

# Autómatas y Lenguajes Formales 2016-1

Maestría en Ciencia e Ingeniería de la Computación UNAM

Tema 3: Autómatas Finitos Deterministas II, Autómatas  
No-Deterministas

Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea

`favio@ciencias.unam.mx`

Facultad de Ciencias UNAM

29 de enero de 2020



# Métodos de Diseño

## AFD

- Problema de diseño: Dado un lenguaje  $L \subseteq \Sigma^*$  diseñar un AFD  $M$  que acepte exactamente a  $L$ , es decir, tal que  $L(M) = L$ .
- El ensayo y error es inconveniente, las posibilidades son demasiadas.
- El autómata debe ser **completo**, es decir, debe aceptar todas las palabras de  $L$ , en otras palabras es necesario que  $L \subseteq L(M)$ .
- El autómata debe ser **correcto**, es decir, debe aceptar sólo palabras de  $L$ , en otras palabras es necesario que  $L(M) \subseteq L$ .



# Métodos de Diseño

## AFD

- Se debe determinar explícitamente qué condición “recuerda” cada estado.
- La única memoria que tiene un AFD son los estados.
- Primero se propone un conjunto de estados que “recuerden” condiciones importantes.
- Después se proponen las transiciones para cambiar de un estado a otro.
- Finalmente se determina que estados son finales, observando que condiciones de estado corresponden con la definición del lenguaje aceptado.
- Ejemplo:  $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ tiene un número par de } 0 \text{ y } 1\}$



# Diseño por conjuntos de estados

## AFD

- Muchas veces es preferible generalizar condiciones para definir grupos de estados en lugar de dar condiciones estado por estado.
- De esta forma se disminuye la posibilidad de error y se facilita la solución de un problema complejo.
- Las condiciones para grupos de estados deben ser:
  - ▶ Excluyentes: un grupo de estados debe cumplir únicamente una condición.
  - ▶ Comprensivas: los grupos cumplen todos los casos posibles.



# Diseño por conjuntos de estados

## Ejemplo

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ no contiene } 11 \text{ pero sí } 00\}$$

Los grupos de estados se diseñan según las condiciones:

- La palabra consumida no contiene ni 00 ni 11.
- Contiene 00 pero no 11.
- Contiene 11.



# Diseño por conjuntos de estados

## Ejemplo

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ no contiene } 11 \text{ pero sí } 00\}$$

Los grupos de estados se diseñan según las condiciones:

- La palabra consumida no contiene ni 00 ni 11.
  - ▶ No se han leído símbolos.
  - ▶ Se leyó un 0.
  - ▶ Se leyó un 1.
- Contiene 00 pero no 11.
  - ▶ Se leyó otro 0.
  - ▶ Se leyó un 1.
- Contiene 11.



# Diseño por complemento

## AFD

- Dado un lenguaje  $L$  a veces es más fácil diseñar un autómata para el complemento  $\bar{L} = \Sigma^* - L$ .
- Si  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  reconoce a  $L$ , es decir  $L(M) = L$  entonces
- $M^c = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F \rangle$  reconoce a  $\Sigma^* - L$ , es decir  $L(M^c) = \bar{L}$
- Este método sólo funciona para autómatas deterministas.
- Ejemplo: Diseñar un AFD para  
 $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ no contiene } abaab\}$



# Funcionamiento de un autómata

## Informal

- $M$  reconoce o acepta una cadena  $w$  si
- Se consumen todos los símbolos de  $w$  al iniciar en  $q_0$  siguiendo las transiciones de acuerdo a  $\delta$ .
- Al terminar, el estado actual de la máquina es final.
- El lenguaje aceptado es entonces:

$$L(M) := \{u \in \Sigma^* : M \text{ se detiene al procesar } u \text{ en un estado } q \in F\}.$$

- Esta definición es todavía demasiado informal.





# Función de transición extendida

 $\delta^*$ 

Sea  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un AFD. La función de transición  $\delta$  se extiende a cadenas mediante una función

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$

definida recursivamente como sigue:

$$\delta^*(q, \varepsilon) = q$$

$$\delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$$

$\delta^*$  se llama la función de transición extendida de  $M$ .

Una definición alternativa de utilidad es:

$$\delta^*(q, aw) = \delta^*(\delta(q, a), w)$$



# Función de transición extendida

 $\delta^*$ 

La función de transición  $\delta$  se extiende a cadenas mediante una función

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$

- De la definición se sigue que  $\delta^*(q, w)$  devuelve el estado en el que la máquina termina al procesar  $w$ .
- Dado que  $\delta^*$  es una extensión de  $\delta$  es usual sobrecargar la operación y escribir  $\delta$  en lugar de  $\delta^*$ .



# Función de transición extendida

## Lenguaje de aceptación

- La definición informal de lenguaje de aceptación de un autómata puede ahora formalizarse haciendo referencia a la función de transición extendida:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F\}$$

- De esta manera es posible verificar formalmente la completud y correctud del diseño de un Autómata  $M$  para un lenguaje  $L$ :
- Correctud ( $L(M) \subseteq L$ ): Si  $\delta^*(q_0, w) \in F$  entonces  $w \in L$ .
- Completud ( $L \subseteq L(M)$ ): Si  $w \in L$  entonces  $\delta^*(q_0, w) \in F$ .



