Autómatas: casando cadenas con expresiones regulares

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Liliana Reyes [1]   Rafael Reyes [2]

[1] Universidad Autónoma de la Ciudad de México

[2] Facultad de Ciencias UNAM

14 de noviembre de 2013

UACM
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

Derivadas de Lenguajes Regulares

Introducción

- ¿Alguna vez has visto algo como esto?
  [a-zA-Z0-9_-] @[a-zA-Z0-9_-]\.[a-zA-Z](\.[a-zA-Z])

$$/ * \neg(\Sigma^* * /\Sigma^*) * /$$

- La derivada de un conjunto de cadenas S respecto a un símbolo a es el conjunto generado por la eliminación del símbolo precedente a de las cadenas S
- Las derivadas de un lenguaje se utilizan principalmente para poder determinar si una palabra pertenece o no a un lenguaje
- Proporciona una útil herramienta para los analizadores léxicos
- Un método diferente y sencillo para la conversión de una expresión regular a un *autómata finito*

Alfabeto

Preliminares

Definición

Un *alfabeto* Σ es un conjunto finito y ordenado de símbolos a partir del cual se construyen palabras

Ejemplo

$$\Sigma = \{a, b, c, d\} \qquad \text{palabra} \quad aabbbccccddddd$$

Ejemplo

$$\Sigma = \{0, 1\} \qquad \text{palabra} \quad 10101010101$$

Ejemplo

$$\Sigma = \{a, e, i, o, u\} \qquad \text{palabra} \quad auiaue$$

Lenguaje formal

Preliminares

Definición

Un *lenguaje formal*, es el conjunto de palabras u, v, w de longitud finita formadas a partir de un alfabeto finito Σ

Ejemplo

El lenguaje de todas la palabras sobre el alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ tales que las palabras sólo constan de ceros y un uno al final.

$$\{01, 001, 0001, 00001, 000001, 0000001, \ldots\}$$

Ejemplo

El conjunto de palabras sobre el alfabeto $\Sigma = \{a\}$ tales que, las palabras tienen longitud par

$$\{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaaa, aaaaaaaa, aaaaaaaaaa, \ldots\}$$

Autómata

Preliminares

Definición

Un autómata finito es un modelo matemático de una máquina que acepta cadenas de un lenguaje definido sobre un alfabeto Σ.

Formalmente un autómata finito se define como una 5–tupla de la forma

$$FA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

donde

- Q: conjunto finito de estados
- Σ: alfabeto o conjunto finito de símbolos de entrada
- δ: función de transición de estados, que se define como:

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

- q_0: estado inicial; $q_0 \in Q$
- F: conjunto de estados finales o estados de aceptación; $F \subseteq Q$

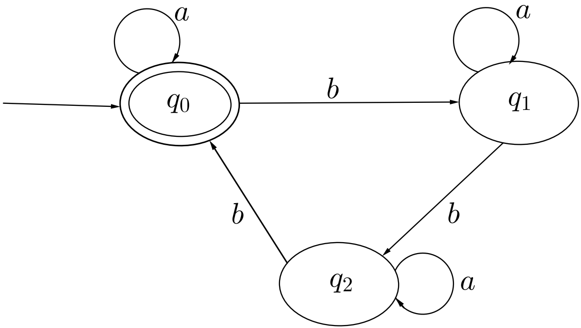
Autómata

Preliminares

Ejemplo

Este autómata reconoce cadenas de a's y b's, tales que el número de b's es múltiplo de tres.
Donde: $FA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
Estado inicial q_0
Estado final q_0
$\delta(q_0, a) = q_0$
$\delta(q_0, b) = q_1$
$\delta(q_1, a) = q_1$
$\delta(q_1, b) = q_2$
$\delta(q_2, a) = q_2$
$\delta(q_2, b) = q_0$



Lenguaje Regular

Preliminares

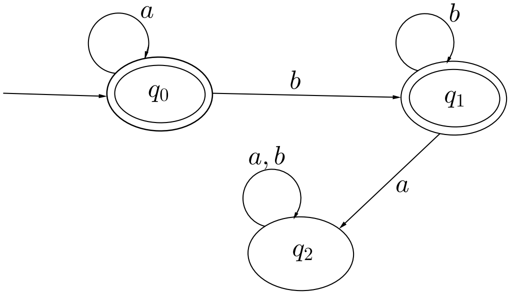
Definición

Un lenguaje $\mathcal{L}$ es regular si y sólo si, existe un autómata finito que lo acepta.

