

Autómatas y Lenguajes Formales 2016-1

Maestría en Ciencia e Ingeniería de la Computación UNAM

Tema 9: Propiedades de cerradura y normalización de gramáticas
libres de contexto

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea

favio@ciencias.unam.mx

Facultad de Ciencias UNAM

3 de febrero de 2020



Propiedades de cerradura

Lenguaje Libres del Contexto

La clase de los lenguajes libres del contexto es cerrada bajo las siguientes operaciones:

- Unión: si L_1, L_2 son lenguajes libres del contexto entonces $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje libre del contexto.
- Concatenación: si L_1, L_2 son lenguajes libres del contexto entonces $L_1 L_2$ es un lenguaje libre del contexto.
- Estrella de Kleene: si L_1 es un lenguaje libre del contexto entonces L_1^* es un lenguaje libre del contexto.



Cerradura bajo la unión

Lenguajes Libres del Contexto

Si $G_1 = \langle V_1, T, S_1, P_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, T, S_2, P_2 \rangle$ son GLC con $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$ entonces $L_1 \cup L_2 = L(G)$ donde G es la gramática

$$G = \langle V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T, S, P \rangle$$

y P está dado por $P_1 \cup P_2$ mas las producciones:

$$S \rightarrow S_1, \quad S \rightarrow S_2$$



Cerradura bajo la concatenación

Lenguajes Libres del Contexto

Si $G_1 = \langle V_1, T, S_1, P_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, T, S_2, P_2 \rangle$ son GLC con $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$ entonces $L_1 L_2 = L(G)$ donde G es la gramática

$$G = \langle V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T, S, P \rangle$$

y P está dado por $P_1 \cup P_2$ mas la producción:

$$S \rightarrow S_1 S_2$$



Cerradura bajo la estrella de Kleene

Lenguajes Libres del Contexto

Si $G_1 = \langle V_1, T, S_1, P_1 \rangle$ es una GLC con $L_1 = L(G_1)$ entonces $L_1^* = L(G)$ donde G es la gramática

$$G = \langle V_1 \cup \{S\}, T, S, P \rangle$$

y P está dado por P_1 mas las producciones:

$$S \rightarrow S_1 S_1 \quad S \rightarrow \varepsilon$$



Propiedades de cerradura inválidas

Lenguajes libres del contexto

En general las siguientes propiedades no son válidas para lenguajes libres del contexto.

- Cerradura bajo la intersección.
- Cerradura bajo el complemento.
- Cerradura bajo la diferencia.



Propiedades de cerradura inválidas

Intersección

- La intersección de dos LIC puede ser un lenguaje que no es libre del contexto.
- $L_1 = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\}$ es libre del contexto:

$$S \rightarrow AB, A \rightarrow aAb \mid ab, B \rightarrow cC \mid c$$

- $L_2 = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\}$ es libre del contexto:

$$S \rightarrow AB, A \rightarrow aA \mid a, B \rightarrow bBc \mid bc$$

- $L_1 \cap L_2 = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ no es independiente del contexto.



Propiedades de cerradura inválidas

Complemento y diferencia

- Si el complemento de un LLC L , \bar{L} fuera también libre del contexto entonces la intersección también lo sería pues

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

- Si la diferencia fuera un LLC, entonces también lo sería el complemento pues

$$\bar{L} = \Sigma^* - L$$



Introducción

Normalización de gramáticas

- La normalización consiste en transformar todas las producciones de una gramática de manera que tengan cierta forma sintáctica en particular.
- La normalización de gramáticas libres de contexto es útil para homogeneizar la forma de las producciones así como para optimizar los procesos de derivación de cadenas.
- Con las formas normales se facilita la solución al problema de la pertenencia.



Problema de la pertenencia

Normalización de gramáticas

- Dada una gramática G y una palabra u , ¿Se cumple $u \in L(G)$? Es decir, pertenece u al lenguaje generado por G .
- Si la palabra u es generada por G la construcción de un árbol de derivación terminará eventualmente.
- En caso contrario **no** podemos saber cuando parar en la construcción del árbol.



VARIABLES INÚTILES

Definición

- Una variable A es **accesible** o **alcanzable** si existen $u, v \in (V \cup T)^*$ tales que $S \rightarrow^* uAv$. Obsérvese que según esta definición S es alcanzable.
- Una variable A es **productiva** o **terminable** si existe $w \in T^*$ tal que $A \rightarrow^* w$. En particular si $A \rightarrow \varepsilon$ es una producción entonces A es productiva.
- Una variable A es **inútil** si no es alcanzable o no es productiva.