# Modularización

- Algunas veces la especificación de un lenguaje  $L$  tiene una forma lógica que permite descomponerlo en lenguajes más sencillos
- De esta manera el diseño de un AFD se puede modularizar.
- Por ejemplo si  $L = L_1 \cup L_2$  basta construir autómatas para  $L_1$  y  $L_2$  y ejecutarlos en paralelo.
- Lo mismo sucede si  $L = L_1 \cap L_2$  o si  $L = L_1 - L_2$ .
- Por ejemplo
$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ acaba en } 0 \text{ y } 11 \text{ no es subcadena de } w\}$$
- se descompone como  $L = L_1 - L_2$  donde
$$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ acaba en } 0\} \text{ y}$$
$$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid 11 \text{ es subcadena de } w\}$$



# El autómata producto

## Modularización

Sean  $M_1 = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1 \rangle$  y  $M_2 = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2 \rangle$  AFD tales que  $L_1 = L(M_1)$  y  $L_2 = L(M_2)$ . El autómata producto, denotado  $M_1 \times M_2$  se define como sigue:

$$M_1 \times M_2 = \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_{01}, q_{02}), F \rangle$$

donde

- $\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$  y
- Si  $F = F_1 \times F_2$  entonces  $L(M_1 \times M_2) = L_1 \cap L_2$
- Si  $F = F_1 \times \overline{F_2}$  entonces  $L(M_1 \times M_2) = L_1 - L_2$
- Si  $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$  entonces  $L(M_1 \times M_2) = L_1 \cup L_2$



# No Determinismo

AFN

- El determinismo de un autómata, deseable desde el punto de vista teórico, puede provocar complicaciones en la práctica.
- El no-determinismo es deseable.
- Determinismo: dado un estado  $q$  y un símbolo  $a$  existe una única transición  $\delta(q, a) = p$ , es decir  $\delta$  es una función.
- No-determinismo: no hay una transición única al leer un símbolo  $a$  en un estado dado  $q$ .



# No Determinismo

AFN

- Hay más de una transición, es decir,  $\delta(q, a)$  deja de ser función.
- O bien no hay transición, es decir,  $\delta(q, a)$  no está definida ( $\delta$  se vuelve función parcial).
- Sin embargo la máquina funciona únicamente al leer un símbolo.
- Existe el no-determinismo sin lectura de símbolos.



# Autómatas Finitos No-Deterministas

## Definición

Un autómata finito **no** determinista (AFN) es una quintupla

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$$

donde

- $Q$  es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma$  es el alfabeto de entrada.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  es la función de transición.
- $q_0 \in Q$  es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$  es el conjunto de estados finales.





# Autómatas Finitos No-Deterministas

## Función de transición

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

- Obsérvese que la imagen de  $\delta$  es ahora un elemento de  $\mathcal{P}(Q)$ , es decir es un subconjunto de estados de  $Q$ .
- $\delta(q, a) = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  indica que al leer  $a$  en el estado  $q$  la máquina puede pasar a cualquiera de los estados  $q_1, \dots, q_n$ .
- Si  $\delta(q, a) = \emptyset$  entonces no hay transición posible desde  $q$  al leer  $a$ , es decir, la máquina está bloqueada.



# Función $\delta^*$

## AFN

Sea  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un AFN. La función de transición  $\delta$  se extiende a cadenas mediante una función

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

definida recursivamente como sigue:

$$\delta^*(q, \varepsilon) = q$$

$$\delta^*(q, wa) = \bigcup_{p \in \delta^*(q, w)} \delta(p, a)$$

Alternativamente:

$$\delta^*(q, aw) = \bigcup_{p \in \delta(q, a)} \delta^*(p, w)$$



# Función de transición extendida

## Lenguaje aceptado

El lenguaje de aceptación se define mediante  $\delta^*$  como sigue:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Es decir,  $w \in L(M)$  si y sólo si existe al menos un cómputo que conduce a un estado final al iniciar la máquina en  $q_0$  y  $w$ .



# Eliminación del No-determinismo

AFN  $\Leftrightarrow$  AFD

- Todo AFD es a la vez un AFN con la particularidad de que  $\delta(p, a)$  consta de un único estado.
- La idea para transformar un AFN en un AFD es considerar a cada conjunto de estados  $\delta(p, a)$  del AFN como un único estado del nuevo AFD.
- Este método se conoce como la **construcción de subconjuntos**.



# AFN $\Rightarrow$ AFD

## Construcción de subconjuntos

Dado un AFN  $M = \langle Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F \rangle$  definimos un AFD  $M^d = \langle Q^d, \Sigma^d, \delta, q_0^d, F^d \rangle$  como sigue:

- $Q^d = \mathcal{P}(Q)$ .
- $\Sigma^d = \Sigma$ .
- $\delta(S, a) = \delta_N(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_N(q, a)$
- $q_0^d = \{q_0\}$
- $F^d = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$
- Ambos autómatas son equivalentes, es decir,  $L(M) = L(M^d)$ .