Ejemplo

$$\mathcal{L} = \{a^i b^j \mid i \geq 0, j \geq 0\}$$

Esto es suponiendo que el alfabeto es $\Sigma = \{a, b\}$



Expresiones Regulares

Preliminares

Definición

Dado un alfabeto Σ, las *expresiones regulares* sobre Σ están formadas por las siguientes reglas recursivas:

- $\emptyset$
- ε
- a, $a \in \Sigma$

Si r y s son expresiones regulares,

- $r + s$
- $r \cdot s$
- r^*

Éstas y sólo estas son expresiones regulares

Ejemplo

$$((a+b)^* c(a+b)^* c)^* (a+b)^*$$

Expresiones regulares

Lenguaje asociado

Definición

El *lenguaje asociado a una expresión regular* r, es el conjunto de cadenas $\mathcal{L}[\![r]\!] \subseteq \Sigma^*$ generado por las siguientes reglas

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\![\varnothing]\!] &= \varnothing \\
\mathcal{L}[\![\varepsilon]\!] &= \{\varepsilon\} \\
\mathcal{L}[\![a]\!] &= \{a\} \\
\mathcal{L}[\![r \cdot s]\!] &= \{u \cdot v | u \in \mathcal{L}[\![r]\!] \text{ y } v \in L[\![s]\!]\} \\
\mathcal{L}[\![r + s]\!] &= \mathcal{L}[\![r]\!] \cup \mathcal{L}[\![s]\!] \\
\mathcal{L}[\![r^*]\!] &= \{\varepsilon\} \cup \mathcal{L}[\![r \cdot r^*]\!]
\end{aligned}
$$

Teorema

$\mathcal{L}$ es regular si y sólo si existe r expresión regular tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\![r]\!]$

Derivadas

Preliminares

Definición

La *derivada de un lenguaje* $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ con respecto a una cadena $u \in \Sigma^*$ se define como

$$\partial_u \mathcal{L} = \{v | u \cdot v \in \mathcal{L}\}$$

Ejemplo

$$\mathcal{L} = \{ab, abb, abbb, abbbb, abbbbb, abbbbbb, \ldots\} = \mathcal{L}[\![(ab) \cdot b^*]\!]$$

$$\partial_{ab} \mathcal{L} = \{\varepsilon, b, bb, bbb, bbbb, bbbbb, \ldots\} = \mathcal{L}[\![b^*]\!]$$

Teorema

Si $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ es regular, entonces $\partial_u \mathcal{L}$ también es regular.

Derivadas

Problema

Problema

Dada una expresión regular r y una cadena $u \in \Sigma^*$, determinar si $u \in L[\![r]\!]$.

Resolver el problema es equivalente a resolver:

$$u \in L[\![r]\!] \Leftrightarrow \varepsilon \in L[\![\partial_u r]\!]$$

Lo cual sucede si y sólo si

$$\nu(\partial_u r) = \varepsilon$$

Derivadas

Decimos que una expresión regular r es anulable, si el lenguaje definido contiene a la cadena vacía, esto es si $\varepsilon \in \mathcal{L}[\![r]\!]$ la función $\nu : RE \to RE$ tiene la siguiente propiedad:

$$\nu(r) = \begin{cases} \varepsilon & \text{Si } r \text{ es anulable} \\ \varnothing & \text{otro caso} \end{cases}$$

Y está definida como sigue

$$\begin{aligned} \nu(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \nu(\varnothing) &= \varnothing \\ \nu(a) &= \varnothing \\ \nu(r \cdot s) &= \nu(r) \cap \nu(s) \\ \nu(r + s) &= \nu(r) + \nu(s) \\ \nu(r^*) &= \varepsilon \end{aligned}$$

Derivadas

Problema

Usando lo anterior y la definición de ∂_u, generamos un algoritmo que verifique si $u \in L[\![r]\!]$.