Algoritmo para hallar variables productivas

Transformaciones en GLC

$$\text{Prod} := \{A \in V \mid A \rightarrow w \in P, w \in T^*\}$$

repetir

$$\text{Prod} := \text{Prod} \cup \{A \in V \mid A \rightarrow w, w \in (T \cup \text{Prod})^*\}$$

hasta que no se añaden nuevas variables a *Prod*.



Ejemplo

Variables productivas

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ACD \mid bBd \mid ab \\ A &\rightarrow aB \mid aA \mid C \\ B &\rightarrow aDS \mid aB \\ C &\rightarrow aCS \mid CB \mid CC \\ D &\rightarrow bD \mid ba \\ E &\rightarrow AB \mid aDb \end{aligned}$$

$$Prod = \{S, D, B, E, A\}$$



Ejemplo

Eliminación de variables improductivas

C es la única variable improductiva, se elimina junto con todas las reglas donde figure:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow bBd \mid ab \\ A &\rightarrow aB \mid aA \\ B &\rightarrow aDS \mid aB \\ D &\rightarrow bD \mid ba \\ E &\rightarrow AB \mid aDb \end{aligned}$$



Algoritmo para hallar variables accesibles

Transformaciones en GLC

$$Acc := \{S\}$$

repetir

$$Acc := Acc \cup \{A \in V \mid \exists B \rightarrow uAv \in P, B \in Acc, u, v \in (V \cup T)^*\}$$

hasta que no se añaden nuevas variables a Acc .



Ejemplo

Variables accesibles

$$\begin{array}{l} S \rightarrow aS \mid AaB \mid ACS \\ A \rightarrow aS \mid AaB \mid AC \\ B \rightarrow bB \mid DB \mid BB \\ C \rightarrow aDa \mid ABD \mid ab \\ D \rightarrow aD \mid DD \mid ab \\ E \rightarrow FF \mid aa \\ F \rightarrow aE \mid EF \end{array}$$

$$Acc = \{S, A, B, C, D\}$$



Ejemplo

Eliminación de variables inaccesibles

E, F son variables inaccesibles, se eliminan junto con todas las reglas donde figuren:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid AaB \mid ACS \\ A &\rightarrow aS \mid AaB \mid AC \\ B &\rightarrow bB \mid DB \mid BB \\ C &\rightarrow aDa \mid ABD \mid ab \\ D &\rightarrow aD \mid DD \mid ab \end{aligned}$$



Eliminación de variables inútiles

Transformaciones en GLC

Para eliminar variables inútiles se aplican los dos algoritmos anteriores
en el siguiente orden:

- Eliminar variables no productivas.
- Eliminar variables no accesibles.



Eliminación de variables inútiles

Importancia del orden de los algoritmos

Si se aplican los algoritmos en orden inverso el resultado puede ser una gramática que aún contenga variable inútiles.

$$S \rightarrow a \mid AB, \quad A \rightarrow aA \mid \varepsilon$$

Al eliminar primero las variables no accesibles se obtiene la misma gramática, al ser todas las variables accesibles. Posteriormente al eliminar variables improductivas resulta

$$S \rightarrow a, \quad A \rightarrow aA \mid \varepsilon$$

y claramente A es inútil por ser inaccesible.



Eliminación de ε -producciones

Transformaciones en GLC

- Una producción de la forma $A \rightarrow \varepsilon$ es una ε -producción
- Una variable A se llama **anulable** si $A \rightarrow^* \varepsilon$.



Algoritmo para hallar variables anulables

Transformaciones en GLC

$$Anul := \{A \in V \mid A \rightarrow \varepsilon \in P\}$$

repetir

$$Anul := Anul \cup \{A \in V \mid \exists \ A \rightarrow w \in P, \ w \in Anul^*\}$$

hasta que no se añaden nuevas variables a $Anul$.



Eliminación de ε -producciones

Transformaciones en GLC

- Eliminar todas las ε -producciones.
- Para cada producción de la forma $A \rightarrow w_1 \dots w_n$ agregar las producciones $A \rightarrow v_1 \dots v_n$ donde:
 - ▶ $v_i = w_i$ si $w_i \notin Anul$.
 - ▶ $v_i = w_i$ ó $v_i = \varepsilon$ si $w_i \in Anul$.
 - ▶ Verificando que no se anulen todos los v_i al mismo tiempo.



