ S & \rightarrow & [q_0, Z_0, q_1] \end{array}$$

Ejemplo

AP $\Rightarrow$ GLC

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, \varepsilon)\} \quad \delta(q_0, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

Producciones:

$$\begin{array}{rcl} [q_0, Z_0, q_0] & \rightarrow & \varepsilon \\ [q_0, X, q_1] & \rightarrow & b \\ [q_1, X, q_1] & \rightarrow & b \\ [q_1, Z_0, q_1] & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$

Ejemplo
AP $\Rightarrow$ GLC

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$$

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$$

Producciones:

$$\begin{array}{lcl}
[q_0, Z_0, q_1] & \rightarrow & a[q_0, X, q_0][q_0, Z_0, q_1] \\
[q_0, Z_0, q_0] & \rightarrow & a[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_0] \\
[q_0, Z_0, q_0] & \rightarrow & a[q_0, X, q_0][q_0, Z_0, q_0] \\
[q_0, Z_0, q_1] & \rightarrow & a[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_1]
\end{array}$$

Ejemplo

AP $\Rightarrow$ GLC

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$$

$$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$$

Producciones:

$$\begin{array}{lcl}
[q_0, X, q_0] & \to & a[q_0, X, q_0][q_0, X, q_0] \\
[q_0, X, q_0] & \to & a[q_0, X, q_1][q_1, X, q_0] \\
[q_0, X, q_1] & \to & a[q_0, X, q_0][q_0, X, q_1] \\
[q_0, X, q_1] & \to & a[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1]
\end{array}$$

Derivación de *aabb*

AP $\Rightarrow$ GLC

$$
\begin{aligned}
S &\to [q_0, Z_0, q_1] \\
&\to a[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_1] \\
&\to aa[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1][q_1, Z_0, q_1] \\
&\to aab[q_1, X, q_1][q_1, Z_0, q_1] \\
&\to aabb[q_1, Z_0, q_1] \\
&\to aabb
\end{aligned}
$$