Definición

Expresandolo en términos de la relación $r \sim u$ (u caza con r).

$$r \sim \varepsilon \Leftrightarrow \nu(r) = \varepsilon$$

$$r \sim a \cdot \omega \Leftrightarrow \partial_a r \sim \omega$$

Teorema

$$r \sim u \Leftrightarrow u \in L[\![r]\!]$$

Derivadas

Expresiones regulares

Reglas de Brzozowski para expresiones regulares con respecto a un símbolo $a \in \Sigma^*$.

$$
\begin{aligned}
\partial_a \varepsilon &= \emptyset \\
\partial_a a &= \varepsilon \\
\partial_a b &= \emptyset \text{ si } b \neq a \\
\partial_a \emptyset &= \emptyset \\
\partial_a (r \cdot s) &= (\partial_a r) \cdot s + \nu(r) \cdot \partial_a s \\
\partial_a (r + s) &= \partial_a r + \partial_a s \\
\partial_a (r^*) &= \partial_a r \cdot r^*
\end{aligned}
$$

La reglas se puede extender a cadenas como:

$$
\begin{aligned}
\partial_\varepsilon r &= r \\
\partial_{u \cdot a} r &= \partial_a (\partial_u r)
\end{aligned}
$$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$ $\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$a \cdot b^* \sim aba$ $\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$

Derivadas

Ejemplos

$¿abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	$¿aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow b^* \sim ba$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \ \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim a$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim a$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim a$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim a$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim a$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim a$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow b^* \sim b$	$\Leftrightarrow b^* \sim a$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim a$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow b^* \sim b$	$\Leftrightarrow b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow \partial_a b^* \sim \varepsilon$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \ \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim a$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow b^* \sim b$	$\Leftrightarrow b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow \partial_a b^* \sim \varepsilon$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow (\partial_a b) \cdot b^* \sim \varepsilon$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim a$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow b^* \sim b$	$\Leftrightarrow b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow \partial_a b^* \sim \varepsilon$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow (\partial_a b) \cdot b^* \sim \varepsilon$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow \varnothing \cdot b^* \sim \varepsilon$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim a$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow b^* \sim b$	$\Leftrightarrow b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow \partial_a b^* \sim \varepsilon$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow (\partial_a b) \cdot b^* \sim \varepsilon$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow \varnothing \cdot b^* \sim \varepsilon$
$\Leftrightarrow b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow \varnothing \sim \varepsilon$

Derivadas

Ejemplos

¿$abb \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?	¿$aba \in \mathcal{L}[\![a \cdot b^*]\!]$?
$a \cdot b^* \sim abb$	$a \cdot b^* \sim aba$
$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow \partial_a(a \cdot b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \nu(a) \cdot \partial_a(b^*) \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* + \varnothing \cdot \varnothing \sim ba$
$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow (\partial_a a) \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow b^* \sim bb$	$\Leftrightarrow b^* \sim ba$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim a$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim b$	$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim a$
$\Leftrightarrow b^* \sim b$	$\Leftrightarrow b^* \sim a$
$\Leftrightarrow \partial_b b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow \partial_a b^* \sim \varepsilon$
$\Leftrightarrow (\partial_b b) \cdot b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow (\partial_a b) \cdot b^* \sim \varepsilon$
$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow \varnothing \cdot b^* \sim \varepsilon$
$\Leftrightarrow b^* \sim \varepsilon$	$\Leftrightarrow \varnothing \sim \varepsilon$
$\Leftrightarrow \nu(b^*) = \varepsilon$ ✓	$\Leftrightarrow \nu(\varnothing) = \varepsilon$ ✗

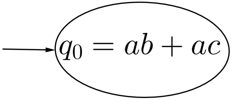
Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$

1. $q_0 = \partial_\varepsilon(a \cdot b + a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$



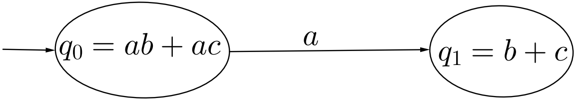
Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

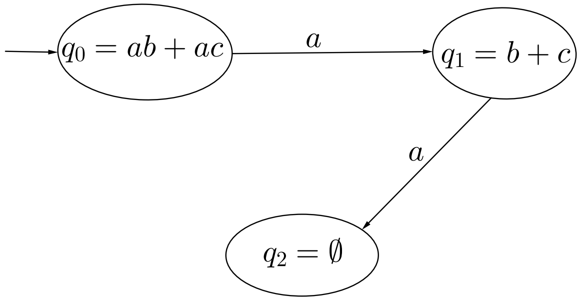
2. $\partial_a q_0 = \partial_a(a \cdot b + a \cdot c) = b + c$, el cual es un estado nuevo, lo llamamos q_1



Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

3. $\partial_a q_1 = \partial_a(b+c) = \varnothing$, el cual es un nuevo estado y lo llamaremos q_2