Ejemplo

Eliminación de ε -producciones

$$\begin{aligned}S &\rightarrow AB \mid ACA \mid ab \\A &\rightarrow aAa \mid B \mid CD \\B &\rightarrow bB \mid bA \\C &\rightarrow cC \mid \varepsilon \\D &\rightarrow aDc \mid CC \mid ABb\end{aligned}$$

$$Anul = \{C, D, A, S\}$$



Ejemplo

Eliminación de ε -producciones

Al eliminar la producción $C \rightarrow \varepsilon$ se obtiene la siguiente gramática:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid ACA \mid ab \mid B \mid CA \mid AA \mid AC \mid A \mid C \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow aAa \mid B \mid CD \mid aa \mid C \mid D \\ B &\rightarrow bB \mid bA \mid b \\ C &\rightarrow cC \mid c \\ D &\rightarrow aDc \mid CC \mid ABb \mid ac \mid C \mid Bb \end{aligned}$$



Acerca de la palabra vacía

Transformaciones en GLC

- Si originalmente se tenía $\varepsilon \in L(G)$ la eliminación de ε producciones genera una gramática que no genera a ε .
- Es posible saber si se pierde la palabra vacía al eliminar ε -producciones verificando si $S \in Anul.$
- Si se quiere recuperar a ε debe agregarse un nuevo símbolo inicial S' y las producciones $S' \rightarrow S$ y $S' \rightarrow \varepsilon$.
- $S' \rightarrow \varepsilon$ es la única ε -producción permitida.



Eliminación de producciones unitarias

Transformaciones en GLC

- Una producción de la forma $A \rightarrow B$ donde A y B son ambas variables se llama **producción unitaria**.

- El **conjunto unitario** de A se define como sigue:

$$\text{Unit}(A) = \{B \in V \mid A \xrightarrow{*} B \text{ usando sólo prod. unitarias}\}$$

- Por definición se tiene $A \in \text{Unit}(A)$.



Algoritmo para hallar el conjunto $Unit(A)$

Transformaciones en GLC

$Unit(A) := \{A\}$

repetir

$Unit(A) := Unit(A) \cup \{B \in V \mid \exists C \rightarrow B, C \in Unit(A)\}$

hasta que no se añaden nuevas variables a $Unit(A)$.



Eliminación de producciones unitarias

Transformaciones en GLC

- Para cada $B \in Unit(A)$ y cada producción $A \rightarrow w$ agregar la producción

$$B \rightarrow w$$

- Eliminar todas las producciones unitarias



Ejemplo

Eliminación de producciones unitarias

$$\begin{aligned}S &\rightarrow AS \mid AA \mid BA \mid \varepsilon \\A &\rightarrow aA \mid a \\B &\rightarrow bB \mid bC \mid C \\C &\rightarrow aA \mid bA \mid B \mid ab\end{aligned}$$

Los conjuntos unitarios para cada variable son:

$$Unit(S) = \{S\} \quad Unit(A) = \{A\}$$

$$Unit(B) = \{B, C\} \quad Unit(C) = \{C, B\}$$



Ejemplo

Eliminación de producciones unitarias

La gramática obtenida al eliminar producciones unitarias es:

$$\begin{aligned}S &\rightarrow AS \mid AA \mid BA \mid \varepsilon \\A &\rightarrow aA \mid a \\B &\rightarrow bB \mid bC \mid aA \mid bA \mid ab \\C &\rightarrow aA \mid bA \mid ab \mid bB \mid bC\end{aligned}$$



Problema de la pertenencia

Normalización de gramáticas

- Dada una gramática G sin ε -producciones ni producciones unitarias y una palabra u de longitud n , ¿Se cumple $u \in L(G)$? Es decir, pertenece u al lenguaje generado por G .
- Si la palabra u es generada por G la construcción de un árbol de derivación terminará eventualmente.
- En caso contrario basta con construir el árbol hasta el nivel $2n - 1$ para concluir que $u \notin L(G)$.
- En cada paso se obtiene un nuevo terminal (a lo mas n pasos) o se aumenta la longitud de la palabra en 1 (a lo mas $n - 1$ pasos)



Forma Normal de Chomsky

Definición

Una GLC G está en forma normal de Chomsky (FNC) si:

- G no contiene variables inútiles.
- G no contiene producciones unitarias ni ε -producciones (salvo $S \rightarrow \varepsilon$)
- Todas las producciones son de la forma:

$$A \rightarrow BC \text{ ó } A \rightarrow a$$

donde $B, C \in V$, $a \in T$



Transformación a forma normal de Chomsky

Transformaciones en GLC

Cualquier GLC es equivalente a una gramática en FNC, lo cual se logra como sigue:

- Eliminar las variables inútiles.
- Eliminar las ε -producciones (salvo $S \rightarrow \varepsilon$)
- Eliminar producciones unitarias.
- Las producciones restantes son todas de la forma $A \rightarrow a$ con $a \in T$ ó $A \rightarrow w$ con $|w| \geq 2$



Eliminación de producciones $A \rightarrow w, |w| \geq 2$

Forma Normal de Chomsky

- Hacer lo siguiente para cada producción P de la forma $A \rightarrow \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ con $\alpha_i \in V \cup T, n \geq 2$ (si $n = 2$, al menos uno de α_1, α_2 debe ser terminal, pues si no la producción ya es válida para FNC)
 - ▶ Agregar la producción $T_a \rightarrow a$, donde T_a es una nueva variable.
 - ▶ Cambiar α_i por T_a en la producción P
- Si $\alpha_i \in T$, digamos $\alpha_i = a$, entonces
 - ▶ Agregar la producción $T_a \rightarrow a$, donde T_a es una nueva variable.
 - ▶ Cambiar α_i por T_a en la producción P
- Para cada producción P de la forma $A \rightarrow B_1B_2\dots B_m$ con $B_i \in V, m \geq 3$
 - ▶ Agregar $(m - 2)$ nuevas variables D_1, \dots, D_{m-2} y reemplazar a P con las siguientes producciones:

$$A \rightarrow B_1D_1, D_1 \rightarrow B_2D_2, \dots, D_{m-2} \rightarrow B_{m-1}B_m$$



Ejemplo

Simulación de producciones $A \rightarrow w_1 w_2 \dots w_n, n \geq 2$

La producción $A \rightarrow abBaC$ se simula con producciones simples y binarias como sigue:

- Agregamos las nuevas variables T_a , T_b y las producciones

$$A \rightarrow T_a T_b B T_a C, \quad T_a \rightarrow a, \quad T_b \rightarrow b$$

- Para simular la producción $A \rightarrow T_a T_b B T_a C$ agregamos nuevas variables D_1, D_2, D_3 y las producciones binarias necesarias obteniendo finalmente:

$$A \rightarrow T_a D_1, \quad D_1 \rightarrow T_b D_2, \quad D_2 \rightarrow B D_3, \quad D_3 \rightarrow T_a C$$

$$T_a \rightarrow a, \quad T_b \rightarrow b$$



Forma normal de Chomsky

Ejemplo

Transformar la siguiente gramática a FNC:

$$S \rightarrow AB \mid aBC \mid SBS$$

$$A \rightarrow aA \mid C$$

$$B \rightarrow bbB \mid b$$

$$C \rightarrow cC \mid \varepsilon$$



Forma normal de Chomsky

Ejemplo

La gramática equivalente en FNC es:

$$S \rightarrow AB \mid T_a D_1 \mid SD_2 \mid T_a B \mid T_b D_3 \mid b$$

$$A \rightarrow T_a A \mid T_c C \mid a \mid c$$

$$B \rightarrow T_b D_3 \mid b$$

$$C \rightarrow T_c C \mid c$$

$$D_1 \rightarrow BC$$

$$D_2 \rightarrow BS$$

$$D_3 \rightarrow T_b B$$

$$T_a \rightarrow a$$

$$T_b \rightarrow b$$

$$T_c \rightarrow c$$



Forma Normal de Greibach (FNG)

Definición

Una GLC G está en forma normal de Greibach (FNG) si:

- La variable inicial S no es recursiva, es decir, no figura en el lado derecho de las producciones.
- G no tiene variables inútiles ni ε -producciones.
- Todas las producciones son de la forma $A \rightarrow a\alpha$, con $\alpha \in V^*$.



Transformación a forma normal de Greibach

Transformaciones en GLC

- Cualquier GLC es equivalente a una gramática en FNG.
- El proceso requiere que la gramática esté en Forma Normal de Chomsky.
- Con una gramática en forma normal de Greibach se simplifica el problema de la pertenencia.



Problema de la pertenencia

Normalización de gramáticas

- Dada una gramática G en forma normal de Greibach y una palabra u de longitud n , ¿Se cumple $u \in L(G)$? Es decir, pertenece u al lenguaje generado por G .
- Si u es generada por G la construcción de un árbol de derivación terminará eventualmente.
- En caso contrario basta con construir el árbol hasta el nivel n para concluir que $u \notin L(G)$.
- En cada paso se obtiene un nuevo terminal (a lo mas n pasos) y por lo general hay una menor ramificación.