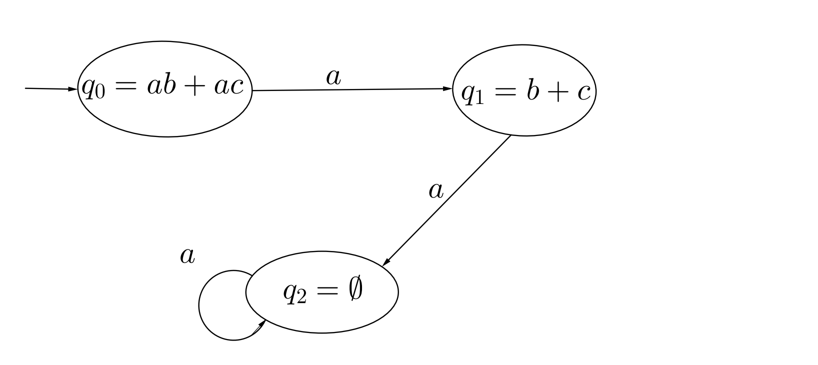
Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

4. $\partial_a q_2 = \partial_a(\emptyset) = \emptyset = q_2$, pues el estado ya existe



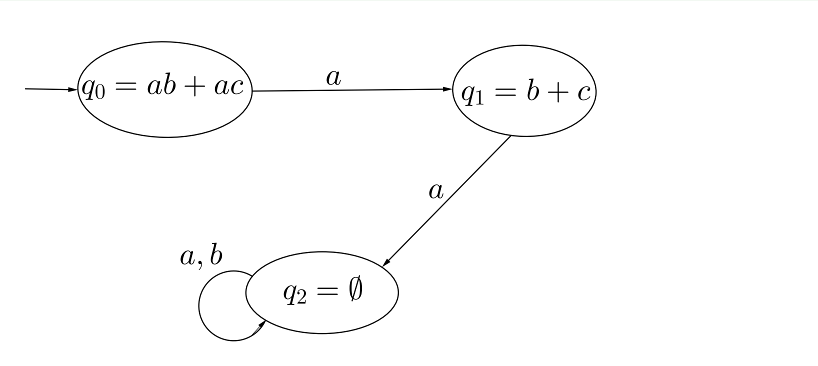
Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

5. $\partial_b q_2 = \partial_b(\emptyset) = \emptyset = q_2$



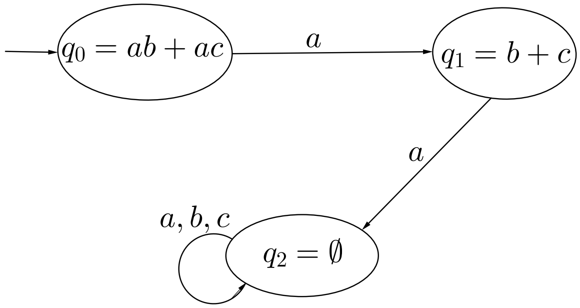
Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

6. $\partial_c q_2 = \partial_c(\emptyset) = \emptyset = q_2$



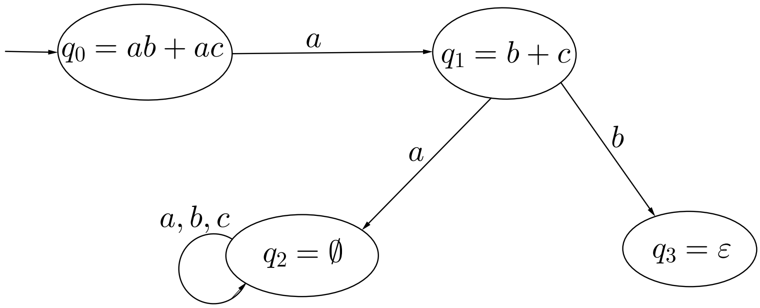
Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

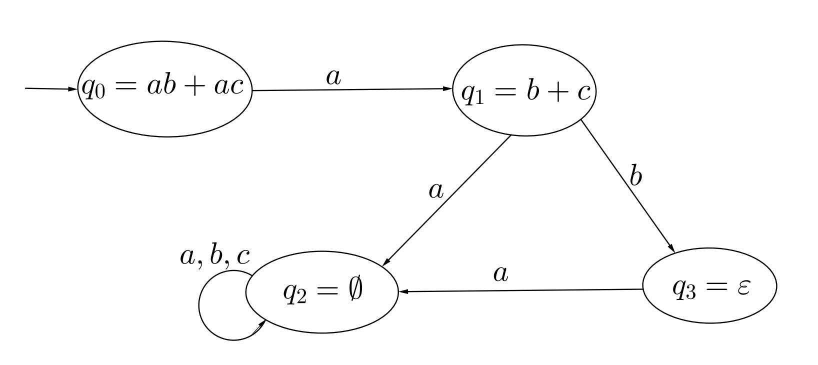
7. $\partial_b q_1 = \partial_b(b + c) = (\varepsilon + \varnothing) \equiv \varepsilon$, es un nuevo estado llamado q_3



Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

8. $\partial_a q_3 = \partial_a(\varepsilon) = \emptyset = q_2$



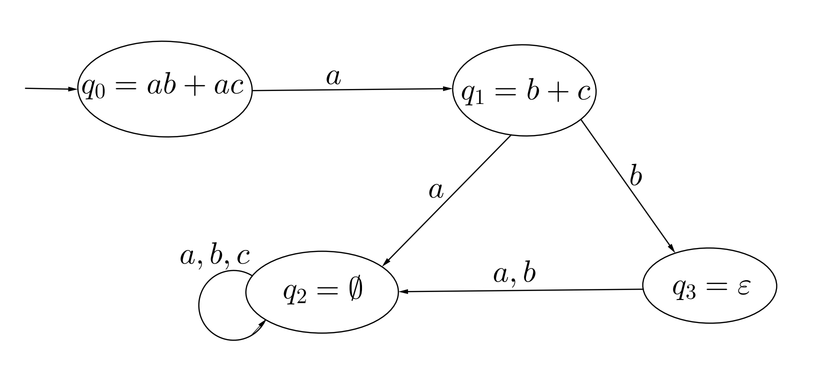
Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

9. $\partial_b q_3 = \partial_b(\varepsilon) = \varnothing = q_2$



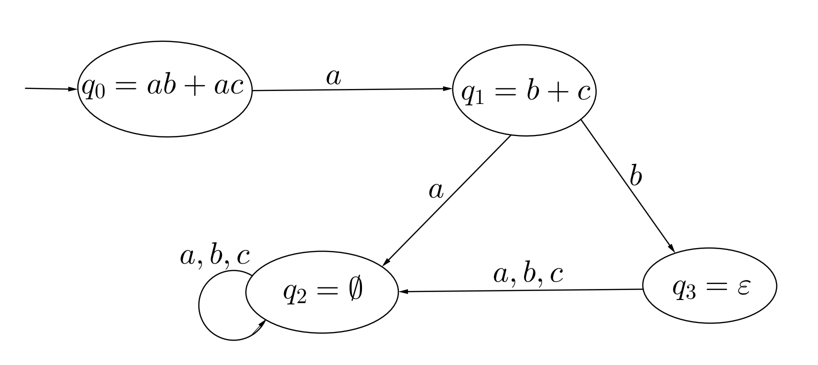
Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

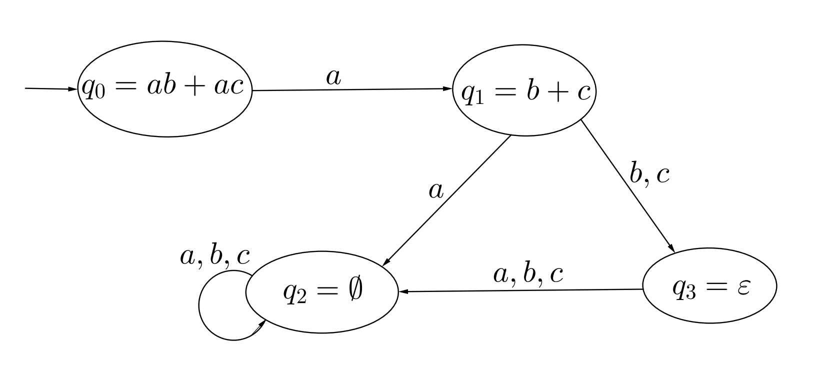
10. $\partial_c q_3 = \partial_c(\varepsilon) = \emptyset = q_2$



Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

11. $\partial_c q_1 = \partial_c(b + c) = (\emptyset + \varepsilon) \equiv \varepsilon = q_3$



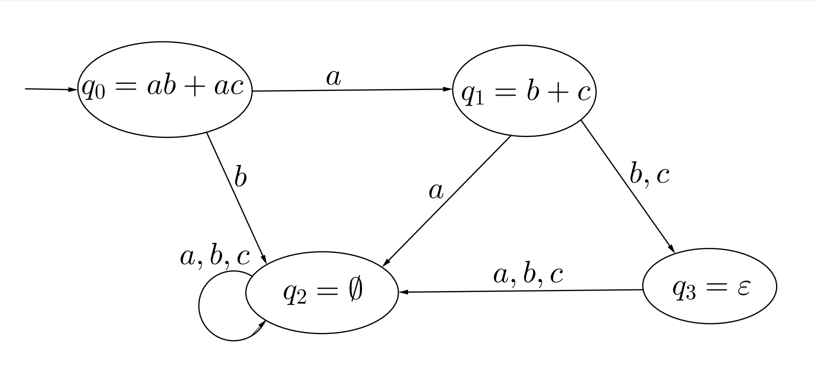
Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

12. $\partial_b q_0 = \partial_b(a \cdot b + a \cdot c) = \emptyset = q_2$



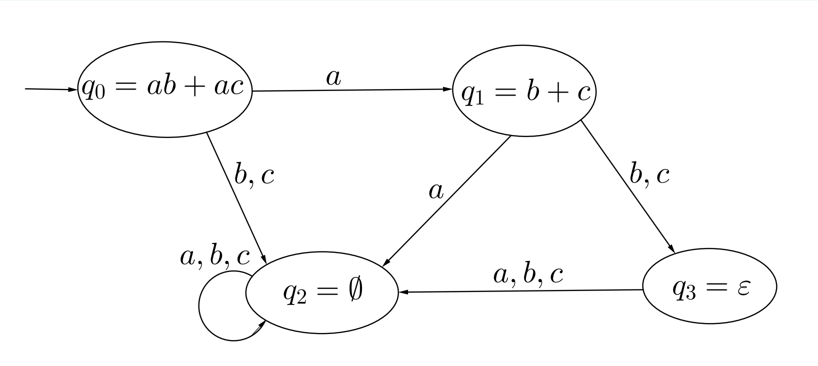
Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$

13. $\partial_c q_0 = \partial_c(a \cdot b + a \cdot c) = \varnothing = q_2$

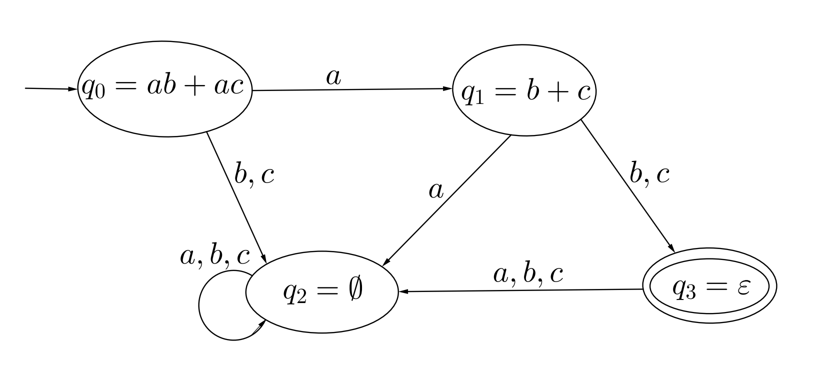


Algoritmo

Construcción de DFA

Ejemplo

Consideremos la expresión regular $r = a \cdot b + a \cdot c$ sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$
Los estados finales son todos aquellos estados que sean anulables, en este caso únicamente es anulable $\nu(q_3) = \varepsilon$



Algoritmo

fun goto $q\ (c,(Q,\delta)) =$
    let $q_c = \partial_c q$
    in
        if $\exists q' \in Q$ tal que $q' \equiv q_c$
            then $(Q, \delta \cup \{(q,c) \to q'\})$
        else
            let $Q' = Q \cup \{q_c\}$
            let $\delta' = \delta \cup \{(q,c) \to q_c\}$
            in explora (Q', δ', q_c)

and explora $(Q,\delta,q) =$ fold (goto q) $(Q,\delta)\ \Sigma$

fun mkDFA $r =$
    let $q_0 = \partial_\varepsilon r$
    let $(Q,\delta) =$ explora $(\{q_0\},\{\},q_0)$
    let $F = \{q | q \in Q$ y $\nu(q) = \varepsilon\}$
    in (Q,Σ,q_0,F,δ)

Conclusiones

- Determinamos si una palabra u pertenece o no a un lenguaje $\mathcal{L}$
- El método genera un autómata finito sin transiciones epsilon
- El autómata finito generado es un autómata determinista
- Se puede generalizar a expresiones regulares extendidas, que son los operadores lógicos

Desventajas

- Dificultad al comparar las expresiones regulares
- Gran tiempo de procesamiento